Análisis y resolución de problemas sobre Teoría de Juegos

Celia García Ruiz

Máster en Matemáticas

Universidad de Granada

Granada 2022

Trabajo Fin de Máster

Análisis y resolución de problemas sobre Teoría de Juegos

Celia García Ruiz

Dirección: Prof. Dr. D. Pascual Jara Martínez

Máster de Matemáticas
Universidad de Granada
Granada, 2022

Índice general

Introducción **0**

I Desarrollo teórico de la Teoría de Juegos **3**
1 Conceptos básicos 3
2 Metodología de resolución de problemas 5
3 Evolución histórica de la teoría 6

II Planteamiento y resolución de problemas **9**

III Análisis crítico de los problemas **37**

IV Conclusiones **53**

Bibliografía **55**

Bibliografía. Referencias Web **57**

Índice alfabético **59**

Introducción

La resolución de problemas es una de las competencias a desarrollar en el currículo de Matemáticas, tanto en Enseñanza Secundaria y Bachillerato como en Universidad. Por lo general, no se presta la suficiente dedicación a la misma; por esta razón, se han venido celebrando tradicionalmente actividades extraescolares dedicadas a la resolución de problemas. Entre estas actividades podemos destacar las olimpiadas en sus diferentes niveles.

En la actualidad esta competición se ha expandido por todo el mundo a causa de su importante eficiencia en la promoción de las Matemáticas y en la detección temprana de estudiantes con altas capacidades.

Los concursos Eotvos de Hungría, que comenzaron en 1894, fueron las primeras competiciones matemáticas nacionales y ya, posteriormente, estas competiciones se fueron extendiendo por todo el centro y el este europeo. En particular, el nombre de *Olimpiadas* se introduce en 1958 que es el año en que se celebra la primera Olimpiada Matemática Internacional, organizada por Rumanía. Desde entonces, se vienen celebrando cada año en un país distinto siendo este año el punto de encuentro Oslo, Noruega. La competición se divide en tres fases, con nivel ascendente de dificultad:

1. *Fase de Distrito*: consta de dos pruebas escritas en las que se han de resolver un total de seis problemas. Se celebran en cada Distrito Universitario al final del primer trimestre. Los participantes son estudiantes de Enseñanzas Medias menores de 19 años que se presentan de forma voluntaria sin ningún requisito previo. Los tres alumnos con mejor puntuación de cada distrito pueden avanzar a la siguiente fase.

2. *Fase Nacional (OME, Olimpiada Matemática Española)*: en este caso la competición consta de dos pruebas escritas con una duración de tres horas y media cada una, en las que el participante debe enfrentarse a seis problemas propuestos por un tribunal. Se celebran cada año entre los meses de marzo y abril. Los seis mejores clasificados en esta fase tienen la posibilidad de competir en la fase internacional y los cuatro primeros de acudir además a la Olimpiada Iberoamericana.

3. *Fase Internacional (IMO, International Mathematical Olympiad)*: consta de dos pruebas escritas de cuatro horas y media de duración cada una y, de nuevo, los participantes deben intentar resolver seis problemas propuestos por un tribunal. Este año será a mediados del mes de julio.

Los problemas que se proponen en cada fase no precisan conocimientos muy específicos de Matemáticas; por el contrario, se pretende del alumno su capacidad de raciocinio, la habilidad para enfrentarse a nuevas situaciones y una cierta dosis de lo que conocemos comúnmente en matemáticas como idea feliz en la resolución de los ejercicios.

Este Trabajo de Fin de Máster en el Máster Interuniversitario en Matemáticas está dedicado al estudio de un reducido número de problemas relacionados con la *Teoría de Juegos* y en él, recogemos problemas que han aparecido en recientes competiciones o bien problemas que son especialmente interesantes por el bagaje que contienen. En ello, nos hemos encontrado con la dificultad de que en las olimpiadas no aparecen muchos problemas que traten sobre Teoría de Juegos. Por ende, el documento se dirige especialmente a los estudiantes que presenten interés y quieran aprendar más sobre el tema o bien a aquellos que quieran implicarse en el reto de competir en las Olimpiadas Matemáticas.

En cuanto a la disposición del trabajo, en el *Capítulo I* se realiza un desarrollo teórico que aportará los conceptos necesarios para la resolución de los problemas propuestos, acompañado de algunos ejemplos que aclaran la materia. En el *Capítulo II*, se expone el planteamiento y resolución de una serie de problemas que serán el objeto de estudio del presente trabajo. En el *Capítulo III*, hacemos un comentario crítico de cada problema y su resolución, estudiamos las posibles variaciones que hacen que el problema se pueda adaptar a uno u otro nivel y analizamos la información obtenida como resultado de exponer el problema a un grupo de alumnos participantes en clases de preparación para la Olimpiada Matemática Española. Y por último, en el *Capítulo IV* se hace una breve reflexión como consecuencia del desarrollo de este proyecto.

Capítulo I

Desarrollo teórico de la Teoría de Juegos

En este capítulo se realiza una introducción a la *Teoría de Juegos* atendiendo a sus orígenes y evolución. Además, se desarrollan los conceptos básicos de la teoría y diferentes estrategias de resolución de problemas.

1. Conceptos básicos

Definición. 1.1.
Se le denomina **juego**, según [1], a aquella actividad en la que los participantes deben seguir una serie de reglas para conseguir la victoria. En un juego puede haber uno o varios jugadores y existen dos posibles resultados para cada uno de ellos: ganar o perder el juego.

Algunos de los tipos de juegos más conocidos son los *juegos de mesa* como el dominó, ajedrez, o cartas, los *juegos deportivos* como voleibol, fútbol o baloncesto y los *juegos tecnológicos*. Estos juegos suelen tener varios jugadores pero en ocasiones es suficiente con uno como puede ser el juego de cartas “solitario”.

Definición. 1.2.
Un **jugador** es cada uno de los participantes que en el juego toman decisiones con el objetivo de alcanzar la victoria.

En particular, se dirá que un juego es “justo” en el siguiente caso:

Definición. 1.3.
Se considera como **juego justo** a aquel en el que todos los jugadores participan en igualdad de condiciones para alcanzar la victoria.

Cada jugador pretende obtener el mejor resultado posible teniendo presente que el resultado del juego depende tanto de sus acciones como de las del resto de jugadores. Esto es un rasgo principal de la Teoría de juegos.

De hecho, la característica clave de los juegos es que consisten en tomar las decisiones que más convengan para ganar, debiendo atenerse a las reglas del juego, y sabiendo que el resto de jugadores también influyen en los resultados de sus decisiones.

La *Teoría de juegos* se ocupa del análisis riguroso y sistemático de estas situaciones. Esta área de las matemáticas se emplea en la toma de decisiones en múltiples circunstancias tales como los juegos de ajedrez, la biología, las negociaciones políticas o empresariales, estrategias militares o situaciones propias del día a día, según [1], [2] o [3]. Aunque la mayor parte de las aplicaciones considera que los jugadores son agentes racionales, hay casos como los programas de ordenador o pequeños seres vivos en los que no lo son.

El campo de estudio de la Teoría de juegos es muy general y nosotros nos centraremos en el caso de los juegos con dos jugadores en los que, además, el jugador tomará una decisión antes de conocer como actuará su adversario. Se advierte además que en los problemas de nuestro estudio nos interesamos por el caso en el que alguno de los jugadores siempre gana y no se considera el caso de empate. Nuestro objetivo fundamental es analizar y encontrar, si las hay, estrategias ganadoras para alguno de los jugadores.

Definición. 1.4.
Una **estrategia** es el conjunto total de acciones que puede plantearse un jugador para participar en el juego. Se dice que es **ganadora** si le permite ganar todas las partidas sea cual sea la jugada del contrario, [5].

Se advierte que esto será siempre que los dos jugadores participen de manera ideal, o sea, que en todo momento ejecuten movimientos lógicos encaminados a alcanzar la victoria.

Cada jugador seguirá su propia estrategia para intentar ganar pero, en ocasiones, es difícil encontrar una estrategia ganadora para algún jugador. En el siguiente capítulo se propone una estrategia ganadora para determinados juegos.

2. Metodología de resolución de problemas

Son muchas las estrategias de resolución de problemas que se pueden emplear para enfrentarnos a determinados tipos de problemas de olimpiadas y que en un primer momento pueden parecer muy complicados, según se puede estudiar en el libro de Arthur Engel [4]. El presente trabajo se ocupa de dos de ellas: *el principio de invariancia* y *la técnica de coloración*.

2.1. Principio de Invarianza

El *Principio de Invarianza* es una técnica que consiste principalmente en buscar características que permanecen *invariantes* en un problema, es decir, aquellas que no varían en el desarrollo del proceso.

Se puede identificar el candidato a invariante del ejercicio respondiendo a las siguientes cuestiones:
¿qué estado es el mismo? ¿qué permanece constante?

Posteriormente, quedaría el trabajo de probar que efectivamente la característica es invariante. Todo este proceso facilitará bastante la resolución del problema inicial a tratar.

En Teoría de juegos, se aplica a aquellos juegos en los que se distingue un estado inicial, un conjunto de posibles pasos a seguir por el jugador y uno o varios estados finales, que son el tipo de juegos que trataremos. El estado de un juego varía en función de las jugadas que realicen los participantes en él.

Mostramos a continuación varios ejemplos en los que se podría aplicar esta estrategia, inspirados en [9]:

Ejemplo. 2.1.
En una pizarra hay 11 números escritos de los cuales seis son la cifra 0 y los cinco restantes son la cifra 1. Un turno consiste en elegir dos números cualesquiera de la pizarra, borrarlos y reemplazarlos por un 0 si los números eran iguales o por un 1 si eran distintos. Tras varios turnos, queda solo un número en la pizarra. ¿De qué número se trata?

Ejemplo. 2.2.
En una reunión de los diferentes representantes de la Unión Europea, cada participante tiene al menos tres enemigos. Probar que se puede separar en dos partes la mesa de la reunión de forma que cada participante tenga al menos un enemigo en cada parte.

Ejemplo. 2.3.
Una circunferencia se encuentra dividida en 2000 sectores. Hay 2001 saltamontes entre los sectores. Cada diez segundos, Dos saltamontes que coincidan en el mismo sector van a saltar a sectores vecinos opuestos cada minuto. Demostrar que habrá 1001 sectores libres en algún momento.

2.2. Técnica de coloración

Los problemas apropiados para el empleo de esta estrategia son aquellos que están relacionados con la partición de un conjunto en un número finito de subconjuntos. La partición se hace con la *coloración* de un mismo color a cada elemento del mismo subconjunto. Se emplea en la Teoría de juegos para juegos con tablero. En tales casos, la estrategia consiste en "colorear" el tablero de juego con una determinada coloración y, a partir de esto, deducir la estrategia ganadora del juego.

La coloración está muy ligada a otras técnicas como la paridad y la aritmética modular, sin embargo, la ventaja que introduce ésta es la posibilidad de no restringirse a trabajar sólo con números enteros.

En particular, se puede emplear en el caso de los juegos con tableros de ajedrez. En 1961, el físico británico M.E. Fisher resolvió un problema famoso y complejo que se enuncia como sigue:

Probar que un tablero de ajedrez de tamaño 8×8 puede ser cubierto por fichas de dominó cuyo tamaño es de 2×1.

Él probó empleando esta técnica que el tablero puede recubrirse de $2^4 \times 901^2$ o 12,998,816 formas diferentes, según Engel [4].

3. Evolución histórica de la teoría

Se considera que la disciplina de la **Teoría de Juegos** nace en 1944 con la publicación del artículo "Theory of Games and Economic Behariour" por parte de Von Neumann y Morgenstern. Esto ocurre pese a que había publicaciones previas de los matemáticos Zermelo (1913), Borel (1921) y del mismo Von Neumann (1928) que ya introducían las bases teóricas de la rama. De igual modo, son destacables los trabajos de economistas como Cournot (1838) y Edgeworth (1881) que fueron también pioneros.

Von Neumann y Morgenstern desarrollan la *"Teoría de Juegos clásica"*, una teoría consolidada que incorpora como casos particulares las contribuciones previas de los otros autores y que hace posible su posterior desarrollo. Esta teoría se ocupa de proporcionar una resolución para los juegos justos, también conocidos como juegos de suma cero, y establece los fundamentos para el análisis de juegos con más de dos jugadores.

Posteriormente y alrededor de los años cincuenta, Nash proporciona algunos de los conceptos más importantes como son el de *equilibrio de Nash* y *solución de negociación de Nash* para una variedad más amplia de juegos. Poco después, los investigadores Selten y Harsanyi extienden estos conceptos y esto permite la exitosa aplicación de la teoría de juegos a la economía y otras disciplinas.

En años recientes, la teoría de juegos ha conseguido gran apoyo académico tras haber conseguido el Premio Nobel de Economía algunos de sus pioneros y practicantes. En particular, nos referimos a Nash, Selten y Harsanyi en 1994 y a Vickrey y Mirlees en 1996.

No obstante, todavía se mantienen disputas sobre los fundamentos, metodología e importancia de esta disciplina y, sin embargo, sus métodos y conceptos se utilizan de forma frecuente y con éxito en diferentes campos como la economía, biología, psicología, sociología o la ciencia política. [1]

Capítulo II

Planteamiento y resolución de problemas

Ejercicio. 3.1.
Las canicas. *Se plantea el siguiente juego: hay dos jugadores y el objetivo es alcanzar una moneda que se encuentra en el último lugar de una cadena con 99 canicas colocadas sobre una mesa. Por turnos, cada jugador puede elegir coger entre una y cuatro canicas. Entonces, se irán cogiendo canicas de tal forma que el primer jugador que coja la moneda es el ganador. ¿Hay estrategia ganadora para alguno de los dos jugadores?*

Puntualizamos que la moneda se incluye en el número de canicas que se puede coger en un turno.

