Inferencia

Estadística

(apuntes para el grado)

Inferencia

Estadística

(apuntes para el grado)

Carlos Carleos
aprovechándose del trabajo de
I. Espejo Miranda
F. Fernández Palacín
M. A. López Sánchez
M. Muñoz Márquez
A. M. Rodríguez Chía
A. Sánchez Navas
C. Valero Franco

Índice general

Índice de tablas

Inferencia Estadística
(apuntes para el grado en ingeniería)
C. E. Carleos Artime, sobre el trabajo de I. Espejo Miranda, F. Fernández Palacín, M. A. López Sánchez, M. Muñoz Márquez, A. M. Rodríguez Chía, A. Sánchez Navas, C. Valero Franco

Prólogo

1. Introducción

El libro **Inferencia Estadística. Teoría y Problemas** completa la primera entrega titulada **Estadística Descriptiva y Probabilidad (Teoría y Problemas)**, publicado por el Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz en el año 2000, cubriendo ambos tomos los contenidos de un Curso de Estadística clásica de una duración aproximada de 120 horas. En esta versión, adaptada a los grados de ingeniería de la Universidad Oviedo, se han reducido los contenidos a aproximadamente la mitad.

El manual se estructura en cinco capítulos. En el primero de ellos se introducen los conceptos relacionados con la *Inferencia Estadística* y se comentan algunos aspectos relacionados con la Teoría de Muestras. El segundo capítulo se dedica a la *Estimación Puntual*, haciéndose un recorrido por los conceptos relacionados con la estimación, propiedades de los estimadores, métodos de obtención de estimadores y distribuciones asociados al muestreo. En el tercer capítulo se estudia la *Estimación por Intervalos de Confianza*, primero desde un punto de vista intuitivo, para a continuación describir los distintos procedimientos para obtener intervalos; el capítulo dedica una buena parte de sus contenidos a obtener de forma expresa intervalos de los parámetros de poblaciones gausianas, y se completa con algunos apuntes sobre la determinación del tamaño muestral al objeto de acotar el error de estimación. En el cuarto capítulo se analizan los aspectos relacionados con el *Contraste de Hipótesis*, introduciendo primero los elementos que forman parte de éste, para a continuación detallar contrastes relativos a poblaciones gausianas. En el quinto capítulo, sobre *Contrastes No Paramétricos*, se estudianlas alternativas no paramétricas a los contrastes sobre medidas de localización.

El manual se completa con un anexo que contiene tablas de algunas distribuciones, parámetros y valores críticos necesarios para poder construir los intervalos y realizar los contraste descritos a lo largo del libro. Por último, se ofrece un glosario de los términos y conceptos más importantes tratados a lo largo de la obra.

En cuanto a la exposición, hay que decir que todo el manual está salpicado de ejemplos que ilustran cada una de las situaciones, conceptos, etc. Además se incluyen numerosos ejercicios, también a lo largo del texto, que invitan a que el lector profundice más en las cuestiones que se plantean.

Para terminar, indicar que el libro ofrece un doble enfoque, siendo útil tanto para aquellos alumnos que pretenden obtener un buen nivel de desenvolvimiento con las técnicas estadísticas clásicas, como para aquellos otros que pretendan profundizar más en las cuestiones conceptuales y formales.

2. Historia

Este libro surge como una continuación natural del manual "Estadística Descriptiva y Probabilidad" para cubrir los contenidos correspondientes a la Inferencia Estadística. Con una filosofía parecida en sus planteamientos, se elabora una primera versión en el año 2000 por F. Fernández Palacín, M. A. López Sánchez, M. Muñoz Márquez, A. M. Rodríguez Chía, A. Sánchez Navas y C. Valero Franco que se utiliza como material didáctico para la docencia en clase. Posteriormente, en el año 2002, tras el periodo de prueba, se depura y se completa resultando el actual libro, en cuya elaboración final también participó I. Espejo Miranda.

En el año 2007, tras una revisión menor, los autores deciden publicar el libro bajo licencia *GNU Free Documentation License*.

Una versión electrónica de este documento se encuentra en:
`http://www.uca.es/teloydisren`.

En 2013 una versión muy reducida se utiliza por vez primera como libro para la asignatura Estadística de primero de algunas ingenierías en la Universidad Oviedo. Una versión electrónica de tal documento está en
`http://carleos.epv.uniovi.es/~carleos/docencia/teloydisren`

3. Licencia de Documentación Libre de GNU

This is an unofficial translation of the GNU Free Documentation License (Version 1.2, Noviembre 2002) into Spanish. It was not published by the Free Software Foundation, and does not legally state the distribution terms for documentation that uses the GNU FDL – only the original English text of the GNU FDL does that. However, we hope that this translation will help Spanish speakers understand the GNU FDL better.

Ésta es una traducción no oficial de la GNU Free Document License (Versión 1.2, Noviembre 2002) a Español (Castellano). No ha sido publicada por la Free Software Foundation y no establece legalmente los términos de distribución para trabajos que usen la GFDL (sólo el texto de la versión original en Inglés de la GFDL lo hace). Sin embargo, esperamos que esta traducción ayude los hispanohablantes a entender mejor la GFDL. La versión original de la GFDL esta disponible en la Free Software Foundation. `http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html` Esta traducción está basada en una de la versión 1.1 de Igor Támara y Pablo Reyes. Sin embargo la responsabilidad de su interpretación es de Joaquín Seoane.

Copyright (C) 2000, 2001, 2002 Free Software Foundation, Inc. 59 Temple Place, Suite 330, Boston, MA 02111-1307 USA. Se permite la copia y distribución de copias literales de este documento de licencia, pero no se permiten cambios[1].

Preámbulo

El propósito de esta Licencia es permitir que un manual, libro de texto, u otro documento escrito sea **"libre"** en el sentido de libertad: asegurar a todo el mundo la libertad efectiva de copiarlo y redistribuirlo, con o sin modificaciones, de manera comercial o no. En segundo término, esta Licencia proporciona al autor y al editor[2] una manera de obtener reconocimiento por su trabajo, sin que se le considere responsable de las modificaciones realizadas por otros.

Esta Licencia es de tipo **"copyleft"**, lo que significa que los trabajos derivados del documento deben a su vez ser libres en el mismo sentido. Complementa la Licencia Pública General de GNU, que es una licencia tipo copyleft diseñada para el software libre.

---

[1] Ésta es la traducción del Copyright de la Licencia, no es el Copyright de esta traducción no autorizada.

[2] La licencia original dice **"publisher"**, que es, estrictamente, quien publica, diferente de editor, que es más bien quien prepara un texto para publicar. En castellano editor se usa para ambas cosas.

Hemos diseñado esta Licencia para usarla en manuales de software libre, ya que el software libre necesita documentación libre: un programa libre debe venir con manuales que ofrezcan la mismas libertades que el software. Pero esta licencia no se limita a manuales de software; puede usarse para cualquier texto, sin tener en cuenta su temática o si se publica como libro impreso o no.

Recomendamos esta licencia principalmente para trabajos cuyo fin sea instructivo o de referencia.

1. Aplicabilidad y definiciones

Esta Licencia se aplica a cualquier manual u otro trabajo, en cualquier soporte, que contenga una nota del propietario de los derechos de autor que indique que puede ser distribuido bajo los términos de esta Licencia. Tal nota garantiza en cualquier lugar del mundo, sin pago de derechos y sin límite de tiempo, el uso de dicho trabajo según las condiciones aquí estipuladas. En adelante la palabra **“Documento”** se referirá a cualquiera de dichos manuales o trabajos. Cualquier persona es un licenciatario y será referido como **“Usted”**. Usted acepta la licencia si copia. modifica o distribuye el trabajo de cualquier modo que requiera permiso según la ley de propiedad intelectual.

Una **“Versión Modificada”** del Documento significa cualquier trabajo que contenga el Documento o una porción del mismo, ya sea una copia literal o con modificaciones y/o traducciones a otro idioma.

Una **“Sección Secundaria”** es un apéndice con título o una sección preliminar del Documento que trata exclusivamente de la relación entre los autores o editores y el tema general del Documento (o temas relacionados) pero que no contiene nada que entre directamente en dicho tema general (por ejemplo, si el Documento es en parte un texto de matemáticas, una Sección Secundaria puede no explicar nada de matemáticas). La relación puede ser una conexión histórica con el tema o temas relacionados, o una opinión legal, comercial, filosófica, ética o política acerca de ellos.

Las **“Secciones Invariantes”** son ciertas Secciones Secundarias cuyos títulos son designados como Secciones Invariantes en la nota que indica que el documento es liberado bajo esta Licencia. Si una sección no entra en la definición de Secundaria, no puede designarse como Invariante. El documento puede no tener Secciones Invariantes. Si el Documento no identifica las Secciones Invariantes, es que no las tiene.

Los **“Textos de Cubierta”** son ciertos pasajes cortos de texto que se listan como Textos de Cubierta Delantera o Textos de Cubierta Trasera en la nota que indica que el documento es liberado bajo esta Licencia. Un Texto de Cubierta Delantera puede tener como mucho 5 palabras, y uno de Cubierta Trasera puede tener hasta 25 palabras.

Una copia **"Transparente"** del Documento, significa una copia para lectura en máquina, representada en un formato cuya especificación está disponible al público en general, apto para que los contenidos puedan ser vistos y editados directamente con editores de texto genéricos o (para imágenes compuestas por puntos) con programas genéricos de manipulación de imágenes o (para dibujos) con algún editor de dibujos ampliamente disponible, y que sea adecuado como entrada para formateadores de texto o para su traducción automática a formatos adecuados para formateadores de texto. Una copia hecha en un formato definido como Transparente, pero cuyo marcaje o ausencia de él haya sido diseñado para impedir o dificultar modificaciones posteriores por parte de los lectores no es Transparente. Un formato de imagen no es Transparente si se usa para una cantidad de texto sustancial. Una copia que no es **"Transparente"** se denomina **"Opaca"**.

Como ejemplos de formatos adecuados para copias Transparentes están ASCII puro sin marcaje, formato de entrada de Texinfo, formato de entrada de LaTeX, SGML o XML usando una DTD disponible públicamente, y HTML, PostScript o PDF simples, que sigan los estándares y diseñados para que los modifiquen personas. Ejemplos de formatos de imagen transparentes son PNG, XCF y JPG. Los formatos Opacos incluyen formatos propietarios que pueden ser leídos y editados únicamente en procesadores de palabras propietarios, SGML o XML para los cuáles las DTD y/o herramientas de procesamiento no estén ampliamente disponibles, y HTML, PostScript o PDF generados por algunos procesadores de palabras sólo como salida.

La **"Portada"** significa, en un libro impreso, la página de título, más las páginas siguientes que sean necesarias para mantener legiblemente el material que esta Licencia requiere en la portada. Para trabajos en formatos que no tienen página de portada como tal, **"Portada"** significa el texto cercano a la aparición más prominente del título del trabajo, precediendo el comienzo del cuerpo del texto.

Una sección **"Titulada XYZ"** significa una parte del Documento cuyo título es precisamente XYZ o contiene XYZ entre paréntesis, a continuación de texto que traduce XYZ a otro idioma (aquí XYZ se refiere a nombres de sección específicos mencionados más abajo, como **"Agradecimientos"**, **"Dedicatorias"**, **"Aprobaciones"** o **"Historia"**. **"Conservar el Título"** de tal sección cuando se modifica el Documento significa que permanece una sección **"Titulada XYZ"** según esta definición[3].

[3]En sentido estricto esta licencia parece exigir que los títulos sean exactamente

El Documento puede incluir Limitaciones de Garantía cercanas a la nota donde se declara que al Documento se le aplica esta Licencia. Se considera que estas Limitaciones de Garantía están incluidas, por referencia, en la Licencia, pero sólo en cuanto a limitaciones de garantía: cualquier otra implicación que estas Limitaciones de Garantía puedan tener es nula y no tiene efecto en el significado de esta Licencia.

2. Copia literal

Usted puede copiar y distribuir el Documento en cualquier soporte, sea en forma comercial o no, siempre y cuando esta Licencia, las notas de copyright y la nota que indica que esta Licencia se aplica al Documento se reproduzcan en todas las copias y que usted no añada ninguna otra condición a las expuestas en esta Licencia. Usted no puede usar medidas técnicas para obstruir o controlar la lectura o copia posterior de las copias que usted haga o distribuya. Sin embargo, usted puede aceptar compensación a cambio de las copias. Si distribuye un número suficientemente grande de copias también deberá seguir las condiciones de la sección 3.

Usted también puede prestar copias, bajo las mismas condiciones establecidas anteriormente, y puede exhibir copias públicamente.

3. Copiado en cantidad

Si publica copias impresas del Documento (o copias en soportes que tengan normalmente cubiertas impresas) que sobrepasen las 100, y la nota de licencia del Documento exige Textos de Cubierta, debe incluir las copias con cubiertas que lleven en forma clara y legible todos esos Textos de Cubierta: Textos de Cubierta Delantera en la cubierta delantera y Textos de Cubierta Trasera en la cubierta trasera. Ambas cubiertas deben identificarlo a Usted clara y legiblemente como editor de tales copias. La cubierta debe mostrar el título completo con todas las palabras igualmente prominentes y visibles. Además puede añadir otro material en las cubiertas. Las copias con cambios limitados a las cubiertas, siempre que conserven el título del Documento y satisfagan estas condiciones, pueden considerarse como copias literales.

Si los textos requeridos para la cubierta son muy voluminosos para que ajusten legiblemente, debe colocar los primeros (tantos como sea razonable colocar) en la verdadera cubierta y situar el resto en páginas adyacentes.

“Acknowledgements”, **“Dedications”**, **“Endorsements”** e **“History”**, en inglés.

Si Usted publica o distribuye copias Opacas del Documento cuya cantidad exceda las 100, debe incluir una copia Transparente, que pueda ser leída por una máquina, con cada copia Opaca, o bien mostrar, en cada copia Opaca, una dirección de red donde cualquier usuario de la misma tenga acceso por medio de protocolos públicos y estandarizados a una copia Transparente del Documento completa, sin material adicional. Si usted hace uso de la última opción, deberá tomar las medidas necesarias, cuando comience la distribución de las copias Opacas en cantidad, para asegurar que esta copia Transparente permanecerá accesible en el sitio establecido por lo menos un año después de la última vez que distribuya una copia Opaca de esa edición al público (directamente o a través de sus agentes o distribuidores).

Se solicita, aunque no es requisito, que se ponga en contacto con los autores del Documento antes de redistribuir gran número de copias, para darles la oportunidad de que le proporcionen una versión actualizada del Documento.

4. Modificaciones

Puede copiar y distribuir una Versión Modificada del Documento bajo las condiciones de las secciones 2 y 3 anteriores, siempre que usted libere la Versión Modificada bajo esta misma Licencia, con la Versión Modificada haciendo el rol del Documento, por lo tanto dando licencia de distribución y modificación de la Versión Modificada a quienquiera posea una copia de la misma. Además, debe hacer lo siguiente en la Versión Modificada:

A. Usar en la Portada (y en las cubiertas, si hay alguna) un título distinto al del Documento y de sus versiones anteriores (que deberán, si hay alguna, estar listadas en la sección de Historia del Documento). Puede usar el mismo título de versiones anteriores al original siempre y cuando quien las publicó originalmente otorgue permiso.

B. Listar en la Portada, como autores, una o más personas o entidades responsables de la autoría de las modificaciones de la Versión Modificada, junto con por lo menos cinco de los autores principales del Documento (todos sus autores principales, si hay menos de cinco), a menos que le eximan de tal requisito.

C. Mostrar en la Portada como editor el nombre del editor de la Versión Modificada.

D. Conservar todas las notas de copyright del Documento.

E. Añadir una nota de copyright apropiada a sus modificaciones, adyacente a las otras notas de copyright.

F. Incluir, inmediatamente después de las notas de copyright, una nota de licencia dando el permiso para usar la Versión Modificada bajo los términos de esta Licencia, como se muestra en la Adenda al final de este documento.

G. Conservar en esa nota de licencia el listado completo de las Secciones Invariantes y de los Textos de Cubierta que sean requeridos en la nota de Licencia del Documento original.

H. Incluir una copia sin modificación de esta Licencia.

I. Conservar la sección Titulada **"Historia"**, conservar su Título y añadirle un elemento que declare al menos el título, el año, los nuevos autores y el editor de la Versión Modificada, tal como figuran en la Portada. Si no hay una sección Titulada **"Historia"** en el Documento, crear una estableciendo el título, el año, los autores y el editor del Documento, tal como figuran en su Portada, añadiendo además un elemento describiendo la Versión Modificada, como se estableció en la oración anterior.

J. Conservar la dirección en red, si la hay, dada en el Documento para el acceso público a una copia Transparente del mismo, así como las otras direcciones de red dadas en el Documento para versiones anteriores en las que estuviese basado. Pueden ubicarse en la sección **"Historia"**. Se puede omitir la ubicación en red de un trabajo que haya sido publicado por lo menos cuatro años antes que el Documento mismo, o si el editor original de dicha versión da permiso.

K. En cualquier sección Titulada **"Agradecimientos"** o **"Dedicatorias"**, Conservar el Título de la sección y conservar en ella toda la sustancia y el tono de los agradecimientos y/o dedicatorias incluidas por cada contribuyente.

L. Conservar todas las Secciones Invariantes del Documento, sin alterar su texto ni sus títulos. Números de sección o el equivalente no son considerados parte de los títulos de la sección.

M. Borrar cualquier sección titulada **"Aprobaciones"**. Tales secciones no pueden estar incluidas en las Versiones Modificadas.

N. No cambiar el título de ninguna sección existente a **"Aprobaciones"** ni a uno que entre en conflicto con el de alguna Sección Invariante.

O. Conservar todas las Limitaciones de Garantía.

Si la Versión Modificada incluye secciones o apéndices nuevos que califiquen como Secciones Secundarias y contienen material no copiado del

Documento, puede opcionalmente designar algunas o todas esas secciones como invariantes. Para hacerlo, añada sus títulos a la lista de Secciones Invariantes en la nota de licencia de la Versión Modificada. Tales títulos deben ser distintos de cualquier otro título de sección.

Puede añadir una sección titulada **"Aprobaciones"**, siempre que contenga únicamente aprobaciones de su Versión Modificada por otras fuentes –por ejemplo, observaciones de peritos o que el texto ha sido aprobado por una organización como la definición oficial de un estándar.

Puede añadir un pasaje de hasta cinco palabras como Texto de Cubierta Delantera y un pasaje de hasta 25 palabras como Texto de Cubierta Trasera en la Versión Modificada. Una entidad solo puede añadir (o hacer que se añada) un pasaje al Texto de Cubierta Delantera y uno al de Cubierta Trasera. Si el Documento ya incluye textos de cubiertas añadidos previamente por usted o por la misma entidad que usted representa, usted no puede añadir otro; pero puede reemplazar el anterior, con permiso explícito del editor que agregó el texto anterior.

Con esta Licencia ni los autores ni los editores del Documento dan permiso para usar sus nombres para publicidad ni para asegurar o implicar aprobación de cualquier Versión Modificada.

5. Combinación de documentos

Usted puede combinar el Documento con otros documentos liberados bajo esta Licencia, bajo los términos definidos en la sección 4 anterior para versiones modificadas, siempre que incluya en la combinación todas las Secciones Invariantes de todos los documentos originales, sin modificar, listadas todas como Secciones Invariantes del trabajo combinado en su nota de licencia. Así mismo debe incluir la Limitación de Garantía.

El trabajo combinado necesita contener solamente una copia de esta Licencia, y puede reemplazar varias Secciones Invariantes idénticas por una sola copia. Si hay varias Secciones Invariantes con el mismo nombre pero con contenidos diferentes, haga el título de cada una de estas secciones único añadiéndole al final del mismo, entre paréntesis, el nombre del autor o editor original de esa sección, si es conocido, o si no, un número único. Haga el mismo ajuste a los títulos de sección en la lista de Secciones Invariantes de la nota de licencia del trabajo combinado.

En la combinación, debe combinar cualquier sección Titulada **"Historia"** de los documentos originales, formando una sección Titulada **"Historia"**; de la misma forma combine cualquier sección Titulada **"Agradecimientos"**, y cualquier sección Titulada **“Dedicatorias”**. Debe borrar todas las secciones tituladas **“Aprobaciones”**.

6. Colecciones de documentos

Puede hacer una colección que conste del Documento y de otros documentos liberados bajo esta Licencia, y reemplazar las copias individuales de esta Licencia en todos los documentos por una sola copia que esté incluida en la colección, siempre que siga las reglas de esta Licencia para cada copia literal de cada uno de los documentos en cualquiera de los demás aspectos.

Puede extraer un solo documento de una de tales colecciones y distribuirlo individualmente bajo esta Licencia, siempre que inserte una copia de esta Licencia en el documento extraído, y siga esta Licencia en todos los demás aspectos relativos a la copia literal de dicho documento.

7. Agregación con trabajos independientes

Una recopilación que conste del Documento o sus derivados y de otros documentos o trabajos separados e independientes, en cualquier soporte de almacenamiento o distribución, se denomina un **“agregado”** si el copyright resultante de la compilación no se usa para limitar los derechos de los usuarios de la misma más allá de lo que los de los trabajos individuales permiten. Cuando el Documento se incluye en un agregado, esta Licencia no se aplica a otros trabajos del agregado que no sean en sí mismos derivados del Documento.

Si el requisito de la sección 3 sobre el Texto de Cubierta es aplicable a estas copias del Documento y el Documento es menor que la mitad del agregado entero, los Textos de Cubierta del Documento pueden colocarse en cubiertas que enmarquen solamente el Documento dentro del agregado, o el equivalente electrónico de las cubiertas si el documento está en forma electrónica. En caso contrario deben aparecer en cubiertas impresas enmarcando todo el agregado.

8. Traducción

La Traducción es considerada como un tipo de modificación, por lo que usted puede distribuir traducciones del Documento bajo los términos de la sección 4. El reemplazo de las Secciones Invariantes con traducciones requiere permiso especial de los dueños de derecho de autor, pero usted puede añadir traducciones de algunas o todas las Secciones Invariantes a las versiones originales de las mismas. Puede incluir una traducción de esta Licencia, de todas las notas de licencia del documento, así como de las Limitaciones de Garantía, siempre que incluya también la versión en Inglés de esta Licencia y las versiones originales de las notas de licencia y Limitaciones de Garantía. En caso de desacuerdo entre la traducción y la versión original en Inglés de esta Licencia, la nota de licencia o la limitación de garantía, la versión original en Inglés prevalecerá.

Si una sección del Documento está Titulada **"Agradecimientos"**, **"Dedicatorias"** o **"Historia"** el requisito (sección 4) de Conservar su Título (Sección 1) requerirá, típicamente, cambiar su título.

9. Terminación

Usted no puede copiar, modificar, sublicenciar o distribuir el Documento salvo por lo permitido expresamente por esta Licencia. Cualquier otro intento de copia, modificación, sublicenciamiento o distribución del Documento es nulo, y dará por terminados automáticamente sus derechos bajo esa Licencia. Sin embargo, los terceros que hayan recibido copias, o derechos, de usted bajo esta Licencia no verán terminadas sus licencias, siempre que permanezcan en total conformidad con ella.

10. Revisiones futuras de esta licencia

De vez en cuando la Free Software Foundation puede publicar versiones nuevas y revisadas de la Licencia de Documentación Libre GNU. Tales versiones nuevas serán similares en espíritu a la presente versión, pero pueden diferir en detalles para solucionar nuevos problemas o intereses. Vea `http://www.gnu.org/copyleft/`.

Cada versión de la Licencia tiene un número de versión que la distingue. Si el Documento especifica que se aplica una versión numerada en particular de esta licencia o **"cualquier versión posterior"**, usted tiene la opción de seguir los términos y condiciones de la versión especificada o cualquiera posterior que haya sido publicada (no como borrador) por la Free Software Foundation. Si el Documento no especifica un número de versión de esta Licencia, puede escoger cualquier versión que haya sido publicada (no como borrador) por la Free Software Foundation.

ADENDA: Cómo usar esta Licencia en sus documentos

Para usar esta licencia en un documento que usted haya escrito, incluya una copia de la Licencia en el documento y ponga el siguiente copyright y nota de licencia justo después de la página de título:

> Copyright (c) AÑO SU NOMBRE. Se concede permiso para copiar, distribuir y/o modificar este documento bajo los términos de la Licencia de Documentación Libre de GNU, Versión 1.2 o cualquier otra versión posterior publicada por la Free Software Foundation; sin Secciones Invariantes ni Textos de Cubierta Delantera ni Textos de Cubierta Trasera. Una copia de la licencia está incluida en la sección titulada GNU Free Documentation License.

Si tiene Secciones Invariantes, Textos de Cubierta Delantera y Textos de Cubierta Trasera, reemplace la frase **"sin ... Trasera"** por esto:

> siendo las Secciones Invariantes LISTE SUS TÍTULOS, siendo los Textos de Cubierta Delantera LISTAR, y siendo sus Textos de Cubierta Trasera LISTAR.

Si tiene Secciones Invariantes sin Textos de Cubierta o cualquier otra combinación de los tres, mezcle ambas alternativas para adaptarse a la situación.

Si su documento contiene ejemplos de código de programa no triviales, recomendamos liberar estos ejemplos en paralelo bajo la licencia de software libre que usted elija, como la Licencia Pública General de GNU (**"GNU General Public License"**), para permitir su uso en software libre.

4. GNU Free Documentation License

Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document “freeïn the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of “copyleft”, which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The **“Document”**, below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as **"you"**. You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A **"Modified Version"** of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A **"Secondary Section"** is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The **"Invariant Sections"** are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The **"Cover Texts"** are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A **"Transparent"** copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparentïs called **"Opaque"**.

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple

HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The **"Title Page"** means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page"means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

A section **"Entitled XYZ"** means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as **"Acknowledgements"**, **"Dedications"**, **"Endorsements"**, or **"History"**.) To **"Preserve the Title"** of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ.[a]ccording to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.

B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.

C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.

D. Preserve all the copyright notices of the Document.

E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.

F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.

G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.

H. Include an unaltered copy of this License.

I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "Historyïn the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.

J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History"section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.

K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.

L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.

M. Delete any section Entitled “Endorsements”. Such a section may not be included in the Modified Version.

N. Do not retitle any existing section to be Entitled “Endorsements.ºr to conflict in title with any Invariant Section.

O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version’s license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled “Endorsements”, provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties–for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant

Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled “Historyïn the various original documents, forming one section Entitled “History”; likewise combine any sections Entitled “Acknowledgements”, and any sections Entitled “Dedications”. You must delete all sections Entitled “Endorsements”.

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an “aggregateïf the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation’s users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled “Acknowledgements”, “Dedications”, or “History”, the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See `http://www.gnu.org/copyleft/`.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License “or any later version.[a]pplies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

> Copyright ©YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with...Texts." line with this:

> with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.

Inferencia Estadística
(apuntes para el grado en ingeniería)
C. E. Carleos Artime, sobre el trabajo de I. Espejo Miranda, F. Fernández Palacín, M. A. López Sánchez, M. Muñoz Márquez, A. M. Rodríguez Chía, A. Sánchez Navas, C. Valero Franco

Capítulo 1

La Inferencia Estadística

1. Introducción

En un sentido amplio, se entiende por Inferencia a la rama de la Estadística que estudia grandes colectivos a partir de una pequeña porción de éstos. El conjunto de individuos que se pretende analizar se denomina *población*, mientras que la parte que sirve de apoyo para realizar dicho análisis se llama *muestra*. Técnicamente la Inferencia consiste en, una vez estudiada la muestra, proyectar las conclusiones obtenidas al conjunto de la población. Por motivos obvios, la calidad del estudio que se realice depende, por una parte, de la calidad de la muestra y, por otra, del uso que de ella se haga. La primera de las cuestiones se resuelve a través de la *Teoría de Muestras*, mientras que en la segunda se utilizan las herramientas suministradas por la Estadística Descriptiva y el Cálculo de Probabilidades.

A continuación se dan unas pinceladas que ayudan a comprender algunos de los aspectos de la Teoría de Muestras. Su análisis en profundidad escapa a nuestros objetivos y resulta fuera de lugar debido a su gran extensión y complejidad.

1. Ante todo, una muestra debe ser suficientemente representativa de la población de la cual ha sido extraída, tratando de reflejar

lo mejor posible las particularidades de ésta. Las partes de la citada población que no estén debidamente representadas en la muestra llevan a la aparición de sesgos o errores sistemáticos que viciarán el proceso de la Inferencia desde el origen. Para alcanzar buenos niveles de representatividad existen distintos tipos de muestreo que, de forma suscinta, se repasan posteriormente.

2. La segunda de las condiciones que se pide a una muestra es que a través de ella se alcancen unos objetivos de precisión fijados de antemano. Esta condición tiene que ver con el hecho de que, al no hacerse un estudio exhaustivo, existen márgenes de error en el cálculo de las características de la población, en la determinación de la estructura probabilística de ésta, etc. Mayores niveles de precisión exigirán una mayor información sobre la población, es decir, un mayor *tamaño muestral* (número de elementos que componen la muestra).

2. Clasificación de los procedimientos inferenciales

En primer lugar, se ha de hacer notar que la población va a venir representada por una variable aleatoria con una determinada distribución de probabilidad. Dependiendo del grado de conocimiento de ésta se distinguen dos métodos para realizar el proceso inferencial:

1. *Inferencia paramétrica.* Se admite que la distribución de la población pertenece a una cierta familia paramétrica de distribuciones, siendo necesario únicamente precisar el valor de los parámetros para determinar la distribución poblacional.

2. *Inferencia no paramétrica.* No supone ninguna distribución de probabilidad de la población, exigiendo sólo hipótesis muy generales, como puede ser la de simetría. A su vez los procedimientos no paramétricos se pueden clasificar en:

    a) Procedimientos de localización, que estudian los parámetros de localización de la distribución.

b) Procedimientos de estructura, que analizan las condiciones que se dan en la distribución de la variable.

c) Procedimientos sobre las condiciones de la muestra, que comprueban si se verifican las hipótesis exigibles a los valores muestrales, como la independencia, ausencia de valores atípicos, etc.

Por su parte, la inferencia paramétrica puede ser estudiada desde dos enfoques diferentes:

1. *Enfoque clásico o frecuentista.* En el cual los parámetros de la distribución de probabilidad de la población se consideran constantes.

2. *Enfoque bayesiano.* Considera a los parámetros como variables aleatorias, permitiendo introducir información sobre ellos a través de la distribución a priori.

Este documento recoge solamente el punto de vista frecuentista.

3. Naturaleza de la información extraída de la población

La introducción se ha centrado en lo que se conoce como Teoría de Muestras. Sin embargo, con el objeto de obtener una visión más global del proceso inferencial, se distinguen dos procedimientos para la obtención de información. En el primero, dicha información se obtiene de forma aséptica, con el solo propósito de observar las unidades muestrales, y en el segundo, se establecen las condiciones en las cuales se procederá a la medición de lo que se conoce como unidades experimentales. Formalmente, dicha distinción implica dos categorías; la primera de ellas, como ya ha quedado de manifiesto, supone el encontrarse dentro de la Teoría de Muestras, mientras que la segunda se conoce como *Diseño de Experimentos*.

La Teoría de Muestras en primer lugar necesita establecer los protocolos que se deben respetar para alcanzar los niveles de representatividad y precisión prefijados; a esto se lo llama *diseño muestral*, que conduce a una *muestra potencial*. Una vez realizado dicho diseño, se procede a la obtención de una o varias *muestras* mediante la observación, la medición o la encuestación. Estas alternativas están directamente relacionadas con la naturaleza de los datos: atributos, variables continuas, discretas o de clase, ordenadas o no.

El Diseño de Experimentos, por su parte, fue creado por Físher en la década de 1920 y en sus orígenes tuvo una clara aplicación al mundo agrícola, relacionando las condiciones en las que se realizaban los cultivos, que constituyen los denominados *factores*, con la producción obtenida, *variable dependiente*. El campo de aplicación se ha ido extendiendo con el paso de los años, teniendo en la actualidad una aplicación generalizada en la mayoría de los campos científicos. En cualquier caso, en lo que sigue no se considera como objeto de análisis, con lo cual los estudios que a continuación se llevan a cabo se restringen a la Teoría de Muestras.

Antes de continuar, es necesario aclarar algunas cuestiones de vital importancia para entender el desarrollo teórico que aquí se presenta.

- Cuando se plantea realizar un estudio inferencial se debe realizar un diseño muestral. Esto implica que cada elemento de la muestra potencial es una variable aleatoria unidimensional, mientras que la muestra es un vector aleatorio de dimensión el tamaño de ésta. Además, no debe confundirse el individuo físico con la característica o características que se desean estudiar de éste.
- Cuando de cada individuo se estudia una única característica se habla de análisis univariable o univariante, cuando se estudian dos, bivariable o bivariante y cuando se consideran más de dos, multivariable o multivariante. En lo que sigue, se considerará un análisis univariable.
- Una muestra de tamaño n será denotada por $(X_1, \ldots, X_n)$ o bien, por $\underline{X}$. Cada X_i, con $i = 1, \ldots, n$, es una variable aleatoria que representa la característica bajo estudio del elemento i-ésimo

de la muestra. Cuando las mediciones se hayan llevado a cabo, es decir, una vez realizado el muestreo los resultados obtenidos se denotan por $(x_1, \ldots, x_n)$ o bien, por $\underline{x}$.

4. Razones que justifican un estudio inferencial

La realización de un estudio inferencial se justifica por distintas circunstancias, entre las que destacan las siguientes:

- Por motivos presupuestarios. La realización de un estudio a través de muestras supone un ahorro tanto de dinero como de tiempo. Imagínese el tiempo y dinero que supondría realizar un estudio sobre la altura media de la población de Andalucía si se considerase para ello toda la población.

- A veces no todos los elementos de una población están localizables. En el ejemplo anterior puede ocurrir que haya personas nacidas en Andalucía que vivan en otras comunidades.

- En ocasiones la población tiene un gran número de elementos, pudiendo ser ésta potencialmente infinita. Considérense, por ejemplo, poblaciones cuyos elementos se obtienen a partir de la realización de un experimento aleatorio, como la tirada de un dado o la contabilización del número de clientes que utilizan un cierto servicio en un tiempo fijo.

- Existen situaciones en las que cuando se analiza un elemento éste queda inutilizable o destruido. Si se quiere comprobar la calidad del vino de una cierta cosecha, un análisis completo llevaría a la desaparición de la población. Bastaría tomar una medición en cada tonel o conjunto de éstos.

- Por motivos de precisión. Aunque parezca contradictorio, a veces un análisis total, implica el que se cometan errores graves en la medición, codificación, resumen, etc., cuestiones que pueden ser mucho mejor controladas utilizando un estudio a partir de una muestra. Por otro lado, es mucho más fácil formar y controlar a un pequeño número de medidores–observadores–encuestadores, que a un gran número de éstos.

5. Tipos de muestreo

A continuación se establece una primera clasificación de los tipos de muestreo que es comúnmente aceptada en la Estadística:

1. Muestreo probabilístico o aleatorio. Es aquel en el que a priori se conoce la probabilidad de que cada uno de los elementos de la población pertenezca a la muestra.
2. Muestreo opinático. Es aquel en el que el muestrador decide subjetivamente los individuos que compondrán la muestra.
3. Muestreo sin norma. Es aquel en el que se toma como muestra un trozo de la población por razones, en general, de comodidad.

La ventaja del muestreo aleatorio es que pueden determinarse los errores que se cometerán en el proceso inferencial, siendo el único que interesa desde el punto de vista estadístico. El muestreo opinático se justifica en función del conocimiento que se tenga de la población bajo estudio. Finalmente, el muestreo sin norma puede utilizarse como una primera aproximación a una población de la que no se dispone de información alguna.

A continuación, el estudio se centra en el muestreo probabilístico. Se distinguen, sin entrar en un desarrollo exhaustivo, las siguientes variedades:

1. Muestreo aleatorio simple con reposición. Es aquel en el que todas las unidades poblacionales tienen la misma probabilidad de pertenecer a la muestra, pudiendo medirse varias veces el mismo individuo. Las variables aleatorias que componen una muestra obtenida a través de este procedimiento son independientes e idénticamente distribuidas.

Ejemplo 1.1 *En una urna se tienen* 100 *bolas:* 60 *bolas rojas,* 25 *bolas blancas y* 15 *bolas amarillas. Se extraen de la misma (con reposición) dos de ellas. Para averiguar cuál es la probabilidad de que la primera bola sea blanca y la segunda roja, se definen los sucesos*

$$B_1 = \{\textit{sacar la primera bola blanca}\}$$
$$R_2 = \{\textit{sacar la segunda bola roja}\}.$$

Puesto que hay reposición, sacar bola blanca y sacar bola roja son sucesos independientes, con lo cual,

$$P(B_1 \cap R_2) = P(B_1)P(R_2) = \frac{25}{100}\frac{60}{100}.$$

2. Muestreo aleatorio simple sin reposición. Igual que en el caso anterior todos los individuos tienen idéntica probabilidad de pertenecer a la muestra, pero los individuos no pueden seleccionarse varias veces. En este caso, las variables aleatorias que componen la muestra no son independientes.

