Chapitre 1 : Cinématique

I Cadre de la mécanique classique

A) Système mécanique – masse

On assimile le système à un point matériel ($V = 0$, pas de rotation, structure interne homogène) caractérisé par sa position M dans l'espace, sa masse, sa charge…

Masse :

- Masse inerte : mesure de la répugnance d'un corps à voir son mouvement modifié par une action extérieure.

Relation Fondamentale de la Dynamique :

$$\vec{F} = m_i\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_i}$$

Lorsque m_i est élevé, a est plus faible (moins de modification du mouvement)

- Masse gravitationnelle : sensibilité d'un corps à l'interaction gravitationnelle.

$$\vec{F}_{\substack{grav \\ m_{g'} \to m_g}} = -\frac{Gm_g m_{g'}}{r^2}\vec{u}$$

- Principe d'équivalence : $m_i = m_g$, établi par Einstein et vérifié avec une précision de 10^{-10} (Eötvös).

B) Espace et temps

- Espace euclidien à 3 dimensions (somme des angles d'un triangle = 180°, théorème de Pythagore…), repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. La définition d'un mètre correspond à la distance parcourue par la lumière pendant $\frac{1}{299792458}$ s
- Le temps : paramètre réel qui s'écoule uniformément, mesuré par une horloge (système physique périodique). 1s = 9192631770 périodes d'une transition atomique de ^{133}Cs
- En réalité :
  - Relativité restreinte → pas de temps absolu, il dépend du référentiel considéré
  - Relativité générale → espace non euclidien (espace courbe)
  - Mécanique quantique → structure à petite échelle non continue (longueur de Planck).

C) Référentiel

Notion de mouvement dépendant de l'observateur du mouvement ou du référentiel

Référentiel : ensemble d'observateurs, qui mesurent la position et le temps, observateurs qui sont fixes les uns par rapport aux autres. C'est ainsi la donnée d'un repère fixe (et éventuellement d'une horloge en relativité restreinte) $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Les observateurs auront une position fixe dans le temps.

Exemple : référentiel terrestre, référentiel du laboratoire, géocentrique…

II Système de coordonnées usuelles

A) Coordonnées cartésiennes

Espace rapporté à un repère (cartésien) triorthonormé direct $R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$(\vec{i}\perp\vec{j},\quad \vec{j}\perp\vec{k},\quad \vec{k}\perp\vec{i},\quad \|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1,\quad \vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k})$

Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cartésiennes, où x représente l'abscisse, y l'ordonnée, z la côte.

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

$$M(x,y,z):\overrightarrow{OM}\left|\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right.$$

$M(x,y,z)\mapsto\overrightarrow{OM}$ est une fonction vectorielle des variables x, y, z.

$$d\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}'-\overrightarrow{OM} \text{ où } M(x,y,z),\quad M'(x+dx,y+dy,z+dz)$$

$$d\overrightarrow{OM}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$$

B) Coordonnées cylindriques

On considère $R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ triorthonormal direct. Soit M un point de l'espace repéré par ses coordonnées cylindriques.

Soit N le projeté orthogonal de M sur le plan xOy.

Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe $(Oz$.

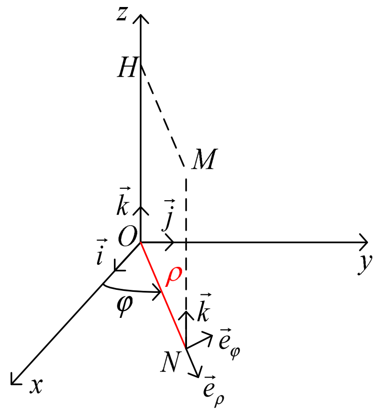
On pose $\rho=ON=HM$ distance de M à $(Oz$ et $\vec{e}_\rho=\dfrac{\overrightarrow{ON}}{\rho}$

On pose $\varphi=(\vec{i},\overrightarrow{ON})\in[0;2\pi[$ angle polaire

$z=\overline{OH}=\overline{NM}$ côte de M.

Ainsi, M a pour coordonnées dans la base polaire (ρ,φ,z).

On pose $\vec{e}_\varphi$ tel que $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$ soit triorthonormé direct.



