



# Matemática

## Análise Combinatória e Probabilidade

Cleiton Batista Vasconcelos  
Manoel Americo Rocha



Geografia



História



Educação  
Física



Química



Ciências  
Biológicas



Artes  
Plásticas



Computação



Física



Matemática



Pedagogia



# Matemática

## Análise Combinatória e Probabilidade

Cleiton Batista Vasconcelos  
Manoel Americo Rocha

3ª edição  
Fortaleza - Ceará



2019



Geografia



História



Educação  
Física



Química



Ciências  
Biológicas



Artes  
Plásticas



Computação



Física



Matemática



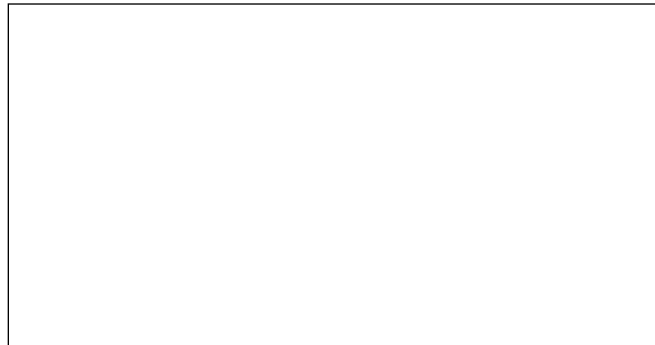
Pedagogia

Copyright © 2019. Todos os direitos reservados desta edição à UAB/UECE. Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, dos autores.

Editora Filiada à



<b>Presidente da República</b> Jair Messias Bolsonaro	<b>Conselho Editorial</b> Antônio Luciano Pontes
<b>Ministro da Educação</b> Abraham Bragança de Vasconcellos Weintraub	Eduardo Diatahy Bezerra de Menezes
<b>Presidente da CAPES</b> Abilio Baeta Neves	Emanuel Ângelo da Rocha Fragoso
<b>Diretor de Educação a Distância da CAPES</b> Carlos Cezar Modernel Lenuzza	Francisco Horácio da Silva Frota
<b>Governador do Estado do Ceará</b> Camilo Sobreira de Santana	Francisco José Camelo Parente
<b>Reitor da Universidade Estadual do Ceará</b> José Jackson Coelho Sampaio	Gisafran Nazareno Mota Jucá
<b>Vice-Reitor</b> Hidelbrando dos Santos Soares	José Ferreira Nunes
<b>Pró-Reitora de Pós-Graduação</b> Nucácia Meyre Silva Araújo	Liduína Farias Almeida da Costa
<b>Coordenador da SATE e UAB/UECE</b> Francisco Fábio Castelo Branco	Lucili Grangeiro Cortez
<b>Coordenadora Adjunta UAB/UECE</b> Eloísa Maia Vidal	Luiz Cruz Lima
<b>Direção do CED/UECE</b> José Albio Moreira de Sales	Manfredo Ramos
<b>Coordenação da Licenciatura em Matemática</b> Ana Carolina Costa Pereira	Marcelo Gurgel Carlos da Silva
<b>Coordenação de Tutoria da Licenciatura em Matemática</b> Gerardo Oliveira Barbosa	Marcony Silva Cunha
<b>Editor da EdUECE</b> Erasmus Miessa Ruiz	Maria do Socorro Ferreira Osterne
<b>Coordenadora Editorial</b> Rocylânia Isidio de Oliveira	Maria Salete Bessa Jorge
<b>Projeto Gráfico e Capa</b> Roberto Santos	Silvia Maria Nóbrega-Therrien
<b>Diagramador</b> Francisco Oliveira	<b>Conselho Consultivo</b> Antônio Torres Montenegro (UFPE)
<b>Revisão Ortográfica</b> Fernanda Ribeiro	Eliane P. Zamith Brito (FGV)
	Homero Santiago (USP)
	Ieda Maria Alves (USP)
	Manuel Domingos Neto (UFF)
	Maria do Socorro Silva Aragão (UFC)
	Maria Lírida Callou de Araújo e Mendonça (UNIFOR)
	Pierre Salama (Universidade de Paris VIII)
	Romeu Gomes (FIOCRUZ)
	Túlio Batista Franco (UFF)



Editora da Universidade Estadual do Ceará – EdUECE  
Av. Dr. Silas Munguba, 1700 – Campus do Itaperi – Reitoria – Fortaleza – Ceará  
CEP: 60714-903 – Fone: (85) 3101-9893  
Internet: [www.uece.br](http://www.uece.br) – E-mail: [eduece@uece.br](mailto:eduece@uece.br)  
Secretaria de Apoio às Tecnologias Educacionais  
Fone: (85) 3101-9962

# Sumário

<b>Apresentação .....</b>	<b>5</b>
<b>Capítulo 1 – Princípio de Contagem.....</b>	<b>7</b>
1. Introdução.....	9
2. Uma primeira atividade.....	10
3. Atividades de contagem.....	12
4. Princípios de contagem.....	21
<b>Capítulo 2 – Arranjos e Permutações e o Fatorial de um Número.....</b>	<b>29</b>
1. Introdução.....	31
2. Arranjos simples e arranjos com elementos repetidos.....	31
2.1. Calculando o número de arranjos simples.....	32
3. Permutações simples e permutações com elementos repetidos.....	35
3.1. Permutação simples.....	35
3.2. Calculando o número de permutações simples.....	36
3.3. Permutações com elementos repetidos.....	36
4. O fatorial de um número e o número de arranjos e o de permutações.....	38
4.1. Fatorial de um número.....	38
5. Permutação Circular.....	40
5.1. Calculando o número de permutações circulares.....	42
<b>Capítulo 3 – Combinações, Números Binomiais e Binômio de Newton.....</b>	<b>51</b>
1. Introdução.....	53
2. Combinações Simples.....	54
2.1. Estendendo o conceito de combinação.....	55
2.2. Combinações complementares.....	55
3. Combinações completas e equações diofantinas.....	56
3.1. Determinando o número de permutações completas.....	56
3.2. Soluções em inteiros positivos.....	57
3.3. Retomando o cálculo do número de combinações completas.....	59
4. Números binomiais.....	61
4.1. Números binomiais com mesmo numerador.....	62
4.2. Relação de Stiefel.....	63
5. Binômio de Newton.....	63
5.1. Estudando o comportamento do desenvolvimento de $(x + a)^2$ .....	64
5.4. Potências de binômios.....	67

<b>Capítulo 4 – Tópicos Complementares.....</b>	<b>75</b>
1. Introdução.....	77
2. Permutações caóticas.....	77
2.1. Determinando o número de permutações caóticas de 4 elementos.....	79
3. Lemas de Kaplansky.....	81
4. Princípio das gavetas de Dirichlet.....	84
4.1. Provando o princípio das gavetas de Dirichlet.....	85
4.2. Provando a generalização do princípio das gavetas de Dirichlet.....	85
<b>Capítulo 5 – Noções preliminares e operações entre eventos.....</b>	<b>91</b>
1. Introdução.....	93
2. Experimentos: aleatórios versus determinísticos.....	93
2.1. Experimentos determinísticos ou aleatórios.....	94
3. Espaço amostral associado a um experimento aleatório.....	94
3.1. Espaço amostral.....	95
3.2. Eventos associados a um experimento aleatório.....	95
4. Operações entre eventos e eventos mutuamente excludentes.....	97
4.1. Propriedades das operações entre eventos.....	98
<b>Capítulo 6 – Definições de Probabilidade e Principais Resultados.....</b>	<b>105</b>
1. Introdução.....	107
2. Definições de Probabilidade.....	108
2.1. Definição clássica de probabilidade.....	108
2.2. Propriedades da probabilidade.....	109
2.3. Definição frequentista de probabilidade.....	111
2.4. Definição axiomática de probabilidade.....	112
3. Probabilidade condicional e eventos independentes.....	113
3.1. Experimentos realizados em sequência.....	116
4. Distribuição binomial de probabilidade.....	120
<b>Sobre os autores.....</b>	<b>130</b>

# Apresentação

A origem da Análise Combinatória se remete a problemas relacionados a quadrados mágicos. Ela é decorrente da ampliação de técnicas que permitem contar, de forma direta ou indireta, o número de elementos de um dado conjunto, sendo esses agrupados sob determinadas condições. Enquanto, a Probabilidade nasceu dos problemas envolvendo jogos de azar.

Estas notas foram escritas para servirem de apoio à disciplina de Análise Combinatória e Probabilidade do Curso de Licenciatura em Matemática, com seis horas semanais, durante um semestre. Essa disciplina é o momento que o discente irá aprimorar sua habilidade de deduzir e raciocinar de forma lógica e organizada, desenvolvendo seu espírito crítico e criativo, relacionando a matemática com problemas práticos, percebendo e compreendendo o interrelacionamento das diversas áreas da matemática apresentadas ao longo do curso.

Será o início de compreender os conceitos básicos da teoria dos conjuntos, assim como os principais tipos de agrupamentos possíveis de se formar com elementos dados e determinar seu número, utilizando os princípios aditivo e multiplicativo da contagem, da inclusão e exclusão, de Dirichlet e os lemas de Kaplanski na resolução de situações-problema. Também eles irão reconhecer e utilizar as principais propriedades do triângulo de Pascal e do binômio de Newton, e estudar espaços amostrais finitos e definir probabilidade simples e probabilidade condicionada em eventos desses espaços.

O livro encontra-se dividido em seis unidades. Na primeira unidade será abordado o Princípios de Contagem apresentando a análise combinatória como os ramos da matemática que se preocupa com os métodos de contagem, sejam eles diretos ou indiretos. A segunda unidade trata-se de Arranjos e Permutações e o Fatorial de um Número, no qual será conceituado arranjos e permutações simples e arranjos e permutações simples e com elementos repetidos, além do cálculo com fatorial de um número. Na unidade três, Combinações, Números Binomiais e Binômio de Newton, será estudada definições e exemplos de simples e com elementos repetidos, além de números binomiais e apresentando a relação de Stiefel. Na quarta unidade são complementados e aprofundados alguns conhecimentos de análise combinatória a partir do estudo de outros métodos de contagem, como por exemplo, as permutações caóticas, os lemas de Kaplansky e o princípio de Dirichlet. Na unidade cinco,

Noções Preliminares e Operações entre Eventos, será introduzindo os conceitos básicos de experimentos aleatórios, em contraposição a experimentos determinísticos, assim como o espaço amostral associado a um experimento aleatório e de eventos. A sexta unidade, e última, serão apresentadas algumas definições de Probabilidade e os principais resultados envolvendo um experimento aleatório como a medida da chance desse evento ocorre.

Em todos os capítulos podemos encontrar exercícios avaliativos e sugestão de filmes e sites para pesquisa no intuito de servir para os alunos fixarem os conceitos estudados.

Os autores

**Capítulo**

**1**

# **Princípios de Contagem**





## Objetivos

- Apresentar a análise combinatória como os ramos da matemática que se preocupa com os métodos de contagem, sejam eles diretos ou indiretos.
- Exemplificar os princípios de contagem a partir de sua utilização em algumas atividades.
- Enunciar e aplicar os princípios aditivo e multiplicativo da contagem.
- Enunciar e aplicar o princípio de contagem conhecido como princípio da inclusão e exclusão.

## 1. Introdução

Uma das preocupações básicas da Análise combinatória, mas não a única, é com os métodos de contagem, quer direta quer indireta.

Suponha, por exemplo, que desejemos contar os subconjuntos do conjunto  $A = \{1, 2, 3\}$ .

Uma maneira de realizarmos essa contagem seria listar todos os subconjuntos do conjunto  $A$  – contagem direta – para, em seguida, contá-los. Assim:

- Subconjuntos com zero elementos:  $\emptyset$ ;
- Subconjuntos com um elemento:  $\{1\}$ ,  $\{2\}$  e  $\{3\}$ ;
- Subconjuntos com dois elementos:  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$  e  $\{2,3\}$ ;
- Subconjuntos com três elementos:  $\{1, 2, 3\}$ .

Contando os subconjuntos listados, concluímos que o conjunto  $A$  possui 8 ( $= 1 + 3 + 3 + 1$ ) subconjuntos.

Outra maneira seria encontrar um procedimento geral – contagem indireta – que nos permita determinar o número de subconjuntos de um conjunto  $A$  em função do seu número de elementos, sem precisar contá-los.

Em alguns casos, é claro, é mais fácil listar e contar os subconjuntos do que procurar tal método. Notadamente, quando os conjuntos possuem uma quantidade pequena de elementos. Em outros, não. Imagine se  $A$  possuísse 10 ou 20 elementos.

Neste capítulo resolveremos algumas atividades relacionadas à contagem de conjuntos para, em seguida, enunciarmos e aplicarmos os princípios aditivo e multiplicativo da contagem além, é claro, do princípio da inclusão e exclusão, uma espécie de generalização do princípio da contagem.

## 2. Uma primeira atividade

Como dissemos anteriormente, no caso do conjunto  $A = \{1, 2, 3\}$ , um conjunto com apenas três elementos, é muito mais fácil listar os subconjuntos e, em seguida, contá-los do que procurar determinar um método para a contagem indireta.

Mas, e se fossem 10 ou 20 elementos?

### Para refletir

Um conjunto com 10 elementos possui quantos subconjuntos? E com 20 elementos?

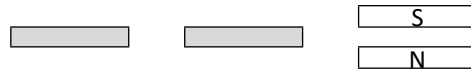
Um procedimento bastante interessante e que conduz rapidamente a uma generalização consiste em pensar cada subconjunto de  $A$  como sendo uma sequência ordenada de três letras que podem ser escolhidas entre S e N, obedecendo à seguinte convenção: a sequência (S, N, N), por exemplo, representa o subconjunto  $\{1\}$ , pois a letra S significa que o elemento 1 pertence ao subconjunto, o primeiro N significa que o número 2 não pertence ao subconjunto, e o segundo N significa que o elemento 3 não pertence ao subconjunto; de maneira semelhante, o subconjunto  $\{2, 3\}$  seria representado pela sequência (N, S, S), na qual o N significa que o 1 não é elemento do subconjunto, isto é, o 1 não pertence ao subconjunto, o primeiro S significa que o 2 pertence ao subconjunto e o segundo S significa que o 3 pertence ao subconjunto. Assim, desejamos saber quantas sequências ordenadas de três elementos na qual para o primeiro elemento temos duas opções, S ou N.

S		
N		

Escolhido o primeiro elemento, temos duas opções para a escolha do segundo – S ou N –;

S	S
N	N
S	S
N	N

e, finalmente, escolhidos os dois primeiros temos duas opções de escolha para o terceiro – novamente, S ou N –;

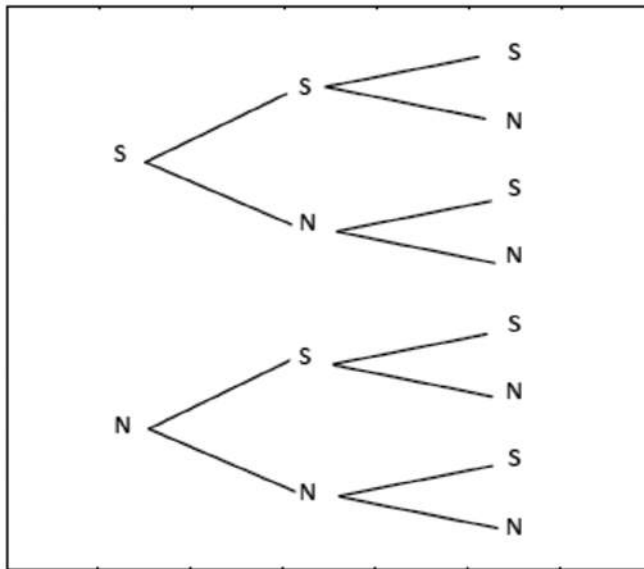


perfazendo um total de 8 ( $= 2 \times 2 \times 2$ ) seqüências.

Como cada seqüência representa um subconjunto de  $A = \{1, 2, 3\}$ , podemos concluir que o conjunto  $A$  possui 8 subconjuntos.

**Generalizando.** Como dissemos anteriormente, fica fácil de generalizar o resultado para um conjunto  $A$  com  $n$  elementos. Neste caso, a seqüência que devemos formar vai possuir  $n$  letras que podem ser escolhidas entre  $S$  e  $N$  e, portanto, o número de subconjuntos de um conjunto com  $n$  elementos é  $2^n$ .

A figura a seguir, denominada de árvore das possibilidades, nos permite visualizar as 8 seqüências possíveis, ou melhor, os 8 subconjuntos do conjunto  $A$ .



Logo a seguir temos a relação das oito seqüências em correspondência com o subconjunto que cada uma delas representa.

Seqüência	Subconjunto
SSS	{1, 2, 3}
SSN	{1, 2}
SNS	{1, 3}
SNN	{1}
NSS	{2, 3}
NSN	{2}
NNS	{3}
NNN	$\emptyset$

O conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto  $A$  é indicado por  $P(A)$  e chamado de conjunto das partes de  $A$ .

### 3. Atividades de contagem

Nesta seção apresentaremos várias atividades de contagem com o objetivo de mostrarmos alguns procedimentos que podem ser empregados em situações desta natureza. Apresentaremos alguns conjuntos de situações para, em seguida, apresentarmos suas soluções. Sugerimos que, antes de verificar a solução apresentada, cada aluno tente encontrá-la por si mesmo.

**Situação 1:** De quantas maneiras podemos distribuir quatro bolas, sendo uma vermelha, uma preta, uma azul e uma branca, entre duas pessoas, de modo que cada pessoa receba pelo menos uma bola? E se qualquer uma das pessoas puder ficar com as quatro bolas? E se forem seis bolas? E se forem  $n$  bolas?

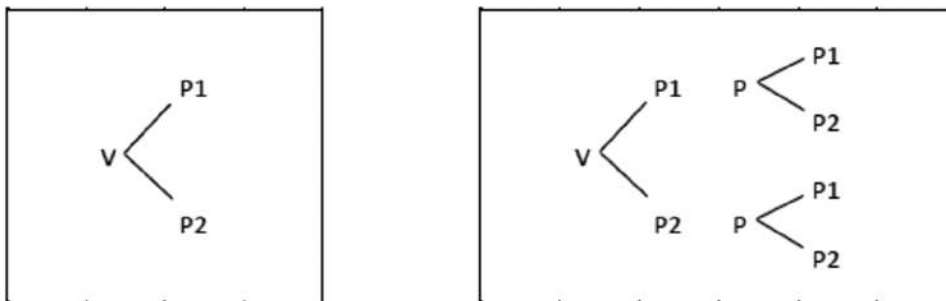
**Situação 2:** De quantas maneiras podemos distribuir quatro bolas iguais entre duas pessoas, de modo que cada pessoa receba pelo menos uma bola? E se qualquer uma das pessoas puder ficar com as quatro bolas? E se forem sete bolas? E se forem  $n$  bolas?

**Situação 3:** De quantas maneiras podemos distribuir quatro bolas diferentes em duas caixas iguais, de modo que em cada caixa fique pelo menos uma bola? E se qualquer das caixas puder ficar vazia? E se forem seis bolas? E se forem  $n$  bolas?

Agora vamos apresentar a solução das três atividades propostas anteriormente.

Inicialmente, insistimos na importância da tentativa de resolução por parte dos alunos. Afinal, é a partir de sua própria solução ou de suas próprias dúvidas que se aprende a resolver problemas confrontando-as – dúvidas ou soluções – com outras soluções apresentadas e outras que venha a encontrar pelo caminho.

Para a **situação 1**, “De quantas maneiras podemos distribuir quatro bolas, sendo uma vermelha, uma preta, uma azul e uma branca, entre duas pessoas, de modo que cada pessoa receba pelo menos uma bola?”, iniciaremos denotando por  $V$ ,  $P$ ,  $A$  e  $B$  as bolas vermelha, preta, azul e branca, respectivamente, e por  $P_1$  e  $P_2$  as duas pessoas. Assim, para as bolas vermelha e preta, temos as seguintes opções: a bola vermelha ou fica com  $P_1$  ou fica com  $P_2$  e, distribuída a bola vermelha, a bola preta ou fica com  $P_1$  ou com  $P_2$ . Na árvore de possibilidades temos o seguinte:



Como se percebe, já foram encontradas 4 possibilidades de distribuição das duas primeiras bolas.

Para a distribuição das outras duas bolas, procedemos do mesmo modo. Faltando distribuir a bola azul e a branca, já temos as quatro possibilidades seguintes:

	VERMELHA	PRETA	AZUL	BRANCA
1	P1	P1		
2	P1	P2		
3	P2	P1		
4	P2	P2		

Na distribuição da bola azul, para cada uma das possibilidades acima, temos outras duas possibilidades: a bola azul fica com P1 ou a bola azul fica com P2. Assim, para a possibilidade 1, temos:

	VERMELHA	PRETA	AZUL	BRANCA
1	P1	P1	1 P1	
	P1	P1	2 P2	

Para as possibilidades 1 e 2, temos:

	VERMELHA	PRETA	AZUL	BRANCA
1	P1	P1	1 P1	
	P1	P1	2 P2	
2	P1	P2	3 P1	
	P1	P2	4 P2	

E, finalmente, para as quatro possibilidades, temos as oito possibilidades listadas a seguir.

	VERMELHA	PRETA		AZUL	BRANCA
1	P1	P1	1	P1	
	P1	P1	2	P2	
2	P1	P2	3	P1	
	P1	P2	4	P2	
3	P2	P1	5	P1	
	P2	P1	6	P2	
4	P2	P2	7	P1	
	P2	P2	8	P2	

Agora só falta distribuímos a bola branca. Novamente, para cada uma das possibilidades anteriores, temos duas possibilidades, perfazendo as dezesseis possibilidades seguintes: 8 nas quais a bola vermelha fica com P1 e outras 8 com a bola vermelha ficando com P2.

	VERMELHA	PRETA		AZUL	BRANCA
1	P1	P1	1	P1	P1
	P1	P1	2	P1	P2
2	P1	P1	3	P2	P1
	P1	P1	4	P2	P2
3	P1	P2	5	P1	P1
	P1	P2	6	P1	P2
4	P1	P2	7	P2	P1
	P1	P2	8	P2	P2

	VERMELHA	PRETA		AZUL	BRANCA
5	P2	P1	9	P1	P1
	P2	P1	10	P1	P2
6	P2	P1	11	P2	P1
	P2	P1	12	P2	P2
7	P2	P2	13	P1	P1
	P2	P2	14	P1	P2
8	P2	P2	15	P2	P1
	P2	P2	16	P2	P2

Observemos, entretanto, que as possibilidades 1 e 16 listadas anteriormente não satisfazem ao problema inicial.

## Para refletir

Você saberia dizer por quê? Pense, antes de continuar a leitura.

Na possibilidade 1, a pessoa P1 ganha as 4 bolas, enquanto na possibilidade 16, a pessoa P2 ganha as 4 bolas. E, como o problema pede que cada pessoa ganhe pelo menos 1 bola, essas duas possibilidades não satisfazem ao problema original. Portanto, a resposta para a pergunta “De quantas maneiras podemos distribuir quatro bolas, sendo uma vermelha, uma preta, uma azul e uma branca, entre duas pessoas, de modo que cada pessoa receba pelo menos uma bola?” é

“De quatorze maneiras”.

Para a pergunta “E se qualquer uma das pessoas puder ficar com as quatro bolas?” a resposta é

“De dezesseis maneiras”.

Se fossem seis bolas, para a distribuição da quinta bola, cada uma das dezesseis possibilidades daria origem a duas novas possibilidades, perfazendo um total de trinta e duas possibilidades e, para a distribuição da sexta bola, cada uma das trinta e duas possibilidades daria origem a duas outras, perfazendo um total de 64 possibilidades. Isto para o caso em que uma pessoa pode receber todas as bolas. Para o caso em que isso não pode ocorrer, devemos tirar duas dessas possibilidades e teremos, portanto, 62 possibilidades.

Para o caso geral, “se forem  $n$  bolas?” basta observarmos que ao acrescentarmos uma bola, o total de possibilidades anterior será multiplicado por 2. Assim, para uma bola, temos 2 possibilidades; para duas bolas, temos 4 possibilidades; para três bolas, temos 8 possibilidades.

**Generalizando.** De maneira geral, para  $n$  bolas, temos  $2^n$  possibilidades, para o caso em que uma das pessoas pode receber todas as bolas e  $2^n - 2$ , para o outro caso.

Para a **situação 2**, “De quantas maneiras podemos distribuir quatro bolas iguais entre duas pessoas, de modo que cada pessoa receba pelo menos uma bola?” como as bolas são iguais, uma possibilidade difere da outra, simplesmente, pelo número de bolas que cada pessoa recebe. Usando a mesma notação da situação anterior, a pessoa P1 pode receber uma, duas ou três bolas. Observe que, ao definirmos a quantidade de bolas que a pessoa P1 recebe, automaticamente estamos definindo a quantidade que P2 recebe.



QUANTIDADE DE BOLAS QUE CADA PESSOA RECEBE			
P1	1	2	3
P2	3	2	1

Portanto, são 3 as possibilidades procuradas.

Se uma das pessoas puder ficar com as quatro bolas, então devemos acrescentar mais duas possibilidades: P1 fica com as 4 e P2 fica sem nenhuma bola, e P1 fica sem nenhuma bola e P2 fica com 4 bolas.

Se forem sete bolas, a situação é semelhante. Podemos, novamente, construir uma tabela como a anterior e obtermos a resposta.

QUANTIDADE DE BOLAS RECEBIDAS POR CADA PESSOA						
P1	1	2	3	4	5	6
P2	6	5	4	3	2	1

Como podemos perceber, temos 6 possibilidades e se aceitarmos que um só pessoa receba todas as bolas devemos acrescentar mais duas possibilidades, obtendo um total de 8 possibilidades.

**Generalizando.** E se forem  $n$  bolas? Como se percebe, a pessoa P1 pode receber 1, 2, 3, ...,  $n - 1$  bolas, ou seja, temos  $n - 1$  possibilidades de distribuir as bolas, no caso em que nenhuma das pessoas pode receber todas as bolas. Mas, se uma delas puder receber todas as bolas devemos acrescentar duas possibilidades, obtendo  $n + 1$ .

Finalmente, temos a **situação 3**, "De quantas maneiras podemos distribuir quatro bolas diferentes em duas caixas iguais, de modo que em cada caixa fique pelo menos uma bola?" que, apesar de bastante semelhante, é diferente dos casos anteriores como veremos com as respostas encontradas.

Podemos resolver esse problema de maneira semelhante ao problema anterior, lembrando apenas que, como as caixas são iguais, as distribuições 1 e 3, uma bola em uma das caixas e três bolas na outra, é a mesma distribuição que 3 e 1, três bolas em uma das caixas e 1 na outra. Assim, temos somente duas distribuições possíveis: a distribuição 1 e 3 e a distribuição 2 e 2.

Se uma das caixas pode ficar vazia, então devemos acrescentar mais uma distribuição: a distribuição 0 e 4 ou 4 e 0.

Se forem seis bolas o procedimento é semelhante. Teremos as seguintes distribuições:

		QUANTIDADE DE BOLAS EM CADA CAIXA						
C1	0	1	2	3	4	5	6	
C2	6	5	4	3	2	1	0	

ou seja, 3 ou 4 distribuições, dependendo de se as caixas podem ou não ficar vazias.

Antes de generalizar, vejamos o que ocorre com cinco bolas. Podemos fazer as seguintes distribuições:

		QUANTIDADE DE BOLAS EM CADA CAIXA					
C1	0	1	2	3	4	5	
C2	5	4	3	2	1	0	

Como se percebe, no caso de uma quantidade par de bolas (4 ou 6, por exemplo), cada caixa pode ficar com até metade das bolas (2 ou 3). No caso de uma quantidade ímpar, 5 ou 7 por exemplo, uma das caixas fica com, no máximo, 2 ou 3, que corresponde à metade do total menos um.

**Generalizando.** Para o caso de  $n$  bolas, devemos considerar duas situações:  $n$  par e  $n$  ímpar. No caso em que  $n$  é par, teremos  $\frac{nn}{22}$  possibilidades, se nenhuma das caixas puder ficar vazia, ou  $\frac{nn}{22} + 1$  possibilidades, se uma das caixas puder ficar vazia. No caso em que  $n$  é ímpar, teremos  $\frac{n-1n-1}{22}$  ou  $\frac{n-1n-1}{22} + 1$  possibilidades, conforme uma das caixas possa ou não ficar vazia.

Para concluir essa seção apresentaremos mais três situações para serem analisadas. São elas:

**Situação 4:** De quantas maneiras podemos distribuir todas as letras A, A, A, A, B, B, C entre duas pessoas, sem qualquer restrição?

**Situação 5:** Em um parque de diversões, existem quatro dos brinquedos que Toby mais gosta de brincar, mas ele só dispõe de dinheiro para comprar dois bilhetes. De quantas maneiras Toby poderá fazer a escolha dos brinquedos?

**Situação 6:** Dentre os números de 1 a 20, quantos são os múltiplos de 7 ou de 5? E quantos são os múltiplos e de 3 ou de 5?

Como nas situações anteriores, é importante que você, antes de ler as respostas no livro, tente resolver os problemas propostos para que, a partir de suas dúvidas ou soluções você possa construir seu conhecimento.

Para a **situação 4**, denotemos por P1 e P2 as duas pessoas. A pessoa P1 pode receber 0, 1, 2, 3 ou 4 letras A e, para cada uma dessas possibilidades, a quantidade de letras A que a pessoa P2 receberá já fica automaticamente determinada: se P1 recebe 1, então P2 recebe 3, se P1 recebe 2, então P2 recebe 2, e assim por diante.

Portanto, basta sabermos quantas letras de cada (A, B e C) uma das pessoas receberá. Portanto, existem 5 maneiras de se distribuir as letras A. De maneira semelhante, existem 3 maneiras de se distribuir as letras B (P1 recebe 1, 2 ou 0 letras B) e 2 maneiras de distribuir a letra C (ou P1 recebe a letra C ou P2 recebe a letra C).

Pessoa	Letra A					Letra B			Letra C	
P1	0	1	2	3	4	0	1	2	0	1
P2	4	3	2	1	0	2	1	0	1	0

Cada uma das 5 possibilidades de distribuição da letra A pode ser combinada com as 3 possibilidades de distribuição da letra B, perfazendo as 15 possibilidades seguintes:

	A	B
PESSOA 1	0	0
		1
		2
	1	0
		1
		2
	2	0
		1
		2
	3	0
		1
		2
	4	0
		1
		2
5	0	
	1	
	2	
PESSOA 2	5	2
		1
		0
	4	2
		1
		0
	3	2
		1
		0
	2	2
		1
		0
	1	2
		1
		0
0	2	
	1	
	0	

Finalmente, cada uma das 15 distribuições anteriores pode ser combinada com as duas distribuições da letra C, totalizando 30 distribuições distintas. Note que essas 30 distribuições são consequência do produto  $5 \times 3 \times 2$ , sendo o 5 o número de distribuições da letra A, 3 o número de distribuições da letra B e 2 o número de distribuições da letra C.

PESSOA 1		
A	B	C
0	0	0
		1

Na **situação 5**, denotando por A, B, C e D os quatro brinquedos dos quais Toby mais gosta, percebemos que ele pode comprar as seguintes combinações de bilhetes

AA	AB	AC	AD
	BB	BC	BD
		CC	CD
			DD

Ao todo, são 10 combinações de dois bilhetes.

Observe que com esta solução estamos aceitando a possibilidade de Toby comprar dois bilhetes de um mesmo brinquedo. Se este não for o caso, ou seja, se Toby deve obrigatoriamente comprar bilhetes para brinquedos diferentes, então existem apenas 6 possibilidades. Aquelas destacadas na figura anterior.