Ejemplo 1.2 *Considerando nuevamente el ejemplo anterior, si se extraen de nuevo dos bolas de la urna pero esta vez sin reposición, la probabilidad de extraer primero una bola blanca y luego una roja es*

$$P(B_1 \cap R_2) = P(B_1)P(R_2/B_1) = \frac{25}{100}\frac{60}{99}.$$

3. Muestreo estratificado. Este tipo de muestreo se basa en la especificación de subpoblaciones o *estratos* conteniendo elementos parecidos entre sí. La composición de la muestra se distribuye entre los distintos estratos mediante un procedimiento que recibe el nombre de afijación. Existen principalmente tres tipos de afijación:

   a) Uniforme. En la muestra habrá el mismo número de representantes de cada estrato. Es decir, si existen k estratos y el tamaño de la muestra es n, se extraerán, aproximadamente $\frac{n}{k}$ elementos de cada estrato.

   Ejemplo 1.3 *En una empresa hay seis categorías diferentes de trabajadores, cada una con un* *número similar de empleados y con varianzas parecidas para la variable salario. Si se quiere tomar una muestra de* 60 *individuos para estudiar el salario medio de los trabajadores, habría que tomar de cada categoría* $\frac{60}{6} = 10$ *trabajadores.*

b) Proporcional. En la muestra habrá un número de representantes de cada estrato proporcional a su tamaño. Es decir, si un estrato, i, contiene N_i elementos de los N de la población, le corresponderá un total de $\frac{N_i}{N}n$ elementos muestrales.

Ejemplo 1.4 *Para realizar un estudio sobre una característica de una población de* 1000 *habitantes, donde* 600 *son varones y* 400 *mujeres, suponiendo que la varianza de dicha característica sea similar para ambos sexos, se debería tomar la muestra de manera que se mantuviera esa proporción, es decir, que el* 60 % *de la muestra fuesen varones y el* 40 % *fuesen mujeres.*

c) Óptima. La asignación de unidades muestrales se hace teniendo en cuenta tanto el tamaño de los estratos como su variabilidad, de forma que un estrato más heterogéneo necesita de más unidades muestrales, mientras que uno más homogéneo se explica con un menor número relativo de elementos de la muestra. Así, si σ_i representa la desviación típica del estrato i-ésimo, la asignación de unidades muestrales para dicho estrato vendrá dada por

$$n_i = n \frac{\sigma_i N_i}{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \sigma_j N_j}.$$

Ejemplo 1.5 *Se quiere realizar un estudio sobre el tiempo dedicado a la lectura a la semana en una población de* 1000 *habitantes. La siguiente tabla refleja los porcentajes y des-*

viaciones típicas de los grupos en los que se divide la población.

Grupo	*Edades*	f_i	σ_i
1	< 18	0'25	0'1
2	$19 - 35$	0'40	0'3
3	$36 - 55$	0'20	0'5
4	> 55	0'15	0'1

Se decide tomar una muestra de 600 habitantes, de manera que de cada grupo, dado que $\sum_{i=1}^{4} \sigma_i N_i = 260$, *habrá que tomar:*

$$\begin{aligned} n_1 &= 600\frac{250 \cdot 0'1}{260} = 60 \\ n_2 &= 600\frac{400 \cdot 0'3}{260} = 276 \\ n_3 &= 600\frac{200 \cdot 0'5}{260} = 228 \\ n_4 &= 600\frac{150 \cdot 0'1}{260} = 36. \end{aligned}$$

Como propiedad a destacar, hay que señalar que el muestreo estratificado permite un estudio diferenciado para cada estrato.

4. Muestreo por áreas o conglomerados. En este caso se trata de establecer grupos de elementos físicamente próximos entre ellos, frecuentemente constituidos por una partición geográfica de la población.

   Se puede observar que las ideas que subyacen en el muestreo estratificado y por conglomerados son opuestas, ya que los elementos de la población que pertenecen al mismo estrato son homogéneos entre sí y heterogéneos con el resto de los estratos, sin embargo, los conglomerados son homogéneos entre ellos y heterogéneos internamente.

   La característica principal del muestreo por áreas es que permite limitar la toma de muestras a un conjunto de áreas que representen al resto.

   Ejemplo 1.6 *Se quiere realizar un estudio sobre cuánto gastan las familias españolas al año. Para simplificar el problema que supone obtener las listas de toda la población, se eligen aleatoriamen-*

te algunas provincias como representantes del conjunto de ellas, de las cuales se obtendrá la muestra deseada.

Además de los anteriores que tienen un uso generalizado, existen una gran cantidad de procedimientos para muestrear que pretenden adaptarse de la mejor manera a las circunstancias de la población bajo estudio. A modo ilustrativo destacan los muestreos: *sistemático*, en el que selecciona una de cada k unidades ordenadas; *polietápico*, que es una generalización del de áreas; *bifásico*, en el que se parte de una muestra grande que permita reconocer las características más acentuadas de la población, al objeto de poder definir un diseño más fino, etc.

Tanto en el caso de muestreo estratificado como en el de áreas y en cualquier otro muestreo probabilístico, la última etapa del muestreo implica la realización de un muestreo aleatorio simple; ello justifica el hecho de que en lo que sigue sólo se consideren muestras aleatorias simples (m.a.s.). En concreto, el tipo de muestras aleatorias simples que van a ser analizadas a partir de ahora son aquellas obtenidas de una población infinita o de un muestreo aleatorio simple con reposición. Esto supone que dada una muestra $(X_1, \ldots, X_n)$ se tiene que:

- Las variables X_i, con $i = 1, \ldots, n$, tienen igual distribución de probabilidad que la población de la cual se ha extraído la muestra. Es decir, si F es la función de distribución de la población entonces
$$F_{X_i} = F, \quad i = 1, \ldots, n.$$
- Las variables X_i, con $i = 1, \ldots, n$, son independientes. Por tanto, si $F_{X_1,\ldots,X_n}$ es la función de distribución conjunta de la muestra, entonces
$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i).$$

Inferencia Estadística
(apuntes para el grado en ingeniería)
C. E. Carleos Artime, sobre el trabajo de I. Espejo Miranda, F. Fernández Palacín, M. A. López Sánchez, M. Muñoz Márquez, A. M. Rodríguez Chía, A. Sánchez Navas, C. Valero Franco

Capítulo 2

Estimación puntual

1. Introducción

En numerosas ocasiones, al realizar un estudio estadístico se conoce la estructura de la población que se pretende estudiar, con la salvedad de los parámetros que la caracterizan. Por ejemplo, la utilización de un aparato de medida objetivo garantiza, en general, que las mediciones obtenidas tendrán una distribución gausiana, de la que se desconocerán sus parámetros: media y desviación típica. El objetivo que se persigue con las técnicas de estimación es el determinar de la forma más precisa dichos parámetros, de modo que la distribución quede completamente especificada.

En este capítulo y en los dos siguientes se abordará la Inferencia Estadística desde un punto de vista paramétrico, es decir, se parte del conocimiento (salvo parámetros) de la distribución de probabilidad que rige la población bajo estudio. De esta forma, se considera una población cuya función de distribución es $F_{\underline{\theta}}(x)$, donde $\underline{\theta} \in \mathbb{R}^k$ es un vector de parámetros desconocidos. En esta situación, el problema es cuantificar lo más exactamente posible el valor de $\underline{\theta}$ a partir de una muestra de tamaño n. La rama de la Estadística que se dedica a estudiar este tipo de problemas se llama *Teoría de la Estimación*, existiendo dos enfoques diferentes para llevar a cabo dicho estudio: la *estimación puntual* y la *estimación por intervalos.* En la primera, se estiman los parámetros a través de valores numéricos, mientras que en la segunda queda garantizada su pertenencia a una región con un margen de seguridad prefijado.

Este capítulo se centra en la *estimación puntual*, si bien la mayoría de los conceptos son generales y se utilizan también en la *estimación por intervalos* y en el *contraste de hipótesis.*

A efectos de notación se hará referencia a las características de la muestra con letras latinas, mientras que las de la población se designarán, en general, con letras griegas. Así, por ejemplo, la varianza muestral será S^2, mientras que la poblacional se identificará por σ^2; con la media muestral seguirá utilizándose la notación usual, $\overline{X}$, mientras que la poblacional se denotará por μ. El objetivo que se perseguirá a lo largo del capítulo es el de obtener valores lo más precisos posibles de los parámetros desconocidos del modelo probabilístico.

2. Estadígrafo, estimador y estimación

Un *estadígrafo* o *estadístico* $T(\underline{X})$, es una función de las variables muestrales que no depende de parámetros desconocidos. Se trata pues de una variable aleatoria, la cual tiene una distribución que se denomina distribución en el muestreo. El estadístico puede considerarse como un resumen o una compresión de la información suministrada por la muestra y, obviamente, va a ser más manejable que ésta. Nótese que puede ocurrir que en ese resumen se pierda alguna posible información que pudiera contener $\underline{X}$ acerca de los parámetros desconocidos. Por ello, el objetivo perseguido es que el estadístico $T(\underline{X})$ sea tal que el resumen que lleve a cabo se produzca sin pérdida de información relevante sobre los parámetros.

Dentro del conjunto de estadígrafos destacan los *estimadores*, que son aquellos estadígrafos que se construyen con la intención de estimar un parámetro de la población y que, consecuentemente, debe reunir condiciones que lo hagan deseable en algún sentido.

Una *estimación* es el valor numérico que toma el estimador para una muestra concreta.

Ejemplo 2.1 *Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución gausiana de media desconocida, μ, y varianza σ^2. La función $T(\underline{X}) = \overline{X}$, es decir, la media muestral, es un estadígrafo y estimador de la media μ de la población. Si se toma la muestra $x_1 = 2'5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3'4$, $x_4 = 1'5$, $x_5 = 4$, el valor numérico $\overline{x} = 2'68$ es una estimación de μ.*

La necesidad de definir los estadígrafos se debe a que, aunque con la muestra se ha reducido bastante la dimensión del problema (frente a la población), el excesivo tamaño de la muestra obliga a comprimir aún más la información para obtener respuestas a las preguntas que puedan hacerse y, de esa forma, completar el proceso inferencial. El objetivo que se persigue al definir los estimadores es el de resumir la información muestral, en aras de obtener valores próximos a los verdaderos valores de los parámetros desconocidos de la distribución de la población.

3. Estimación de parámetros en poblaciones gausianas

Puesto que la mayoría de problemas que se abordan en la Inferencia Estadística asumen la hipótesis de gausianidad de la población bajo estudio, a partir de ahora se le va a dar un trato diferenciado, particularizando cualquier estudio para esta distribución. Sea pues X una variable aleatoria con distribución $\mathrm{N}(\mu,\sigma)$. Los estimadores de los parámetros μ y σ son, respectivamente, la media y la desviación típica (o la cuasi desviación típica) muestrales. Se trata ahora de estudiar las distribuciones de ambos estimadores.

No obstante, antes de continuar con esta cuestión, se hará un inciso para estudiar una serie de distribuciones que se derivan de la gausiana.

3.1. Distribuciones derivadas de la gausiana

Las distribuciones derivadas de la gausiana tienen gran importancia en la Inferencia Estadística, ya que serán las distribuciones de una amplia familia de estimadores. Todas ellas se obtienen como combinación o promedios de variables gausianas, están tabuladas y se caracterizan sólo por el número de gausianas tipificadas que entran en su composición; a dicho número se lo llama grado(s) de libertad.

3.1.1. Distribución χ^2 (ji-cuadrado)

Sean Z_1, Z_2, ..., Z_n, n variables $N(0,1)$ independientes. La variable χ^2_n definida como

$$\chi^2_n = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2$$

sigue una distribución ji-cuadrado con n grados de libertad. Dicha variable puede interpretarse como el cuadrado de la distancia euclídea desde el origen de coordenadas al punto (Z_1, Z_2, ..., Z_n). La variable se caracteriza únicamente por el número de gausianas tipificadas que entran en su composición y la independencia de éstas hace fácil el cálculo de los momentos. Así

$$\mathrm{E}[\chi^2_n] = n \qquad y \qquad \mathrm{V}[\chi^2_n] = 2n.$$

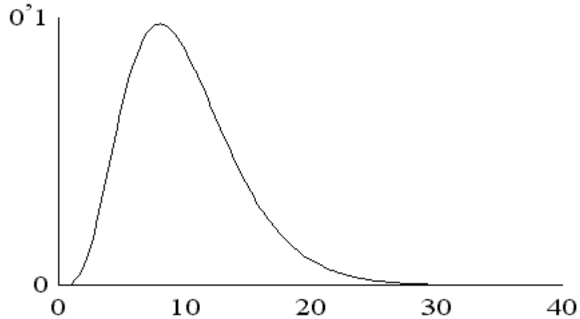

Figura 2.1: Distribución ji-cuadrado

La función de densidad de la distribución ji-cuadrado es asimétrica, siendo distinta de cero sólo para valores positivos de la variable. Tiene una asíntota cuando los valores tienden a infinito y para $n > 2$ tiene forma campaniforme.

Propiedades 2.1

1. *La distribución ji-cuadrado es un caso particular de una distribución gama; en concreto, es una* $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})$*. Recuérdese que* $X \sim \Gamma(a;p)$ *si tiene como función de densidad*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a^p}{\Gamma(p)} e^{-ax} x^{p-1} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

2. *La suma de dos ji-cuadrado independientes con* n_1 *y* n_2 *grados de libertad es una nueva variable ji-cuadrado con* $n_1 + n_2$ *grados de libertad.*

3. *Cuando* n *es mayor que 100 se verifica la siguiente aproximación:*

$$\sqrt{2\chi^2_n} \quad \cong \quad N(\sqrt{2n-1}, 1).$$

Ejemplo 2.2 La velocidad (cm/s) de un objeto de masa 1 kg viene dada por una variable aleatoria V que sigue una $N(0, 25)$. Si $K = \frac{mV^2}{2}$, donde m es la masa del objeto, es la variable aleatoria que representa la energía cinética de dicho objeto, se pide calcular la probabilidad de que la energía cinética sea menor que 200.

Puesto que $m = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} P(K < 200) &= P\left(\tfrac{mV^2}{2} < 200\right) \\ &= P\left(\tfrac{V^2}{625} < \tfrac{200 \cdot 2}{625}\right) \\ &= P\left(\tfrac{V^2}{625} < 1'28\right) \\ &= P(\chi^2_1 < 1'28) = 0'725. \end{aligned}$$

3.1.2. Distribución t de Estiúdent

Sean Z y χ^2_n dos variables aleatorias independientes que siguen una distribución $N(0, 1)$ y una ji-cuadrado con n grados de libertad, respectivamente. La variable aleatoria

$$t_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_n}{n}}},$$

sigue una distribución t de Estiúdent con n grados de libertad. La distribución es simétrica respecto a cero, con una varianza mayor que la $N(0,1)$ y tiende a ésta a medida que n lo hace hacia infinito (se puede considerar que sus probabilidades coinciden a partir de un n superior a 120).

La distribución t de Estiúdent compara a una $N(0,1)$ con un promedio de n variables $N(0,1)$. Sus momentos principales son:

$$\mathrm{E}[t_n] = 0 \qquad \mathrm{V}[t_n] = \frac{n}{n-2} \quad (n > 2).$$

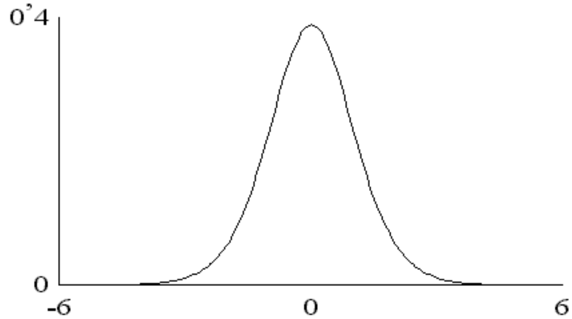

Figura 2.2: Distribución t de Estiúdent

Ejemplo 2.3 *Sea V una variable aleatoria que sigue una t_{20}. Se quiere hallar a tal que $P(|V| > a) = 0'01$. Para ello basta tener en cuenta que la distribución t de Estiúdent es simétrica, con lo cual*

$$\begin{aligned} P(|V| > a) &= P(V > a) + P(V < -a) \\ &= 2P(V > a) = 0'01. \end{aligned}$$

Así pues, el a requerido es el que verifica

$$P(V > a) \;=\; 0'005,$$

de donde se obtiene, buscando en las tablas, que $a = 2'845$.

3.1.3. Distribución $\mathcal{F}$ de Esnédecor y Físher

La distribución $\mathcal{F}$ se define como el cociente entre dos variables independientes ji-cuadrado divididas por sus grados de libertad, es decir

$$\mathcal{F}_{n,m} = \frac{\frac{\chi_n^2}{n}}{\frac{\chi_m^2}{m}}.$$

La distribución está caracterizada por los grados de libertad n y m, siendo su forma esencialmente la misma de la ji-cuadrado. Sus características más importantes son:

$$\mathrm{E}[\mathcal{F}_{n,m}] = \frac{m}{m-2} \qquad \mathrm{V}[\mathcal{F}_{n,m}] = \frac{2m^2(m+n-2)}{n(m-2)^2(m-4)}.$$

Propiedades 2.2

1. *De la definición se deduce que si* $X \sim \mathcal{F}_{n,m} \Rightarrow \frac{1}{X} \sim \mathcal{F}_{m,n}$.
2. *La distribución* t *de Estiúdent al cuadrado es un caso particular de la* $\mathcal{F}$. *Esto es, si*

$$t_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}} \quad \Rightarrow \quad t_n^2 = \frac{Z^2}{\frac{\chi_n^2}{n}}$$

siendo $t_n^2 \sim \mathcal{F}_{1,n}$

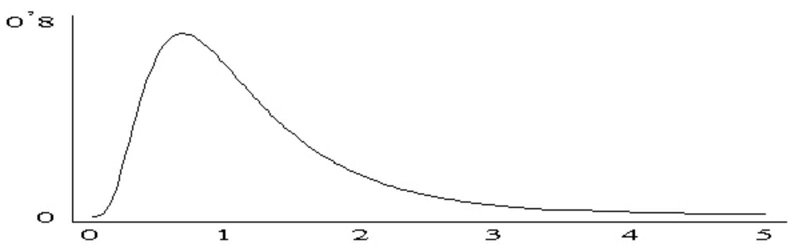

Figura 2.3: Distribución $\mathcal{F}$ de Físher y Esnédecor

Ejemplo 2.4 *Hallar el valor b tal que $P(F < b) = 0$'01, sabiendo que la variable aleatoria F sigue una distribución $\mathcal{F}_{7,20}$.*

Como $\mathcal{F}_{7,20} = \frac{1}{\mathcal{F}_{20,7}}$, se tiene entonces que

$$P(\mathcal{F}_{7,20} < b) = 0\text{'}01 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\frac{1}{\mathcal{F}_{7,20}} > \frac{1}{b}\right) = 0'01,$$

luego

$$P(\mathcal{F}_{20,7} > \frac{1}{b}) = 0\text{'}01 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b} = 6\text{'}15.$$

De donde $b = 0'162$.

3.2. Distribución de la media muestral

Como ya se ha visto en ejemplos anteriores, la media muestral tiene esperanza μ y varianza σ^2/n; además por ser combinación lineal de variables Normales es a su vez Normal, es decir:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Lo anterior también sería, aproximadamente, cierto para una variable X no Normal siempre que n sea suficientemente grande, como garantiza el Teorema Central del Límite.

3.3. Distribución de la varianza muestral

La relación que existe entre la media y la varianza muestral viene dada por el *teorema de Físher y Cocran*:

Teorema 2.1 *Las variables aleatorias $\bar{X}$ y S^2 son independientes y el estadístico $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ tiene distribución ji-cuadrado con n-1 grados de libertad.*

Se obviará la demostración de lo anterior, que de forma equivalente y en función de la cuasivarianza muestral, puede expresarse como:

$$\frac{(n-1)S_c^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}. \tag{2.1}$$

De los momentos de una ji-cuadrado se puede deducir:

$$\mathrm{E}[S^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \qquad \mathrm{V}[S^2] = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4.$$

Esto indica, como ya se estudió, que S^2 no es un estimador insesgado de σ^2, por lo que en la mayoría de los casos se toma como estimador de la varianza poblacional la cuasivarianza muestral, S_c^2, también denominada *varianza muestral corregida*. La razón de no elegir siempre la cuasivarianza es que su ECM (error cuadrático medio) es mayor que el de la varianza.

Por otro lado, puesto que $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$ y $(n-1)\frac{S_c^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ y como además estos estadísticos son independientes, se tiene que

$$\frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{(n-1)S_c^2}{(n-1)\sigma^2}}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S_c}\sqrt{n} \sim t_{n-1}.$$

3.4. Distribución de la proporción muestral

Utilizando una particularización del Teorema Central del Límite, se sabe que de forma asintótica, para una población Bernuli, B(p), se tiene que la distribución de la proporción muestral $\hat{p} = \bar{X}$ puede aproximar por una gausiana tal que

$$\hat{p} \quad \cong \quad N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right).$$

4. Ejercicios

4.1. Ejercicios propuestos

2.1. Dadas W, X, Y y Z cuatro variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una $N(0,5)$.

a) Si $S = 2W + 3X - Y + Z + 30$, obtenga $P(S \leq 42)$.

b) Si $T = W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2$, obtenga a verificando que $P(T \leq a) = 0'025$.

c) Si $U = \sqrt{\frac{W^2+X^2+Y^2+Z^2}{4}}$, obtenga $P(U \leq 6'973)$.

2.2. Sean X e Y dos variables aleatorias que siguen una t_{36} y una χ^2_{62} respectivamente.

a) Halle x tal que $P(|X| > x) = 0'05$.

b) Obtenga y tal que $P(|Y| > y) = 0'05$.

2.3. Se sabe que la anchura de las piezas fabricadas por una cierta máquina, medida en centímetros, se distribuye según una gausiana de media 10 y desviación típica 0’25. Si se toma una m.a.s. de 25 piezas, calcule:

a) $P(9\text{'}68 \leq \overline{X} \leq 10\text{'}1)$.

b) $P(S^2 \leq 0\text{'}19)$.

2.4. Se quiere estudiar la altura de los alumnos de tercero de ESO y se estimó, en experiencias anteriores, que dicha característica se distribuye según una gausiana de media 167 cm. y varianza 10’24 cm^2. Si se toma una m.a.s. de 10 alumnos,

a) Calcule la probabilidad de que la media muestral de las alturas de los 10 alumnos no sea inferior a 165 cm.

b) Halle la probabilidad de que la cuasivarianza muestral de las alturas de los 10 alumnos sea superior a 15’90 cm^2.

Inferencia Estadística
(apuntes para el grado en ingeniería)
C. E. Carleos Artime, sobre el trabajo de I. Espejo Miranda, F. Fernández Palacín, M. A. López Sánchez, M. Muñoz Márquez, A. M. Rodríguez Chía, A. Sánchez Navas, C. Valero Franco

Capítulo 3

Estimación por intervalos de confianza

1. Introducción

En la práctica, cuando se realiza la estimación de un parámetro se necesita obtener una medida de la fiabilidad de dicha estimación, medida de la que se carece en el proceso de estimación puntual. De este modo, surge la necesidad de encontrar un método que permita calcular una región que contenga al valor del parámetro con una cierta garantía.

El capítulo se ha organizado introduciendo en primer lugar el método del pivote, para calcular seguidamente intervalos de confianza de parámetros en poblaciones gausianas basándose en el mismo. A continuación se han introducido otros métodos de obtención de estimadores que se han considerado interesantes, pero que dada su complejidad o su relativo uso vienen marcados con ***. En concreto, el Método asintótico basado en el Teorema central del límite va a permitir calcular intervalos en poblaciones binomiales. El tema concluye con un epígrafe dedicado a la determinación del tamaño muestral para cumplir con el objetivo de precisión establecido.

Existen innumerables situaciones reales donde es necesario encontrar regiones en las cuales se tenga la confianza o cierto grado de seguridad de que en ellas se halle el valor de un parámetro desconocido de la población. A modo de ejemplos:

Ejemplo 3.1 *Un vendedor desea establecer la duración de la garantía de un determinado electrodoméstico, de forma que durante el período de garantía deba sustituir el menor número posible de piezas. El tiempo hasta el primer fallo viene dado por una variable aleatoria, X, tal que, $\mathrm{E}[X] = \theta$, donde θ es un parámetro desconocido.*

Si el vendedor no quiere pagar ninguna pieza, el tiempo de garantía debería ser nulo, pero esto supondría una mala imagen cara al público, con los consecuentes perjuicios. Por tanto, deberá buscar una cota inferior del tiempo hasta que se produzca el primer fallo del electrodoméstico, "confiando" en que la vida media de ese electrodoméstico sea superior a esa cota inferior. Es decir, extraída una m.a.s., $\underline{X}$, de la población, para $\alpha > 0$ se busca $\underline{\theta}(\underline{X})$ tal que

$$P[\underline{\theta}(\underline{X}) \leq \theta] \quad \geq \quad 1 - \alpha.$$

Ejemplo 3.2 *Un laboratorio está interesado en estudiar la toxicidad media de un determinado producto químico, para ello quiere establecer una cota superior de dicha media y así tener cierta certeza o seguridad de que la toxicidad del producto estará por debajo de esa cota superior. Por tanto, si la toxicidad del producto viene dada por una variable aleatoria, X, tal que $\mathrm{E}[X] = \theta$ donde θ es un parámetro desconocido, se quiere obtener una cota superior del nivel de toxicidad medio "confiando" en que dicho nivel se encuentre por debajo de esa cota. Es decir, extraída una m.a.s., $\underline{X}$, de esta población, para $\alpha > 0$ se busca $\overline{\theta}(\underline{X})$ tal que*

$$P[\theta \leq \overline{\theta}(\underline{X})] \quad \geq \quad 1 - \alpha.$$

Ejemplo 3.3 *Una empresa tabaquera desea estudiar el nivel me-*

dio de nicotina de sus cigarros. A la compañía le interesa que el nivel medio de nicotina se encuentre entre unos márgenes debido a que un nivel medio alto supone que el cigarro es muy perjudicial para la salud y un nivel medio bajo implica que el cigarro carece de sabor. De este modo, si el nivel de nicotina de un cigarro viene dado por una variable aleatoria, X*, tal que* $\mathrm{E}[X] = \theta$*, donde* θ *es un parámetro desconocido, se desea, a partir de una m.a.s.,* $\underline{X}$*, y para* $\alpha > 0$ *obtener* $\underline{\theta}(\underline{X})$ *y* $\overline{\theta}(\underline{X})$ *tal que*

$$P[\underline{\theta}(\underline{X}) \leq \theta \leq \overline{\theta}(\underline{X})] \quad \geq \quad 1 - \alpha.$$

Estos ejemplos ponen de manifiesto la necesidad que existe de construir regiones donde se tenga la "confianza" de encontrar el parámetro. Nuestro estudio se centra en el caso en que el parámetro sea unidimensional y las regiones sean intervalos, por ello, de ahora en adelante, se hablará de *intervalos de confianza*.

Dada una m.a.s. $\underline{X}$ procedente de una variable aleatoria, X, cuya distribución depende de un parámetro desconocido θ y dadas las variables aleatorias $\underline{\theta}(\underline{X})$ y $\overline{\theta}(\underline{X})$. Se define *intervalo de confianza* de nivel $1 - \alpha$ a un intervalo $[\underline{\theta}(\underline{X}), \overline{\theta}(\underline{X})]$, tal que

$$P[\underline{\theta}(\underline{X}) \leq \theta \leq \overline{\theta}(\underline{X})] \geq 1 - \alpha. \tag{3.1}$$

Nótese, que en la definición anterior se habla de nivel de confianza $1 - \alpha$, sin embargo, la probabilidad en dicha expresión es mayor o igual que $1 - \alpha$; esto se debe a que existen situaciones, como en poblaciones discretas, donde no es posible que dicha probabilidad sea exactamente $1 - \alpha$. Como se puede apreciar, los extremos del intervalo son variables aleatorias que dependen de la muestra y que toman para una realización muestral determinada, $\underline{x}$, dos valores puntuales. Así pues, el objetivo de este tema va a ser encontrar $\underline{\theta}(\underline{X})$ y $\overline{\theta}(\underline{X})$, extremos del intervalo de confianza, cumpliendo determinados criterios relativos a la calidad de dicho intervalo. Como ilustración del significado de intervalo aleatorio se tiene el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.4 *Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución $U(0,\theta)$. El nivel de confianza, basado en una muestra de tamaño uno, del intervalo aleatorio $[X, 2X]$ es:*

$$P[X \leq \theta \leq 2X] = P\left[\frac{1}{2}\theta \leq X \leq \theta\right] = \tfrac{1}{2}.$$

Tras esta apreciación, hay que tener cuidado a la hora de interpretar el significado de la expresión (3.1), ya que θ es un valor desconocido pero constante; por ello, su interpretación correcta es que la probabilidad de que el intervalo aleatorio $[\underline{\theta}(\underline{X}), \overline{\theta}(\underline{X})]$ contenga el valor del parámetro, θ, es, al menos, $1-\alpha$. Por otra parte, una vez tomada una muestra, se obtiene un intervalo fijo, con lo cual no tiene sentido hablar de probabilidad, ya que el valor del parámetro pertenecerá o no a ese intervalo fijo, es decir, lo hará con probabilidad 1 ó 0. La explicación anterior justifica que tenga que hablarse en términos de "confianza" cuando se considera una muestra concreta. De esta forma, si el intervalo obtenido para una muestra concreta se ha construido con un nivel de confianza de 0'95, se prevé que dicho intervalo contiene al valor del parámetro, ya que de cada 100 realizaciones muestrales, aproximadamente el intervalo concreto para 95 de ellas contiene dicho parámetro.

En la definición (3.1) se ha hablado de intervalo de confianza en el caso acotado, pero de igual forma, como se aprecia en los ejemplos, puede hablarse de intervalo de confianza acotado inferiormente para θ a un nivel de confianza $1-\alpha$, como el intervalo $[\underline{\theta}(\underline{X}), +\infty)$ donde $\underline{\theta}(\underline{X})$ verifica que

$$P[\underline{\theta}(\underline{X}) \leq \theta] \geq 1-\alpha,$$

y de intervalo de confianza acotado superiormente para θ a un nivel de confianza $1-\alpha$ como el intervalo $(-\infty, \overline{\theta}(\underline{X})]$, donde $\overline{\theta}(\underline{X})$ verifica que

$$P[\overline{\theta}(\underline{X}) \geq \theta] \geq 1-\alpha.$$

2. Intervalos de confianza de longitud mínima

Se puede observar que al ampliar la longitud de un intervalo de confianza aumenta también su nivel de confianza, de hecho, si se considera el intervalo $(-\infty, +\infty)$ se obtiene un intervalo a un nivel de confianza 1. Por otro lado, a un nivel de confianza prefijado, se puede comprobar que no existe un único intervalo. Por ello, se plantea el problema de elegir de entre todos los intervalos a un nivel prefijado, alguno con unas determinadas características. Desde un punto de vista práctico, el intervalo de longitud mínima es una elección interesante, ya que al conservar el nivel de confianza, éste nos da una estimación del parámetro más ajustada que el resto de intervalos del mismo nivel de confianza. Sin embargo, dicha elección presenta el problema de que este intervalo no siempre se puede calcular; en dicho caso, se recurre a una solución alternativa como puede ser la búsqueda del intervalo que tenga longitud mínima esperada, es decir, aquel que minimice la expresión

$$\mathrm{E}[\overline{\theta}(\underline{X}) - \underline{\theta}(\underline{X})].$$

Finalmente, cuando tampoco pueda resolverse este problema, el criterio más empleado consiste en el reparto equitativo del complementario del nivel de confianza entre las dos colas, es decir,

$$P[\underline{\theta}(\underline{X}) \geq \theta] = \frac{\alpha}{2}$$

$$P[\overline{\theta}(\underline{X}) \leq \theta] = \frac{\alpha}{2}\,.$$

Este criterio presenta la ventaja de que conduce a un intervalo único y que en el caso de distribución simétrica con respecto al parámetro es de longitud mínima.

A continuación se dan algunos procedimientos para obtener intervalos de confianza en las situaciones que usualmente se presentan.

3. Método del pivote

Se considera una m.a.s. $\underline{X}$ procedente de una población definida por una variable aleatoria X, cuya distribución dependa de un parámetro desconocido θ. El objetivo de esta sección va a ser desarrollar un método para calcular intervalos de confianza a partir de una función de la muestra que contenga al parámetro y cuya distribución no dependa de él. A continuación, se muestra un ejemplo que ilustra este procedimiento.

Ejemplo 3.5 *Sea $\underline{X}$ una m.a.s. extraída de una $N(\mu, 2)$, se busca un intervalo de confianza para μ a un nivel de confianza $1-\alpha$. Para ello, se sabe que $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, por tanto*

$$\frac{\overline{X}-\mu}{2}\sqrt{n} \quad \sim \quad N(0,1),$$

con lo cual se pueden tomar las constantes $k_1(\alpha)$ y $k_2(\alpha)$ verificando

$$P\left[k_1(\alpha) \leq \frac{\overline{X}-\mu}{2}\sqrt{n} \leq k_2(\alpha)\right] \quad = \quad 1-\alpha,$$

de donde se obtiene que

$$P\left[\overline{X}-k_2(\alpha)\frac{2}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X}-k_1(\alpha)\frac{2}{\sqrt{n}}\right] \quad = \quad 1-\alpha$$

y por tanto un intervalo de confianza a nivel $1-\alpha$ para μ es

$$\left[\overline{X} - k_2(\alpha)\frac{2}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{X} - k_1(\alpha)\frac{2}{\sqrt{n}}\right].$$

Obsérvese que $k_1(\alpha)$ y $k_2(\alpha)$ son constantes cuyo valor depende del valor escogido α.

Se dice que $T(\underline{x};\theta)$ es un *pivote* o *cantidad pivotal* si $T(\underline{x};\theta)$ es una función monótona en θ para todo valor muestral $\underline{x}$, la ecuación $\lambda = T(\underline{x};\theta)$ tiene solución para todo λ y la distribución de $T(\underline{X};\theta)$ es independiente de θ.

4. Intervalos de confianza en poblaciones gausianas

Debido a la importancia que tienen las poblaciones gausianas, se ha dedicado este apartado al estudio de los intervalos de confianza para sus parámetros. Por otro lado, la facilidad del cálculo de cantidades pivotales que presentan estas poblaciones hacen recomendable la obtención de estos intervalos de confianza a través del método pivotal.

En esta sección se tratan tanto los intervalos de confianza en una población como en dos poblaciones gausianas. En ambos casos, dependiendo del parámetro para el cual se busca un intervalo de confianza y del conocimiento o no de los otros parámetros, se presentan diferentes situaciones que a continuación van a ser estudiadas. En primer lugar se analizan las distintas situaciones para el caso de una población X que sigue una gausiana de media μ y varianza σ^2 y de la cual se extrae una m.a.s., $\underline{X}$, de tamaño n.

La tabla 3.1 resume los resultados que se van a obtener en lo que sigue.

4.1. Intervalo de confianza para la media, conocida la varianza

Debido a que se quiere encontrar un intervalo de confianza para la media y se sabe que $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, puede elegirse como pivote la tipificación de dicha variable aleatoria, es decir,

$$T(\underline{X};\theta) = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1),$$

con lo cual, dado un nivel de confianza $1-\alpha$, para una variable aleatoria $Z \sim N(0,1)$ se pretende encontrar $k_1(\alpha)$ y $k_2(\alpha)$ (que para un mejor entendimiento serán denotados por $k_1 = k_1(\alpha)$ y $k_2 = k_2(\alpha)$), tales que

$$P[k_1 \leq Z \leq k_2] = 1 - \alpha.$$

Dados α_1, $\alpha_2 \geq 0$ tales que $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ (α_1 y α_2 representan el reparto de la probabilidad α entre las dos colas), k_1 y k_2 se obtendrán a partir de las igualdades

$$\begin{aligned} P[Z \leq k_1] &= \alpha_1 \\ P[Z \geq k_2] &= \alpha_2. \end{aligned}$$

Una vez calculados k_1 y k_2 se obtiene que

$$1 - \alpha = P\left[k_1 \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq k_2\right]$$

$$\begin{aligned} &= P\left[k_1\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X}-\mu \leq k_2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \\ &= P\left[\overline{X}-k_2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X}-k_1\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]. \end{aligned}$$

Se observa que para cada elección de α_1 y α_2 tales que $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$, se obtiene un intervalo diferente; con lo cual, como se decía anteriormente, se escogerá de entre todos ellos el de longitud mínima para este pivote, siempre que ello sea posible.

Se puede demostrar que el intervalo de confianza más pequeño coincide con el obtenido por el reparto equitativo de α entre ambas colas; lo cual era esperable ya que la distribución gausiana es simétrica respecto a su media. El intervalo en forma explícita viene dado por la expresión

$$I_{1-\alpha}(\mu)=\left[\overline{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{X}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Ejemplo 3.6 *Con el fin de estudiar el número medio de flexiones continuadas que pueden realizar sus alumnos, un profesor de educación física somete a 80 de ellos, elegidos aleatoriamente, a una prueba. Los resultados fueron los siguientes:*

Flexiones	35	41	46	48	50	52	53	54	56	60
Alumnos	5	6	2	10	15	6	11	10	5	5

Se sabe que el número de flexiones se distribuye según una gausiana de varianza poblacional 7'5.