$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ est une base locale (elle dépend de M à cause de ρ et φ)

Relation de passage :

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \\ y = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

* $\vec{e}_\rho = (\vec{e}_\rho \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{e}_\rho \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{e}_\rho \cdot \vec{k})\vec{k}$

$= \cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\varphi \cdot \vec{j} + \vec{0} = \cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\varphi \cdot \vec{j}$

* $\vec{e}_\varphi = (\vec{e}_\varphi \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{e}_\varphi \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{e}_\varphi \cdot \vec{k})\vec{k}$

$= -\sin\varphi \cdot \vec{i} + \cos\varphi \cdot \vec{j}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \rho \cdot \vec{e}_\rho + z \cdot \vec{k}$

Pour un déplacement infinitésimal :

- méthode géométrique

$d\vec{e}_\rho$ = Variation infinitésimale de $\vec{e}_\rho$ pour un déplacement de $M(\rho, \varphi, z)$ à $M'(\rho + d\rho, \varphi + d\varphi, z + dz)$

$= \vec{e}_\rho(M') - \vec{e}_\rho(M) = \vec{e}_\rho(\varphi + d\varphi) - \vec{e}_\rho(\varphi)$

Donc $d\vec{e}_\rho$ appartient au plan polaire (xOy), et est perpendiculaire à $\vec{e}_\rho$:

$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho = 1 \Rightarrow d(\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho) = 0 \Rightarrow 2\vec{e}_\rho \cdot d\vec{e}_\rho = 0 \Rightarrow \vec{e}_\rho \perp d\vec{e}_\rho$

Donc $d\vec{e}_\rho \,//\, \vec{e}_\varphi$; $\boxed{d\vec{e}_\rho = d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi}$

$d\vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(M') - \vec{e}_\varphi(M)$

$// \vec{e}_\rho$

$\left\| d\vec{e}_\varphi \right\| = |d\varphi|$

$\boxed{d\vec{e}_\varphi = -d\varphi \cdot \vec{e}_\rho}$

- méthode analytique

$d\vec{e}_\rho = d(\cos\varphi \cdot \vec{i}) + d(\sin\varphi \cdot \vec{j}) = d(\cos\varphi) \cdot \vec{i} + d(\sin\varphi) \cdot \vec{j}$

$= -\sin\varphi \cdot d\varphi \cdot \vec{i} + \cos\varphi \cdot d\varphi \cdot \vec{j} = d\varphi(-\sin\varphi \cdot \vec{i} + \cos\varphi \cdot \vec{j}) = d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$

$d\vec{e}_\varphi = d(-\sin\varphi) \cdot \vec{i} + d(\cos\varphi) \cdot \vec{j} = -\cos\varphi \cdot d\varphi \cdot \vec{i} - \sin\varphi \cdot d\varphi \cdot \vec{j} = -d\varphi \cdot \vec{e}_\rho$

$d\overrightarrow{OM} = d(\rho \cdot \vec{e}_\rho + z\vec{k}) = d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot d\vec{e}_\rho + dz \cdot \vec{k} = d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + dz \cdot \vec{k}$

Les coordonnées sphériques seront vues dans la partie électrostatique (Chapitre 3)

III Cinématique classique

A) Position et trajectoire

On se place dans un référentiel $R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Soit un point matériel repéré par sa position $M(t)$ à l'instant t

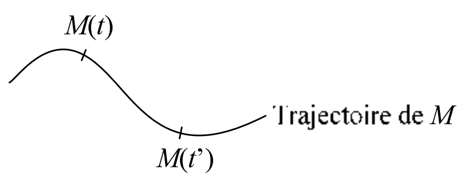
Vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ (O est fixe)

$\boxed{\overrightarrow{OM}(t)=x(t)\cdot\vec{i}+y(t)\cdot\vec{j}+z(t)\cdot\vec{k}}$. Les coordonnées x,y,z de M dépendent de t.