SOLUCIÓN.
En este juego participan dos jugadores y vamos a tratar de proponer una estrategia ganadora para alguno de ellos. Con este fin, se empieza por analizar el desarrollo del juego suponiendo que en la mesa hay menos canicas y luego trasladaremos la información a nuestro caso particular.

- Considerando inicialmente que tenemos entre 1, 2 o 3 canicas colocadas en la mesa además de la moneda, el primer jugador tiene la opción de coger todas las canicas. Entonces, le sería posible coger también la moneda y ganaría el juego.

- Al suponer que la mesa tiene 4 canicas más la moneda, se deduce que ganará el segundo jugador. Esto se debe a que independientemente de las canicas que elija coger el primero, el segundo jugador siempre podrá coger la moneda en su primera jugada siguiendo las reglas del juego.

- Si disponemos de 5 canicas más la moneda en la mesa, gana el primer jugador en su segundo turno si solo coge 1 canica en el primero.

- En el caso en el que haya 6 o 7 canicas junto a la moneda en la mesa, el primer jugador consigue la victoria simplemente cogiendo 2 o 3 canicas en su primera jugada, respectivamente.

- Con 8 canicas más la moneda, vuelve a tener estrategia ganadora el primer jugador eligiendo coger todas las canicas que le permite el juego en la primera jugada, es decir, cogiendo 4 canicas.

- Y si se dispone de 9 canicas más la moneda en la mesa, tiene estrategia ganadora el segundo jugador sin más que decidir coger $5-n$ canicas en el primer turno, siendo n el *número de canicas que elija el primer jugador*.

En definitiva, si k es el *número de canicas colocadas sobre la mesa* entonces con la estrategia desarrollada previamente ganará el primer jugador para $k = 1,2,3,5,6,7,8$ y vence el segundo jugador con $k = 4$ o $k = 9$.

Por ende, se deduce que si $k+1$ (número de canicas junto con la moneda) es múltiplo de 5, el segundo jugador gana la partida siguiendo la estrategia anterior, es decir, si el primer jugador coge n canicas el segundo deberá coger $5-n$, con $n \in \{1,2,3,4\}$.

Ahora bien, nuestro juego tenemos 99 canicas, $k = 99$, y como $k+1 = 100$ es múltiplo de 5, sabemos que el segundo jugador será el ganador si sigue la estrategia propuesta previamente.

□

Ejercicio. 3.2.
La libertad del condenado. *Un condenado queda en libertad cuando alcance el final de una escalera de 100 escalones. Pero no puede avanzar a su antojo, puesto que está obligado a subir un solo escalón cada día de los meses impares y a bajar un escalón cada día de los meses pares, según el calendario mensual. Comienza el 1 de enero de 2001. ¿Qué día quedará en libertad? ¿Qué día quedaría en libertad si la escalera tuviera 99 escalones?*

Referencia: Olimpiada Matemática Española. Año 2001. Fase Local.

SOLUCIÓN.
En primer lugar, es necesario indicar que se ha considerado la paridad de los meses según lo sea en el calendario anual, es decir, el mes de Enero lo consideramos como impar pues se trata del mes 1 en el calendario anual así que el condenado puede subir un escalón cada día durante este mes. Sin embargo, el mes de Febrero corresponde al mes 2 en el calendario luego el condenado está obligado a bajar un escalón cada día en este mes. Esta información se utiliza para saber si el condenado debe subir o bajar escalones en cada uno de los meses.

Para la resolución de este ejercicio, se ha de tener en cuenta además que existen determinados años que disponen de 1 día más, el 29 de Febrero. Esto es que se trata de un año bisiesto. Por tanto, cualquier año normal cuenta con 365 días y si el año es bisiesto contará con 366 días.

Notemos ahora que 2001 es un año no bisiesto y que los años bisiestos son 2000, 2004, 2008, 2012, 2016, 2020, 2024, 2028, 2032 y así sucesivamente cada 4 años.

A continuación, se indica una tabla que muestra el número de peldaños que el condenado avanzará (o en su caso retrocederá) en el año 2001 según el mes que esté transcurriendo. En la tercera columna, con "Posición" nos referimos al número de peldaños en el que el condenado se encontrará al final de cada mes.

Mes	Peldaños a avanzar	Posición
Enero	+31	31
Febrero	-28	3
Marzo	+31	34
Abril	-30	4
Mayo	+31	35
Junio	-30	5
Julio	+31	36
Agosto	-31	5
Septiembre	+30	35
Octubre	-31	4
Noviembre	+30	34
Diciembre	-31	3

Tabla II.1: El movimiento del condenado a través de la escalera

Como se puede observar atendiendo al final de la tabla, el condenado acabará en el tercer peldaño de la escalera a finales de 2001. Se deduce por tanto que el condenado sube 3 escalones por año siempre que el año no sea bisiesto. Si el año es bisiesto, durante el mes de febrero se bajarán 29 peldaños en lugar de 28 así que el condenado ascenderá en total 2 peldaños en estos años.

Notemos que el peldaño más alto que alcanza durante el primer año es el 36 y lo alcanza el 31 de julio. Es decir, el primer año se mueve entre los escalones 1 y 36.

De forma general, si un año acaba en el peldaño n, al año siguiente se moverá entre los peldaños $n+1$ y $n+36$ y acabará en el peldaño $n+3$. En cambio, si el año es bisiesto el condenado se mueve entre los peldaños $n+1$ y $n+35$ y acabará en el $n+2$.

Si el 1 de enero de 2001 está en el primer escalón, el 31 de diciembre de 2024 estará en el escalón 66 pues éste es el resultado de hallar el número de peldaños que asciende en total cada año: $20 \times 3 + 6 \times 2 = 66$.

Destacamos además que el 31 de julio de ese año, el condenado pasó por el punto más elevado siendo el escalón 99.

De aquí en adelante, el panorama respecto al **año 2025** es el siguiente:

El 31 de enero el condenado llega al escalón 97, el 28 de febrero termina en el escalón 69 y el **31 de marzo** por fin alcanza en el escalón 100.

Si la escalera hubiera tenido **un peldaño menos**, habría quedado en libertad el 31 de julio de 2024 tal como hemos mencionado antes. Esto se traduce en que el condenado hubiera sido libre **8 meses antes**. □

Ejercicio. 3.3.
Quédate con la última. *Ana y Bernardo juegan al siguiente juego. Se empieza con una bolsa que contiene $n \geq 1$ piedras. En turnos sucesivos y empezando por Ana, cada jugador puede hacer los siguientes movimientos: si el número de piedras en la bolsa es par, el jugador puede coger una sola piedra o la mitad de las piedras. Si el número de piedras en la bolsa es impar, tiene que coger una sola piedra. El objetivo del juego es coger la última piedra. Determina los valores de n para los que Ana tiene una estrategia ganadora.*

Referencia: Olimpiada Matemática Española. Año 2020. Fase Local.

SOLUCIÓN.
El juego del presente ejercicio que se ha titulado como “Quédate con la última” tiene a dos jugadores, Ana y Bernardo, y el objetivo es coger la última piedra de una bolsa con $n \geq 1$ piedras. Tal como se requiere en el enunciado, se estudia una estrategia ganadora de Ana para una serie de determinados valores de n.

- Caso $n = 1$: Es trivial que **Ana gana**. Dado que ella es la primera en jugar, obtiene la victoria pues en su turno cogerá la primera y única piedra que hay en la bolsa.
- Caso $n = 2$: Según las reglas del juego, con $n = 2$ Ana puede coger una sola piedra y Bernardo coge la otra que queda así que **Ana pierde** el juego.
- Casos $n = 3$: Por ser n impar, Ana tiene que coger 1 sola piedra luego quedarían dos piedras en la bolsa y es el turno de Bernardo. Entonces, si nos fijamos en el caso anterior se puede deducir que Bernardo pierde el juego y esto hace que **Ana obtenga la victoria**.
- Caso $n = 4$: Para este número de piedras tenemos dos opciones para Ana siguiendo las reglas del juego. En concreto, se tratarían de quitar 1 piedra de la bolsa o bien quitar $\frac{n}{2} = 2$ piedras. No obstante, para conseguir la victoria se opta por la segunda opción y, por tanto, quedarían otras 2 piedras en la bolsa pasando ahora a tener el turno Bernardo. Si repetimos ahora la estrategia del segundo caso, se concluye que **Ana gana** de nuevo.
- Caso $n = 5$: **Ana pierde** porque solo tiene la opción de elegir una piedra al ser n impar. En consecuencia, van a quedar 4 piedras en la bolsa para el turno de Bernardo así que si este jugador sigue la estrategia redactada anteriormente alcanzará la victoria.

- Caso $n = 6$: **Ana gana** si quita de la bolsa las 3 piedras correspondientes a la mitad de n y luego repite la estrategia ganadora del caso $n = 3$.
- Caso $n = 7$: En este caso, Ana solo tiene la opción de coger una piedra de la bolsa así que van a quedar 6 piedras en ella. Posteriormente, Bernardo tiene el turno para jugar y siguiendo la estrategia ganadora del caso $n = 6$ logra alcanzar la victoria luego **Ana pierde el juego**.

Una vez evaluados cada uno de estos primeros casos, vamos a generalizar la estrategia ganadora para los restantes valores de n.

Consideremos que la cantidad inicial de piedras es un número par y mayor que 4, entonces Ana puede coger una sola piedra obligando a Bernardo a coger solo otra (número impar de piedras en la bolsa). De este modo, Ana puede forzar a alcanzar una situación con 4 piedras en la bolsa en el momento de su turno y si mantiene el procedimiento anterior ganaría el juego (repitiendo la estrategia del cuarto caso).

Análogamente, si n es impar y mayor que 4 entonces Ana tendría que coger necesariamente una sola piedra al empezar el juego y esto le deja en una posición perdedora.

Por todo ello, podemos concluir que Ana puede ganar para $n = 1$, $n = 3$ o para todos los números pares mayores que 2.

□

Ejercicio. 3.4.
El juego justo. *Por turno, en orden alfabético, tres amigos lanzan un dado. Quien saque un 6 en primer lugar gana lo apostado.*

Por cada euro que apueste Carlos, ¿qué cantidad han de poner Ana y Blas para equilibrar el juego y lograr que sea equitativo, es decir, para que las expectativas de ganancia sean las mismas para los tres colegas y no se vean afectadas por el orden de actuación al lanzar el dado?

Referencia: Olimpiada Matemática Española. Año 2003. Fase local.

SOLUCIÓN.
Tal como vimos en el capítulo previo, todos los jugadores deberán tener igual probabilidad de ganar para que el juego sea equitativo. A continuación, vamos a hallar la probabilidad de ganar para cada uno de ellos apoyándonos en un diagrama de árbol.

Se definen los siguientes sucesos:

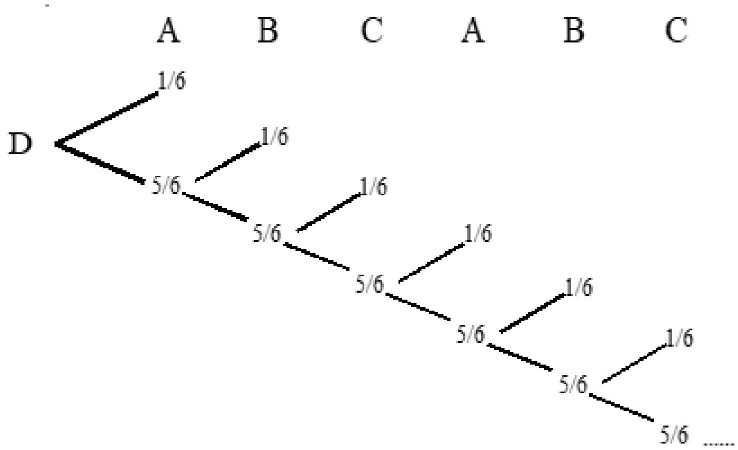
$A =$ *“ La jugadora Ana gana el juego ”*

$B =$ *“ El jugador Blas gana el juego ”*

$C =$ " *El jugador Carlos gana el juego* "

$D =$ " *Salir 6 al lanzar un dado* "

Considerando la siguiente probabilidad $P(D) = \dfrac{1}{6}$, el esquema en árbol que corresponde a este ejercicio es el siguiente:



Y, por tanto, las probabilidades son las siguientes:

$$P(A) = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^6 \frac{1}{6} + \ldots = \frac{1}{6}\left[1 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^6 + \ldots\right] = \frac{1}{6}\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{1}{6}\frac{6^3}{6^3-5^3} = \frac{36}{91}$$

$$P(B) = \frac{5}{6}\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^7 \frac{1}{6} + \ldots = \frac{5}{6}16\left[1 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^6 + \ldots\right] = \frac{5}{6^2}\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{5}{6^2}\frac{6^3}{6^3-5^3} = \frac{30}{91}$$

$$P(C) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^5 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^8 \frac{1}{6} + \ldots = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6}\left[1 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \ldots\right] = \frac{5^2}{6^3}\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{5^2}{6^3}\frac{6^3}{6^3-5^3} = \frac{25}{91}$$

Según estas probabilidades, Ana debería poner 36 € , Blas 30 € y Carlos 25 € por cada 91 € en juego para que el juego sea equitativo. Y en particular si Carlos pone 1 € para participar en el juego, Blas tiene que apostar 1,2 € y Ana 1,44 € .