Para construir un intervalo de confianza al 95 % para la media del número de flexiones, se tiene que la media muestral es $\bar{x}=49'78$ *y que* $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=1'96$. *Por tanto, el intervalo obtenido para esta muestra concreta, viene dado por*

$$\begin{aligned} I_{0'95}(\mu) &= \left[49'78 \pm 1'96\sqrt{\tfrac{7'5}{80}}\right] \\ &= [49'18, 50'38]. \end{aligned}$$

4.2. Intervalo de confianza para la media, desconocida la varianza

Denotando por S_c^2 a la cuasivarianza muestral y usando que $\bar{X}$ y S_c^2 son independientes, se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1) \\ (n-1)\dfrac{S_c^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\overline{X}-\mu}{S_c}\sqrt{n} \sim t_{n-1},$$

donde t_{n-1} representa la distribución t con $n-1$ grados de libertad.

Se puede observar que $T(\underline{X},\mu) = \frac{\bar{X}-\mu}{S_c}\sqrt{n}$ es un pivote, con lo cual, puede usarse para obtener un intervalo de confianza para la media de una población gausiana cuando la varianza es desconocida. Operando igual que en el caso anterior se tendría

$$I_{1-\alpha}(\mu) = \left[\overline{X} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_c}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{X} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_c}{\sqrt{n}}\right],$$

que expresado en términos de la varianza, S^2,

$$I_{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{X} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n-1}}\ ,\ \bar{X} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right].$$

Ejemplo 3.7 *A partir de una muestra de 20 linternas cuyos periodos de duración (en horas) han sido*

503	480	345	427	386	432	429	378	440	434
429	436	451	466	394	422	412	507	433	480

se quiere obtener un intervalo de confianza al 95 % para la vida media de una población de linternas que se distribuye normalmente.

Teniendo en cuenta que $\overline{x} = 434'2$, $S_c = 40'63$ *y que para* $\alpha = 0'05$ *y* $n = 20$ *es* $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} = 2'093$, *se tiene que un intervalo de confianza al 95 % para la vida media de las linternas es*

$$\begin{aligned} I_{0'95}(\mu) &= \left[434'2 \pm 2'093\tfrac{40'63}{\sqrt{20}}\right] \\ &= [415'18, 453'21]. \end{aligned}$$

4.3. Intervalo de confianza para la varianza, conocida la media

En este caso, puesto que $\frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ y $\frac{X_i-\mu}{\sigma}$, para $i = 1,\ldots,n$, son independientes dos a dos, se tiene que

$$T(\underline{X};\theta) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_n,$$

donde χ^2_n representa la distribución ji-cuadrado con n grados de libertad. Utilizando $T(\underline{X};\theta)$ como pivote y definiendo $S^2_\mu = \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2}{n}$, el intervalo de confianza a un nivel $1-\alpha$ viene dado por

$$I_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{nS^2_\mu}{\chi^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}\ ,\ \frac{nS^2_\mu}{\chi^2_{n,\frac{\alpha}{2}}}\right].$$

4.4. Intervalo de confianza para la varianza, desconocida la media

Por el Teorema de Físher se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

Razonando de igual forma que en el apartado anterior se obtiene que el intervalo de confianza a un nivel $1-\alpha$ para σ^2 es

$$I_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)S^2_c}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}\ ,\ \frac{(n-1)S^2_c}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right],$$

que expresado en términos de la varianza, S^2, queda

$$I_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{nS^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}\ ,\ \frac{nS^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right].$$

Ejemplo 3.8 *Se sabe que el peso por comprimido de un cierto preparado farmacéutico se distribuye según una gausiana. Con el objeto de estudiar la varianza de la distribución, se extrae una m.a.s. de 6 artículos. Sabiendo que la varianza muestral es igual a 40, se pretende estimar la varianza poblacional mediante un intervalo de confianza al 90 %.*

Puesto que μ es desconocida, un intervalo de confianza para σ^2 viene dado por

$$I_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{nS^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{nS^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right],$$

donde $\alpha = 0'1$, $n = 6$, *y* $S^2 = 40$. *Así,*

$$\chi^2_{5,0'95} = 11'07 \quad y \quad \chi^2_{5,0'05} = 1'145;$$

con lo cual,

$$\begin{aligned} I_{0'90}(\sigma^2) &= \left[\frac{6 \cdot 40}{11'07}, \frac{6 \cdot 40}{1'145}\right] \\ &= [21'68, 209'61]. \end{aligned}$$

5.*** Método asintótico basado en el Teorema Central del Límite

Esta sección está dedicada a la búsqueda de intervalos de confianza para la media de una población de la cual se posee una muestra de gran tamaño, es decir, se va a construir un intervalo de confianza asintótico para la media.

Cuando se busca el intervalo de confianza para la media de una población, el estimador natural es la media muestral $\overline{X}$. Sin embargo, puede suceder que se desconozca su distribución y consecuentemente no se pueda calcular dicho intervalo. Para superar esta dificultad, se utiliza el Teorema Central del Límite.

Antes de continuar es necesario introducir el concepto de convergencia en distribución o en ley.

Dada $(X_n)_{n\in\mathcal{N}}$ una sucesión de variables aleatorias con función de distribución F_n. Se dice que X_n *converge en ley* o *en distribución* a una variable aleatoria X con función de distribución F, si $F_n(x) \to F(x)$ en todo punto de continuidad de F, este tipo de convergencia se denota por $X_n \xrightarrow{d} X$ o $X_n \xrightarrow{l} X$.

Así mismo, será de gran utilidad el siguiente teorema conocido como *Teorema de Líndeberg y Leví.*

Dadas $X_1, \ldots, X_n$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que, $\mathrm{E}[X] = \mu$ y $\mathrm{V}[X] = \sigma^2 < \infty$. Entonces:

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Por tanto, siempre que el objetivo sea obtener un intervalo de confianza para la media, se puede aplicar este teorema y usar las mismas técnicas empleadas para obtener el intervalo de confianza para la media de una población gausiana, con la salvedad de que en este caso el nivel de confianza de este intervalo no será exacto, sino aproximado.

Debido a que en la mayoría de las situaciones reales que se presentan la varianza poblacional es desconocida, en este método asintótico la varianza poblacional, se aproxima por la muestral, obteniéndose que

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

5.1. Intervalos de confianza para la proporción

Considérese una m.a.s. $\underline{X}$ extraída de una población definida por una variable aleatoria X, distribuida según una Bernuli de parámetro p. Si la variable aleatoria toma valores 0 y 1, el estimador del parámetro p es

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}.$$

Puesto que

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\hat{p}] &= p \\ \mathrm{V}[\hat{p}] &= \frac{p(1-p)}{n},\end{aligned}$$

puede deducirse, aplicando una variante del Teorema de Líndeberg y Leví para este tipo de distribuciones, que

$$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

A partir de este resultado se puede construir un intervalo de confianza, a través de la doble aproximación, donde $p(1-p)$ es sustituido por su estimador $\hat{p}(1-\hat{p})$.

Utilizando la doble aproximación y el mismo valor para $k = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$,

$$\begin{aligned}1-\alpha &= P[-k \leq N(0,1) \leq k] = \\ &= P\left[-k \leq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}\sqrt{n} \leq k\right] = \\ &= P\left[\hat{p} - \frac{k}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} \leq p \leq \hat{p} + \frac{k}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\right],\end{aligned}$$

de donde se deduce que el intervalo es

$$I_{1-\alpha}(p) = \left[\hat{p} \pm \frac{k}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\right].$$

Ejemplo 3.9 *En unas elecciones, el candidato A desea estimar, al 95 % de confianza, la proporción de votantes que están a su favor. Con este fin, toma una muestra aleatoria de 100 votantes, observando que el 55 % son partidarios suyos, obteniendo un intervalo de confianza de sus probabilidades de triunfo igual a*

$$\begin{aligned}I_{0'95}(p) &= \left[\hat{p} \pm Z_{0'975}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] \\ &= \left[0'55 \pm 1'96\sqrt{\frac{0'55 \cdot 0'45}{100}}\right] \\ &= [0'55 \pm 0'1] \\ &= [0'45, 0'65].\end{aligned}$$

6. Determinación del tamaño muestral

Una vez estudiados diferentes métodos de construcción de un intervalo de confianza, se pone de manifiesto la importancia del tamaño muestral en los procesos inferenciales y más concretamente, en la construcción de intervalos de confianza para la media de una población. En esta sección, el objetivo va a consistir en fijar el tamaño muestral para que el error cometido en el proceso de estimación de dichos intervalos sea menor que una cantidad prefijada.

6.1. Determinación del tamaño muestral para la proporción

En las secciones anteriores se estudió que el intervalo de confianza para la proporción de una población viene dada por

$$P\left[\hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] = 1-\alpha,$$

o equivalentemente

$$P\left[|\hat{p}-p| \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] = 1-\alpha.$$

Siguiendo el razonamiento de los apartados anteriores se obtiene que el tamaño necesario para cometer un error menor que una cantidad prefijada, ε, debe ser mayor que

$$\frac{Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\hat{p}(1-\hat{p})}{\varepsilon^2}.$$

Ejemplo 3.10 *Con el fin de organizar su producción, una determinada fábrica emprende una investigación para conocer la proporción de consumidores que adquieren su producto. Se quiere que el error de estimación máximo sea del 3 % con una confianza del 95 %, así que se trata de averiguar cuál debe ser el tamaño de la muestra para que se cumplan estos objetivos.*

Se puede observar que nada se sabe acerca de $\hat{p}$. En esta ocasión y puesto que $\max \hat{p}(1-\hat{p}) = \frac{1}{4}$, *se tendrá que*

$$\frac{\frac{1}{4}Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\varepsilon^2} \quad \leq \quad n.$$

Como $\varepsilon = 0'03$ *y* $\alpha = 0'05$*, se tiene que* $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.
Así,

$$0'25\frac{(1'96)^2}{(0'03)^2} = 1067'11 \leq n.$$

Por tanto, el tamaño de la muestra ha de ser como mínimo de 1068 consumidores.

7. Tablas de intervalos de confianza

Distribución	Parámetro	Casos	Intervalo
Gausiana $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	μ	σ conocida	$\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
		σ desconocida	$n < 30$: $\bar{x} \pm t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_c}{\sqrt{n}}$ $n \geq 30$: $\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_c}{\sqrt{n}}$
Desconocida $n \geq 30$	μ	σ conocida	$\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
		σ desconocida	$\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_c}{\sqrt{n}}$
Bernuli $\mathcal{B}(p)$	p	Muestras grandes	$\hat{p} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ $\hat{p} = \bar{x}$; $\hat{q} = 1 - \bar{x}$
Gausiana $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	σ^2	μ conocida	$\left(\frac{nS_\mu^2}{\chi^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{nS_\mu^2}{\chi^2_{n,\frac{\alpha}{2}}} \right)$ $S_\mu^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{n}$
		μ desconocida	$\left(\frac{(n-1)S_c^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)S_c^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}} \right)$

Tabla 3.1: Intervalos de confianza para una población

8. Ejercicios

8.1. Ejercicios resueltos

3.1 Se han generado aleatoriamente 20 datos extraídos de una población $N(0,4)$, obteniéndose que $\bar{X} = -0'052783$ y $S_c^2 = 3'17325$. Obtener un intervalo de confianza a un nivel de confianza $1-\alpha$ para el caso en que $\sigma = 1$ y en el caso en que no se conozca su valor. De igual forma, calcúlense los intervalos de confianza para σ en el caso de que $\mu = 0$ y en el caso de que se desconozca su valor.

Solución: Los resultados obtenidos vienen reflejados en la tabla 3.2.

Intervalos ($\alpha = 0'05$)	$\bar{X} = -0'052783$ $S_c^2 = 3'17325$	Amplitud del intervalo
$\sigma = 1$	$I_{1-\alpha}(\mu) = [-0'437, 0'331]$	$\Delta = 0'768$
σ desconocida	$I_{1-\alpha}(\mu) = [-0'407, 0'317]$	$\Delta = 0'724$
$\mu = 0$	$I_{1-\alpha}(\sigma^2) = [2'427, 4'236]$	$\Delta = 1'809$
μ desconocida	$I_{1-\alpha}(\sigma^2) = [2'449, 4'275]$	$\Delta = 1'826$

Tabla 3.2: Resultados: Distribución $N(\mu, \sigma)$

Hay que señalar que el intervalo encontrado cuando σ es desconocida es más pequeño que el encontrado cuando es conocida. Esto se debe a que cuando σ es desconocida se toma la cuasivarianza (o varianza), que en este caso vale $S_c^2 = 3'17325$, que es más pequeño que el valor de $\sigma^2 = 4$.

8.2. Ejercicios propuestos

3.1. Un fabricante diseña un experimento para estimar la tensión de ruptura media de una fibra. Para ello, observa las tensiones de ruptura, en libras, de 16 hilos de dicha fibra seleccionados aleatoriamente. Las tensiones son 20’8, 20’6, 21’0, 20’9, 19’9, 20’2, 19’8, 19’6, 20’9, 21’1, 20’4, 20’6, 19’7, 19’6, 20’3, 20’7.

Si la tensión de ruptura se distribuye según una Normal de desviación típica $\sigma = 0'45$ libras, constrúyase un intervalo al 98 % para el valor real de la tensión de ruptura promedio de la fibra.

3.2. El ayuntamiento de una determinada ciudad está interesado en estimar la cantidad promedio de dinero que gastan los turistas durante su estancia en la ciudad. Una encuesta llevada a cabo entre una muestra aleatoria de turistas obtuvo los siguientes datos expresados en euros: 150, 175, 163, 148, 142, 189, 135, 174, 168, 152, 158, 184, 134, 146, 155, 163. Suponiendo que la cantidad gastada al día es una variable aleatoria gausiana, obténganse los intervalos de confianza para el promedio de dinero que gastan los turistas al día, estimados al 90, 95 y 98 %.

3.3. A partir de una muestra de 26 embotelladoras de agua, se observa que el número medio de botellas llenas es de 71’2 por minuto y que su varianza es de 13’4. Suponiendo normalidad, calcule un intervalo de confianza del 95 % para el número medio de botellas rellenas.

3.4. Se está realizando un estudio para determinar el grado de precisión de las medidas efectuadas por un aparato. Para ello, se realizan 10 medidas, observándose que presentan una desviación típica de 0’23 unidades. Suponiendo gausianidad, obténgase un intervalo de confianza al 99 % para la desviación típica de las medidas llevadas a cabo por el aparato.

3.5. En un comercio se recibe un lote de 200 artículos de los cuales 8 están defectuosos. Obténganse intervalos de confianza al 90, 95 y 99 % para la proporción de artículos defectuosos.

3.6. En una población de 10000 niños se desea hacer una campaña de vacunación. Se quiere saber cuántas vacunas deben preverse, con un 95 % de confianza, si de una m.a.s. de 90 encuestados 30 estaban vacunados.

3.7. A partir de una muestra de tamaño 100, cuya media fue 0'37, obtenga un intervalo de confianza del 92'5 % para el parámetro de una distribución $B(1, p)$.

3.8. Con el propósito de estudiar la cantidad de nicotina de una determinada marca de cigarrillos se toma una muestra de 100 de ellos, encontrándose una media de 26 mg. Se sabe que la cantidad de nicotina se distribuye normalmente, y que su desviación típica es de 8 mg.

a) Obtenga un intervalo de confianza para el contenido medio en nicotina al 99 %.

b) Estudie cuál debe ser el tamaño de la muestra para que la amplitud del intervalo disminuya en 2 mg.

Inferencia Estadística
(apuntes para el grado en ingeniería)
C. E. Carleos Artime, sobre el trabajo de I. Espejo Miranda, F. Fernández Palacín, M. A. López Sánchez, M. Muñoz Márquez, A. M. Rodríguez Chía, A. Sánchez Navas, C. Valero Franco

Capítulo 4

Docimasia de hipótesis

1. Conceptos básicos

Este capítulo está dedicado al estudio de los contrastes de hipótesis, sin lugar a dudas, la técnica más utilizada para tratar problemas de Inferencia Estadística. En primer lugar, con el objetivo de conseguir una primera aproximación a la metodología empleada en los contrastes de hipótesis, se propone un ejemplo, en el que de forma natural e intuitiva se van a usar técnicas de resolución de dichos problemas que posteriormente se justificarán desde un punto de vista teórico.

Este capítulo trata los contrastes paramétricos de una y dos muestras, dejando para el tema siguiente los contrastes no paramétricos.

Ejemplo 4.1 *El diámetro de un individuo adulto de una especie de estrella de mar en una región surmediterránea está representado por una variable X con distribución $N(\mu, 1'3)$. Por estudios realizados en otras zonas sobre animales de la misma especie se ha estimado un diámetro medio de 7'4 cm. Interesa estudiar si nuestra variable tiene el mismo comportamiento; es decir, si el diámetro 7'4 es válido para la región surmediterránea. Estadísticamente tendríamos que elegir entre:*

$$H_0 : \mu = 7\text{'}4 \quad y \quad H_1 : \mu \neq 7\text{'}4.$$

> *H_0 se dice Hipótesis Nula, mientras que H_1 es la Hipótesis Alternativa.*
>
> *Para decidir entre una u otra se selecciona una muestra de 100 individuos y se analiza si la información que ésta ofrece es compatible con H_0 o no.*
>
> *Puesto que el parámetro bajo estudio es la media poblacional, μ, es lógico utilizar en el proceso inferencial su estimador ideal, esto es, la media muestral, $\bar{X}$. A partir de dicho estimador se establece un criterio de decisión: groso modo, si la diferencia entre $\bar{X}$ y 7'4 es grande habrá que rechazar H_0, actuando en sentido contrario si la diferencia es pequeña. Debido a que la media muestral en poblaciones gausianas tiene una distribución $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$, la variable*
>
> $$D = \frac{\bar{X} - 7\text{'}4}{1\text{'}3/\sqrt{100}}$$
>
> *sigue una distribución N(0,1), cuando H_0 es cierta.*
>
> *A partir de esta variable aleatoria se debe precisar también lo que se entiende por diferencias grandes, así como, acotar la probabilidad de cometer errores cuando se realice la toma de decisiones. Todo ello, se irá analizando a lo largo del presente capítulo.*

A continuación, se define lo que se entiende por hipótesis estadística y contraste de hipótesis, observando que en la literatura se pueden encontrar sinónimos de este último término tales como *prueba estadística o dócima.*

1.1. Las hipótesis

Una *hipótesis estadística* es una afirmación o conjetura sobre la distribución de una o más variables aleatorias, o bien, sobre alguna característica de las mismas.

La hipótesis que se desea contrastar se denomina *Hipótesis Nula*, mientras que la que se acepta cuando la evidencia muestral está claramente en contra de ésta se denomina *Hipótesis Alternativa.*

Si se quisiera contrastar la hipótesis de que un cierto parámetro θ de una población toma un valor dentro de una región Θ_0 siendo Θ el campo de variación de dicho parámetro, la Hipótesis Alternativa debe contemplar que el parámetro tome valores en una región Θ_1.

Se define *contraste de hipótesis* como un procedimiento inferencial consistente en rechazar o no, una hipótesis de tipo estadístico sobre una población, teniendo en cuenta la Hipótesis Alternativa y la evidencia experimental proporcionada por una muestra particular obtenida de dicha población.

En otras palabras, un contraste de hipótesis supone una partición del espacio muestral en dos regiones, región de aceptación y región crítica o de rechazo, de forma que si la muestra considerada se encuentra dentro de la región crítica se rechaza la Hipótesis Nula, mientras que en el caso contrario no se rechaza dicha hipótesis al no existir evidencias para rechazarlas.

Debe tenerse en cuenta que el no rechazo de la Hipótesis Nula no supone ninguna garantía de la certeza de ésta, sino la falta de evidencia en contra de su veracidad. Se podría asimilar la Hipótesis Nula a una persona que está siendo juzgada según el principio de presunción de inocencia, de forma que sólo se rechaza su inocencia, es decir, la Hipótesis Nula, en caso de encontrar pruebas suficientes en contra.

A la vista de la definición, se podría decir que un contraste es una regla de decisión, pero dado que a la hora de adoptar dicha decisión y, como se verá en el desarrollo del capítulo, no se estará a la misma distancia de ambas hipótesis, sino que se dará mucho mayor crédito a la Hipótesis Nula, se trata más bien de una regla de decisión–

confirmación. Por ello, teniendo en cuenta el desequilibrio entre las hipótesis, sólo se debería contrastar aquello sobre lo que se tuviera una justificada sospecha de su certeza.

1.2. Clasificación de los contrastes

Dependiendo del grado de conocimiento de la distribución de la población bajo estudio, se distingue entre contrastes paramétricos y no paramétricos. En el caso de que dicha distribución sea conocida salvo parámetros, los tipos de contrastes que se realizan son del tipo paramétrico, siendo su objetivo intentar obtener información sobre los parámetros desconocidos de la distribución de la población bajo estudio. En el caso de que dicha distribución sea desconocida, los contrastes son de tipo no paramétrico, siendo su objetivo intentar determinar alguna característica de la población o de la muestra bajo estudio.

Puesto que los contrastes paramétricos utilizan más información que los no paramétricos, ofrecen mejores resultados. Por ello, siempre que sea posible se debe recurrir a los primeros.

1.2.1. Tipos de contraste sobre parámetros

En nuestro caso distinguiremos entre los siguientes tipos de contrastes:

1. Contrastes bilaterales: en ellos se propone un valor puntual para el parámetro bajo estudio, de forma que se rechazará bien porque la evidencia muestral lleve a decidir que el valor es mayor que el propuesto o bien que es menor. Formalmente:
$$\left\{\begin{array}{l} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{array}\right.$$
2. Contrastes unilaterales: en ellos se propone que el valor del parámetro se encuentre bien por debajo o bien por encima de un cierto valor. Las dos situaciones se plantearían de la siguiente forma:

$$\begin{cases} H_0 : \theta \geq \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : \theta \leq \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$$

Se puede observar que en todos los casos el signo igual está incluido en la Hipótesis Nula, el motivo de ello se encuentra en el enfoque que se va a utilizar para realizar el contraste.

2. Los errores de un contraste

A continuación y relacionado con la cuestión anterior, se detallan las consecuencias derivadas de la decisión que se adopte sobre el rechazo o no de la Hipótesis Nula. Antes de ello, véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.2 *Imagínese que se quiere contrastar la hipótesis de que un parámetro de una población toma exactamente el valor 5, sobre lo cual se tienen fundadas sospechas. Para ello, se dispone de una m.a.s. de tamaño 100 extraída de dicha población, de forma que la regla de decisión va a ser: si en la muestra hay al menos 50 valores en el intervalo* $[4'75, 5'25]$ *se admite la Hipótesis Nula y si no es así se rechaza, concluyendo que el valor del parámetro es distinto de 5.*

2.1. Actuaciones asociadas a un contraste de hipótesis

El cuadro siguiente refleja las repercusiones que se derivan de la decisión que se adopte en la realización de un contraste:

		Decisión estadística	
		No rechazar H_0	Rechazar H_0
Estado Real	H_0 cierta	Correcta	Error tipo 1
de la cuestión	H_0 falsa	Error tipo 2	Correcta

Trasladando a términos probabilísticos los resultados de las actuaciones se tiene:

$$
\begin{array}{lll}
P[\text{Rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ cierta}] & = \alpha, & \text{se denomina } \textit{nivel de significación} \\
 & & \textit{del contraste.} \\
P[\text{No rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ cierta}] & = 1-\alpha, & \text{denominado } \textit{nivel de confianza.} \\
P[\text{Rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}] & = 1-\beta, & \text{será la } \textit{potencia del contraste.} \\
P[\text{No rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}] & = \beta, & \text{será el } \textit{riesgo del contraste.}
\end{array}
$$

Puesto que en la práctica no se sabrá si la decisión adoptada es correcta o no, habrá que elegir contrastes que minimicen las probabilidades de error de tipo 1 y 2. Sin embargo, esto no es posible ya que dichas probabilidades son, en cierto sentido, complementarias, ya que cuando disminuye una aumenta la otra. Por ello, el criterio que se utiliza es el de fijar el nivel de significación, eligiendo de entre todos los test posibles con ese nivel de significación aquel que haga mínimo el riesgo o, lo que es lo mismo, máxima la potencia.

En general, la potencia del contraste dependerá de la realidad de la situación, que será desconocida, por lo que lo ideal será utilizar, si es que existe, el contraste denominado *uniformemente más potente*, es decir, aquel que se comporta mejor que el resto en cualquier situación.

Por último, la reducción simultánea de los dos errores, una vez seleccionado el contraste a utilizar, sólo será factible si se dispone de una mayor información, es decir, si se aumenta el tamaño de la muestra.

Ejemplo 4.3 *Sea X una variable con distribución Exponencial de parámetro θ. Se desea contrastar*

$$
\begin{cases} H_0 : \theta \leq 1 \\ H_1 : \theta > 1 \end{cases}
$$

Para realizar el contraste se toma como región de aceptación para una muestra de tamaño 1 el intervalo $[0, T)$. La probabilidad de error de primer tipo α viene dada por:

$$\begin{aligned} \alpha &= P[\textit{Rechazar } H_0 \mid H_0 \textit{ cierta}] \\ &= P[X \geq T \mid \theta = 1] \\ &= \int_T^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-T} \end{aligned}$$

y por tanto $T = -\log\alpha$, *mientras que, suponiendo en la hipótesis alternativa que* $\theta = 2$, *entonces*

$$\begin{aligned} \beta &= P[\textit{No rechazar } H_0 \mid H_0 \textit{ falsa}] \\ &= P[0 \leq X \leq T \mid \theta = 2] \\ &= \int_0^{-\log\alpha} 2e^{-2x} dx \\ &= 1 - e^{2\log\alpha} \end{aligned}$$

con lo que la relación entre las probabilidades queda $\beta = 1 - \alpha^2$, *lo que significa que cuando uno crece el otro decrece y viceversa.*

Ejemplo 4.4 *Sea* X *una variable aleatoria que se distribuye según* $N(\mu, 1)$. *Se desea realizar el contraste*

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq 0 \\ H_1 : \mu > 0 \end{cases}$$

La regla de decisión que se va a utilizar es la siguiente: si una muestra de tamaño 1 pertenece al intervalo $(-\infty, 2\text{'}575)$ no se rechaza H_0; en caso contrario, se rechaza. *Se procede a calcular el nivel de significación y la potencia del contraste. Para el nivel:*

$$\begin{aligned} \alpha &= P[\textit{Rechazar } H_0 \mid H_0 \textit{ cierta}] \\ &= P[X \geq 2\text{'}575 \mid \mu = 0] \\ &= P[Z \geq 2\text{'}575] = 0\text{'}005 \end{aligned}$$

Para la potencia, supongamos que el verdadero valor de μ *es* 3*:*

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= 1 - P[\textit{No rechazar } H_0 \mid H_0 \textit{ falsa}] \\ &= 1 - P[X < 2\text{'}575 \mid \mu = 3] \\ &= 1 - P[Z < -0\text{'}425] = 0\text{'}6646. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.5 *Si en el ejemplo anterior se elige como región de aceptación* $(-3, 2\text{'}69)$, *entonces*

$$\begin{aligned}\alpha &= P[(X \leq -3) \cup (X \geq 2\text{'}69) \mid \mu = 0] \\ &= P[Z \leq -3] + P[Z \geq 2\text{'}69] \\ &= 0\text{'}0014 + 0\text{'}0036 = 0\text{'}005.\end{aligned}$$

Es decir, el mismo nivel de significación que en el caso anterior, mientras que

$$\begin{aligned}1 - \beta &= 1 - P[-3 < X < 2\text{'}69 \mid \mu = 3] \\ &= 1 - P[-6 < Z < -0\text{'}31] = 0\text{'}6217.\end{aligned}$$

Por tanto, si se ha de decidir entre los dos contrastes propuestos, puesto que el nivel de significación es el mismo, se elegirá el primero al ser más potente.

3. Metodología de Físher para la realización de un contraste paramétrico

Se plantea una metodología propuesta por Físher que parte del conocimiento de la estructura de probabilidad de la población bajo estudio y consta de los siguientes pasos:

1. Definir la Hipótesis Nula por contrastar sobre el parámetro θ objeto de estudio, que puede concretarse en $H_0 : \theta = \theta_0$, lo que determinará la Hipótesis Alternativa, $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

2. Dar una medida, $d(\hat{\theta}(\underline{X}), \theta_0)$, de la discrepancia entre la evidencia muestral, $\underline{X}$, representada por el estimador de θ, $\hat{\theta}(\underline{X})$ y H_0, de tal forma que d tenga una distribución conocida cuando H_0 sea cierta.

3. Tomar una muestra, obtener la estimación del parámetro, $\hat{\theta}(\underline{x})$, y calcular $d_0 = d(\hat{\theta}(\underline{x}), \theta_0)$.

4. Si d_0 es muy grande, es decir, si $P[d \geq d_0]$ es muy pequeña, menor que α, se rechaza H_0, mientras que si $P[d \geq d_0] > \alpha$, no se rechaza H_0.

El nivel de significación es el que determina la región de aceptación y la de rechazo, para lo que se calcula el valor d_c, tal que

$$P[d > d_c \mid H_0] = \alpha$$

de forma que si $d_0 > d_c$ se rechaza la Hipótesis Nula, no rechazándose en caso contrario.

A la probabilidad

$$p = P[d > d_0 \mid H_0]$$

se le llama *nivel crítico* o *p-valor* del contraste. Cuando $p \geq \alpha$ no se rechaza H_0 mientras que cuando $p < \alpha$ se rechaza; además, el nivel crítico proporciona una información adicional de las garantías con las que se rechaza o no la Hipótesis Nula. Así, si p está próximo a α hay que ser más prudente en la decisión que se adopte, pudiendo recurrirse, si fuera posible, a conseguir más información tomando más elementos muestrales o una nueva muestra. En cambio si p es mucho más pequeño o mucho más grande que α, la decisión adoptada estará más respaldada.

Ejemplo 4.6 *Se considera una población $N(\mu, 1)$ de la que se extrae una m.a.s. de tamaño 16 para realizar el contraste*

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 1 \\ H_1 : \mu \neq 1 \end{cases}$$

de forma que $\bar{x} = 1'5$. Se supone $\alpha = 0'05$.

Como medida de la discrepancia se toma:

$$d(\underline{X}) = \left| \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right|$$

es decir, se estiman las diferencias en valor absoluto. Para calcular el punto crítico, puesto que $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ sigue una distribución $N(0,1)$, se tiene que;

$$P[d > d_c] = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad P[-d_c < Z < d_c] = 0'05.$$

Buscando en las tablas resulta que $d_c = 1'96$. Por otra parte, se tiene que

$$d_0 = \left|\frac{1\text{'}5-1}{1/\sqrt{16}}\right| = 2$$

por lo que se está dentro de la región crítica. Es decir, hay que admitir que la media de la población es distinta de uno, para un nivel de significación de 0'05.

El nivel crítico del test es igual a

$$P[|Z| > 2] = 2\, P[Z > 2] = 0\text{'}046.$$

Por tanto, hay que mostrar ciertas reservas en la decisión tomada ya que 0'046 *está muy próximo a* 0'05.

Ejemplo 4.7 *Con los mismos datos del ejemplo anterior, se supone que la desviación típica de la población es desconocida y que* $S_n = 1\text{'}2$, *deseándose realizar el contraste*

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq 1 \\ H_1 : \mu > 1. \end{cases}$$

Ahora preocupa el comportamiento en los valores del parámetro a la derecha de uno, donde debe concentrarse la región crítica. Como medida de la discrepancia se toma

$$d(\underline{X}) = \frac{\overline{X}-\mu}{S_n/\sqrt{n-1}}.$$

Al ser $d \sim t_{n-1}$, *el punto crítico viene dado por*

$$P[d > d_c \mid H_0] = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad P[t_{15} > d_c \mid H_0] = 0\text{'}05,$$

buscando en las tablas se encuentra que

$$d_c = 1\text{'}7531.$$

Puesto que

$$d_0 = \frac{1\text{'}5 - 1}{1\text{'}2/\sqrt{15}} = 1\text{'}613743$$

debe mantenerse H_0 *y concluir que la media de la población no es mayor que uno para un nivel de signi-*

ficación de 0'05.

El nivel crítico viene dado por

$$P[t_{15} > 1'613743] = 0'0637$$

4. Contrastes en poblaciones gausianas

4.1. Contrastes sobre una población

Sea una m.a.s., $\underline{X}$, extraída de una población $N(\mu, \sigma)$. La tabla 4.3 proporciona las regiones críticas en función de las distintas situaciones que se pueden presentar.

4.2. Contrastes sobre dos poblaciones

En primer lugar, habría que distinguir si las muestras son extraídas de poblaciones gausianas independientes o si, por el contrario, se trata de muestras pareadas.

Supónganse $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ y $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ dos m.a.s. extraídas de dos poblaciones independientes, $N(\mu_1, \sigma_1)$ y $N(\mu_2, \sigma_2)$, respectivamente. La tabla 4.4 proporciona las regiones críticas en función de las distintas situaciones que se pueden presentar.

Cuando las dos m.a.s., $X_1, X_2, \cdots, X_n$ y $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$, extraídas de dos poblaciones $N(\mu_1, \sigma_1)$ y $N(\mu_2, \sigma_2)$, respectivamente, son pareadas, se considera la muestra de las diferencias y se aplican los contrastes para una población.

5. Contrastes para la proporción

Para tamaños muestrales grandes se puede aplicar una variante del Teorema de Líndeberg y Leví, que garantiza la convergencia de la binomial a la gausiana, obteniéndose los contrastes para la proporción o para la diferencia de proporciones.

5.1. Contrastes sobre una población

Tomando como estimador del parámetro p de la binomial la proporción muestral $\hat{p}$, basado en una muestra de tamaño n, se obtienen los contrastes de la tabla 4.1.

5.2. Contrastes sobre dos poblaciones

Tomando como estimadores de los parámetros p_1 y p_2 de dos poblaciones binomiales las respectivas proporciones muestrales, $\hat{p}_1$ y $\hat{p}_2$, basadas en muestras de tamaños n_1 y n_2, se obtienen los contrastes de la tabla 4.2.

6. Tablas de contrastes de hipótesis

Hipótesis	Región Crítica
$\begin{cases} H_0: & p = p_0 \\ H_1: & p \neq p_0 \end{cases}$	$\lvert\hat{p} - p_0\rvert \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$
$\begin{cases} H_0: & p = p_0 \\ H_1: & p < p_0 \end{cases}$	$\hat{p} - p_0 \leq Z_{\alpha}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$
$\begin{cases} H_0: & p = p_0 \\ H_1: & p > p_0 \end{cases}$	$\hat{p} - p_0 \geq Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

Tabla 4.1: Contrastes sobre la proporción

Hipótesis	Región Crítica
$\begin{cases} H_0: & p_1 = p_2 \\ H_1: & p_1 \neq p_2 \end{cases}$	$\lvert\hat{p}_1 - \hat{p}_2\rvert \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$
$\begin{cases} H_0: & p_1 = p_2 \\ H_1: & p_1 < p_2 \end{cases}$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$
$\begin{cases} H_0: & p_1 = p_2 \\ H_1: & p_1 > p_2 \end{cases}$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$

Tabla 4.2: Contrastes sobre dos proporciones

Hipótesis	Estadístico	Región crítica
Contrastes sobre μ con σ conocida		
$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$	$Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \quad \sim \quad N(0,1)$	$\|Z\| \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu < \mu_0 \end{cases}$		$Z \leq -Z_{1-\alpha}$
$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu > \mu_0 \end{cases}$		$Z \geq Z_{1-\alpha}$
Contrastes sobre μ con σ desconocida		
$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$	$t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{S_c}\sqrt{n} \quad \sim \quad t_{n-1}$	$\|t\| \geq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$
$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu < \mu_0 \end{cases}$		$t \leq -t_{n-1,1-\alpha}$
$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu > \mu_0 \end{cases}$		$t \geq t_{n-1,1-\alpha}$
Contrastes sobre σ^2 con μ conocida		
$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$	$\chi^2 = \frac{nS_\mu^2}{\sigma_0^2} \quad \sim \quad \chi_n^2$	$\chi^2 \leq \chi^2{}_{n,\frac{\alpha}{2}}$ $\cup$ $\chi^2 \geq \chi^2{}_{n,1-\frac{\alpha}{2}}$
$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$		$\chi^2 \leq \chi^2{}_{n,\alpha}$
$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$	$S_\mu^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{n}$	$\chi^2 \geq \chi^2{}_{n,1-\alpha}$
Contrastes sobre σ^2 con μ desconocida		
$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$	$\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma_0^2} \quad \sim \quad \chi_{n-1}^2$	$\chi^2 \leq \chi^2{}_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$ $\cup$ $\chi^2 \geq \chi^2{}_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$
$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$		$\chi^2 \leq \chi^2{}_{n-1,\alpha}$
$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$		$\chi^2 \geq \chi^2{}_{n-1,1-\alpha}$

Tabla 4.3: Contrastes sobre una población gausiana

Hipótesis	Estadístico	Región crítica
Diferencias de medias con varianzas conocidas		
$\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = \delta_0 \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0 \end{cases}$	$Z = \frac{\bar{x}-\bar{y}-\delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$	$\lvert Z\rvert \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = \delta_0 \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 < \delta_0 \end{cases}$		$Z \leq -Z_{1-\alpha}$
$\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = \delta_0 \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 > \delta_0 \end{cases}$		$Z \geq Z_{1-\alpha}$
Diferencias de medias con varianzas desconocidas e iguales		
$\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = \delta_0 \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0 \end{cases}$	$t = \frac{\bar{x}-\bar{y}-\delta_0}{\sqrt{\frac{n_1S_1^2+n_2S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$	$\lvert t\rvert \geq t_{n_1+n_2-2,1-\frac{\alpha}{2}}$
$\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = \delta_0 \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 < \delta_0 \end{cases}$		$t \leq -t_{n_1+n_2-2,1-\alpha}$
$\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = \delta_0 \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 > \delta_0 \end{cases}$	$t \sim t_{n_1+n_2-2}$	$t \geq t_{n_1+n_2-2,1-\alpha}$
Diferencias de medias con varianzas desconocidas y distintas		
$\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = \delta_0 \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0 \end{cases}$	$t = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta_0}{\sqrt{\frac{S_{c_1}^2}{n_1}+\frac{S_{c_2}^2}{n_2}}} \sim t_\nu$	$\lvert t\rvert \geq t_{\nu,1-\frac{\alpha}{2}}$
$\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = \delta_0 \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 < \delta_0 \end{cases}$	$\nu = \frac{\left(\frac{S_{c_1}^2}{n_1}+\frac{S_{c_2}^2}{n_2}\right)^2}{\left(\frac{S_{c_1}^2}{n_1}\right)^2\frac{1}{n_1+1}+\left(\frac{S_{c_2}^2}{n_2}\right)^2\frac{1}{n_2+1}} - 2$	$t \leq -t_{\nu,1-\alpha}$
$\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = \delta_0 \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 > \delta_0 \end{cases}$		$t \geq t_{\nu,1-\alpha}$
Igualdad de varianzas con medias desconocidas		
$\begin{cases} H_0: & \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: & \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$	$\mathcal{F} = \frac{S_{c_1}^2}{S_{c_2}^2} \sim \mathcal{F}_{n_1-1,n_2-1}$	$\mathcal{F} \leq \mathcal{F}_{n_1-1,n_2-1,\frac{\alpha}{2}} \cup$ $\mathcal{F} \geq \mathcal{F}_{n_1-1,n_2-1,1-\frac{\alpha}{2}}$
$\begin{cases} H_0: & \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: & \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases}$		$\mathcal{F} \leq \mathcal{F}_{n_1-1,n_2-1,\alpha}$
$\begin{cases} H_0: & \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: & \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases}$		$\mathcal{F} \geq \mathcal{F}_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha}$

Tabla 4.4: Contrastes sobre dos poblaciones gausianas independientes

7. Ejercicios propuestos

4.1. El dueño de una fábrica sostiene que su producto tiene una vida media de 10 años. Para comprobar tal afirmación se toma una muestra de 120 productos comprobándose que su vida media había sido de $9'6$ años y su desviación típica de $1'2$ años.

a) ¿Qué se puede decir de la afirmación del fabricante, supuesto que sus productos siguen una distribución Normal, con un nivel de confianza del 95 %?

b) ¿Cómo se vería afectada la conclusión anterior si la desviación típica hubiese sido de $1'5$?