**Generalizando.** Para conseguirmos a generalização, vamos examinar primeiramente o caso de cinco brinquedos, digamos A, B, C, D e E. As possíveis combinações seriam

AA	AB	AC	AD	AE
	BB	BC	BD	BE
		CC	CD	CE
			DD	DE
				EE

perfazendo um total de  $(5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 15$  combinações, se puderem ser comprados dois bilhetes de um mesmo brinquedo, ou  $15 - 5 (4 + 3 + 2 + 1 = 10)$  combinações, se não puderem ser comprados bilhetes iguais. Lembremos que no caso dos quatro brinquedos tivemos  $10 (= 4 + 3 + 2 + 1)$  combinações, se podíamos comprar bilhetes iguais e  $10 - 4 (1 + 2 + 3 = 6)$ , se não podíamos. Assim, generalizando para  $n$  brinquedos, temos

$$n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

possibilidades, se puderem ser comprados dois bilhetes para um mesmo brinquedo, ou

$$\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2},$$

somente com bilhetes para brinquedos diferentes.

Para a **situação 6**, denotemos por  $M(3)$ ,  $M(5)$  e  $M(7)$ , respectivamente, o conjunto dos múltiplos de 3, o dos múltiplos de 5 e o dos múltiplos de 7, compreendidos entre 1 e 20.

Temos que

$$M(3) = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\},$$

$$M(5) = \{5, 10, 15, 20\} \text{ e}$$

$$M(7) = \{7, 14\}.$$

O conjunto dos múltiplos de 5 ou de 7 é o conjunto

$$M(5) \cup M(7) = \{5, 7, 10, 14, 15, 20\}$$

e o conjunto dos múltiplos de 3 ou de 5 é o conjunto

$$M(3) \cup M(5) = \{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20\}.$$

Note que o número de múltiplos de 5 ou de 7 é a soma do número de múltiplos de 5 com o número dos múltiplos de 7.

$$n(M(5) \cup M(7)) = n(M(5)) + n(M(7)) = 4 + 2 = 6$$

Já o número de múltiplos de 3 ou de 5 (nove) **não** é a soma do número de múltiplos de 3 (seis) com o dos múltiplos de 5 (quatro).

### Para refletir

Você sabe explicar por quê?

No que  $M(5) \cap M(7) = \emptyset$ , enquanto  $M(3) \cap M(5) \neq \emptyset$ . Esse é o motivo. A diferença entre  $n(M(3) \cup M(5))$  e  $n(M(3)) + n(M(5))$  é exatamente o número de elementos de  $M(3) \cap M(5)$  que, na soma  $n(M(3)) + n(M(5))$  soma são contados duas vezes.

$$n(M(3) \cup M(5)) = n(M(3)) + n(M(5)) - n(M(3) \cap M(5)) = 6 + 4 - 1 = 9$$

## 4. Princípios de contagem

Nas situações da seção anterior foram apresentados e resolvidos problemas de contagem e, direta ou indiretamente, na sua resolução foi utilizado o princípio aditivo da contagem ou o princípio multiplicativo da contagem.

Nesta seção enunciaremos e aplicaremos esses princípios na contagem do número de elementos de certos conjuntos. Para tanto, denotaremos por  $n(X)$  o número de elementos do conjunto finito  $X$ .

Iniciaremos com o princípio aditivo da contagem que permite determinar o número de elementos do conjunto  $A \cup B$  em função do número de elementos dos conjuntos  $A$  e  $B$  e pode ser enunciado como segue.

- **Princípio aditivo da contagem.** Se  $A$  e  $B$  são conjuntos finitos tais que  $A \cap B = \emptyset$ , então  $A \cup B$  também é finito e vale a igualdade  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ .

Se  $A$  e  $B$  são conjuntos tais que  $A \cap B = \emptyset$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são conjuntos disjuntos.

No caso em que  $A$  e  $B$  são conjuntos disjuntos, isto é, conjuntos tais que  $A \cap B \neq \emptyset$ , vale a igualdade

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

O princípio aditivo da contagem pode ser generalizado para três ou mais conjuntos, como segue.

- **Princípio aditivo. Caso de 3 conjuntos.** Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  conjuntos finitos e dois a dois disjuntos, isto é, conjuntos tais que  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cap C = \emptyset$  e  $B \cap C = \emptyset$ . Nestas condições, vale a igualdade  $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$ .
- **Princípio aditivo. Caso geral.** Sejam  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  conjuntos dois a dois disjuntos, isto é, conjuntos tais que, para  $i \neq j$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ . Nestas condições, vale a igualdade  $n(\bigcup A_i) = \sum n(A_i)$ .

Outras generalizações possíveis para o princípio aditivo da contagem são as que seguem.

O caso anterior – dos três conjuntos – permite estender o princípio aditivo da contagem para conjuntos não disjuntos, como no corolário a seguir.

**Corolário** Se  $A$  e  $B$  são conjuntos finitos, então vale a igualdade  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ .

**Prova:** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos finitos.

Sabemos que  $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$  e que os conjuntos  $A - B$ ,  $A \cap B$  e  $B - A$ , são dois a dois disjuntos.

Assim, pela proposição temos que

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B).$$

Sabemos ainda que para os conjuntos  $A$  e  $B$  vale a igualdade  $A = (A - B) \cup (A \cap B)$  e, conseqüentemente, como  $A - B$  e  $A \cap B$  são disjuntos, temos que  $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$ .

Portanto, da igualdade

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B),$$

$$\text{temos } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Mostrando o resultado.  $\square$

O caso mais geral do princípio aditivo da contagem, aquele para  $n$  conjuntos não necessariamente disjuntos, é conhecido como princípio da inclusão e exclusão e possui o enunciado que apresentaremos a seguir, inicialmente para o caso de três conjuntos e depois na sua versão para o caso de  $n$  conjuntos.

- **Princípio da inclusão e exclusão.** Caso de 3 conjuntos. Se  $A$ ,  $B$  e  $C$  são conjuntos finitos, então

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

### Para refletir

Você consegue visualizar na igualdade anterior a inclusão e a exclusão? Tente fazê-lo.

- **Princípio da inclusão e exclusão.** Caso geral. Se  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são conjuntos finitos, então

$$n(\cup A_i) = \sum n(A_i) - \sum n(A_i \cap A_j) + \sum n(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots \\ + (-1)^{n-1} n(\cap A_i)$$

Outro princípio que foi utilizado nas atividades da seção anterior e que é muito utilizado nos problemas de contagem indireta é o princípio multiplicativo da contagem, também conhecido como princípio fundamental da contagem.

Todos nós já ouvimos falar no conhecido problema do menino que possui três calças e quatro camisas e deseja saber quantas combinações possíveis – conjunto de calça e camisa – é possível formar. Esse é um problema típico que se resolve por meio da aplicação do princípio multiplicativo da contagem, que pode ser enunciado como segue.

- **Princípio multiplicativo da contagem.** Se uma decisão  $A$  pode ser tomada de  $m$  maneiras distintas e, tomada a decisão  $A$ , outra decisão  $B$  pode ser tomada de  $n$  maneiras distintas, então o número de maneiras de tomar sucessivamente as decisões  $A$  e  $B$  é  $m \times n$ .

Como no caso do princípio aditivo, o princípio multiplicativo da contagem pode ser generalizado para uma quantidade finita de tomadas de decisão independentes e sucessivas, conforme enunciado a seguir.

- **Princípio multiplicativo da contagem. O caso geral.** Se as decisões independentes  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  podem ocorrer de  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$  maneiras, respectivamente, então o número de possibilidades de tomar a decisão  $A_1$ , seguida de  $A_2$ , seguida de  $A_3$ , e assim sucessivamente até tomar a decisão  $A_n$  é dado por  $m_1 \times m_2 \times m_3 \times \dots \times m_n$ .

**Exemplo 1. Resolvendo o problema do menino e suas calças.** O menino possui 3 calças e 4 camisas e desejamos saber quantos conjuntos de calça e camisa é possível formarmos. Para tanto, basta que observemos que cada conjunto é formado a partir de duas decisões sucessivas: a escolha da calça, que pode ser feita de 3 maneiras, e a escolha da camisa, que pode ser feita de 4 maneiras. Assim, pelo princípio multiplicativo da contagem, o número de conjuntos possíveis de serem formados é  $4 \times 3$ , que é igual a 12.

**Exemplo 2.** Com 4 homens e 5 mulheres é possível formar 20 casais. De fato, para formarmos um casal devemos fazer duas escolhas: um homem, entre os 4, e uma mulher, entre as 5. Para a escolha do homem temos 4 possibilidades e para a da mulher temos 5 possibilidades. Assim, pelo princípio multiplicativo da contagem, existem  $4 \times 5$  possibilidades de escolha de um casal.

**Exemplo 3.** Se existem 4 empresas de ônibus e 3 de avião ligando a cidade X à cidade Y, a viagem pode ser feita de ônibus ou de avião de 7 modos diferentes. A viagem pode ser feita de ônibus de 4 maneiras diferentes: O1, O2, O3 e O4, que formam o conjunto O; e de avião de 3 maneiras diferentes: A1, A2 e A3, que formam o conjunto A. Queremos determinar  $n(O \cup A)$ . Temos que  $n(O \cup A) = n(O) + n(A) - n(O \cap A)$  e como os conjuntos O e A são disjuntos,  $n(O \cup A) = n(O) + n(A) = 4 + 3 = 7$ .

**Exemplo 4.** Se dois conjuntos A e B são disjuntos e são tais que  $n(A \cup B) = 20$  e  $n(A) = 15$ , então  $n(B) = 5$ . De fato, pelo princípio aditivo da contagem, temos que  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ . Como A e B são disjuntos, temos que  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ , ou seja,  $20 = 15 + n(B)$  e, conseqüentemente,  $n(B) = 5$ .

**Exemplo 5.** Existem 2 caminhos ligando as cidades A e B, 3 caminhos ligando as cidades B e C e 4 caminhos ligando as cidades C e D. O número de caminhos diferentes ligando A e D e passando, obrigatoriamente por B e C é  $24 (= 2 \times 3 \times 4)$ .



## Síntese do Capítulo



Neste capítulo iniciamos o estudo da Análise Combinatória que é um ramo da Matemática que, entre outros objetivos, pretende determinar técnicas para contar o número de agrupamentos possíveis de se construir, sob certas condições. A partir de algumas atividades, estudamos as primeiras noções dos princípios de contagem.

Em seguida, enunciamos e aplicamos o princípio aditivo e o princípio multiplicativo da contagem em suas versões mais gerais, em alguns exemplos e atividades resolvidas. Encerramos o capítulo com o princípio da inclusão e exclusão que pode ser considerado o princípio aditivo da contagem na sua versão mais geral.

## Atividades de avaliação



1. Se 5 cavalos disputam um páreo, quantos são os resultados possíveis para os dois primeiros lugares?  
**Solução:** Devemos fazer duas escolhas: o cavalo que vai tirar o primeiro lugar e o que vai tirar o segundo. Para o cavalo que vai tirar o primeiro lugar temos cinco possibilidades. Qualquer um dos cinco cavalos pode tirar o primeiro lugar. Para cada uma das cinco possibilidades para o primeiro lugar, temos quatro possibilidades para o segundo lugar. Temos, portanto,  $20 (= 5 \times 4)$  resultados possíveis.
2. Um experimento consiste em jogar, simultaneamente, uma moeda e um dado para cima e observar os pares de resultados (moeda, dado). Quantos são os pares de resultados possíveis?
3. Uma montadora de automóveis apresenta um carro em quatro modelos diferentes e em seis cores diferentes. Um consumidor terá quantas opções de escolha para esse automóvel?
4. Quantos números naturais pares ou múltiplos de 5, com 4 algarismos distintos, podem ser formados com os algarismos 0, 3, 4, 7 e 9?
5. De quantos modos diferentes é possível pintar em um mapa, usando cores diferentes dentre seis cores dadas, os três estados da região sul do Brasil?
6. Uma sala tem 5 portas. De quantas maneiras distintas essa sala pode ser aberta? E se fossem 10 portas?

7. Verifique se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa:

Se  $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$ , então A, B e C devem ser disjuntos dois a dois.

8. Em uma escola de cursos livres, há 43 alunos fazendo o curso A, 57 o curso B e 29 o curso C. Há 10 alunos matriculados em A e B, 5 em B e C, 5 em A e C e 2 nos três cursos. Quantos alunos estão fazendo ao menos um curso nesta escola?
9. Um amigo mostrou-me 10 livros diferentes, sendo 5 de matemática, 3 de português e 2 de física, e pediu-me que escolhesse dois deles, com a condição que fossem de disciplinas diferentes. De quantas maneiras eu posso fazer minha escolha?

**Solução:** Neste problema temos um exemplo de aplicação simultânea do princípio aditivo da contagem e do princípio multiplicativo da contagem.

Observe que os livros escolhidos podem ser de matemática e português (conjunto A), de matemática e física (conjunto B) ou de português e física (conjunto C). Para determinarmos o número de elementos de cada um dos três conjuntos, podemos aplicar o princípio multiplicativo de contagem. Assim, temos que:

$$\begin{array}{l} \text{A:} \quad \frac{5}{\text{Matemática}} \times \frac{3}{\text{Português}} = 15 \\ \text{B:} \quad \frac{5}{\text{Matemática}} \times \frac{2}{\text{Física}} = 10 \\ \text{C:} \quad \frac{3}{\text{Português}} \times \frac{2}{\text{Física}} = 6 \end{array}$$

Finalmente, para determinarmos o número que estamos procurando, basta utilizarmos o princípio aditivo da contagem e determinarmos o número de elementos de  $A \cup B \cup C$ . Como A, B e C são dois a dois disjuntos, temos que  $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) = 15 + 10 + 6 = 31$ .

Assim eu posso fazer minha escolha de 31 maneiras diferentes.

10. Quantos são os números que podem ser formados com todos os dígitos 1, 1, 1, 1, 2 e 3?

**Solução:** Observe que temos quatro algarismos 1, um algarismo 2 e um algarismo três para formarmos os números.

Vamos inicialmente distribuir os quatro algarismos 1, deixando um espaço entre eles. Assim:

\_\_\_\_\_ 1 \_\_\_\_\_ 1 \_\_\_\_\_ 1 \_\_\_\_\_ 1 \_\_\_\_\_

Agora devemos escolher a posição de um dos outros algarismos, digamos o 2.

Podemos colocar o algarismo 2 no lugar de qualquer um dos traços. Assim, temos 5 possibilidades de escolha para o algarismo 2. Consideremos uma dessas posições.

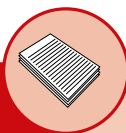
\_\_\_\_\_ 1 \_\_\_\_\_ 2 \_\_\_\_\_ 1 \_\_\_\_\_ 1 \_\_\_\_\_ 1 \_\_\_\_\_

Para essa escolha (e, portanto, para qualquer outra escolha) temos 6 possibilidades para colocar o algarismo 3, uma vez que o 3 pode ocupar o lugar de qualquer um dos traços.

Assim, é possível formar  $30 (= 5 \times 6)$  números diferentes.

11. Quantos são os números que podem ser formados com todos os dígitos 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2 e 3?
12. Quantos são os divisores do número 360? Determine uma fórmula que permita calcular o número de divisores de um número qualquer, justificando seu raciocínio.
13. Em um ramal de metrô há 10 estações. Cada tipo de bilhete permite viajar de uma estação para outra. Assim, para irmos da estação A para a estação B é necessário 1 bilhete e para irmos de B para A é necessário outro bilhete. Quantos tipos de bilhetes de passagem são necessários para permitir a viagem entre duas estações quaisquer?
14. De quantas maneiras é possível sentar cinco casais em 10 cadeiras em fila, se marido e mulher devem sentar sempre juntos?
15. De quantas maneiras podemos escolher uma consoante e uma vogal de um alfabeto formado por 12 consoantes e 5 vogais?

## Texto complementar



### Texto 1: Análise Combinatória

*Texto extraído do livro Tópicos de Matemática, v.2, de Gelson Iezzi e outros. São Paulo: Atual Editora, 1980. p.104. Adaptado.*

A Análise Combinatória trata basicamente dos problemas de contagem das possibilidades com que um acontecimento pode ocorrer.

Contar diretamente os possíveis resultados de uma experiência é, em geral, muito trabalhoso se as possibilidades são muito numerosas. Por isso desenvolveram-se as chamadas técnicas de contagem.

As afirmações a seguir constituem-se problemas típicos da Análise Combinatória: com 5 professores podemos formar 10 comissões diferentes, cada uma com dois membros; se existem 4 empresas de ônibus ligando São Paulo ao Rio, e 3 de aviões, a viagem pode ser feita de ônibus ou de avião de 7 modos diferentes; se 5 cavalos disputam um páreo, para os dois primeiros lugares podemos ter 20 resultados distintos.

A Combinatória estuda o número de possibilidades de ocorrência de um determinado acontecimento e seu estudo é de grande interesse nos mais variados campos: o químico o utiliza, ao estudar as possíveis uniões entre os átomos; o diretor de uma escola, ao distribuir os professores pelas classes; o linguista, ao estudar os possíveis significados dos símbolos de um idioma desconhecido; o diretor de trânsito, ao determinar quantos símbolos são necessários para emplacar todos os automóveis do seu Estado.

Mais geralmente, a Combinatória é utilizada na indústria e na ciência em todos os níveis, e, associada à Probabilidade e à Estatística, torna-se um instrumento poderoso, responsável, muitas vezes, por tomadas de decisões até na área governamental.

## Texto 2: Estratégia para resolver problemas de Combinatória

Texto extraído do livro *A Matemática do ensino médio, v.2*, de Elon Lages Lima e outros. Rio de Janeiro: SBM, 1990. pp.86-87. Adaptado.

Neste livro os autores apontam a seguinte estratégia para resolver problemas de Combinatória:

**Postura.** Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada e ver que decisões devemos tomar.

Por exemplo, se o problema pede para construir um número de três algarismos, devemos nos colocar no papel dessa pessoa que deve escrever um número de três algarismos; se o problema pede para pintar uma bandeira, devemos nos colocar no papel dessa pessoa; e assim por diante.

**Divisão.** Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples.

Por exemplo, se o problema pede para formamos um casal, podemos dividi-lo em escolher o homem e, em seguida, escolher a mulher; formar um número de três dígitos pode ser dividido em escolher o algarismo das centenas, o das dezenas e o das unidades.

**Não adiar dificuldades.** Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

## Referências



DANTE, Luiz R. **Matemática: contexto e aplicações**, v.2. São Paulo: Editora Ática, 2004.

DASSIE, Bruno Alves e outros. **Curso de Análise Combinatória e Probabilidade: aprendendo com a resolução de problemas**. Rio de Janeiro: Ed. Ciência Moderna, 2009.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar**, v.5: Análise combinatória e Probabilidade. São Paulo: Atual Editora, 2004.

LIMA, Elon Lages e outros. **Temas e problemas**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2003.

LIMA, Elon Lages e outros. **A matemática do ensino médio**, v.2. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

MORGADO, Augusto C. de O. e outros. **Análise Combinatória e Probabilidade: com as soluções dos exercícios**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

SANTOS, J. Plínio O. e outros. **Introdução à análise combinatória**. Campinas: Ed. da UNICAMP, 2002.

SCHEINERMAN, E. R. **Matemática discreta**. São Paulo: Thomson Learning Edições, 2006.



# Capítulo

# 2

## Arranjos e Permutações e o Fatorial de um Número



## Objetivos

- Conceituar e exemplificar arranjos e permutações simples e arranjos e permutações com elementos repetidos.
- Determinar o número de arranjos e permutações simples e arranjos e permutações com elementos repetidos.
- O fatorial de um número e utilizá-lo na fórmula para determinar o número de arranjos e de permutações.
- Conceituar permutações circulares de  $n$  objetos e determinar seu número em função de  $n$ .

## 1. Introdução

Neste capítulo abordaremos alguns tipos especiais de agrupamentos que, por se repetirem com bastante frequência, recebem nomes especiais: os arranjos e as permutações.

Aproveitaremos o estudo das permutações para introduzir o conceito de fatorial de um número inteiro positivo, estendendo a definição aos números inteiros 0 e 1.

Estudaremos os agrupamentos conhecidos como arranjos simples e com elementos repetidos e as permutações simples, com elementos repetidos e circulares.

## 2. Arranjos simples e arranjos com elementos repetidos

Nesta seção trataremos dos arranjos simples e dos arranjos com elementos repetidos. Esses agrupamentos consistem na escolha e ordenação de parte dos elementos de uma coleção finita de objetos dados.

Por exemplo, dentre os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 podemos escolher três e formar com eles um número de três algarismos distintos - um arranjo simples - ou com algarismos repetidos - um arranjo com elementos repetidos. Os seguintes números, entre outros, são arranjos simples desses algarismos to-



mados 3 a 3: 123, 324, 154, 135, 145, 132. Já os números 113, 235, 233, 344, 555, 432, 454 são exemplos de arranjos desses algarismos tomados 3 a 3.

Nosso interesse é determinar o número de arranjos simples e o número de arranjos desses algarismos tomados 3 a 3.

### Para refletir

Você sabe determinar o número de arranjos simples de 5 objetos tomados 3 a 3? E se forem arranjos com elementos repetidos, você sabe determinar o número deles?

Inicialmente temos as seguintes definições.

- **Arranjo simples.** Dados os números inteiros positivos  $n$  e  $p$ , com  $1 \leq p \leq n$ , um arranjo simples dos  $n$  objetos distintos  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  tomados  $p$  a  $p$  é qualquer ordenação de  $p$  objetos diferentes escolhidos dentre esses objetos.
- **Arranjo com elementos repetidos.** Dados os números inteiros positivos  $n$  e  $p$ , com  $1 \leq p \leq n$ , um arranjo com repetição dos  $n$  objetos distintos  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  tomados  $p$  a  $p$  é qualquer ordenação de  $p$  objetos, diferentes ou não, escolhidos dentre esses objetos.

Temos ainda que um arranjo simples ou com elementos repetidos de  $n$  objetos tomados 1 a 1 é qualquer um dos  $n$  objetos.

**Exemplo 1.** Se de uma sala com 20 alunos premiarmos os 5 primeiros colocados, com prêmios diferentes, cada premiação possível é um arranjo simples dos 20 alunos tomados 5 a 5.

**Exemplo 2.** As seqüências de letras  $abc, acd, bca, cdb, e abd$  podem ser pensadas como arranjos simples das letras  $a, b, c, e d$  tomadas 3 a 3.

**Exemplo 3.** As seqüências de letras  $abc, acd, bba, cdb, e aaa$  podem ser pensadas como arranjos com elementos repetidos das letras  $a, b, c, e d$  tomadas 3 a 3.

Agora que definimos arranjos simples e arranjos com elementos repetidos, e vimos alguns exemplos de onde encontrá-los, vamos organizar o nosso pensamento para determinar o número de tais agrupamentos.

## 2.1. Calculando o número de arranjos simples

Suponha que queiramos saber quantos números de três algarismos distintos é possível formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5. Sabemos que devemos escolher um algarismo, dentre os cinco, para ocupar a ordem das centenas, outro, entre os quatro que sobraram, para ocupar o algarismo das dezenas e, finalmente, outro, entre os três que restam, para ocupar a ordem das unidades.



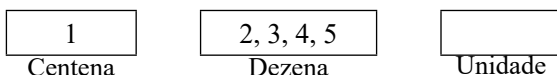
**Para refletir**

Você sabe explicar o motivo da redução cinco, quatro e três? Experimente.

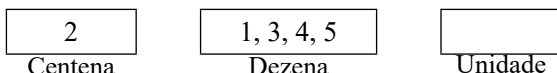
O algarismo das centenas pode ser 1, 2, 3, 4 ou 5.



Se o algarismo da ordem das centenas for 1, por exemplo, então o da dezena pode ser 2, 3, 4 ou 5



Se for 2, então o da dezena pode ser 1, 3, 4 ou 5



E assim por diante.

Assim, para cada uma das 5 escolhas possíveis para o algarismo das centenas, temos 4 escolhas possíveis para o algarismo das dezenas, perfazendo um total de  $(5 \times 4 =) 20$  possibilidades.

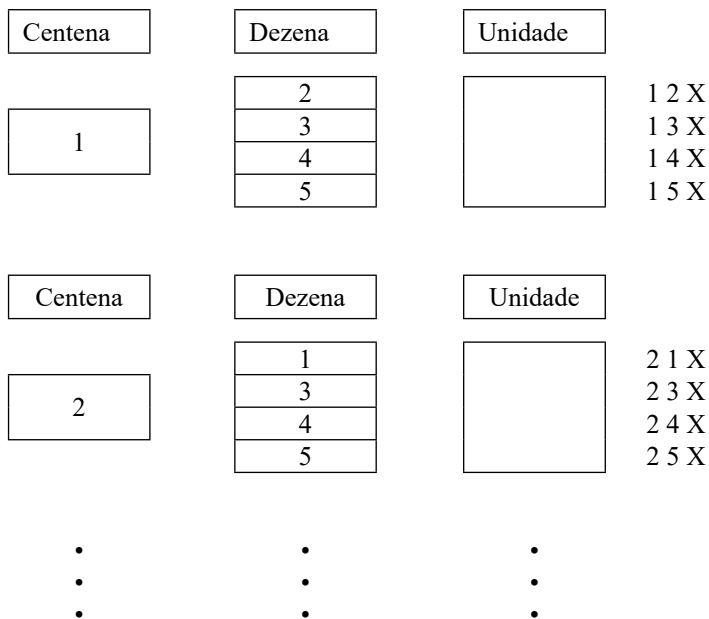


Figura: 5 x 4 possibilidades

Escolhidos o algarismo da centena e o da dezena, restam três algarismos que poderão ocupar a ordem das unidades, perfazendo assim 60 (= 5 x 4 x 3) números de três algarismos distintos.

Centena	Dezena	Unidade	
1	2	3	1 2 3
		4	1 2 4
		5	1 2 5
1	3	2	1 3 2
		4	1 3 4
		5	1 3 5
⋮	⋮	⋮	
⋮	⋮	⋮	
⋮	⋮	⋮	

Figura: 5 x 4 x 3 possibilidades

### Calculando o número de arranjos com elementos repetidos.

Se os algarismos não tivessem que ser diferentes, então para a ordem das centenas teríamos 5 possibilidades de escolha dos algarismos, uma vez que qualquer dos algarismos 1, 2, 3, 4, ou 5 poderia ocupá-la; para a ordem das dezenas, uma vez que os algarismos podem ser iguais, teríamos novamente 5 possibilidades de escolha – 1, 2, 3, 4, ou 5 –; e para o algarismo das unidades teríamos, ainda, 5 possibilidades de escolha – 1, 2, 3, 4, ou 5 –; perfazendo 125 (= 5 x 5 x 5) números de três algarismos.

Note que não houve a redução de cinco para quatro e para três possibilidades, porque os algarismos podem ser repetidos.

Com isso, concluímos os resultados seguintes.

- **Número de arranjos simples.** O número de arranjos simples de  $n$  objetos tomados  $p$  a  $p$  pode ser determinado pelo produto  $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times \dots \times (n - p + 1)$ .

Indicando esse número por  $A_{n,p}$ , temos

$$A_{n,p} = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times \dots \times (n - p + 1).$$

- **Número de arranjos com repetição.** O número de arranjos com repetição de  $n$  objetos tomados  $p$  a  $p$  ( $1 < p \leq n$ ) pode ser determinado pelo produto  $n \times n \times n \times \dots \times n$ ,  $p$  fatores.

Indicando esse número por  $(AR)_{n,p}$ , temos

$$(AR)_{n,p} = n \times n \times n \times n \times \dots \times n = n^p.$$

Note que o número de arranjos quer simples quer com elementos repetidos de  $n$  objetos tomados 1 a 1 é igual a  $n$ .

**Exemplo 4.** O número de maneiras de premiar, com prêmios diferentes, os 5 primeiros colocados de uma turma de 20 alunos é dado por  $A_{20,5}$  e é igual a  $20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 = 1.860.480$ .

**Exemplo 5.** O número de sequências de três letras distintas que podemos formar com as letras  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , e  $d$  é dado por  $A_{4,3}$ , sendo igual a  $4 \times 3 \times 2 = 24$ .

**Exemplo 6.** O número de sequências de três letras, podendo ter letras iguais ou distintas, que podemos formar com as letras  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , e  $d$  é dado por  $(AR)_{4,3}$ , e é igual a  $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ .

### 3. Permutações simples e permutações com elementos repetidos

Nesta seção trataremos das permutações simples e das permutações com elementos repetidos.

O nome permutação vem de permutar que significa trocar e aqui não será diferente. Iremos trocar de posição os elementos de um conjunto dado, ordenando-os.

Na definição de arranjo de  $n$  objetos distintos, tomados  $p$  a  $p$ , não excluimos a possibilidade de termos  $n = p$ . Assim, qualquer ordenação dos algarismos 1, 2 e 3 é um arranjo de 3 objetos tomados 3 a 3 e cada uma delas é apenas uma troca de lugar entre os algarismos; qualquer fila formada com as mesmas 5 pessoas é uma ordenação dessas pessoas e é, portanto, um arranjo das 5 pessoas tomadas 5 a 5. A esse tipo de agrupamento chamamos de permutação. Mais precisamente, temos a definição seguinte.

#### 3.1. Permutação simples

Dados  $n$  objetos distintos, uma permutação simples desses objetos é qualquer ordenação dos mesmos.

Conforme dissemos anteriormente, uma permutação de  $n$  objetos distintos é um arranjo simples desses  $n$  objetos tomados  $n$  a  $n$ .

**Exemplo 1.** Qualquer fila formada com 5 pessoas é uma permutação dessas pessoas.

**Exemplo 2.** Qualquer ordenação que você der ao arrumar 4 livros na prateleira de uma estante é uma permutação dos quatro livros.

Anagramas de uma palavra são palavras (com significado semântico ou não) que se pode formar com todas as letras da palavra dada, ou seja, uma reordenação das letras da palavra.

**Exemplo 3.** A palavra ROMA é um anagrama da palavra AMOR e, consequentemente, uma permutação simples das letras A, M, O e R. Outro anagrama e outra permutação simples de AMOR é MORA.

### 3.2. Calculando o número de permutações simples

Conforme dissemos anteriormente, uma permutação de  $n$  objetos é um arranjo desses objetos tomados  $n$  a  $n$ . Assim, o número de permutações de  $n$  objetos pode ser calculado pela fórmula  $A_{n,n}$  e, portanto, é igual a  $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1$ . O número de permutações de  $n$  objetos é denotado por  $P_n$  e, portanto,

$$P_n = A_{n,n} = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1.$$

**Exemplo 4.** O número de filas distintas que é possível formar com 5 pessoas é  $P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ .

**Exemplo 5.** O número de maneiras distintas de se arrumar 4 livros na prateleira de uma estante é  $P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ .

**Exemplo 6.** O número de anagramas da palavra AMOR é  $P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ .

### 3.3. Permutações com elementos repetidos.

Uma permutação de  $n$  objetos com elementos repetidos é qualquer ordenação de  $n$  objetos dos quais, pelo menos dois, são iguais.

Por exemplo, a palavra IRACEMA é um anagrama da palavra AMÉRICA e é uma permutação das sete letras A, M, E, R, I, C, A com repetição de duas letras A.

Em um anagrama não se leva em consideração acentos nem cedilhas.

**Contando o número de permutações com elementos repetidos.** Para entender o que vem a ser permutação de  $n$  objetos com elementos repetidos e calcular seu número, vamos tomar como exemplo os anagramas da palavra ESSES.

Note que em ESSES existem duas letras iguais a E e três letras iguais a S. Assim, os seus anagramas são somente as palavras

ESSES      ESSSE      EESSS      EESSS      SESSE  
SESES      SSESE      SSEES      SSSEE      SEESS

É claro que isso ocorre por conta das letras iguais, pois se todas as letras fossem diferentes teríamos  $120 (= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)$  anagramas.