□

Ejercicio. 3.5.
Dilema del prisionero. *La policía detiene a dos sospechosos de un delito encarcelándoles a cada uno en una celda diferente. No tienen suficientes pruebas para condenarlos y, por lo tanto, deciden interrogarles por separado. Cada uno de ellos va a ser cuestionado sobre la culpabilidad del otro y se les ofrece el mismo trato a ambos: si uno confiesa y su cómplice en cambio continúa sin hablar, su cómplice será condenado a la pena máxima (10 años) y él será puesto en libertad. Si el cómplice confiesa, pero él no, recibirá la pena máxima y su cómplice será liberado. Si ambos permanecen callados, ambos serán encerrados 6 meses por un cargo menor. En caso contrario, si ambos confiesan se les condenará a una pena de 6 años. ¿Cuál será la mejor opción para los sospechosos?*

Referencia: El artículo " Teoría de juegos y aplicaciones: El dilema del prisionero ", [3].

SOLUCIÓN.
Según la Real Academia Española, un *dilema* es una situación difícil en la que es necesario elegir entre dos opciones igualmente buenas o malas. En este caso, el prisionero tiene un dilema a resolver en su interrogatorio. Comencemos por examinar cada una de las diferentes posibilidades y sus consecuentes resultados.

En primer lugar, vamos a suponer que el principal objetivo para cada uno de los sospechosos es minimizar su pena, es decir, ambos son bastante egoístas y se preocupan principalmente por ellos mismos. Entonces, cada preso puede elegir entre dos opciones:

1. " *Colaborar* " con el otro sospechoso asegurando que el compañero es inocente y se encuentra de forma injusta en la cárcel.
2. " *Traicionar* " al otro sospechoso acusándole de haber realizado el delito.

Si alguno de los sospechosos confía en el otro y espera que colabore permaneciendo en silencio, la mejor opción para el primer sospechoso y aunque también la más egoísta sería traicionar al otro pues de tal forma conseguiría salir libre de la cárcel y "su cómplice" tendría que cumplir la pena máxima.

En caso contrario, si cuenta con que su cómplice le traicione su mejor opción sería confesar también pues así la pena sería de 6 años para ambos y se evita la pena máxima.

Por otro lado, si ambos toman la decisión de colaborar entre ellos deberían de cumplir la pena mínima que son 6 meses.

Lo ideal ahora es recoger toda esta información para que queden las diferentes opciones claras en una tabla:

	Sospechoso A colabora	**Sospechoso A traiciona**
Sospechoso B colabora	Ambos quedan condenados a 6 meses	B es condenado a 10 años A queda libre
Sospechoso B traiciona	A es condenado a 10 años B queda libre	Ambos quedan condenados a 6 años

Tabla II.2: Matriz del dilema del prisionero

Desde un punto de vista egoísta e individual, la mejor opción para el sospechoso es traicionar a su cómplice y confesar atendiendo a estos resultados, pues así se logrará reducir la pena independientemente de la decisión que su cómplice tome. No obstante, esta elección no es óptima pues si al final ambos deciden traicionar al otro recibirán una pena larga cada uno. Y esta es la clave del dilema del prisionero.

La elección que lleva al mejor resultado para ambos es que los dos prisioneros cooperen entre ellos. De esta forma, ambos cumplen la mínima pena posible y se obtendría así un resultado óptimo para ellos.

Cualquier otra decisión que se tome siguiendo intereses individuales va a empeorar el resultado de ambos como conjunto pues les llevará a tener que cumplir una sentencia más larga.

□

Ejercicio. 3.6.
El juego del pirata. *Un grupo de 12 piratas de edades diferentes se reparte 2022 monedas, de manera que cada pirata (salvo el más joven) tiene una moneda más que el siguiente más joven. A continuación, cada día se procede de la siguiente manera. Se escoge a un pirata que tenga al menos 11 monedas, y ese da una moneda a todos los demás. Encontrar el mayor número de monedas que un pirata puede llegar a tener.*

Referencia: Olimpiada Matemática Española. Año 2022. Fase Local.

SOLUCIÓN.
En este caso, tenemos un juego en el que participan 12 piratas que cuentan con un botín de 2022 monedas y deben repartirlo. Nuestro objetivo es hallar el número máximo de monedas que un pirata puede conseguir siguiendo las reglas del juego.

Para ello, analizamos cual será la mejor situación para un pirata.

Si se reparten las 2022 monedas del botín entre los 12 piratas, habrá una cierta cantidad de monedas restantes. Como hay 12 piratas y cada uno tiene una moneda más que el anterior (salvo el más joven), los posibles restos que se obtienen como resultado del reparto son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11.

Se deduce entonces que todos los posibles restos están en $mod 12$ y que, además, todos los restos aparecen en cada una de las iteraciones diarias pues siempre hay un pirata que pierde 11 monedas y que cumple

$$x - 11 \equiv x + 1 \; mod 12$$

siendo x la cantidad de monedas de las que dispone ese pirata y los otros 11 piratas suman 1 moneda por iteración.

Por tanto, si fijamos el último pirata destacamos que lo más favorable para él es encontrarse ante la siguiente situación: que el primer pirata tenga 0 monedas, que el segundo pirata tenga 1 moneda y así sucesivamente hasta que el penúltimo pirata tenga 10 monedas y que el último, es decir, que él se quede con el resto de las monedas. Este pirata se quedaría con las monedas que se obtengan como el resultado de la siguiente operación:

$$2022 - \sum_{i=0}^{10} i = 2022 - 55 = 1967 \tag{II.1}$$

Además, esta es una situación que puede ocurrir sin más que fijar al último pirata para que nunca le toque repartir a él e ir eligiendo un pirata diferente en cada turno entre los piratas que restan. Se debe seguir así el proceso hasta que todos los piratas hayan sido elegidos. Esta forma de proceder se puede continuar hasta que el último pirata consiga las 1967 monedas, que era nuestro objetivo.

Todo este desarrollo se puede repetir para cualquier pirata así que efectivamente el mayor número de monedas que puede llegar a tener un pirata son 1967 monedas.

□

Problemas relacionados con los tableros de ajedrez

Ejercicio. 3.7.
El caballo. *Suponiendo que en un tablero de ajedrez la figura del caballo se encuentra en una determinada posición y realiza 19 movimientos. ¿Podría entonces volver a su posición inicial?*

SOLUCIÓN.
Para empezar, recordemos que un tablero de ajedrez tiene dimensiones 8×8 por lo que cuenta con 64 casillas en total, de las cuales 32 son de color blanco y las otras 32 restantes de color negro.

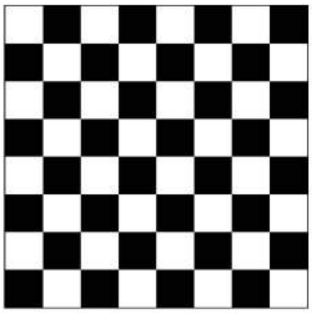


Figura II.1: Tablero de ajedrez básico

El movimiento del caballo sobre el tablero tiene forma de L. Mostramos a continuación los dos posibles desplazamientos de la figura sobre el tablero, atendiendo al color y las diferentes posiciones de partida:

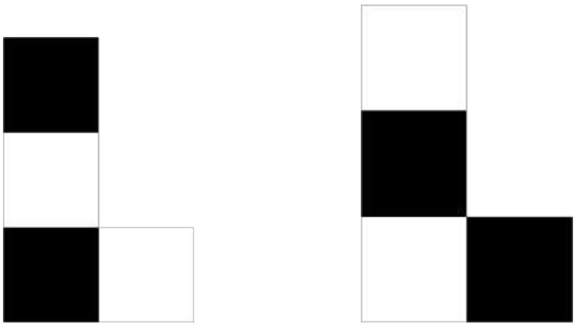


Figura II.2: Movimientos del caballo sobre un tablero de ajedrez
∗ Hemos considerado el movimiento vertical de la figura. El horizontal es análogo.

En la figura de la izquierda, el caballo parte desde una casilla de color negro y, por el contrario, la casilla de partida es de color blanco en la figura derecha. En cualquier caso, fijándonos en ambas figuras nos damos cuenta de que el movimiento ocupa en el tablero dos casillas de color blanco y dos casillas de color negro.

En cada movimiento, el caballo va desde una posición de un determinado color a otra posición de color contrario. Esto quiere decir que si el caballo empieza en una casilla blanca acabará en una casilla de color negro y al contrario.

Por tanto, es imposible que tras un número impar de movimientos (en este caso 19) el caballo vuelva a su posición inicial.

□

Ejercicio. 3.8.
El tablero mutilado. *A un tablero de ajedrez se le quitan dos casillas que están en esquinas opuestas. ¿Es posible rellenar las 62 casillas restantes con fichas de tamaño* 2×1*?*

SOLUCIÓN.
En este ejercicio, estamos ante un tablero de la forma:

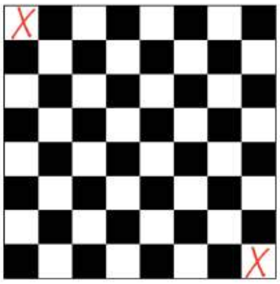


Figura II.3: Tablero de ajedrez sin las esquinas opuestas blancas

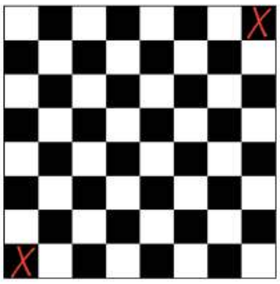


Figura II.4: Tablero de ajedrez sin las esquinas opuestas negras

Denotamos con la cruz roja a las esquinas que no se incluyen y queremos quitar del tablero. Cualquiera de las dos figuras anteriores son válidas ante esta situación.

Las fichas con las que buscamos recubrir el tablero son de tamaño 2×1 y, según la casilla en la que se encuentren, tomarán cualquiera de estas dos formas:

Figura II.5: Fichas de tamaño 2×1

Tal como se aprecia en la figura anterior, este tipo de fichas van a ocupar una casilla de cada color en el tablero, es decir, ocuparán una casilla de color blanco y otra de color negro.

Ahora bien, un tablero de ajedrez normal es de tamaño 8×8 luego tiene 64 casillas en total. De las cuales, 32 casillas son blancas y las 32 restantes son negras.

Si al tablero le quitamos dos esquinas que se encuentran en casillas opuestas, le estamos quitando dos casillas del mismo color tal como se refleja en la primera figura del ejercicio. Es decir, quitamos dos casillas de color blanco o dos de color negro.

Suponemos que se quitan dos casillas del color blanco. En tal caso, el tablero cuenta entonces con 32 casillas de color negro y 30 de color blancas.

Esto nos da la clave para dar respuesta a la pregunta del ejercicio. La respuesta es negativa: no será posible recubrir las 62 casillas del tablero con fichas de este tipo pues las fichas a recubrir tienen una casilla de cada color y, en cambio, el tablero tiene 32 casillas de color negro y 30 blancas así que se podrán recubrir 60 de las casillas con 30 fichas pero quedarán 2 casillas del mismo color sin ser recubiertas.

De forma análoga, se razona para el caso en el que se quitan dos esquinas de color negro en el tablero.

□

Ejercicio. 3.9.
El rectángulo del dinero. *Dos jugadores colocan de forma alternativa monedas sobre un tablero de ajedrez de* 644×644 *casillas. Gana el primer jugador que consiga poner una moneda que forme, con otras tres monedas del tablero, los vértices de un rectángulo de lados paralelos a los bordes del tablero. ¿Cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora?*

SOLUCIÓN.
Como el tablero de ajedrez del juego es de 644×644 casillas, nos vamos a centrar en particular en una parte del mismo. Es decir, los jugadores jugarán en un tablero de la siguiente forma:

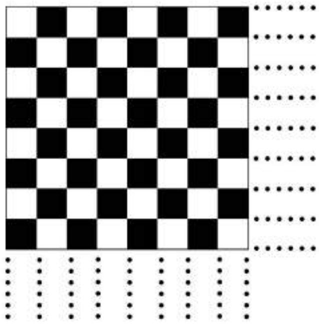
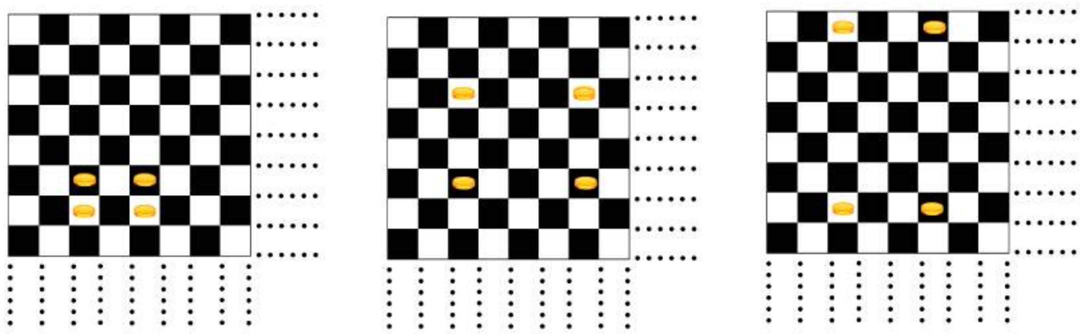


Figura II.6: Tablero de ajedrez tamaño 644 × 644
Los puntos suspensivos indican que el número de casillas continúa hasta alcanzar la casilla 644 en último lugar.

En primer lugar, advertimos que los rectángulos a los que alude el juego para conseguir la victoria ocupan como mínimo 6 casillas (con 4 casillas se tiene la figura de un cuadrado y con 5 la figura no sería un rectángulo) y, además por el requisito de que tengan lados paralelos a los bordes del tablero, no se pueden hacer rectángulos diagonales así que tendrán forma vertical u horizontal. Entonces, algunos de los rectángulos válidos para conseguir la victoria podrían ser los siguientes:



Tras pensar en el juego y realizar varias jugadas para los dos jugadores, se ha deducido que **el segundo jugador tiene una estrategia ganadora** para este juego.