4.2. Se sabe que el promedio de las calificaciones de los estudiantes en la asignatura de Estadística en los últimos dos años ha sido de $5'6$. Tras tomar una m.a.s. de 30 estudiantes del presente curso, se obtuvo un promedio de $6'4$ y una desviación típica de $1'25$. Suponiendo que se distribuyen normalmente, ¿se puede afirmar que los alumnos de este año obtuvieron calificaciones por encima de lo habitual?

4.3. Sea X una variable aleatoria distribuida según una $N(\mu, 3)$. A partir de la muestra $6, 7, 8, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 7, 6, 3, 8, 9, 7$, contraste, con un nivel de significación de $0'05$, la hipótesis de que la media real sea 5.

4.4. Durante 100 años la desviación típica de las temperaturas anuales máximas de una ciudad ha sido de 16F. Pero en los últimos 12 años se estuvo tomando la temperatura máxima los días uno de cada mes y dio una desviación típica de 10F. Supuesto que la temperatura se distribuya normalmente, ¿se puede afirmar con un 95 % de fiabilidad que la variabilidad de las temperaturas ha disminuido?

4.5. El fabricante de un determinado aparato de medida garantiza que éste tiene una desviación típica de $0'25$ unidades. Transcurrido un periodo de 9 meses, una muestra de 20 medidas proporcionó una desviación típica de $0'32$ unidades. ¿Puede afirmarse con un nivel de significación del 5 % que el aparato de medida está estropeado? ¿Y con un 1 % de significación?

4.6. Para averiguar si difieren los niveles de una determinada sustancia química en dos grupos de personas, se toman muestras con los siguientes resultados:

Muestra	n	$\overline{X}$	S
Vitaminas	31	$8'5$	$5'5$
Normal	25	$4'8$	$5'1$

Suponiendo normalidad, contraste tal hipótesis a un nivel de significación de $0'05$.

4.7. Se pretende estudiar si existe diferencia, en lo que a eficacia se refiere, entre el paracetamol y un nuevo producto, Y, en el alivio de determinados síntomas. Para ello, se seleccionó dos grupos de 10 y 16 personas y se midió el tiempo medio que tardaban los enfermos en sentirse bien. Los resultados indicaron que mientras el primer grupo tardaba $15'8$ minutos de media con una desviación típica de $7'8$ minutos, el segundo lo hacía en $13'2$ minutos de media y desviación típica de $6'6$ minutos. Si se supone normalidad en ambos casos, realice el contraste adecuado para un nivel de significación de $0'05$.

4.8. De dos poblaciones Normales se extraen dos muestras aleatorias $\underline{X}$ e $\underline{Y}$, de tamaño 121 y 41 y cuasivarianzas muestrales $70'2$ y $76'8$, respectivamente. Realice un contraste para averiguar si existen evidencias para pensar que las dos muestras procedan de poblaciones con varianza diferente, a un nivel de significación del 10 %.

4.9. Se sabe que ciertas piezas de una máquina tienen una vida media de 1940 horas. Al variar uno de sus componentes se observa que una muestra de 100 piezas ha dado una duración media de 2000 horas y una desviación típica de 150 horas. ¿Se puede afirmar a un nivel de significación del 10 % que el componente modificado ha supuesto un cambio significativo en la duración media de las piezas?

4.10. En una encuesta realizada a 200 habitantes de una población A, 95 personas afirmaban que preferían la playa a la montaña para pasar la vacaciones. La misma encuesta realizada a 150 habitantes de otra población B, dio como resultado que 100 personas preferían ir a la playa. ¿Puede pensarse que los habitantes de la población B son más aficionados a la playa que los de la población A? Contrástese dicha hipótesis al 99 %.

4.11. Con el propósito de saber si debe poner neumáticos diferentes en los trenes delanteros (D) y traseros (T) de sus vehículos, un fabricante ha medido el desgaste producido en 20 de ellos después de 15000 Kms, obteniendo los siguientes resultados:

D	23′4	21′7	18	23′2	16′8	19′1	18′7	19′8	25	21′5
T	22′8	24′9	18	22′7	22′3	18′3	22′1	23′9	17′4	19

a) Suponiendo normalidad, ¿confirman los datos, con un nivel de significación de $0'05$, la hipótesis de que el desgaste medio en el tren delantero es de 21 unidades?

b) ¿Se puede afirmar que los neumáticos sufren el mismo desgaste en los dos trenes?

4.12. El número de defectos congénitos de una población se distribuye según una Poisson de parámetro λ. Se pretende realizar el contraste

$$\begin{cases} H_0 : \lambda = 0'3 \\ H_1 : \lambda = 0'2 \end{cases}$$

para lo que se toma una muestra aleatoria de 100 individuos de la población. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Defectuosos	0	1	2	3	4	5
Frecuencias	84	9	3	2	1	1

A la vista de tales resultados, ¿qué conclusión puede obtenerse con un nivel de significación del $0'025$?

4.13. Se sabe que el porcentaje de curación espontánea de una determinada enfermedad es del 30 %. Para asegurar la eficacia de un nuevo tratamiento se selecciona aleatoriamente una muestra de 100 enfermos y se les somete a tal tratamiento, obteniéndose que el porcentaje de personas curadas fue del 45 %. ¿Se puede afirmar la eficacia del mencionado tratamiento con una confianza del 95 %?

4.14. En un estudio realizado sobre las tendencias de los fumadores se seleccionó de manera aleatoria una muestra de 400 hombres de los cuales 190 eran fumadores y otra muestra aleatoria de 800 mujeres, de las que fumaban 300. ¿Se puede afirmar que la proporción de fumadores es la misma en hombres que en mujeres con una confianza del 90 %?

4.15. A partir de una m.a.s. de tamaño 36 extraída de una población Normal con desviación típica 5 se desea realizar el siguiente contraste:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 14 \\ H_1 : \mu = 17 \end{cases}$$

Aplicando la regla de decisión,

$$\begin{cases} \text{si} \quad \overline{x} \leq 15 & \text{no se rechaza H}_0 \\ \text{si} \quad \overline{x} > 15 & \text{se rechaza H}_0 \end{cases}$$

a) Calcule el nivel de significación, α.
b) Obtenga la probabilidad de cometer un error del tipo II.
c) Calcule la potencia del contraste.

4.16. Una determinada empresa le propone al director de una fábrica un nuevo método que, supuestamente, reduce el tiempo empleado en el montaje de uno de sus productos. Con el propósito de comparar tal método con el empleado habitualmente, seleccionó aleatoriamente a siete de sus empleados para que llevasen a cabo el montaje con los dos sistemas y anotó los tiempos empleados en el montaje, obteniendo los siguientes resultados:

Trabajador	1	2	3	4	5	6	7
Método habitual	38	32	41	35	42	32	45
Método nuevo	30	32	34	37	35	26	38

Supuesto que el tiempo de montaje sigue una distribución Normal, ¿se puede afirmar que efectivamente el nuevo método reduce el tiempo en más de dos minutos?

Inferencia Estadística
(apuntes para el grado en ingeniería)
C. E. Carleos Artime, sobre el trabajo de I. Espejo Miranda, F. Fernández Palacín, M. A. López Sánchez, M. Muñoz Márquez, A. M. Rodríguez Chía, A. Sánchez Navas, C. Valero Franco

Capítulo 5

Contrastes no paramétricos

1. Introducción

En este capítulo, bajo el título común de contrastes no paramétricos, se abordan una serie de técnicas inferenciales bien diferenciadas que permiten resolver problemas de diversa índole. En primer lugar, se estudia si la población se adapta a alguna estructura de probabilidad gausiana. La situación de no gausianidad obligará a la aplicación de los contrastes no paramétricos sobre valores de parámetros o sobre medidas de posición, centralización, etc.

En el capítulo anterior, se comentó que lo ideal es utilizar contrastes paramétricos siempre que sea posible puesto que, si se conoce la distribución de probabilidad, se consiguen mejores resultados incorporando esta información en la construcción del contraste. En el caso de que no se disponga de dicha información, se recurre a métodos alternativos basados exclusivamente en la información que proporciona la muestra, como el análisis de rangos.

El no cumplimiento de alguna de las hipótesis a la hora de realizar un contraste paramétrico tiene incidencias diversas. Por ejemplo, si falla el supuesto de gausianidad al realizar un contraste sobre la media, pero la muestra es grande, el Teorema Central del Límite garantiza que la media muestral es asintóticamente gausiana y por tanto podría aplicarse el contraste paramétrico. Sin embargo, en un contraste de igualdad de medias donde las varianzas de las poblaciones sean distintas y haya problemas de gausianidad, es conveniente recurrir a la alternativa no paramétrica; con más motivo si los tamaños muestrales son muy distintos.

El concepto que subyace en el párrafo anterior se conoce en la terminología estadística como Robustez. Formalmente, un procedimiento se dice *robusto* si es "aproximadamente" válido cuando se producen desviaciones respecto a los supuestos que se exigen en su aplicación. En general los contrastes paramétricos para poblaciones gausianas son robustos frente a desviaciones de gausianidad y no tanto frente a desviaciones de *homocedasticidad* (igualdad de varianzas); en todo caso, es deseable trabajar con *problemas equilibrados*, esto es, con tamaños muestrales parecidos.

Como se ha venido comentando, la muestra es la materia prima que hace posible la realización del estudio inferencial. De su calidad dependerá la bondad de los resultados que se puedan ofrecer, de forma que una muestra con sesgos, falta de representatividad, dependencia entre sus valores, presencia de valores anómalos, etc., condicionará las conclusiones de la investigación, hasta el punto de distorsionar totalmente la realidad del universo que se pretende estudiar. En definitiva, el proceso inferencial es muy sensible a los desajustes provocados por la utilización de una muestra contaminada.

De los posibles problemas que puede presentar una muestra, algunos son soslayables, mientras que otros obligan a prescindir de ella y a realizar un nuevo diseño y una posterior extracción de las unidades muestrales. Entre los primeros se encuentra la presencia en la muestra de *valores anómalos*, extraños o atípicos, mientras que, entre los segundos, el más usual es el de la falta de aleatoriedad de los datos.

De esta forma, los contrastes no paramétricos, además de permitir estudiar una población cuando se desconoce la distribución de la misma, tienen otra utilidad como es la de comprobar que las hipótesis exigidas para llevar a cabo un contraste paramétrico realmente son satisfechas.

2. Análisis de la estructura de la población

2.1. Contraste de Sapiro y Uilc[1]

Supóngase que se desea contrastar la hipótesis de gausianidad de una población de la cual se ha extraído la m.a.s. $X_1, X_2, \cdots, X_n$. Para una realización muestral $x_1, x_2, \cdots, x_n$, se procede de la siguiente manera:

1. Se ordenan los elementos muestrales de mayor a menor
$$x_{(n)}, x_{(n-1)}, \cdots, x_{(1)}.$$
2. Se calculan las diferencias entre los valores que equidistan del centro, multiplicando cada una de dichas diferencias por los coeficientes correspondientes del contraste, que vienen tabulados en función del tamaño muestral. La suma de los productos se denota por b,

$x_{(n-i+1)} - x_{(i)}$	a_{n-i+1}	$(x_{(n-i+1)} - x_{(i)})a_{n-i+1}$
$x_{(n)} - x_{(1)}$	a_n	$(x_{(n)} - x_{(1)})a_n$
$x_{(n-1)} - x_{(2)}$	a_{n-1}	$(x_{(n-1)} - x_{(2)})a_{n-1}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$x_{(k+1)} - x_{(k)}$	a_{k+1}	$(x_{(k+1)} - x_{(k)})a_{k+1}$

$$b = \sum_{i=1}^{k} a_{n-i+1}(x_{(n-i+1)} - x_{(i)})$$

donde $k = \frac{n}{2}$, si n es par y $k = \frac{n-1}{2}$, si n es impar.
3. El estadígrafo experimental se define por
$$W_{exp} = \frac{b^2}{(n-1)S_c^2},$$

[1] De Samuel Sapiro (en inglés, Shapiro) y Martín Uilc (en inglés, Martin Wilk).

y debe comprobarse que $W_{exp} \leq 1$, dándose la igualdad sólo en el caso de que la muestra sea la réplica de una gausiana.

4. Por último, la región crítica del contraste viene dada por

$$R_c : W_{exp} \leq W_{n,\alpha},$$

donde el valor $W_{n,\alpha}$ viene dado en la tabla A.19

Ejemplo 5.1 *Se desea contrastar la hipótesis de normalidad de una población de la cual se ha extraído la siguiente muestra:*

12'3	11'0	10'7	12'4	11'7	13'1
9'9	12'6	11'8	10'2	10'5.	

Ordenando y haciendo las operaciones pertinentes se tiene

$x_{(n-i+1)} - x_{(i)}$	a_{n-i+1}	$(x_{(n-i+1)} - x_{(i)})a_{n-i+1}$
13'1 − 9'9	0'5601	1'7923
12'6 − 10'2	0'3315	0'7956
12'4 − 10'5	0'2260	0'4294
12'3 − 10'7	0'1429	0'2286
11'8 − 11'0	0'0695	0'0556
		$b = 3'3015$

De donde $b^2 = 10'8999$. *Por otra parte,*

$$(n-1)S_c^2 \quad = \quad 11'4818,$$

por lo que

$$W_{exp} \quad = \quad \frac{10'8999}{11'4818} = 0'9493.$$

En cuanto al valor crítico $W_{11;0'05} = 0'850$, *por lo que para un nivel de significación de* 0'05 *no se puede rechazar la hipótesis de que la muestra ha sido extraída de una población gausiana.*

3. Contrastes de localización y escala

En general, los contrastes no paramétricos sobre parámetros de la población se hacen sobre medidas de posición y, en particular, sobre la mediana. Estos contrastes se basan en el análisis de la situación de los elementos de la muestra respecto a este tipo de medidas. De esta forma, se estudia si los datos muestrales están por encima o por debajo de la mediana, es decir, se analiza el signo de su diferencia con la mediana; o bien, se estudia la distancia ordenada a la que se encuentra de la mediana, es decir, se considera el rango o la posición que ocupa dicho elemento en la secuencia ordenada de las diferencias.

En el caso de que la estructura de probabilidad de la población sea simétrica estos contrastes serán aplicables al estudio de la media de la distribución.

3.1. Contraste de la T de Uilcoxon[2] para una muestra o dos muestras apareadas

Cuando la distribución además de continua es simétrica, para contrastar

$$\begin{cases} H_0 : M_e = M_{e_0} \\ H_1 : M_e \neq M_{e_0}, \end{cases}$$

se recurre al contraste de la T de Uilcoxon.

Para aplicarlo, se procede del modo siguiente: para cada elemento de la muestra se calcula $|x_i - M_{e_0}|$, reteniéndose aquellas diferencias que sean distintas de cero, cuyo número se nota con n'. A continuación, se asignan rangos desde 1 hasta n'. Si existieran grupos de diferencias coincidentes en valor absoluto, se asigna a cada elemento la media aritmética de los rangos que correspondan al grupo.

Una vez asignados los rangos, se suman los correspondientes a diferencias negativas, por debajo de la mediana, denotados T^- y los correspondientes a diferencias positivas, por encima de la mediana, T^+. El estadístico experimental viene dado por

$$T_{exp} = \text{mín}\{T^-, T^+\}$$

[2] De Francisco Uilcoxon (en inglés, Frank Wilcoxon).

y la región crítica por

$$R_c : T_{exp} \leq T_{n', \frac{\alpha}{2}},$$

donde $T_{n', \frac{\alpha}{2}}$ viene dado en la tabla A.22.

El contraste admite las siguientes variaciones y aplicaciones:

1. En las hipótesis anteriores, también se puede realizar el contraste $H_0 : \mu = \mu_0$, calculándose las diferencias en valor absoluto respecto a la media propuesta.

2. Para muestras apareadas, el contraste de mediana se plantea como $M_e(z) = 0$, donde $z_i = x_i - y_i$, para cada par de valores; para las medias el contraste de la T permite contrastar $H_0 : \mu_d = \mu_{d_0}$, siendo μ_d la media de la población diferencia.

3. Para muestras grandes ($n \geq 25$), la distribución asintótica de $T^-(T^+)$, bajo el supuesto de que H_0 es cierta, es

$$T^- \sim N\left(\frac{n(n+1)}{4}, \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}\right).$$

4. Para un contraste unilateral del tipo $H_0 : M_e \geq M_{e_0}$, la región crítica viene dada por

$$R_c : \qquad T^+ \leq T_{n',\alpha}.$$

5. Para un contraste unilateral del tipo $H_0 : M_e \leq M_{e_0}$, la región crítica viene dada por

$$R_c : \qquad T^- \leq T_{n',\alpha}.$$

Ejemplo 5.2 *Se desea contrastar que la mediana de la población de la cual se ha extraído la siguiente m.a.s. vale 5.*

$$4, 5, 6, 5, 3, 4, 2, 7, 6, 5, 4, 3, 8, 8, 9, 4, 6, 7, 2, 5, 6$$

Se calculan las diferencias respecto al valor propuesto, se ordenan y se asignan los rangos:

Rangos$^-$					4'5	4'5	4'5	4'5
Diferencias	0	0	0	0	1	1	1	1
Rangos$^+$								
Rangos$^-$					10'5	10'5		
Diferencias	1	1	1	1	2	2	2	2
Rangos$^+$	4'5	4'5	4'5	4'5			10'5	10'5
Rangos$^-$	14'5	14'5						
Diferencias	3	3	3	3	4			
Rangos$^+$			14'5	14'5	17			

Resultando que $T^- = 68$*, mientras que* $T^+ = 85$*, con lo que* $T_{exp} = 68$*. Buscando en las tablas del contraste de Uilcoxon, aparece que* $T_{17;0'05} = 30$*, con lo que para el nivel de significación fijado se admite que la mediana de la población vale 5.*

3.2. Contraste de la U de Uilcoxon y de Man y Uitni[3] para dos muestras independientes

Como requisito para la aplicación de este contraste no se exige la simetría de las distribuciones aunque sí que tengan una forma similar. Sean $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ y $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ m.a.s. extraídas de dos poblaciones X y Y independientes. El contraste de la U de Uilcoxon y de Man y Uitni permite contrastar:

$$\begin{cases} H_0 : M_{e_1} = M_{e_2} \\ H_1 : M_{e_1} \neq M_{e_2} \end{cases}$$

Para ello se procede como sigue:

1. Se ordenan los $n_1 + n_2$ elementos de las dos muestras, asignando a continuación rangos desde el 1 hasta el $n_1 + n_2$.
2. Se suman los rangos correspondientes a la muestra $\underline{X}$, R_1 y los de la muestra $\underline{Y}$, R_2, calculando a continuación:

$$U_1 = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1; \; U_2 = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2.$$

[3]De Enrique Man (en alemán, Henry Mann) y Donaldo Uitni (en inglés, Donald Whitney).

Se puede comprobar que no se ha cometido error en los cálculos viendo que se verifica que $U_1 + U_2 = n_1 \cdot n_2$.

3. Se calcula el estadístico experimental como

$$U_{exp} = \text{mín}\{U_1, U_2\}.$$

4. La región crítica del contraste viene dada por

$$R_c : U_{exp} \leq U_{n_1,n_2,\alpha},$$

donde $U_{n_1,n_2,\alpha}$ viene dado en la tabla A.23.

El contraste admite las siguientes variaciones y aplicaciones:

1. En muestras grandes $(n_1, n_2 \geq 9)$, Man y Uitni demuestran que, bajo H_0,

$$\frac{U_{exp} - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12}}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Si existen muchas observaciones repetidas en la muestra conjunta habría que realizar alguna corrección sobre el estadígrafo de Man y Uitni.

2. Para un contraste unilateral del tipo $H_0 : F_X(x) \geq F_Y(x)$, la región crítica viene dada por

$$R_c : U_1 \leq U_{n_1,n_2,\alpha}.$$

3. Para un contraste unilateral del tipo $H_0 : F_X(x) \leq F_Y(x)$, la región crítica viene dada por

$$R_c : U_2 \leq U_{n_1,n_2,\alpha}.$$

Ejemplo 5.3 *Supóngase que se quiere contrastar, con un nivel de significación $\alpha = 0'05$, que las muestras*

X	7	5	8	7	9	3	5	7	9	11	2	10
Y	3	7	8	12	15	6	5	9	11	7		

proceden de la misma población.

Se ordenan los valores y se asignan rangos

Rangos X	1	2’5		5	5			10	10	10	
Orden	2	3	3	5	5	5	6	7	7	7	7
Rangos Y			2’5			5	7				10
Rangos X		13’5		16	16		18	19’5			
Orden	7	8	8	9	9	9	10	11	11	12	15
Rangos Y	10		13’5			16			19’5	21	22

Sumando los rangos se obtiene

$$R_1 = 126'5 \quad y \quad R_2 = 126'5.$$

De donde,

$$\begin{aligned} U_1 &= 12 \cdot 10 + \tfrac{12(13)}{2} - 126'5 = 71'5 \\ U_2 &= 12 \cdot 10 + \tfrac{10(11)}{2} - 126'5 = 48'5. \end{aligned}$$

Verificándose que $71'5 + 48'5 = 120 = 12 \cdot 10$. *El estadígrafo del contraste vale* $U_{exp} = 48'5$. *Puesto que los tamaños muestrales son mayores que 9, se tiene que*

$$U_{exp}/H_0 \sim N(60, 15'17),$$

con lo que

$$P[U_{exp} \geq K/H_0] \quad = \quad 0'025,$$

es decir,

$$P\left[Z \geq \tfrac{K-60}{15'17}\right] \quad = \quad 0'025,$$

de donde

$$\frac{K-60}{15'17} \quad = \quad 1'96.$$

Por tanto $K = 89'73$*, lo que lleva a rechazar la hipótesis de que las muestras procedan de la misma población.*

4. Tablas de contrastes no paramétricos

Hipótesis	Estadígrafo	R. crítica
Sapiro y Uilc		
$\begin{cases} H_0: & X \sim \text{Normal} \\ H_1: & X \not\sim \text{Normal} \end{cases}$	$W = \dfrac{b^2}{(n-1)S_c^2}$ $b = \sum_{i=1}^{n/2} a_{n-i+1}(X_{(n-i+1)} - X_{(i)})$	$W_e \leq W_{n,\alpha}$

Tabla 5.1: Contrastes no paramétricos I

Hipótesis	Estadígrafo	R. crítica
Contraste de los rangos signados (Uilcoxon para una muestra)		
$\begin{cases} H_0: & M_e = M_{e_0} \\ H_1: & M_e \neq M_{e_0} \end{cases}$	$T_e = \text{mín}\{T^+, T^-\}$	$T_e \leq T_{n',\frac{\alpha}{2}}$
$\begin{cases} H_0: & M_e = M_{e_0} \\ H_1: & M_e < M_{e_0} \end{cases}$	Si n grande se usa:	$T^+ \leq T_{n',\alpha}$
$\begin{cases} H_0: & M_e = M_{e_0} \\ H_1: & M_e > M_{e_0} \end{cases}$	$Z = \dfrac{4T^+ - n(n+1)}{\sqrt{2n(n+1)(2n+1)/3}} \sim \mathcal{N}(0,1)$	$T^- \leq T_{n',\alpha}$

Tabla 5.2: Contrastes no paramétricos II

<table>
<tr><th>Hipótesis</th><th>Estadístico</th><th>R. Crítica</th></tr>
<tr><td colspan="3">Contraste U de Man y Uitni</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} H_0: & F_X \equiv F_Y \\ H_1: & F_X \not\equiv F_Y \end{cases}$</td><td rowspan="3">$U_1 = n_1 \cdot n_2 + \dfrac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$
$U_2 = n_1 \cdot n_2 + \dfrac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2$
$U_e = \text{mín}\{U_1, U_2\}$
Si $n_1, n_2 \geq 9$ se usa:
$U_e \sim N\left(\frac{n_1 \cdot n_2}{2}, \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2(n_1+n_2+1)}{12}}\right)$</td><td>$U_e \leq U_{n_1,n_2,\alpha}$</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} H_0: & F_X \equiv F_Y \\ H_1: & F_X < F_Y \end{cases}$</td><td>$U_1 \leq U_{n_1,n_2,\alpha}$</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} H_0: & F_X \equiv F_Y \\ H_1: & F_X > F_Y \end{cases}$</td><td>$U_2 \leq U_{n_1,n_2,\alpha}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Contraste de Uilcoxon (2 muestras relacionadas)</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} H_0: & M_e(d) = 0 \\ H_1: & M_e(d) \neq 0 \end{cases}$</td><td colspan="2">$\underline{d} = \underline{x} - \underline{y}$
Se aplica el contraste de Uilcoxon.</td></tr>
</table>

Tabla 5.3: Contrastes no paramétricos III

5. Ejercicios

5.1. Ejercicio resuelto

5.1 Una conocida empresa está considerando su fusión con una de las dos cadenas de televisión más importante del país, la cadena A y la cadena B, por lo que decide realizar un estudio sobre el nivel de audiencia en cada una de ellas. Elige aleatoriamente distintas horas de la semana y mide el nivel de audiencia, en millones de personas, obteniendo las muestras:

Cadena A	6'4	8'9	9	2'7	4'5	10	9	4'9	3	7	15
Cadena B	8	5'9	10	15	17'5	9	3	3'2	6	8	16

a) Si se admite que ambas muestras proceden de poblaciones gausianas, ¿se puede afirmar que la cadena A presenta al menos tanta dispersión en el nivel de audiencia como la B, a nivel de confianza del 95 %?

b) Si no se admite que ambas muestras proceden de poblaciones gausianas, ¿se puede afirmar que la cadena A presenta mayor promedio en el nivel de audiencia que la B, al mismo nivel de confianza que en el caso anterior?

Solución:

a) Suponiendo que ambas distribuciones son gausianas, es decir, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$, el contraste que se plantea ahora para averiguar si la cadena A tiene al menos tanta dispersión como B es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{array} \right.$$

donde las medias μ_1 y μ_2 son desconocidas. Para ello, se recurre al estadístico

$$F = \frac{S_{c_1}^2}{S_{c_2}^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}.$$

Calculando las cuasivarianzas muestrales, se obtiene

$$\begin{aligned}
S_{c_1}^2 &= \frac{1}{n_X - 1}\left[\sum_{i=1}^{n_X} x_i^2 - \frac{1}{n_X}\left(\sum_{i=1}^{n_X} x_i\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{10}\left[716'72 - \frac{80'4^2}{11}\right] = 12'9069 \\
S_{c_2}^2 &= \frac{1}{10}\left[1186'3 - \frac{101'6^2}{11}\right] = 24'7885
\end{aligned}$$

y por tanto, $F_{exp} = \frac{12'9069}{24'7885} = 0'5207$.

Para el nivel de significación $0'05$, se tiene que

$$F_{n_1-1,n_2-1} = F_{10,10} = 2'98,$$

que es mayor que el F_{exp}. Por tanto, no se puede rechazar la hipótesis de que la dispersión de la cadena A sea mayor que la de la cadena B.

b) Si no se consideran gausianas las distribuciones, se puede usar el contraste de Man y Uitni. En R:

```
a=c(6.4,8.9,9,2.7,4.5,10,9,4.9,3,7,15)
b=c(8,5.9,10,15,17.5,9,3,3.2,6,8,16)
wilcox.test(a,b,alternative="greater")

Wilcoxon rank sum test with continuity correction

data:  a and b
W = 47.5, p-value = 0.8129
alternative hypothesis: true location shift is greater than 0

Mensajes de aviso perdidos
In wilcox.test.default(a, b, alternative = "greater") :
  cannot compute exact p-value with ties
```

5.2. Ejercicios propuestos

5.1. A partir de la siguiente realización muestral de tamaño 500,

$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, 5)$	$(5, 7)$	$(7, 9)$	$(9, 11)$
36	70	54	86	44	50

$(11, 13)$	$(13, 15)$	$(15, 18)$	$(18, 21)$	$(21, \infty)$
40	24	36	24	36

donde la primera fila corresponde a los valores de la variable y la segunda al número de valores de la muestra dentro de cada intervalo, verifique la hipótesis de que ha sido extraída de una población gausiana.

5.2. Con el fin de estudiar el tiempo de vida, en horas, de las baterías de 7 voltios, se extrae aleatoriamente un muestra de 10 de ellas, obteniéndose los siguientes resultados:

$$28\text{'}9, 15\text{'}2, 28\text{'}7, 72\text{'}5, 48\text{'}6, 52\text{'}4, 37\text{'}6, 49\text{'}5, 62\text{'}1, 54\text{'}5.$$

Contraste la hipótesis de que los datos procedan de una población gausiana.

5.3. Contraste la hipótesis de gausianidad de los siguientes datos:

$$27, 23, 17, 18, 17, 30, 22, 26, 16, 23, 20, 22, 16, 21, 17.$$

5.4. Se pretende realizar un estudio sobre la influencia de un determinado fármaco en el tratamiento de la celulitis para lo cual se estudió el peso de cada paciente antes y después del tratamiento. A partir de una muestra de 32 pacientes los resultados fueron los siguientes:

Antes	73	99	75	84	102	84	65	70	78	75	78
Después	69	93	78	85	99	80	67	72	73	71	78

Antes	82	64	72	71	64	85	94	89	57	59	67
Después	80	61	74	76	63	85	94	88	54	56	65

Antes	96	97	73	58	57	63	81	84	80	67	
Después	95	99	75	56	57	62	80	85	78	68	

Decida si ha habido una alteración significativa en el peso.

5.5. Para medir la introversión se aplica a 12 individuos una prueba de personalidad en sus dos variantes, 1 y 2, que se supone la miden por igual. A partir de los datos de la siguiente tabla, compruebe con un nivel de significación del 5 % si es cierto que las formas 1 y 2 miden por igual la introversión:

Individuo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Forma 1	12	18	21	10	15	27	31	6	15	13	8	10
Forma 2	10	17	20	5	21	24	29	7	9	13	8	11

5.6. En una clase de matemáticas el profesor plantea a los alumnos dos problemas, P y Q, asignándole a cada uno un problema al azar. Con el fin de estudiar si existían diferencias de dificultad entre ambos problemas, el profesor fue anotando el tipo de problema a medida que iban entregando, obteniendo la siguiente secuencia:

$$QQQPPQPQQQPQPPQPPP.$$

Estudie si existían diferencias de dificultad entre ambos problemas, con una probabilidad de error de tipo 1 menor del 5 %.

5.7. Para estudiar cuál de los dos tratamientos contra la artrosis es más eficaz se eligen aleatoriamente dos muestras de 10 y 22 pacientes a los cuales se los somete a los tratamientos 1 y 2, respectivamente. Pasados tres meses se valoran ambos tratamientos de manera que el tenga mayor puntuación será más eficaz. La tabla siguiente refleja los resultados obtenidos:

Tratamiento 1	12	15	21	17	38	42	10	23	35	28	
Tratamiento 2	21	18	42	25	14	52	65	40	43	35	18
	56	29	32	44	15	68	41	37	43	58	42

Decida si existe diferencia entre los tratamientos.