Ou $\boxed{\overrightarrow{OM}(t)=\rho(t)\cdot\vec{e}_\rho(t)+z(t)\cdot\vec{k}}$

Définition : trajectoire = $\{M(t),t\in\mathbb{R}\}$ (elle dépend du référentiel)

B) Vitesse



Vitesse moyenne de M entre t et t' dans (R) :

$$\vec{v}_{moy}=\frac{\overrightarrow{MM'}}{t'-t}$$

Si $\Delta t=t'-t\to 0$, $\vec{v}_{moy}$ tend vers une limite, vitesse instantanée de M dans (R) à t :

$$\vec{v}_{M/(R)}(t)=\frac{\overrightarrow{M(t)M(t+dt)}}{dt}=\frac{\overrightarrow{OM}(t+dt)-\overrightarrow{OM}(t)}{dt}=\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{(R)}$$

Expression du vecteur vitesse :

* $d\overrightarrow{OM}(t)=dx(t)\cdot\vec{i}+dy(t)\cdot\vec{j}+dz(t)\cdot\vec{k}$

Donc $\vec{v}_{M/(R)}(t)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)=\frac{dx}{dt}(t)\cdot\vec{i}+\frac{dy}{dt}(t)\cdot\vec{j}+\frac{dz}{dt}(t)\cdot\vec{k}$

$$\boxed{\vec{v}_{M/(R)}(t)=\dot{x}(t)\cdot\vec{i}+\dot{y}(t)\cdot\vec{j}+\dot{z}(t)\cdot\vec{k}}$$

* $d\overrightarrow{OM}(t)=d\rho\cdot\vec{e}_\rho+\rho\cdot d\varphi\cdot\vec{e}_\varphi+dz\cdot\vec{k}$

Donc $\boxed{\vec{v}_{M/(R)}(t)=\dot{\rho}\cdot\vec{e}_\rho+\rho\cdot\dot{\varphi}\cdot\vec{e}_\varphi+\dot{z}\cdot\vec{k}}$

Hodographe du mouvement :

Pour tout t, on définit un point $P(t)$ tel que $\vec{v}_{M/(R)}(t)=\overrightarrow{OP}(t)$

Alors : hodographe = $\{P(t),t\in\mathbb{R}\}$

C) Accélération

$$\vec{a}_{M/(R)}(t)=\lim_{\Delta t=t'-t\to 0}\frac{\vec{v}_{M/(R)}(t+\Delta t)-\vec{v}_{M/(R)}(t)}{\Delta t}=\left.\frac{d\vec{v}_{M/(R)}(t)}{dt}\right|_{(R)}=\left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_{(R)}$$

Donc $\boxed{\vec{a}_{M/(R)}(t) = \left.\frac{d\vec{v}_{M/(R)}(t)}{dt}\right|_{(R)} = \ddot{x}(t)\cdot\vec{i} + \ddot{y}(t)\cdot\vec{j} + \ddot{z}(t)\cdot\vec{k}}$

Ou $\vec{a}_{M/(R)}(t) = \ddot{\rho}\cdot\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\cdot\dot{\varphi}\cdot\vec{e}_\varphi + \dot{\rho}\cdot\dot{\varphi}\cdot\vec{e}_\varphi + \rho\cdot\ddot{\varphi}\cdot\vec{e}_\varphi - \rho\cdot\dot{\varphi}\cdot\dot{\varphi}\cdot\vec{e}_\rho + \ddot{z}\cdot\vec{k}$

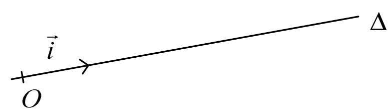
$\boxed{\vec{a}_{M/(R)}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\cdot\dot{\varphi}^2)\cdot\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\cdot\dot{\varphi} + \rho\cdot\ddot{\varphi})\cdot\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\cdot\vec{k}}$

IV Applications

A) Mouvements rectilignes

M se déplace sur une droite Δ fixe dans (R).

1) Grandeurs cinématiques



O et $\vec{i}$ sont fixes dans (R), $(O,\vec{i})$ est un repère cartésien sur Δ.

$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\cdot\vec{i}$; $\vec{v}_{M/(R)}(t) = \dot{x}(t)\cdot\vec{i}$; $\vec{a}_{M/(R)}(t) = \ddot{x}(t)\cdot\vec{i}$

2) Mouvements rectilignes uniformes

Un mouvement est dit rectiligne uniforme lorsque $v_x = \text{cte}$

Ainsi, $\vec{v}_{M/(R)}(t) = v_x\cdot\vec{i} = \overrightarrow{\text{cte}}$. Donc $\vec{a}_{M/(R)}(t) = \vec{0}$

$x(t) - x(0) = \int_0^t v_x dt' = v_x \times t$. Donc $x(t) = v_x \times t + x(0)$

3) Mouvement rectiligne uniformément varié

Un mouvement est dit rectiligne uniformément varié lorsque $a_x = \ddot{x}$ est indépendant du temps.