La táctica de este jugador para alcanzar la victoria consiste en colocar su moneda en la columna en la que la que el primer jugador jugador haya puesto la suya en el turno previo y, además, esto repetirlo en cada jugada.

En consecuencia, ningún jugador podrá poner su moneda en una fila que ya contenga otra moneda pues en caso contrario, dejará al oponente en posición ganadora ya que podría completar un rectángulo de lados paralelos a los bordes del tablero.

Con esta estrategia, se va reduciendo el número de filas en las que se puede colocar la moneda en 2 unidades tras cada turno. Por tanto, tras 323 turnos (resultado de $\frac{644}{2} + 1$ al reducir las filas y completar el rectángulo) se habrá terminado seguro el juego pues reduciendo las filas, llegará el momento en el que indistintamente de donde coloque su moneda el primer jugador, el segundo jugador puede completar un rectángulo en las condiciones adecuadas del juego.

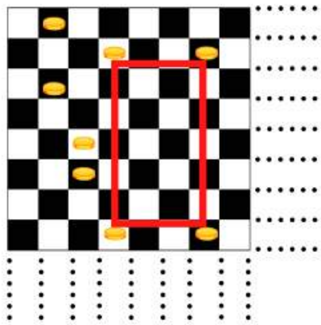
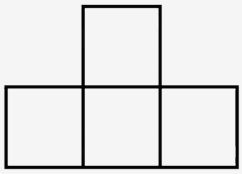


Figura II.7: Tablero con jugada ganadora

□

Ejercicio. 3.10.
Tetris. *Indica los valores de $n \in \mathbb{N}$ para los que sea posible completar una cuadrícula $n \times n$ con figuras de la forma:*



Referencia: Olimpiada Matemática Española. Año 1998. Fase Nacional.

SOLUCIÓN.
Este ejercicio es ya notablemente más difícil que los anteriores aunque la forma de trabajar para resolverlo sigue la misma línea. Analizamos en primer lugar los casos más simples.

Óbservese que el tamaño de la figura con la que pretendemos recubrir el tablero es 3×1, pues el dato será necesario en adelante.

- *Casos $n = 1$ y $n = 2$:*

  Es trivial que para estos valores de n no se puede recubrir el tablero con esta figura porque las dimensiones del tablero son inferiores a los que la figura posee. Concretamente, los tableros son de la siguiente forma:

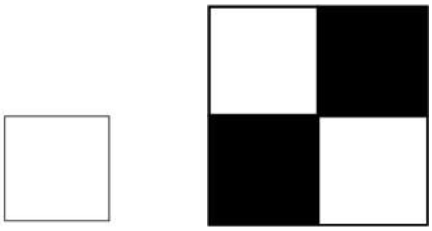


Figura II.8: Tablero de dimensiones 1×1 y 2×2

- *Caso $n = 3$:*

  La figura ya sí tiene espacio de cabida en el tablero pero descartamos también este valor de n dado que el tablero no puede ser completado con figuras de este tipo. Hemos colocado una de las figuras y quedaría de la siguiente forma:

Figura II.9: Tablero de dimensiones 3×3

  Tal como se aprecia en la figura, quedan 5 casillas libres y cada figura ocupa 4 casillas entonces el tablero no puede ser cubierto completamente. Pero además, otro motivo para descartar el valor $n = 4$ es que la forma que toman las casillas que quedan libres no se corresponde con la forma de la figura.

- *Caso $n = 4$:*

  En este caso se ve claramente que sí se puede realizar el recubrimiento. Prueba de ello es la forma de completarlo que se ve a simple vista en la siguiente figura:

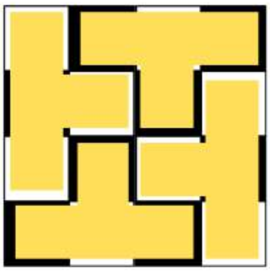


Figura II.10: Tablero de dimensiones 4×4

- *Caso n impar:*

  Por las propiedades de la paridad de los números, se sabe que si n es impar entonces n^2 es también número impar. Por consiguiente, va a resultar imposible rellenar la cuadrícula con figuras de la forma propuesta en el enunciado dado que el tablero cuenta con n^2 casillas a cubrir (número impar) y cada una de las fichas con las que pretendemos cubrirlo ocupa 4 casillas (número par).

  Analicemos ahora el problema para los valores pares de n.

- *Caso $n = 6$:*

  Tenemos ahora un tablero de dimensiones 6×6 con 36 casillas de las cuales 18 son de color blanco y otras 18 de color negro. El objetivo es recubrirlas con figuras que ocupan 4 casillas cada una así que se precisan 9 figuras para ello. Veamos qué ocurre:

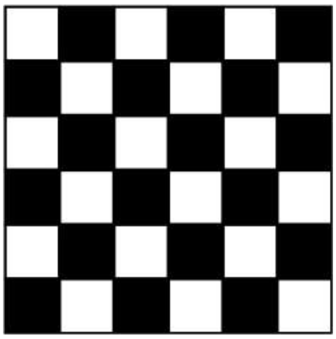


Figura II.11: Tablero de dimensiones 6×6

  La figura II.11 muestra el tablero sobre el que se trabaja en esta ocasión. La idea aquí es que la figura tiene 3 casillas de un color y una casilla de otro. Supongamos que son 3 casillas de color blanco y 1 de color negro. Entonces, como son necesarias 9 figuras de este tipo se tendrían para cubrir 27 casillas de color blanco y 9 casillas de color negro que no son las características del tablero así que para el valor $n = 6$ no se puede completar la cuadrícula.

- *Caso $n = 8$:*

  La estrategia ahora es dividir el tablero de dimensiones 8×8 en diferentes subtableros de 4×4, aplicar lo que se ha visto para el caso $n = 4$ y entonces sí que se puede recubrir el tablero. Quedaría de la siguiente manera los distintos subtableros:

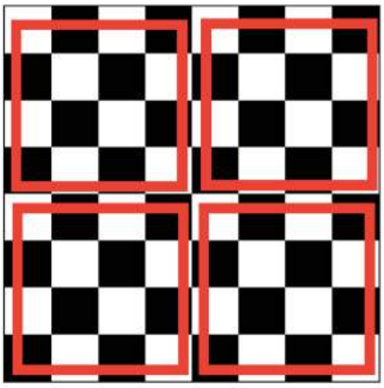


Figura II.12: Subdivisiones del tablero de dimensiones 8×8

Tras todo este desarrollo se llega a la siguiente conclusión:

Si en general n es un múltiplo de 4, podríamos dividir el tablero en subtableros de tamaño 4×4 para recubrirlos tal como se muestra la figura II. 12.

Sin embargo, para los valores de n pares y no múltiplos de 4 (es decir, para los números 6,10,14,etc.) el desarrollo no sirve. Se estudia entonces ahora la resolución del problema en estos casos de forma distinta.

Supongamos que sí podemos completar el tablero $n \times n$ con estas figuras para estos casos. El tablero es de la forma:

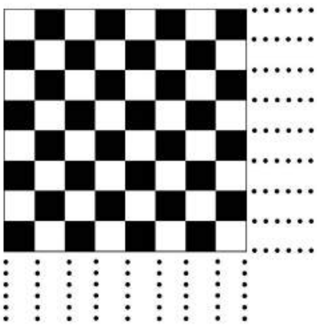
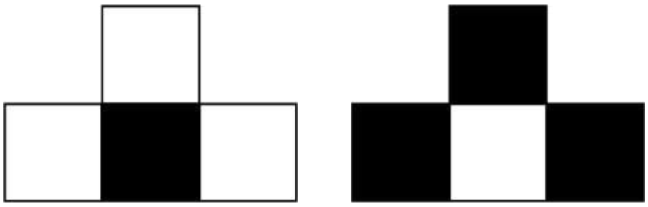


Figura II.13: Tablero de ajedrez tamaño $n \times n$

Los puntos suspensivos indican que el número de casillas continúa hasta alcanzar la casilla n en último lugar.

La figura del enunciado puede ser de las siguientes dos formas en un tablero de ajedrez:



Todas las piezas con las que se completan el tablero ocupan 3 casillas de color negro y una blanca o bien 3 casillas de color blanco y una de color negro. Esto nos lleva a plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en el que x se corresponde con el número de casillas ocupadas de color blanco e y con el número de casillas ocupadas de color negro.

$$\left.\begin{aligned} 3x + y &= \frac{n^2}{2} \\ x + 3y &= \frac{n^2}{2} \end{aligned}\right\} (1)$$

Tras su resolución, obtenemos que los números de casillas ocupadas son los siguientes:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{n^2}{8} \\ y &= \frac{n^2}{8} \end{aligned}\right\} (2)$$

Ahora bien, estábamos en el caso n par y no múltiplo de 4 así que, por *el Teorema Fundamental de la Aritmética*, se tiene que las descomposiciones en factores primos de n y n^2 serían de la forma:

$$n = 2^1 p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

$$n^2 = 2^2 p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_k^{2\alpha_k}$$

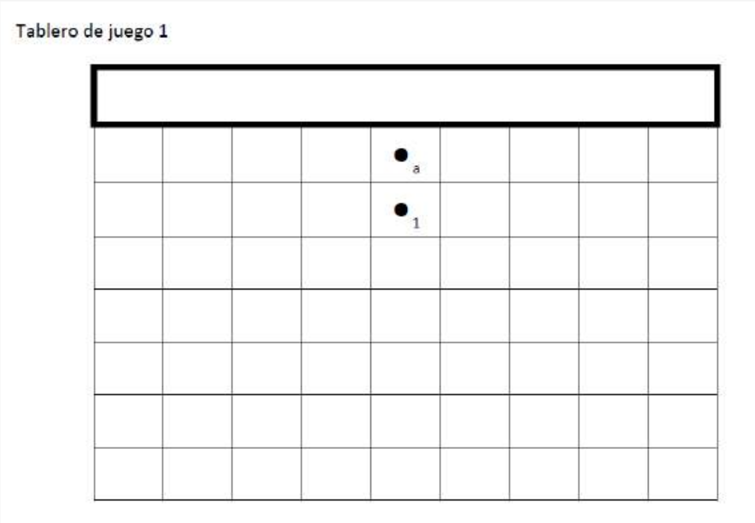
Esta última igualdad implica que n^2 no es múltiplo de 8 pero entonces por (2), se tendría que x e y no son números enteros. ¡Contradicción! (x e y son números enteros por definición)

Así que esto nos lleva a confirmar que no se puede recubrir el tablero para los valores de n pares y no múltiplos de 4.

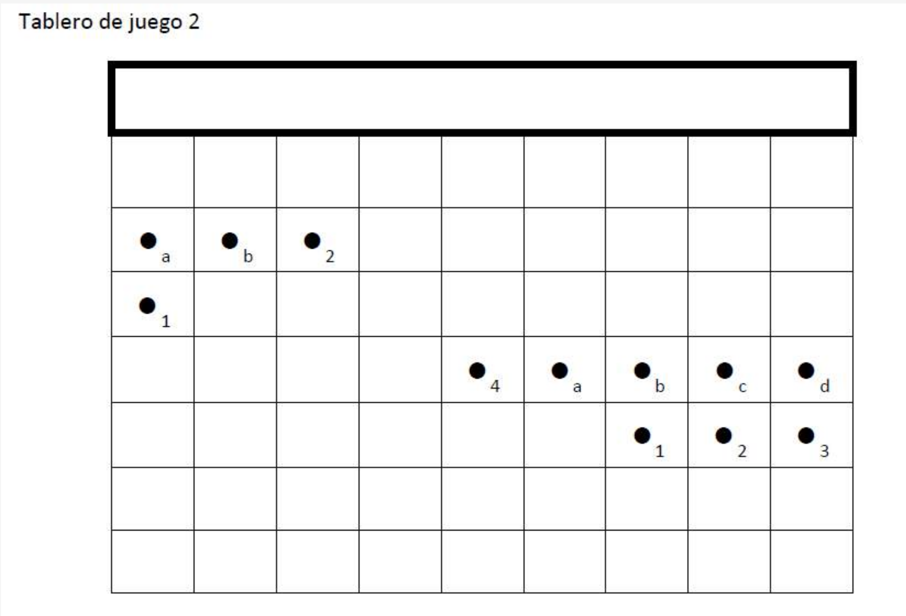
En conclusión, el tablero se puede completar solo para los **valores de** n que **sean pares y múltiplos de 4.**

□

Ejercicio. 3.11.
Las configuraciones. *El juego consiste en llevar una pieza a la región superior. Los movimientos permitidos son sólo sobre una pieza en el tablero siguiendo líneas horizontales o verticales. Por ejemplo la pieza (2) puede saltar sobre la pieza (1) para llegar a la región superior. Observa que no todas las piezas pueden estar en la fila superior.*



Si disponemos de piezas situadas en las filas 2^a, 3^a, etc., y no en la primera, ¿será posible, en algún caso alcanzar la región superior? La respuestas es sí; incluso para piezas situadas sólo en las filas 3^a, 4^a, etc.



En la configuración de la izquierda primero actúa la pieza (1), y después la pieza (2) dos veces. En la configuración de la derecha primero actúan las piezas (1), (2) y (3), y después la pieza (4) para llegar a la configuración de la izquierda.

Surge entonces el siguiente problema: ¿podemos dejar vacía también la 4^a fila?