Inferencia Estadística
(apuntes para el grado en ingeniería)
C. E. Carleos Artime, sobre el trabajo de I. Espejo Miranda, F. Fernández Palacín, M. A. López Sánchez, M. Muñoz Márquez, A. M. Rodríguez Chía, A. Sánchez Navas, C. Valero Franco

Apéndice A

Tablas

Tabla A.1: Distribución gausiana

	0	0’01	0’02	0’03	0’04	0’05	0’06	0’07	0’08	0’09
0	0’5000	0’5040	0’5080	0’5120	0’5160	0’5199	0’5239	0’5279	0’5319	0’5359
0’1	0’5398	0’5438	0’5478	0’5517	0’5557	0’5596	0’5636	0’5675	0’5714	0’5753
0’2	0’5793	0’5832	0’5871	0’5910	0’5948	0’5987	0’6026	0’6064	0’6103	0’6141
0’3	0’6179	0’6217	0’6255	0’6293	0’6331	0’6368	0’6406	0’6443	0’6480	0’6517
0’4	0’6554	0’6591	0’6628	0’6664	0’6700	0’6736	0’6772	0’6808	0’6844	0’6879
0’5	0’6915	0’6950	0’6985	0’7019	0’7054	0’7088	0’7123	0’7157	0’7190	0’7224
0’6	0’7257	0’7291	0’7324	0’7357	0’7389	0’7422	0’7454	0’7486	0’7517	0’7549
0’7	0’7580	0’7611	0’7642	0’7673	0’7704	0’7734	0’7764	0’7794	0’7823	0’7852
0’8	0’7881	0’7910	0’7939	0’7967	0’7995	0’8023	0’8051	0’8078	0’8106	0’8133
0’9	0’8159	0’8186	0’8212	0’8238	0’8264	0’8289	0’8315	0’8340	0’8365	0’8389
1	0’8413	0’8438	0’8461	0’8485	0’8508	0’8531	0’8554	0’8577	0’8599	0’8621
1’1	0’8643	0’8665	0’8686	0’8708	0’8729	0’8749	0’8770	0’8790	0’8810	0’8830
1’2	0’8849	0’8869	0’8888	0’8907	0’8925	0’8944	0’8962	0’8980	0’8997	0’9015
1’3	0’9032	0’9049	0’9066	0’9082	0’9099	0’9115	0’9131	0’9147	0’9162	0’9177
1’4	0’9192	0’9207	0’9222	0’9236	0’9251	0’9265	0’9279	0’9292	0’9306	0’9319
1’5	0’9332	0’9345	0’9357	0’9370	0’9382	0’9394	0’9406	0’9418	0’9429	0’9441
1’6	0’9452	0’9463	0’9474	0’9484	0’9495	0’9505	0’9515	0’9525	0’9535	0’9545
1’7	0’9554	0’9564	0’9573	0’9582	0’9591	0’9599	0’9608	0’9616	0’9625	0’9633
1’8	0’9641	0’9649	0’9656	0’9664	0’9671	0’9678	0’9686	0’9693	0’9699	0’9706
1’9	0’9713	0’9719	0’9726	0’9732	0’9738	0’9744	0’9750	0’9756	0’9761	0’9767
2	0’9772	0’9778	0’9783	0’9788	0’9793	0’9798	0’9803	0’9808	0’9812	0’9817
2’1	0’9821	0’9826	0’9830	0’9834	0’9838	0’9842	0’9846	0’9850	0’9854	0’9857
2’2	0’9861	0’9864	0’9868	0’9871	0’9875	0’9878	0’9881	0’9884	0’9887	0’9890
2’3	0’9893	0’9896	0’9898	0’9901	0’9904	0’9906	0’9909	0’9911	0’9913	0’9916
2’4	0’9918	0’9920	0’9922	0’9925	0’9927	0’9929	0’9931	0’9932	0’9934	0’9936
2’5	0’9938	0’9940	0’9941	0’9943	0’9945	0’9946	0’9948	0’9949	0’9951	0’9952
2’6	0’9953	0’9955	0’9956	0’9957	0’9959	0’9960	0’9961	0’9962	0’9963	0’9964
2’7	0’9965	0’9966	0’9967	0’9968	0’9969	0’9970	0’9971	0’9972	0’9973	0’9974
2’8	0’9974	0’9975	0’9976	0’9977	0’9977	0’9978	0’9979	0’9979	0’9980	0’9981
2’9	0’9981	0’9982	0’9982	0’9983	0’9984	0’9984	0’9985	0’9985	0’9986	0’9986
3	0’9987	0’9987	0’9987	0’9988	0’9988	0’9989	0’9989	0’9989	0’9990	0’9990
3’1	0’9990	0’9991	0’9991	0’9991	0’9992	0’9992	0’9992	0’9992	0’9993	0’9993
3’2	0’9993	0’9993	0’9994	0’9994	0’9994	0’9994	0’9994	0’9995	0’9995	0’9995
3’3	0’9995	0’9995	0’9995	0’9996	0’9996	0’9996	0’9996	0’9996	0’9996	0’9997
3’4	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9998
3’5	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998
3’6	0’9998	0’9998	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999
3’7	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999
3’8	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999
3’9	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000

Tabla A.2: Puntos críticos: distribución t de Estiúdent

	0'9995	0'995	0'9875	0'975	0'95	0'875	0'85	0'8	0'75	0'7	0'65	0'6	0'55
1	636'58	63'656	25'452	12'706	6'3137	2'4142	1'9626	1'3764	1'0000	0'7265	0'5095	0'3249	0'1584
2	31'600	9'9250	6'2054	4'3027	2'9200	1'6036	1'3862	1'0607	0'8165	0'6172	0'4447	0'2887	0'1421
3	12'924	5'8408	4'1765	3'1824	2'3534	1'4226	1'2498	0'9785	0'7649	0'5844	0'4242	0'2767	0'1366
4	8'6101	4'6041	3'4954	2'7765	2'1318	1'3444	1'1896	0'9410	0'7407	0'5686	0'4142	0'2707	0'1338
5	6'8685	4'0321	3'1634	2'5706	2'0150	1'3009	1'1558	0'9195	0'7267	0'5594	0'4082	0'2672	0'1322
6	5'9587	3'7074	2'9687	2'4469	1'9432	1'2733	1'1342	0'9057	0'7176	0'5534	0'4043	0'2648	0'1311
7	5'4081	3'4995	2'8412	2'3646	1'8946	1'2543	1'1192	0'8960	0'7111	0'5491	0'4015	0'2632	0'1303
8	5'0414	3'3554	2'7515	2'3060	1'8595	1'2403	1'1081	0'8889	0'7064	0'5459	0'3995	0'2619	0'1297
9	4'7809	3'2498	2'6850	2'2622	1'8331	1'2297	1'0997	0'8834	0'7027	0'5435	0'3979	0'2610	0'1293
10	4'5868	3'1693	2'6338	2'2281	1'8125	1'2213	1'0931	0'8791	0'6998	0'5415	0'3966	0'2602	0'1289
11	4'4369	3'1058	2'5931	2'2010	1'7959	1'2145	1'0877	0'8755	0'6974	0'5399	0'3956	0'2596	0'1286
12	4'3178	3'0545	2'5600	2'1788	1'7823	1'2089	1'0832	0'8726	0'6955	0'5386	0'3947	0'2590	0'1283
13	4'2209	3'0123	2'5326	2'1604	1'7709	1'2041	1'0795	0'8702	0'6938	0'5375	0'3940	0'2586	0'1281
14	4'1403	2'9768	2'5096	2'1448	1'7613	1'2001	1'0763	0'8681	0'6924	0'5366	0'3933	0'2582	0'1280
15	4'0728	2'9467	2'4899	2'1315	1'7531	1'1967	1'0735	0'8662	0'6912	0'5357	0'3928	0'2579	0'1278
16	4'0149	2'9208	2'4729	2'1199	1'7459	1'1937	1'0711	0'8647	0'6901	0'5350	0'3923	0'2576	0'1277
17	3'9651	2'8982	2'4581	2'1098	1'7396	1'1910	1'0690	0'8633	0'6892	0'5344	0'3919	0'2573	0'1276
18	3'9217	2'8784	2'4450	2'1009	1'7341	1'1887	1'0672	0'8620	0'6884	0'5338	0'3915	0'2571	0'1274
19	3'8833	2'8609	2'4334	2'0930	1'7291	1'1866	1'0655	0'8610	0'6876	0'5333	0'3912	0'2569	0'1274
20	3'8496	2'8453	2'4231	2'0860	1'7247	1'1848	1'0640	0'8600	0'6870	0'5329	0'3909	0'2567	0'1273
21	3'8193	2'8314	2'4138	2'0796	1'7207	1'1831	1'0627	0'8591	0'6864	0'5325	0'3906	0'2566	0'1272
22	3'7922	2'8188	2'4055	2'0739	1'7171	1'1815	1'0614	0'8583	0'6858	0'5321	0'3904	0'2564	0'1271
23	3'7676	2'8073	2'3979	2'0687	1'7139	1'1802	1'0603	0'8575	0'6853	0'5317	0'3902	0'2563	0'1271
24	3'7454	2'7970	2'3910	2'0639	1'7109	1'1789	1'0593	0'8569	0'6848	0'5314	0'3900	0'2562	0'1270
25	3'7251	2'7874	2'3846	2'0595	1'7081	1'1777	1'0584	0'8562	0'6844	0'5312	0'3898	0'2561	0'1269
26	3'7067	2'7787	2'3788	2'0555	1'7056	1'1766	1'0575	0'8557	0'6840	0'5309	0'3896	0'2560	0'1269
27	3'6895	2'7707	2'3734	2'0518	1'7033	1'1756	1'0567	0'8551	0'6837	0'5306	0'3894	0'2559	0'1268
28	3'6739	2'7633	2'3685	2'0484	1'7011	1'1747	1'0560	0'8546	0'6834	0'5304	0'3893	0'2558	0'1268
29	3'6595	2'7564	2'3638	2'0452	1'6991	1'1739	1'0553	0'8542	0'6830	0'5302	0'3892	0'2557	0'1268
30	3'6460	2'7500	2'3596	2'0423	1'6973	1'1731	1'0547	0'8538	0'6828	0'5300	0'3890	0'2556	0'1267
35	3'5911	2'7238	2'3420	2'0301	1'6896	1'1698	1'0520	0'8520	0'6816	0'5292	0'3885	0'2553	0'1266
40	3'5510	2'7045	2'3289	2'0211	1'6839	1'1673	1'0500	0'8507	0'6807	0'5286	0'3881	0'2550	0'1265
50	3'4960	2'6778	2'3109	2'0086	1'6759	1'1639	1'0473	0'8489	0'6794	0'5278	0'3875	0'2547	0'1263
60	3'4602	2'6603	2'2990	2'0003	1'6706	1'1616	1'0455	0'8477	0'6786	0'5272	0'3872	0'2545	0'1262
80	3'4164	2'6387	2'2844	1'9901	1'6641	1'1588	1'0432	0'8461	0'6776	0'5265	0'3867	0'2542	0'1261
100	3'3905	2'6259	2'2757	1'9840	1'6602	1'1571	1'0418	0'8452	0'6770	0'5261	0'3864	0'2540	0'1260
120	3'3734	2'6174	2'2699	1'9799	1'6576	1'1559	1'0409	0'8446	0'6765	0'5258	0'3862	0'2539	0'1259

Tabla A.3: Puntos críticos: distribución χ^2

	0'9995	0'995	0'9875	0'975	0'95	0'875	0'85	0'8	0'75	0'7	0'65	0'6	0'55
1	12'115	7'8794	6'2385	5'0239	3'8415	2'3535	2'0722	1'6424	1'3233	1'0742	0'8735	0'7083	0'5707
2	15'201	10'597	8'7641	7'3778	5'9915	4'1589	3'7942	3'2189	2'7726	2'4079	2'0996	1'8326	1'5970
3	17'731	12'838	10'861	9'3484	7'8147	5'7394	5'3170	4'6416	4'1083	3'6649	3'2831	2'9462	2'6430
4	19'998	14'860	12'762	11'143	9'4877	7'2140	6'7449	5'9886	5'3853	4'8784	4'4377	4'0446	3'6871
5	22'106	16'750	14'544	12'832	11'070	8'6248	8'1152	7'2893	6'6257	6'0644	5'5731	5'1319	4'7278
6	24'102	18'548	16'244	14'449	12'592	9'9917	9'4461	8'5581	7'8408	7'2311	6'6948	6'2108	5'7652
7	26'018	20'278	17'885	16'013	14'067	11'326	10'748	9'8032	9'0371	8'3834	7'8061	7'2832	6'8000
8	27'867	21'955	19'478	17'535	15'507	12'636	12'027	11'030	10'219	9'5245	8'9094	8'3505	7'8325
9	29'667	23'589	21'034	19'023	16'919	13'926	13'288	12'242	11'389	10'656	10'006	9'4136	8'8632
10	31'419	25'188	22'558	20'483	18'307	15'198	14'534	13'442	12'549	11'781	11'097	10'473	9'8922
11	33'138	26'757	24'056	21'920	19'675	16'457	15'767	14'631	13'701	12'899	12'184	11'530	10'920
12	34'821	28'300	25'530	23'337	21'026	17'703	16'989	15'812	14'845	14'011	13'266	12'584	11'946
13	36'477	29'819	26'985	24'736	22'362	18'939	18'202	16'985	15'984	15'119	14'345	13'636	12'972
14	38'109	31'319	28'422	26'119	23'685	20'166	19'406	18'151	17'117	16'222	15'421	14'685	13'996
15	39'717	32'801	29'843	27'488	24'996	21'384	20'603	19'311	18'245	17'322	16'494	15'733	15'020
16	41'308	34'267	31'250	28'845	26'296	22'595	21'793	20'465	19'369	18'418	17'565	16'780	16'042
17	42'881	35'718	32'644	30'191	27'587	23'799	22'977	21'615	20'489	19'511	18'633	17'824	17'065
18	44'434	37'156	34'027	31'526	28'869	24'997	24'155	22'760	21'605	20'601	19'699	18'868	18'086
19	45'974	38'582	35'399	32'852	30'144	26'189	25'329	23'900	22'718	21'689	20'764	19'910	19'107
20	47'498	39'997	36'760	34'170	31'410	27'376	26'498	25'038	23'828	22'775	21'826	20'951	20'127
21	49'010	41'401	38'113	35'479	32'671	28'559	27'662	26'171	24'935	23'858	22'888	21'992	21'147
22	50'510	42'796	39'458	36'781	33'924	29'737	28'822	27'301	26'039	24'939	23'947	23'031	22'166
23	51'999	44'181	40'794	38'076	35'172	30'911	29'979	28'429	27'141	26'018	25'006	24'069	23'185
24	53'478	45'558	42'124	39'364	36'415	32'081	31'132	29'553	28'241	27'096	26'063	25'106	24'204
25	54'948	46'928	43'446	40'646	37'652	33'247	32'282	30'675	29'339	28'172	27'118	26'143	25'222
26	56'407	48'290	44'762	41'923	38'885	34'410	33'429	31'795	30'435	29'246	28'173	27'179	26'240
27	57'856	49'645	46'071	43'195	40'113	35'570	34'574	32'912	31'528	30'319	29'227	28'214	27'257
28	59'299	50'994	47'375	44'461	41'337	36'727	35'715	34'027	32'620	31'391	30'279	29'249	28'274
29	60'734	52'335	48'674	45'722	42'557	37'881	36'854	35'139	33'711	32'461	31'331	30'283	29'291
30	62'160	53'672	49'967	46'979	43'773	39'033	37'990	36'250	34'800	33'530	32'382	31'316	30'307
35	69'197	60'275	56'365	53'203	49'802	44'753	43'640	41'778	40'223	38'859	37'623	36'475	35'386
40	76'096	66'766	62'665	59'342	55'758	50'424	49'244	47'269	45'616	44'165	42'848	41'622	40'459
50	89'560	79'490	75'039	71'420	67'505	61'647	60'346	58'164	56'334	54'723	53'258	51'892	50'592
60	102'70	91'952	87'184	83'298	79'082	72'751	71'341	68'972	66'981	65'226	63'628	62'135	60'713
80	128'26	116'32	110'99	106'63	101'88	94'709	93'106	90'405	88'130	86'120	84'284	82'566	80'927
100	153'16	140'17	134'34	129'56	124'34	116'43	114'66	111'67	109'14	106'91	104'86	102'95	101'11
120	177'60	163'65	157'37	152'21	146'57	137'99	136'06	132'81	130'05	127'62	125'38	123'29	121'28

Tabla A.4: Puntos críticos: distribución χ^2

	0,5	0,45	0,4	0,35	0,3	0,25	0,2	0,15	0,125	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,4549	0,3573	0,2750	0,2059	0,1485	0,1015	0,0642	0,0358	0,0247	0,0158	0,0039	0,0010	0,0002	0,0000
2	1,3863	1,1957	1,0217	0,8616	0,7133	0,5754	0,4463	0,3250	0,2671	0,2107	0,1026	0,0506	0,0201	0,0100
3	2,3660	2,1095	1,8692	1,6416	1,4237	1,2125	1,0052	0,7978	0,6924	0,5844	0,3518	0,2158	0,1148	0,0717
4	3,3567	3,0469	2,7528	2,4701	2,1947	1,9226	1,6488	1,3665	1,2188	1,0636	0,7107	0,4844	0,2971	0,2070
5	4,3515	3,9959	3,6555	3,3251	2,9999	2,6746	2,3425	1,9938	1,8082	1,6103	1,1455	0,8312	0,5543	0,4118
6	5,3481	4,9519	4,5702	4,1973	3,8276	3,4546	3,0701	2,6613	2,4411	2,2041	1,6354	1,2373	0,8721	0,6757
7	6,3458	5,9125	5,4932	5,0816	4,6713	4,2549	3,8223	3,3583	3,1063	2,8331	2,1673	1,6899	1,2390	0,9893
8	7,3441	6,8766	6,4226	5,9753	5,5274	5,0706	4,5936	4,0782	3,7965	3,4895	2,7326	2,1797	1,6465	1,3444
9	8,3428	7,8434	7,3570	6,8763	6,3933	5,8988	5,3801	4,8165	4,5070	4,1682	3,3251	2,7004	2,0879	1,7349
10	9,3418	8,8124	8,2955	7,7832	7,2672	6,7372	6,1791	5,5701	5,2341	4,8652	3,9403	3,2470	2,5582	2,1558
11	10,341	9,7831	9,2373	8,6952	8,1479	7,5841	6,9887	6,3364	5,9754	5,5778	4,5748	3,8157	3,0535	2,6032
12	11,340	10,755	10,182	9,6115	9,0343	8,4384	7,8073	7,1138	6,7288	6,3038	5,2260	4,4038	3,5706	3,0738
13	12,340	11,729	11,129	10,532	9,9257	9,2991	8,6339	7,9008	7,4929	7,0415	5,8919	5,0087	4,1069	3,5650
14	13,339	12,703	12,078	11,455	10,821	10,165	9,4673	8,6963	8,2662	7,7895	6,5706	5,6287	4,6604	4,0747
15	14,339	13,679	13,030	12,381	11,721	11,037	10,307	9,4993	9,0479	8,5468	7,2609	6,2621	5,2294	4,6009
16	15,338	14,656	13,983	13,310	12,624	11,912	11,152	10,309	9,8370	9,3122	7,9616	6,9077	5,8122	5,1422
17	16,338	15,633	14,937	14,241	13,531	12,792	12,002	11,125	10,633	10,085	8,6718	7,5642	6,4077	5,6973
18	17,338	16,611	15,893	15,174	14,440	13,675	12,857	11,946	11,435	10,865	9,3904	8,2307	7,0149	6,2648
19	18,338	17,589	16,850	16,109	15,352	14,562	13,716	12,773	12,242	11,651	10,117	8,9065	7,6327	6,8439
20	19,337	18,569	17,809	17,046	16,266	15,452	14,578	13,604	13,055	12,443	10,851	9,5908	8,2604	7,4338
21	20,337	19,548	18,768	17,984	17,182	16,344	15,445	14,439	13,873	13,240	11,591	10,283	8,8972	8,0336
22	21,337	20,529	19,729	18,924	18,101	17,240	16,314	15,279	14,695	14,041	12,338	10,982	9,5425	8,6427
23	22,337	21,510	20,690	19,866	19,021	18,137	17,187	16,122	15,521	14,848	13,091	11,689	10,196	9,2604
24	23,337	22,491	21,652	20,808	19,943	19,037	18,062	16,969	16,351	15,659	13,848	12,401	10,856	9,8862
25	24,337	23,472	22,616	21,752	20,867	19,939	18,940	17,818	17,184	16,473	14,611	13,120	11,524	10,520
26	25,336	24,454	23,579	22,697	21,792	20,843	19,820	18,671	18,021	17,292	15,379	13,844	12,198	11,160
27	26,336	25,437	24,544	23,644	22,719	21,749	20,703	19,527	18,861	18,114	16,151	14,573	12,878	11,808
28	27,336	26,419	25,509	24,591	23,647	22,657	21,588	20,386	19,704	18,939	16,928	15,308	13,565	12,461
29	28,336	27,402	26,475	25,539	24,577	23,567	22,475	21,247	20,550	19,768	17,708	16,047	14,256	13,121
30	29,336	28,386	27,442	26,488	25,508	24,478	23,364	22,110	21,399	20,599	18,493	16,791	14,953	13,787
35	34,336	33,306	32,282	31,246	30,178	29,054	27,836	26,460	25,678	24,797	22,465	20,569	18,509	17,192
40	39,335	38,233	37,134	36,021	34,872	33,660	32,345	30,856	30,008	29,051	26,509	24,433	22,164	20,707
50	49,335	48,099	46,864	45,610	44,313	42,942	41,449	39,754	38,785	37,689	34,764	32,357	29,707	27,991
60	59,335	57,978	56,620	55,239	53,809	52,294	50,641	48,759	47,680	46,459	43,188	40,482	37,485	35,534
80	79,334	77,763	76,188	74,583	72,915	71,145	69,207	66,994	65,722	64,278	60,391	57,153	53,540	51,172
100	99,334	97,574	95,808	94,005	92,129	90,133	87,945	85,441	83,999	82,358	77,929	74,222	70,065	67,328
120	119,33	117,40	115,46	113,48	111,42	109,22	106,81	104,04	102,44	100,62	95,705	91,573	86,923	83,852

Tabla A.5: Distribución $\mathcal{F}$ de Esnédecor ($p = 0$'5)

	n_1															
n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1’000	1’500	1’709	1’823	1’894	1’942	1’977	2’004	2’025	2’042	2’056	2’067	2’077	2’086	2’093	2’100
2	0’667	1’000	1’135	1’207	1’252	1’282	1’305	1’321	1’334	1’345	1’354	1’361	1’367	1’372	1’377	1’381
3	0’585	0’881	1’000	1’063	1’102	1’129	1’148	1’163	1’174	1’183	1’191	1’197	1’203	1’207	1’211	1’215
4	0’549	0’828	0’941	1’000	1’037	1’062	1’080	1’093	1’104	1’113	1’120	1’126	1’131	1’135	1’139	1’142
5	0’528	0’799	0’907	0’965	1’000	1’024	1’041	1’055	1’065	1’073	1’080	1’085	1’090	1’094	1’098	1’101
6	0’515	0’780	0’886	0’942	0’977	1’000	1’017	1’030	1’040	1’048	1’054	1’060	1’065	1’069	1’072	1’075
7	0’506	0’767	0’871	0’926	0’960	0’983	1’000	1’013	1’022	1’030	1’037	1’042	1’047	1’051	1’054	1’057
8	0’499	0’757	0’860	0’915	0’948	0’971	0’988	1’000	1’010	1’018	1’024	1’029	1’034	1’038	1’041	1’044
9	0’494	0’749	0’852	0’906	0’939	0’962	0’978	0’990	1’000	1’008	1’014	1’019	1’024	1’028	1’031	1’034
10	0’490	0’743	0’845	0’899	0’932	0’954	0’971	0’983	0’992	1’000	1’006	1’012	1’016	1’020	1’023	1’026
11	0’486	0’739	0’840	0’893	0’926	0’948	0’964	0’977	0’986	0’994	1’000	1’005	1’010	1’013	1’017	1’020
12	0’484	0’735	0’835	0’888	0’921	0’943	0’959	0’972	0’981	0’989	0’995	1’000	1’004	1’008	1’012	1’014
13	0’481	0’731	0’832	0’885	0’917	0’939	0’955	0’967	0’977	0’984	0’990	0’996	1’000	1’004	1’007	1’010
14	0’479	0’729	0’828	0’881	0’914	0’936	0’952	0’964	0’973	0’981	0’987	0’992	0’996	1’000	1’003	1’006
15	0’478	0’726	0’826	0’878	0’911	0’933	0’949	0’960	0’970	0’977	0’983	0’989	0’993	0’997	1’000	1’003
16	0’476	0’724	0’823	0’876	0’908	0’930	0’946	0’958	0’967	0’975	0’981	0’986	0’990	0’994	0’997	1’000
17	0’475	0’722	0’821	0’874	0’906	0’928	0’943	0’955	0’965	0’972	0’978	0’983	0’988	0’991	0’995	0’997
18	0’474	0’721	0’819	0’872	0’904	0’926	0’941	0’953	0’962	0’970	0’976	0’981	0’985	0’989	0’992	0’995
19	0’473	0’719	0’818	0’870	0’902	0’924	0’939	0’951	0’961	0’968	0’974	0’979	0’984	0’987	0’990	0’993
20	0’472	0’718	0’816	0’868	0’900	0’922	0’938	0’950	0’959	0’966	0’972	0’977	0’982	0’985	0’989	0’992
21	0’471	0’717	0’815	0’867	0’899	0’921	0’936	0’948	0’957	0’965	0’971	0’976	0’980	0’984	0’987	0’990
22	0’470	0’715	0’814	0’866	0’898	0’919	0’935	0’947	0’956	0’963	0’969	0’974	0’979	0’982	0’986	0’988
23	0’470	0’714	0’813	0’864	0’896	0’918	0’934	0’945	0’955	0’962	0’968	0’973	0’977	0’981	0’984	0’987
24	0’469	0’714	0’812	0’863	0’895	0’917	0’932	0’944	0’953	0’961	0’967	0’972	0’976	0’980	0’983	0’986
25	0’468	0’713	0’811	0’862	0’894	0’916	0’931	0’943	0’952	0’960	0’966	0’971	0’975	0’979	0’982	0’985
26	0’468	0’712	0’810	0’861	0’893	0’915	0’930	0’942	0’951	0’959	0’965	0’970	0’974	0’978	0’981	0’984
27	0’467	0’711	0’809	0’861	0’892	0’914	0’930	0’941	0’950	0’958	0’964	0’969	0’973	0’977	0’980	0’983
28	0’467	0’711	0’808	0’860	0’892	0’913	0’929	0’940	0’950	0’957	0’963	0’968	0’972	0’976	0’979	0’982
29	0’467	0’710	0’808	0’859	0’891	0’912	0’928	0’940	0’949	0’956	0’962	0’967	0’971	0’975	0’978	0’981
30	0’466	0’709	0’807	0’858	0’890	0’912	0’927	0’939	0’948	0’955	0’961	0’966	0’971	0’974	0’978	0’980
35	0’465	0’707	0’804	0’856	0’887	0’909	0’924	0’936	0’945	0’952	0’958	0’963	0’968	0’971	0’974	0’977
40	0’463	0’705	0’802	0’854	0’885	0’907	0’922	0’934	0’943	0’950	0’956	0’961	0’965	0’969	0’972	0’975
50	0’462	0’703	0’800	0’851	0’882	0’903	0’919	0’930	0’940	0’947	0’953	0’958	0’962	0’966	0’969	0’972
60	0’460	0’701	0’798	0’849	0’880	0’901	0’917	0’928	0’937	0’945	0’951	0’956	0’960	0’964	0’967	0’969
70	0’460	0’700	0’796	0’847	0’879	0’900	0’915	0’927	0’936	0’943	0’949	0’954	0’958	0’962	0’965	0’968
80	0’459	0’699	0’795	0’846	0’878	0’899	0’914	0’926	0’935	0’942	0’948	0’953	0’957	0’961	0’964	0’967
90	0’459	0’699	0’795	0’846	0’877	0’898	0’913	0’925	0’934	0’941	0’947	0’952	0’956	0’960	0’963	0’966
100	0’458	0’698	0’794	0’845	0’876	0’897	0’913	0’924	0’933	0’940	0’946	0’951	0’956	0’959	0’962	0’965
120	0’458	0’697	0’793	0’844	0’875	0’896	0’912	0’923	0’932	0’939	0’945	0’950	0’955	0’958	0’961	0’964
∞	0’455	0’693	0’789	0’839	0’870	0’891	0’907	0’918	0’927	0’934	0’940	0’945	0’949	0’953	0’956	0’959

Tabla A.6: Distribución $\mathcal{F}$ de Esnédecor ($p = 0'5$)

	n_1															
n_2	17	18	19	20	25	30	35	40	45	50	60	70	80	90	120	∞
1	2'105	2'110	2'115	2'119	2'135	2'145	2'153	2'158	2'163	2'166	2'172	2'175	2'178	2'180	2'185	2'198
2	1'385	1'388	1'391	1'393	1'403	1'410	1'414	1'418	1'421	1'423	1'426	1'428	1'430	1'432	1'434	1'442
3	1'218	1'220	1'223	1'225	1'234	1'239	1'243	1'246	1'249	1'251	1'254	1'256	1'257	1'258	1'261	1'268
4	1'145	1'147	1'150	1'152	1'160	1'165	1'169	1'172	1'174	1'176	1'178	1'180	1'182	1'183	1'185	1'191
5	1'104	1'106	1'109	1'111	1'118	1'123	1'127	1'130	1'132	1'134	1'136	1'138	1'139	1'140	1'143	1'149
6	1'078	1'080	1'083	1'084	1'092	1'097	1'100	1'103	1'105	1'107	1'109	1'111	1'112	1'114	1'116	1'122
7	1'060	1'062	1'064	1'066	1'074	1'079	1'082	1'085	1'087	1'088	1'091	1'093	1'094	1'095	1'097	1'103
8	1'047	1'049	1'051	1'053	1'060	1'065	1'069	1'071	1'073	1'075	1'077	1'079	1'080	1'081	1'083	1'089
9	1'037	1'039	1'041	1'043	1'050	1'055	1'058	1'061	1'063	1'064	1'067	1'068	1'070	1'071	1'073	1'079
10	1'029	1'031	1'033	1'035	1'042	1'047	1'050	1'053	1'055	1'056	1'059	1'060	1'062	1'062	1'064	1'070
11	1'022	1'025	1'027	1'028	1'035	1'040	1'043	1'046	1'048	1'050	1'052	1'054	1'055	1'056	1'058	1'064
12	1'017	1'019	1'021	1'023	1'030	1'035	1'038	1'041	1'042	1'044	1'046	1'048	1'049	1'050	1'052	1'058
13	1'012	1'015	1'017	1'019	1'026	1'030	1'033	1'036	1'038	1'039	1'042	1'043	1'045	1'046	1'048	1'053
14	1'009	1'011	1'013	1'015	1'022	1'026	1'030	1'032	1'034	1'036	1'038	1'040	1'041	1'042	1'044	1'049
15	1'005	1'008	1'010	1'011	1'018	1'023	1'026	1'029	1'031	1'032	1'034	1'036	1'037	1'038	1'040	1'046
16	1'003	1'005	1'007	1'009	1'015	1'020	1'023	1'026	1'028	1'029	1'032	1'033	1'034	1'035	1'037	1'043
17	1'000	1'002	1'004	1'006	1'013	1'017	1'021	1'023	1'025	1'027	1'029	1'031	1'032	1'033	1'035	1'040
18	0'998	1'000	1'002	1'004	1'011	1'015	1'018	1'021	1'023	1'024	1'027	1'028	1'030	1'030	1'032	1'038
19	0'996	0'998	1'000	1'002	1'009	1'013	1'016	1'019	1'021	1'022	1'025	1'026	1'027	1'028	1'030	1'036
20	0'994	0'996	0'998	1'000	1'007	1'011	1'015	1'017	1'019	1'020	1'023	1'024	1'026	1'027	1'029	1'034
21	0'992	0'995	0'997	0'998	1'005	1'010	1'013	1'015	1'017	1'019	1'021	1'023	1'024	1'025	1'027	1'032
22	0'991	0'993	0'995	0'997	1'004	1'008	1'011	1'014	1'016	1'017	1'020	1'021	1'022	1'023	1'025	1'031
23	0'990	0'992	0'994	0'996	1'002	1'007	1'010	1'013	1'014	1'016	1'018	1'020	1'021	1'022	1'024	1'030
24	0'988	0'991	0'993	0'994	1'001	1'006	1'009	1'011	1'013	1'015	1'017	1'019	1'020	1'021	1'023	1'028
25	0'987	0'989	0'991	0'993	1'000	1'005	1'008	1'010	1'012	1'014	1'016	1'017	1'019	1'020	1'022	1'027
26	0'986	0'988	0'990	0'992	0'999	1'003	1'007	1'009	1'011	1'013	1'015	1'016	1'018	1'019	1'020	1'026
27	0'985	0'988	0'989	0'991	0'998	1'003	1'006	1'008	1'010	1'012	1'014	1'015	1'017	1'018	1'020	1'025
28	0'984	0'987	0'989	0'990	0'997	1'002	1'005	1'007	1'009	1'011	1'013	1'015	1'016	1'017	1'019	1'024
29	0'984	0'986	0'988	0'990	0'996	1'001	1'004	1'006	1'008	1'010	1'012	1'014	1'015	1'016	1'018	1'023
30	0'983	0'985	0'987	0'989	0'996	1'000	1'003	1'006	1'008	1'009	1'011	1'013	1'014	1'015	1'017	1'022
35	0'980	0'982	0'984	0'986	0'992	0'997	1'000	1'002	1'004	1'006	1'008	1'010	1'011	1'012	1'014	1'019
40	0'977	0'980	0'981	0'983	0'990	0'994	0'998	1'000	1'002	1'003	1'006	1'007	1'008	1'009	1'011	1'017
50	0'974	0'976	0'978	0'980	0'987	0'991	0'994	0'997	0'999	1'000	1'002	1'004	1'005	1'006	1'008	1'013
60	0'972	0'974	0'976	0'978	0'984	0'989	0'992	0'994	0'996	0'998	1'000	1'002	1'003	1'004	1'006	1'011
70	0'970	0'972	0'974	0'976	0'983	0'987	0'990	0'993	0'995	0'996	0'998	1'000	1'001	1'002	1'004	1'009
80	0'969	0'971	0'973	0'975	0'982	0'986	0'989	0'992	0'993	0'995	0'997	0'999	1'000	1'001	1'003	1'008
90	0'968	0'970	0'972	0'974	0'981	0'985	0'988	0'991	0'993	0'994	0'996	0'998	0'999	1'000	1'002	1'007
100	0'968	0'970	0'972	0'973	0'980	0'984	0'988	0'990	0'992	0'993	0'996	0'997	0'998	0'999	1'001	1'007
120	0'966	0'969	0'971	0'972	0'979	0'983	0'986	0'989	0'991	0'992	0'994	0'996	0'997	0'998	1'000	1'005
∞	0'961	0'963	0'965	0'967	0'974	0'978	0'981	0'984	0'985	0'987	0'989	0'991	0'992	0'993	0'995	1'000

Tabla A.7: Distribución $\mathcal{F}$ de Esnédecor ($p = 0'75$)

	n_1															
n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	5'828	7'500	8'200	8'581	8'820	8'983	9'102	9'192	9'263	9'320	9'367	9'406	9'440	9'468	9'493	9'515
2	2'571	3'000	3'153	3'232	3'280	3'312	3'335	3'353	3'366	3'377	3'386	3'393	3'400	3'405	3'410	3'414
3	2'024	2'280	2'356	2'390	2'409	2'422	2'430	2'436	2'441	2'445	2'448	2'450	2'452	2'454	2'455	2'456
4	1'807	2'000	2'047	2'064	2'072	2'077	2'079	2'080	2'081	2'082	2'082	2'083	2'083	2'083	2'083	2'083
5	1'692	1'853	1'884	1'893	1'895	1'894	1'894	1'892	1'891	1'890	1'889	1'888	1'887	1'886	1'885	1'884
6	1'621	1'762	1'784	1'787	1'785	1'782	1'779	1'776	1'773	1'771	1'769	1'767	1'765	1'764	1'762	1'761
7	1'573	1'701	1'717	1'716	1'711	1'706	1'701	1'697	1'693	1'690	1'687	1'684	1'682	1'680	1'678	1'676
8	1'538	1'657	1'668	1'664	1'658	1'651	1'645	1'640	1'635	1'631	1'627	1'624	1'622	1'619	1'617	1'615
9	1'512	1'624	1'632	1'625	1'617	1'609	1'602	1'596	1'591	1'586	1'582	1'579	1'576	1'573	1'570	1'568
10	1'491	1'598	1'603	1'595	1'585	1'576	1'569	1'562	1'556	1'551	1'547	1'543	1'540	1'537	1'534	1'531
11	1'475	1'577	1'580	1'570	1'560	1'550	1'542	1'535	1'528	1'523	1'518	1'514	1'510	1'507	1'504	1'501
12	1'461	1'560	1'561	1'550	1'539	1'529	1'520	1'512	1'505	1'500	1'495	1'490	1'486	1'483	1'480	1'477
13	1'450	1'545	1'545	1'534	1'521	1'511	1'501	1'493	1'486	1'480	1'475	1'470	1'466	1'462	1'459	1'456
14	1'440	1'533	1'532	1'519	1'507	1'495	1'485	1'477	1'470	1'463	1'458	1'453	1'449	1'445	1'441	1'438
15	1'432	1'523	1'520	1'507	1'494	1'482	1'472	1'463	1'456	1'449	1'443	1'438	1'434	1'430	1'426	1'423
16	1'425	1'514	1'510	1'497	1'483	1'471	1'460	1'451	1'443	1'437	1'431	1'426	1'421	1'417	1'413	1'410
17	1'419	1'506	1'502	1'487	1'473	1'460	1'450	1'441	1'433	1'426	1'420	1'414	1'409	1'405	1'401	1'398
18	1'413	1'499	1'494	1'479	1'464	1'452	1'441	1'431	1'423	1'416	1'410	1'404	1'399	1'395	1'391	1'388
19	1'408	1'493	1'487	1'472	1'457	1'444	1'432	1'423	1'414	1'407	1'401	1'395	1'390	1'386	1'382	1'378
20	1'404	1'487	1'481	1'465	1'450	1'437	1'425	1'415	1'407	1'399	1'393	1'387	1'382	1'378	1'374	1'370
21	1'400	1'482	1'475	1'459	1'444	1'430	1'419	1'409	1'400	1'392	1'386	1'380	1'375	1'370	1'366	1'362
22	1'396	1'477	1'470	1'454	1'438	1'424	1'413	1'402	1'394	1'386	1'379	1'374	1'368	1'364	1'359	1'355
23	1'393	1'473	1'466	1'449	1'433	1'419	1'407	1'397	1'388	1'380	1'374	1'368	1'362	1'357	1'353	1'349
24	1'390	1'470	1'462	1'445	1'428	1'414	1'402	1'392	1'383	1'375	1'368	1'362	1'357	1'352	1'347	1'343
25	1'387	1'466	1'458	1'441	1'424	1'410	1'398	1'387	1'378	1'370	1'363	1'357	1'352	1'347	1'342	1'338
26	1'384	1'463	1'454	1'437	1'420	1'406	1'393	1'383	1'374	1'366	1'359	1'352	1'347	1'342	1'337	1'333
27	1'382	1'460	1'451	1'433	1'417	1'402	1'390	1'379	1'370	1'361	1'354	1'348	1'342	1'337	1'333	1'329
28	1'380	1'457	1'448	1'430	1'413	1'399	1'386	1'375	1'366	1'358	1'350	1'344	1'338	1'333	1'329	1'325
29	1'378	1'455	1'445	1'427	1'410	1'395	1'383	1'372	1'362	1'354	1'347	1'340	1'335	1'330	1'325	1'321
30	1'376	1'452	1'443	1'424	1'407	1'392	1'380	1'369	1'359	1'351	1'343	1'337	1'331	1'326	1'321	1'317
35	1'368	1'443	1'432	1'413	1'395	1'380	1'367	1'355	1'345	1'337	1'329	1'323	1'317	1'311	1'306	1'302
40	1'363	1'435	1'424	1'404	1'386	1'371	1'357	1'345	1'335	1'327	1'319	1'312	1'306	1'300	1'295	1'291
50	1'355	1'425	1'413	1'393	1'374	1'358	1'344	1'332	1'321	1'312	1'304	1'297	1'291	1'285	1'280	1'275
60	1'349	1'419	1'405	1'385	1'366	1'349	1'335	1'323	1'312	1'303	1'294	1'287	1'280	1'274	1'269	1'264
70	1'346	1'414	1'400	1'379	1'360	1'343	1'329	1'316	1'305	1'296	1'287	1'280	1'273	1'267	1'262	1'257
80	1'343	1'411	1'396	1'375	1'355	1'338	1'324	1'311	1'300	1'291	1'282	1'275	1'268	1'262	1'256	1'251
90	1'341	1'408	1'393	1'372	1'352	1'335	1'320	1'307	1'296	1'287	1'278	1'270	1'263	1'257	1'252	1'246
100	1'339	1'406	1'391	1'369	1'349	1'332	1'317	1'304	1'293	1'283	1'275	1'267	1'260	1'254	1'248	1'243
120	1'336	1'402	1'387	1'365	1'345	1'328	1'313	1'300	1'289	1'279	1'270	1'262	1'255	1'249	1'243	1'237
∞	1'324	1'387	1'370	1'347	1'326	1'307	1'292	1'278	1'266	1'255	1'246	1'238	1'230	1'223	1'217	1'211