Para saber como determinar o número de anagramas com elementos repetidos, vamos tomar um desses anagramas e ver como ele se comporta com relação aos 120 possíveis. Para tanto vamos pensar o anagrama ESSES como se tivesse as cinco letras distintas. Assim:  $E_1 S_1 S_2 E_2 S_3$ . Dentre os 120 anagramas possíveis, 12 deram origem a ESSES. São eles:

### Grupo 1

$$E_1 S_1 S_2 E_2 S_3$$

$$E_1 S_1 S_3 E_2 S_2$$

$$E_1 S_2 S_1 E_2 S_3$$

$$E_1 S_2 S_3 E_2 S_1$$

$$E_1 S_3 S_1 E_2 S_2$$

$$E_1 S_3 S_2 E_2 S_1$$

### Grupo 2

$$E_2 S_1 S_2 E_1 S_3$$

$$E_2 S_1 S_3 E_1 S_2$$

$$E_2 S_2 S_1 E_1 S_3$$

$$E_2 S_2 S_3 E_1 S_1$$

$$E_2 S_3 S_1 E_1 S_2$$

$$E_2 S_3 S_2 E_1 S_1$$

Os anagramas do grupo 1 foram obtidos deixando-se  $E_1$  e  $E_2$  nas suas posições originais e permutando-se as três letras S entre si, dando origem a 6. Os do grupo 2 foram obtidos a partir dos anagramas do grupo 1, permutando-se as duas letras E entre si, cada um dando origem a outro. Portanto, cada um dos 10 anagramas listados anteriormente foram originários de 12 anagramas obtidos pela permutação das duas letras E e das três letras S.

Assim, para determinarmos o número das permutações da palavra ESSES temos que dividir as 120 permutações (pensadas como letras diferentes) pelas permutações das três letras S e pelas permutações das duas letras E.

Denotando por  $P_5^{2,3}$  o número de anagramas da palavra ESSES, temos que  $P_5^{2,3} = \frac{P_5}{P_2 P_3}$ .

**Generalizando.** O número de permutações de  $n$  objetos com repetição de  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$  desses objetos é denotado por  $P_n^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_r}$  e pode ser calculado como segue:

$$P_n^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_r} = \frac{P_n}{P_{a_1} P_{a_2} \dots P_{a_r}}$$

**Exemplo 7.** O número de anagramas da palavra MARIANA é  $P_{7,3}$  que é igual a 840. De fato, temos que  $P_7^3 = \frac{P_7}{P_3} = \frac{1 \times 2 \times \dots \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 840$ .

**Exemplo 8.** A quantidade de números de 5 algarismos que podemos formar usando todos os algarismos 1, 1, 1, 2 e 2 é  $P_5^{3,2} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 10$ .

## 4. O fatorial de um número e o número de arranjos e o de permutações

Nesta seção apresentaremos uma notação para um produto que aparece com bastante frequência na análise combinatória e que simplificará bastante o nosso trabalho.

Como vimos, toda vez que desejamos calcular o número de permutações de  $n$  objetos, nos deparamos com números do tipo:

- Para  $n = 2$ :  $1 \times 2$
- Para  $n = 3$ :  $1 \times 2 \times 3$
- Para  $n = 4$ :  $1 \times 2 \times 3 \times 4$ ; e assim por diante.

Como produtos dessa natureza vão aparecer com bastante frequência na resolução de exercícios relacionados à contagem de objetos ou agrupamentos, é razoável que criemos um símbolo para representá-los.

Temos, portanto, a seguinte definição.

### 4.1. Fatorial de um número

Dado o número inteiro  $n$ , com  $n \geq 0$ , o fatorial de  $n$  é indicado pelo símbolo  $n!$  (que se lê:  $n$  fatorial ou fatorial de  $n$ ) e definido por:

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 1, & \text{se } n = 1 \\ 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n, & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

**Exemplo 1.** O fatorial de 4 é indicado por  $4!$  que, por sua vez, é igual a  $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ .

**Exemplo 2.** Para calcular o valor da expressão  $\frac{10!}{8! 2!}$ , basta desenvolvermos os fatoriais e efetuarmos as simplificações, quando for o caso. É importante observarmos que  $10! = 10 \times 9! = 10 \times 9 \times 8!$ . E, portanto, teremos:

$$\frac{10!}{8! 2!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8! 2!} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45.$$

De maneira geral, temos que  $n! = n \times (n - 1)! = n \times (n - 1) \times (n - 2)!$ .

**Exemplo 3.** Para resolver a equação  $(n - 4)! = 120$ , basta observarmos que, pelo teorema fundamental da aritmética, se  $p$  e  $q$  são números inteiros maiores do que ou iguais a 1, e tais que  $p! = q!$ , então  $p = q$ . Notemos ainda que  $120 = 5!$ . Assim, da igualdade  $(n - 4)! = 120$ , segue que  $(n - 4)! = 5!$  e, conseqüentemente,  $n - 4 = 5$ , ou seja,  $n = 9$ .

O teorema fundamental da aritmética afirma que todo número inteiro maior do que 1 ou é primo ou se escreve de maneira única como um produto de números primos.

De posse desta notação, podemos reescrever o número de permutações de  $n$  objetos e o número de arranjos de  $n$  objetos tomados  $p$  a  $p$  como segue.

- **A notação de fatorial e o número de permutações simples.** Como sabemos, o número de permutações simples de  $n$  objetos é indicado por  $P_n$  e calculado por

$$P_n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1.$$

De acordo com a definição de fatorial de um número, temos que

$$P_n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = n!.$$

- **A notação de fatorial e o número de arranjos simples.** Como foi definido anteriormente, o número de arranjos simples de  $n$  objetos tomados  $p$  a  $p$  é indicado por  $A_{n,p}$  e pode ser calculado por

$$A_{n,p} = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - p + 1).$$

Com a definição de fatorial de um número, essa igualdade pode ser reescrita como

$$A_{n,p} = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - p + 1) = \frac{n!}{(n - p)!}.$$



- **A notação de fatorial e o número de permutações com elementos repetidos.** Vimos que o número de permutações de  $n$  objetos com repetição de  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_r$  objetos pode ser calculado por

$$P_n^{n_1, n_2, n_3, \dots, n_r} = \frac{P_n}{P_{n_1} \cdot P_{n_2} \cdot \dots \cdot P_{n_r}}.$$

A definição de fatorial de um número nos permite escrever

$$P_n^{n_1, n_2, n_3, \dots, n_r} = \frac{P_n}{P_{n_1} \cdot P_{n_2} \cdot \dots \cdot P_{n_r}} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}.$$

**Exemplo 3.** O número de filas distintas, no exemplo 4, pode ser indicado por  $P_5 = 5!$ .

**Exemplo 4.** O número de sequências de três letras distintas no exemplo 2.2.05 pode ser indicado por  $A_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = 4!$

**Exemplo 5.** A quantidade de números de 5 algarismos que podemos formar usando todos os algarismos 1, 1, 1, 2 e 2 pode ser indicada por  $P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!2!}$ .

## 5. Permutação Circular

Até agora vimos que com 3 pessoas, A, B e C, é possível formarmos três filas ou ordenações distintas. São elas: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA. Cada uma dessas filas ou ordenações é dita uma permutação simples das três pessoas, é formada pelas mesmas pessoas e difere das outras, apenas, pela ordem em que as pessoas se encontram. Assim, as permutações ABC e CAB, por exemplo, são compostas pelas pessoas A, B e C, sendo que em ABC, A é o primeiro, B o segundo e C o terceiro, enquanto em CAB, C é o primeiro, A é o segundo e B é o terceiro.

Vimos também que o número de permutações de  $n$  objetos pode ser calculado pela igualdade

$$P_n = n!$$

em que o símbolo  $n!$  representa o produto

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1,$$

para qualquer número natural  $n$ ,  $n > 1$ .

Suponha agora que queiramos distribuir as três pessoas, A, B e C, em torno de uma mesa circular.

### Para refletir

Será que teremos as mesmas seis possibilidades? Pense, antes de prosseguir.

Tomemos as seis permutações anteriores e façamos sua distribuição em torno de um círculo, conforme a figura a seguir.

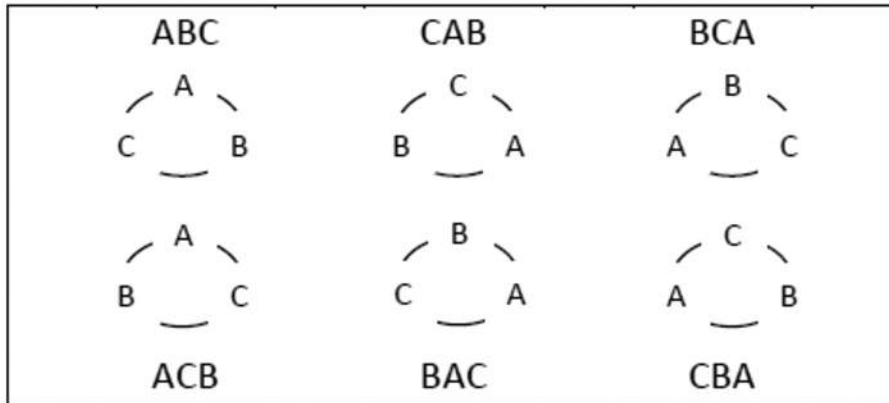


Fig. Distribuição das permutações simples de 3 objetos em torno de um círculo

Isto sugere a definição que segue.

- **Permutação circular.** Uma permutação circular de  $n$  objetos distintos é qualquer distribuição desses objetos em torno de um círculo (real ou imaginário).

Notemos, entretanto, que se fizermos uma rotação de  $120^\circ$  (aproximadamente) em torno do centro do círculo de qualquer uma das permutações da primeira linha obteremos outra permutação da primeira linha. E se fizermos uma rotação de  $120^\circ$  (aproximadamente) de qualquer uma das permutações da segunda linha obteremos uma permutação da segunda linha.

Esta situação nos leva às seguintes questões: Quantas destas distribuições podem, realmente, ser consideradas diferentes? Como fazer distinção entre duas distribuições deste tipo?

Uma boa maneira de tentar resolver esse problema é escolher um sentido - horário ou anti-horário - para percorrer a circunferência do círculo e anotar os objetos na sequência que vão aparecendo. Assim, seguindo a circunferência da distribuição I (primeira linha e primeira coluna) no sentido horário, e começando pela pessoa mais acima (pessoa A), obtemos a seguinte sequência:

$$A - B - C - A - B - C - \dots$$

procedendo de maneira semelhante para a distribuição II (primeira linha e segunda coluna), obtemos a sequência:

$$B — C — A — B — C — A — \dots$$

e, finalmente, para a distribuição III (segunda linha e primeira coluna), obtemos a sequência:

$$A — C — B — A — C — B — \dots$$

Vistas como uma fila ou permutação simples, é claro que estas três sequências são diferentes. Nas duas primeiras, o primeiro objeto de uma é diferente do primeiro objeto da outra, por exemplo. Na segunda e na terceira os primeiros objetos também são diferentes. Com relação à primeira e à terceira, o segundo elemento de uma é diferente do segundo elemento da outra. Assim, percebe-se claramente que, como permutações simples, as três são diferentes. Acontece que em uma distribuição circular não existe um primeiro nem um segundo. Qualquer um pode ser o primeiro, dependendo de por onde se quer começar a enumeração. Assim, uma alternativa para se tentar comparar as distribuições anteriores é seguir um sentido - horário ou anti-horário - e, ao invés de começar sempre pela mesma posição, começar pelo mesmo objeto. Desta forma, as distribuições anteriores, na forma de sequência, ficariam:

$$\text{I: } A — B — C — A — B — C — \dots$$

$$\text{II: } A — B — C — A — B — C — \dots$$

$$\text{III: } A — C — B — A — C — B — \dots$$

Observemos que procedendo desta maneira as duas primeiras distribuições passam a ser iguais, enquanto a terceira é diferente. As sequências que ficaram iguais são exatamente as da mesma linha, ou seja, aquelas que se tornam iguais por rotações sucessivas de  $120^\circ$ , em torno do centro do círculo, no sentido horário.

Isto sugere a definição que segue.

- **Distribuições circulares iguais.** Duas distribuições circulares de  $n$  objetos distintos são iguais se uma pode ser obtida da outra por meio de uma rotação em torno do centro do círculo, no sentido horário ou anti-horário.

De acordo com o que foi feito, existem apenas duas permutações circulares dos 3 objetos A, B e C. Começando com A, são elas ABC e ACB.

### 5.1. Calculando o número de permutações circulares

Para calcular o número de permutações circulares de  $n$  objetos distintos, podemos proceder de duas maneiras. A primeira é procedermos como fizemos anteriormente e escolhermos um dos objetos para iniciar a distribuição e um sentido - horário ou anti-horário - para percorrer a circunferência. Assim, devemos escolher o primeiro, logo após o escolhido, o segundo, o terceiro, e, finalmente, o último que é o de ordem  $n - 1$ . Assim, devemos ordenar  $n - 1$  objetos. Isto sugere a seguinte proposição.

### a) Número de permutações circulares

O número de permutações circulares de  $n$  objetos distintos é indicado por  $(PC)_n$ , valendo a igualdade  $(PC)_n = (n - 1)!$ .

Outra maneira de determinar o número de permutações circulares de  $n$  objetos distintos é considerar a todas as permutações de  $n$  objetos e contar quantas delas são iguais como permutações circulares, ou seja, quantas são obtidas por rotação em torno da origem do círculo. Para exemplificar, tomemos os objetos A, B, C e D. Sabemos que com esses 4 objetos é possível fazermos as 24 permutações distintas listadas a seguir.

ABCD	DABC	CDAB	BCDA
ABDC	CABD	DCAB	BDCA
ACBD	DACB	BDAC	CBDA
ACBD	BACD	DBAC	CDBA
ADBC	CADB	BCAD	DBCA
ADCB	BADC	CBAD	DCBA

Em cada linha, temos, apenas, uma rotação da permutação que se encontra na primeira coluna e, portanto, são todas iguais. Isso pode ser visto se observarmos que, em cada linha, os objetos foram se deslocando uma posição para frente. Assim, para contarmos o número de permutações circulares de 4 objetos, devemos tomar o número total de permutações simples e dividir por 4, que é o número de permutações simples que são iguais a uma dada permutação. Portanto, podemos escrever

$$(PC)_4 = \frac{4!}{4} = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6.$$

**Generalizando.** Para o caso de  $n$  objetos, basta observarmos que, em cada linha teremos  $n$  permutações iguais, obtidas pelo deslocamento para frente do objeto que se encontra na primeira posição até ele chegar à última posição. Assim, o número de permutações circulares de  $n$  objetos é dado por

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n - 1)!$$

**Exemplos 1.** Quatro meninos podem formar uma roda de ciranda de  $(PC)_4 = 3!$  maneiras diferentes.

**Exemplos 2.** O número de rodas de ciranda distintas que se pode formar com seis meninos, nas quais dois deles sempre estão juntos, é  $2_x(PC)_5 = 2 \times 4!$ .

## Síntese do Capítulo



Dando prosseguimento ao nosso estudo de análise combinatória, neste capítulo abordamos os agrupamentos conhecidos como arranjos e aqueles conhecidos como permutações. Vimos que as permutações são casos particulares dos arranjos e que tanto estes quanto aqueles podem ser classificados como simples ou com elementos repetidos.

Vimos também que o número de arranjos simples de  $n$  objetos tomados  $p$  a  $p$  é indicado por  $A_{n,p}$  e o de permutações simples de  $n$  objetos é indicado por  $P_n$ . Já os arranjos com repetição de  $n$  objetos tomados  $p$  a  $p$  e as permutações de  $n$  objetos com repetição de elementos são denotadas por  $(AR)_{n,p}$  e  $P_n^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_r}$ , respectivamente.

Aprendemos a calcular o número de cada um desses agrupamentos, diferenciando uns dos outros e introduzimos a notação fatorial que nos permite abreviar o produto da sequência de números naturais desde 1 até  $n$ , indicando tal produto por  $n!$ . Por fim, estudamos as permutações circulares, que consistem na distribuição de objetos ou pessoas em torno de um círculo, formando sequências ordenadas e determinando a quantidade destas sequências em função do número de objetos ou de pessoas.

## Atividades de avaliação



1. Quantos números pares, com quatro algarismos distintos, é possível formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6?
2. Quantos números compreendidos entre 200 e 1000, com algarismos distintos, é possível formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5? E se os algarismos puderem ser iguais?

3. Resolva as equações:

$$A_{x,3} = 4A_{x,2}$$

$$A_{n,2} + A_{n-1,2} + A_{n-2,2} = 20$$

4. Calcule o valor de  $\frac{A_{5,2} + A_{6,1}}{A_{10,2} - A_{5,3}}$ .

5. Resolva a equação  $P_n = 24A_{n,3}$ .

6. Calcular o valor de:

a)  $\frac{4! - 2! - 0!}{1!}$

b)  $\frac{3!}{3! + 4!}$

c)  $\frac{31!}{32! \cdot 2!}$

7. Simplifique a expressão

a)  $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$

b)  $\frac{(n-2)!(n+1)!}{(n+1)!}$

c)  $\frac{(n-1)!n!}{(n+1)!}$

8. Resolva as equações

a)  $x! = 15(x-1)!$

b)  $(n-2)! = 2(n-4)!$

c)  $\frac{(n+1)!}{n!} = 5$

9. Determine o inteiro  $n$ , sabendo que  $(n+4)! + (n+3)! = 15(n+2)!$ .

10. Simplifique a expressão  $\frac{(n+3)!(n-1)!}{(n-2)!(n+2)!}$

11. Determine o inteiro  $n$ , sabendo que  $\frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!} = 7n$ .

12. Determine os valores de  $n$  tais que  $\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{42}$ .

**Solução:** Note inicialmente que

$$\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{n!}{(n+2)(n+1)n!} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

Assim, a igualdade  $\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{42}$  fica  $\frac{1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{42}$ .

Que nos dá a equação do segundo grau  $n^2 + 3n - 40 = 0$ , cujas raízes são 5 e -8.

Como não está definido o fatorial de um número negativo, temos que a solução da equação dada é  $n = 5$ .

13. Determine a quantidade de números distintos que podemos fazer usando todos os algarismos 2, 2, 3, 4 e 4.
14. De quantas maneiras podemos dispor 4 casais em torno de uma mesa circular, se marido e mulher devem sentar juntos? E se, além disso, duas mulheres não podem sentar juntas?

**Solução:** Denotemos por H1, H2, H3 e H4 os quatro maridos e M1, M2, M3 e M4 suas respectivas mulheres. Vamos inicialmente dispor de forma circular os 4 maridos. Sabemos que existem as 6 maneiras de executarmos essa tarefa:

- H1, H2, H3 e H4
- H1, H2, H4 e H3
- H1, H3, H2 e H4
- H1, H3, H4 e H2
- H1, H4, H2 e H3
- H1, H4, H3 e H2.

Tomemos uma dessas distribuições e observemos os lugares onde as esposas podem sentar.

① H1 ② H2 ③ H3 ④ H4 ⑤

A esposa M1 pode sentar nas posições ① ou ②. Se a esposa M1 sentar na posição ①, teremos duas posições para esposa M2 sentar, quais sejam, as posições ② ou ③.

M1 H1 ② H2 ③ H3 ④ H4 ⑤

O mesmo ocorre se M1 sentar na posição ②, teremos duas posições para M2 sentar. As posições ⑥ e ③.

H1 M1 ⑥ H2 ③ H3 ④ H4 ⑤

De maneira semelhante, escolhida uma das seis distribuições dos maridos, cada esposa tem duas possibilidades de escolha para sentar. Portanto, temos ao todo  $3! \times 2^4$ , possibilidades de distribuição dos casais em torno da mesa.

15. Determine o número  $x$ ,  $x \geq 2$ , de modo que se tenha  $A_{x,2} = 110$ .
16. Com os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9, quantos números inteiros, compreendidos entre 100 e 1000, de algarismos distintos, podemos formar?

17. Uma corrida é disputada por 5 atletas. Quantas são as possibilidades de premiação nos três primeiros lugares? E se forem 10 atletas? Generalize o resultado para  $n$  atletas.
18. Uma senhora quer usar ao mesmo tempo 2 anéis, colocando-os em dedos diferentes da mão esquerda ou da mão direita, ambos na mesma mão, excetuando-se os dedos polegares. De quantas maneiras ela pode fazê-lo?
19. Quantos são os anagramas distintos da palavra ARARA?

**Solução:** A palavra ARARA possui 5 letras sendo 3 letras A e 2 letras R. Assim, o número de anagramas dessa palavra é dado por  $P_5^{2,3}$ , que é igual a 10.

20. Quantos e quais são os anagramas da palavra ATA? E da palavra PETE-LECO?
21. De quantas maneiras distintas podemos distribuir 7 bombons diferentes em uma caixa com 7 lugares, como na figura ao lado?
22. Quantas pulseiras distintas, de oito contas, podem ser feitas com 8 contas de cores diferentes?

**Solução:** Em princípio podemos pensar que se trata de uma simples permutação circular de 8 e que, portanto, seu número é

$$(PC)_8 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040.$$

Acontece que pulseiras como as da figura ao lado são a mesma pulseira. Assim, devemos dividir o total 5040 por 2, obtendo 2520 pulseiras diferentes.

23. Um arranjo de flores de forma circular deve ser enfeitado com flores e fitas. Se dispomos de 8 flores diferentes e fitas de 8 cores diferentes, de quantos modos distintos podemos enfeitar o arranjo se cada flor deve ficar entre duas fitas e deve-se usar uma fita de cada cor e uma flor de cada tipo?
24. Determine a quantidade de múltiplos de 3 com quatro algarismos que podem ser formados com os algarismos 2, 3, 4, 6 e 9.
25. Dos anagramas da palavra PERNAMBUCO, quantos começam Pela sílaba PER? E quantos começam pelas letras P, E, R, em qualquer ordem?
26. Uma família de 5 pessoas tem uma carro de 5 lugares. De quantos modos podem se acomodar no carro para uma viagem se:
- só uma das pessoas sabe dirigir?
  - todas sabem e podem dirigir?
27. De quantos modos 5 pessoas podem sentar em um banco de 5 lugares se duas delas devem sempre sentar juntas?
28. **Resolvido.** Expressar, usando a notação de fatorial, o produto dos  $n$  primeiros números pares.

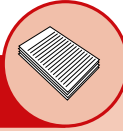
**Solução.** Os  $n$  primeiros números pares são 2, 4, 6, 8, ...,  $2n$  e seu produto



$P$  é dado por  $P = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2n$ , que pode ser escrito como

$$P = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2 \cdot n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = 2^n \cdot n!$$

29. Expressar, usando a notação de fatorial, o produto dos  $n$  primeiros números ímpares.
30. Quantos são os números de 7 algarismos não iniciados por 0 e que contêm 5 vezes o algarismo 1?



## Texto complementar

### Texto 1: A função Gama de Euler

A função gama de  $x$ , denotada por  $\Gamma(x)$  e definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \text{ para } x > 0,$$

pode ser vista como uma generalização, ao conjunto dos números reais, da função fatorial de  $n$ , definida para todo número natural  $n$ .

A partir da definição por meio da integral indefinida, é fácil ver, que

$$G(x+1) = xG(x)$$

e que  $\Gamma(1) = 1$ . Consequentemente, teremos

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2 \times 1$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 3 \times 2 \times 1$$

$$\Gamma(5) = \Gamma(4+1) = 4\Gamma(4) = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

e, de maneira geral,

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \times (n-1) \times \dots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

ou ainda,  $\Gamma(n+1) = n!$ .

Assim, a função  $\Gamma(x)$  pode ser vista como uma extensão da função fatorial de  $x$  ao conjunto dos números reais.

Sabendo que  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ , é possível determinar o valor da função para qualquer fração cujo denominador é igual a 2, como veremos a seguir.

Se o numerador for um inteiro positivo par, então a fração será um inteiro positivo e já vimos como calcular o valor da função, neste caso.

Se o numerador for um inteiro positivo ímpar, então teremos

$$\bullet \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

$$\bullet \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

$$\bullet \quad \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{2} + 1\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

e assim por diante.

## Referências



DANTE, Luiz R. **Matemática: contexto e aplicações**, v.2. São Paulo: Editora Ática, 2004.

DASSIE, Bruno Alves e outros. **Curso de Análise Combinatória e Probabilidade: aprendendo com a resolução de problemas**. Rio de Janeiro: Ed. Ciência Moderna, 2009.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar**, v.5: Análise combinatória e Probabilidade. São Paulo: Atual Editora, 2004.

LIMA, Elon Lages e outros. **Temas e problemas**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2003.

LIMA, Elon Lages e outros. **A matemática do ensino médio**, v.2. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

MORGADO, Augusto C. de O. e outros. **Análise Combinatória e Probabilidade: com as soluções dos exercícios**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

SANTOS, J. Plínio O. e outros. **Introdução à análise combinatória**. Campinas: Ed. da UNICAMP, 2002.

SCHEINERMAN, E. R. **Matemática discreta**. São Paulo: Thomson Learning Edições, 2006.



# Capítulo

# 3

## Combinações, Números Binomiais e Binômio de Newton



## Objetivos

- Conceituar os agrupamentos chamados de combinações simples e de combinações completas, diferenciando um tipo do outro.
- Relacionar as combinações simples com os arranjos simples, determinando o número de um em função do número do outro.
- Determinar o número de combinações completas de  $n$  objetos tomados  $p$  a  $p$ .
- Utilizar as combinações completas no cálculo do número de soluções de certas equações e inequações diofantinas.
- Conceituar números binomiais e estudar algumas de suas propriedades.
- Relacionar o desenvolvimento do binômio  $(a + b)^n$  com o estudo das combinações simples.

## 1. Introdução

Neste capítulo abordaremos mais dois tipos especiais de agrupamentos que diferem dos anteriores posto que estes não são ordenados. São eles: as combinações simples e as combinações completas. Veremos que as combinações simples coincidem com os subconjuntos de um determinado conjunto e que, portanto, determinar o número de combinações simples de  $n$  objetos, tomados  $p$  a  $p$ , coincide com determinar o número de subconjunto contendo  $p$  elementos do conjunto cujos elementos são os  $n$  objetos dados.

Aprenderemos a calcular o número de combinações simples e estabeleceremos a relação entre este número e o número de arranjos simples. Definiremos combinações completas e, a partir da determinação do número de soluções de certas equações diofantinas, determinaremos o número de combinações completas de  $n$  objetos, tomados  $p$  a  $p$ . Estudaremos as combinações complementares e estabeleceremos a relação de Stiefel.

Definiremos e estudaremos as principais propriedades dos números binomiais e, por fim, estudaremos o desenvolvimento da expressão  $(x + a)^n$ , expressão conhecida como binômio de Newton.

## 2. Combinações Simples

Quando estudamos os arranjos simples de  $n$  objetos tomados  $p$  a  $p$ , com  $1 \leq p \leq n$ , vimos que eles consistem na escolha e ordenação de  $p$  desses objetos. Assim, para os algarismos 2, 3, 4 e 5, se escolhermos o 3 e o 4, por exemplo, podemos ordená-los de duas formas: 34 ou 43; se escolhermos os algarismos 2 e 5, podemos ordená-los, também, de duas formas: 25 ou 52; escolhendo os algarismos 2, 3 e 5, podemos ordená-los de seis formas: 235, 253, 325, 352, 523 ou 532.

Como se percebe, para cada escolha de  $p$  dentre os  $n$  objetos dados temos um número de ordenações que coincide com o número de permutações de  $p$  objetos, ou seja, é igual a  $P_p$ .

Denotando por  $C_{n,p}$  o número de escolha de  $p$  dentre  $n$  objetos distintos, conclui-se que

$$A_{n,p} = C_{n,p} \times P_p.$$

Cada uma dessas escolhas é dita uma combinação dos  $n$  objetos tomados  $p$  a  $p$ . Mais precisamente, temos a definição seguinte.

**Combinação simples de  $n$  objetos.** Uma combinação simples ou combinação de  $n$  objetos tomados  $p$  a  $p$ , com  $1 \leq p \leq n$ , é qualquer escolha de  $p$  desses objetos.

Note que, enquanto no arranjo nós temos uma escolha seguida de uma ordenação, na combinação temos apenas a escolha, ou seja, a ordem na qual os objetos são escolhidos não interessa. Na realidade, as combinações correspondem a subconjuntos do conjunto cujos elementos são todos os  $n$  objetos.

**Exemplo 1.** Dadas as vogais  $a, e, i, o, u$ , as combinações dessas letras tomadas 3 a 3 são os conjuntos  $\{a, e, i\}, \{a, e, o\}, \{a, e, u\}, \{a, i, o\}, \{a, i, u\}, \{a, o, u\}, \{e, i, o\}, \{e, i, u\}$  e  $\{i, o, u\}$  e, portanto, são 10. Note que essas combinações são todos os subconjuntos do conjunto  $V = \{a, e, i, o, u\}$  que possuem, exatamente, 3 elementos.

**Exemplo 2.** Os subconjuntos do conjunto  $V = \{a, e, i, o, u\}$ , com exatamente 2 elementos são os 10 conjuntos:  $\{a, e\}, \{a, i\}, \{a, o\}, \{a, u\}, \{e, i\}, \{e, o\}, \{e, u\}, \{i, o\}, \{i, u\}, \{o, u\}$ , e são os subconjuntos das combinações dos objetos –  $a, e, i, o, u$  – tomados 2 a 2.

**Exemplo 3.** As combinações das vogais  $a, e, i, o, u$  tomadas 1 a 1 correspondem aos cinco subconjuntos unitários do conjunto  $V = \{a, e, i, o, u\}$ .

## 2.1. Estendendo o conceito de combinação

Dos três exemplos anteriores podemos concluir que as combinações dos  $n$  objetos  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , tomados  $p$  a  $p$ , podem ser vistos como os subconjuntos do conjunto  $V = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ , possuindo, cada um deles, exatamente  $p$  elementos. Isto sugere que estendamos o conceito de combinação simples de  $n$  objetos, tomados  $p$  a  $p$ , para o caso em que  $p = 0$ , definindo esta combinação como sendo o conjunto vazio.

**Combinação de  $n$ , 0 a 0.** Dados os  $n$  objetos  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , a combinação desses objetos tomados 0 a 0 é definida como o conjunto vazio.

Calculando o número de combinações. O número de combinações de  $n$  objetos distintos, tomados  $p$  a  $p$ , com  $1 \leq p \leq n$ , pode ser calculado em função do número de arranjos dos  $n$  objetos, tomados  $p$  a  $p$  e do número de permutações de  $p$ , se lembrarmos que

$$A_{n,p} = C_{n,p} \times P_p,$$

em que  $A_{n,p}$  é o número de arranjos de  $n$  objetos, tomados  $p$  a  $p$ , e  $P_p$  é o número de permutações de  $p$  objetos.

Da igualdade anterior, temos que

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{P_p}.$$

Na notação de fatorial, temos que o número de combinações de  $n$  objetos distintos, tomados  $p$  a  $p$ , é dado por

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

**Exemplo 4.** Qualquer que seja o número natural  $n$ ,  $1 \leq n$ , temos  $C_{n,1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$ , como já tínhamos visto, uma vez que  $C_{n,1}$  corresponde ao número de subconjuntos unitários de um conjunto com  $n$  elementos.

**Exemplo 5.** Os números  $C_{7,3}$  e  $C_{7,4}$  são iguais, pois  $C_{7,3} = \frac{7!}{3!4!}$  e  $C_{7,4} = \frac{7!}{4!3!}$ .

**Exemplo 6.** De acordo com a definição,  $C_{n,0} = 1$ , pois um conjunto com  $n$  elementos possui, exatamente, um subconjunto com 0 elementos que é o subconjunto vazio. De acordo com a fórmula do fatorial, temos que

$$C_{n,0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!} = 1.$$

## 2.2. Combinações complementares

Dados  $n$  objetos distintos, qualquer escolha de  $p$  destes objetos corresponde à escolha dos  $n - p$  restantes ou que completam o conjunto. Por exemplo, ao escolhermos os algarismos 1, 2 e 3 do conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , automatica-



mente os algarismos 4 e 5 ficam escolhidos como elementos do conjunto complementar de  $\{1, 2, 3\}$ . Dizemos, por isso, que tais combinações são combinações complementares.