SOLUCIÓN.
Vamos a dar peso a las diferentes casillas. Se comienza por la que ocupa la pieza sobre la que hay que saltar para llegar a la región superior, y seguimos asignando pesos a las casillas que tienen un lado común con las asignadas. El primer peso es p; el segundo es p^2, y se asigna a tres casillas; el tercero es p^3, y se asigna a cinco casillas, etc. Observar la siguiente figura:

Tablero de juego 3

p^5	p^4	p^3	p^2	p	p^2	p^3	p^4	p^5
p^6	p^5	p^4	p^3	p^2	p^3	p^4	p^5	p^6
	p^6	p^5	p^4	p^3	p^4	p^5	p^6	
		p^6	p^5	p^4	p^5	p^6		
			p^6	p^5	p^6			
				p^6				

Por tanto, para alcanzar la región superior basta tomar una pieza p^2 y pasar sobre la pieza p. Supongamos que este movimiento lo representamos por $p+p^2$. Si partimos de una pieza de la fila 3, con la configuración izquierda anterior. Hemos marcado en rojas las casillas de esta configuración, tenemos la siguiente sucesión de manera que los movimientos son p^3+p^2 y p^4+p^3 la suma es: $p^2+3p^3+p^4$.

Tablero de juego 4

p^5	p^4	p^3	p^2	p	p^2	p^3	p^4	p^5
p^6	p^5	p^4	p^3	p^2	p^3	p^4	p^5	p^6
	p^6	p^5	p^4	p^3	p^4	p^5	p^6	
		p^6	p^5	p^4	p^5	p^6		
			p^6	p^5	p^6			
				p^6				

Supongamos ahora que se tiene $p+p^2=1$ entonces $p^2+p^3=p$, y $p^3+p^4=p^4$, con lo que la suma anterior es $p+p^2=1$. Esta regla es válida para todas las situaciones alcanzando la región superior cuando la suma (en el orden adecuado) es igual a 1. De forma análoga se tiene el resultado en el caso de la configuración derecha.

Si no disponemos de piezas en las filas 1, 2 y 3, todas las piezas están en la filas 4 y superiores, por lo que, después de un número dado de movimientos la cantidad alcanzada será del tipo siguiente:

$$p^4+a_5p^5+a_6p^6+a_7p^7+\cdots$$

con $a_3 \leq 3$, $a_6 \leq 5$, $a_7 \leq 7, \ldots$ (siendo el número de casillas con cada uno de los pesos). Por lo tanto tenemos la siguiente acotación:

$$\begin{aligned}
p^4+a_5p^5+a_6p^6+a_7p^7+\cdots &\leq p^4(1+3p+5p^2+7p^3+\cdots)\\
&= p^4(1+p+p^2+\cdots)+2p^5(1+2p+4p^2+\cdots)\\
&= p^4\left(\frac{1}{1-p}\right)+2p^5\left(\frac{1}{1-2p}\right)\\
&= p^4\left(\frac{1}{1-p}+2p\frac{1}{1-2p}\right)\\
&= p^4\frac{1-2p-2p(1-p)}{(1-p)(1-2p)}\\
&= p^4\frac{1-2p^2}{(1-p)(1-2p)} = p^4\frac{1-2p^2}{p^2(1-2p)} \leq p^4\frac{1}{p^2} = p^2.
\end{aligned}$$

Pues $1-2p^2 < 1-2p$.

Como p verifica $p+p^2=1$, resulta que es una raíz de la ecuación $X^2+X-1=0$. Por tanto, $p=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ y tomamos la solución positiva $p = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

□

Ejercicio. 3.12.
Tablero infinito. *Sobre un tablero de ajedrez infinito, tenemos n^2 piezas de forma que cada pieza está situada en una casilla diferente, todas las casillas son adyacentes y que se forma un bloque de tamaño $n \times n$. Los movimientos permitidos en el juego son saltos en dirección horizontal y vertical siempre que sea sobre una casilla adyacente ocupada y que la casilla a la que se llegue esté libre. Cada salto elimina la pieza sobre la que se ha saltado. ¿Para qué valores de n con $n \in \mathbb{N}$ se acaba el juego con una sola pieza en el tablero?*

Referencia: Olimpiada Matemática Internacional. Istambul, Turquía. Año 1993. [6]

SOLUCIÓN.
Estamos ahora ante un juego de fase internacional tratándose del ejercicio con mayor dificultad planteado en este proyecto. El tablero en este caso es de dimensiones infinitas así que sería de la forma:

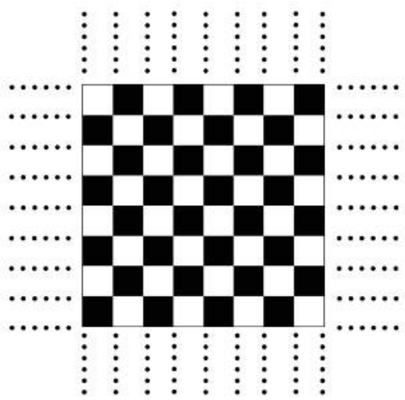


Figura II.14: Tablero con dimensiones infinitas

Debemos considerar bloques de tamaño $n \times n$ cubiertos cada casilla por una pieza. Para ello, empezaremos pensando primero la situación en los casos más simples de n.

- Para $n = 1$, es trivial pues directamente hay una pieza en el tablero. Por tanto, se considera este valor. En adelante, se consideran que las piezas o fichas del juego son monedas.

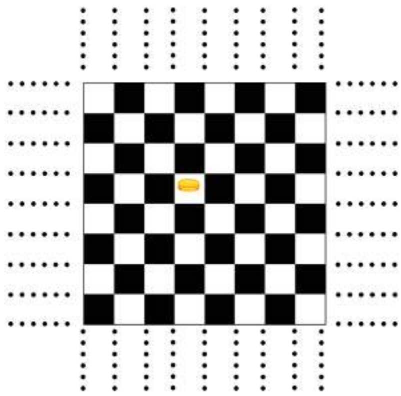
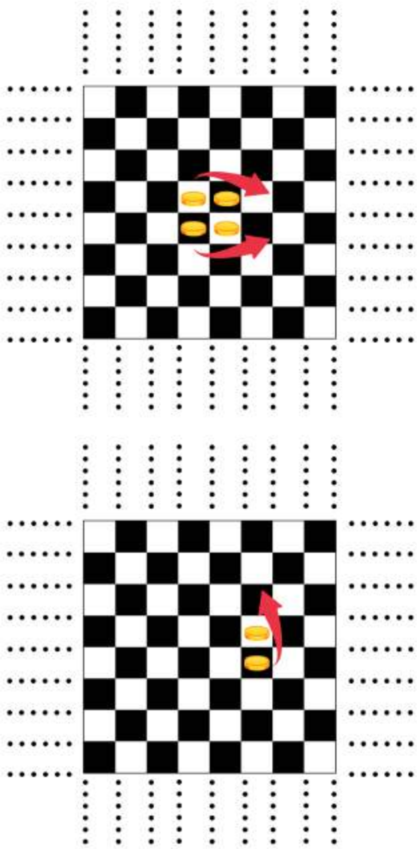


Figura II.15: Tablero 1×1

- Para $n = 2$, tendríamos un bloque de dimensiones 2×2 cubierto con 4 fichas. El objetivo es acabar con solo 1 ficha en el tablero así que si hacemos primero los dos movimientos horizontales que se permiten (indiferentemente hacia la derecha o izquierda) y luego se realiza un movimiento vertical, se consigue lo que buscamos. Esto es que el tablero infinito acabará teniendo 1 sola ficha sobre él así que estamos entonces ante las condiciones requeridas por el juego y se considera $n = 2$ como un valor válido también. Las siguientes figuras muestran los movimientos que acabamos de mencionar.



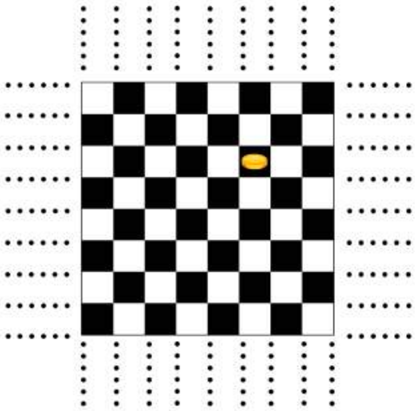
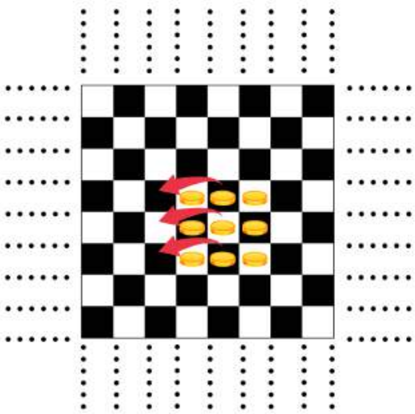
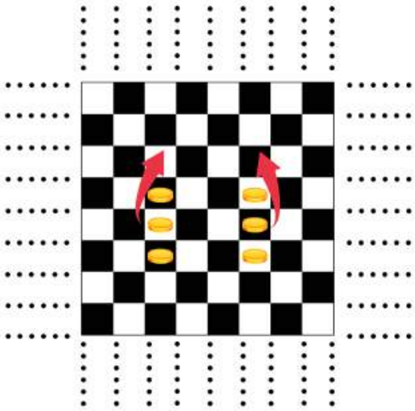


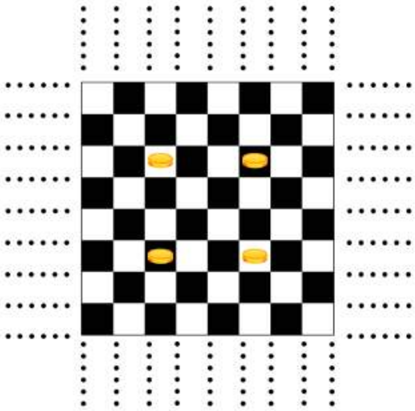
Figura II.16: Movimientos del tablero para el caso $n = 2$

- Para $n = 3$, no se puede conseguir el objetivo de dejar el tablero con una sola ficha. En esta situación, hacemos los 3 movimientos horizontales permitidos hacia el exterior del tablero. Se elige si el lado derecho o izquierdo de forma indiferente y se hacen todos en el mismo sentido. A continuación, se realizan los movimientos verticales permitidos por el juego y quedan al final 4 fichas en el tablero completamente separadas así que no se pueden realizar más movimientos y no hemos acabado en las condiciones que se buscaba. Descartamos la consideración de este valor.

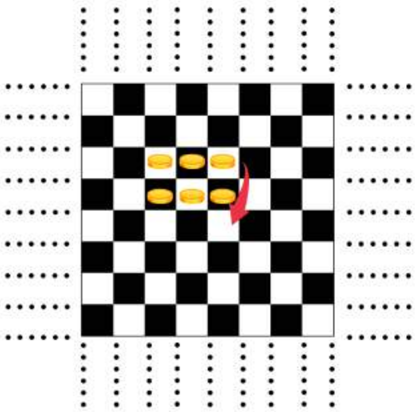
  Los movimientos que se han mencionado previamente se muestran a continuación en las siguientes figuras:

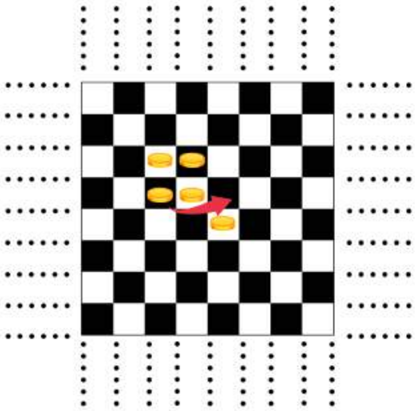


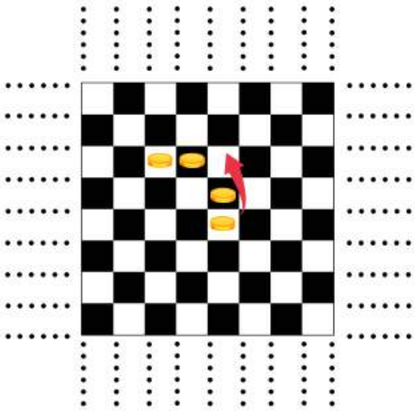


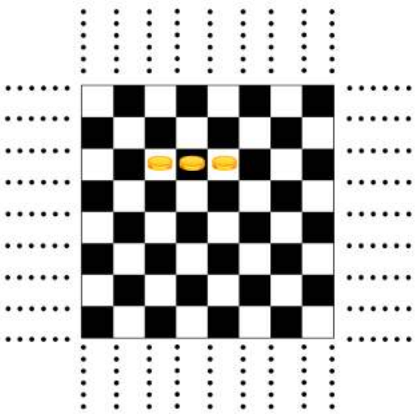


- Para $n = 4$, el tablero ahora es de dimensiones 4×4 y la técnica clave aquí es eliminar tres de las fichas adyacentes de los bordes con estos tres movimientos siempre que los movimientos estén permitidos para luego aplicar la estrategia del caso $n = 2$. Los movimientos nuevos que hemos mencionados se ven de forma más clara en las siguientes figuras:









Hemos visto hasta ahora que el juego acaba con una sola ficha en el tablero si $n = 1$, $n = 2$ o $n = 4$ y deducimos por tanto que si n no es múltiplo de 3 también se acabará el juego en las condiciones deseadas sin más que generalizar las estrategias vistas anteriormente. Analicemos ahora los valores de n múltiplos de 3.