Tabla A.8: Distribución $\mathcal{F}$ de Esnédecor ($p = 0'75$)

	n_1															
n_2	17	18	19	20	25	30	35	40	45	50	60	70	80	90	120	∞
1	9’535	9’552	9’567	9’581	9’634	9’670	9’695	9’714	9’729	9’741	9’759	9’772	9’782	9’789	9’804	9’848
2	3’418	3’421	3’424	3’426	3’436	3’443	3’448	3’451	3’454	3’456	3’459	3’462	3’464	3’465	3’468	3’476
3	2’458	2’459	2’459	2’460	2’463	2’465	2’466	2’467	2’468	2’469	2’470	2’470	2’471	2’471	2’472	2’474
4	2’083	2’083	2’083	2’083	2’083	2’082	2’082	2’082	2’082	2’082	2’082	2’082	2’081	2’081	2’081	2’081
5	1’884	1’883	1’882	1’882	1’880	1’878	1’877	1’876	1’876	1’875	1’874	1’874	1’873	1’873	1’872	1’869
6	1’760	1’759	1’758	1’757	1’753	1’751	1’749	1’748	1’747	1’746	1’744	1’743	1’742	1’742	1’741	1’737
7	1’675	1’674	1’672	1’671	1’667	1’663	1’661	1’659	1’658	1’657	1’655	1’654	1’653	1’652	1’650	1’645
8	1’613	1’612	1’610	1’609	1’603	1’600	1’597	1’595	1’593	1’591	1’589	1’588	1’586	1’586	1’584	1’578
9	1’566	1’564	1’563	1’561	1’555	1’551	1’547	1’545	1’543	1’541	1’539	1’537	1’536	1’535	1’533	1’526
10	1’529	1’527	1’525	1’523	1’517	1’512	1’508	1’506	1’503	1’502	1’499	1’497	1’495	1’494	1’492	1’484
11	1’499	1’497	1’495	1’493	1’486	1’481	1’477	1’474	1’471	1’469	1’466	1’464	1’463	1’461	1’459	1’451
12	1’474	1’472	1’470	1’468	1’460	1’454	1’450	1’447	1’445	1’443	1’439	1’437	1’435	1’434	1’431	1’422
13	1’453	1’451	1’449	1’447	1’438	1’432	1’428	1’425	1’422	1’420	1’416	1’414	1’412	1’411	1’408	1’398
14	1’435	1’433	1’431	1’428	1’420	1’414	1’409	1’405	1’403	1’400	1’397	1’394	1’392	1’391	1’387	1’377
15	1’420	1’417	1’415	1’413	1’404	1’397	1’392	1’389	1’386	1’383	1’380	1’377	1’375	1’373	1’370	1’359
16	1’407	1’404	1’401	1’399	1’390	1’383	1’378	1’374	1’371	1’369	1’365	1’362	1’360	1’358	1’354	1’343
17	1’395	1’392	1’389	1’387	1’377	1’370	1’365	1’361	1’358	1’355	1’351	1’348	1’346	1’344	1’341	1’329
18	1’384	1’381	1’379	1’376	1’366	1’359	1’354	1’350	1’346	1’344	1’340	1’336	1’334	1’332	1’328	1’317
19	1’375	1’372	1’369	1’367	1’356	1’349	1’344	1’339	1’336	1’333	1’329	1’326	1’323	1’321	1’317	1’305
20	1’367	1’363	1’361	1’358	1’348	1’340	1’335	1’330	1’327	1’324	1’319	1’316	1’313	1’311	1’307	1’295
21	1’359	1’356	1’353	1’350	1’340	1’332	1’326	1’322	1’318	1’315	1’311	1’307	1’305	1’303	1’298	1’285
22	1’352	1’349	1’346	1’343	1’332	1’324	1’319	1’314	1’310	1’307	1’303	1’299	1’296	1’294	1’290	1’276
23	1’346	1’342	1’339	1’337	1’326	1’318	1’312	1’307	1’303	1’300	1’295	1’292	1’289	1’287	1’282	1’268
24	1’340	1’337	1’333	1’331	1’319	1’311	1’305	1’300	1’297	1’293	1’289	1’285	1’282	1’280	1’275	1’261
25	1’335	1’331	1’328	1’325	1’314	1’306	1’299	1’294	1’291	1’287	1’282	1’279	1’276	1’273	1’269	1’254
26	1’330	1’326	1’323	1’320	1’309	1’300	1’294	1’289	1’285	1’282	1’277	1’273	1’270	1’268	1’263	1’248
27	1’325	1’322	1’318	1’315	1’304	1’295	1’289	1’284	1’280	1’276	1’271	1’267	1’264	1’262	1’257	1’242
28	1’321	1’317	1’314	1’311	1’299	1’291	1’284	1’279	1’275	1’271	1’266	1’262	1’259	1’257	1’252	1’236
29	1’317	1’313	1’310	1’307	1’295	1’286	1’280	1’275	1’270	1’267	1’262	1’258	1’254	1’252	1’247	1’231
30	1’313	1’310	1’306	1’303	1’291	1’282	1’276	1’270	1’266	1’263	1’257	1’253	1’250	1’247	1’242	1’226
35	1’298	1’294	1’291	1’288	1’275	1’266	1’258	1’253	1’248	1’245	1’239	1’234	1’231	1’228	1’223	1’205
40	1’286	1’283	1’279	1’276	1’263	1’253	1’245	1’240	1’235	1’231	1’225	1’220	1’217	1’214	1’208	1’189
50	1’270	1’266	1’263	1’259	1’245	1’235	1’227	1’221	1’216	1’212	1’205	1’200	1’196	1’193	1’186	1’165
60	1’260	1’255	1’252	1’248	1’234	1’223	1’215	1’208	1’203	1’198	1’191	1’186	1’182	1’178	1’172	1’148
70	1’252	1’248	1’244	1’240	1’225	1’214	1’206	1’199	1’193	1’189	1’181	1’176	1’171	1’168	1’161	1’135
80	1’246	1’242	1’238	1’234	1’219	1’208	1’199	1’192	1’186	1’181	1’174	1’168	1’163	1’160	1’152	1’125
90	1’242	1’237	1’233	1’229	1’214	1’202	1’194	1’186	1’180	1’176	1’168	1’162	1’157	1’153	1’145	1’117
100	1’238	1’234	1’229	1’226	1’210	1’198	1’189	1’182	1’176	1’171	1’163	1’157	1’152	1’148	1’140	1’110
120	1’233	1’228	1’224	1’220	1’204	1’192	1’183	1’175	1’169	1’164	1’156	1’149	1’144	1’140	1’131	1’100
∞	1’206	1’201	1’196	1’192	1’174	1’161	1’150	1’141	1’134	1’128	1’117	1’109	1’103	1’097	1’085	1’019

Tabla A.9: Distribución $\mathcal{F}$ de Esnédecor ($p = 0$’9)

	n_1															
n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	39’86	49’50	53’59	55’83	57’24	58’20	58’91	59’44	59’86	60’19	60’47	60’71	60’90	61’07	61’22	61’35
2	8’526	9’000	9’162	9’243	9’293	9’326	9’349	9’367	9’381	9’392	9’401	9’408	9’415	9’420	9’425	9’429
3	5’538	5’462	5’391	5’343	5’309	5’285	5’266	5’252	5’240	5’230	5’222	5’216	5’210	5’205	5’200	5’196
4	4’545	4’325	4’191	4’107	4’051	4’010	3’979	3’955	3’936	3’920	3’907	3’896	3’886	3’878	3’870	3’864
5	4’060	3’780	3’619	3’520	3’453	3’405	3’368	3’339	3’316	3’297	3’282	3’268	3’257	3’247	3’238	3’230
6	3’776	3’463	3’289	3’181	3’108	3’055	3’014	2’983	2’958	2’937	2’920	2’905	2’892	2’881	2’871	2’863
7	3’589	3’257	3’074	2’961	2’883	2’827	2’785	2’752	2’725	2’703	2’684	2’668	2’654	2’643	2’632	2’623
8	3’458	3’113	2’924	2’806	2’726	2’668	2’624	2’589	2’561	2’538	2’519	2’502	2’488	2’475	2’464	2’454
9	3’360	3’006	2’813	2’693	2’611	2’551	2’505	2’469	2’440	2’416	2’396	2’379	2’364	2’351	2’340	2’330
10	3’285	2’924	2’728	2’605	2’522	2’461	2’414	2’377	2’347	2’323	2’302	2’284	2’269	2’255	2’244	2’233
11	3’225	2’860	2’660	2’536	2’451	2’389	2’342	2’304	2’274	2’248	2’227	2’209	2’193	2’179	2’167	2’156
12	3’177	2’807	2’606	2’480	2’394	2’331	2’283	2’245	2’214	2’188	2’166	2’147	2’131	2’117	2’105	2’094
13	3’136	2’763	2’560	2’434	2’347	2’283	2’234	2’195	2’164	2’138	2’116	2’097	2’080	2’066	2’053	2’042
14	3’102	2’726	2’522	2’395	2’307	2’243	2’193	2’154	2’122	2’095	2’073	2’054	2’037	2’022	2’010	1’998
15	3’073	2’695	2’490	2’361	2’273	2’208	2’158	2’119	2’086	2’059	2’037	2’017	2’000	1’985	1’972	1’961
16	3’048	2’668	2’462	2’333	2’244	2’178	2’128	2’088	2’055	2’028	2’005	1’985	1’968	1’953	1’940	1’928
17	3’026	2’645	2’437	2’308	2’218	2’152	2’102	2’061	2’028	2’001	1’978	1’958	1’940	1’925	1’912	1’900
18	3’007	2’624	2’416	2’286	2’196	2’130	2’079	2’038	2’005	1’977	1’954	1’933	1’916	1’900	1’887	1’875
19	2’990	2’606	2’397	2’266	2’176	2’109	2’058	2’017	1’984	1’956	1’932	1’912	1’894	1’878	1’865	1’852
20	2’975	2’589	2’380	2’249	2’158	2’091	2’040	1’999	1’965	1’937	1’913	1’892	1’875	1’859	1’845	1’833
21	2’961	2’575	2’365	2’233	2’142	2’075	2’023	1’982	1’948	1’920	1’896	1’875	1’857	1’841	1’827	1’815
22	2’949	2’561	2’351	2’219	2’128	2’060	2’008	1’967	1’933	1’904	1’880	1’859	1’841	1’825	1’811	1’798
23	2’937	2’549	2’339	2’207	2’115	2’047	1’995	1’953	1’919	1’890	1’866	1’845	1’827	1’811	1’796	1’784
24	2’927	2’538	2’327	2’195	2’103	2’035	1’983	1’941	1’906	1’877	1’853	1’832	1’814	1’797	1’783	1’770
25	2’918	2’528	2’317	2’184	2’092	2’024	1’971	1’929	1’895	1’866	1’841	1’820	1’802	1’785	1’771	1’758
26	2’909	2’519	2’307	2’174	2’082	2’014	1’961	1’919	1’884	1’855	1’830	1’809	1’790	1’774	1’760	1’747
27	2’901	2’511	2’299	2’165	2’073	2’005	1’952	1’909	1’874	1’845	1’820	1’799	1’780	1’764	1’749	1’736
28	2’894	2’503	2’291	2’157	2’064	1’996	1’943	1’900	1’865	1’836	1’811	1’790	1’771	1’754	1’740	1’726
29	2’887	2’495	2’283	2’149	2’057	1’988	1’935	1’892	1’857	1’827	1’802	1’781	1’762	1’745	1’731	1’717
30	2’881	2’489	2’276	2’142	2’049	1’980	1’927	1’884	1’849	1’819	1’794	1’773	1’754	1’737	1’722	1’709
35	2’855	2’461	2’247	2’113	2’019	1’950	1’896	1’852	1’817	1’787	1’761	1’739	1’720	1’703	1’688	1’674
40	2’835	2’440	2’226	2’091	1’997	1’927	1’873	1’829	1’793	1’763	1’737	1’715	1’695	1’678	1’662	1’649
50	2’809	2’412	2’197	2’061	1’966	1’895	1’840	1’796	1’760	1’729	1’703	1’680	1’660	1’643	1’627	1’613
60	2’791	2’393	2’177	2’041	1’946	1’875	1’819	1’775	1’738	1’707	1’680	1’657	1’637	1’619	1’603	1’589
70	2’779	2’380	2’164	2’027	1’931	1’860	1’804	1’760	1’723	1’691	1’665	1’641	1’621	1’603	1’587	1’572
80	2’769	2’370	2’154	2’016	1’921	1’849	1’793	1’748	1’711	1’680	1’653	1’629	1’609	1’590	1’574	1’559
90	2’762	2’363	2’146	2’008	1’912	1’841	1’785	1’739	1’702	1’670	1’643	1’620	1’599	1’581	1’564	1’550
100	2’756	2’356	2’139	2’002	1’906	1’834	1’778	1’732	1’695	1’663	1’636	1’612	1’592	1’573	1’557	1’542
120	2’748	2’347	2’130	1’992	1’896	1’824	1’767	1’722	1’684	1’652	1’625	1’601	1’580	1’562	1’545	1’530
∞	2’707	2’304	2’085	1’946	1’848	1’775	1’718	1’671	1’633	1’600	1’572	1’547	1’525	1’506	1’489	1’473

Tabla A.10: Distribución $\mathcal{F}$ de Esnédecor ($p = 0'9$)

	n_1															
n_2	17	18	19	20	25	30	35	40	45	50	60	70	80	90	120	∞
1	61’46	61’57	61’66	61’74	62’05	62’26	62’42	62’53	62’62	62’69	62’79	62’87	62’93	62’97	63’06	63’32
2	9’433	9’436	9’439	9’441	9’451	9’458	9’463	9’466	9’469	9’471	9’475	9’477	9’479	9’480	9’483	9’491
3	5’193	5’190	5’187	5’184	5’175	5’168	5’163	5’160	5’157	5’155	5’151	5’149	5’147	5’145	5’143	5’134
4	3’858	3’853	3’848	3’844	3’828	3’817	3’810	3’804	3’799	3’795	3’790	3’786	3’782	3’780	3’775	3’761
5	3’223	3’217	3’212	3’207	3’187	3’174	3’165	3’157	3’152	3’147	3’140	3’135	3’132	3’129	3’123	3’105
6	2’855	2’848	2’842	2’836	2’815	2’800	2’789	2’781	2’775	2’770	2’762	2’756	2’752	2’749	2’742	2’723
7	2’615	2’607	2’601	2’595	2’571	2’555	2’544	2’535	2’528	2’523	2’514	2’508	2’504	2’500	2’493	2’471
8	2’446	2’438	2’431	2’425	2’400	2’383	2’371	2’361	2’354	2’348	2’339	2’333	2’328	2’324	2’316	2’293
9	2’320	2’312	2’305	2’298	2’272	2’255	2’242	2’232	2’224	2’218	2’208	2’202	2’196	2’192	2’184	2’160
10	2’224	2’215	2’208	2’201	2’174	2’155	2’142	2’132	2’124	2’117	2’107	2’100	2’095	2’090	2’082	2’056
11	2’147	2’138	2’130	2’123	2’095	2’076	2’062	2’052	2’043	2’036	2’026	2’019	2’013	2’009	2’000	1’973
12	2’084	2’075	2’067	2’060	2’031	2’011	1’997	1’986	1’977	1’970	1’960	1’952	1’946	1’942	1’932	1’904
13	2’032	2’023	2’014	2’007	1’978	1’958	1’943	1’931	1’923	1’915	1’904	1’896	1’890	1’886	1’876	1’847
14	1’988	1’978	1’970	1’962	1’933	1’912	1’897	1’885	1’876	1’869	1’857	1’849	1’843	1’838	1’828	1’798
15	1’950	1’941	1’932	1’924	1’894	1’873	1’857	1’845	1’836	1’828	1’817	1’808	1’802	1’797	1’787	1’756
16	1’917	1’908	1’899	1’891	1’860	1’839	1’823	1’811	1’801	1’793	1’782	1’773	1’766	1’761	1’751	1’719
17	1’889	1’879	1’870	1’862	1’831	1’809	1’793	1’781	1’771	1’763	1’751	1’742	1’735	1’730	1’719	1’686
18	1’864	1’854	1’845	1’837	1’805	1’783	1’766	1’754	1’744	1’736	1’723	1’714	1’707	1’702	1’691	1’658
19	1’841	1’831	1’822	1’814	1’782	1’759	1’743	1’730	1’720	1’711	1’699	1’690	1’683	1’677	1’666	1’632
20	1’821	1’811	1’802	1’794	1’761	1’738	1’721	1’708	1’698	1’690	1’677	1’667	1’660	1’655	1’643	1’608
21	1’803	1’793	1’784	1’776	1’742	1’719	1’702	1’689	1’678	1’670	1’657	1’647	1’640	1’634	1’623	1’587
22	1’787	1’777	1’768	1’759	1’726	1’702	1’685	1’671	1’661	1’652	1’639	1’629	1’622	1’616	1’604	1’568
23	1’772	1’762	1’753	1’744	1’710	1’686	1’669	1’655	1’645	1’636	1’622	1’613	1’605	1’599	1’587	1’550
24	1’759	1’748	1’739	1’730	1’696	1’672	1’654	1’641	1’630	1’621	1’607	1’597	1’590	1’584	1’571	1’534
25	1’746	1’736	1’726	1’718	1’683	1’659	1’641	1’627	1’616	1’607	1’593	1’583	1’576	1’569	1’557	1’519
26	1’735	1’724	1’715	1’706	1’671	1’647	1’629	1’615	1’604	1’594	1’581	1’570	1’562	1’556	1’544	1’505
27	1’724	1’714	1’704	1’695	1’660	1’636	1’617	1’603	1’592	1’583	1’569	1’558	1’550	1’544	1’531	1’492
28	1’715	1’704	1’694	1’685	1’650	1’625	1’607	1’592	1’581	1’572	1’558	1’547	1’539	1’533	1’520	1’479
29	1’705	1’695	1’685	1’676	1’640	1’616	1’597	1’583	1’571	1’562	1’547	1’537	1’529	1’522	1’509	1’468
30	1’697	1’686	1’676	1’667	1’632	1’606	1’588	1’573	1’562	1’552	1’538	1’527	1’519	1’512	1’499	1’457
35	1’662	1’651	1’641	1’632	1’595	1’569	1’550	1’535	1’523	1’513	1’497	1’486	1’478	1’471	1’457	1’413
40	1’636	1’625	1’615	1’605	1’568	1’541	1’521	1’506	1’493	1’483	1’467	1’455	1’447	1’439	1’425	1’378
50	1’600	1’588	1’578	1’568	1’529	1’502	1’481	1’465	1’452	1’441	1’424	1’412	1’402	1’395	1’379	1’328
60	1’576	1’564	1’553	1’543	1’504	1’476	1’454	1’437	1’424	1’413	1’395	1’382	1’372	1’364	1’348	1’293
70	1’559	1’547	1’536	1’526	1’486	1’457	1’435	1’418	1’404	1’392	1’374	1’361	1’350	1’342	1’325	1’267
80	1’546	1’534	1’523	1’513	1’472	1’443	1’420	1’403	1’388	1’377	1’358	1’344	1’334	1’325	1’307	1’246
90	1’536	1’524	1’513	1’503	1’461	1’432	1’409	1’391	1’377	1’365	1’346	1’332	1’321	1’312	1’293	1’230
100	1’528	1’516	1’505	1’494	1’453	1’423	1’400	1’382	1’367	1’355	1’336	1’321	1’310	1’301	1’282	1’216
120	1’516	1’504	1’493	1’482	1’440	1’409	1’386	1’368	1’353	1’340	1’320	1’305	1’294	1’284	1’265	1’195
∞	1’458	1’445	1’433	1’422	1’377	1’344	1’318	1’297	1’280	1’265	1’242	1’224	1’209	1’197	1’171	1’037

Tabla A.11: Distribución $\mathcal{F}$ de Esnédecor ($p = 0'95$)

	n_1															
n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	161’4	199’5	215’7	224’6	230’2	234’0	236’8	238’9	240’5	241’9	243’0	243’9	244’7	245’4	245’9	246’5
2	18’51	19’00	19’16	19’25	19’30	19’33	19’35	19’37	19’38	19’40	19’40	19’41	19’42	19’42	19’43	19’43
3	10’13	9’552	9’277	9’117	9’013	8’941	8’887	8’845	8’812	8’785	8’763	8’745	8’729	8’715	8’703	8’692
4	7’709	6’944	6’591	6’388	6’256	6’163	6’094	6’041	5’999	5’964	5’936	5’912	5’891	5’873	5’858	5’844
5	6’608	5’786	5’409	5’192	5’050	4’950	4’876	4’818	4’772	4’735	4’704	4’678	4’655	4’636	4’619	4’604
6	5’987	5’143	4’757	4’534	4’387	4’284	4’207	4’147	4’099	4’060	4’027	4’000	3’976	3’956	3’938	3’922
7	5’591	4’737	4’347	4’120	3’972	3’866	3’787	3’726	3’677	3’637	3’603	3’575	3’550	3’529	3’511	3’494
8	5’318	4’459	4’066	3’838	3’688	3’581	3’500	3’438	3’388	3’347	3’313	3’284	3’259	3’237	3’218	3’202
9	5’117	4’256	3’863	3’633	3’482	3’374	3’293	3’230	3’179	3’137	3’102	3’073	3’048	3’025	3’006	2’989
10	4’965	4’103	3’708	3’478	3’326	3’217	3’135	3’072	3’020	2’978	2’943	2’913	2’887	2’865	2’845	2’828
11	4’844	3’982	3’587	3’357	3’204	3’095	3’012	2’948	2’896	2’854	2’818	2’788	2’761	2’739	2’719	2’701
12	4’747	3’885	3’490	3’259	3’106	2’996	2’913	2’849	2’796	2’753	2’717	2’687	2’660	2’637	2’617	2’599
13	4’667	3’806	3’411	3’179	3’025	2’915	2’832	2’767	2’714	2’671	2’635	2’604	2’577	2’554	2’533	2’515
14	4’600	3’739	3’344	3’112	2’958	2’848	2’764	2’699	2’646	2’602	2’565	2’534	2’507	2’484	2’463	2’445
15	4’543	3’682	3’287	3’056	2’901	2’790	2’707	2’641	2’588	2’544	2’507	2’475	2’448	2’424	2’403	2’385
16	4’494	3’634	3’239	3’007	2’852	2’741	2’657	2’591	2’538	2’494	2’456	2’425	2’397	2’373	2’352	2’333
17	4’451	3’592	3’197	2’965	2’810	2’699	2’614	2’548	2’494	2’450	2’413	2’381	2’353	2’329	2’308	2’289
18	4’414	3’555	3’160	2’928	2’773	2’661	2’577	2’510	2’456	2’412	2’374	2’342	2’314	2’290	2’269	2’250
19	4’381	3’522	3’127	2’895	2’740	2’628	2’544	2’477	2’423	2’378	2’340	2’308	2’280	2’256	2’234	2’215
20	4’351	3’493	3’098	2’866	2’711	2’599	2’514	2’447	2’393	2’348	2’310	2’278	2’250	2’225	2’203	2’184
21	4’325	3’467	3’072	2’840	2’685	2’573	2’488	2’420	2’366	2’321	2’283	2’250	2’222	2’197	2’176	2’156
22	4’301	3’443	3’049	2’817	2’661	2’549	2’464	2’397	2’342	2’297	2’259	2’226	2’198	2’173	2’151	2’131
23	4’279	3’422	3’028	2’796	2’640	2’528	2’442	2’375	2’320	2’275	2’236	2’204	2’175	2’150	2’128	2’109
24	4’260	3’403	3’009	2’776	2’621	2’508	2’423	2’355	2’300	2’255	2’216	2’183	2’155	2’130	2’108	2’088
25	4’242	3’385	2’991	2’759	2’603	2’490	2’405	2’337	2’282	2’236	2’198	2’165	2’136	2’111	2’089	2’069
26	4’225	3’369	2’975	2’743	2’587	2’474	2’388	2’321	2’265	2’220	2’181	2’148	2’119	2’094	2’072	2’052
27	4’210	3’354	2’960	2’728	2’572	2’459	2’373	2’305	2’250	2’204	2’166	2’132	2’103	2’078	2’056	2’036
28	4’196	3’340	2’947	2’714	2’558	2’445	2’359	2’291	2’236	2’190	2’151	2’118	2’089	2’064	2’041	2’021
29	4’183	3’328	2’934	2’701	2’545	2’432	2’346	2’278	2’223	2’177	2’138	2’104	2’075	2’050	2’027	2’007
30	4’171	3’316	2’922	2’690	2’534	2’421	2’334	2’266	2’211	2’165	2’126	2’092	2’063	2’037	2’015	1’995
35	4’121	3’267	2’874	2’641	2’485	2’372	2’285	2’217	2’161	2’114	2’075	2’041	2’012	1’986	1’963	1’942
40	4’085	3’232	2’839	2’606	2’449	2’336	2’249	2’180	2’124	2’077	2’038	2’003	1’974	1’948	1’924	1’904
50	4’034	3’183	2’790	2’557	2’400	2’286	2’199	2’130	2’073	2’026	1’986	1’952	1’921	1’895	1’871	1’850
60	4’001	3’150	2’758	2’525	2’368	2’254	2’167	2’097	2’040	1’993	1’952	1’917	1’887	1’860	1’836	1’815
70	3’978	3’128	2’736	2’503	2’346	2’231	2’143	2’074	2’017	1’969	1’928	1’893	1’863	1’836	1’812	1’790
80	3’960	3’111	2’719	2’486	2’329	2’214	2’126	2’056	1’999	1’951	1’910	1’875	1’845	1’817	1’793	1’772
90	3’947	3’098	2’706	2’473	2’316	2’201	2’113	2’043	1’986	1’938	1’897	1’861	1’830	1’803	1’779	1’757
100	3’936	3’087	2’696	2’463	2’305	2’191	2’103	2’032	1’975	1’927	1’886	1’850	1’819	1’792	1’768	1’746
120	3’920	3’072	2’680	2’447	2’290	2’175	2’087	2’016	1’959	1’910	1’869	1’834	1’803	1’775	1’750	1’728
∞	3’843	2’998	2’607	2’374	2’216	2’100	2’011	1’940	1’882	1’833	1’791	1’754	1’722	1’694	1’668	1’646

Tabla A.12: Distribución $\mathcal{F}$ de Esnédecor ($p = 0'95$)

	n_1															
n_2	17	18	19	20	25	30	35	40	45	50	60	70	80	90	120	∞
1	246’9	247’3	247’7	248’0	249’3	250’1	250’7	251’1	251’5	251’8	252’2	252’5	252’7	252’9	253’3	254’3
2	19’44	19’44	19’44	19’45	19’46	19’46	19’47	19’47	19’47	19’48	19’48	19’48	19’48	19’48	19’49	19’50
3	8’683	8’675	8’667	8’660	8’634	8’617	8’604	8’594	8’587	8’581	8’572	8’566	8’561	8’557	8’549	8’527
4	5’832	5’821	5’811	5’803	5’769	5’746	5’729	5’717	5’707	5’699	5’688	5’679	5’673	5’668	5’658	5’629
5	4’590	4’579	4’568	4’558	4’521	4’496	4’478	4’464	4’453	4’444	4’431	4’422	4’415	4’409	4’398	4’366
6	3’908	3’896	3’884	3’874	3’835	3’808	3’789	3’774	3’763	3’754	3’740	3’730	3’722	3’716	3’705	3’670
7	3’480	3’467	3’455	3’445	3’404	3’376	3’356	3’340	3’328	3’319	3’304	3’294	3’286	3’280	3’267	3’231
8	3’187	3’173	3’161	3’150	3’108	3’079	3’059	3’043	3’030	3’020	3’005	2’994	2’986	2’980	2’967	2’929
9	2’974	2’960	2’948	2’936	2’893	2’864	2’842	2’826	2’813	2’803	2’787	2’776	2’768	2’761	2’748	2’708
10	2’812	2’798	2’785	2’774	2’730	2’700	2’678	2’661	2’648	2’637	2’621	2’609	2’601	2’594	2’580	2’539
11	2’685	2’671	2’658	2’646	2’601	2’570	2’548	2’531	2’517	2’507	2’490	2’478	2’469	2’462	2’448	2’406
12	2’583	2’568	2’555	2’544	2’498	2’466	2’443	2’426	2’412	2’401	2’384	2’372	2’363	2’356	2’341	2’297
13	2’499	2’484	2’471	2’459	2’412	2’380	2’357	2’339	2’325	2’314	2’297	2’284	2’275	2’267	2’252	2’208
14	2’428	2’413	2’400	2’388	2’341	2’308	2’284	2’266	2’252	2’241	2’223	2’210	2’201	2’193	2’178	2’132
15	2’368	2’353	2’340	2’328	2’280	2’247	2’223	2’204	2’190	2’178	2’160	2’147	2’137	2’130	2’114	2’067
16	2’317	2’302	2’288	2’276	2’227	2’194	2’169	2’151	2’136	2’124	2’106	2’093	2’083	2’075	2’059	2’011
17	2’272	2’257	2’243	2’230	2’181	2’148	2’123	2’104	2’089	2’077	2’058	2’045	2’035	2’027	2’011	1’962
18	2’233	2’217	2’203	2’191	2’141	2’107	2’082	2’063	2’048	2’035	2’017	2’003	1’993	1’985	1’968	1’918
19	2’198	2’182	2’168	2’155	2’106	2’071	2’046	2’026	2’011	1’999	1’980	1’966	1’955	1’947	1’930	1’879
20	2’167	2’151	2’137	2’124	2’074	2’039	2’013	1’994	1’978	1’966	1’946	1’932	1’922	1’913	1’896	1’844
21	2’139	2’123	2’109	2’096	2’045	2’010	1’984	1’965	1’949	1’936	1’916	1’902	1’891	1’883	1’866	1’813
22	2’114	2’098	2’084	2’071	2’020	1’984	1’958	1’938	1’922	1’909	1’889	1’875	1’864	1’856	1’838	1’784
23	2’091	2’075	2’061	2’048	1’996	1’961	1’934	1’914	1’898	1’885	1’865	1’850	1’839	1’830	1’813	1’758
24	2’070	2’054	2’040	2’027	1’975	1’939	1’912	1’892	1’876	1’863	1’842	1’828	1’816	1’808	1’790	1’734
25	2’051	2’035	2’021	2’007	1’955	1’919	1’892	1’872	1’855	1’842	1’822	1’807	1’796	1’787	1’768	1’712
26	2’034	2’018	2’003	1’990	1’938	1’901	1’874	1’853	1’837	1’823	1’803	1’788	1’776	1’767	1’749	1’692
27	2’018	2’002	1’987	1’974	1’921	1’884	1’857	1’836	1’819	1’806	1’785	1’770	1’758	1’749	1’731	1’673
28	2’003	1’987	1’972	1’959	1’906	1’869	1’841	1’820	1’803	1’790	1’769	1’754	1’742	1’733	1’714	1’656
29	1’989	1’973	1’958	1’945	1’891	1’854	1’827	1’806	1’789	1’775	1’754	1’738	1’726	1’717	1’698	1’639
30	1’976	1’960	1’945	1’932	1’878	1’841	1’813	1’792	1’775	1’761	1’740	1’724	1’712	1’703	1’683	1’624
35	1’924	1’907	1’892	1’878	1’824	1’786	1’757	1’735	1’718	1’703	1’681	1’665	1’652	1’643	1’623	1’560
40	1’885	1’868	1’853	1’839	1’783	1’744	1’715	1’693	1’675	1’660	1’637	1’621	1’608	1’597	1’577	1’511
50	1’831	1’814	1’798	1’784	1’727	1’687	1’657	1’634	1’615	1’599	1’576	1’558	1’544	1’534	1’511	1’440
60	1’796	1’778	1’763	1’748	1’690	1’649	1’618	1’594	1’575	1’559	1’534	1’516	1’502	1’491	1’467	1’391
70	1’771	1’753	1’737	1’722	1’664	1’622	1’591	1’566	1’546	1’530	1’505	1’486	1’471	1’459	1’435	1’355
80	1’752	1’734	1’718	1’703	1’644	1’602	1’570	1’545	1’525	1’508	1’482	1’463	1’448	1’436	1’411	1’327
90	1’737	1’720	1’703	1’688	1’629	1’586	1’554	1’528	1’508	1’491	1’465	1’445	1’429	1’417	1’391	1’304
100	1’726	1’708	1’691	1’676	1’616	1’573	1’541	1’515	1’494	1’477	1’450	1’430	1’415	1’402	1’376	1’286
120	1’709	1’690	1’674	1’659	1’598	1’554	1’521	1’495	1’474	1’457	1’429	1’408	1’392	1’379	1’352	1’257
∞	1’625	1’606	1’589	1’573	1’508	1’461	1’425	1’396	1’373	1’353	1’321	1’296	1’277	1’260	1’225	1’048

Tabla A.13: Distribución $\mathcal{F}$ de Esnédecor ($p = 0'975$)

	n_1															
n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	647'8	799'5	864'2	899'6	921'8	937'1	948'2	956'6	963'3	968'6	973'0	976'7	979'8	982'5	984'9	986'9
2	38'51	39'00	39'17	39'25	39'30	39'33	39'36	39'37	39'39	39'40	39'41	39'41	39'42	39'43	39'43	39'44
3	17'44	16'04	15'44	15'10	14'88	14'73	14'62	14'54	14'47	14'42	14'37	14'34	14'30	14'28	14'25	14'23
4	12'22	10'65	9'979	9'604	9'364	9'197	9'074	8'980	8'905	8'844	8'794	8'751	8'715	8'684	8'657	8'633
5	10'01	8'434	7'764	7'388	7'146	6'978	6'853	6'757	6'681	6'619	6'568	6'525	6'488	6'456	6'428	6'403
6	8'813	7'260	6'599	6'227	5'988	5'820	5'695	5'600	5'523	5'461	5'410	5'366	5'329	5'297	5'269	5'244
7	8'073	6'542	5'890	5'523	5'285	5'119	4'995	4'899	4'823	4'761	4'709	4'666	4'628	4'596	4'568	4'543
8	7'571	6'059	5'416	5'053	4'817	4'652	4'529	4'433	4'357	4'295	4'243	4'200	4'162	4'130	4'101	4'076
9	7'209	5'715	5'078	4'718	4'484	4'320	4'197	4'102	4'026	3'964	3'912	3'868	3'831	3'798	3'769	3'744
10	6'937	5'456	4'826	4'468	4'236	4'072	3'950	3'855	3'779	3'717	3'665	3'621	3'583	3'550	3'522	3'496
11	6'724	5'256	4'630	4'275	4'044	3'881	3'759	3'664	3'588	3'526	3'474	3'430	3'392	3'359	3'330	3'304
12	6'554	5'096	4'474	4'121	3'891	3'728	3'607	3'512	3'436	3'374	3'321	3'277	3'239	3'206	3'177	3'152
13	6'414	4'965	4'347	3'996	3'767	3'604	3'483	3'388	3'312	3'250	3'197	3'153	3'115	3'082	3'053	3'027
14	6'298	4'857	4'242	3'892	3'663	3'501	3'380	3'285	3'209	3'147	3'095	3'050	3'012	2'979	2'949	2'923
15	6'200	4'765	4'153	3'804	3'576	3'415	3'293	3'199	3'123	3'060	3'008	2'963	2'925	2'891	2'862	2'836
16	6'115	4'687	4'077	3'729	3'502	3'341	3'219	3'125	3'049	2'986	2'934	2'889	2'851	2'817	2'788	2'761
17	6'042	4'619	4'011	3'665	3'438	3'277	3'156	3'061	2'985	2'922	2'870	2'825	2'786	2'753	2'723	2'697
18	5'978	4'560	3'954	3'608	3'382	3'221	3'100	3'005	2'929	2'866	2'814	2'769	2'730	2'696	2'667	2'640
19	5'922	4'508	3'903	3'559	3'333	3'172	3'051	2'956	2'880	2'817	2'765	2'720	2'681	2'647	2'617	2'591
20	5'871	4'461	3'859	3'515	3'289	3'128	3'007	2'913	2'837	2'774	2'721	2'676	2'637	2'603	2'573	2'547
21	5'827	4'420	3'819	3'475	3'250	3'090	2'969	2'874	2'798	2'735	2'682	2'637	2'598	2'564	2'534	2'507
22	5'786	4'383	3'783	3'440	3'215	3'055	2'934	2'839	2'763	2'700	2'647	2'602	2'563	2'528	2'498	2'472
23	5'750	4'349	3'750	3'408	3'183	3'023	2'902	2'808	2'731	2'668	2'615	2'570	2'531	2'497	2'466	2'440
24	5'717	4'319	3'721	3'379	3'155	2'995	2'874	2'779	2'703	2'640	2'586	2'541	2'502	2'468	2'437	2'411
25	5'686	4'291	3'694	3'353	3'129	2'969	2'848	2'753	2'677	2'613	2'560	2'515	2'476	2'441	2'411	2'384
26	5'659	4'265	3'670	3'329	3'105	2'945	2'824	2'729	2'653	2'590	2'536	2'491	2'452	2'417	2'387	2'360
27	5'633	4'242	3'647	3'307	3'083	2'923	2'802	2'707	2'631	2'568	2'514	2'469	2'429	2'395	2'364	2'337
28	5'610	4'221	3'626	3'286	3'063	2'903	2'782	2'687	2'611	2'547	2'494	2'448	2'409	2'374	2'344	2'317
29	5'588	4'201	3'607	3'267	3'044	2'884	2'763	2'669	2'592	2'529	2'475	2'430	2'390	2'355	2'325	2'298
30	5'568	4'182	3'589	3'250	3'026	2'867	2'746	2'651	2'575	2'511	2'458	2'412	2'372	2'338	2'307	2'280
35	5'485	4'106	3'517	3'179	2'956	2'796	2'676	2'581	2'504	2'440	2'387	2'341	2'301	2'266	2'235	2'207
40	5'424	4'051	3'463	3'126	2'904	2'744	2'624	2'529	2'452	2'388	2'334	2'288	2'248	2'213	2'182	2'154
50	5'340	3'975	3'390	3'054	2'833	2'674	2'553	2'458	2'381	2'317	2'263	2'216	2'176	2'140	2'109	2'081
60	5'286	3'925	3'343	3'008	2'786	2'627	2'507	2'412	2'334	2'270	2'216	2'169	2'129	2'093	2'061	2'033
70	5'247	3'890	3'309	2'975	2'754	2'595	2'474	2'379	2'302	2'237	2'183	2'136	2'095	2'059	2'028	1'999
80	5'218	3'864	3'284	2'950	2'730	2'571	2'450	2'355	2'277	2'213	2'158	2'111	2'071	2'035	2'003	1'974
90	5'196	3'844	3'265	2'932	2'711	2'552	2'432	2'336	2'259	2'194	2'140	2'092	2'051	2'015	1'983	1'955
100	5'179	3'828	3'250	2'917	2'696	2'537	2'417	2'321	2'244	2'179	2'124	2'077	2'036	2'000	1'968	1'939
120	5'152	3'805	3'227	2'894	2'674	2'515	2'395	2'299	2'222	2'157	2'102	2'055	2'014	1'977	1'945	1'916
∞	5'027	3'692	3'119	2'788	2'569	2'411	2'290	2'194	2'116	2'051	1'995	1'947	1'905	1'868	1'835	1'806