Em virtude do que foi feito, podemos enunciar o seguinte resultado.

- **Propriedade das combinações complementares.** Dados os inteiros  $n$  e  $p$ , com  $1 \leq p \leq n$ , temos que  $C_{n,p} = C_{n,n-p}$ .

### 3. Combinações completas e equações diofantinas

Vimos que as combinações simples dos três objetos  $a, b$  e  $c$ , tomados 2 a 2, são os pares não ordenados de objetos distintos  $ab, ac$  e  $bc$ .

Mas é possível formarmos outros pares com esses objetos, se não fizermos a exigência de que os elementos sejam distintos. Por exemplo, podemos formar os pares  $aa, bb$  e  $cc$ , perfazendo, assim, um total de seis pares.

$aa, ab, ac, bb, bc, cc$

Com os objetos  $A, B, C$  e  $D$  podemos formar os seguintes pares:

AB	AC	AD	AA
	BC	BD	BB
		CD	CC
			DD

Os pares que se encontram nas três primeiras colunas são combinações simples das quatro letras tomadas duas a duas e os da última coluna, por apresentarem letras repetidas, não são. Isto sugere a definição seguinte.

- **Combinação completa.** Dados os  $n$  objetos  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , uma combinação completa desses objetos tomados  $p$  a  $p$ , é qualquer lista não ordenada de  $p$  desses objetos, distintos ou não.

**Exemplo 1.** Dados os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, os números 345, 335, 333, 344 e 343 são combinações completas desses algarismos, tomados 3 a 3.

Note, entretanto, que, como combinações, os símbolos 345, 354, 435 e 453 são, todos, iguais, pois possuem os mesmos algarismos.

Nas combinações, a ordem na qual os objetos se apresentam não importa. A diferença entre as combinações encontra-se na natureza e não na ordem desses objetos.

#### 3.1. Determinando o número de permutações completas

No exemplo para determinarmos o número de permutações completas dos

seis algarismos, tomados 3 a 3, podemos pensar cada uma dessas combinações como uma solução da equação

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = 3,$$

em que  $n_i$  representa a quantidade de algarismos  $i$  presentes na combinação. Assim, a solução  $(1,1,1,0,0,0)$  representa a combinação 123; a solução  $(2,0,0,0,0,1)$  representa a combinação 116; a solução  $(0,0,1,2,0,0)$  representa a combinação 344; e assim por diante.

Reciprocamente, as combinações 455, 666, 456 e 222 se fazem representadas pelas soluções  $(0,0,0,1,2,0)$ ,  $(0,0,0,0,0,3)$ ,  $(0,0,0,1,1,1)$  e  $(0,3,0,0,0,0)$ , respectivamente. Portanto, o nosso problema de determinar o número de combinações completas de 6 objetos, tomados 3 a 3, se transforma no problema de determinar o número de soluções, com certas propriedades, de equações diofantinas.

**Equações diofantinas.** As equações diofantinas nas quais estamos interessados são equações do tipo  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p = N$ , em que  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$  são incógnitas que somente podem assumir valores inteiros e  $N$  é um número inteiro positivo. A  $p$ -upla  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_p)$ , de números inteiros, é dita uma solução da equação se, e somente se,  $a_1 + a_2 + \dots + a_p = N$ . Se todos os  $a_i$  são positivos, dizemos que a  $p$ -upla  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$  é uma solução em inteiros positivos. Se alguns dos  $a_i$  são positivos e os demais são iguais a zero, dizemos que a  $p$ -upla é uma solução em inteiros não negativos.

**Uma  $p$ -upla é uma sequência ordenada de  $p$  números.**

Em nossos problemas de contagem, estamos interessados em soluções em inteiros positivos e soluções em inteiros não negativos. No caso específico de determinar o número de combinações completas, nosso interesse recai sobre as soluções em inteiros não negativos.

### 3.2. Soluções em inteiros positivos

Nesta seção estamos interessados em determinar o número de soluções em inteiros positivos de uma equação diofantina dada. A título de ilustração e como forma de conhecermos o comportamento do número de tais soluções, vamos estudar a equação diofantina

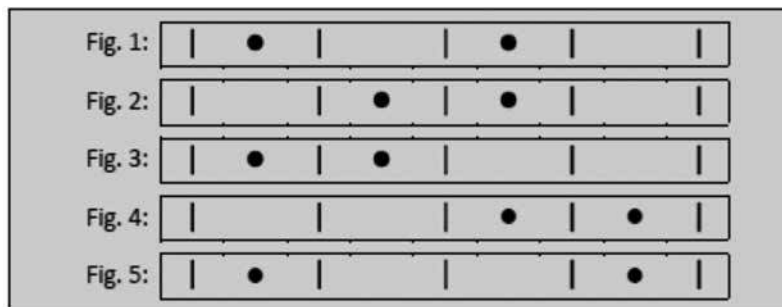
$$X + Y + Z = 5.$$

Cada solução desta equação consiste em dividir o cinco em três partes, sendo cada uma delas maior do que ou igual a 1.

Vamos imaginar o 5 como as cinco unidades representadas, cada uma, por uma barra. Assim:



Vamos analisar as figuras, a seguir.



Cada uma delas pode ser pensada como uma solução da equação e foi obtida pela inserção de bolas em 2 dos 4 espaços existentes entre as 5 unidades (representadas pelas barras horizontais), dividindo-as em três partes. De fato, nas figuras de 1 a 5 temos as soluções (1, 2, 2), (2, 1, 2), (3, 1, 1), (1, 1, 3) e (1, 3, 1), respectivamente.

Portanto, de acordo com o que fizemos, podemos determinar todas as soluções em inteiros positivos da equação dada por meio desse artifício: escolher 2 dos 4 espaços e inserir uma bola em cada um deles.

Assim, o número de soluções em inteiros positivos da equação

$$X + Y + Z = 5 \text{ é dado por } C_{4,2}.$$

**Generalizando.** Notemos que, na equação anterior, se tivéssemos apenas duas incógnitas, ou seja, se a equação fosse  $X + Y = 5$ , deveríamos dividir as 5 unidades em duas partes. Isso poderia ser feito pela inserção de uma única bola em um dos quatro espaços, ou melhor, deveríamos escolher 1 dos 4 espaços. Assim teríamos  $C_{4,1}$  soluções em inteiros positivos distintas.

De maneira geral, para determinarmos o número de soluções em inteiros positivos da equação diofantina  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p = N$ , em que  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$  são incógnitas que somente podem assumir valores inteiros e  $N$  é um número inteiro positivo, devemos distribuir  $p - 1$  bolinhas nos  $p - 1$  espaços entre as  $N$  barras que representam as unidades, ou seja, devemos escolher  $p - 1$ , entre os  $n - 1$  espaços existentes.

Logo, o número de soluções em inteiros positivos da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p = N$$

$$\text{é } C_{n-1, p-1}.$$

**Exemplo 2.** O número de soluções em inteiros positivos da equação

$$X + Y + Z + T = 8 \text{ é } C_{7,3}.$$

**Exemplo 3.** O número de maneiras distintas de repartirmos 16 bombons entre 4 irmãos, de forma que cada um deles receba, pelo menos 2 bombons é o número de soluções, em inteiros positivos, da equação  $n_x + n_y + n_z + n_t = 12$ . De fato, chamemos X, Y, Z e T os quatro irmãos e de  $n_x, n_y, n_z$  e  $n_t$  a quantidade de bombons que cada um deles recebe, respectivamente. Se dermos logo, antes da divisão, 1 bombom para cada um dos irmãos, ficaremos com 12 bombons para repartir entre os quatro. Cada solução em inteiros positivos da equação  $n_x + n_y + n_z + n_t = 12$  garante que cada um dos irmãos receba, pelo menos, mais um bombom. E assim, ao final, cada irmão terá ganhado, pelo menos, 2 bombons.

### 3.3. Retomando o cálculo do número de combinações completas

Vimos anteriormente que para determinarmos o número de combinações completas de 6 objetos, tomados 3 a 3, basta que determinemos o número de soluções em inteiros não negativos da equação diofantina

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3.$$

**Notemos que essa equação não possui solução em inteiros positivos, pois se atribuirmos o valor 1 para cada um dos  $x_i$ , teremos a soma igual a 6 que já é maior do que 3.**

Nosso problema é “Como determinar o número de soluções em inteiros não negativos da equação diofantina do tipo:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p = N ?”$$

Tomemos, novamente, um exemplo para esclarecermos o processo. Consideremos a equação  $X + Y + Z = 3$ .

A única solução em inteiros positivos dessa equação é o terno (1, 1, 1). As outras soluções, em inteiros não negativos, são os ternos: (3, 0, 0), (2, 1, 0), (2, 0, 1), (1, 2, 0), (1, 0, 2), (0, 1, 2), (0, 2, 1), (0, 3, 0) e (0, 0, 3).

Tomando cada uma dessas soluções e acrescentando 1 a cada uma das coordenadas obtemos os seguintes ternos:

(1,1,1)	↔	(2,2,2)
(3,0,0)	↔	(4,1,1)
(2,1,0)	↔	(3,2,1)
(2,0,1)	↔	(3,1,2)
(1,2,0)	↔	(2,3,1)
(1,0,2)	↔	(2,1,3)
(0,1,2)	↔	(1,2,3)
(0,2,1)	↔	(1,3,2)
(0,3,0)	↔	(1,4,1)
(0,0,3)	↔	(1,1,4)

Cada solução em inteiros não negativos da equação  $X + Y + Z = 3$  dá origem a uma solução em inteiros positivos  $X + Y + Z = 6$ . Reciprocamente, se  $(x_0, y_0, z_0)$  é uma solução em inteiros positivos da equação  $X + Y + Z = 6$ , então  $(x_0 - 1, y_0 - 1, z_0 - 1)$  é uma solução em inteiros não negativos da equação  $X + Y + Z = 3$ .

De fato, como  $x_0 \geq 1$ ,  $y_0 \geq 1$  e  $z_0 \geq 1$ , temos que  $x_0 - 1 \geq 0$ ,  $y_0 - 1 \geq 0$  e  $z_0 - 1 \geq 0$ .

Além disso, como  $x_0 + y_0 + z_0 = 6$ , temos que

$$(x_0 - 1) + (y_0 - 1) + (z_0 - 1) = 6 - 3 = 3$$

provando que  $(x_0 - 1, y_0 - 1, z_0 - 1)$  é uma solução em inteiros não negativos de  $X + Y + Z = 3$ .

Portanto, o número de soluções em inteiros não negativos da equação  $X + Y + Z = 3$  é igual ao número de equações em inteiros positivos da equação  $X + Y + Z = 6$  que, como sabemos, é igual a  $C_{6-1, 3-1} = C_{5,2}$ .

**Generalizando.** Para generalizarmos o resultado anterior, basta descobriremos de onde vieram os índices da combinação. Temos que o 6 foi obtido quando somamos 1 unidade a cada uma das incógnitas. Com isso, transformamos a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p = n$$

na equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p = n + p,$$

cujo número de soluções em inteiros positivos é dado por  $C_{n+p-1, p-1}$ .

Com isso provamos o resultado seguinte.

- **Número de combinações completas.** O número de combinações completas de  $n$  objetos, tomados  $p$  a  $p$ , é indicado por  $(CR)_{n,p}$  e é calculado por  $C_{n+p-1, p-1}$ .

**Exemplo 4.** O número de soluções em inteiros não negativos da equação diofantina  $X + Y + Z + T = 4$  é  $(CR)_{4,4}$  que é dado por  $C_{4+4-1, 4-1} = C_{7,3}$  que é igual a 35. Essa equação possui uma única solução em inteiros positivos que é  $(1, 1, 1, 1)$ . Todas as demais possuem alguma ou algumas coordenadas iguais a zero. Vamos listar as demais soluções?

## 4. Números binomiais

Sejam  $n$  e  $p$  números inteiros não negativos, com  $0 \leq p \leq n$ . O número de combinações simples de  $n$  objetos tomados  $p$  a  $p$  é chamado de número binomial de  $n$  de classe  $p$  e é denotado por  $C_{n,p}$  ou  $\binom{n}{p}$ , que se lê:  $n$  sobre  $p$ .

$$\text{Assim, } \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

A notação  $\binom{n}{p}$  é devida ao matemático suíço Leonhard Euler.

Na notação  $\binom{n}{p}$ , o número  $n$  é chamado numerador e o número  $p$  é chamado denominador do número binomial.

**Exemplo 1.** O número binomial de numerador 4 e denominador 2 é o número  $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ .

**Exemplo 2.** Os números binomiais  $\binom{4}{0}$  e  $\binom{4}{4}$  são iguais. De fato, temos que  $\binom{4}{0} = \frac{4!}{0!(4-0)!} = \frac{4!}{4!} = 1$ .

Por outro lado,  $\binom{4}{4} = \frac{4!}{4!(4-4)!} = \frac{4!}{4!} = 1$ . Provando que os dois números binomiais são iguais.

### Números binomiais de classes complementares.

Os números binomiais  $\binom{n}{p}$  e  $\binom{n}{n-p}$  são ditos números binomiais de classes complementares ou, simplesmente, números binomiais complementares, pois vale a igualdade  $p + (n - p) = n$ . De maneira geral, temos a definição seguinte.

**Definição.** Os números binomiais  $\binom{n}{p}$  e  $\binom{n}{q}$  são ditos de classes complementares se, e somente se,  $p + q = n$ .

**Exemplo 3.** Os números binomiais  $\binom{7}{4}$  e  $\binom{7}{3}$  são números binomiais de classes complementares. De fato,  $3 + 4 = 7$  e, além disso,  $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!}$  e  $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!}$ .

**Exemplo 4.** Se os números binomiais  $\binom{8}{3}$  e  $\binom{8}{p}$  são números binomiais de classes complementares, então  $3 + p = 8$  e, portanto,  $p = 5$ . Temos ainda que  $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!}$  e  $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!3!}$ .

Essa igualdade entre os números binomiais complementares nos exemplos 3 e 4 não é coincidência. De fato, vale o seguinte resultado.

**Propriedade 1 dos números binomiais.** Dados os números binomiais  $\binom{n}{p}$  e  $\binom{n}{q}$  se  $p + q = n$ , então  $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$ .

A prova algébrica desta propriedade é imediata, pois  $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$  e  $\binom{n}{q} = \frac{n!}{q!(n-q)!}$ . Como  $p + q = n$ , temos  $q = n - p$  e, portanto, temos que  $\binom{n}{q} = \frac{n!}{(n-p)!(n-n+p)!} = \frac{n!}{(n-p)!(p)!} = \binom{n}{p}$ .

É importante lembrarmos que o número  $\binom{n}{p}$  representa a quantidade de escolhas possíveis de  $p$  dentre  $n$  objetos dados e que cada escolha de  $p$  objetos corresponde a uma escolha (complementar) de  $n - p$  objetos.

Assim, existe uma correspondência biunívoca entre as combinações simples dos  $n$  objetos tomados  $p$  a  $p$  e as combinações simples dos mesmos  $n$  objetos tomados  $n - p$  a  $n - p$ . Logo, mostramos novamente que

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

#### 4.1. Números binomiais com mesmo numerador

Outra propriedade dos números binomiais permite determinar em que condições dois números binomiais com o mesmo numerador são iguais. É óbvio que  $\binom{n}{p} = \binom{n}{p}$ . Vimos também que números binomiais de classes complementares são iguais, isto é,  $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ .

Em que outras condições podemos ter  $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$ ?

Na realidade, estas são as duas únicas condições em que números binomiais de mesmo numerador são iguais. Isto se encontra expresso na propriedade que será enunciada a seguir e cuja prova será deixada como exercício.

**Propriedade 2 dos números binomiais.** Os números binomiais  $\binom{n}{p}$  e  $\binom{n}{q}$  são iguais se, e somente se,  $p = q$  ou  $p + q = n$ .

**Exemplo 5.** Se os números binomiais  $\binom{10}{4}$  e  $\binom{10}{p}$  são iguais, então devemos ter

$p = 4$  ou  $p + 4 = 10$ , ou seja,  $p = 6$ .

**Exemplo 6.** Os números binomiais  $\binom{6}{q+1}$  e  $\binom{6}{p-1}$  somente serão iguais se  $p - 1 = q + 1$  ou se  $p + q = 6$ . Por exemplo, para  $p = 6$  e  $q = 0$ , temos  $\binom{6}{1} = \binom{6}{5}$ ; para  $p = 4$  e  $q = 2$ , temos as igualdades  $p + q = 6$  e  $p - 1 = 3 = q + 1$  e  $\binom{6}{3} = \binom{6}{3}$ . Note que, como devemos ter  $0 \leq q + 1 \leq 6$  e  $0 \leq p - 1 \leq 6$ , não basta que  $p + q = 6$  ou  $p - q = 2$ .

## 4.2. Relação de Stiefel

Outra relação existente entre os números binomiais é a conhecida como relação de Stiefel que afirma que

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

A prova algébrica desta relação é de fácil verificação, como veremos a seguir.

Temos

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} &= \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p+1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-p)(n-1)! + p(n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n(n-1)! - p(n-1)! + p(n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}. \end{aligned}$$

**Exemplo 7.** Vamos verificar a relação de Stiefel para o caso em que  $n = 5$  e  $p = 3$ . Temos que  $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$ . Por outro lado, temos que  $\binom{4}{3} + \binom{4}{2} = \frac{4!}{3!1!} + \frac{4!}{2!2!} = 4 + 6 = 10$ .

## 5. Binômio de Newton

Nós já estudamos o desenvolvimento da expressão  $(x + a)^2$  e vimos que vale a igualdade



$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

Sabemos ainda que também valem as igualdades:

$$(x + a)^0 = 1 \text{ e}$$

$$(x + a)^1 = x + a,$$

uma vez que todo número não nulo elevado a zero é igual a 1 e todo número elevado a um é igual a ele mesmo.

Nosso objetivo é, usando os conhecimentos de análise combinatória, estudar o comportamento do desenvolvimento de  $(x + a)^n$ , para todo inteiro positivo  $n$ , expressão conhecida como binômio de Newton.

### 5.1. Estudando o comportamento do desenvolvimento de $(x + a)^2$ .

Para desenvolvermos a expressão  $(x + a)^2$ , usamos a definição de potência e a propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição.

- **Definição de potência com expoente natural.** Para todo número real  $a$  e todo número natural  $n$  ( $n \geq 0$ ), tem-se

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^1 = a \\ a^n = a \times a \times \dots \times a \text{ (} n \text{ fatores)} \end{cases}$$

- **Propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição.**

Dados os números reais  $a$ ,  $b$  e  $c$ , valem as igualdades:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \text{ e } (b + c) \times a = b \times a + c \times a.$$

De acordo com a definição de potência, temos que

$$(x + a)^2 = (x + a) \times (x + a),$$

e, usando a propriedade distributiva, temos que

$$(x + a)^2 = (x + a) \times (x + a) = x \times (x + a) + a \times (x + a) = xx + xa + ax + aa.$$

Como podemos perceber, no desenvolvimento de  $(x + a)^2$ , encontramos uma adição de 4 parcelas, resultante do produto dos 2 termos do primeiro binômio  $(x + a)$  pelos 2 termos do segundo binômio  $(x + a)$ , cada uma delas formada pelo produto de duas letras:  $x$  por  $x$ ,  $x$  por  $a$ ,  $a$  por  $x$  ou  $a$  por  $a$ . Isto pode ser mais bem visualizado a partir do estudo do desenvolvimento dos produtos

$$(a + b)(c + d)$$

e

$$(a + b)(c + d)(e + f).$$

### 5.2. Estudando o desenvolvimento de $(a + b)(c + d)$ .

Queremos entender como se comporta o desenvolvimento de  $(a + b)(c + d)$ . Usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, temos que:

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = (ac + ad) + (bc + bd).$$

Analisando atentamente o resultado, podemos perceber que, no desenvolvimento do produto  $(a + b)(c + d)$  encontramos quatro monômios, cada um deles composto do produto de uma letra de  $(a + b)$  por uma letra de  $(c + d)$ . Inicialmente o produto foi transformado na soma indicada  $a(c + d) + b(c + d)$ , que possui duas parcelas: uma tendo a letra “a” como fator e outra tendo a letra “b” como fator.

Em seguida, o produto  $a(c + d)$  deu origem a dois monômios: um formado pelo produto  $ac$  e o outro formado pelo produto  $ad$ . De maneira semelhante, o produto  $b(c + d)$  deu origem aos dois monômios  $bc$  e  $bd$ . Podemos concluir que no desenvolvimento do produto  $(a + b)(c + d)$  obtivemos  $2 \times 2 (= 4)$  monômios: o produto  $ac$ , de  $a$  por  $c$ ; o produto  $ad$ , de  $a$  por  $d$ ; o produto  $bc$ , de  $b$  por  $c$ ; e o produto  $bd$ , de  $b$  por  $d$ .

$$\begin{array}{r} \mathbf{a} \times \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ + \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{array}{l} \mathbf{ac} \\ + \\ \mathbf{ad} \end{array} \\ + \\ \mathbf{b} \times \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ + \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{array}{l} \mathbf{bc} \\ + \\ \mathbf{bd} \end{array} \end{array}$$

### 5.3. Estudando o desenvolvimento do produto $(a + b)(c + d)(e + f)$ .

Vamos estudar o comportamento do desenvolvimento do produto dos três binômios  $(a+b)$ ,  $(c+d)$  e  $(e+f)$ . Temos que:

$$\begin{array}{rcl} (a+b)(c+d) & = & [(a + b)(c + d)](e + f) \\ (e+f) & = & \\ (1) & = & [a(c + d) + b(c + d)](e + f) \\ (2) & = & [(ac + ad) + (bc + bd)](e + f) \\ (3) & = & (ac + ad + bc + bd)(e + f) \\ (4) & = & ac(e + f) + ad(e + f) + bc(e + f) + bd(e + f) \\ (5) & = & ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf \end{array}$$

Analisando o resultado obtido, percebemos que a associatividade do produto de  $(a + b)$  por  $(c + d)$  por  $(e + f)$  deu origem ao produto inicial de  $(a + b)$  por  $(c + d)$  que, por sua vez, deu origem à soma dos 4 ( $= 2 \times 2$ ) monômios:  $ac$ ,  $ad$ ,  $bc$  e  $bd$ . A distributividade do produto em relação à adição deu origem à soma dos quatro produtos:  $ac(e + f)$ ,  $ad(e + f)$ ,  $bc(e + f)$  e  $bd(e + f)$ .

Estes produtos, por sua vez, deram origem aos 8 ( $4 \times 2 = 2 \times 2 \times 2$ ) monômios:  $ace$ ,  $acf$ ,  $ade$ ,  $adf$ ,  $bce$ ,  $bcf$ ,  $bde$  e  $bdf$ , cada um deles sendo o produto de três letras, sendo uma do binômio  $(a + b)$ , uma do binômio  $(c + d)$  e uma do binômio  $(e + f)$ .

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{a} \times \left[ \begin{array}{l} c \times \left[ \begin{array}{l} e = acf \\ + \\ f = acf \end{array} \right] \\ + \\ d \times \left[ \begin{array}{l} e = ade \\ + \\ f = adf \end{array} \right] \end{array} \right] \\
 + \\
 \mathbf{b} \times \left[ \begin{array}{l} c \times \left[ \begin{array}{l} e = bcf \\ + \\ f = bcf \end{array} \right] \\ + \\ d \times \left[ \begin{array}{l} e = bde \\ + \\ f = bdf \end{array} \right] \end{array} \right]
 \end{array}$$

**O produto  $(a + b)(c + d)(e + f)(g + h)$ .** A luz do que foi feito, o produto de  $a+b$  por  $c+d$  por  $e+f$  por  $g+h$ , vai dar como resultado a soma de 16 ( $= 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ) parcelas compostas, cada uma delas, de 4 letras, a primeira podendo ser  $a$  ou  $b$ ; a segunda podendo ser  $c$  ou  $d$ ; a terceira,  $e$  ou  $f$ ; e a quarta  $g$  ou  $h$ . Como o produto é comutativo, essa ordem não interessa, ou seja, cada monômio é composto de 4 letras, sendo elas  $a$  ou  $b$ ,  $c$  ou  $d$ ,  $e$  ou  $f$  e  $g$  ou  $h$ . Os dezesseis monômios são:

Quadro 3

<b>aceg</b>	<b>aceh</b>	<b>bceg</b>	<b>bceh</b>
<b>acfg</b>	<b>acfh</b>	<b>bcfh</b>	<b>bcfh</b>
<b>adeg</b>	<b>adeg</b>	<b>bdeg</b>	<b>bdeg</b>
<b>adfg</b>	<b>adeh</b>	<b>bdeh</b>	<b>bdeh</b>

**Pensando em termos de análise combinatória.** De acordo com a Análise combinatória e baseado no que foi feito, o produto de  $a + b$  por  $c + d$  por  $e + f$  por  $g + h$ , pode ser pensado como uma tarefa composta de 4 eventos E1, E2, E3 e E4, em que

E1: escolha de uma das duas letras a ou b;

E2: escolha de uma das duas letras c ou d;

E3: escolha de uma das duas letras e ou f;

E4: escolha de uma das duas letras g ou h.

Para realização do evento E1, temos duas possibilidades: a ou b.

$$\frac{2}{\text{E1}} \quad \frac{\quad}{\text{E2}} \quad \frac{\quad}{\text{E3}} \quad \frac{\quad}{\text{E4}}$$

Para cada uma das escolhas do evento E1, temos duas possibilidades – c ou d – para a escolha de E2.

$$\frac{2}{\text{E1}} \times \frac{2}{\text{E2}} \quad \frac{\quad}{\text{E3}} \quad \frac{\quad}{\text{E4}}$$

Pelo princípio multiplicativo da contagem, temos  $2 \times 2 (= 4)$  possibilidades para a ocorrência de E1 seguida da ocorrência de E2.

Para cada uma das 4 possibilidades anteriores, temos duas possibilidades de escolha de E3: e ou f. Perfazendo, pelo princípio multiplicativo da contagem,  $2 \times 2 \times 2 (= 8)$  possibilidades para a ocorrência de E1, seguido de E2 e seguido de E3.

$$\frac{2}{\text{E1}} \times \frac{2}{\text{E2}} \times \frac{2}{\text{E3}} \quad \frac{\quad}{\text{E4}}$$

Finalmente, como E4 pode ocorrer de duas maneiras distintas, pelo princípio multiplicativo da contagem, temos  $2 \times 2 \times 2 \times 2 (= 16)$  possibilidades para a ocorrência simultânea de E1, E2, E3 e E4.

$$\frac{2}{\text{E1}} \times \frac{2}{\text{E2}} \times \frac{2}{\text{E3}} \times \frac{2}{\text{E4}}$$

## 5.4. Potências de binômios

Consideremos agora o binômio  $x+a$  e vejamos o acontece com suas potências:  $(x + a)^2$ ,  $(x + a)^3$ ,  $(x + a)^4$ ,...

Cada uma dessas potências é um produto de binômios, semelhante ao que estudamos anteriormente. Na realidade, a única diferença é que, nesses produtos, os binômios são sempre iguais. Assim, as letras c, d, e, f,... são todas iguais a a ou a b.

Já estudamos  $(x + a)^n$  para  $n = 0$ ,  $n = 1$  e  $n = 2$ .

Para  $(x+a)^3$ , de acordo com o que foi feito anteriormente, temos a soma de  $8 (= 2 \times 2 \times 2)$  monômios, cada um deles composto de 3 letras. Essas letras

são uma do primeiro binômio, uma do segundo binômio e uma do terceiro binômio. Como, em cada binômio, as letras ou são x ou são a, teremos que os 8 monômios de  $(x + a)^3$  são:

Quadro 4

(1) $\underline{\underline{x}}$	$\underline{\underline{x}}$	$\underline{\underline{x}}$	(5) $\underline{\underline{a}}$	$\underline{\underline{x}}$	$\underline{\underline{x}}$
(2) $\underline{\underline{x}}$	$\underline{\underline{x}}$	$\underline{\underline{a}}$	(6) $\underline{\underline{a}}$	$\underline{\underline{x}}$	$\underline{\underline{a}}$
(3) $\underline{\underline{x}}$	$\underline{\underline{a}}$	$\underline{\underline{x}}$	(7) $\underline{\underline{a}}$	$\underline{\underline{a}}$	$\underline{\underline{x}}$
(4) $\underline{\underline{x}}$	$\underline{\underline{a}}$	$\underline{\underline{a}}$	(8) $\underline{\underline{a}}$	$\underline{\underline{a}}$	$\underline{\underline{a}}$

Escrevendo os monômios na forma de potência, teremos:

Quadro 5

(1) $\underline{\underline{x^3}}$	(5) $\underline{\underline{x^2a}}$
(2) $\underline{\underline{x^2a}}$	(6) $\underline{\underline{xa^2}}$
(3) $\underline{\underline{x^2a}}$	(7) $\underline{\underline{xa^2}}$
(4) $\underline{\underline{xa^2}}$	(8) $\underline{\underline{a^3}}$

Agrupando os termos semelhantes, temos que:

$$(x+a)^3 = x^3 + \underbrace{x^2a + x^2a + x^2a}_{(2) \quad (3) \quad (5)} + \underbrace{xa^2 + xa^2 + xa^2}_{(4) \quad (6) \quad (7)} + a^3$$

$$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3.$$

De maneira semelhante ao caso anterior, de acordo com o que foi feito anteriormente,  $(x + a)^4$  é a soma de 16 ( $= 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ) monômios, cada um deles composto de 4 letras. Essas letras são uma do primeiro binômio, uma do segundo, uma do terceiro e uma do quarto. Como, em cada binômio, as letras ou são x ou são a, os 16 monômios de  $(x + a)^4$  são:

Quadro 6

(1)	<u>X</u>	<u>X</u>	<u>X</u>	<u>X</u>
(2)	<u>X</u>	<u>X</u>	<u>X</u>	<u>a</u>
(3)	<u>X</u>	<u>X</u>	<u>a</u>	<u>X</u>
(4)	<u>X</u>	<u>X</u>	<u>a</u>	<u>a</u>
(5)	<u>X</u>	<u>a</u>	<u>X</u>	<u>X</u>
(6)	<u>X</u>	<u>a</u>	<u>X</u>	<u>a</u>
(7)	<u>X</u>	<u>a</u>	<u>a</u>	<u>X</u>
(8)	<u>X</u>	<u>a</u>	<u>a</u>	<u>a</u>
(9)	<u>a</u>	<u>X</u>	<u>X</u>	<u>X</u>
(10)	<u>a</u>	<u>X</u>	<u>X</u>	<u>a</u>
(11)	<u>a</u>	<u>X</u>	<u>a</u>	<u>X</u>
(12)	<u>a</u>	<u>X</u>	<u>a</u>	<u>a</u>
(13)	<u>a</u>	<u>a</u>	<u>X</u>	<u>X</u>
(14)	<u>a</u>	<u>a</u>	<u>X</u>	<u>a</u>
(15)	<u>a</u>	<u>a</u>	<u>a</u>	<u>X</u>
(16)	<u>a</u>	<u>a</u>	<u>a</u>	<u>a</u>

que escritas na forma de potência ficam:

Quadro 7

(1)	<u>X<sup>4</sup></u>	(9)	<u>X<sup>3</sup>a</u>
(2)	<u>X<sup>3</sup>a</u>	(10)	<u>X<sup>2</sup>a<sup>2</sup></u>
(3)	<u>X<sup>3</sup>a</u>	(11)	<u>X<sup>2</sup>a<sup>2</sup></u>
(4)	<u>X<sup>2</sup>a<sup>2</sup></u>	(12)	<u>xa<sup>3</sup></u>
(5)	<u>X<sup>3</sup>a</u>	(13)	<u>X<sup>2</sup>a<sup>2</sup></u>
(6)	<u>X<sup>2</sup>a<sup>2</sup></u>	(14)	<u>xa<sup>3</sup></u>
(7)	<u>X<sup>2</sup>a<sup>2</sup></u>	(15)	<u>xa<sup>3</sup></u>
(8)	<u>xa<sup>3</sup></u>	(16)	<u>X<sup>4</sup></u>

Agrupando os termos semelhantes, temos que:

$$(x + a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$$

**Generalizando.** De maneira geral, no desenvolvimento de  $(x + a)^n$  temos  $2^n$

parcelas, cada uma delas sendo um produto de uma potência de  $x$ , digamos  $x^p$ , por uma potência de  $a$ , digamos  $a^q$ , com  $p + q = n$ .