Para estudiar estos casos, hacemos uso de la técnica de coloraciones considerando tres colores: rojo, azul y amarillo. Entonces el tablero $n \times n$ queda con esta coloración de la siguiente forma:

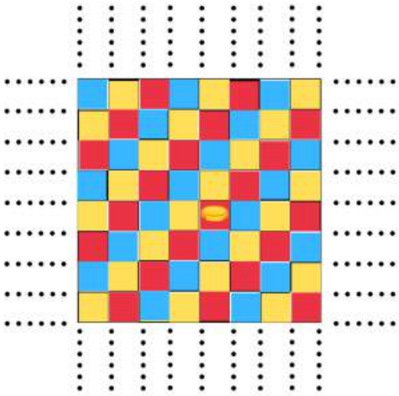


Figura II.17: Tablero $n \times n$

Supongamos que la única ficha del tablero está en una casilla de color rojo. Denotamos por x al número de movimientos sobre una casilla roja, y al número de movimientos sobre una casilla amarilla y z el número de movimientos sobre una casilla azul. Entonces, un movimiento hacia una casilla roja incrementa la cifra de fichas en las casillas rojas en 1 unidad, reduce el número de fichas en las casillas blancas también en 1 unidad y disminuye la cantidad de fichas en las casillas azules en 1 unidad.

Ahora bien, sea $n = 3t$ entonces existen t piezas inicialmente en las casillas rojas, t en las azules y t en las amarillas. Por tanto, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} -x+y+z=t-1 \\ x-y+z=t \\ x+y-z=t \end{array}\right\}$$

Si se resuelve, la solución del sistema es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x=t \\ y=t-\dfrac{1}{2} \\ z=t-\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$

Pero el número de movimientos es un número entero así que hemos llegado a una contradicción. Por tanto, deducimos que si n es múltiplo de 3 no se puede acabar el tablero teniendo sobre él una sola ficha.

En conclusión, el juego acabará con una sola ficha en el tablero siempre que **n no sea múltiplo de 3.**

$\square$

Capítulo III

Análisis crítico de los problemas

Esta sección se ocupa de analizar de forma crítica cada uno de los problemas propuestos anteriormente a partir de su enunciado y resolución. Para ello, se incorporan los resultados observados al exponerlos en las clases preparatorias de las Olimpiadas Matemáticas impartidas en la Universidad de Granada.

Los problemas propuestos se encuentran ordenados de menor a mayor dificultad según la propia experiencia con los estudiantes en las sesiones impartidas. El número de alumnos que asistieron a estas clases fue aproximadamente 15 y lo hacían en su mayoría presencialmente, aunque también acudieron de forma online determinados estudiantes.

Ejercicio. 3.1. ***Las canicas.***

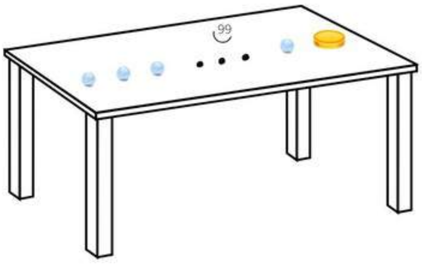
Este juego tiene como fuente de inspiración los juegos conocidos como "Juegos de Nim" que se encuentran desarrollados en el libro de Engel, [4], y en el de J. Deulofeu, [5].

Se trata del primer ejercicio que se le plantea a los alumnos sobre Teoría de Juegos así que, en un principio, se observa la predisposición del grupo a resolver el ejercicio empleando un método de resolución por tanteo o lo que vulgarmente conocemos como "la cuenta de la vieja".

Tras darle una explicación de los conceptos teóricos que se van a utilizar sobre la Teoría de Juegos, los estudiantes tratan ya de desarrollar una estrategia de forma genérica pero en su mayoría no obtienen resultados convincentes todavía.

Un alumno propone coger un número par o impar de las monedas y ver así que jugador gana. El inconveniente es que de esta forma no es posible determinar una estrategia ganadora.

Es más fácil para el alumno visualizar la situación del ejercicio así que se representa a través de la siguiente imagen:



Tras ello, la opción que otro alumno aporta es considerar de forma conjunta el número de canicas más la moneda a coger sobre la mesa pues así le resulta más fácil obtener la estrategia. Esto es considerar k como el número total de objetos a coger. Esta es otra forma diferente para resolver el ejercicio a lo planteado en el ejercicio 3.1.

En general, el ejercicio supone una primera toma de contacto con la Teoría de Juegos y tiene el nivel adecuado para ello.

Para añadir un poco de dificultad al problema, se les plantea ahora lo siguiente:

¿Habría estrategia ganadora si hubiesen ahora 95 canicas más la moneda sobre la mesa en lugar de 99? Analice la situación en tal caso.

Nos damos cuenta que en la estrategia del caso anterior, siempre se cogen 5 objetos en total por cada ronda. Por tanto, se da como pista utilizar este dato para responder a la pregunta.

Anticipamos que el resultado en este caso sería que gana el primer jugador pues si en cada ronda se van cogiendo 5 objetos de la mesa, llegará en el momento en el que solo queden 6 sobre la mesa y entonces ganará el juego el primer jugador si sigue la estrategia desarrollada en la resolución.

Ejercicio. 3.2. *La libertad del condenado*.

Tras las sesiones preparativas de las olimpiadas, advertimos que el enunciado del ejercicio puede dar lugar a una confusión en su posible interpretación en lo que a paridad concierne: paridad en referencia al número de días que tiene cada mes o a la posición en que se encuentra cada mes según el calendario anual.

Tal como ya indicamos en la solución II del capítulo II, se considera en este juego la paridad según la posición en el que se encuentre cada mes en el calendario para conocer si el condenado debe subir o bajar escalones durante un determinado mes.

No obstante, el problema podría complicarse si se considera la otra posibilidad puesto que algunos de los estudiantes no recuerdan completamente el número de días que contiene cada uno de los meses así que es necesario recordarlo. Se propone como regla mnemotécnica el "truco de los meses con los nudillos" que suele ser enseñado en la Enseñanza Primaria.

Para afrontar esta posible dificultad de nuestro alumnado, durante la resolución del ejercicio se proporciona una tabla de la siguiente forma:

Mes	Número de días
Enero	31
Febrero	28$*$
Marzo	31
Abril	30
Mayo	31
Junio	30
Julio	31
Agosto	31
Septiembre	30
Octubre	31
Noviembre	30
Diciembre	31

Tabla III.1: Recordatorio del número de días en cada mes.
$*$ *El mes de febrero tendrá 29 días si el año es bisiesto.*

Los estudiantes aspirantes a participar en las Olimpiadas fueron capaces en general de averiguar la fecha de salida del condenado haciendo sus propios cálculos y dejándoles el suficiente tiempo en la sesión. La experiencia observada en la misma es que algunos se frustran con las cuentas y empiezan a decir fechas al azar pero por eso es importante guiarlos. De hecho, se fueron dando distintas pistas en determinados momentos durante la resolución del ejercicio.

Los errores más comunes que se han encontrado en este juego han sido equivocaciones en los cálculos, aunque también hubo algún alumno despistado que no recordó tener en cuenta los años bisiestos. Se indican a continuación algunos de los errores de cálculos observados:

- Error al tratar de hallar el peldaño más alto al que se sube en un año.
- Error en cálculo de la fecha en el que se alcanza el peldaño 66.
- Error al tratar de hallar el número de peldaños a subir por año.

Otro error detectado ha sido que una alumna calcula que el condenado alcanza los 99 escalones en diciembre del año 2035 y propone esta fecha. Esto significa que en el 31 de diciembre el condenado estará en su penúltimo peldaño y ya el 1 de enero alcanza el peldaño 100 y queda en libertad. Sin embargo, lo que buscamos en este caso es que alcance ese peldaño lo antes posible en lugar de que lo alcance a final de año así que descartamos esta resolución.

“La libertad del condenado” es otro de los ejercicios de primera toma de contacto y entrenamiento sobre Teoría de Juegos así que se trata de un nivel adecuado a ello, el cual podríamos clasificar como bajo en relación al resto de ejercicios que se presentan a continuación. Sin duda, la mayor dificultad que ha presentado el ejercicio para ellos ha sido la redacción formal de la solución hallada.

No obstante, la segunda pregunta del enunciado aumenta un poco el nivel del ejercicio y ayuda a demostrar que realmente se ha entendido y desarrollado bien la estrategia del juego.

Ejercicio. 3.3. *Quédate con la última.*

El enunciado de este juego no queda completamente claro para todos los estudiantes. Es necesario puntualizar la referencia a “la mitad del número de piedras” planteada pues les queda en duda. Para ello, se proporcionan los siguientes ejemplos:

- Para $n = 6$, Ana podrá elegir entre coger 1 o 3 piedras de la bolsa. Esto es porque en este caso n es un número par así que se podra sacar 1 piedra o bien la cifra que resulte de hallar mitad de n, es decir, la mitad de 6 que es 3.
- Para $n = 8$, Ana podrá escoger sacar 1 o 4 piedras de la bolsa. Se piensa de forma análoga al caso anterior calculando ahora la mitad de 8 que resulta 4.

Este ejercicio es similar al juego de “Las canicas” del primer enunciado pero elevando un poco la dificultad. En este caso no se permite un coger un número que se quiera de canicas o piedras si no que se introducen restricciones para ello. Las dificultades vienen dadas a la hora de coger los objetos, que serán tener en cuenta la paridad del número total de objetos, en este caso, piedras a coger. Obsérvese que además la característica de la paridad ha sido trabajada en el ejercicio previo. Por tanto, este es un buen juego para reforzar los dos anteriores.

Tras plantear este ejercicio en las clases, se aprecian expresiones faciales un tanto peculiares. En su mayoría, tratan de hallar la estrategia ganadora por fuerza bruta, es decir, hallarla en sus apuntes paso por paso con meros cálculos pero se les complica redactar la solución o estrategia final que conduce a la victoria del juego.

De hecho, las soluciones que aportan los alumnos al principio son un poco caóticas así que se decide dar la siguiente indicación: “Resolver el problema por pasos”, es decir, considerando diferentes valores simples de n, tratar de pensar en la estrategia y luego buscar su generalización.

No obtante, hay algún alumno que sí redacta la estrategia bien desde el principio pues tiene ya experiencia dado que lleva acudiendo a estas sesiones algunos años.

Un chico piensa como estrategia ganadora elegir los valores de n que sean potencias de 2, lo cual es correcto pero se le indica que debe encontrar la solución menos restrictiva. La estrategia propuesta por el alumno es una extensión de la elección de los números pares que indicamos en la resolución de este trabajo.

En cuanto al nivel del juego, podríamos señalar que se trata de un juego de nivel medio que se adapta al nivel y experiencia que ya han adquirido los alumnos durante las sesiones preparatorias.

Además, destacamos la motivación hacia el juego que mostraron los estudiantes pues se trata de un juego que pueden contar y jugar con amigos al salir a la calle y querían hacer uso de la estrategia que ellos mismos habían desarrollado. También se trata de un juego similar al popular juego de "chinas" y que aparece en la éxitosa serie del momento "El juego del calamar".

Ejercicio. 3.4. *El juego justo.*

Según el enunciado, el objetivo del problema en estas condiciones es lograr que el juego sea equitativo. Se ha planteado este ejercicio pues pensamos que se trata de un concepto útil para conocer y que les será de seguro aplicación en su día a día para evitar que sean engañados. De tal modo, este problema supone una preparación tanto para la competición matemática como para la vida real.

A los niños les cuesta empezar el juego pues cuando se les presenta o bien aún no han dado el bloque de probabilidad o no se acuerdan de otros años. Esto refleja que se debería prestar más atención al bloque durante la etapa de la Enseñanza Secundaria y conduce a un punto de reflexión en el currículo matemático.

Para solucionar la situación y resolver las dificultades conceptuales, se realizó durante la sesión preparatoria un breve recordatorio para algunos o introducción para otros de los conceptos básicos de la probabilidad que se emplean en el ejercicio.

Con el fin de conducir a los alumnos en el proceso de resolución del problema, se plantea pensar en quién será el ganador en tan solo una partida y ver qué ocurrirá luego si se juegan más partidas.

Además, se emplea el concepto de serie geométrica en la resolución por lo que es necesario explicar el concepto de serie que no han visto hasta el momento y repasarlo haciendo diferentes ejemplos. Se explica tanto las series aritméticas como las geométricas.

La mayor dificultad que presenta este ejercicio viene dada quizás por este concepto. De hecho, podríamos clasificar el ejercicio como un ejercicio de nivel medio por los diferentes conceptos que son necesarios utilizar. No obstante, parecen haber sido todos comprendidos correctamente una vez que son explicados.

Como apartado adicional y para corroborar que efectivamente el juego es justo, se calculan las esperanzas de ganar el juego para cada uno de los jugadores y se comprueban que son nulas. Para ello, definimos las siguientes variables que corresponden al beneficio de cada uno de los jugadores:

$x_A =$ " *Beneficio que Ana obtiene con el juego* "

$x_B =$ " *Beneficio que Blas obtiene con el juego* "

$x_C =$ " *Beneficio que Carlos obtiene con el juego* "

Para todos los jugadores, solo existen dos opciones en el juego: ganar o perder. Por tanto, la variable *"Beneficio"* solo podrá tomar dos posibles valores. Veamos cuáles son los valores en cada caso así como sus probabilidades.

Para la jugadora Ana, su beneficio si gana será de 2,2 € que es resultado de sumar lo que Blas y Carlos apuestan, es decir, el resultado de la suma $1€ + 1,20€$. En caso contrario, si Ana pierde tendrá un beneficio en negativo de -1,44 € pues en estas condiciones pierde la cantidad apostada. Por tanto, tenemos dos posibilidades:
$x_A = 2,2€$ o $x_A = -1,44€$.