Tabla A.14: Distribución $\mathcal{F}$ de Esnédecor ($p = 0$'975)

	n_1															
n_2	17	18	19	20	25	30	35	40	45	50	60	70	80	90	120	∞
1	988'7	990'3	991'8	993'1	998'1	1001	1004	1006	1007	1008	1010	1011	1012	1013	1014	1018
2	39'44	39'44	39'45	39'45	39'46	39'46	39'47	39'47	39'48	39'48	39'48	39'48	39'49	39'49	39'49	39'50
3	14'21	14'20	14'18	14'17	14'12	14'08	14'06	14'04	14'02	14'01	13'99	13'98	13'97	13'96	13'95	13'90
4	8'611	8'592	8'575	8'560	8'501	8'461	8'433	8'411	8'394	8'381	8'360	8'346	8'335	8'326	8'309	8'259
5	6'381	6'362	6'344	6'329	6'268	6'227	6'197	6'175	6'158	6'144	6'123	6'107	6'096	6'087	6'069	6'017
6	5'222	5'202	5'184	5'168	5'107	5'065	5'035	5'012	4'995	4'980	4'959	4'943	4'932	4'923	4'904	4'850
7	4'521	4'501	4'483	4'467	4'405	4'362	4'332	4'309	4'291	4'276	4'254	4'239	4'227	4'218	4'199	4'144
8	4'054	4'034	4'016	3'999	3'937	3'894	3'863	3'840	3'821	3'807	3'784	3'768	3'756	3'747	3'728	3'672
9	3'722	3'701	3'683	3'667	3'604	3'560	3'529	3'505	3'487	3'472	3'449	3'433	3'421	3'411	3'392	3'334
10	3'474	3'453	3'435	3'419	3'355	3'311	3'279	3'255	3'237	3'221	3'198	3'182	3'169	3'160	3'140	3'081
11	3'282	3'261	3'243	3'226	3'162	3'118	3'086	3'061	3'042	3'027	3'004	2'987	2'974	2'964	2'944	2'884
12	3'129	3'108	3'090	3'073	3'008	2'963	2'931	2'906	2'887	2'871	2'848	2'831	2'818	2'808	2'787	2'726
13	3'004	2'983	2'965	2'948	2'882	2'837	2'805	2'780	2'760	2'744	2'720	2'703	2'690	2'680	2'659	2'597
14	2'900	2'879	2'861	2'844	2'778	2'732	2'699	2'674	2'654	2'638	2'614	2'597	2'583	2'573	2'552	2'489
15	2'813	2'792	2'773	2'756	2'689	2'644	2'610	2'585	2'565	2'549	2'524	2'506	2'493	2'482	2'461	2'397
16	2'738	2'717	2'698	2'681	2'614	2'568	2'534	2'509	2'488	2'472	2'447	2'429	2'415	2'405	2'383	2'318
17	2'673	2'652	2'633	2'616	2'548	2'502	2'468	2'442	2'422	2'405	2'380	2'362	2'348	2'337	2'315	2'249
18	2'617	2'596	2'576	2'559	2'491	2'445	2'410	2'384	2'364	2'347	2'321	2'303	2'289	2'278	2'256	2'189
19	2'567	2'546	2'526	2'509	2'441	2'394	2'359	2'333	2'312	2'295	2'270	2'251	2'237	2'226	2'203	2'135
20	2'523	2'501	2'482	2'464	2'396	2'349	2'314	2'287	2'266	2'249	2'223	2'205	2'190	2'179	2'156	2'087
21	2'483	2'462	2'442	2'425	2'356	2'308	2'273	2'246	2'225	2'208	2'182	2'163	2'148	2'137	2'114	2'044
22	2'448	2'426	2'407	2'389	2'320	2'272	2'237	2'210	2'188	2'171	2'145	2'125	2'111	2'099	2'076	2'005
23	2'416	2'394	2'374	2'357	2'287	2'239	2'204	2'176	2'155	2'137	2'111	2'091	2'077	2'065	2'041	1'970
24	2'386	2'365	2'345	2'327	2'257	2'209	2'173	2'146	2'124	2'107	2'080	2'060	2'045	2'034	2'010	1'937
25	2'360	2'338	2'318	2'300	2'230	2'182	2'146	2'118	2'096	2'079	2'052	2'032	2'017	2'005	1'981	1'907
26	2'335	2'314	2'294	2'276	2'205	2'157	2'120	2'093	2'071	2'053	2'026	2'006	1'991	1'979	1'954	1'880
27	2'313	2'291	2'271	2'253	2'183	2'133	2'097	2'069	2'047	2'029	2'002	1'982	1'966	1'954	1'930	1'855
28	2'292	2'270	2'251	2'232	2'161	2'112	2'076	2'048	2'025	2'007	1'980	1'959	1'944	1'932	1'907	1'831
29	2'273	2'251	2'231	2'213	2'142	2'092	2'056	2'028	2'005	1'987	1'959	1'939	1'923	1'911	1'886	1'809
30	2'255	2'233	2'213	2'195	2'124	2'074	2'037	2'009	1'986	1'968	1'940	1'920	1'904	1'892	1'866	1'789
35	2'183	2'160	2'140	2'122	2'049	1'999	1'961	1'932	1'909	1'890	1'861	1'840	1'824	1'811	1'785	1'704
40	2'129	2'107	2'086	2'068	1'994	1'943	1'905	1'875	1'852	1'832	1'803	1'781	1'764	1'751	1'724	1'639
50	2'056	2'033	2'012	1'993	1'919	1'866	1'827	1'796	1'772	1'752	1'721	1'698	1'681	1'667	1'639	1'548
60	2'008	1'985	1'964	1'944	1'869	1'815	1'775	1'744	1'719	1'699	1'667	1'643	1'625	1'611	1'581	1'485
70	1'974	1'950	1'929	1'910	1'833	1'779	1'739	1'707	1'681	1'660	1'628	1'604	1'585	1'570	1'539	1'438
80	1'948	1'925	1'904	1'884	1'807	1'752	1'711	1'679	1'653	1'632	1'599	1'574	1'555	1'540	1'508	1'403
90	1'929	1'905	1'884	1'864	1'787	1'731	1'690	1'657	1'631	1'610	1'576	1'551	1'531	1'516	1'483	1'374
100	1'913	1'890	1'868	1'849	1'770	1'715	1'673	1'640	1'614	1'592	1'558	1'532	1'512	1'496	1'463	1'351
120	1'890	1'866	1'845	1'825	1'746	1'690	1'647	1'614	1'587	1'565	1'530	1'504	1'483	1'467	1'433	1'314
∞	1'779	1'754	1'732	1'711	1'629	1'569	1'523	1'487	1'457	1'432	1'392	1'361	1'337	1'317	1'273	1'057

Tabla A.15: Distribución $\mathcal{F}$ de Esnédecor ($p = 0'99$)

	n_1															
n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	4052	4999	5404	5624	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6083	6107	6126	6143	6157	6170
2	98'50	99'00	99'16	99'25	99'30	99'33	99'36	99'38	99'39	99'40	99'41	99'42	99'42	99'43	99'43	99'44
3	34'12	30'82	29'46	28'71	28'24	27'91	27'67	27'49	27'34	27'23	27'13	27'05	26'98	26'92	26'87	26'83
4	21'20	18'00	16'69	15'98	15'52	15'21	14'98	14'80	14'66	14'55	14'45	14'37	14'31	14'25	14'20	14'15
5	16'26	13'27	12'06	11'39	10'97	10'67	10'46	10'29	10'16	10'05	9'963	9'888	9'825	9'770	9'722	9'680
6	13'75	10'92	9'780	9'148	8'746	8'466	8'260	8'102	7'976	7'874	7'790	7'718	7'657	7'605	7'559	7'519
7	12'25	9'547	8'451	7'847	7'460	7'191	6'993	6'840	6'719	6'620	6'538	6'469	6'410	6'359	6'314	6'275
8	11'26	8'649	7'591	7'006	6'632	6'371	6'178	6'029	5'911	5'814	5'734	5'667	5'609	5'559	5'515	5'477
9	10'56	8'022	6'992	6'422	6'057	5'802	5'613	5'467	5'351	5'257	5'178	5'111	5'055	5'005	4'962	4'924
10	10'04	7'559	6'552	5'994	5'636	5'386	5'200	5'057	4'942	4'849	4'772	4'706	4'650	4'601	4'558	4'520
11	9'646	7'206	6'217	5'668	5'316	5'069	4'886	4'744	4'632	4'539	4'462	4'397	4'342	4'293	4'251	4'213
12	9'330	6'927	5'953	5'412	5'064	4'821	4'640	4'499	4'388	4'296	4'220	4'155	4'100	4'052	4'010	3'972
13	9'074	6'701	5'739	5'205	4'862	4'620	4'441	4'302	4'191	4'100	4'025	3'960	3'905	3'857	3'815	3'778
14	8'862	6'515	5'564	5'035	4'695	4'456	4'278	4'140	4'030	3'939	3'864	3'800	3'745	3'698	3'656	3'619
15	8'683	6'359	5'417	4'893	4'556	4'318	4'142	4'004	3'895	3'805	3'730	3'666	3'612	3'564	3'522	3'485
16	8'531	6'226	5'292	4'773	4'437	4'202	4'026	3'890	3'780	3'691	3'616	3'553	3'498	3'451	3'409	3'372
17	8'400	6'112	5'185	4'669	4'336	4'101	3'927	3'791	3'682	3'593	3'518	3'455	3'401	3'353	3'312	3'275
18	8'285	6'013	5'092	4'579	4'248	4'015	3'841	3'705	3'597	3'508	3'434	3'371	3'316	3'269	3'227	3'190
19	8'185	5'926	5'010	4'500	4'171	3'939	3'765	3'631	3'523	3'434	3'360	3'297	3'242	3'195	3'153	3'116
20	8'096	5'849	4'938	4'431	4'103	3'871	3'699	3'564	3'457	3'368	3'294	3'231	3'177	3'130	3'088	3'051
21	8'017	5'780	4'874	4'369	4'042	3'812	3'640	3'506	3'398	3'310	3'236	3'173	3'119	3'072	3'030	2'993
22	7'945	5'719	4'817	4'313	3'988	3'758	3'587	3'453	3'346	3'258	3'184	3'121	3'067	3'019	2'978	2'941
23	7'881	5'664	4'765	4'264	3'939	3'710	3'539	3'406	3'299	3'211	3'137	3'074	3'020	2'973	2'931	2'894
24	7'823	5'614	4'718	4'218	3'895	3'667	3'496	3'363	3'256	3'168	3'094	3'032	2'977	2'930	2'889	2'852
25	7'770	5'568	4'675	4'177	3'855	3'627	3'457	3'324	3'217	3'129	3'056	2'993	2'939	2'892	2'850	2'813
26	7'721	5'526	4'637	4'140	3'818	3'591	3'421	3'288	3'182	3'094	3'021	2'958	2'904	2'857	2'815	2'778
27	7'677	5'488	4'601	4'106	3'785	3'558	3'388	3'256	3'149	3'062	2'988	2'926	2'872	2'824	2'783	2'746
28	7'636	5'453	4'568	4'074	3'754	3'528	3'358	3'226	3'120	3'032	2'959	2'896	2'842	2'795	2'753	2'716
29	7'598	5'420	4'538	4'045	3'725	3'499	3'330	3'198	3'092	3'005	2'931	2'868	2'814	2'767	2'726	2'689
30	7'562	5'390	4'510	4'018	3'699	3'473	3'305	3'173	3'067	2'979	2'906	2'843	2'789	2'742	2'700	2'663
35	7'419	5'268	4'396	3'908	3'592	3'368	3'200	3'069	2'963	2'876	2'803	2'740	2'686	2'639	2'597	2'560
40	7'314	5'178	4'313	3'828	3'514	3'291	3'124	2'993	2'888	2'801	2'727	2'665	2'611	2'563	2'522	2'484
50	7'171	5'057	4'199	3'720	3'408	3'186	3'020	2'890	2'785	2'698	2'625	2'563	2'508	2'461	2'419	2'382
60	7'077	4'977	4'126	3'649	3'339	3'119	2'953	2'823	2'718	2'632	2'559	2'496	2'442	2'394	2'352	2'315
70	7'011	4'922	4'074	3'600	3'291	3'071	2'906	2'777	2'672	2'585	2'512	2'450	2'395	2'348	2'306	2'268
80	6'963	4'881	4'036	3'563	3'255	3'036	2'871	2'742	2'637	2'551	2'478	2'415	2'361	2'313	2'271	2'233
90	6'925	4'849	4'007	3'535	3'228	3'009	2'845	2'715	2'611	2'524	2'451	2'389	2'334	2'286	2'244	2'206
100	6'895	4'824	3'984	3'513	3'206	2'988	2'823	2'694	2'590	2'503	2'430	2'368	2'313	2'265	2'223	2'185
120	6'851	4'787	3'949	3'480	3'174	2'956	2'792	2'663	2'559	2'472	2'399	2'336	2'282	2'234	2'191	2'154
∞	6'640	4'609	3'786	3'323	3'021	2'806	2'643	2'515	2'411	2'324	2'251	2'188	2'133	2'085	2'042	2'004

Tabla A.16: Distribución $\mathcal{F}$ de Esnédecor ($p = 0'99$)

	n_1															
n_2	17	18	19	20	25	30	35	40	45	50	60	70	80	90	120	∞
1	6181	6191	6201	6209	6240	6260	6275	6286	6296	6302	6313	6321	6326	6331	6340	6366
2	99'44	99'44	99'45	99'45	99'46	99'47	99'47	99'48	99'48	99'48	99'48	99'48	99'48	99'49	99'49	99'50
3	26'79	26'75	26'72	26'69	26'58	26'50	26'45	26'41	26'38	26'35	26'32	26'29	26'27	26'25	26'22	26'13
4	14'11	14'08	14'05	14'02	13'91	13'84	13'79	13'75	13'71	13'69	13'65	13'63	13'61	13'59	13'56	13'47
5	9'643	9'609	9'580	9'553	9'449	9'379	9'329	9'291	9'262	9'238	9'202	9'176	9'157	9'142	9'112	9'023
6	7'483	7'451	7'422	7'396	7'296	7'229	7'180	7'143	7'115	7'091	7'057	7'032	7'013	6'998	6'969	6'882
7	6'240	6'209	6'181	6'155	6'058	5'992	5'944	5'908	5'880	5'858	5'824	5'799	5'781	5'766	5'737	5'652
8	5'442	5'412	5'384	5'359	5'263	5'198	5'151	5'116	5'088	5'065	5'032	5'007	4'989	4'975	4'946	4'861
9	4'890	4'860	4'833	4'808	4'713	4'649	4'602	4'567	4'539	4'517	4'483	4'459	4'441	4'426	4'398	4'313
10	4'487	4'457	4'430	4'405	4'311	4'247	4'201	4'165	4'138	4'115	4'082	4'058	4'039	4'025	3'996	3'911
11	4'180	4'150	4'123	4'099	4'005	3'941	3'895	3'860	3'832	3'810	3'776	3'752	3'734	3'719	3'690	3'605
12	3'939	3'910	3'883	3'858	3'765	3'701	3'654	3'619	3'592	3'569	3'535	3'511	3'493	3'478	3'449	3'363
13	3'745	3'716	3'689	3'665	3'571	3'507	3'461	3'425	3'398	3'375	3'341	3'317	3'298	3'284	3'255	3'168
14	3'586	3'556	3'529	3'505	3'412	3'348	3'301	3'266	3'238	3'215	3'181	3'157	3'138	3'124	3'094	3'006
15	3'452	3'423	3'396	3'372	3'278	3'214	3'167	3'132	3'104	3'081	3'047	3'022	3'004	2'989	2'959	2'871
16	3'339	3'310	3'283	3'259	3'165	3'101	3'054	3'018	2'990	2'967	2'933	2'908	2'889	2'875	2'845	2'755
17	3'242	3'212	3'186	3'162	3'068	3'003	2'956	2'920	2'892	2'869	2'835	2'810	2'791	2'776	2'746	2'655
18	3'158	3'128	3'101	3'077	2'983	2'919	2'871	2'835	2'807	2'784	2'749	2'724	2'705	2'690	2'660	2'568
19	3'084	3'054	3'027	3'003	2'909	2'844	2'797	2'761	2'732	2'709	2'674	2'649	2'630	2'614	2'584	2'492
20	3'018	2'989	2'962	2'938	2'843	2'778	2'731	2'695	2'666	2'643	2'608	2'582	2'563	2'548	2'517	2'424
21	2'960	2'931	2'904	2'880	2'785	2'720	2'672	2'636	2'607	2'584	2'548	2'523	2'503	2'488	2'457	2'363
22	2'908	2'879	2'852	2'827	2'733	2'667	2'620	2'583	2'554	2'531	2'495	2'469	2'450	2'434	2'403	2'308
23	2'861	2'832	2'805	2'780	2'686	2'620	2'572	2'536	2'506	2'483	2'447	2'421	2'401	2'386	2'354	2'258
24	2'819	2'789	2'762	2'738	2'643	2'577	2'529	2'492	2'463	2'440	2'403	2'377	2'357	2'342	2'310	2'213
25	2'780	2'751	2'724	2'699	2'604	2'538	2'490	2'453	2'424	2'400	2'364	2'337	2'317	2'302	2'270	2'172
26	2'745	2'715	2'688	2'664	2'569	2'503	2'454	2'417	2'388	2'364	2'327	2'301	2'281	2'265	2'233	2'134
27	2'713	2'683	2'656	2'632	2'536	2'470	2'421	2'384	2'354	2'330	2'294	2'267	2'247	2'231	2'198	2'099
28	2'683	2'653	2'626	2'602	2'506	2'440	2'391	2'354	2'324	2'300	2'263	2'236	2'216	2'200	2'167	2'067
29	2'656	2'626	2'599	2'574	2'478	2'412	2'363	2'325	2'296	2'271	2'234	2'207	2'187	2'171	2'138	2'037
30	2'630	2'600	2'573	2'549	2'453	2'386	2'337	2'299	2'269	2'245	2'208	2'181	2'160	2'144	2'111	2'009
35	2'527	2'497	2'470	2'445	2'348	2'281	2'231	2'193	2'162	2'137	2'099	2'072	2'050	2'034	2'000	1'894
40	2'451	2'421	2'394	2'369	2'271	2'203	2'153	2'114	2'083	2'058	2'019	1'991	1'969	1'952	1'917	1'808
50	2'348	2'318	2'290	2'265	2'167	2'098	2'046	2'007	1'975	1'949	1'909	1'880	1'857	1'839	1'803	1'686
60	2'281	2'251	2'223	2'198	2'098	2'028	1'976	1'936	1'904	1'877	1'836	1'806	1'783	1'764	1'726	1'604
70	2'234	2'204	2'176	2'150	2'050	1'980	1'927	1'886	1'853	1'826	1'785	1'754	1'730	1'711	1'672	1'544
80	2'199	2'169	2'141	2'115	2'015	1'944	1'890	1'849	1'816	1'788	1'746	1'714	1'690	1'671	1'630	1'498
90	2'172	2'142	2'114	2'088	1'987	1'916	1'862	1'820	1'787	1'759	1'716	1'684	1'659	1'639	1'598	1'461
100	2'151	2'120	2'092	2'067	1'965	1'893	1'839	1'797	1'763	1'735	1'692	1'659	1'634	1'614	1'572	1'431
120	2'119	2'089	2'060	2'035	1'932	1'860	1'806	1'763	1'728	1'700	1'656	1'623	1'597	1'576	1'533	1'385
∞	1'969	1'937	1'908	1'882	1'776	1'700	1'642	1'596	1'559	1'527	1'477	1'439	1'409	1'384	1'330	1'068

Tabla A.17: Distribución $\mathcal{F}$ de Esnédecor ($p = 0'995$)

	n_1															
n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	16212	19997	21614	22501	23056	23440	23715	23924	24091	24222	24334	24427	24505	24572	24632	24684
2	198'5	199'0	199'2	199'2	199'3	199'3	199'4	199'4	199'4	199'4	199'4	199'4	199'4	199'4	199'4	199'4
3	55'55	49'80	47'47	46'20	45'39	44'84	44'43	44'13	43'88	43'68	43'52	43'39	43'27	43'17	43'08	43'01
4	31'33	26'28	24'26	23'15	22'46	21'98	21'62	21'35	21'14	20'97	20'82	20'70	20'60	20'51	20'44	20'37
5	22'78	18'31	16'53	15'56	14'94	14'51	14'20	13'96	13'77	13'62	13'49	13'38	13'29	13'21	13'15	13'09
6	18'63	14'54	12'92	12'03	11'46	11'07	10'79	10'57	10'39	10'25	10'13	10'03	9'950	9'878	9'814	9'758
7	16'24	12'40	10'88	10'05	9'522	9'155	8'885	8'678	8'514	8'380	8'270	8'176	8'097	8'028	7'968	7'915
8	14'69	11'04	9'597	8'805	8'302	7'952	7'694	7'496	7'339	7'211	7'105	7'015	6'938	6'872	6'814	6'763
9	13'61	10'11	8'717	7'956	7'471	7'134	6'885	6'693	6'541	6'417	6'314	6'227	6'153	6'089	6'032	5'983
10	12'83	9'427	8'081	7'343	6'872	6'545	6'303	6'116	5'968	5'847	5'746	5'661	5'589	5'526	5'471	5'422
11	12'23	8'912	7'600	6'881	6'422	6'102	5'865	5'682	5'537	5'418	5'320	5'236	5'165	5'103	5'049	5'001
12	11'75	8'510	7'226	6'521	6'071	5'757	5'524	5'345	5'202	5'085	4'988	4'906	4'836	4'775	4'721	4'674
13	11'37	8'186	6'926	6'233	5'791	5'482	5'253	5'076	4'935	4'820	4'724	4'643	4'573	4'513	4'460	4'413
14	11'06	7'922	6'680	5'998	5'562	5'257	5'031	4'857	4'717	4'603	4'508	4'428	4'359	4'299	4'247	4'201
15	10'80	7'701	6'476	5'803	5'372	5'071	4'847	4'674	4'536	4'424	4'329	4'250	4'181	4'122	4'070	4'024
16	10'58	7'514	6'303	5'638	5'212	4'913	4'692	4'521	4'384	4'272	4'179	4'099	4'031	3'972	3'920	3'875
17	10'38	7'354	6'156	5'497	5'075	4'779	4'559	4'389	4'254	4'142	4'050	3'971	3'903	3'844	3'793	3'747
18	10'22	7'215	6'028	5'375	4'956	4'663	4'445	4'276	4'141	4'030	3'938	3'860	3'793	3'734	3'683	3'637
19	10'07	7'093	5'916	5'268	4'853	4'561	4'345	4'177	4'043	3'933	3'841	3'763	3'696	3'638	3'587	3'541
20	9'944	6'987	5'818	5'174	4'762	4'472	4'257	4'090	3'956	3'847	3'756	3'678	3'611	3'553	3'502	3'457
21	9'829	6'891	5'730	5'091	4'681	4'393	4'179	4'013	3'880	3'771	3'680	3'602	3'536	3'478	3'427	3'382
22	9'727	6'806	5'652	5'017	4'609	4'322	4'109	3'944	3'812	3'703	3'612	3'535	3'469	3'411	3'360	3'315
23	9'635	6'730	5'582	4'950	4'544	4'259	4'047	3'882	3'750	3'642	3'551	3'474	3'408	3'351	3'300	3'255
24	9'551	6'661	5'519	4'890	4'486	4'202	3'991	3'826	3'695	3'587	3'497	3'420	3'354	3'296	3'246	3'201
25	9'475	6'598	5'462	4'835	4'433	4'150	3'939	3'776	3'645	3'537	3'447	3'370	3'304	3'247	3'196	3'152
26	9'406	6'541	5'409	4'785	4'384	4'103	3'893	3'730	3'599	3'492	3'402	3'325	3'259	3'202	3'151	3'107
27	9'342	6'489	5'361	4'740	4'340	4'059	3'850	3'687	3'557	3'450	3'360	3'284	3'218	3'161	3'110	3'066
28	9'284	6'440	5'317	4'698	4'300	4'020	3'811	3'649	3'519	3'412	3'322	3'246	3'180	3'123	3'073	3'028
29	9'230	6'396	5'276	4'659	4'262	3'983	3'775	3'613	3'483	3'376	3'287	3'211	3'145	3'088	3'038	2'993
30	9'180	6'355	5'239	4'623	4'228	3'949	3'742	3'580	3'451	3'344	3'255	3'179	3'113	3'056	3'006	2'961
35	8'976	6'188	5'086	4'479	4'088	3'812	3'607	3'447	3'318	3'212	3'124	3'048	2'983	2'926	2'876	2'831
40	8'828	6'066	4'976	4'374	3'986	3'713	3'509	3'350	3'222	3'117	3'028	2'953	2'888	2'831	2'781	2'737
50	8'626	5'902	4'826	4'232	3'849	3'579	3'376	3'219	3'092	2'988	2'900	2'825	2'760	2'703	2'653	2'609
60	8'495	5'795	4'729	4'140	3'760	3'492	3'291	3'134	3'008	2'904	2'817	2'742	2'677	2'620	2'570	2'526
70	8'403	5'720	4'661	4'076	3'698	3'431	3'232	3'076	2'950	2'846	2'759	2'684	2'619	2'563	2'513	2'468
80	8'335	5'665	4'611	4'028	3'652	3'387	3'188	3'032	2'907	2'803	2'716	2'641	2'577	2'520	2'470	2'425
90	8'282	5'623	4'573	3'992	3'617	3'352	3'154	2'999	2'873	2'770	2'683	2'608	2'544	2'487	2'437	2'393
100	8'241	5'589	4'542	3'963	3'589	3'325	3'127	2'972	2'847	2'744	2'657	2'583	2'518	2'461	2'411	2'367
120	8'179	5'539	4'497	3'921	3'548	3'285	3'087	2'933	2'808	2'705	2'618	2'544	2'479	2'423	2'373	2'328
∞	7'886	5'304	4'284	3'720	3'355	3'096	2'901	2'749	2'625	2'523	2'437	2'363	2'298	2'241	2'191	2'146

Tabla A.18: Distribución $\mathcal{F}$ de Esnédecor ($p = 0'995$)

	n_1															
n_2	17	18	19	20	25	30	35	40	45	50	60	70	80	90	120	∞
1	24728	24766	24803	24837	24959	25041	25101	25146	25183	25213	25254	25284	25306	25325	25358	25462
2	199'4	199'4	199'4	199'4	199'4	199'5	199'5	199'5	199'5	199'5	199'5	199'5	199'5	199'5	199'5	199'5
3	42'94	42'88	42'83	42'78	42'59	42'47	42'38	42'31	42'26	42'21	42'15	42'10	42'07	42'04	41'99	41'83
4	20'31	20'26	20'21	20'17	20'00	19'89	19'81	19'75	19'71	19'67	19'61	19'57	19'54	19'52	19'47	19'33
5	13'03	12'98	12'94	12'90	12'76	12'66	12'58	12'53	12'49	12'45	12'40	12'37	12'34	12'32	12'27	12'15
6	9'709	9'664	9'625	9'589	9'451	9'358	9'291	9'241	9'201	9'170	9'122	9'088	9'062	9'042	9'001	8'882
7	7'868	7'826	7'788	7'754	7'623	7'534	7'471	7'422	7'385	7'354	7'309	7'276	7'251	7'232	7'193	7'079
8	6'718	6'678	6'641	6'608	6'482	6'396	6'334	6'288	6'251	6'222	6'177	6'145	6'121	6'102	6'065	5'953
9	5'939	5'899	5'864	5'832	5'708	5'625	5'564	5'519	5'483	5'454	5'410	5'379	5'356	5'337	5'300	5'190
10	5'379	5'340	5'306	5'274	5'153	5'071	5'011	4'966	4'931	4'902	4'859	4'828	4'805	4'787	4'750	4'641
11	4'959	4'921	4'886	4'855	4'736	4'654	4'595	4'551	4'516	4'488	4'445	4'414	4'391	4'373	4'337	4'228
12	4'632	4'595	4'561	4'530	4'412	4'331	4'272	4'228	4'193	4'165	4'123	4'092	4'069	4'051	4'015	3'907
13	4'372	4'334	4'301	4'270	4'153	4'073	4'015	3'970	3'936	3'908	3'866	3'835	3'812	3'794	3'758	3'649
14	4'159	4'122	4'089	4'059	3'942	3'862	3'804	3'760	3'725	3'697	3'655	3'625	3'602	3'584	3'547	3'439
15	3'983	3'946	3'913	3'883	3'766	3'687	3'629	3'585	3'550	3'523	3'480	3'450	3'427	3'409	3'372	3'263
16	3'834	3'797	3'764	3'734	3'618	3'539	3'481	3'437	3'403	3'375	3'332	3'302	3'279	3'261	3'224	3'114
17	3'707	3'670	3'637	3'607	3'492	3'412	3'355	3'311	3'276	3'248	3'206	3'175	3'152	3'134	3'097	2'987
18	3'597	3'560	3'527	3'498	3'382	3'303	3'245	3'201	3'167	3'139	3'096	3'065	3'042	3'024	2'987	2'876
19	3'501	3'464	3'432	3'402	3'287	3'208	3'150	3'106	3'071	3'043	3'000	2'970	2'946	2'928	2'891	2'779
20	3'416	3'380	3'348	3'318	3'203	3'123	3'066	3'022	2'987	2'959	2'916	2'885	2'861	2'843	2'806	2'693
21	3'342	3'305	3'273	3'243	3'128	3'049	2'991	2'947	2'912	2'884	2'841	2'810	2'786	2'768	2'730	2'617
22	3'275	3'239	3'206	3'176	3'061	2'982	2'924	2'880	2'845	2'817	2'774	2'742	2'719	2'700	2'663	2'548
23	3'215	3'179	3'146	3'116	3'001	2'922	2'864	2'820	2'785	2'756	2'713	2'682	2'658	2'639	2'602	2'487
24	3'161	3'125	3'092	3'062	2'947	2'868	2'810	2'765	2'730	2'702	2'658	2'627	2'603	2'584	2'546	2'431
25	3'111	3'075	3'043	3'013	2'898	2'819	2'761	2'716	2'681	2'652	2'609	2'577	2'553	2'534	2'496	2'379
26	3'067	3'031	2'998	2'968	2'853	2'774	2'716	2'671	2'636	2'607	2'563	2'532	2'508	2'489	2'450	2'333
27	3'026	2'990	2'957	2'927	2'812	2'733	2'674	2'630	2'594	2'565	2'522	2'490	2'466	2'447	2'408	2'290
28	2'988	2'952	2'919	2'890	2'775	2'695	2'636	2'592	2'556	2'527	2'483	2'451	2'427	2'408	2'369	2'250
29	2'953	2'917	2'885	2'855	2'740	2'660	2'601	2'557	2'521	2'492	2'448	2'416	2'391	2'372	2'333	2'213
30	2'921	2'885	2'853	2'823	2'708	2'628	2'569	2'524	2'488	2'459	2'415	2'383	2'358	2'339	2'300	2'179
35	2'791	2'755	2'723	2'693	2'577	2'497	2'438	2'392	2'356	2'327	2'282	2'249	2'224	2'204	2'164	2'039
40	2'697	2'661	2'628	2'598	2'482	2'401	2'342	2'296	2'259	2'230	2'184	2'150	2'125	2'105	2'064	1'935
50	2'569	2'533	2'500	2'470	2'353	2'272	2'211	2'164	2'127	2'097	2'050	2'015	1'989	1'968	1'925	1'790
60	2'486	2'450	2'417	2'387	2'270	2'187	2'126	2'079	2'041	2'010	1'962	1'927	1'900	1'878	1'834	1'692
70	2'428	2'392	2'359	2'329	2'211	2'128	2'067	2'019	1'980	1'949	1'900	1'864	1'837	1'815	1'769	1'622
80	2'385	2'349	2'316	2'286	2'168	2'084	2'022	1'974	1'935	1'903	1'854	1'817	1'789	1'767	1'720	1'568
90	2'353	2'316	2'283	2'253	2'134	2'051	1'988	1'939	1'900	1'868	1'818	1'781	1'752	1'730	1'682	1'525
100	2'326	2'290	2'257	2'227	2'108	2'024	1'961	1'912	1'873	1'840	1'790	1'752	1'723	1'700	1'652	1'490
120	2'288	2'251	2'218	2'188	2'069	1'984	1'921	1'871	1'831	1'798	1'747	1'709	1'679	1'655	1'606	1'436
∞	2'105	2'069	2'035	2'004	1'882	1'794	1'727	1'674	1'631	1'595	1'538	1'494	1'460	1'431	1'370	1'076