Para determinarmos o coeficiente de  $x^p a^{n-p}$  ( $x^p a^q$ ), basta lembrarmos que temos  $n$  espaços para colocar as  $p$  letras  $x$ , onde a escolha desses  $p$  espaços pode ser feita de  $C_{n,p}$  ou  $C_{n,n-p}$  maneiras distintas. Observemos ainda que podemos começar nossa escolha pelas letras  $a$ , deixando os lugares vazios para serem ocupados pelas letras  $x$ .

Assim, desde que os números binomiais  $\binom{n}{p}$  e  $\binom{n}{n-p}$  são iguais por serem complementares, temos que

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n a^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \dots + \binom{n}{n}x^0 a^n.$$

**Exemplo 1.** No desenvolvimento de  $(x + a)^4$ , temos

$$\begin{aligned}(x + a)^4 &= \binom{4}{0}x^4 a^0 + \binom{4}{1}x^3 a + \binom{4}{2}x^2 a^2 + \binom{4}{3}x a^3 + \binom{4}{4}x^0 a^4 \\ &= x^4 + 4x^3 a + 6x^2 a^2 + 4x a^3 + a^4.\end{aligned}$$

**Exemplo 2.** Em todas as parcelas do desenvolvimento de  $(x + \frac{1}{x})^7$  o expoente de  $x$  é diferente de zero, ou seja, não existe termo independente de  $x$  no desenvolvimento de  $(x + \frac{1}{x})^7$ . De fato, cada parcela um produto do tipo  $A(\frac{1}{x})^p x^{7-p}$ , em que  $A$  e  $p$  são números inteiros. Assim, em cada parcela, o expoente de  $x$ . Ou melhor, em cada parcela, o expoente de  $x$  é da forma  $7 - 2p$  que é sempre um número diferente de 0, pois  $p$  é inteiro.

**O termo geral.** Vimos que o desenvolvimento de  $(x + a)^n$  é dado por  $(x + a)^n = (x+a)^n = \binom{n}{0}x^n a^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \dots + \binom{n}{n}x^0 a^n$ . Assim, o primeiro, o segundo e o terceiro termos são dados, respectivamente, por  $T_1 = \binom{n}{0}x^n a^0$ ,  $T_2 = \binom{n}{1}x^{n-1}a$  e  $T_3 = \binom{n}{2}x^{n-2}a^2$ . E, de maneira geral, temos que o termo de ordem  $p + 1$  é dado por

$$T_{p+1} = \binom{n}{p}x^{n-p}a^p.$$

A fórmula anterior é conhecida como fórmula do termo geral do desenvolvimento do binômio de Newton.

**Exemplo 3.** O quinto termo do desenvolvimento de  $(x + a)^8$ , segundo as potências decrescentes de  $x$  pode ser calculado como

$$T_5 = T_{4+1} = \binom{8}{4}x^{8-4}a^4 = \binom{8}{4}x^4 a^4.$$

## Síntese do Capítulo



Iniciamos este capítulo definindo e exemplificando as combinações simples, que são um tipo de agrupamento no qual a ordem em que os objetos aparecem não é importante e que, portanto, podem ser utilizados na determinação do número de subconjuntos de um determinado conjunto. Em seguida, estudamos a combinação com elementos repetidos ou combinação completa, conceituando-a e aplicando-a na determinação do número de soluções de certas equações diofantinas.

Aproveitando a definição de combinações, apresentamos os números binomiais e uma nova notação para o número de combinações de  $n$  objetos tomados  $p$  a  $p$ , notação essa devida a Euler. Definimos números binomiais complementares e apresentamos a relação de Stiefel. Por fim, estudamos os binômios de Newton, com o objetivo de determinar os coeficientes dos monômios que ocorrem no desenvolvimento de  $(x + a)^n$ .

## Atividades de avaliação



1. Prove que dados os inteiros  $n$  e  $p$ , com  $1 \leq p \leq n$ , temos que  $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ .  
**Solução:** Temos que  $\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$  e, por outro lado  $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ . Valendo a igualdade.
2. Determine o valor de  $x$ , sabendo que  $C_{x,3} = C_{x,4}$ .
3. Resolva o exemplo 3 usando combinações completas.
4. Mostre que os números binomiais  $\binom{n}{p}$  e  $\binom{n}{q}$  são iguais se, e somente se,  $p = q$  ou  $p + q = n$ .
5. Mostre que o número  $\frac{n \times (n+1) \times (n+2) \times \dots \times (n+m-1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times m}$  é inteiro, quaisquer que sejam os inteiros positivos  $m$  e  $n$ .
6. Mostre que a relação de Stiefel é válida para os números binomiais  $\binom{6}{3}$  e  $\binom{6}{2}$ .
7. Calcule os números binomiais
  - a)  $\binom{3}{2}$
  - b)  $\binom{9}{4}$



8. Calcule  $\binom{m}{10}$ , sabendo que  $\binom{m}{4} = \binom{m}{6}$ .

**Solução:** Sabemos que  $\binom{m}{p} = \binom{m}{q}$  se, e somente se  $p + q = m$  ou  $p = q$ .

Como  $4 \neq 6$ , devemos ter  $m = 6 + 4 = 10$ .

Logo,  $\binom{m}{10} = \binom{10}{10} = 1$ .

9. Determine o valor de  $x$ , sabendo que  $\binom{30}{2x} = \binom{30}{x+6}$ .

10. Para que valores de  $n \in \mathbb{N}$  tem-se  $A_{n,3} = 12C_{n,4}$ ?

11. Obter o número de elementos de um conjunto, sabendo-se que ele possui 45 subconjuntos de 2 elementos.

12. Calcular o número de diagonais de um polígono convexo de  $n$  lados.

13. Tomam-se 10 pontos sobre uma reta  $r$  e 8 pontos sobre outra reta  $s$ , paralela a  $r$ . Quantos triângulos existem com os vértices nesses conjuntos de pontos?

14. Uma empresa tem 5 diretores e 10 gerentes. Quantas comissões com 1 diretor e 4 gerentes podem ser formadas?

15. Tomando-se três fatores distintos entre os elementos do conjunto  $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ , quantos produtos de valores diferentes podemos obter?

16. Quantas são as soluções em inteiros positivos da equação diofantina  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ , nas quais  $x_4 \geq 5$ ?

17. Calcule o número de soluções em inteiros positivos das equações diofantinas:

a)  $x + y + z = 20$ .    b)  $x + y + z + t = 15$ .

18. Calcule o número de soluções em inteiros não negativos das equações diofantinas do exercício anterior.

19. Em quantas das soluções em inteiros positivos da equação  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ , tem-se: (a) exatamente 2 variáveis iguais a 1? (b) pelo menos 2 variáveis iguais a 1?

20. De quantas maneiras podemos distribuir 30 bombons entre 5 crianças de modo que cada uma receba pelo menos 3 bombons?

21. Determine o coeficiente de  $x^7$  no desenvolvimento de  $(x^2 - 1/x)^8$ .

22. Determine o quarto termo do desenvolvimento de  $(2x - 1/x)^7$ , supondo o desenvolvimento ordenado segundo as potências decrescentes da primeira parcela.

23. Calcule a soma dos coeficientes do desenvolvimento de  $(x^3 + 3x^2)^8$ .

**Solução:** Note inicialmente que se

$p(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_{nx}x^n$ , então

$p(1) = A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_n$ , ou seja,  $p(1)$  é a soma dos coeficientes do polinômio  $p(x)$ .

Assim, fazendo  $p(x) = (x^3 + 3x^2)^8$ , temos que a soma dos seus coeficientes é  $p(1) = (1 + 3)^8 = 4^8 = 2^{16} = 65.536$ .

24. Considere o desenvolvimento de  $(x + a)^6$  ordenado segundo as potências decrescentes de  $x$ . Determine a soma dos termos de ordem par em função de  $(x + a)^6$  e de  $(x - a)^6$ .

**Solução:** Temos que  $(x + a)^6 = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_7$  e temos ainda que  $(x - a)^6 = T_1 - T_2 + T_3 - T_4 + T_5 - T_6 + T_7$ . Assim, subtraindo a primeira igualdade menos a segunda, temos que

$$2(T_2 + T_4 + T_6) = (x + a)^6 - (x - a)^6.$$

$$\text{Ou, ainda, } T_2 + T_4 + T_6 = \frac{(x + a)^6 - (x - a)^6}{2}.$$

É possível generalizar esse resultado para um expoente  $n$ , natural qualquer?

25. Mostre que para todo inteiro positivo  $n$ , temos

$$C_{n,0} - C_{n,1} + C_{n,2} - C_{n,3} + \dots + (-1)^n C_{n,n} = 0.$$

26. Determine o desenvolvimento de  $(2x + \frac{1}{x^2})^5$ .

27. Determine o termo independente de  $x$  no desenvolvimento de  $(2x + \frac{1}{x^2})^6$ .

28. Prove que  $C_{n+2,p+2} = C_{n,p} + 2C_{n,p+1} + C_{n,p+2}$ .

## Texto complementar



### Texto 1: Um pouco de história

*Texto extraído do livro Análise combinatória e probabilidade, de Augusto Cesar Morgado e outros, Coleção do Professor de Matemática. SBM: Rio de Janeiro, 2006. pp.2-4. Adaptado.*

O desenvolvimento do binômio  $(x + a)^n$  está entre os primeiros problemas estudados ligados à Análise Combinatória. O caso  $n = 2$  já pode ser encontrado nos *Elementos* de Euclides, em torno de 300 a.C. O triângulo de Pascal era conhecido por Chu Shih-Chieh, na China (em torno de 1300) e antes disso pelos hindus e árabes.

O matemático hindu Báskhara (1114-1185?), conhecido geralmente pela “fórmula de Báskhara” para a solução de equações do 2º grau, sabia calcular o número de permutações, de combinações e de arranjos de  $n$  objetos.

O nome coeficiente binomial foi introduzido mais tarde por Michael Stiefel (1486?-1567), que mostrou, em torno de 1550, como calcular  $(1 + x)^n$  a partir do desenvolvimento de  $(1 + x)^{n-1}$ . Sabemos Também que o matemático árabe Al-Karaji (fins do século X) conhecia a lei de formação dos elementos do triângulo de Pascal,

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$$

O primeiro aparecimento do triângulo de Pascal no Ocidente foi no frontispício de um livro de Petrus Apianus (1495-1552). Nicolò Fontana Tartaglia (1499-1559) relacionou os elementos do triângulo de Pascal com as potências de  $(x + y)$ . Pascal (1623-1662) publicou um tratado em 1654 mostrando como utilizá-los para achar os coeficientes do desenvolvimento de  $(a + b)$ . Jaime Bernoulli (1654-1705) usou a interpretação de Pascal para demonstrar que

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i \dots$$

Isaac Newton (1646-1727) mostrou como calcular diretamente  $(1+x)^n$  sem antes calcular  $(1+x)^{n-1}$ . Ele mostrou que cada coeficiente pode ser determinado, usando o anterior, pela fórmula

$$\binom{n}{r+1} = \frac{n-r}{r+1} \binom{n}{r}$$

Em verdade, Newton foi, além disso, e mostrou como desenvolver  $(x + y)^r$ , onde  $r$  é um número racional, obtendo neste caso um desenvolvimento em série infinita.

## Referências



- DANTE, Luiz R. **Matemática: contexto e aplicações**, v.2. São Paulo: Editora Ática, 2004.
- DASSIE, Bruno Alves e outros. **Curso de Análise Combinatória e Probabilidade: aprendendo com a resolução de problemas**. Rio de Janeiro: Ed. Ciência Moderna, 2009.
- HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar**, v.5: Análise combinatória e Probabilidade. São Paulo: Atual Editora, 2004.
- LIMA, Elon Lages e outros. **Temas e problemas**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2003.
- LIMA, Elon Lages e outros. **A matemática do ensino médio**, v.2. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1998.
- MORGADO, Augusto C. de O. e outros. **Análise Combinatória e Probabilidade: com as soluções dos exercícios**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- SANTOS, J. Plínio O. e outros. **Introdução à análise combinatória**. Campinas: Ed. da UNICAMP, 2002.
- SCHEINERMAN, E. R. **Matemática discreta**. São Paulo: Thomson Learning Edições, 2006.

# Capítulo

4

# Tópicos Complementares



## Objetivos:

- Complementar e aprofundar os conhecimentos de análise combinatória a partir do estudo de outros métodos de contagem.
- Conceituar permutações caóticas e determinar o número de permutações caóticas de  $n$  objetos.
- Apresentar e utilizar os lemas de Kaplansky no cálculo do número de certos argumentos.
- Apresentar e utilizar o princípio das gavetas de Dirichlet, também conhecido como princípio da casa dos pombos.

## 1. Introdução

Neste capítulo, com o intuito de completarmos nossa formação em termos de conhecimento da Análise Combinatória, estudaremos alguns tópicos que são da maior importância nesse sentido. Inicialmente definiremos permutação caótica e, em seguida, retomaremos o princípio da inclusão e exclusão para, utilizá-lo na determinação do número de tais permutações, no caso de  $n$  elementos.

Dando continuidade à complementação da nossa formação, estudaremos os lemas de Kaplansky e, por fim, o princípio das gavetas de Dirichlet que também é conhecido como princípio da casa dos pombos e que, diferentemente do que vínhamos fazendo até agora, em que estávamos interessados na contagem do número de objetos com certas propriedades, esse princípio garante a existência de objetos com alguma propriedade dada, sem se preocupar com sua quantidade.

## 2. Permutações caóticas

Sabemos que uma permutação de  $n$  objetos é qualquer ordenação desses objetos. Assim, se os objetos são os algarismos 2, 3, 4 e 5, por exemplo, então os números 2345, 2435, 4532, 5432 e 5324 são, todos, permutações dos algarismos dados, pois em todos eles foram utilizados os algarismos 2, 3, 4 e 5 e a única diferença entre eles é a ordem na qual os algarismos aparecem.

Se pensarmos os algarismos 2, 3, 4 e 5 ordenados desta forma, ou seja, o 2 ocupa a primeira posição, o 3 a segunda, o 4 a terceira e o 5 a quarta, então no número 2435 o 2 e o 3 mantiveram suas posições enquanto o 4 e o 5 trocaram de posição. Já no número 5324 nenhum dos algarismos manteve sua posição original, todos trocaram de posição. Este é um exemplo de permutação caótica. Mais precisamente temos a seguinte definição.

- **Permutação caótica.** Uma permutação caótica dos objetos  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , tomados nesta ordem, é qualquer permutação desses objetos que não deixe nenhum deles em sua posição original.

**Exemplo 1.** Dados os algarismos 1, 2, 3 e 4, os números 2143, 4321, 4312 e 3412 são permutações caóticas desses algarismos.

**Exemplo 2.** As palavras ROMA e ORAM são anagramas da palavra AMOR, que são permutações caóticas dessas letras.

**Exemplo 3.** Dos números 3421, 1243, 4132 e 1423, somente 3421 é permutação caótica dos algarismos 1, 2, 3 e 4, tomados nesta ordem. O número 1243 deixa os algarismos 1 e 2 nos seus lugares originais; 4132 deixa o 3 no seu lugar original; 1423 deixa o 1 no seu lugar original.

Agora que já sabemos do que se trata, resta-nos determinar o número de permutações caóticas de  $n$  objetos. Para tanto, inicialmente, retomaremos o princípio da inclusão e exclusão.

- **Princípio da inclusão e exclusão.** O princípio da inclusão e exclusão, em sua forma mais geral, afirma que o número de elementos da união de  $r$  conjuntos quaisquer é dada por

$$\begin{aligned} n\left(\bigcup_{i=1}^r A_i\right) &= n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_r) \\ &\quad - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_1 \cap A_4) - \dots - n(A_1 \cap A_r) \\ &\quad - n(A_2 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_4) - \dots - n(A_2 \cap A_r) \\ &\quad \dots \\ &\quad - n(A_{r-1} \cap A_r) \\ &\quad + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \dots + n(A_1 \cap A_2 \cap A_r) \\ &\quad + n(A_2 \cap A_3 \cap A_4) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_5) + \dots + n(A_2 \cap A_3 \cap A_r) \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + n(A_{r-2} \cap A_{r-1} \cap A_r) \\ &\quad + \dots + \end{aligned}$$

$$+ (-1)^{n-1}n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_r)$$

Assim, incluímos na contagem todos os elementos de A, de B e de C; depois excluimos os que estão ao mesmo tempo em dois quaisquer desses conjuntos, pois estes foram contados mais de uma vez; depois incluímos aqueles que foram retirados a mais por se encontrarem em três dos conjuntos; e assim por diante, excluindo e incluindo.

**Exemplo 4.** No caso dos conjuntos A, B e C, o princípio da inclusão e exclusão ficaria assim:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Como podemos perceber, contamos todos os elementos de A, os de B e os de C, depois excluimos os que estão ao mesmo tempo em dois quaisquer desses conjuntos (A e B, A e C, B e C), depois incluímos aqueles que foram retirados a mais por se encontrarem nos três conjuntos.

## 2.1. Determinando o número de permutações caóticas de 4 elementos.

A título de exemplo, vamos determinar o número de permutações caóticas dos elementos 1, 2, 3 e 4, nesta ordem.

Vamos dividir o nosso problema de determinar o número de permutações caóticas dos elementos 1, 2, 3 e 4, nesta ordem, em várias etapas, constituídas de perguntas que iremos respondendo uma a uma para, ao final, termos a solução procurada.

- **Quantas são as permutações de 1, 2, 3 e 4?** Inicialmente, recordemos que o número de permutações dos quatro algarismos, é  $4!$ , como já vimos anteriormente.
- **Quantas são as permutações de 1, 2, 3 e 4, nesta ordem, que deixam o um dos algarismos fixo?** De todas as  $4!$  permutações de 1, 2, 3 e 4, nesta ordem, 6 deixam o 1 fixo. De fato, temos 4 algarismos para permutar. Deixando o 1 fixo, temos  $P_3 = 3! = 6$  permutações. De maneira semelhante, temos  $3!$  permutações deixando o 2 fixo,  $3!$  permutações deixando o 3 fixo e, finalmente,  $3!$  permutações deixando o 4 fixo.
- **Quantas das permutações de 1, 2, 3 e 4, nesta ordem, deixam o 1 e 2 fixos?** Para essa pergunta, estamos interessados nas permutações de 1, 2, 3 e 4 que iniciam por 1 e 2 (nesta ordem). Assim, para o terceiro algarismo temos 2 possibilidades e para o quarto elemento temos 1 possibilidade. Assim, denotando por  $A_1$  o conjunto das permutações de 1, 2, 3 e 4 (nesta ordem) que deixam o 1 fixo e por  $A_2$  o conjunto das que deixam o 2 fixo, temos que  $n(A_1 \cap A_2) = 2!$ .
- **Quantas das permutações de 1, 2, 3 e 4, nesta ordem, deixam o 1 ou 2 fixos?** Para respondermos a essa pergunta, devemos calcular o número



de elementos de  $A_1 \cup A_2$ , em que  $A_1$  é o conjunto das permutações que deixam o 1 fixo e  $A_2$  é o conjunto das que deixam o 2 fixo. Pelo princípio da inclusão e exclusão e pelo que vimos anteriormente, temos que

$$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2) = 3! + 3! - 2!.$$

- **Quantas das permutações de 1, 2, 3 e 4, nesta ordem, deixam pelo menos um dos algarismos fixos?** Usando a mesma notação que usamos até agora, estamos interessados no número de elementos de  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ , em que  $A_i$  é o conjunto das permutações que deixam o algarismo  $i$  fixo na sua posição original. Pelo princípio da inclusão e exclusão, temos que
 
$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) \\ &- n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_1 \cap A_4) - n(A_2 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_4) - n(A_3 \cap A_4) \\ &+ n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + n(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &- n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= 3! + 3! + 3! + 3! - 2! - 2! - 2! - 2! - 2! - 2! + 1! + 1! + 1! + 1! - \\ &= 4 \times 3! - 6 \times 2! + 4 \times 1! - 1 \times 0! \end{aligned}$$

Finalmente.

- **Quantas das permutações de 1, 2, 3 e 4, nesta ordem, são caóticas, isto é, não deixam nenhum algarismo fixo?** Denotando por  $D_4$  o número de permutações caóticas de 1, 2, 3 e 4, nesta ordem, temos que  $D_4$  pode ser obtido como a diferença entre o número total de permutação dos 4 algarismos e o número de permutações dos 4 algarismos que deixam, pelo menos um, algarismo fixo. Assim, temos que

$$D_4 = 4! - (4 \cdot 3! - 6 \cdot 2! + 4 \cdot 1! - 1 \cdot 0!).$$

Antes de concluirmos, é importante mencionarmos que o 4 (de 4.3!) corresponde ao número de combinações dos 4 algarismos tomados 1 a 1; o 6 (de 6.2!) corresponde ao número de combinações dos 4 algarismos tomados 2 a 2; o 4 (de 4.1!) corresponde ao número de combinações dos 4 algarismos tomados 3 a 3; e o 1 (de 1.0!) corresponde ao número de combinações dos 4 algarismos tomados 4 a 4.

Isto nos dá 9 ( $D_4 = 24 - 24 + 12 - 4 + 1 = 9$ ) permutações caóticas dos 4 algarismos 1, 2, 3 e 4, nesta ordem. São elas: 2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312 e 4321.

**Generalizando.** Mesmo sabendo que não se pode generalizar um resultado obtido a partir de um único exemplo, a generalização do resultado anterior nos permite concluir que o número de permutações caóticas de  $n$  objetos é dado por

$$D_n = n! - \left[ \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} 1! \right].$$

Esta fórmula pode ser reescrita como

$$D_n = n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!},$$

ou ainda

$$D_n = n! \left[ \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right],$$

**Exemplo 5.** De acordo com a fórmula anterior, o número de permutações caóticas dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, nesta ordem, é 44. De fato, temos que  $n = 5$  e, portanto,

$$D_5 = 5! \left[ \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right] = 5! \left[ 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} \right]$$

$$D_5 = 5! \left[ \frac{60 - 20 + 5 - 1}{120} \right] = 44.$$

### 3. Lemas de Kaplansky

Dado o conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , sabemos que é possível construir  $7!/3!4! = 35$  subconjuntos de  $A$ , contendo três elementos, número esse encontrado a partir da combinação de 7 tomados 3 a 3. Os conjuntos  $\{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\{2, 4, 5, 6\}$ ,  $\{3, 4, 6, 7\}$ ,  $\{1, 3, 5, 7\}$  são alguns exemplos desses subconjuntos. Note que, de todos os subconjuntos de  $A$ , com 4 elementos, o único que não possui elementos consecutivos é o conjunto  $\{1, 3, 5, 7\}$ . Isto pode ser visto de forma bem simples – mas trabalhosa – se enumerarmos todos os subconjuntos de  $A$  com 4 elementos.

Mas, será que este é o único meio de provar essa afirmação? Será que não conseguimos um resultado mais geral que nos permita concluir essa afirmação? É o que tentaremos fazer agora.

Na realidade, este resultado existe, é conhecido como primeiro lema de Kaplansky e pode ser enunciado como segue.

a) **Primeiro lema de Kaplansky.** O número de subconjuntos do conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ , com  $p$  elementos, nos quais não há elementos consecutivos é indicado por  $f(n, p)$  e pode ser obtido por  $f(n, p) = C_{n-p+1, p}$ .

Veremos inicialmente o resultado para o nosso problema original, qual seja, o caso em que  $n = 7$  e  $p = 4$ . Em seguida buscaremos a generalização do resultado.

Retomando os subconjuntos de  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  com 4 elementos,

vamos representá-los por uma sequência de 7 sinais escolhidos entre + ou X, associando a cada número um sinal + ou X conforme ele esteja ou não no subconjunto. Assim, o subconjunto {1, 3, 4, 6} será representado pela sequência

+ X + + X + X;

o subconjunto {1, 3, 5, 6} será representado pela sequência

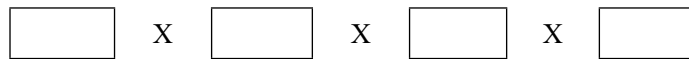
+ X + X + + X;

e a sequência

X + X + X + +

representa o subconjunto {2, 4, 6, 7}.

Com essa notação, nosso problema se resume a distribuir quatro sinais + e 3 sinais X, sem que tenhamos 2 sinais + consecutivos. Distribuindo primeiro os 3 sinais X, passam a existir 4 espaços nos quais poderemos distribuir os sinais +, sem que dois deles fiquem juntos, conforme se percebe na figura a seguir na qual os espaços estão representados pelas caixas.



Figura

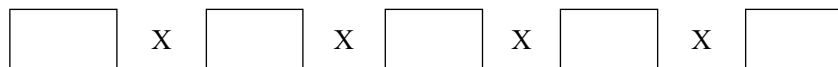
Ou seja, temos uma única possibilidade de distribuição para os quatro sinais + que coincide com  $f(7, 4) = C_{7-4+1,4}$ .

Antes de demonstrarmos o caso geral, vamos fazer outro exemplo com o objetivo de compreendermos melhor o que foi feito.

Vejamos o caso em que devemos formar subconjuntos do conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , com 3 elementos, sem que tenhamos 2 elementos consecutivos.

Como no caso anterior, vamos transformar nossos subconjuntos em sequências de sinais + ou X, conforme o elemento pertença ou não ao subconjunto. Neste caso, os subconjuntos que nos interessam são aqueles que dão origem a sequências contendo 3 sinais + e 4 sinais X, sem que tenhamos dois sinais + consecutivos.

Distribuindo, como no caso anterior, os sinais X, temos 5 espaços para distribuir os sinais +.



Assim, devemos escolher 3 desses 5 espaços para distribuir os sinais +. Temos, portanto,  $C_{5,3}$  possibilidades que, novamente, coincide com  $f(7, 3) = C_{7-3+1,3}$ .

**Generalizando.** No caso geral, teremos que distribuir  $p$  sinais  $+$  e  $n - p$  sinais  $X$ . Quando distribuirmos os  $n - p$  sinais  $X$  ficamos com  $n - p + 1$  possibilidades de escolha para os  $p$  sinais  $+$ . Assim, para o caso geral, temos  $f(n, p) = C_{n-p+1}^p$ ,  $p$  possibilidades.

**Exemplo 1.** Existem 1050 anagramas da palavra MISSISSIPI nos quais não temos duas letras  $S$  juntas. De fato, para formarmos anagramas da palavra MISSISSIPI nestas condições, podemos inicialmente escolher 4 lugares, sem que haja dois consecutivos, para colocar as letras  $S$ . Essa escolha pode ser feita de  $f(10, 4)$  maneiras diferentes. Finalmente, para cada uma dessas escolhas, devemos permutar as 6 letras restantes, lembrando que nelas existem 4 letras  $I$ . Essas permutações são em número de  $P_6^4$ . Assim, temos  $f(10, 4) \times P_6^4$  anagramas sem duas letras  $S$  juntas. Temos que  $f(10, 4) = C_{10-4+1}^4 = C_7^4 = 35$ . Por outro lado,  $P_6^4 = \frac{6!}{4!} = 30$ . Assim, o número de permutações é  $35 \times 30 = 1050$ .

### b) Segundo lema

O resultado conhecido como segundo lema de Kaplansky trata de um problema semelhante ao do primeiro lema – o de determinar o número de subconjuntos com  $p$  elementos do conjunto  $A = \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$ , nos quais quaisquer dois deles não são consecutivos – sendo que agora consideraremos o 1 e o  $n$  como elementos consecutivos.

Kaplansky afirma que o número de subconjuntos do conjunto  $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , com  $p$  elementos tais que quaisquer dois deles não são consecutivos, considerando o 1 e o  $n$  como consecutivos, é dado por  $g(n, p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p}^p$ .

Como no caso anterior, inicialmente veremos um exemplo para o caso em que  $n = 5$  e  $p = 2$ . De acordo com o segundo lema de Kaplansky, a resposta para o problema é

$$g(5, 2) = \frac{5}{5-2} C_{5-2}^2 = \frac{5}{3} C_{3,2} = 5.$$

Sabemos que existem 10 subconjuntos de  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  com 2 elementos e vamos listá-los.

{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}  
 {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}  
 {3, 4}, {3, 5}  
 {4, 5}

Observando os subconjuntos listados, temos que os únicos que satisfazem o problema são: {1, 3}, {1, 4}, {2, 4}, {2, 5} e {3, 5}. Que são em número de 5, como afirma o lema.

**Provando o segundo lema.** Para provarmos o lema, vamos dividir os subconjuntos procurados em duas categorias: a dos que possuem o 1 como um

dos elementos e a dos que não possuem. O total procurado será a soma desses dois totais.

Para determinarmos o número de subconjuntos de  $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , com  $p$  elementos, contendo o 1 e não contendo elementos consecutivos basta verificarmos que em cada um desses subconjuntos não pode figurar o 2 nem o  $n$ . Assim, sobram os  $n - 3$  elementos do conjunto  $\{3, 4, 5, \dots, n - 2, n - 1\}$  e com devemos construir conjuntos com  $p - 1$  elementos e sem elementos consecutivos. De acordo com o primeiro lema de Kaplansky, o número de tais conjuntos é  $C_{n-3-(p-1)+1, p-1} = C_{n-p-1, p-1}$ .

Para determinarmos o número de subconjuntos de  $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , com  $p$  elementos, não contendo o 1 e não contendo elementos consecutivos basta verificarmos que cada um desses subconjuntos é um subconjunto do conjunto  $B = \{2, 3, 4, \dots, n\}$ , com  $p$  elementos e sem elementos consecutivos. Assim, de acordo com o primeiro lema de Kaplansky o número de tais subconjuntos é  $C_{n-1-p+1, p} = C_{n-p, p}$ .

Somando estes dois números, obtemos que

$$g(n, p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p, p},$$

provando o segundo lema de Kaplansky.

**Exemplo 2.** Com 5 meninas e 8 meninos é possível formar 91 rodas de crianças sem que haja 2 meninas em lugares consecutivos. De fato, queremos calcular  $g(13, 5)$  que, pelo resultado anterior é igual a  $g(13, 5) =$

$$\frac{13}{13-5} C_{13-5, 5} = \frac{13}{8} C_{8, 5} = \frac{13}{8} \times \frac{8!}{5!3!} = 13 \times \frac{7 \times 6}{6} = 91.$$

## 4. Princípio das gavetas de Dirichlet

Nesta seção mostraremos um resultado conhecido como princípio das gavetas de Dirichlet que afirma o que segue.

- **Princípio das gavetas de Dirichlet.** Se  $n + 1$  ou mais objetos são colocados em  $n$  gavetas, então pelo menos uma gaveta recebe mais de um objeto.

Este resultado é também conhecido como princípio da casa dos pombos, pois possui uma versão que afirma o seguinte.

- **Princípio da casa dos pombos.** Se  $n + 1$  ou mais pombos são colocados em  $n$  casas, então pelo menos uma casa recebe mais de um pombo.

Este resultado pode ser visto como uma consequência imediata de outro conhecido como propriedade da média aritmética de  $n$  números e que pode ser enunciado da forma a seguir.

- **Propriedade das médias.** Se a média aritmética dos  $n$  números  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é  $m$ , então pelo menos um dos  $x_i$  é maior do que ou igual a  $m$ .