Si nos fijamos ahora en las probabilidades que tenemos ya halladas en la resolución 3.4., se obtiene que la esperanza efectivamente es nula:

$$E(x_A) = 2,2\frac{36}{91} - 1,44\frac{55}{91} = 0$$

De forma análoga, para el jugador Blas se obtiene que su beneficio puede ser los valores $x_B = 2,44€$ o $x_B = -1,20€$. Y por tanto, la esperanza para la variable de su beneficio, que también es nula, se obtiene así:

$$E(x_B) = 2,44\frac{30}{91} - 1,2\frac{61}{91} = 0$$

Y por último, procedemos de igual modo para hallar la esperanza de Carlos y se obtiene que la variable que corresponde al beneficio de Carlos alcanza el valor $x_B = +2,64€$ si Carlos gana o bien $x_C = -1€$ si pierde. Por tanto,

$$E(x_C) = 2,64\frac{25}{91} - 1\frac{66}{91} = 0$$

Para concluir, confirmamos que el juego propuesto es equitativo pues las expectativas de ganancia para los tres jugadores coinciden y son además nulas.

Ejercicio. 3.5. *El dilema del prisionero.*

El problema del *"Dilema del Prisionero"* es un clásico en la Teoría de Juegos que suele atribuirse a A.W. Tucker (el profesor de Nash), según [3].

Este ejercicio resultó ser todo un acierto. El enunciado capta el interés de los alumnos en la clase preparatoria en que se propuso, consiguiendo que cada par de alumnos se identifiquira con los dos condenados e incluso comentaron "que era como si estuviesen en una película de género policíaca".

Con respecto al nivel, este dilema es un ejercicio de nivel apropiado, de hecho es el perfecto. No es un ejercicio que necesite conocimientos matemáticos previos pero sí que precisa de la atención y compresión de su enunciado así como astucia a la hora de desarrollar la estrategia.

A continuación, se considera interesante mencionar que durante la resolución del ejercicio en clase se remarcan dos cuestiones, que aunque parecen naturales, la advertencia puede disipar posibles dudas entre los alumnos y alumnas:

- Cada uno de los sospechosos debe tomar una decisión sin saber lo que habrá elegido su cómplice.
- Aunque los sospechosos pudiesen hablar entre ellos, no tendrían plena confianza para fiarse el uno del otro.

Un error común y observado en la resolución de algunos estudiantes es concluir que la mejor estrategia para el condenado es la que contempla la traición a su cómplice. Este fallo se debe a que no tienen en cuenta la estrategia de los dos condenados como conjunto sino tan solo la individual. Por tanto, el ejercicio les resultará bastante útil como enseñanza.

Una vez analizado ya este dilema, se les plantea a los alumnos dar un paso más. Se les da a conocer entonces "el dilema del prisionero iterativo". Esta es una variante del dilema del prisionero en la que existe la posibilidad de castigar al cómplice si te traiciona dejando como referencia el artículo [3].

Además, se les aportan diferentes aplicaciones del dilema en situaciones de la vida real que siguen para su resolución un procedimiento similar al dilema del prisionero y resultan ser de especial interés pues se puede obtener un mejor resultado si los agentes que interactúan colaboran entre sí, que si buscan mejorar sólo su propio resultado.

El dilema del prisionero en la docencia.

1. Una profesora decide cambiar el método de evaluación para un cierto curso académico y sustituye el clásico examen final que se realiza al terminar el curso por una evaluación continua valorada mediante la realización y entrega de ejercicios en grupos. Es beneficioso para los alumnos no tener que hacer un examen final pues así evitan sensaciones de agobio.

Los alumnos tienen que ir entregando ejercicios cada semana.

Si los ejercicios entregados por todos los grupos son correctos en su mayoría, se eliminará el examen final. Esto es que la media de los alumnos que han realizado bien los ejercicios es superior o igual al 80 %. En caso contrario, si los grupos no muestran esforzarse y los ejercicios no son lo suficiente buenos, el examen seguirá presente. Se pide analizar ambas situaciones y decidir cuál sería la mejor opción para implantar en la clase.

Se trata de una situación similar a la versión original del Dilema del prisionero propuesto en el ejercicio 3.5.

Ante el nuevo método de evaluación, los alumnos tienen dos posibilidades: pueden acordar entre todos trabajar, esforzarse y hacer de forma correcta los ejercicios para librarse del examen final, o bien pueden "traicionar" a sus compañeros y no trabajar, dependiendo entonces su suerte para librarse del examen de lo que se esfuercen sus compañeros.

La matriz que indica todos las posibilidades de acción para los alumnos y sus correspondientes resultados se muestra en la siguiente tabla:

	80% de la clase trabaja	**80% de la clase no se esfuerza**
20% de la clase trabaja	Todos se libran del examen final por su esfuerzo.	Todos tienen que hacer el examen final. Solo ha trabajado la minoría
20% de la clase no se esfuerza	Todos se libran del examen final. Ha trabajado la mayoría	Todos tienen que hacer el examen. Nadie se ha esforzado

Tabla III.2: Matriz del dilema del prisionero en la docencia

Se deduce por tanto que la estrategia individual y egoísta no lleva a la solución óptima ya que el interés propio les lleva a tener que realizar el examen al final de la asignatura. Sin embargo, si todos trabajan y actúan de forma cooperativa podrán librarse del mismo. Óbserve que resultados similares se obtienen para el caso original del dilema del prisionero.

2. Otra situación similar del ámbito educativo en la que también se puede hacer uso del dilema del prisionero de manera mucho más clara se da cuando la profesora localiza copiando a dos alumnos y no puede demostrarlo.

El dilema del prisionero en el atletismo.

Una maratón es otro escenario semejante al propuesto en el dilema del prisionero.

Imaginemos el caso de dos atletas que van liderando una carrera y que quedan distanciados del grupo a mitad de la prueba. El inconveniente ahora es que al ser los primeros no pueden protegerse del viento con el resto de corredores.

Entonces, surge en este momento el dilema de colaborar con el otro corredor para conseguir una mutua protección frente al viento o no hacerlo. El problema es que el que se encuentre delante deberá realizar un mayor esfuerzo pero si ninguno de ellos lo hace, la parte restante del grupo les alcanzará con rapidez.

A partir de los resultados del dilema del prisionero, se deduce que la mejor estrategia es que los corredores actuen colaborando en conjunto pues si lo hacen de forma individual, sus resultados serán peores.

El dilema del prisionero en las ciencias políticas.

Las ciencias políticas es otro aspecto actual y objeto de aplicación del dilema del prisionero. En este escenario, encontramos el panorama del dilema del prisionero cuando hay dos países implicados en una carrera de armas.

Los dos países presentan en este caso dos opciones: aumentar el presupuesto en armas para la preparación del conflicto, disponiendo así de menos recursos para otros ámbitos o llegar a un pacto con el otro país para disminuir el gasto en armas y poder dedicárselos a otros ámbitos tales como en la salud, infraestructuras o investigación, entre otros.

Este ámbito es de actualidad por el conflicto existente entre Ucrania y Rusia. Así pues, estos podrían ser los escenarios que se plantearon Rusia y Ucrania antes de que estallase el conflicto y que en estos días diferentes países podrían plantearse.

En semejanza con los restantes ejemplos, ante esta situación el resultado óptimo para los dos países se obtiene al alcanzar el beneficio del grupo, es decir, de los países y no el beneficio particular. Sin embargo, es complicado conseguir la cooperación entre los dos países ante estos casos.

Para concluir el análisis crítico de este problema, es necesario destacar que, en virtud de diferentes aplicaciones del Dilema del prisionero, hemos visto la manera en que la Teoría de Juegos influye en muchas situaciones que aparecen en nuestras vidas cotidianas, [3] [5].

En concreto, se ha observado que los problemas con escenarios semejantes a los planteados por el Dilema del prisionero alcanzan un resultado óptimo siempre que los participantes busquen el beneficio del grupo y no su interés propio. Pero en la mayoría de ocasiones, esto no sucede.

Ejercicio. 3.6. *El juego del pirata.*

Este ejercicio es un problema interesante a tratar pues corresponde a uno de los seis ejercicios propuestos este año en la primera fase de la Olimpiada Matemática Española. El enunciado se encuentra actualmente publicado en la web del Distrito de Granada.

“El juego del pirata” es un problema que han realizado los estudiantes en el examen de esta convocatoria. Es un ejercicio de nivel alto. Las sensaciones que hemos observado en los alumnos y alumnas sobre sus resoluciones son muy variadas. Algunos alumnos tienen una sensación positiva por haberlo resuelto bien mientras que otros se sentían un poco frustrados por no haber sabido encontrar la respuesta adecuada al enunciado del problema.

Una dificultad que presenta el ejercicio y que aumenta el nivel del mismo, son los conceptos de módulos, congruencias y series dado que no se trabajan en la Enseñanza Secundaria por norma general, así que tienen menos comodidad con ellos. De hecho, algunos estudiantes confirman que el ejercicio se le complicó bastante al no recordar como se trabaja con ellos.

Para profundizar más en el problema, se propone la siguiente pregunta tras acabarlo:

¿Qué pasaría en el caso en el que el reparto fuese equitativo? Analizar ahora el mayor número de monedas que un pirata puede llegar a tener en esta situación.

Problemas relacionados con los tableros de ajedrez

Ejercicio. 3.7. ***El caballo.***

Este problema surge como "inspiración" en algunas de las clases impartidas por el profesor Luis Merino en la asignatura de Evolución del Pensamiento Matemático del Máster en Matemáticas, en las que se trabajaba la técnica de coloración.

Se trata de un ejercicio de nivel básico que emplea las técnicas de coloraciones e invariantes desarrolladas en el marco teórico del trabajo. El objetivo es que el alumno o alumna comience a familiarizarse con estas técnicas y con los problemas sobre tableros de ajedrez.

Una dificultad inicial que puede plantear el ejercicio es que no todos los estudiantes conocen el juego del ajedrez y sus reglas. No obstante, aquí basta con puntualizar el movimiento que realiza la figura del caballo junto con las casillas y los colores que ocupa pues es lo que requiere el enunciado. Esto es, las siguientes figuras:

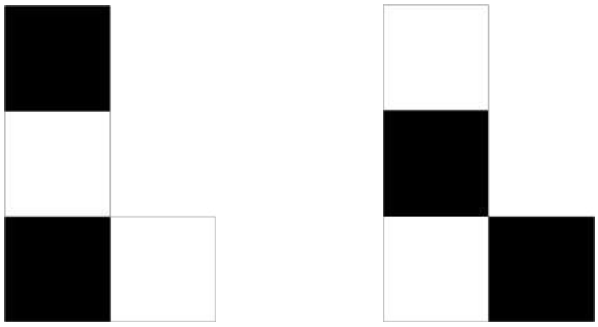


Figura III.1: Movimiento del caballo sobre un tablero de ajedrez

Tras la propuesta del ejercicio en una de las sesiones preparatorias de las Olimpiadas Matemáticas, el grupo en general se encuentra al principio un poco desorientado al no haber resuelto antes ningún problema de estas características. Se decide por tanto dedicar una parte de la sesión a los aspectos teóricos relacionados con estos juegos y sus impresiones mejoraron bastante en ese momento. Parecía que habían captado todo y, además, de forma rápida.

No obstante, una cosa es entender la teoría y otra es saber como aplicarla. El proceso desarrollado al tratar de hallar la solución del problema, resultó ser muy positivo pues se trató de elaborar una estrategia de resolución en conjunto y fue una parte bastante colaborativa por parte del grupo completo.

Una de las opciones que propusieron fue el uso de ciclos. De tal manera, habría que buscar un ciclo de números impares para llegar a 19. En concreto, plantean el uso de movimientos cíclicos de dimensiones 3×5 pero esto no nos lleva al correcto resultado.

En cambio, se les indica que si cambiamos en el enunciado el número de movimientos pasando de 19 a 8, el problema se podría resolver fácilmente usando la estrategia de los ciclos que ellos han propuesto sin más que considerar un ciclo que ocupe siempre 2 de las casillas de un tablero de ajedrez.

En general, el argumento previo nos permite deducir que si el número de movimientos del que dispone el caballo sobre el tablero es un número par siempre podría volver a su posición inicial. Esto es debido a que se puede desarrollar un camino hasta volver a la posición de partida.

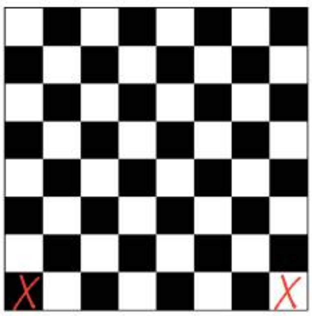
Pero en nuestro caso, el número de movimientos era impar así que la estrategia anterior no se puede utilizar y se les explica la forma de resolverlo que se propone en el capítulo II.

Ejercicio. 3.8. *El tablero mutilado.*

Este problema tiene como fuente los diferentes problemas de sesiones preparatorias a las Olimpiadas Matemáticas de convocatorias anteriores y que aparecen en la web del Distrito de Granada. Se trata de un buen recurso preparatorio pues es un paso más en cuanto al nivel de los problemas sobre tableros de ajedrez. El objetivo es que todos los participantes se vayan preparando ya para enfrentarse luego a problemas más difíciles durante las sesiones impartidas.

En el tablero de ajedrez sin dos de las esquinas al que se refiere este ejercicio, es importante notar que son dos esquinas opuestas (tal como se indica en el enunciado) pues si fuesen dos esquinas consecutivas, según se puede observar en los dos tableros de la resolución, tendrían colores contrarios y esto conduciría a una respuesta negativa a la pregunta planteada. El razonamiento que se sigue para su demostración es el siguiente:

Si al tablero le quitamos dos de las esquinas que se encuentren en el mismo eje, superior o inferior, estamos ante esta situación:



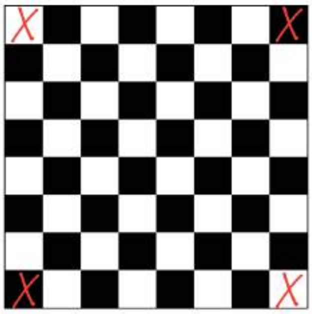
Tal como se aprecia en las figuras, le estamos quitando dos casillas de distinto color, es decir, que quitamos una casilla de color blanco y otra de color negro. Por tanto, el tablero pasará a tener ahora 31 casillas de color blanco y otras 31 de color negro así que sí podríamos recubrir el tablero con nuestra ficha.