Tabla A.19: Puntos críticos: contraste de Sapiro y Uilc

	α								
n	0'01	0'02	0'05	0'10	0'50	0'90	0'95	0'98	0'99
3	0'753	0'756	0'767	0'789	0'959	0'998	0'999	1'000	1'000
4	0'687	0'707	0'748	0'792	0'935	0'987	0'992	0'996	0'997
5	0'686	0'715	0'762	0'806	0'927	0'979	0'986	0'991	0'993
6	0'713	0'743	0'788	0'826	0'927	0'974	0'981	0'986	0'989
7	0'730	0'760	0'803	0'838	0'928	0'972	0'979	0'985	0'988
8	0'749	0'778	0'818	0'851	0'932	0'972	0'978	0'984	0'987
9	0'764	0'791	0'829	0'859	0'935	0'972	0'978	0'984	0'986
10	0'781	0'806	0'842	0'869	0'938	0'972	0'978	0'983	0'986
11	0'792	0'817	0'850	0'876	0'940	0'973	0'979	0'984	0'986
12	0'805	0'828	0'859	0'883	0'943	0'973	0'979	0'984	0'986
13	0'814	0'837	0'866	0'889	0'945	0'974	0'979	0'984	0'986
14	0'825	0'846	0'874	0'895	0'947	0'975	0'980	0'984	0'986
15	0'835	0'855	0'881	0'901	0'950	0'975	0'980	0'984	0'987
16	0'844	0'863	0'887	0'906	0'952	0'976	0'981	0'985	0'987
17	0'851	0'869	0'892	0'910	0'954	0'977	0'981	0'985	0'987
18	0'858	0'874	0'897	0'914	0'956	0'978	0'982	0'986	0'988
19	0'863	0'879	0'901	0'917	0'957	0'978	0'982	0'986	0'988
20	0'868	0'884	0'905	0'920	0'959	0'979	0'983	0'986	0'988
21	0'873	0'888	0'908	0'923	0'960	0'980	0'983	0'987	0'989
22	0'878	0'892	0'911	0'926	0'961	0'980	0'984	0'987	0'989
23	0'881	0'895	0'914	0'928	0'962	0'981	0'984	0'987	0'989
24	0'884	0'898	0'916	0'930	0'963	0'981	0'984	0'987	0'989
25	0'888	0'901	0'918	0'931	0'964	0'981	0'985	0'988	0'989
26	0'891	0'904	0'920	0'933	0'965	0'982	0'985	0'988	0'989
27	0'894	0'906	0'923	0'935	0'965	0'982	0'985	0'988	0'990
28	0'896	0'908	0'924	0'936	0'966	0'982	0'985	0'988	0'990
29	0'898	0'910	0'926	0'937	0'966	0'982	0'985	0'988	0'990
30	0'900	0'912	0'927	0'939	0'967	0'983	0'985	0'988	0'990
31	0'902	0'914	0'929	0'940	0'967	0'983	0'986	0'988	0'990
32	0'904	0'915	0'930	0'941	0'968	0'983	0'986	0'988	0'990
33	0'906	0'917	0'931	0'942	0'968	0'983	0'986	0'989	0'990
34	0'908	0'919	0'933	0'943	0'969	0'983	0'986	0'989	0'990
35	0'910	0'920	0'934	0'944	0'969	0'984	0'986	0'989	0'990
36	0'912	0'922	0'935	0'945	0'970	0'984	0'986	0'989	0'990
37	0'914	0'924	0'936	0'946	0'970	0'984	0'987	0'989	0'990
38	0'916	0'925	0'938	0'947	0'971	0'984	0'987	0'989	0'990
39	0'917	0'927	0'939	0'948	0'971	0'984	0'987	0'989	0'991
40	0'919	0'928	0'940	0'949	0'972	0'985	0'987	0'989	0'991
41	0'920	0'929	0'941	0'950	0'972	0'985	0'987	0'989	0'991
42	0'922	0'930	0'942	0'951	0'972	0'985	0'987	0'989	0'991
43	0'923	0'932	0'943	0'951	0'973	0'985	0'987	0'990	0'991
44	0'924	0'933	0'944	0'952	0'973	0'985	0'987	0'990	0'991
45	0'926	0'934	0'945	0'953	0'973	0'985	0'988	0'990	0'991
46	0'927	0'935	0'945	0'953	0'974	0'985	0'988	0'990	0'991
47	0'928	0'936	0'946	0'954	0'974	0'985	0'988	0'990	0'991
48	0'929	0'937	0'947	0'954	0'974	0'985	0'988	0'990	0'991
49	0'929	0'937	0'947	0'955	0'974	0'985	0'988	0'990	0'991
50	0'930	0'938	0'947	0'955	0'974	0'985	0'988	0'990	0'991

Tabla A.20: Coeficientes: contraste de Sapiro y Uilc

	n									
i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0'7071	0'7071	0'6872	0'6646	0'6431	0'6233	0'6052	0'5888	0'5739	
2		0'0000	0'1677	0'2413	0'2806	0'3031	0'3164	0'3244	0'3291	
3				0'0000	0'0875	0'1401	0'1743	0'1976	0'2141	
4						0'0000	0'0561	0'0947	0'1224	
5								0'0000	0'0399	

	n									
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0'5601	0'5475	0'5359	0'5251	0'5150	0'5056	0'4968	0'4886	0'4808	0'4734
2	0'3315	0'3325	0'3325	0'3318	0'3306	0'3290	0'3273	0'3253	0'3232	0'3211
3	0'2260	0'2347	0'2412	0'2495	0'2495	0'2521	0'2540	0'2553	0'2561	0'2565
4	0'1429	0'1586	0'1707	0'1802	0'1878	0'1988	0'1988	0'2027	0'2059	0'20S5
5	0'0695	0'0922	0'1099	0'1240	0'1353	0'1447	0'1524	0'1587	0'1641	0'1686
6	0'0000	0'0303	0'0539	0'0727	0'0880	0'1005	0'1109	0'1197	0'1271	0'1334
7			0'0000	0'0240	0'0433	0'0593	0'0725	0'0837	0'0932	0'1013
8					0'0000	0'0196	0'0359	0'0496	0'0612	0'0711
9							0'0000	0'0163	0'0303	0'0422
10									0'0000	0'0140

	n									
i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0'464	3 0'4590	0'4542	0'4493	0'4450	0'4407	0'4366	0'4328	0'4291	0'4254
2	0'318	5 0'3156	0'3126	0'3098	0'3069	0'3043	0'3018	0'2992	0'2968	0'2944
3	0'257	8 0'2571	0'2563	0'2554	0'2543	0'2533	0'252Z	0'2510	0'2499	0'2487
4	0'211	9 0'2131	0'2139	0'2145	0'2148	0'2151	0'2152	0'2151	0'2150	0'2148
5	0'173	6 0'1764	0'1787	0'1807	0'1822	0'1836	0'1848	0'1857	0'1864	0'1870
6	0'139	9 0'1443	0'1480	0'1512	0'1539	0'1563	0'1584	0'1601	0'1616	0'1630
7	0'109	2 0'1150	0'1201	0'1245	0'1283	0'1316	0'1346	0'1372	0'1395	0'1415
8	0'080	4 0'0878	0'0941	0'0997	0'1046	0'1089	0'1128	0'1162	0'1192	0'1219
9	0'053	0 0'0618	0'0696	0'0764	0'0823	0'0876	0'0923	0'0965	0'1002	0'1036
10	0'026	3 0'0368	0'0459	0'0539	0'0610	0'0672	0'0728	0'0778	0'0822	0'0862
11	0'000	0 0'0122	0'0228	0'0321	0'0403	0'0476	0'0540	0'0598	0'0650	0'0697
12			0'0000	0'0107	0'0200	0'0284	0'0358	0'0424	0'0483	0'0537
13					0'0000	0'0094	0'0178	0'0253	0'0320	0'0381
14							0'0000	0'0084	0'0159	0'0227
15									0'0000	0'0076

Tabla A.21: Coeficientes: contraste de Sapiro y Uilc

	n									
i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	0’4220	0’4188	0’4156	0’4127	0’4096	0’4068	0’4040	0’4015	0’3989	0’3964
2	0’2921	0’2898	0’2876	0’2854	0’2834	0’2813	0’2794	0’2774	0’2755	0’2737
3	0’2475	0’2463	0’2451	0’2439	0’2427	0’2415	0’2403	0’2391	0’2380	0’2368
4	0’2145	0’2141	0’2137	0’2132	0’2127	0’2121	0’2116	0’2110	0’2104	0’2098
5	0’1874	0’1878	0’1880	0’1882	0’1883	0’1883	0’1883	0’1881	0’1880	0’1878
6	0’1641	0’1651	0’1660	0’1667	0’1673	0’1678	0’1683	0’1686	0’1689	0’1691
7	0’1433	0’1449	0’1463	0’1475	0’1487	0’1496	0’1505	0’1513	0’1520	0’1526
8	0’1243	0’1265	0’1284	0’1301	0’1317	0’1331	0’1344	0’1356	0’1366	0’1376
9	0’1066	0’1093	0’1118	0’1140	0’1160	0’1179	0’1196	0’1211	0’1225	0’1237
10	0’0899	0’0931	0’0961	0’0988	0’1013	0’1036	0’1056	0’1075	0’1092	0’1108
l1	0’0739	0’0777	0’0812	0’0844	0’0873	0’0900	0’0924	0’0947	0’0967	0’0986
12	0’0585	0’0629	0’0669	0’0706	0’0739	0’0770	0’0798	0’0824	0’0848	0’0870
13	0’0435	0’0485	0’0530	0’0572	0’0610	0’0645	0’0677	0’0706	0’0733	0’0759
14	0’0289	0’0344	0’0395	0’0441	0’0484	0’0523	0’0559	0’0592	0’0622	0’0651
15	0’0144	0’0206	0’0262	0’0314	0’0361	0’0404	0’0444	0’0481	0’0515	0’0546
16	0’0000	0’0068	0’0187	0’0187	0’0239	0’0287	0’0331	0’0372	0’0409	0’0444
17	0’0000	0’0062	0’0119	0’0172	0’0220	0’0264	0’0305	0’0343		
18	0’0000	0’0057	0’0110	0’0158	0’0203	0’0244				
19	0’0000	0’0053	0’0101	0’0146						
20	0’0000	0’0049								
	n									
i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	0’3940	0’3917	0’3894	0’3872	0’3850	0’3830	0’3808	0’3789	0’3770	0’3751
2	0’2719	0’2701	0’2684	0’2667	0’2651	0’2635	0’2620	0’2604	0’2589	0’2574
3	0’2357	0’2345	0’2334	0’2323	0’2313	0’2302	0’2291	0’2281	0’2271	0’2260
4	0’2091	0’2085	0’2078	0’2072	0’2065	0’2058	0’2052	0’2045	0’2038	0’2032
5	0’1876	0’1874	0’1871	0’1868	0’1865	0’1862	0’1859	0’1855	0’1851	0’1847
6	0’1693	0’1694	0’1695	0’1695	0’1695	0’1695	0’1695	0’1693	0’1692	0’1691
7	0’1531	0’1535	0’1539	0’1542	0’1545	0’1548	0’1550	0’1551	0’1553	0’1554
8	0’1384	0’1392	0’1398	0’1405	0’1410	0’1415	0’1420	0’1423	0’1427	0’1430
9	0’1249	0’1259	0’1269	0’1278	0’1286	0’1293	0’1300	0’1306	0’1312	0’1317
10	0’1123	0’1136	0’1149	0’1160	0’1170	0’1180	0’1189	0’1197	0’1205	0’l212
11	0’1004	0’1020	0’1035	0’1049	0’1062	0’1073	0’1085	0’1095	0’1105	0’lU3
12	0’0891	0’0909	0’0927	0’0943	0’0959	0’0972	0’0986	0’0998	0’1010	0’1020
13	0’0782	0’0804	0’0824	0’0842	0’0860	0’0876	0’0892	0’0906	0’0919	0’0932
14	0’0677	0’0701	0’0724	0’0745	0’0765	0’0783	0’0801	0’0817	0’0832	0’0846
15	0’0575	0’0602	0’0628	0’0651	0’0673	0’0694	0’0713	0’0731	0’0748	0’0764
16	0’0476	0’0506	0’0534	0’0560	0’0584	0’0607	0’0628	0’0648	0’0667	0’0685
17	0’0379	0’0411	0’0442	0’0471	0’0497	0’0522	0’0546	0’0568	0’0588	0’0608
18	0’0283	0’0318	0’0352	0’0383	0’04l2	0’0439	0’0465	0’0489	0’0511	0’0532
19	0’018B	0’0227	0’0263	0’0296	0’0328	0’0357	0’0385	0’0411	0’0436	0’0459
20	0’0094	0’0136	0’0175	0’0211	0’0245	0’0277	0’0307	0’0335	0’0361	0’0386
21	0’0000	0’0045	0’0087	0’0126	0’0163	0’0197	0’0229	0’0259	0’0288	0’0314
22			0’0000	0’0042	0’0081	0’0118	0’0153	0’0185	0’0215	0’0244
23					0’0000	0’0039	0’0076	0’0111	0’0143	0’0174
24							0’0000	0’0037	0’0071	0’0104
25									0’0000	0’0035

Tabla A.22: Puntos críticos: contraste de Uilcoxon

n	α				n	α			
	0'005	0'01	0'025	0'05		0'005	0'01	0'025	0'05
5	0	0	0	0	33	138	151	170	187
6	0	0	2	3	34	148	162	182	200
7	0	0	2	3	35	159	173	195	213
8	0	1	3	5	36	171	185	208	227
9	1	3	5	8	37	182	198	221	241
10	3	5	8	10	38	194	211	235	256
11	5	7	10	13	39	207	224	249	271
12	7	9	13	17	40	220	238	264	286
13	9	12	17	21	41	233	252	279	302
14	12	15	21	25	42	247	266	294	319
15	15	19	25	30	43	261	281	310	336
16	19	23	29	35	44	276	296	327	353
17	23	27	34	41	45	291	312	343	371
18	27	32	40	47	46	307	328	361	389
19	32	37	46	53	47	322	345	378	407
20	37	43	52	60	48	339	362	396	426
21	42	49	58	67	49	355	379	415	446
22	48	55	65	75	50	373	397	434	466
23	54	62	73	83	51	390	416	453	486
24	61	69	81	91	52	408	434	473	507
25	68	76	89	100	53	427	454	494	529
26	75	84	98	110	54	445	473	514	550
27	83	92	107	119	55	465	493	536	573
28	91	101	116	130	56	484	514	557	595
29	100	110	126	140	57	504	535	579	618
30	109	120	137	151	58	525	556	602	642
31	118	130	147	163	59	546	578	625	666
32	128	140	159	175	60	567	600	648	690

Tabla A.23: Puntos críticos: contraste U de Man y Uitni ($\alpha = 0'1$)

	n_2																			
n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	-																			
2	-	-																		
3	-	0	1																	
4	-	0	1	3																
5	-	1	2	4	5															
6	-	1	3	5	7	9														
7	-	1	4	6	8	11	13													
8	-	2	5	7	10	13	16	19												
9	0	2	5	9	12	15	18	22	25											
10	0	3	6	10	13	17	21	24	28	32										
11	0	3	7	11	15	19	23	27	31	36	40									
12	0	4	8	12	17	21	26	30	35	39	44	49								
13	0	4	9	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58							
14	0	5	10	15	20	25	31	36	41	47	52	58	63	69						
15	0	5	10	16	22	27	33	39	45	51	57	63	68	74	80					
16	0	5	11	17	23	29	36	42	48	54	61	67	74	80	86	93				
17	0	6	12	18	25	31	38	45	52	58	65	72	79	85	92	99	106			
18	0	6	13	20	27	34	41	48	55	62	69	77	84	91	98	106	113	120		
19	1	7	14	21	28	36	43	51	58	66	73	81	89	97	104	112	120	128	135	
20	1	7	15	22	30	38	46	54	62	70	78	86	94	102	110	119	127	135	143	151
21	1	8	15	23	32	40	48	56	65	73	82	91	99	108	116	125	134	142	151	160
22	1	8	16	25	33	42	51	59	68	77	86	95	104	113	122	131	141	150	159	168
23	1	9	17	26	35	44	53	62	72	81	90	100	109	119	128	138	147	157	167	176
24	1	9	18	27	36	46	56	65	75	85	95	105	114	124	134	144	154	164	174	184
25	1	9	19	28	38	48	58	68	78	89	99	109	120	130	140	151	161	172	182	193
26	1	10	20	30	40	50	61	71	82	92	103	114	125	136	146	157	168	179	190	201
27	1	10	21	31	41	52	63	74	85	96	107	119	130	141	152	164	175	186	198	209
28	1	11	21	32	43	54	66	77	88	100	112	123	135	147	158	170	182	194	206	217
29	2	11	22	33	45	56	68	80	92	104	116	128	140	152	164	177	189	201	213	226
30	2	12	23	35	46	58	71	83	95	108	120	133	145	158	170	183	196	209	221	234
31	2	12	24	36	48	61	73	86	99	111	124	137	150	163	177	190	203	216	229	242
32	2	13	25	37	50	63	76	89	102	115	129	142	156	169	183	196	210	223	237	251
33	2	13	26	38	51	65	78	92	105	119	133	147	161	175	189	203	217	131	245	259
34	2	13	26	40	53	67	81	95	109	123	137	151	166	180	195	209	224	238	253	267
35	2	14	27	41	55	69	83	98	112	127	141	156	171	186	201	216	230	245	260	275
36	2	14	28	42	56	71	86	100	115	131	146	161	176	191	207	222	237	253	268	284
37	2	15	29	43	58	73	88	103	119	134	150	166	181	197	213	229	244	260	276	292
38	2	15	30	45	60	75	91	106	122	138	154	170	186	203	219	235	251	268	284	301
39	3	16	31	46	61	77	93	109	126	142	158	175	192	208	225	242	258	275	292	309
40	3	16	31	47	63	79	96	112	129	146	163	180	197	214	231	248	265	282	300	317

Tabla A.24: Puntos críticos: contraste U de Man y Uitni ($\alpha = 0'05$)

	n_2																			
n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	-																			
2	-	-																		
3	-	-	0																	
4	-	-	0	1																
5	-	0	1	2	4															
6	-	0	2	3	5	7														
7	-	0	2	4	6	8	11													
8	-	1	3	5	8	10	13	15												
9	-	1	4	6	9	12	15	18	21											
10	-	1	4	7	11	14	17	20	24	27										
11	-	1	5	8	12	16	19	23	27	31	34									
12	-	2	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42								
13	-	2	6	10	15	19	24	28	33	37	42	47	51							
14	-	3	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61						
15	-	3	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72					
16	-	3	8	14	19	25	30	36	42	48	54	60	65	71	77	83				
17	-	3	9	15	20	26	33	39	45	51	57	64	70	77	83	89	96			
18	-	4	9	16	22	28	35	41	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109		
19	0	4	10	17	23	30	37	44	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	
20	0	4	11	18	25	32	39	47	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138
21	0	5	11	19	26	34	41	49	57	65	73	81	89	97	105	113	121	130	138	146
22	0	5	12	20	28	36	44	52	60	68	77	85	94	102	111	119	128	136	145	154
23	0	5	13	21	29	37	46	54	63	72	81	90	98	107	116	125	134	143	152	161
24	0	6	13	22	30	39	48	57	66	75	85	94	103	113	122	131	141	150	160	169
25	0	6	14	23	32	41	50	60	69	79	89	98	108	118	128	137	147	157	167	177
26	0	6	15	24	33	43	53	62	72	82	92	103	113	123	133	143	154	164	174	185
27	0	7	15	25	35	45	55	65	75	86	96	107	117	128	139	149	160	171	182	192
28	0	7	16	26	36	46	57	68	78	89	100	111	122	133	144	156	167	178	189	200
29	0	7	17	27	38	48	59	70	82	93	104	116	127	138	150	162	173	185	196	208
30	0	7	17	28	39	50	61	73	85	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216
31	0	8	18	29	40	52	64	76	88	100	112	124	136	149	161	174	186	199	211	224
32	0	8	19	30	42	54	66	78	91	103	116	128	141	154	167	180	193	206	218	231
33	0	8	19	31	43	56	68	81	94	107	120	133	146	159	172	186	199	212	226	239
34	0	9	20	32	45	57	70	84	97	110	124	137	151	164	178	192	206	219	233	247
35	0	9	21	33	46	59	73	86	100	114	128	141	156	170	184	198	212	226	241	255
36	0	9	21	34	48	61	75	89	103	117	131	146	160	175	189	204	219	233	248	263
37	0	10	22	35	49	63	77	91	106	121	135	150	165	180	195	210	225	240	255	271
38	0	10	23	36	50	65	79	94	109	124	139	154	170	185	201	216	232	247	263	278
39	1	10	23	38	52	67	82	97	112	128	143	159	175	190	206	222	238	254	270	286
40	1	11	24	39	53	68	84	99	115	131	147	163	179	196	212	228	245	261	278	294

Tabla A.25: Puntos críticos: contraste U de Man y Uitni ($\alpha = 0\text{'}025$)

	n_2																			
n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	-																			
2	-	-																		
3	-	-	-																	
4	-	-	0																	
5	-	-	0	1	2															
6	-	-	1	2	3	5														
7	-	-	1	3	5	6	8													
8	-	0	2	4	6	8	10	13												
9	-	0	2	4	7	10	12	15	17											
10	-	0	3	5	8	11	14	17	20	23										
11	-	0	3	6	9	13	16	19	23	26	30									
12	-	1	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37								
13	-	1	4	8	12	16	20	24	28	33	37	41	45							
14	-	1	5	9	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55						
15	-	1	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64					
16	-	1	6	11	15	21	26	31	37	42	47	53	59	64	70	75				
17	-	2	6	11	17	22	28	34	39	45	51	57	63	69	75	81	87			
18	-	2	7	12	18	24	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99		
19	-	2	7	13	19	25	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	
20	-	2	8	14	20	27	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127
21	-	3	8	15	22	29	36	43	50	58	65	73	80	88	96	103	111	119	126	134
22	-	3	9	16	23	30	38	45	53	61	69	77	85	93	101	109	117	125	133	141
23	-	3	9	17	24	32	40	48	56	64	73	81	89	98	106	115	123	132	140	149
24	-	3	10	17	25	33	42	50	59	67	76	85	94	102	111	120	129	138	147	156
25	-	3	10	18	27	35	44	53	62	71	80	89	98	107	117	126	135	145	154	163
26	-	4	11	19	28	37	46	55	64	74	83	93	102	112	122	132	141	151	161	171
27	-	4	11	20	29	38	48	57	67	77	87	97	107	117	127	137	147	158	168	178
28	-	4	12	21	30	40	50	60	70	80	90	101	111	122	132	143	154	164	175	186
29	-	4	13	22	32	42	52	62	73	83	94	105	116	127	138	149	160	171	182	193
30	-	5	13	23	33	43	54	65	76	87	98	109	120	131	143	154	166	177	189	200
31	-	5	14	24	34	45	56	67	78	90	101	113	125	136	148	160	172	184	196	208
32	-	5	14	24	35	46	58	69	81	93	105	117	129	141	153	166	178	190	203	215
33	-	5	15	25	37	48	60	72	84	96	108	121	133	146	159	171	184	197	210	222
34	-	5	15	26	38	50	62	74	87	99	112	125	138	151	164	177	190	203	217	230
35	-	6	16	27	39	51	64	77	89	103	116	129	142	156	169	183	196	210	224	237
36	-	6	16	28	40	53	66	79	92	106	119	133	147	161	174	188	202	216	231	245
37	-	6	17	29	41	55	68	81	95	109	123	137	151	165	180	194	209	223	238	252
38	-	6	17	30	43	56	70	84	98	112	127	141	156	170	185	200	215	230	245	259
39	0	7	18	31	44	58	72	86	101	115	130	145	160	175	190	206	221	236	252	267
40	0	7	18	31	45	59	74	89	103	119	134	149	165	180	196	211	227	243	258	274

Tabla A.26: Puntos críticos: contraste U de Man y Uitni ($\alpha = 0'01$)

	n_2																			
n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	-																			
2	-	-																		
3	-	-	-																	
4	-	-	-	-																
5	-	-	-	0	1															
6	-	-	-	1	2	3														
7	-	-	0	1	3	4	6													
8	-	-	0	2	4	6	7	9												
9	-	-	1	3	5	7	9	11	14											
10	-	-	1	3	6	8	11	13	16	19										
11	-	-	1	4	7	9	12	15	18	22	25									
l2	-	-	2	5	8	11	14	17	21	24	28	31								
13	-	0	2	5	9	12	16	20	23	27	31	35	39							
14	-	0	2	6	10	13	17	22	26	30	34	38	43	47						
15	-	0	3	7	11	15	19	24	28	33	37	42	47	51	56					
16	-	0	3	7	12	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66				
17	-	0	4	8	13	18	23	28	33	38	44	49	55	61	66	71	77			
18	-	0	4	9	14	19	24	30	36	41	47	53	59	65	70	76	82	88		
19	-	1	4	9	15	20	26	32	38	44	50	56	63	69	75	82	88	94	101	
20	-	1	5	10	16	22	28	34	40	47	53	60	67	73	80	87	93	100	107	114
21	-	1	5	11	17	23	30	36	43	50	57	64	71	78	85	92	99	106	113	l21
22	-	1	6	11	18	24	31	38	45	53	60	67	75	82	90	97	105	112	120	127
23	-	1	6	12	19	26	33	40	48	55	63	71	79	87	94	102	110	118	126	134
24	-	1	6	13	20	27	35	42	50	58	66	75	83	91	99	108	116	124	133	141
25	-	1	7	13	21	29	36	45	53	61	70	78	87	95	104	113	122	130	139	148
26	-	1	7	14	22	30	38	47	55	64	73	82	91	100	109	118	127	136	146	155
27	-	2	7	15	23	31	40	49	58	67	76	85	95	104	114	123	133	14Z	152	162
28	-	2	8	16	24	33	42	51	60	70	79	89	99	109	119	129	139	149	159	169
29	-	2	8	16	25	34	43	53	63	73	83	93	103	113	123	134	144	155	165	176
30	-	2	9	17	26	35	45	55	65	76	86	96	107	118	128	139	150	161	172	182
31	-	2	9	18	27	37	47	57	68	78	89	100	111	122	133	144	156	167	178	189
32	-	2	9	18	28	38	49	59	70	81	92	104	115	127	138	150	161	173	185	196
33	-	2	10	19	29	40	50	61	73	84	96	107	119	131	143	155	167	179	191	203
34	-	3	10	20	30	41	52	64	75	87	99	111	123	135	148	160	173	185	198	210
35	-	3	11	20	31	42	54	66	78	90	102	115	127	140	153	165	178	191	204	217
36	-	3	11	21	32	44	56	68	80	93	106	118	131	144	158	171	184	197	211	224
37	-	3	11	22	33	45	57	70	83	96	109	122	135	149	162	176	190	203	217	231
38	-	3	12	22	34	46	59	72	85	99	112	126	139	153	167	181	195	209	224	238
39	-	3	12	23	35	48	61	74	88	101	115	129	144	158	172	187	201	216	230	245
40	-	3	13	24	36	49	63	76	90	104	119	133	148	162	177	192	207	222	237	252

Tabla A.27: Puntos críticos: contraste U de Man y Uitni ($\alpha = 0$'005)

	n_2																			
n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	-																			
2	-	-																		
3	-	-	-																	
4	-	-	-	-																
5	-	-	-	-	0															
6	-	-	-	0	1	2														
7	-	-	-	0	1	3	4													
8	-	-	-	1	2	4	6	7												
9	-	-	0	1	3	5	7	9	11											
10	-	-	0	2	4	6	9	11	13	16										
11	-	-	0	2	5	7	10	13	16	18	21									
12	-	-	1	3	6	9	12	15	18	21	24	27								
13	-	-	1	3	7	10	13	17	20	24	27	31	34							
14	-	-	1	4	7	11	15	18	22	26	30	34	38	42						
15	-	-	2	5	8	12	16	20	24	29	33	37	42	46	51					
16	-	-	2	5	9	13	18	22	27	31	36	41	45	50	55	60				
17	-	-	2	6	10	15	19	24	29	34	39	44	49	54	60	65	70			
18	-	-	2	6	11	16	21	26	31	37	42	47	53	58	64	70	75	81		
19	-	0	3	7	12	17	22	28	33	39	45	51	57	63	69	74	81	87	93	
20	-	0	3	8	13	18	24	30	36	42	48	54	60	67	73	79	86	92	99	105
21	-	0	3	8	14	19	25	32	38	44	51	58	64	71	78	84	91	98	105	112
22	-	0	4	9	14	21	27	34	40	47	54	61	68	75	82	89	96	104	111	118
23	-	0	4	9	15	22	29	35	43	50	57	64	72	79	87	94	102	109	117	125
24	-	0	4	10	16	23	30	37	45	52	60	68	75	83	91	99	107	115	123	131
25	-	0	5	10	17	24	32	39	47	55	63	71	79	87	96	104	112	121	129	138
26	-	0	5	11	18	25	33	41	49	58	66	74	83	92	100	109	118	127	135	144
27	-	1	5	12	19	27	35	43	52	60	69	78	87	96	105	114	123	132	142	151
28	-	1	5	12	20	28	36	45	54	63	72	81	91	100	109	119	128	138	148	157
29	-	1	6	13	21	29	38	47	56	66	75	85	94	104	114	124	134	144	154	164
30	-	1	6	13	22	30	40	49	58	68	78	88	98	108	119	129	139	150	160	170
31	-	1	6	14	22	32	41	51	61	71	81	92	102	113	123	134	145	155	166	177
32	-	1	7	14	23	33	43	53	63	74	84	95	106	117	128	139	150	161	172	184
33	-	1	7	15	24	34	44	55	65	76	87	98	110	121	132	144	155	167	179	190
34	-	1	7	16	25	35	46	57	68	79	90	102	113	125	137	149	161	173	185	197
35	-	1	8	16	26	37	47	59	70	82	93	105	117	129	142	154	166	179	191	203
36	-	1	8	17	27	38	49	60	72	84	96	109	121	134	146	159	172	184	197	210
37	-	1	8	17	28	39	51	62	75	87	99	112	125	138	151	164	177	190	203	217
38	-	1	9	18	29	40	52	64	77	90	102	116	129	142	155	169	182	196	210	223
39	-	2	9	19	30	41	54	66	79	92	106	119	133	146	160	174	188	202	216	230
40	-	2	9	19	31	43	55	68	81	95	109	122	136	150	165	179	193	208	222	237

Tabla A.28: Puntos críticos: contraste U de Man y Uitni ($\alpha = 0’001$)

	n_2																			
n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	-																			
2	-	-																		
3	-	-	-																	
4	-	-	-	-																
5	-	-	-	-	-															
6	-	-	-	-	-	-														
7	-	-	-	-	-	0	1													
8	-	-	-	-	0	1	2	4												
9	-	-	-	-	1	2	3	5	7											
10	-	-	-	0	1	3	5	6	8	10										
11	-	-	-	0	2	4	6	8	10	12	15									
12	-	-	-	0	2	4	7	9	12	14	17	20								
13	-	-	-	1	3	5	8	11	14	17	20	23	26							
14	-	-	-	1	3	6	9	12	15	19	22	25	29	32						
15	-	-	-	1	4	7	10	14	17	21	24	28	32	36	40					
16	-	-	-	2	5	8	11	15	19	23	27	31	35	39	43	48				
17	-	-	0	2	5	9	13	17	21	25	29	34	38	43	47	52	57			
18	-	-	0	3	6	10	14	18	23	27	32	37	42	46	51	56	61	66		
19	-	-	0	3	7	11	15	20	25	29	34	40	45	50	55	60	66	71	77	
20	-	-	0	3	7	12	16	21	26	32	37	42	48	54	59	65	70	76	82	88
21	-	-	1	4	8	12	18	23	28	34	40	45	51	57	63	69	75	81	87	94
22	-	-	1	4	8	13	19	24	30	36	42	48	54	61	67	73	80	86	93	99
23	-	-	1	4	9	14	20	26	32	38	45	51	58	64	71	78	85	91	98	105
24	-	-	1	5	10	15	21	27	34	40	47	54	61	68	75	82	89	96	104	111
25	-	-	1	5	10	16	22	29	36	43	50	57	64	72	79	86	94	102	109	117
26	-	-	1	6	11	17	24	31	38	45	52	60	68	75	83	91	99	107	115	123
27	-	-	2	6	12	18	25	32	40	47	55	63	71	79	87	95	104	112	120	129
28	-	-	2	6	12	19	26	34	41	49	57	66	74	83	91	100	108	117	126	135
29	-	-	2	7	13	20	27	35	43	52	60	69	77	86	95	104	113	122	131	140
30	-	-	2	7	14	21	29	37	45	54	63	72	81	90	99	108	118	127	137	146
31	-	-	2	7	14	22	30	38	47	56	65	75	84	94	103	113	123	132	142	152
32	-	-	2	8	15	23	31	40	49	58	68	77	87	97	107	117	127	138	148	158
33	-	-	3	8	15	24	32	41	51	61	70	80	91	101	111	122	132	143	153	164
34	-	-	3	9	16	25	34	43	53	63	73	83	94	105	115	126	137	148	159	170
35	-	-	3	9	17	25	35	45	55	65	76	86	97	108	119	131	142	153	165	176
36	-	-	3	9	17	26	36	46	57	67	78	89	101	112	123	135	147	158	170	182
37	-	-	3	10	18	27	37	48	58	70	81	92	104	116	127	139	151	164	176	188
38	-	-	3	10	19	28	39	49	60	72	83	95	107	119	131	144	156	169	181	194
39	-	-	4	11	19	29	40	51	62	74	86	98	110	123	136	148	161	174	187	200
40	-	-	4	11	20	30	41	52	64	76	89	101	114	127	140	153	166	179	192	206

Bibliografía

[1] F. Azorín and J. L. Sanchez-Crespo. *Métodos y Aplicaciones del Muestreo.* Alianza, 1986.

[2] J. Baró Llinás. *Inferencia Estadística.* Parramón, 1985.

[3] P. J. Bickel and K. A. Doksum. *Mathematical Statistics. Basic Ideas and Selects Topics.* Holden–Day, 1977.

[4] A. A. Borovkov. *Mathematical Statistics.* Gordon and Breach Science Publishers, 1998.

[5] G. Box, W. Hunter, and J. Stuart Hunter. *Estadística para Investigadores. Introducción al Diseño de Experimentos, Análisis de Datos y Construcción del Modelo.* Reverté, S. A., 1993.

[6] G. C. Canavos. *Probabilidad y Estadística: Aplicaciones y Métodos.* McGraw Hill, 1992.

[7] W. G. Cochran. *Técnicas de Muestreo.* CECSA, 1971.

[8] W. J. Conover. *Practical Nonparametric Statistics.* John Wiley and Sons, 1971.

[9] H. Cramér. *Métodos Matemáticos de Estadística.* Aguilar, 1970.

[10] J. A. Cristóbal. *Inferencia Estadística.* Puz, 1995.

[11] C. M. Cuadras. *Problemas de Probabilidades y Estadística. Vol 2. Inferencia Estadística.* PPU, 1990.

[12] C. M. Cuadras. *Problemas de Probabilidades y Estadística. Vol. 1. Probabilidades.* EUB, 1995.

[13] W. W. Daniel. *Applied Nonparametric Statistics.* Thomson Information/Publishing Group, 1988.

[14] M. H. DeGrout. *Probabilidad y Estadística.* Addison–Wesley, 1968.

[15] J. L. Devore. *Probability and Statistics for Engineering and Theiencies.* Thomson Information/Publishing Group, 1982.

[16] E. J. Dudewicz and S. N. Misha. *Modern Mathematical Statistics.* Wiley, 1988.

[17] A. I. Durand and S. L. Ipiña. *Introducción a la Teoría de la Probabilidad y la Inferencia Estadística.* Rueda, 1994.

[18] F. R. Fernández García and J. A. Mayor Gallego. *Muestreo en Poblaciones Finitas: Curso Básico.* EUB, 1995.

[19] R. A. Fisher. *Contributions to Mathematical Statistics.* John Wiley, 1950.

[20] J. D. Gibbons and S. Chakraborti. *Nonparametric Statistical Inference.* Dekker, 1992.

[21] A. González Carmona and Otros. *Análisis Estadístico con Statgraphics.* Grupo Editorial Universitario y Copias Plácido, 1997.

[22] F. A. Graybill. *Theory and Application of Linear Model.* Wadsworth & Brooks/Cole Advance Books & Software, 1976.

[23] J. Hájek. *A Course in Nonparametric Statistics.* Holden–Day, 1969.

[24] R. V. Hogg and A. T. Craig. *Introduction to Mathematical Statistics.* Collier–Mcmillan, 1971.

[25] A. M. Kshirsagar. *A Course in Linear Models.* Dekker, 1983.

[26] E. L. Lehmann. *Nonparametrics: Statistics Methods Based on Ranks.* McGraw Hill, 1975.

[27] E. L. Lehmann. *Theory of Point Estimation.* Wiley, 1983.

[28] H. R. Lidman. *Analysis of Variance in Experimental Design.* Springer–Verlag, 1992.

[29] A. Martín Andrés and J. D. Luna del Castillo. *Bioestadística para Las Ciencias de la Salud.* Norma, 1994.

[30] D. Montgomery. *Diseño y Análisis de Experimentos.* Grupo Editorial Iberoamérica, 1991.

[31] A. Mood and F. Graybill. *Introducción a la Teoría de la Estadística.* Aguilar, 1978.

[32] B. Ostle. *Estadística Aplicada.* Limusa, 1970.

[33] D. Peña Sánchez de Rivera. *Estadística. Modelos y Métodos. Vol. 2. Modelos Lineales y Series Temporales.* Alianza Universidad Textos, 1987.

[34] D. Peña Sánchez de Rivera. *Estadística. Modelos y Métodos. Vol. 1. Fundamentos.* AUT, 1992.

[35] C. Pérez López. *Econometría y Análisis Estadístico Multivariante con Statgraphics.* Ra-ma, 1996.

[36] V. Quesada, A. Isidoro, and L. A. López. *Curso y Ejercicios de Estadística.* Alhambra Universidad, 1988.

[37] M. D. Riba I Lloret. *Modelo Lineal de Análisis de la Varianza.* Herder, 1990.

[38] S. Ríos. *Análisis Estadístico Aplicado.* Paraninfo, 1983.

[39] S. Ríos. *Métodos Estadísticos.* Castillo, 1985.

[40] V. K. Rohatgi. *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics.* Wiley, 1977.

[41] V. K. Rohatgi. *Statistical Inference.* John Wiley, 1984.

[42] L. Ruiz-Maya. *Métodos Estadísticos de Investigación. Introducción al Análisis de la Varianza.* Instituto Nacional de Estadística, 1977.

[43] L. Ruiz-Maya. *Problemas de Estadística.* AC, 1989.

[44] L. Ruiz-Maya and F. J. Martín Pliego. *Estadística II: Inferencia.* Ad., 1995.

[45] L. Sachs. *Estadística Aplicada.* Labor, 1978.

[46] H. Scheffé. *The Analysis of Variance.* Wiley, 1959.

[47] J. Shao. *Mathematical Statistics.* Springer, 1999.

[48] L. E. Toothaker. *Multiple Comparison Procedures.* Sage Publications, 1993.

[49] F. Tusel and A. Garin. *Problemas de Probabilidad e Inferencia Estadística.* Tebar Flores, 1991.

[50] S. S. Wilks. *Mathematical Statistics.* John Wiley, 1962.

[51] S. Zacks. *The Theory of Statistical Inference.* Wiley, 1971.

Índice alfabético