A demonstração deste resultado é bastante simples e será feita por redução ao absurdo. Supondo, por absurdo, que não é verdade que existe pelo menos um  $x_{i_0}$  tal que  $x_{i_0} \geq m$ , então devemos ter que, para todo  $i$ ,  $x_i < m$  e, portanto, teremos a desigualdade

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n < m + m + m + \dots + m = n \times m.$$

Esta desigualdade nos dá que  $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} < m$ , ou seja,  $m < m$ . O que é absurdo!

Logo devemos ter  $x_{i_0} \geq m$ , para algum  $i_0$ .

**Exemplo 1.** A média aritmética dos números 3, 5, 8, 12 e 16 é 8,8, pois  $\frac{3+5+8+12+16}{5} = 8,8$ . Note que 12 e 16 são maiores do que a média. Confirmando o resultado.

#### 4.1. Provando o princípio das gavetas de Dirichlet.

Temos  $n$  gavetas e pelo menos  $n + 1$  objetos. Podemos encontrar o número médio de objetos que será colocado em cada gaveta dividindo o número de objetos por  $n$  que é o número de gavetas. Como temos pelo menos  $n + 1$  objetos, o número médio de objetos por gaveta será maior do que ou igual a  $\frac{n+1}{n}$  que, por sua vez, é maior do que 1. Assim, o número médio de objetos por gaveta é maior do que ou igual a 2 e, pelo resultado provado anteriormente, existe uma gaveta que receberá uma quantidade maior do que ou igual a esse número médio, ou seja, uma gaveta receberá pelo menos 2 objetos. Provando o princípio de Dirichlet.

**Exemplo 2.** Em um grupo de 15 pessoas, há sempre pelo menos 2 que nasceram no mesmo mês. De fato, se considerarmos os 12 meses do ano como 12 gavetas e as 15 pessoas como os objetos que devem ser colocados nas gavetas de acordo com o mês de seu nascimento, pelo princípio das gavetas de Dirichlet, pelo menos 2 objetos ficam na mesma gaveta, ou seja, pelo menos duas pessoas aniversariam no mesmo mês.

O princípio das gavetas ou princípio da casa dos pombos pode ser generalizado como segue.

**Generalização do princípio de Dirichlet.** Se em  $n$  gavetas são distribuídos  $nk + 1$  objetos, então em uma delas será distribuído pelo menos  $k + 1$  objetos.

#### 4.2. Provando a generalização do princípio das gavetas de Dirichlet.

A demonstração deste resultado é simples e será feita por redução ao absurdo. Suponha que o resultado não seja verdadeiro. Isto é, suponha que em cada gaveta tenhamos no máximo  $k$  objetos. Como são  $n$  gavetas, se em cada uma delas tivéssemos no máximo  $k$  objetos, o número total de objetos nas gavetas seria menor do que ou igual a  $nk$ . Como são  $nk + 1$  objetos, isto é um absurdo. Logo, em uma das gavetas devemos ter pelo menos  $k + 1$  objetos, provando o resultado.

**Exemplo 3.** Em uma sala de aula com 50 pessoas, pelo menos 5 delas nasceram no mesmo mês. De fato, de acordo com a generalização do princípio de Dirichlet, o resultado já vale para 49 pessoas, se tomarmos os cada mês como uma gaveta, isto é,  $n = 12$  e  $k = 4$ . Neste caso, temos  $49 = 12 \times 4 + 1$ .

## Síntese do Capítulo



Neste capítulo, com o intuito de complementar o nosso conhecimento de Análise combinatória, abordamos tópicos que não são usualmente abordados em livros do ensino médio, como as permutações caóticas, os lemas de Kaplansky e o princípio de Dirichlet. Vimos que as permutações caóticas são aquelas permutações que não deixam nenhum elemento na sua posição original e aprendemos a calcular seu número em função da quantidade de elementos que estamos permutando.

Estudamos os lemas de Kaplansky, cujo primeiro nos permite determinar o número de subconjuntos do conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ , com  $p$  elementos, nos quais não há elementos consecutivos e o segundo lema que nos permite determinar o número de subconjuntos com  $p$  elementos do conjunto  $A = \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$ , nos quais quaisquer dois deles não são consecutivos, considerando agora o 1 e o  $n$  como elementos consecutivos.

Finalmente, apresentamos e demonstramos o princípio de Dirichlet ou princípio da casa dos pombos que, diferentemente do que foi feito até agora, aborda um problema de existência e não de contagem. Apesar de possuir um enunciado bastante simples, por afirmar que “Se  $n + 1$  ou mais pombos são colocados em  $n$  casas, então pelo menos uma casa recebe mais de um pombo.”, esse é um princípio da maior importância na matemática.

## Atividades de avaliação



1. Quantos são os anagramas da palavra PERMUTA que deixam exatamente 3 letras na sua posição original.
2. Prove que, para  $n \geq 3$ ,  $D_n = (n - 1)[D_{n-1} + D_{n-2}]$ .
3. Quantas são as permutações das letras A, B, C, D, E, F, G, H e I, nesta ordem, que deixam apenas as vogais nos seus lugares de origem? E quantas são as que deixam somente as consoantes fixas?
4. Quantas são as permutações dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, nesta ordem, de modo que os números ímpares não fiquem em suas posições originais?

nais? E em quantas os números pares não ficam nas suas posições originais?

- Dois professores particulares, um de matemática e outro de física, resolvem juntar 5 alunos em comum para dar aula em um único dia, no horário das 7 horas às 12 horas. Cada um dos cinco alunos terá aula de 1 hora com cada um dos professores. De quantas maneiras distintas é possível fazer a agenda de cada um deles?
- Mostre que em um conjunto com 8 números inteiros sempre há dois deles cuja diferença é um inteiro múltiplo de 7.

**Solução:** Sejam  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$  e  $a_8$  os oito inteiros. Quando dividimos (divisão euclidiana) um número inteiro por 7, os restos possíveis são 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Assim, como temos 8 números e 7 restos possíveis, ao dividirmos cada um desses números por 7, pelo menos 2 deles deixarão o mesmo resto. Digamos que, após uma reordenação se for o caso, os números  $a_1$  e  $a_2$  sejam dois dos que deixam o mesmo resto quando divididos por 7.

Assim teremos  $a_1 = 7q_1 + r$  e  $a_2 = 7q_2 + r$  e, portanto,  $a_1 - a_2 = 7(q_1 - q_2)$  é uma diferença que é um múltiplo de 7.

- Qual o número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que possamos garantir que nele há pelo menos 7 pessoas que nasceram no mesmo mês.
- Considere um quadrado de lado 2 e tomemos na superfície deste quadrado 5 pontos distintos. Mostre que há 2 desses pontos tais que a distância entre eles é menor do que ou igual a  $\sqrt{2}$ .
- Mostre que em uma reunião de 5 pessoas há sempre 2 com o mesmo número de conhecidos. E se forem 6 pessoas, o resultado ainda vale?
- Mostre que se  $S$  é um subconjunto qualquer, contendo 7 elementos, de  $A = \{1, 2, \dots, 10, 11, 12\}$ , então  $S$  possui dois subconjuntos cuja soma dos elementos é a mesma.

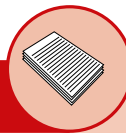
**Solução:** Dentre todos os subconjuntos de  $A$ , com sete elementos, aquele cuja soma dos elementos é a maior possível é o subconjunto  $S = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ , cuja soma dos elementos é 63. Assim, para todo subconjunto não vazio de  $A$ , com no máximo 7 elementos, a soma dos seus elementos varia de 1 a 63. Dado um subconjunto  $S_1$  de  $A$ , com 7 elementos,  $S_1$  possui exatamente  $127 (=2^7 - 1)$  subconjuntos não vazios, cujas somas dos elementos variam de 1 a 63. Pelo princípio das gavetas de Dirichlet, devem existir pelo menos dois subconjuntos de  $S_1$  com a mesma soma dos elementos.

- Mostrar que dentre 9 pontos quaisquer de um cubo com 2 cm de aresta, existem pelos menos dois cuja distância entre eles é menor do que ou igual a  $\sqrt{3}$ .



12. Mostre que em uma reunião na qual estão presentes 49 pessoas, pelo menos 5 nasceram no mesmo mês.
13. O teorema de Ramsey afirma que dado qualquer conjunto de  $n$  pontos no plano ( $n \geq 6$ ), tal que quaisquer 3 deles não são colineares, se pintarmos com apenas duas cores todos os segmentos ligando dois desses pontos, então teremos um triângulo cujos lados são da mesma cor. Prove o teorema de Ramsey para o caso em que  $n = 6$ .
14. Uma urna contém 22 bilhetes numerados cada um deles contendo uma dezena. Em 7 deles, o algarismo das dezenas é 1; em 6, o algarismo das dezenas é 2; e em 9, o algarismo das dezenas é 5. Quantos bilhetes devem ser sorteados, no mínimo, para termos certeza de que em 5 deles o algarismo das dezenas é igual?

## Texto complementar



### Texto 1: O princípio da inclusão-exclusão

*Texto extraído do livro Matemática discreta, de Edward R. Scheinerman, São Paulo: Thomson Learning Edições, 2006. p.124.*

Para achar o tamanho de uma união, somamos os tamanhos dos conjuntos individuais (inclusão), subtraímos os tamanhos de todas as interseções duas a duas (exclusão), somamos os tamanhos de todas as interseções três a três (inclusão) e assim por diante. A ideia é que, quando somamos todos os tamanhos dos conjuntos individuais, somamos demais, porque alguns elementos podem estar em mais de um conjunto. Assim, para compensar, subtraímos os tamanhos das interseções duas a duas; mas então estamos subtraindo em demasia. Corrigimos somando os tamanhos das interseções triplas, mas isto causa um excesso, o que nos obriga a subtrair novamente. Surpreendentemente, no final, tudo está perfeitamente equilibrado

### Texto 2: Casas de pombos

*Adaptado do livro Matemática Discreta, de Lászlo Lovász e outros. SBM: Rio de Janeiro, 2003. pp.34-35.*

Será que podemos achar em Fortaleza duas pessoas que tenham o mesmo número de fios de cabelo na cabeça? Poder-se-ia pensar que é impossível responder a essa pergunta, pois não sabemos sequer quantos fios de cabelo existe na nossa própria cabeça, imagine sobre o número de fios de cabelo na cabeça de todas as pessoas que vivem em Fortaleza, cujo número exato é por si só um tanto difícil de determinar. Mas existem alguns fatos que sabemos com segurança: ninguém tem mais de 500.000 fios de cabelo (uma observação científica) e há aproximadamente 2.470.000 habitantes em Fortaleza.

Podemos agora responder nossa pergunta original? O que você acha? A resposta é sim. E isso pode ser visto com o seguinte argumento: Se não houvesse duas pessoas com o mesmo número de fios de cabelo, então haveria no máximo uma pessoa careca, ou seja, com zero fios de cabelo, no máximo uma pessoa com exatamente 1 fio de cabelo;

A palavra “tamanho” está sendo empregada no sentido de número de elementos de um conjunto finito.

no máximo uma pessoa com exatamente 2 fios de cabelo, e assim por diante, até, no máximo, uma pessoa com exatamente 500.000 fios de cabelo.

Mas, então, isso significaria que em Fortaleza existiriam, no máximo, 500.001 habitantes. Como em Fortaleza existem 2.470.000 habitantes aproximadamente e como esse número é maior do que 500.000, deve haver duas pessoas com o mesmo número de fios de cabelo.

Esse fato é decorrente do princípio da casa dos pombos, um resultado com um enunciado simples e, aparentemente óbvio, mas que é de grande importância na matemática, tanto assim que frequentemente ele é utilizado como ferramenta básica de muitas provas.

## Referências



DANTE, Luiz R. **Matemática**: contexto e aplicações, v.2. São Paulo: Editora Ática, 2004.

DASSIE, Bruno Alves e outros. **Curso de Análise Combinatória e Probabilidade**: aprendendo com a resolução de problemas. Rio de Janeiro: Ed. Ciência Moderna, 2009.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar**, v.5: Análise combinatória e Probabilidade. São Paulo: Atual Editora, 2004.

LIMA, Elon Lages e outros. **Temas e problemas**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2003.

LIMA, Elon Lages e outros. **A matemática do ensino médio**, v.2. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

MORGADO, Augusto C. de O. e outros. **Análise Combinatória e Probabilidade**: com as soluções dos exercícios. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

SANTOS, J. Plínio O. e outros. **Introdução à análise combinatória**. Campinas: Ed. da UNICAMP, 2002.

SCHEINERMAN, E. R. **Matemática discreta**. São Paulo: Thomson Learning Edições, 2006.



# Capítulo

# 5

## Noções preliminares e operações entre eventos



## Objetivos

- Apresentar a noção de experimento aleatório, fazendo a distinção entre tais experimentos e os determinísticos.
- Definir e determinar espaços amostrais de experimentos aleatórios.
- Definir e exemplificar eventos de experimentos aleatórios.
- Operar com eventos de experimentos aleatórios.
- Definir e exemplificar eventos mutuamente excludentes.
- Definir e eventos complementares.

## 1. Introdução

Neste capítulo introduziremos os conceitos de experimentos aleatórios e experimentos determinísticos a partir de um exemplo para, em seguida, definir e determinar espaços amostrais de alguns experimentos aleatórios. Apresentaremos a definição de evento de um espaço amostral  $\Omega$  como qualquer subconjunto de  $\Omega$  e operaremos com eventos, obtendo outros eventos: união, interseção e o evento complementar. Finalizaremos o capítulo com a noção de eventos complementares.

## 2. Experimentos: aleatórios versus determinísticos

Quando soltamos uma moeda de uma altura de 80 centímetros, temos algumas certezas e algumas possibilidades. Dentre as certezas temos a de que sua trajetória descreverá um movimento vertical até atingir o solo e a de que ela atingirá o solo com uma velocidade aproximada de 4 m/s<sup>2</sup>. Além disso, temos a certeza de que veremos na face superior ou cara ou coroa.

Da física temos que, nestas condições, vale a igualdade  $Mgh = \frac{Mv^2}{2}$ , onde M é a massa da

moeda, g é a aceleração da gravidade, que pode ser considerada sendo de 10 m/s<sup>2</sup>, h é a altura da qual a moeda é largada, que neste caso é de 0,80 metros, e v é a velocidade da moeda em metros por segundo. Substituindo os valores dados nesta fórmula, encontraremos  $v = 4$  m/s.

Entre as várias possibilidades, temos a de que é possível, mas não é certo, que dê cara; é possível que você repita o experimento, etc.

## 2.1. Experimentos determinísticos ou aleatórios

Experimentos como (1) *soltar uma moeda de certa altura e observar sua trajetória* e (2) *soltar uma moeda de certa altura e anotar sua velocidade ao tocar o solo* são ditos **experimentos determinísticos**, pois seus resultados podem ser determinados antes mesmo de serem realizados. Enquanto, experimentos como (3) *soltar uma moeda de certa altura e observar sua face superior*, (4) *lançar um dado e observar sua face superior*, (5) *retirar uma bola de uma urna que contém três bolas pretas e cinco bolas vermelhas e observar a cor da bola* são ditos **experimentos aleatórios**, pois seus resultados, apesar de previsíveis, só podem ser determinados com a realização do experimento. Para cada realização do experimento podemos obter resultados diferentes, pois nestes experimentos temos a participação do acaso.

Mais precisamente, temos a definição que segue.

- **Experimentos aleatórios.** Experimentos aleatórios são aqueles cujos resultados, apesar de previsíveis, só podem ser determinados com a realização do experimento. Para cada realização do experimento, nas mesmas condições, podemos obter resultados diferentes, pois temos a participação do acaso.

**Exemplo 1.** São exemplos de experimentos aleatórios: (1) lançar simultaneamente dois dados e observar a soma dos números nas faces superiores; (2) em uma produção de lâmpadas, a retirada de uma lâmpada de cada lote para observar se ela é ou não defeituosa; (3) em uma festa, anotar o sexo de cada convidado que chega; (4) efetuar lançamentos sucessivos de uma moeda normal até que se consiga cara pela primeira vez; (5) jogar um dado de seis faces, sendo uma verde, duas amarelas e três vermelhas, para cima e observar a cor da face superior; (6) de um lote de 30 peças perfeitas e 5 defeituosas, retirar 10 delas ao acaso e observar o número de peças com defeito; (7) injetar uma dose de certo medicamento em uma pessoa e observar o tempo que a pessoa leva para melhorar (de uma febre, por exemplo).

**Exemplo 2.** São exemplos de experimentos determinísticos: (1) de uma urna contendo 10 bolas azuis, retirar uma delas e observar a cor; (2) lançar uma moeda com duas caras ou duas coroas e observar a face superior; deixar água ferver a 100 °C e observar se ela entra em ebulição.

## 3. Espaço amostral associado a um experimento aleatório

No lançamento de um dado de seis faces, numeradas de 1 a 6, os possíveis resultados na face superior são 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Dizemos, por isso, que o conjunto  $W = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$  é um espaço amostral associado a esse experimento.

Mais precisamente temos a definição seguinte.

### 3.1. Espaço amostral

Um espaço amostral associado a um experimento aleatório é um conjunto de todos os possíveis resultados para esse experimento.

O espaço amostral associado a um experimento aleatório será denotado pela letra grega  $Y$  (omega). Note que  $Y$  pode ser finito ou infinito. No caso de ele ser finito, o número de elementos de  $Y$  será indicado por  $n(Y)$  e também será chamado de cardinalidade de  $Y$ . No caso de ele ser infinito, pode ser discreto ou não.

**Exemplo 1.** Para o experimento aleatório  $E$ : lançar uma moeda uma vez e observar sua face superior, um espaço amostral é o conjunto  $Y = \{\text{cara, coroa}\}$ .

**Exemplo 2.** No lançamento simultâneo de duas moedas, os possíveis resultados são  $KK$ ,  $KC$ ,  $CK$  e  $CC$ , em que a letra  $C$  significa cara e a letra  $K$  significa coroa. Assim,  $KK$  significa “coroa no primeiro e no segundo lançamentos”, enquanto  $KC$  significa “coroa no primeiro e cara no segundo lançamentos”. O espaço amostral para esse experimento é, portanto, o conjunto  $Y = \{KK, KC, CK, CC\}$ .

**Exemplo 3.** Os dois exemplos anteriores foram de espaços amostrais finitos. Veremos agora um experimento com espaço amostral infinito. Seja  $E$  o experimento que consiste em **lançar uma moeda para cima até que se obtenha cara**. O espaço amostral deste experimento aleatório é  $Y = \{C, KC, KKC, KKKC, KKKC, \dots\}$ , pois podemos observar “cara” ( $C$ ) já no primeiro lançamento, ou no segundo lançamento ( $KC$ ), ou no terceiro lançamento ( $KKC$ ), e assim por diante. Esse espaço amostral também pode ser representado pelo conjunto  $W = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ , em que cada elemento representa o número de vezes que deu coroa antes de dar a primeira cara.

**Exemplo 4.** Se de uma urna contendo 3 bolas azuis, 2 brancas e 3 pretas retirarmos uma bola e observarmos a cor, temos um experimento aleatório cujo espaço amostral é  $Y = \{\text{azul, branca, preta}\}$ .

Restringiremos nosso estudo aos experimentos aleatórios cujos espaços amostrais são finitos, mais precisamente àqueles experimento cujo conjunto  $Y$  é um conjunto não-vazio com uma quantidade finita de elementos.

### 3.2. Eventos associados a um experimento aleatório

Definindo o espaço amostral associado a um experimento aleatório como um conjunto  $Y$ , podemos definir um evento desse espaço amostral como um subconjunto de  $Y$ . Por exemplo, para o experimento aleatório  $E$ : *lançar um dado e observar sua face superior* temos o conjunto  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  como um espaço amostral associado a  $E$ . O subconjunto de  $Y$  dado por  $A = \{2, 4, 6\}$  pode ser pensado como o evento  $A$ : *o número observado foi um número par*. O conjunto  $B = \{1, 2\}$  pode ser associado ao evento  $B$ : *o número observado foi um número menor do que 3*.



De forma mais precisa temos a definição seguinte.

**Evento.** Seja  $Y$  um espaço amostral associado ao experimento aleatório  $E$ . Um evento desse experimento é qualquer subconjunto de  $Y$ .

**Evento impossível é um evento que nunca ocorre. Observar uma bola vermelha retirada de uma urna que contém somente bolas pretas e bolas brancas é um evento impossível.**

Como o conjunto vazio e o próprio conjunto são subconjuntos de um dado conjunto, então eles também são eventos de um experimento aleatório. O conjunto vazio é dito um evento impossível, enquanto o conjunto  $Y$  é dito um evento certo. Além disso, cada elemento  $x$  do espaço amostral  $Y$  constitui um evento do experimento aleatório, a saber, o evento  $\{x\}$ , que é dito evento simples ou elementar.

**Sabemos que se  $A$  é  $m$  conjunto finito com  $n$  elementos, então  $A$  possui, exatamente,  $2^n$  subconjuntos. Assim, se  $\Omega$  é um conjunto finito com  $n$  elementos, que é um espaço amostral de um experimento aleatório  $E$ , então  $\Omega$  possui exatamente  $2^n$  eventos.**

Observe que, de acordo com o que foi feito anteriormente, quando realizamos um experimento aleatório e dizemos que ocorreu o evento  $A$ , queremos dizer que o resultado do experimento foi um dos elementos de  $A$ . Assim, quando jogamos um dado de seis faces, não viciado e com as faces numeradas de 1 a 6, diremos que ocorreu o evento  $A = \{1, 2, 3\}$  se na face superior for observado o número 1 ou o 2 ou o 3.

**Exemplo 5.** Dado o experimento aleatório  $E$ : lançar duas moedas distinguíveis, simultaneamente, e observar a face superior, seu espaço amostral é o conjunto  $W = \{CC, CK, KC, KK\}$  em que  $C$  representa “cara” e  $K$  representa “coroa”. O subconjunto de  $W$  dado por  $A = \{CC, KK\}$  pode ser pensado como o evento  $A$ : observou-se resultados iguais. O subconjunto  $B = \{CK, KC, KK\}$  pode ser pensado como o evento  $B$ : observou-se pelo menos uma coroa.

**Exemplo 6.** No lançamento simultâneo de dois dados distinguíveis e não viciados, o conjunto  $A = \{(1, 2), (2, 1)\}$  pode ser pensado como o evento  $A$ : a soma dos números nas faces superiores é 3. O conjunto  $B = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$  pode ser pensado como o evento  $B$ : a soma dos números nas faces superiores é 7. O conjunto  $C = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$  pode ser pensado como o evento  $C$ : o maior número observado foi 5.

## 4. Operações entre eventos e eventos mutuamente excludentes

Quando estudamos os conjuntos, vimos que é possível definir algumas operações entre eles e, com isso, obtermos novos conjuntos. Como os eventos de um experimento aleatório são subconjuntos do espaço amostral associado ao experimento, podemos utilizar essas operações para obter novos eventos.

De fato, dado um experimento aleatório  $E$  com espaço amostral associado  $Y$ , se  $A$  e  $B$  são eventos deste experimento, temos as três definições que seguem.

**União.** O evento união de  $A$  com  $B$  é o evento  $A \cup B$  que ocorre quando o resultado do experimento é um elemento de  $A$  ou um elemento de  $B$ .

Assim, de acordo com a definição anterior, ocorre o evento  $A \cup B$  quando ocorre o evento  $A$  ou o evento  $B$ .

**Exemplo 1.** O experimento aleatório  $E$ : lançar duas moedas distinguíveis, simultaneamente, e observar suas faces, a união dos eventos  $A$ : observar duas caras e  $B$ : observar duas coroas é o evento  $A \cup B$ : observar dois resultados iguais. De fato, os eventos  $A$  e  $B$  são, respectivamente,  $A = \{CC\}$  e  $B = \{KK\}$  e, assim, o evento  $A \cup B$  é dado por  $A \cup B = \{CC, KK\}$ .

**Interseção.** O evento interseção de  $A$  com  $B$  é o evento  $A \cap B$  que ocorre quando o resultado do experimento é um elemento de  $A$  e de  $B$  ao mesmo tempo.

De acordo com a definição 1.4.2, ocorre o evento  $A \cap B$  quando ocorrem os eventos  $A$  e  $B$ , simultaneamente.

**As definições 1 e 2 devem ser adaptadas para o caso em que  $A$  ou  $B$  ou ambos são o evento impossível, ou seja, o conjunto vazio.**

**Exemplo 2.** No experimento aleatório  $E$ : lançar duas moedas distinguíveis, simultaneamente, e observar suas faces, a interseção dos eventos  $A$ : observar pelo menos uma cara e  $B$ : observar pelo menos uma coroa é o evento  $A \cap B$ : observar resultados diferentes. De fato, os eventos  $A$  e  $B$  são  $A = \{CC, CK, KC\}$  e  $B = \{KK, KC, CK\}$  e, assim, o evento  $A \cap B$  é dado por  $A \cap B = \{CK, KC\}$ .

**Evento complementar.** O evento complementar de  $A$  é o evento  $A^c$  que ocorre quando o resultado do experimento é um elemento de  $Y$  que não está em  $A$ .

Como se percebe, o evento  $A^c$  ocorre sempre que não ocorre o evento  $A$ .

Como a interseção de dois conjuntos pode ser o conjunto vazio, pode acontecer de o evento interseção de  $A$  com  $B$  ser o evento impossível. Neste caso, diremos que  $A$  e  $B$  são mutuamente excludentes. Isto significa que se ocorrer o evento  $A$  não pode ocorrer o evento  $B$  e vice-versa, ou seja, se ocorrer  $B$  não pode ocorrer  $A$ .

Mais precisamente temos a definição que segue.

- **Eventos mutuamente excludentes.** Dizemos que os eventos  $A$  e  $B$  de um experimento aleatório  $E$  são mutuamente excludentes se  $A \cap B = \emptyset$ .

**Exemplo 3.** No experimento aleatório  $E$ : lançar um dado e observar o número na face superior, os eventos  $A$ : observar um número maior do que 5 e  $B$ : observar um número ímpar são excludentes. De fato, temos que  $A = \{6\}$  e  $B = \{1, 3, 5\}$  e, assim, o evento  $A \cap B$  é o conjunto  $\emptyset$ .

Os conjuntos  $A = \{1, 2\}$  e  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  são eventos do experimento aleatório que consiste em lançar um dado e observar o número na face superior, cujo espaço amostral associado é o conjunto  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Note que, de acordo com a teoria dos conjuntos,  $A$  está contido em  $B$ , uma vez que todo elemento de  $A$  é também elemento de  $B$ . Na linguagem da probabilidade dizemos que o evento  $A$  implica no evento  $B$ .

Mais precisamente, se  $E$  é um experimento aleatório com espaço amostral associado  $Y$  e  $A$  e  $B$  são eventos de  $E$ , ambos não impossíveis, temos a definição que segue.

- **Inclusão de eventos.** Dizemos que o evento  $A$  implica o evento  $B$  e escrevemos  $A \subset B$  se todo elemento de  $A$  é, também, elemento de  $B$ .

Note que dizer que o evento  $A$  implica o evento  $B$  quer dizer que se ocorrer o evento  $A$  então, com certeza, ocorrerá o evento  $B$ .

#### 4.1. Propriedades das operações entre eventos.

As operações entre eventos possuem as mesmas propriedades das operações entre conjuntos. É o que afirmamos nas proposições seguintes, cujas demonstrações não serão feitas aqui.

- **Proposição 1.** Se  $A$ ,  $B$  e  $C$  são eventos de um experimento aleatório  $E$ , então vale o seguinte:

1.  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

2.  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .

- **Proposição 2.** Se  $A$ ,  $B$  e  $C$  são eventos de um experimento aleatório  $E$ , então vale o seguinte:

1.  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

2.  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ .

As definições de união e interseção de eventos de espaços amostrais associados a experimentos aleatórios podem ser estendidas para uma quantidade enumerável de eventos, como veremos nas duas definições a seguir.

- **União enumerável de eventos.** Dados os eventos  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , o evento união dos  $A_i, i = 1, 2, 3, \dots$  é o evento  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  que ocorre quando o resultado do experimento é um elemento de algum dos  $A_i$ .
- **Interseção enumerável de eventos.** Dados os eventos  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , o evento interseção dos  $A_i, i = 1, 2, 3, \dots$  é o evento  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$  que ocorre quando o resultado do experimento aleatório é um elemento comum a todos os  $A_i$ .

## Síntese do Capítulo



Neste capítulo iniciamos o estudo da Probabilidade introduzindo os conceitos básicos de experimentos aleatórios, em contraposição a experimentos determinísticos. Introduzimos também os conceitos de espaço amostral associado a um experimento aleatório e de eventos, aproveitando para conceituar eventos simples ou elementares.

Aprendemos a operar com eventos, determinando o evento união, o evento interseção e o complementar de um evento em relação ao espaço amostral. Vimos que a união e a interseção de eventos podem ser realizadas com quantidades finitas ou com quantidades infinitas enumeráveis de eventos. Definimos eventos mutuamente excludentes como aqueles cuja interseção é o evento impossível, ou seja, o conjunto vazio.

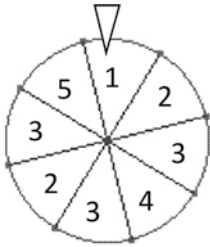
## Atividades de avaliação



1. Uma urna contém uma bola vermelha e três bolas pretas. Determine o espaço amostral do experimento aleatório  $E$ : *retirar uma bola e observar sua cor*. Defina os eventos  $A$ : *retirar bola vermelha*,  $B$ : *retirar bola azul*,  $C$ : *retirar bola vermelha ou azul* e  $D$ : *retirar bola vermelha ou preta*.

**Solução 1:** Sabemos que a urna contém bolas vermelhas ( $V$ ) e bolas pretas ( $P$ ). Assim, para o experimento aleatório  $E$ : *retirar uma bola e observar sua cor*, o espaço amostral é o conjunto  $Y = \{V, P\}$ . Os eventos  $A, B, C$  e  $D$  são dados por  $A = \{V\}$ ;  $B = \emptyset$ , pois não existe bola azul na urna;  $C = \{V\}$  e  $D = \{V, P\} = Y$ .

**Solução 2:** Para deixar claro que na urna existem quatro bolas, sendo 1 vermelha e 3 pretas, podemos pensar o espaço amostral do experimento aleatório  $E$ : *retirar uma bola e observar sua cor* como sendo o conjunto  $Y = \{V, P_1, P_2, P_3\}$ , em que  $V$  representa a bola vermelha e  $P_i (i = 1, 2, 3)$  repre-



sesta cada uma das bolas pretas. Nestas condições, os eventos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são dados por  $A = \{V\}$ ;  $B = \emptyset$ , pois não existe bola azul na urna;  $C = \{V\}$  e  $D = \{V, P_1, P_2, P_3\}$ , ou seja,  $D = Y$ .

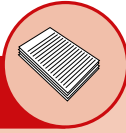
2. Ao girarmos a roleta ao lado, determine o espaço amostral e os eventos  $A$ : ocorrência de número par e  $B$ : ocorrência de número primo.

**Solução 1:** Ao girarmos a roleta do problema, os possíveis valores obtidos são dados pelo conjunto  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . O evento  $A$  é o conjunto  $\{2, 4\}$  e o evento  $B$  é o conjunto  $\{2, 3, 5\}$ .

**Solução 2:** Para deixarmos explicitado que existem dois números 2 e três números 3 e somente um número 1, um 4 e um 5, poderíamos escrever o espaço amostral como  $Y = \{1, 2_1, 2_2, 3_1, 3_2, 3_3, 4, 5\}$ . Neste caso teríamos o evento  $A$  dado por  $\{2_1, 2_2, 4\}$  e o evento  $B$  dado por  $\{2_1, 2_2, 3_1, 3_2, 3_3, 5\}$ . Essa representação é interessante quando estivermos estudando a probabilidade de um evento.