Ainsi, $v_x(t) - v_x(0) = \int_0^t a_x dt' = a_x \times t$. Soit $v_x(t) = a_x \times t + v_x(0)$

Donc $x(t) - x(0) = \int_0^t v_x(t')dt' = a_x\int_0^t t'dt' + \int_0^t v_x(0)dt' = \frac{a_x}{2}t^2 + v_x(0)\times t$

Donc $x(t) = \frac{a_x}{2}t^2 + v_x(0)\times t + x(0)$

Le mouvement est accéléré ou ralenti suivant la monotonie de la fonction $f = \|\vec{v}\|$: si f est croissante, le mouvement est accéléré ($\|\vec{v}\|$ augmente), si f est décroissante, le mouvement est décéléré ($\|\vec{v}\|$ diminue).

$\|\vec{v}\|$ a le même sens de variation que $\|\vec{v}\|^2$ ou $\vec{v}\cdot\vec{v}$

$$\frac{d\vec{v}\cdot\vec{v}}{dt} = 2\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{(R)}\cdot\vec{v} = 2\vec{v}\cdot\vec{a}$$

Si $\vec{v}\cdot\vec{a} > 0$, le mouvement est accéléré ($(\vec{v},\vec{a}) < \frac{\pi}{2}$)

Si $\vec{v}\cdot\vec{a} < 0$, le mouvement est retardé ($(\vec{v},\vec{a}) > \frac{\pi}{2}$)

4) Mouvement rectiligne sinusoïdal

Cas où $x(t) = X\cos(\omega\cdot t+\varphi)$, où X est l'amplitude, ω la pulsation et φ la phase à l'origine. On a alors :

$$\dot{x}(t) = -X\omega\sin(\omega\cdot t+\varphi)$$

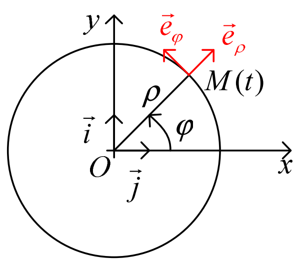
$$\ddot{x}(t) = -X\omega^2\cos(\omega\cdot t+\varphi) = -\omega^2\cdot x(t)$$

Donc $\vec{a}+\omega^2\overrightarrow{OM} = \vec{0}$

B) Mouvements circulaires

M se déplace sur un cercle, fixe dans (R)

1) Grandeurs cinématiques



O est le centre du cercle

$\rho = R = OM$

$\varphi = (\vec{i},\overrightarrow{OM})$

On a : $\overrightarrow{OM} = R\cdot\vec{e}_\rho(t)$

Donc $\vec{v}_{M/(R)}(t) = R\cdot\dot{\varphi}\cdot\vec{e}_\varphi$, le vecteur vitesse est tangent au cercle.

Et $\vec{a}_{M/(R)}(t) = R\cdot\ddot{\varphi}\cdot\vec{e}_\varphi - R\cdot\dot{\varphi}^2\cdot\vec{e}_\rho$

2) Mouvement circulaire uniforme

C'est un mouvement pour lequel $v_\varphi = R\dot{\varphi} = \text{cte}$, soit $\dot{\varphi} = \text{cte}$

On pose $\omega = \dot{\varphi}$, vitesse angulaire de rotation

Ou $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\cdot\vec{k}$, vecteur vitesse angulaire.

$$\|\vec{v}\| = R|\dot{\varphi}| = R|\omega| = \text{cte}$$

$$\vec{a}_{M/(R)} = R\underbrace{\ddot{\varphi}}_{=0}\cdot\vec{e}_\varphi - R\omega^2\cdot\vec{e}_\rho = -R\omega^2\cdot\vec{e}_\rho$$

Donc l'accélération est non nulle, et dirigée vers le centre du cercle (centripète). $\vec{a}\perp\vec{v}$

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{cte}} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}\ ;\quad \|\vec{v}\| = \text{cte} \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{a} = 0$$