La ficha ocupaba una casilla de color blanco y otra de color negro. En particular, se recubrirá el tablero con 31 fichas de este tipo.

Se le plantea a los alumnos una pregunta extra de este mismo problema:

¿Qué pasaría si quitamos ahora todas las esquinas al tablero de ajedrez?

Estaríamos ahora ante un problema de la siguiente situación:



Y quedaría a implementar la misma estrategia que en el juego planteado.

Un resultado similar se tiene para fichas de dominó y la prueba se realiza empleando el Teorema de Gomory.

Ejercicio. 3.9. ***El rectángulo del dinero.***

El enunciado de este ejercicio está relacionado con otro problema más sobre tableros de ajedrez aumentando ya el nivel de los problemas de este tipo estudiados por los alumnos y alumnas que venían acudiendo a las clases hasta el momento. Se trata por tanto de un buen recurso preparatorio para las fases más altas de las Olimpiadas Matemáticas a las que aspiran llegar.

En un primer momento, los estudiantes se sorprenden por las dimensiones del tablero hasta que se realiza una reflexión global sobre el enunciado del problema y se realizan indicaciones de cómo abordarlo.

Tras las primeras lecturas del ejercicio, dos alumnos del grupo están considerando hacer rectángulos diagonales, es decir, considerando algunas de las rectas que tiene un tablero de ajedrez de forma diagonal (aquellas que tienen casillas del mismo color). Cabe destacar que aquí fueron los propios alumnos los que se corrigieron ya que hay otros que sí se dan cuenta de que estos rectángulos no están permitidos según las reglas del juego de este ejercicio. Esto muestra el mero hecho de inducir a un error por una mala lectura o interpretación del enunciado.

Se invita a que los alumnos jueguen entre ellos para que así puedan pensar en alguna estrategia para ganar. Primero, jugaron una sola partida y se hizo una reflexión colectiva sobre el funcionamiento del juego. Posteriormente, volvieron a jugar varias partidas con el objetivo ya de que pensasen y elaborasen su propia manera de alcanzar la victoria. De hecho, se hace necesaria una intervención pues una de las jugadas que proponen como ganadora para el primer jugador, siendo la figura un cuadrado y no rectángulo, es la siguiente:

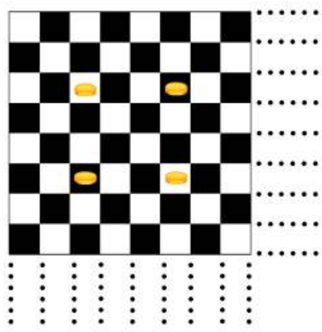


Figura III.2: Jugada ganadora del juego

Un hecho destacable es que una alumna preguntaba que si había número límite de monedas y la realidad es que esta pregunta genera controversia: no hay un límite máximo de monedas que puedan ponerse en el tablero si no que simplemente el juego acabará cuando alguno de los dos jugadores consiga hacer el rectángulo; sin embargo, sí que lo hay mínimamente pues el rectángulo precisa de 4 monedas así que en el tablero habrá como mínimo 4 monedas al acabar el juego. Tras varias jugadas, otros chicos de la clase también se preguntaban si realmente habría estrategia ganadora para el juego.

Todas las cuestiones que les surgieron durante este proceso, tuvieron cabida durante la sesión y fueron debatidas de forma grupal. Se desarrolla también la estrategia del juego de forma conjunta durante la clase y se les motivaba para que todos participasen y se cuestionaran todo tipo de detalles. Además, se intenta hacerles ver que esta es una de las claves del pensamiento matemático, el mero hecho de "no creerte nada y cuestionarse uno mismo cualquier concepto, teoría, teorema o demostración" pues así es cómo surge el desarrollo de esta ciencia.

Ejercicio. 3.10. *Tetris.*

Este ejercicio es ya un problema con grado de dificultad significativamente mayor que los anteriores por su alto nivel de abstracción. De hecho, se conoce que la mayoría de estudiantes del grupo no tienen aún la madurez suficiente para poder desarrollar una solución de forma genérica de este estilo así que el profesor Salvador Villegas de la Universidad de Granada se encarga de su resolución en una sesión a la que asiste como invitado.

Además, la mera extensión de la solución del ejercicio 3.10 propuesta en el presente trabajo es ya un indicador de este grado de dificultad, pues es una de las más largas. Por tanto, Salvador decide tomar el papel fundamental durante el procedimiento de resolver el ejercicio, indicando paso a paso cada uno de los objetivos que se debían ir siguiendo.

En la redacción de las soluciones de este tipo de ejercicios, es importante dejar claro en todo momento el caso con el que se está trabajando y esto es una de las partes que en la que los alumnos presentaron más dificultad ya que aún no tienen la suficiente experiencia con el desarrollo teórico de soluciones y su estructura.

Por todo ello, se trata de un problema que nos requirió bastante tiempo durante las clases preparatorias pero, a su vez, aportó diferentes ventajas como son las distintas habilidades, estrategias, dominio y fluidez que adquiere el alumno o alumna tras acabar el ejercicio.

Las figuras con las que se completa el tablero son semejantes a una de las fichas del Tetris así que algunos se imaginan la situación con jugadas de este juego y les resulta un menos complejo el ejercicio.

El Tetris es popularmente muy conocido. Algunos alumnos dicen ser aficionados a jugar a este juego y sienten bastante interés acerca del ejercicio.

Por tanto, otra de las ventajas del ejercicio 3.10. es que se trata de un problema con aplicación práctica a la vida real y un juego del entorno de los estudiantes a los que impartimos las clases.

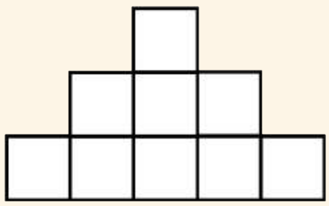
Entre las distintas dificultades que los estudiantes manifiestan durante la resolución del ejercicio, destacamos las siguientes:

- Dificultad a la hora de trabajar con un tablero de dimensiones $n \times n$ generalizadas y su casuística.
- Dificultad en la descomposición de n y n^2 en factores primos y trabajar con ello.

Ante la segunda dificultad, se proporciona como recurso el libro [7] para reforzar el *Teorema Fundamental de la Aritmética* pues se conoce que por lo general los alumnos aún no tienen suficiente dominio sobre este parte teórica.

Para acabar con el análisis crítico de este problema y con el objetivo de subir un poco más el nivel, Salvador decide añadir la siguiente pregunta de ampliación como propuesta para que sea reflexionada detenidamente:

Indica ahora los valores de $n \in \mathbb{N}$ para los que sea posible completar un tablero $n \times n$ con figuras del siguiente tipo:



Ejercicio. 3.11. ***Las configuraciones.***

Se trata de un problema de complejidad ya bastante elevada en comparación con el resto de problemas. Por ello, se propone en una de las últimas sesiones de preparación antes de que los estudiantes se presenten a las Olimpiadas Matemáticas.

La idea es tratar de hallar una forma de abordarlo en conjunto con todos los alumnos así que se va resolviendo a su vez que se cuestiona a los alumnos procedimientos y pautas que ellos propondrían para continuar.

Cabe destacar que entre sus respuestas destaca la práctica primero con los casos sencillos así que esto muestra el buen aprendizaje de los anteriores problemas. Los alumnos proponen intentar llegar a una acotación en el número de movimientos así que esto es lo que se pretende realizar en el proceso de resolución.

Se dan algunos de los siguientes errores al resolver el problema en la clase: proposición de movimientos incorrectos o planteamiento de movimientos en diagonal que en este caso no funcionan.

Como conclusión de este ejercicio, resulta destacable la buena respuesta por parte de los alumnos que tuvieron ante el ya más complicado problema al que se enfrentaban.

Ejercicio. 3.12. ***Tablero infinito.***

El aspecto clave que se quiere resaltar en el análisis crítico de este problema es que se trata de un problema con nivel de complejidad muy alto. Se plantea en una de las últimas clases preparatorias cuando ya los alumnos han adquirido el suficiente dominio en la resolución de problemas sobre Teoría de Juegos.

Se trata de un problema que fue propuesto en la Olimpiada Internacional de Matemáticas de 1993 y se ha utilizado como fuente de inspiración para su resolución los documentos de la Real Sociedad Matemática Española [6] y de I. Reiman [8].

El enunciado del ejercicio en este caso genera confusión en la sesión preparatoria de las Olimpiadas siendo incluso una de las primeras dificultades que presentan los alumnos. La simple idea de tablero "infinito" genera inseguridad entre el grupo de estudiantes.

Se les propone entonces algunos ejemplos de los posibles movimientos que permiten realizar las reglas de este juego, con el objetivo de que se entienda su funcionamiento.

A partir de aquí, se les propone que intenten por sus propios medios pensar en otros movimientos aptos en el juego y en los posibles valores de n que cumplen con las condiciones del enunciado.

Una de las dificultades que se observa de forma común entre los estudiantes es el intento fallido de desarrollar la casuística para los distintos valores de n. Ésta es extensa y puede generar confusión. De hecho, fue uno de los errores que cometieron algunos de ellos.

Sin duda, otra de las dificultades más habituales es la redacción formal de la solución del problema. Por eso, se propone como ampliación la siguiente actividad, cuya idea procede de la sesión en la que colabora Salvador Villegas:

> Se plantea un juego sobre un tablero de ajedrez con dimensiones infinitas. Sobre el tablero, se encuentran colocadas en casillas adyacentes un número finito de piezas. Los movimientos que se permiten son saltos desde una casilla inicial a otra que se encuentre a la derecha, izquierda, arriba o abajo siempre que esté ocupada. En cada salto, se eliminará una ficha. Se cuestiona entonces si en algún momento *se acaban todas las fichas* colocadas sobre el tablero y determinar los valores de n para los que ocurre.

Se trata de un juego de condiciones similares a las que presenta el juego del enunciado 3.11. pero la diferencia es que lo que ahora nos interesa es que el tablero quede vacío así que los alumnos y alumnas de la sesión deberán reflexionar sobre los valores de n para los que se cumple la situación.

Capítulo IV

Conclusiones

Para terminar el presente trabajo, me gustaría indicar algunas de las dificultades y errores más comunes que se han observado entre los estudiantes que han acudido a las sesiones de preparación de las Olimpiadas.

Resulta interesante destacar que algunos de los errores más frecuentes vienen dados más por una incorrecta interpretación de los enunciados y resultados que por la propia complejidad del problema. Además, se advierte de que lo más dificil para estos alumnos es la redacción de manera formal de la solución de los problemas, así como su exposición en público. Por lo general, se tratan de niños que saben resolver rápidamente los problemas y su mayor reto es explicarlo en público al resto de compañeros.

Se considera que la práctica de estos ejercicios en las sesiones impartidas ha sido favorable para la práctica y desarrollo de estas habilidades. Aún así, se ha visto reflejado que se debería prestar más atención a la comprensión lectora y redacción de los problemas durante las etapas de Educación Secundaria y Bachillerato y esto conduce a un punto de reflexión en el currículo matemático.

Señalar además que en virtud de la relación de problemas propuestos y diferentes aplicaciones, hemos visto la manera en que la Teoría de Juegos influye en muchas situaciones que aparecen en nuestras vidas cotidianas.

Finalmente, me gustaría también mencionar que trabajar con personas que comparten la misma inquietud hacia las matemáticas resulta muy satisfactorio. Espero que este trabajo sea de utilidad a otros estudiantes que aspiren a presentarse a las Olimpiadas Matemáticas en un futuro.

Bibliografía

[1] J. PEREZ, J.L. JIMENO Y E. CERDÁ. *Teoría de juegos*, Ibergarceta publicaciones, Segunda Edición, Madrid, España, 2013. 1.1., 1, 3

[2] K. BINMORE. *La teoría de juegos: Una breve introducción*, Alianza, España, 2011. 1

[3] M. BLÁZQUEZ Y C. GÁMEZ. *Teoría de Juegos y aplicaciones: El dilema del prisionero.*, Universidad Carlos III, Madrid 2006. 1, 3.5., III, III

[4] A. ENGEL. *Problem-Solving Strategies*, Edited by K. Bencsáth and P.R. Halmos, Springer, 2008. 2, 2.2, III

[5] J. DEULOFEU. *Prisioneros con dilemas y estrategias dominantes. Teoría de juegos*, RBA, Navarra, España, 2011. 1.4., III, III

[6] REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA. *Olimpiada Matemática Española 2004*, Real Sociedad Matemática Española, Universidad Complutense de Madrid, España, 2004. 3.12., III

[7] F. AYRES AND L. JAISINGH.. *Abstract Algebra*, McGraw-Hill, 2004. III

[8] I. REIMAN. *International Mathematical Olympiad 1959 - 1999*, Anthem Press, London, United Kingdom, 2002. III

[9] CLEMENTE. *Principios de Invarianza y Extremal*,OMM BC, Mexico, 2015 2.1

[10] *Material de elaboración propio a partir de sesiones preparatorias de Olimpiadas.* Universidad de Granada, 2022.

Refencias Web:

Nota[1]

- http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es
- http://www.ugr.es/olimpiada/
- http://www.ugr.es/pjara/
- https://dle.rae.es
- http://www.imo-official.org/

[1] Los enlaces son válidos en el formato digital.

Índice alfabético

análisis crítico, 37

estrategia, 4
estrategia ganadora, 4

juego, 3
jugador, 3

resolución de problemas, 9

tableros de ajedrez, 17