3. Dê exemplo de dois experimentos aleatórios e de dois experimentos determinísticos.
4. Um tetraedro regular é uma pirâmide de quatro faces triangulares congruentes. No lançamento de um tetraedro, cujas faces estão numeradas de 1 a 4, considera-se que saiu o número “ $x$ ” se a face com o número “ $x$ ” está virada para o chão ou a mesa, após o lançamento. Considere o experimento aleatório dado pelo lançamento de um tetraedro. Defina seu espaço amostral e os eventos  $A$ : ocorrência de um múltiplo de 3,  $B$ : ocorrência de um número menor do que ou igual a 3,  $C$ : ocorrência de um número maior do que 4 e  $D$ : ocorrência de um número menor do que 5.
5. Uma família tem exatamente três crianças de idades diferentes. Denotando por  $M$  os filhos do sexo masculino e por  $F$  os do sexo feminino, determine as várias possibilidades para o experimento aleatório  $E$ : observar a sequência dos filhos, do mais novo para o mais velho. Determine os eventos  $A$ : todas as crianças são do mesmo sexo e  $B$ : duas crianças são meninas ou exatamente duas são meninos.
6. No lançamento simultâneo de uma moeda e um dado, determine o espaço amostral e os eventos  $A$ : dar cara e um número par e  $B$ : dar coroa e um número maior do que ou igual a 5.
7. Uma urna contém 5 bolas brancas e 3 bolas pretas. Uma bola é retirada ao acaso, sem reposição, até que surja uma bola preta. Determine o espaço amostral desse experimento aleatório. Determine o evento  $A$ : foram retiradas no máximo duas bolas brancas. Escolha dois outros eventos e determine-os.
8. Uma carta é escolhida de um baralho comum de 52 cartas e observa-se seu naipe. Determine o espaço amostral. Determine o evento  $A$ : a carta escolhida foi de copas ou de ouro.

9. De uma caixa contendo 3 lâmpadas defeituosas e 7 lâmpadas perfeitas, são escolhidas 4 lâmpadas e observa-se o número de peças defeituosas. Determine o espaço amostral. Determine os eventos  $A$ : *exatamente duas lâmpadas são defeituosas*,  $B$ : *são defeituosas duas ou três lâmpadas* e  $C$ : *são defeituosas menos de três lâmpadas*.
10. Dentre todos os números de três algarismos que podem ser obtidos pela permutação dos algarismos 1, 2 e 3, sorteia-se um. O evento  $C$ : *o número sorteado é múltiplo de 2 ou de 3* é a união entre os eventos  $A$ : *o número sorteado é múltiplo de 2* e  $B$ : *o número sorteado é múltiplo de 3*. Assim,  $C = A \cup B$ . O evento  $D$ : *o número sorteado é múltiplo de 2 e de 3* é o evento interseção de  $A$  com  $B$  e, portanto,  $D = A \cap B$ .
11. No lançamento de um dado duas vezes, o evento ocorre o número 5 no primeiro lançamento e a soma dos dois números obtidos é 9 é a interseção entre os eventos  $C$ : *ocorre o número 5 no primeiro lançamento* e  $B$ : *a soma dos dois números obtidos é 9*. Ou melhor, é a interseção entre os eventos  $A = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}$  e  $B = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$ . Assim,  $C = A \cap B = \{(5, 4)\}$ .
12. Escolha um experimento aleatório  $E$  e eventos  $A$ ,  $B$  e  $C$  de  $E$ , não impossíveis, e verifique os itens a e b da proposição 1.
13. Escolha um experimento aleatório  $E$  e eventos  $A$ ,  $B$  e  $C$  de  $E$ , não impossíveis, e verifique os itens a e b da proposição 2.
14. Escolha um experimento aleatório  $E$  e eventos  $A$  e  $B$  de  $E$ , não impossíveis, e que sejam mutuamente excludentes.
15. No lançamento de duas moedas distinguíveis, determine o evento complementar do evento  $A$ : *observar pelo menos uma cara* e do evento  $B$ : *não observar cara*.
16. Defina eventos mutuamente excludentes.
17. Uma urna contém 20 bolas iguais, numeradas de 1 a 20. Uma bola é retirada ao acaso e seu número é observado. Determine o espaço amostral associado a esse experimento e explicita por enumeração dos elementos, os seguintes eventos: (a)  $A$ : *o número observado é par*; (b)  $B$ : *o número observado é primo*; (c)  $C$ : *o número observado é menor do que ou igual a 20*; (d) *o número observado é maior do que 20*; (e)  $E$ : *o número observado é múltiplo de 6 ou de 7*; (f)  $F$ : *o número observado é par e múltiplo de 3*; (g)  $G$ : *o número observado não é múltiplo de 5*.



## Texto complementar

### Texto 1: Um pouco de história

*Texto extraído do livro Análise combinatória e probabilidade, de Augusto Cesar Morgado e outros, Coleção do Professor de Matemática. SBM: Rio de Janeiro, 2006. pp.6-7. Adaptado.*

Diz-se geralmente que a teoria das probabilidades originou-se com Blaise Pascal e Pierre de Fermat devido à curiosidade do Chevalier de Méré, jogador apaixonado, que em cartas discutiu com Pascal problemas relativos à probabilidade de ganhar em certo jogo de cartas. Despertado seu interesse pelo assunto, Pascal correspondeu-se com Fermat sobre o que hoje chamaríamos de probabilidades finitas.

Mas em verdade a teoria elementar das probabilidades já tinha sido objeto de atenção bem antes. Levando em conta o fascínio que os jogos de azar sempre exerceram sobre os homens, estimulando-os a achar maneiras seguras de ganhar, não é de se espantar que muito cedo problemas relativos a jogos de cartas ou de dados tenham atraído a atenção de pessoas...

A primeira obra conhecida em que se estudam as probabilidades é o livro *De Ludo Aleae* (Sobre os jogos de Azar), de Jerônimo Cardano, publicado em 1663. É possível que o interesse de Cardano pelo assunto se deva a sua paixão pelos jogos de azar. Uma tradução para o inglês moderno do livro de Cardano encontra-se no livro *Cardano, the Gambling Scholar*, Oysten Ore.

Na parte dedicada à probabilidade Cardano mostra, entre outras coisas, de quantas maneiras podemos obter um número, lançando dois dados. Assim, por exemplo, 10 pode ser obtido de 3 maneiras: 5 em cada dado, 6 no primeiro e 4 no segundo, e 4 no primeiro e 6 no segundo.

Além de Cardano, Johannes Kepler fez algumas observações sobre probabilidades, em um livro publicado em 1606, no qual estuda as diferentes opiniões sobre o aparecimento de uma estrela brilhante, em 1604.

Também Galileu preocupou-se com as probabilidades, estudando os jogos de dados, para responder à pergunta de um amigo: Com três dados, o número 9 e o número 10 podem ser obtidos de seis maneiras distintas, cada um deles. No entanto, a experiência mostra que 10 é obtido mais frequentemente do que 9. Como explicar isso. Galileu estudou cuidadosamente as probabilidades envolvidas e mostrou, corretamente, que, de 216 casos possíveis, 27 são favoráveis ao aparecimento do número 10 e 25 são favoráveis ao aparecimento do número 9.

Malgrado investigações destes precursores, a Teoria das Probabilidades só começa a se desenvolver a partir dos trabalhos de Pascal, que aplicou seu estudo com o triângulo aritmético que leva seu nome ao estudo dos jogos de cartas.

## Referências



HARIKI, Seiji e ONAGA, Dulce S. **Curso de matemática**, vol.3. São Paulo: Ed. Harper & Row. 1981.

DANTE, Luiz R. **Matemática: contexto & aplicações**, vol.2. São Paulo: Ed. Ática. 2004.

DOLCE, Osvaldo, IEZZI, G. e outros. **Tópicos de matemática**, vol. 2. Ed. Atual. São Paulo: 1980.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar: combinatória e probabilidade**, vol. 5. São Paulo: Ed. Atual. 2004.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Ed. Edgard Blücher. 1976.

DANTAS, C. A. B. **Probabilidade: um curso introdutório**. São Paulo: Edusp. 2008.

MORGADO, A. C. O. e outros. **Análise combinatória e Probabilidade**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM. 2006.





# Capítulo

# 6

## Definições de Probabilidade e Principais Resultados



## Objetivos

- Apresentar as definições de probabilidade, distinguindo entre a clássica, a frequentista e a axiomática.
- Enunciar e demonstrar as principais propriedades da probabilidade, de acordo com a definição clássica.
- Utilizar as propriedades da probabilidade na resolução de problemas.
- Definir e exemplificar a probabilidade condicional.
- Definir e exemplificar eventos independentes.
- Enunciar e demonstrar o teorema da probabilidade total.
- Definir e exemplificar a distribuição binomial de probabilidade.

## 1. Introdução

A probabilidade de um evento é a medida da chance desse evento ocorrer. Por exemplo, no experimento  $E$ : *lançamento de uma moeda honesta*, o evento  $A$ : *observar cara na face superior* ocorre com probabilidade  $1/2$ , ou seja, a chance de ocorrer cara é de 1 em 2 resultados possíveis. De fato, quando lançamos uma moeda honesta, podemos observar cara ou coroa na face superior. Assim observar cara é um dos dois resultados possíveis.

Neste capítulo apresentaremos três definições de probabilidade – a clássica, a frequentista e a axiomática – todas possuindo as mesmas propriedades, intrínsecas à definição, que são apresentadas e demonstradas. Definiremos probabilidade condicional, exemplificando e apresentando suas propriedades e principais resultados, como o teorema da probabilidade total e o teorema de Bayes, aproveitando este conceito para definirmos eventos independentes.

Por fim, estudaremos a distribuição binomial de probabilidade como o modelo probabilístico adotado para um experimento aleatório no qual estamos interessados na ocorrência de um evento específico.

## 2. Definições de Probabilidade

Como dissemos anteriormente, não se pode prever de antemão o resultado de um experimento aleatório. Entretanto, sabemos que alguns resultados são mais fáceis de ocorrer do que outros. Por exemplo, quando lançamos uma moeda e observamos sua face superior, os únicos resultados possíveis são cara e coroa, que denotaremos, respectivamente, por C e K.

Assim, o espaço amostral no lançamento de uma moeda é  $\Omega = \{C, K\}$  e, se a moeda for perfeita, acreditamos que qualquer uma das faces pode ocorrer com a mesma chance. Já no lançamento de um dado cujas faces encontram-se numeradas com os números 1, 2, 4, 8, 16 e 32, parece óbvio que a chance de ocorrer na face superior um número par é maior do que a de se obter um número ímpar. É essa chance que desejamos mensurar. A medida da chance de um evento A ocorrer é chamada probabilidade de A e será denotada por  $p(A)$ .

### 2.1. Definição clássica de probabilidade

No lançamento de uma moeda perfeita, os possíveis valores são C (cara) ou K (coroa), ambos com a mesma chance de ocorrer. Assim, no lançamento de uma moeda perfeita, o evento A: *observar cara* representa 1 dos 2 possíveis valores e, portanto, é razoável que digamos que a probabilidade de A é igual a 1 resultado favorável em 2 resultados possíveis, ou seja,  $1/2$ . De maneira semelhante, a probabilidade do evento B: *observar coroa* é igual a  $1/2$ .

No lançamento de um dado normal, os possíveis valores são 1, 2, 3, 4, 5 e 6, todos com a mesma chance de ocorrer. Assim, no lançamento de um dado normal, cada evento simples representa um dos seis possíveis resultados e, portanto, como no caso das moedas, é razoável que digamos que a probabilidade do evento  $A = \{1\}$  é igual a  $1/6$ , ou seja, 1 resultado favorável em 6 resultados possíveis; a do evento  $B = \{2\}$  é igual a  $1/6$ ; o mesmo valendo para os demais eventos elementares. Já a probabilidade do evento  $C = \{2, 4, 6\}$  deve ser  $3/6$ , pois C possui 3 dos 6 resultados possíveis. Além disso,  $3/6 = 1/2$ , significando que C possui metade dos resultados possíveis.

Quando em um experimento aleatório com espaço amostral finito todos os eventos elementares têm a mesma chance de ocorrer, dizemos que o espaço amostral é equiprovável. Assim, os experimentos aleatórios  $E_1$ : *lançar uma moeda e observar a face superior* e  $E_2$ : *lançar um dado e observar a face superior* possuem espaços equiprováveis.

O que fizemos até agora sugere a definição que segue.

- **Probabilidade de um evento.** Em um espaço amostral equiprovável  $Y$ , a probabilidade de ocorrer um evento A é indicada por  $p(A)$  e definida como

$p(A) = n(A)/n(Y)$ , em que  $n(A)$  significa o número de elementos do evento  $A$  e  $n(Y)$  significa o número de elementos do espaço amostral  $W$ .

Assim, o número  $p(A)$  mede a chance de ocorrer o evento  $A$ .

Em geral, o conjunto  $\Omega$  é dito conjunto dos resultados possíveis ou dos casos possíveis e o conjunto  $A$  é dito conjunto dos resultados favoráveis ou dos casos favoráveis. Assim, podemos redefinir a probabilidade de ocorrer o evento  $A$  como

$$p(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

**Exemplo 1.** A probabilidade de ocorrer um número primo ímpar no lançamento de um dado honesto é  $\frac{2}{6}$  ou  $\frac{1}{3}$ . De fato, temos que  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e o evento  $A$ : *observar número primo ímpar* corresponde ao conjunto  $A = \{3, 5\}$ . Assim,  $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6}$  e, portanto,  $p(A) = \frac{1}{3}$ .

**Exemplo 2.** No lançamento simultâneo de dois tetraedros perfeitos distinguíveis, a probabilidade de se obter números iguais é  $1/4$ . De fato, temos que o espaço amostral deste experimento aleatório é o conjunto  $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ .

O evento  $A$ : *observar números iguais* é o conjunto dado por

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}.$$

$$\text{Assim, } p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

## 2.2. Propriedades da probabilidade

De acordo com a definição, a probabilidade de um evento  $A$  de um espaço amostral finito e equiprovável  $\Omega$  possui as propriedades que seguem.

- **Propriedade 1.** Se  $A = \emptyset$ , então  $p(A) = 0$ .

**Prova:** De fato, se  $A = \emptyset$ , então  $n(A) = 0$  e, conseqüentemente,

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{0}{n(\Omega)} = 0.$$

- **Propriedade 2.** Se  $A = Y$ , então  $p(A) = 1$ .

**Prova:** De fato, se  $A = W$ , então  $p(A) = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1$ .

- **Propriedade 3.** Para cada  $x \in Y$ ,  $p(x) = p(\{x\}) = \frac{1}{n(\Omega)}$ .

**Prova:** Deixada para o leitor.

- **Propriedade 4.** Se  $A$  e  $B$  são eventos tais que  $A \cap B = \emptyset$ , então  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ .

**Prova:** Como  $A \cap B = \emptyset$ , temos que  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ . Assim,

$$p(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A) + n(B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} = p(A) + p(B).$$

A propriedade a seguir generaliza a propriedade anterior.

- **Propriedade 5.** Se  $A$  e  $B$  são eventos quaisquer, então

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

**Prova:** Temos que  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$  e assim,

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(\Omega)} \\ &= \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = p(A) + p(B) - p(A \cap B). \end{aligned}$$

E finalmente temos a Propriedade 6 que relaciona a probabilidade de um evento com a de seu complementar.

- **Propriedade 6.** Seja  $A^c$  o evento complementar de  $A$ . Temos que

$$p(A^c) = 1 - p(A).$$

**Prova:** De fato, temos que  $Y = A \cup A^c$ .

Assim,  $1 = p(Y) = p(A \cup A^c) = p(A) + p(A^c)$ . Donde se conclui que  $p(A^c) = 1 - p(A)$ .

**Exemplo 3.** No lançamento de duas moedas distinguíveis, temos que o espaço amostral é  $\Omega = \{ CC, CK, KC, KK \}$ . A probabilidade do evento  $A$ : observar pelo menos uma cara é  $p(A) = 3/4$ . A probabilidade do evento  $A^c$ : observar zero cara é

$$p(A^c) = 1 - p(A) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

**Exemplo 4.** Um número inteiro é escolhido aleatoriamente entre os números de 1 a 10. A probabilidade de o número escolhido ser múltiplo de 6 ou de 9 é  $1/5$ . De fato, os eventos  $A$ : o número escolhido é múltiplo de 6 e  $B$ : o número escolhido é múltiplo de 9 são dados pelos conjuntos  $A = \{6, 12, 18\}$  e  $B = \{9, 18\}$ . Os eventos  $A \cup B$  e  $A \cap B$  são os conjuntos  $A \cup B = \{6, 9, 12, 18\}$  e  $A \cap B = \{18\}$ . Temos que  $n(A \cup B) = 4 = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 3 + 2 - 1 = 4$ , e, portanto,  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ .

**Exemplo 5.** No experimento aleatório anterior, a probabilidade de o número escolhido ser múltiplo de 10 ou de 11 é  $3/10$ , pois os eventos  $C$ : o número escolhido é múltiplo de 10 e  $D$ : o número escolhido é múltiplo de 11 são mutu-

amente excludentes. Assim,  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$ .

### 2.3. Definição frequentista de probabilidade

Suponha que tenhamos uma moeda e não saibamos se ela é ou não viciada, ou seja, se ela é ou não uma moeda com probabilidades diferentes para o evento  $A$ : *observar cara* e o evento  $B$ : *observar coroa*. Qual seria uma boa estratégia para descobrir se a moeda é ou não honesta?

Você resolve fazer 10 lançamentos, observar e anotar os resultados.

Lançamentos	Cara	Coroa
10	7	3

Após os dez primeiros lançamentos, qual é a sua opinião, a moeda é perfeita ou não?

É claro que com uma quantidade tão pequena de lançamentos não é possível decidir se a moeda é perfeita ou não. O que podemos afirmar é que, nos dez lançamentos, a frequência do evento “cara” foi 7, enquanto a frequência do evento “coroa” foi três e que se continuarmos com a experiência e o resultado se mantiver então podemos dizer que  $p(C)$ , a probabilidade do evento cara, deve ser  $\frac{7}{10}$  (afinal, foram 7 resultados em 10) e que  $p(K)$ , a probabilidade do evento “coroa”, deve ser  $\frac{3}{10}$ .

Como se percebe, definimos as probabilidades dos eventos “cara” e “coroa” como a frequência relativa de cada um desses eventos nos dez lançamentos.

Suponha que após mais 10 lançamentos, tenhamos os seguintes resultados:

	Lançamentos	Cara	Coroa
	10	7	3
	10	6	4
<b>Total</b>	<b>20</b>	<b>13</b>	<b>7</b>

E agora, a moeda é perfeita ou não?

É claro que nunca poderemos responder com certeza, a partir de experimentos, se a moeda é ou não perfeita. Mas depois de muitos lançamentos, é possível que consigamos definir, com certa precisão, a probabilidade de um evento ocorrer. Essa definição de probabilidade é dita definição frequentista.

É importante mencionarmos que a frequência relativa do evento  $\{a_i\}$  tende a se estabilizar em um certo valor, após um número suficientemente



grande de repetições. Este fato é que nos permite recorrer à definição frequentista de probabilidade.

Além disso, a função frequência relativa  $f_n(a_i) = \frac{n(a_i)}{n}$ , onde  $n$  representa o número de repetições do experimento  $E$  e  $n(a_i)$  representa o número de vezes que ocorreu o evento  $\{a_i\}$ , para  $n$  muito grande, possui as mesmas propriedades da função probabilidade da definição clássica de probabilidade, para eventos não vazios de espaços amostrais finitos.

## 2.4. Definição axiomática de probabilidade

Até agora vimos a probabilidade como frequência relativa (definição frequentista) da ocorrência de eventos simples e como quociente entre os casos favoráveis e os casos possíveis (definição clássica) de um evento. Agora vamos definir a probabilidade de maneira axiomática, independente de experimento concreto. Para tanto, precisaremos da definição de função de distribuição de probabilidade ou, simplesmente, distribuição de probabilidade que consiste em associar, aos elementos de um conjunto não vazio  $\Omega$ , números reais positivos e menores do que ou iguais a 1, possuindo determinadas propriedades.

Temos a definição seguinte.

- **Definição.** Seja  $Y = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  um espaço amostral finito, isto é, um conjunto finito, não vazio, com  $n$  elementos. Uma distribuição de probabilidade é uma função  $p$ , que associa a cada elemento  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) um número real  $p(a_i)$  que será indicado por  $p_i$ , satisfazendo:

$$0 < p_i \leq 1, \text{ para todo } i;$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

O número  $p_i$  é dito a probabilidade do evento elementar  $\{a_i\}$  e será representado por  $p(\{a_i\})$  ou, simplesmente,  $p(a_i)$ .

Para finalizarmos esta definição axiomática, basta que definamos a probabilidade de um evento qualquer de  $\Omega$ .

Para tanto, seja  $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  um espaço amostral finito munido de uma distribuição de frequência  $p$ , isto é, um conjunto finito, não vazio, com  $n$  elementos munido de uma distribuição de frequência.

- **Definição.** Dado um evento  $A$ , definimos a probabilidade de  $A$ , que denotaremos por  $p(A)$ , como segue:

$$p(A) = 0, \text{ se } A = \emptyset;$$

$$p(A) = \sum_{a_i \in A} p(a_i).$$

Nestas condições, temos as propriedades seguintes.

- **Propriedade 7.** Se  $A = \emptyset$ , então  $p(A) = 0$ .

**Prova:** O resultado segue da definição.

- **Propriedade 8.** Se  $A = Y$ , então  $p(A) = 1$ .

**Prova:** De fato, temos que  $Y = \bigcup_i \{a_i\}$  e, portanto,  $p(W) = \sum_{a_i \in \Omega} p(a_i) = 1$ , uma vez que  $p$  é uma distribuição de probabilidade.

- **Propriedade 9.** Se  $A$  e  $B$  são eventos tais que  $A \cap B = \emptyset$ , então  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ .

**Prova:** Temos que

$$p(A \cup B) = p\left(\left(\bigcup_{a_i \in A} \{a_i\}\right) \cup \left(\bigcup_{b_j \in B} \{b_j\}\right)\right) = \sum_{a_i \in A} p(a_i) + \sum_{b_j \in B} p(b_j) = p(A) + p(B).$$

- **Propriedade 10.** Se  $A$  e  $B$  são eventos quaisquer, então  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ .

**Prova:** Deixamos para o leitor.

- **Propriedade 11.** Seja  $A^c$  o evento complementar de  $A$ . Temos que  $p(A^c) = 1 - p(A)$ .

**Prova:** Deixamos para o leitor.

### 3. Probabilidade condicional e eventos independentes

O conceito de probabilidade condicional é um dos conceitos mais importantes da probabilidade e permite chegar à ideia de eventos independentes, outro conceito da maior importância para a probabilidade. Definiremos probabilidade a partir de um exemplo em espaços amostrais equiprováveis.

Suponha que Thiago e Mariana estejam brincando de jogar dado e cada um tenha escolhido três números para jogar, conforme indicado nos eventos  $T = \{1, 2, 3\}$ : Thiago ganha e  $M = \{4, 5, 6\}$ : Mariana ganha.

Sabemos que, nestas condições, a probabilidade de Thiago ganhar é a mesma probabilidade de Mariana ganhar e é igual a  $\frac{1}{2}$ , pois  $p(T) = \frac{n(T)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$  e  $p(M) = \frac{n(M)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ , onde  $\Omega$ , o conjunto dado por  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , é o espaço amostral do experimento aleatório  $E$ : *lançar um dado e observar sua face superior*.

Sejam ainda os eventos  $A$ : *o número observado é par* e  $B$ : *o número observado é ímpar*.

Suponhamos que seja feito um lançamento e seja observado o resultado.

Consideremos as seguintes perguntas:

<b>Pergunta 1</b>	Qual a probabilidade de Thiago ganhar o jogo e qual a probabilidade de Mariana ganhar o jogo?
<b>Pergunta 2</b>	Sabendo que o número sorteado foi par, qual a probabilidade de Thiago ganhar o jogo e qual a probabilidade de Mariana ganhar o jogo?
<b>Pergunta 3</b>	Sabendo que o número sorteado foi ímpar, qual a probabilidade de Thiago ganhar o jogo e qual a probabilidade de Mariana ganhar o jogo?

As probabilidades procuradas nas perguntas 2 e 3 são o que chamamos de probabilidade condicional. Na pergunta 2, estamos interessados em calcular as probabilidades dos eventos T e M dado que ocorreu o evento A: *o número observado é par*. Essas probabilidades são indicadas por  $p(T/A)$  e  $p(M/A)$ , respectivamente. Na pergunta 3, estamos interessados nas probabilidades dos eventos T e M dado que ocorreu o evento B: *o número observado foi ímpar*, que são indicadas por  $p(T/B)$  e  $p(M/B)$ , respectivamente.

Neste caso, as probabilidades procuradas podem ser obtidas como:

- $p(T/A) = \frac{n(T \cap A)}{n(A)}$
- $p(M/A) = \frac{n(M \cap A)}{n(A)}$
- $p(T/B) = \frac{n(T \cap B)}{n(B)}$
- $p(M/B) = \frac{n(M \cap B)}{n(B)}$

Em geral, temos a definição que segue.

- **Probabilidade condicional.** Dados um experimento aleatório E, com espaço amostral Y, e A e B eventos de E, com  $B \neq \emptyset$ , a probabilidade de ocorrer o evento A dado que ocorreu o evento B (probabilidade de A dado B) ou a probabilidade do evento A condicionado ao evento B é indicada por  $p(A/B)$  e definida por

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

A probabilidade de A dado B pode ser pensada como a probabilidade de ocorrer o evento A, quando o espaço amostral fica reduzido ao evento B.

**Exemplo 1.** De uma urna contendo 55 bolas numeradas de 1 a 55, uma bola é sorteada ao acaso. A probabilidade de o número na bola sorteada ser um número par é  $\frac{27}{55}$ . Já a probabilidade de o número na bola sorteada ser par, dado que o número sorteado foi um múltiplo de 11 é  $\frac{2}{5}$ . De fato, denotando por

A e B os eventos A: o número sorteado é par e B: o número sorteado é múltiplo de 11, temos que o evento B é o conjunto  $B = \{11, 22, 33, 44, 55\}$  enquanto o evento  $A \cap B$  é dado pelo conjunto  $A \cap B = \{44, 22\}$ . Assim  $p(A/B) = \frac{2}{5}$ . Aplicando a fórmula, temos que:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{5}}{\frac{n(B)}{5}} = \frac{2}{5}$$

**Exemplo 2.** No lançamento sucessivo de uma moeda duas vezes, a probabilidade de ocorrer cara no segundo lançamento, tendo ocorrido coroa no primeiro lançamento é a probabilidade do evento  $\{KC\}$  do experimento aleatório cujo espaço amostral equiprovável, dado pelo conjunto  $\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}$ . Assim, a probabilidade procurada é  $\frac{1}{2}$ . Essa probabilidade pode ser calculada como a probabilidade condicional  $p(A/B)$ , em que A é o evento A: *deu cara no segundo lançamento* e B é o evento B: *deu coroa no primeiro lançamento*. Nestas condições, temos que A e B são dados pelos conjuntos  $A = \{CC, KC\}$  e  $B = \{KC, KK\}$  e, portanto,

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{2}$$

A probabilidade condicional possui as propriedades seguintes.

- **Probabilidade condicional. Propriedade 1.** Se A é um evento de um experimento aleatório E com espaço amostral Y, com  $p(A) > 0$ , então:

a)  $p(\emptyset/A) = 0$ .

b)  $p(\Omega/A) = 1$ .

**Prova:** Para ambos os itens, basta usarmos a definição de probabilidade condicional. De fato, temos que

a)  $p(\emptyset/A) = p(\emptyset \cap A)/p(A) = p(\emptyset)/p(A) = 0/p(A) = 0$ ;

b)  $p(\Omega/A) = p(Y \cap A)/p(A) = p(A)/p(A) = 1$ .

- **Probabilidade condicional. Propriedade 2.** Se A, B e C são eventos de um experimento aleatório E com espaço amostral Y, tais que  $p(C) > 0$  e  $A \cap B = \emptyset$ , então

$$p(A \cup B/C) = p(A/C) + p(B/C).$$

**Prova:** Por definição, temos que

$$p(A \cup B/C) = p[(A \cup B) \cap C]/p(C)$$

e pela fórmula de De Moivre para escrever

$$p(A \cup B/C) = p[(A \cap C) \cup (B \cap C)]/p(C).$$

Desde que  $A \cap C$  e  $B \cap C$  são disjuntos, pois  $A$  e  $B$  o são, temos que  $p[(A \cap C) \cup (B \cap C)] = p(A \cap C) + p(B \cap C)$  e, portanto, vamos ter  $p(A \cup B|C) = [p(A \cap C) + p(B \cap C)]/p(C) = p(A/C) + p(B/C)$ .

### 3.1. Experimentos realizados em sequência

Da igualdade  $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ , podemos deduzir que  $p(A \cap B) = p(A/B) \cdot p(B)$ . Nesta versão, a fórmula é muito útil para o cálculo de probabilidade de eventos de experimentos aleatórios realizados em sequência, nas quais a ocorrência de um evento na 2ª etapa depende de sua ocorrência na 1ª etapa; a ocorrência desse evento na 3ª etapa depende de sua ocorrência na 2ª etapa; e assim por diante. Ou seja, temos uma sucessão de probabilidades condicionais. Como exemplo, citamos o experimento aleatório  $E$ : *retirada sucessiva e sem reposição de bolas de uma urna contendo 8 bolas pretas e 6 bolas brancas*.

A proposição a seguir, que é uma generalização da fórmula da definição de probabilidade condicional para o caso de  $n$  eventos, sendo  $n$  um inteiro positivo maior do que 2, também é conhecida como Teorema do Produto. Sua demonstração pode ser feita por indução sobre  $n$ , o número de eventos, e será deixada para o leitor.

- **Proposição 1.** Sejam  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  eventos de um espaço amostral  $Y$  e  $p$  uma probabilidade definida em  $Y$ . Temos que:

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = p(A_1)p(A_2 / A_1)p(A_3 / A_1 \cap A_2) \dots p(A_n / A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Para auxiliar o leitor na sua tarefa de demonstrar o resultado anterior, faremos a demonstração para o caso em que  $n = 3$ , ou seja, demonstraremos a proposição que segue.

- **Proposição 2.** Sejam  $A_1, A_2$  e  $A_3$  eventos de um espaço amostral  $Y$  e  $p$  uma probabilidade definida em  $Y$ . Temos que:

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1)p(A_2 / A_1)p(A_3 / A_1 \cap A_2).$$

**Prova:** Dados os eventos  $A_1, A_2$  e  $A_3$ , chamemos de  $A$ , o evento  $A = A_1 \cap A_2$ . Temos que

$$p(A \cap A_3) = p(A)p(A_3/A)$$

ou seja

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1 \cap A_2)p(A_3 / A_1 \cap A_2)$$

o que nos dá

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1)p(A_2/A_1)p(A_3/A_1 \cap A_2)$$

Mostrando o resultado.

**Exemplo 3.** No experimento aleatório  $E$ : *retirada sucessiva e sem reposição de bolas de uma urna contendo 8 bolas pretas e 6 bolas brancas*, ao retirar-

mos 3 bolas, a probabilidade de que sejam 3 bolas brancas é  $\frac{5}{91}$ . De fato, consideremos os eventos  $A_1$ : a primeira bola é branca,  $A_2$ : a segunda bola é branca e  $A_3$ : a terceira bola é branca. Queremos determinar  $p(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ . De acordo com a proposição, temos que:

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1)p(A_2/A_1)p(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{8}{14} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{4}{143}.$$

**Exemplo 4.** No experimento aleatório anterior, ao retirarmos 5 bolas, a probabilidade de que sejam 5 bolas pretas é dada por  $p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$ , em que os eventos são dados por  $A_1$ : a primeira bola é preta,  $A_2$ : a segunda bola é preta,  $A_3$ : a terceira bola é preta,  $A_4$ : a quarta bola é preta e  $A_5$ : a quinta bola é preta. De acordo com a proposição, temos que

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{8}{14} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{4}{143} = \frac{4}{143}.$$

**Eventos independentes.** Quando lançamos uma moeda honesta duas ou mais vezes, o fato de dar cara no primeiro lançamento não vai influenciar no resultado do segundo lançamento nem no resultado dos demais lançamentos. Dizemos, por isso, que, por exemplo, os eventos  $A$ : dar cara no primeiro lançamento e  $B$ : dar cara no segundo lançamento são independentes. Essa é a ideia intuitiva de eventos independentes. Mais precisamente, temos a definição seguinte.

- **Eventos independentes.** Sejam  $A$  e  $B$  eventos de um experimento  $E$  com espaço amostral  $Y$ . Dizemos que  $A$  e  $B$  são independentes se, e somente se, vale a igualdade  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ .

**Exemplo 5.** No caso das moedas, temos  $p(A) = 1/2$ ,  $p(B) = 1/2$  e  $p(A \cap B) = 1/4$ , uma vez que o espaço amostral para o experimento  $E$ : lançar uma moeda honesta 2 vezes e observar o resultado na face superior é dado por  $Y = \{CC, CK, KC, KK\}$  e os eventos  $A$ : observar cara no primeiro lançamento e  $B$ : observar cara no segundo lançamento são, respectivamente,  $A = \{CC, CK\}$  e  $B = \{CC, KC\}$  e, conseqüentemente, o evento  $A \cap B$  é dado por  $A \cap B = \{CC\}$ . Assim, temos que  $p(A) = 1/2$ ,  $p(B) = 1/2$  e  $p(A \cap B) = 1/4$ , valendo a igualdade  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ .

Das igualdades  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(A/B)$ ,  $p(B \cap A) = p(B) \cdot p(B/A)$  e  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ , segue que, se  $A$  e  $B$  são eventos independentes, tais que  $p(A) \neq 0$  e  $p(B) \neq 0$ , então  $p(A/B) = p(A)$  e  $p(B/A) = p(B)$ . Este resultado encontra-se sintetizado na proposição seguinte.

- **Proposição 8.** Sejam  $A$  e  $B$  eventos independentes, tais que  $p(A) \neq 0$  e  $p(B) \neq 0$ . Nestas condições  $p(A/B) = p(A)$  e  $p(B/A) = p(B)$ .

**Teorema de Bayes.** Encerraremos esta seção com dois resultados bastante utilizados e úteis na resolução de problemas envolvendo a probabilidade con-

dicional, nos quais os experimentos aleatórios sugerem partições dos espaços amostrais: o teorema da probabilidade total e o teorema de Bayes. Para tanto necessitaremos da definição de partição de um conjunto.

- **Partição.** Dizemos que uma coleção de conjuntos  $\{A_i\}$  é uma partição de um conjunto  $B$  se vale o seguinte:

(i)  $\cup A_i = B$ .

(ii) Se  $i \neq j$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ .

**Exemplo 7.** Os conjuntos  $A_1 = \{2, 4, 6, 8\}$  e  $A_2 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  são elementos de uma partição de  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

**Exemplo 8.** Os conjuntos  $A_1 = \{2, 4, 6\}$ ,  $A_2 = \{1, 3\}$ ,  $A_3 = \{5\}$ ,  $A_4 = \{7, 8, 9\}$  são elementos de uma partição do conjunto  $B$ , dado por  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

Enunciaremos e demonstraremos o teorema seguinte para o caso de uma partição com 3 elementos. O caso geral pode ser feito por indução sobre o número  $n$  de elementos da partição.

- **Teorema da Probabilidade Total. Caso  $n = 3$ .** Dados os eventos  $A_1, A_2, A_3$  e  $B$  de um experimento aleatório, tais que o conjunto  $\{A_1, A_2, A_3\}$  é uma partição do espaço amostral  $W$ , então vale a igualdade

$$p(B) = p(A_1)p(B/A_1) + p(A_2)p(B/A_2) + p(A_3)p(B/A_3).$$

**Prova:** Como o conjunto  $\{A_1, A_2, A_3\}$  é uma partição do espaço amostral  $Y$ , temos que  $B = (B \cap A_1) \dot{\cup} (B \cap A_2) \dot{\cup} (B \cap A_3)$ . E como os conjuntos  $A_i$  são disjuntos, temos que

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + p(B \cap A_3).$$

Da fórmula da probabilidade condicional, sabemos que:

$$p(B \cap A_1) = p(A_1)p(B/A_1),$$

$$p(B \cap A_2) = p(A_2)p(B/A_2),$$

$$p(B \cap A_3) = p(A_3)p(B/A_3),$$

o que prova o resultado.

Como dissemos, o teorema da probabilidade total pode ser generalizado para o caso de uma partição com qualquer número finito de elementos. De fato, temos o resultado seguinte.

- **Teorema da Probabilidade Total. Caso geral.** Dados os eventos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  e  $B$  de um experimento aleatório, tais que o conjunto  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  é uma partição do espaço amostral  $Y$ , então vale a igualdade

$$p(B) = p(A_1)p(B/A_1) + p(A_2)p(B/A_2) + \dots + p(A_n)p(B/A_n).$$

**Prova:** A demonstração deste teorema no caso geral é semelhante à do caso anterior e pode ser feita por indução sobre o número  $n$  de elementos da partição.

**Exemplo 9.** Em um torneio de xadrez os competidores estão divididos em 3 categorias: os do tipo 1, que correspondem à metade do grupo; os do tipo 2, que são um quarto do grupo; e os do tipo 3, que são um quarto do grupo. A probabilidade de João ganhar uma partida é de 0,3 quando ele joga com os do tipo 1; é de 0,4 quando joga com os do tipo 2; e de 0,5 quando seu oponente é do tipo 3. Em uma partida contra um competidor escolhido ao acaso, a probabilidade de João ganhar é de 0,375. De fato, se denotarmos por  $A_i$  o evento João joga com um competidor do tipo  $i$  e por  $B$  o evento João ganha a partida, teremos:

$$p(A_1) = 0,5; p(A_2) = 0,25; \text{ e } p(A_3) = 0,25.$$

Além disso, temos que

$$p(B/A_1) = 0,3; p(B/A_2) = 0,4; \text{ e } p(B/A_3) = 0,5.$$

Assim, pelo teorema da probabilidade total,

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + p(B \cap A_3),$$

ou seja,  $p(B) = p(A_1)p(B/A_1) + p(A_2)p(B/A_2) + p(A_3)p(B/A_3)$

$$p(B) = 0,5 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,4 + 0,25 \cdot 0,5 = 0,375.$$

Finalmente temos o teorema de Bayes que, para o caso  $n = 3$ , pode ser enunciado como segue.

- **Teorema de Bayes. Caso  $n = 3$ .** Dados os eventos  $A_1, A_2, A_3$  e  $B$  de um experimento aleatório, tais que o conjunto  $\{A_1, A_2, A_3\}$  é uma partição do espaço amostral  $Y$ ,  $p(B) > 0$  e  $p(A_i) > 0, \forall i$ , então vale a igualdade

$$p(A_i/B) = p(B/A_i)p(A_i)/[p(A_1)p(B/A_1) + p(A_2)p(B/A_2) + p(A_3)p(B/A_3)].$$

**Prova:** Sabemos que, por definição,  $p(A_i/B) = p(A_i \cap B)/p(B)$  e  $p(B/A_i) = p(A_i \cap B)/p(A_i)$ .

Assim, podemos escrever:  $p(A_i/B) = p(A_i \cap B)/p(B) = p(B/A_i)p(A_i)/p(B)$ .

Pelo teorema da probabilidade total, temos que

$$p(A_i/B) = p(B/A_i)p(A_i)/[p(A_1)p(B/A_1) + p(A_2)p(B/A_2) + p(A_3)p(B/A_3)].$$

O que mostra o resultado.

Assim como no caso do teorema da probabilidade total, o teorema de Bayes também pode ser generalizado para o caso de uma partição com qualquer número finito de elementos. De fato, temos o resultado seguinte.

- **Teorema de Bayes. Caso geral.** Dados os eventos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  e  $B$  de um experimento aleatório, tais que o conjunto  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  é uma partição do espaço amostral  $W$ , então vale a igualdade

$$p(A_i/B) = p(B/A_i)p(A_i)/[p(A_1)p(B/A_1) + p(A_2)p(B/A_2) + \dots + p(A_n)p(B/A_n)].$$

**Prova:** A demonstração deste teorema no caso geral é semelhante à do caso anterior e pode ser feita por indução sobre o número  $n$  de elementos da partição.



**Exemplo 10.** No exemplo anterior, sabendo que João ganhou, a probabilidade de seu oponente ser do tipo 1 é 0,4. De fato, queremos determinar  $p(A_1/B)$ . Pelo teorema de Bayes, temos que

$$p(A_1/B) = \frac{p(A_1)p(B/A_1)}{p(A_1)p(B/A_1) + p(A_2)p(B/A_2) + p(A_3)p(B/A_3)}$$

Assim,  $p(A_1/B) = 0,4$ .

## 4. Distribuição binomial de probabilidade

Para entendermos o que vem a ser uma distribuição binomial de probabilidade, vamos iniciar resolvendo o seguinte problema:

**Problema** Em um jogo de dados, Toby aposta nos números 5 e 6. Em três lançamentos do dado, qual a probabilidade de Toby ganhar exatamente duas vezes?

- **Compreendendo o problema.** Nosso problema consiste em 3 repetições consecutivas do experimento aleatório  $E$ : *jogar um dado e observar sua face superior*. Estamos interessados na observação do evento  $S$ : *Toby obtém sucesso* ou  $S$ : *Toby ganha o jogo* e do seu complementar  $F$ : *Toby fracassa* ou  $F$ : *Toby perde o jogo*. Sabemos que a probabilidade do evento  $S$ , que chamaremos de probabilidade de sucesso e será indicada por  $p(S)$ , é  $2/6$  ou  $1/3$ . Sabemos também que a probabilidade de  $F$ , que chamaremos de probabilidade de Fracasso e denotaremos por  $p(F)$ , é dada por  $p(F) = 1 - p(S) = 1 - 1/3$ . Assim,  $p(F) = 2/3$ .

Ao repetirmos o problema por 3 vezes e anotarmos o resultado, pode ocorrer qualquer uma das oito situações (sequências) do quadro seguinte:

Linha	Lançamentos		
	1	2	3
1	S	S	S
2	S	S	F
3	S	F	S
4	S	F	F
5	F	S	S
6	F	S	F
7	F	F	S
8	F	F	F

Em que  $S$  significa que Toby ganhou ou obteve sucesso no lançamento e  $F$  significa que Toby perdeu ou obteve fracasso no lançamento.

A probabilidade da sequência em cada uma das linhas da tabela anterior é uma probabilidade condicional e pode ser calculada pelo teorema do produto, como a seguir.

Para a primeira linha temos  $p(\text{SSS}) = p(\text{S}) \cdot p(\text{S}) \cdot p(\text{S}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$ ; para a segunda,  $p(\text{SSF}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)$ ; para a terceira linha, a probabilidade é dada por  $p(\text{SFS}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)$ ; e assim por diante. Isso porque as repetições probabilidade do experimento são independentes entre si, ou seja, o resultado de uma repetição não influi no resultado da outra.

- **Solucionando o problema.** Para respondermos à pergunta “Qual a probabilidade de Toby ganhar exatamente 2 vezes em 3 repetições do experimento E, ou seja, em 3 lançamentos do dado”, basta calcularmos a probabilidade do evento  $(\text{SSF}) \cup (\text{SFS}) \cup (\text{FSS})$ , ou seja, basta somarmos as probabilidades das sequências SSF (linha 2), SFS (linha 3) e FSS (linha 5).

O quadro a seguir mostra a probabilidade de cada um dos oito eventos listados anteriormente.

Linha	Lançamentos			Probabilidade	
	1	2	3		
1	S	S	S	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{27}$
2	S	S	F	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{2}{27}$
3	S	F	S	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{2}{27}$
4	S	F	F	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{4}{27}$
5	F	S	S	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{2}{27}$
6	F	S	F	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{4}{27}$
7	F	F	S	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{4}{27}$
8	F	F	F	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{8}{27}$

Como se percebe no quadro anterior, as probabilidades procuradas são:  $p(\text{SSF}) = \frac{2}{27}$ ,  $p(\text{SFS}) = \frac{2}{27}$  e  $p(\text{FSS}) = \frac{2}{27}$ . Portanto, a resposta para o problema é  $\frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = 3 \times \frac{2}{27} = \frac{2}{9}$ .

**Outro problema.** Se o experimento anterior, ao invés de três vezes, fosse repetido 5 vezes, qual seria a probabilidade de Toby ganhar em exatamente 3 delas?

De acordo com o que foi feito anteriormente, estamos interessados nas sequências de 5 letras, sendo 3 letras S e 2 letras F. Assim, para resolver o problema, podemos pensar que temos 5 espaços para escolher 3 e colocar as 3 letras S. Como sabemos, isso pode ser feito de  $C_{5,3}$  maneiras distintas.

Como as etapas são independentes – sucesso ou fracasso em uma etapa não interfere no resultado da etapa seguinte – e, em cada uma delas a probabilidade de sucesso (S) é  $1/3$  e a de fracasso (F) é  $2/3$ , a probabilidade de cada uma dessas  $C_{5,3}$  maneiras é  $(\frac{1}{3})^3 \times (\frac{2}{3})^2$ .

Portanto, a probabilidade de Toby ganhar exatamente 3 dos 5 lançamentos é  $C_{5,3} \times (\frac{1}{3})^3 \times (\frac{2}{3})^2$ .

**Uma primeira generalização.** Nos nossos problemas, a repetição do experimento aleatório E deu origem ao experimento  $E \times E \times E$  ou  $E \times E \times E \times E \times E$ , com seus espaços amostrais correspondentes, nos quais a probabilidade de cada evento elementar é dada por

$$(\frac{1}{3})^k \times (\frac{2}{3})^{n-k}$$

em que  $n = 3$  ou  $n = 5$ .

Além disso, para cada k, a quantidade de eventos elementares com a probabilidade  $(\frac{1}{3})^k \times (\frac{2}{3})^{n-k}$  é  $C_{n,k}$ . Este resultado lembra os números binomiais, as fórmulas anteriores lembram a fórmula do termo geral do desenvolvimento do produto  $(x + y)^n$ .

Essa é a ideia da distribuição binomial de probabilidade.

**O teorema binomial.** Consideremos um experimento aleatório no qual estamos interessados na ocorrência de um evento específico, que será indicado por S, denominado de sucesso e cuja probabilidade será indicada por p [ $p = p(S)$ ]. Seu complementar será indicado por F e denominado de fracasso. Sua probabilidade  $p(F)$  será denotada por q. Como S e F são complementares, temos que  $p + q = 1$ , ou ainda,  $q = 1 - p$ .

Esse experimento é repetido n vezes, dando origem ao experimento  $E \times E \times E \times \dots \times E$ , cujo espaço amostral é o conjunto de todas as n-uplas de sucessos ou de fracassos, sucessos e fracassos esses que ocorrem sempre com a mesma probabilidade p ou  $1 - p$ , respectivamente, sendo que a ocorrência de determinado evento em uma etapa não influencia no resultado da etapa seguinte.

Nestas condições vale o teorema binomial que afirma o que segue.

- **Teorema binomial.** A probabilidade de ocorrerem exatamente k sucessos em uma sequência de n provas independentes, na qual a probabilidade de sucesso em cada etapa é p, é igual a  $\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ .

**Prova:** A prova deste teorema segue do que foi feito anteriormente e sua sistematização será deixada para o leitor.

**Exemplo 1.** Uma moeda honesta é lançada 10 vezes. A probabilidade de ocorrerem exatamente 6 caras é  $\binom{10}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-6}$  que, por sua vez, é igual a  $\binom{10}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ .

**Exemplo 2.** Em uma prova com 20 questões, cada uma delas com quatro alternativas das quais somente é a correta, a probabilidade de uma pessoa que não saiba a matéria acertar exatamente 12 delas é  $\binom{20}{12} \left(\frac{1}{4}\right)^{12} \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{20-12}$  que, por sua vez, é igual a  $\binom{20}{12} \left(\frac{1}{4}\right)^{12} \left(\frac{3}{4}\right)^8$ .

## Síntese do Capítulo



Neste capítulo apresentamos a probabilidade de um evento de um experimento aleatório como a medida da chance desse evento ocorrer. Iniciamos introduzindo a definição clássica de probabilidade, ou seja, a probabilidade como o quociente entre o número de casos favoráveis e o de casos possíveis, em que, por casos possíveis entendemos todos os elementos do espaço amostral e por casos favoráveis entendemos todos os elementos do evento do qual desejamos calcular a probabilidade.

Em seguida, apresentamos as definições frequentista e a axiomática, todas possuindo as mesmas propriedades. Vimos que, na definição axiomática, as probabilidades atribuídas aos eventos elementares de um espaço amostral não dependem da realização desse experimento. Elas são atribuídas segundo certas regras, de modo que satisfaçam as propriedades das probabilidades, propriedades estas que foram obtidas da definição clássica, ao realizarmos efetivamente os experimentos e que queremos intrínsecas à definição de probabilidade.

Estudamos as probabilidades condicionais, ou seja, a probabilidade de ocorrência de um evento quando sabemos da ocorrência de outro evento. Com isso, definimos e estudamos os eventos independentes e os teoremas da probabilidade total e de Bayes, teoremas bastante úteis na resolução de alguns problemas envolvendo probabilidade condicional.

Por fim, estudaremos a distribuição binomial de probabilidade como o modelo probabilístico adotado para um experimento aleatório no qual estamos interessados na ocorrência de um evento específico para ser utilizada no estudo da probabilidade de eventos de experimentos aleatórios que são realizados em sequência.

## Atividades de avaliação



1. Considere o experimento aleatório  $E$ : *jogar uma moeda duas vezes para cima, observando a cada lançamento sua face superior*. Determinar a probabilidade do evento  $A$ : *obter duas caras*.

**Solução:** Denotando por  $\Omega$  o espaço amostral do experimento aleatório  $E$ , temos que  $\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}$ , em que  $C$  representa “observou-se cara” e  $K$  representa “observou-se coroa”. O evento  $A$ : *observar duas caras* é o conjunto  $A = \{CC\}$ . Assim,  $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{4}$ .

2. No lançamento de 2 dados não viciados e distinguíveis, qual a probabilidade de que os números nas faces superiores sejam diferentes?

**Solução:** Sejam  $E$  o experimento aleatório  $E$ : *lançar os dois dados e observar os números nas faces superiores* e  $A$  o evento  $A$ : *os números nas faces superiores são iguais*. Temos que em  $\Omega$  possui 36 elementos ( $6 \times 6$ ) e  $A$  possui os seis elementos  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(3, 3)$ ,  $(4, 4)$ ,  $(5, 5)$  e  $(6, 6)$ . Assim, a probabilidade de  $A$  é dada por

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Como o evento  $B$ : *os números nas faces superiores são diferentes* é o complementar de  $A$ , ou seja,  $B = A^c$ , a probabilidade de termos os números diferentes é  $p(A^c) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ .

3. No lançamento de dois dados normais e distinguíveis qual a probabilidade de obtermos soma 8 ou soma 6?

**Solução:** Sejam os eventos  $A$ : *a soma dos números nas faces superiores é 6* e  $B$ : *a soma dos números nas faces superiores é 8*. Queremos determinar  $p(A \cup B)$ .

Temos que  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$  e como  $A$  e  $B$  são mutuamente excludentes, uma vez que se a soma for 6 não será 8 e se for 8 não será 6, temos que  $p(A \cap B) = 0$ . Assim,  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ .

Sabemos que  $A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$  e

$B = \{(1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1)\}$  e, conseqüentemente,

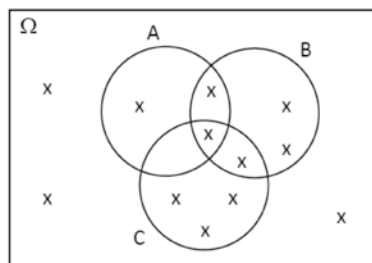
$$p(A) = \frac{5}{36} \text{ e } p(B) = \frac{7}{36}. \text{ Portanto,}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{5}{36} + \frac{7}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

4. No experimento aleatório do exercício 1, determine a probabilidade do evento  $B$ : *observar pelo menos uma cara*.
5. Dentre todos os números de três algarismos que podem ser obtidos pela permutação dos algarismos 1, 2 e 3, sorteia-se um. Qual a probabilidade de o número sorteado ser:

- a) par?  
b) maior do que 200?  
c) múltiplo de 2 ou de 3?
6. No lançamento simultâneo de dois dados não viciados, um vermelho e outro branco, qual a probabilidade de que:  
a) a soma na face superior seja maior do que 1?  
b) a soma na face superior seja 7?  
c) ambos os números sejam iguais?
7. Um número inteiro é escolhido aleatoriamente entre os números positivos 1, 2, 3, 100. Qual a probabilidade de o número escolhido ser múltiplo de 6 ou de 9?
8. Uma urna contém 2 bolas pretas e 3 bolas brancas. Quantas bolas azuis devem ser colocadas na urna para que a probabilidade de se retirar uma bola azul seja  $2/3$ ?
9. No lançamento simultâneo de 4 moedas perfeitas e distinguíveis, qual a probabilidade de se obter:  
a) exatamente 3 caras?  
b) pelo menos 2 coroas?
10. De uma urna contendo 30 bolas iguais numeradas de 1 a 30 retira-se uma bola e anota-se seu número. Considere os eventos A: o número observado é múltiplo de 2 e B: o número sorteado é múltiplo de 5. Determine  $p(A)$ ,  $p(B)$  e  $p(A \cup B)$ .
11. Um juiz de futebol possui em seu bolso três cartões sendo um todo vermelho, um todo amarelo e um com uma das faces vermelha e a outra amarela. Em um lance, o juiz retira do bolso, sem olhar, um dos cartões e mostra ao jogador. Qual a probabilidade de o juiz ver uma face vermelha e o jogador ver uma face amarela?
12. Em uma população de 500 pessoas, 280 são mulheres e 60 exercem a função de advogado, sendo 20 do sexo feminino. Tomando-se ao acaso uma dessas pessoas, qual é a probabilidade de que, sendo mulher, seja advogada. Tente resolver por probabilidade condicional.
13. Dado o espaço amostral  $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ , seja  $p_i$  um número real pertencente ao intervalo  $[0, 1]$ , tal que  $p_i = p(a_i)$  para alguma função  $p$ . Quais dos números  $(p_i)$  abaixo definem uma distribuição de probabilidade em  $\Omega$ ?  
a)  $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 1/5$ .  
b)  $p_1 = p_2 = 1/3$  e  $p_3 = p_4 = p_5 = 3/5$ .  
c)  $p_1 = p_2 = 1/4$ ,  $p_3 = p_4 = 2/3$  e  $p_5 = 1/5$ .

14. Uma moeda é viciada de tal forma que a probabilidade de dar cara é o quádruplo da probabilidade de dar coroa. Qual a probabilidade de dar cara e qual a probabilidade de dar coroa?
15. Em uma urna existem 10 bolas numeradas de 1 a 10. Uma bola é sorteada ao acaso. Se a probabilidade de uma bola com número maior do que 5 ser sorteada é o dobro da probabilidade de uma bola com número menor do que ou igual a cinco ser sorteada, qual a probabilidade do evento  $A = \{1, 2, 6\}$  e a probabilidade do evento  $B = \{5, 6, 7\}$ ?
16. No lançamento de um tetraedro, os números pares ocorrem com o dobro de chance dos números ímpares. Determine a probabilidade de ocorrerem os eventos A: o número sorteado é primo, B: o número sorteado é par, C: o número sorteado é 2 e D: o número sorteado é 3.
17. No lançamento de um dado duas vezes, determine o evento:
- ocorre o mesmo número nas duas vezes.
  - ocorre o número 5 no primeiro lançamento.
  - ocorre 9 na soma dos dois números obtidos.
18. No lançamento de 1 dado sejam os eventos
- A: ocorre divisor de 3.  
 B: ocorre número ímpar.  
 C: ocorre múltiplo de 3.
- Determine os eventos  $A \cup B$ ,  $B \cup C$ ,  $A \cup C$ ,  $B \cap C$ ,  $A \cap B$ ,  $A^c$ ,  $B^c$ .
19. Dados os eventos A e B do espaço amostral de um experimento aleatório E, definimos o evento diferença  $A - B$  como o evento que ocorre quando ocorre A e não ocorre B. Mostre que  $A - B$  e  $A \cap B$  são mutuamente excluídos. Conclua que  $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$ .
20. Numa remessa de 100 aparelhos de televisão, 12 têm defeito de imagem, 10 têm defeito de som e 8 têm ambos os defeitos. Escolhendo-se ao acaso um aparelho, qual a probabilidade de que este não tenha defeito algum?
21. O diagrama de Venn ao lado representa um espaço amostral  $\Omega$  equiprovável e três eventos A, B e C. Calcule o que se pede.



- $p(A)$ .
- $p(B)$ .
- $p(C)$ .
- $p(A \cap B)$ .
- $p(A \cup B \cup C)$ .

- 22. Resolvido.** Bolas são colocadas em 5 urnas, uma de cada vez, até que alguma urna receba duas bolas. Qual é a probabilidade de colocarmos exatamente 4 bolas?

**Solução.** Seja  $p(4)$  a probabilidade de colocarmos exatamente 4 bolas. Sabemos que  $p(4)$  é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Como caso possível entendemos qualquer forma de distribuir as 4 bolas pelas 5 urnas. Assim, o número de casos possíveis é  $5^4$ , pois a primeira bola pode ser colocada em qualquer uma das 5 urnas; a segunda bola pode ser colocada em qualquer uma das 5 urnas; o mesmo acontecendo com as terceira e quarta bolas.

$$\begin{array}{cccc} \frac{5}{B1} & \frac{5}{B2} & \frac{5}{B3} & \frac{5}{B4} \end{array}$$

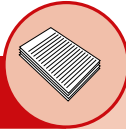
Os casos favoráveis são aqueles em que as 4 bolas são distribuídas de modo que as três primeiras bolas fiquem em urnas distintas e a quarta bola seja colocada exatamente em uma das 3 urnas que já contém 1 bola. Assim, o número de casos favoráveis é 180, pois a primeira pode ser colocada em qualquer uma das 5 urnas; a segunda pode ser colocada em qualquer uma das 4 urnas sem bola; a terceira pode ser colocada em qualquer uma das 3 urnas sem bola; e, finalmente, a quarta bola deve ser colocada em qualquer uma das 3 urnas que já contém uma bola.

$$\begin{array}{cccc} \frac{5}{B1} & \frac{4}{B2} & \frac{3}{B3} & \frac{3}{B4} \end{array}$$

$$\text{Assim, } p(4) = \frac{36}{125} = 0,288.$$

- 23.** Em uma prova de 20 questões do tipo verdadeiro ou falso, qual a probabilidade de uma pessoa acertar exatamente 12 questões? Qual a probabilidade dessa pessoa acertar no mínimo 15 questões?
- 24.** No lançamento de um dado honesto 8 vezes seguidas, qual a probabilidade de obtermos 5 números primos? E 6 números maiores do que 4?
- 25.** No lançamento de um dado até a obtenção do terceiro 6, qual a probabilidade de serem necessários 10 lançamentos? (Sugestão: para que o terceiro 6 apareça exatamente no 10º lançamento, devemos ter, até o 9º lançamento, dois números 6 e 7 números diferentes de 6.)
- 26.** Dois meninos, A e B, disputam uma série de 10 partidas. Se a probabilidade de o menino A ganhar cada partida é 0,6 e se não há empate, qual a probabilidade de o menino A ter mais vitórias do que B?





## Texto complementar

### Probabilidade Geométrica

*Extraído do livro Curso de Análise Combinatória e Probabilidade: aprendendo com resolução de problemas, de Bruno Alves Dassie e outros, pp. 136-137.*

Alguns problemas de probabilidades são equivalentes à seleção aleatória de pontos em espaços amostrais representados por figuras geométricas. Nesses modelos, a probabilidade de um determinado evento se reduz à seleção ou ao seu limite, caso exista, entre medidas geométricas homogêneas, tais como comprimento, área ou volume.

Diversas atividades interessantes podem ser usadas na introdução desses conceitos, como o disco das cores, o jogo dos discos e ladrilhos.

vamos reproduzir o relato do professor Eduardo Wagner, de uma experiência desenvolvida com seus alunos do Ensino Médio. Esse relato se encontra na Revista do Professor de Matemática, nº 34, pág.28.

“No ensino médio, o ensino de probabilidades se restringe ao caso finito e os problemas são basicamente de contagem de casos favoráveis e casos possíveis. Existem, entretanto, problemas muito simples e interessantes de probabilidades onde o espaço amostral possui a situação análoga ao seguinte exemplo: um atirador, com os olhos vendados, procura atingir um alvo circular com 50 cm de raio, tendo no centro um disco de 10 cm de raio. Se em certo momento temos a informação de que o atirador acertou o alvo, perguntamos qual deve ser a probabilidade de que tenha atingido o disco central.

Tenho sugerido esse problema a alunos do ensino médio e frequentemente obtenho deles respostas corretas, baseadas unicamente na intuição. Como obviamente não se pode contar casos favoráveis e possíveis e como para um atirador vendado não há pontos privilegiados do alvo, a probabilidade acertar o disco central deve ser a razão entre as áreas do disco e do alvo. Um cálculo elementar leva à resposta certa: 4%. Esse é um exemplo do que se chama Probabilidade geométrica.”

*(Wagner, Revista do Professor de Matemática, 34, p. 28)*

## Referências



HARIKI, Seiji e ONAGA, Dulce S. **Curso de matemática**, vol.3. São Paulo: Ed. Harper & Row. 1981.

DANTE, Luiz R. **Matemática: contexto & aplicações**, vol.2. São Paulo: Ed. Ática. 2004.

DOLCE, Osvaldo, IEZZI, G. e outros. **Tópicos de matemática**, vol. 2. São Paulo: Ed. Atual. 1980.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar: combinatória e probabilidade**, vol. 5. São Paulo: Ed. Atual. 2004.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Ed. Edgard Blücher. 1976.

DANTAS, C. A. B. **Probabilidade: um curso introdutório**. São Paulo: Edusp. 2008.

MORGADO, A. C. O. e outros. **Análise combinatória e Probabilidade**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM. 2006.

## Sobre os autores

**Cleiton Batista Vasconcelos:** possui graduação em Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1980) e mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1983). Atualmente é professor adjunto da Universidade Estadual do Ceará. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Ensino de Matemática. Trabalha com Avaliação de Livros Didáticos e Laboratório de Matemática.

**Manoel Americo Rocha:** Mestre, título obtido na Universidade Federal do Ceará em 1980, Bacharel em Matemática também pela UFC em 1972. Especialista em Metodologia do Ensino Superior também pela UFC em 1975. Área de conhecimento: Matemática. Atualmente atua como professor da Fanor - Faculdades Nordeste e da UECE-Universidade Estadual do Ceará. Larga experiência em docência superior na Unifor e UFC.



Matemática

**F**iel a sua missão de interiorizar o ensino superior no estado Ceará, a UECE, como uma instituição que participa do Sistema Universidade Aberta do Brasil, vem ampliando a oferta de cursos de graduação e pós-graduação na modalidade de educação a distância, e gerando experiências e possibilidades inovadoras com uso das novas plataformas tecnológicas decorrentes da popularização da internet, funcionamento do cinturão digital e massificação dos computadores pessoais.

Comprometida com a formação de professores em todos os níveis e a qualificação dos servidores públicos para bem servir ao Estado, os cursos da UAB/UECE atendem aos padrões de qualidade estabelecidos pelos normativos legais do Governo Federal e se articulam com as demandas de desenvolvimento das regiões do Ceará.



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ



C A P E S

