Partie Mécanique

Chapitre I

Cinématique

I. Les Référentiels

En physique, un référentiel est un système de coordonnées de l'espace-temps lié à un observateur, composé de trois coordonnées d'espace et d'une coordonnée de temps, utilisé pour définir les notions de position, de vitesse et d'accélération.

1. Référentiel terrestre

Le référentiel terrestre est le référentiel le plus utilisé : il est centré en un point de la Terre, et ses axes sont liés à la rotation terrestre : un homme "immobile" est donc fixe dans le référentiel terrestre. Par exemple, le référentiel terrestre peut se définir sur un terrain de foot comme un référentiel centré au point de corner, donc les axes sont la ligne de touche, la ligne de but et le poteau de corner.

Le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen dans les expériences usuelles. Il faut une chute libre commençant à une hauteur considérable pour mettre en évidence la déviation vers l'est, due à la rotation terrestre.

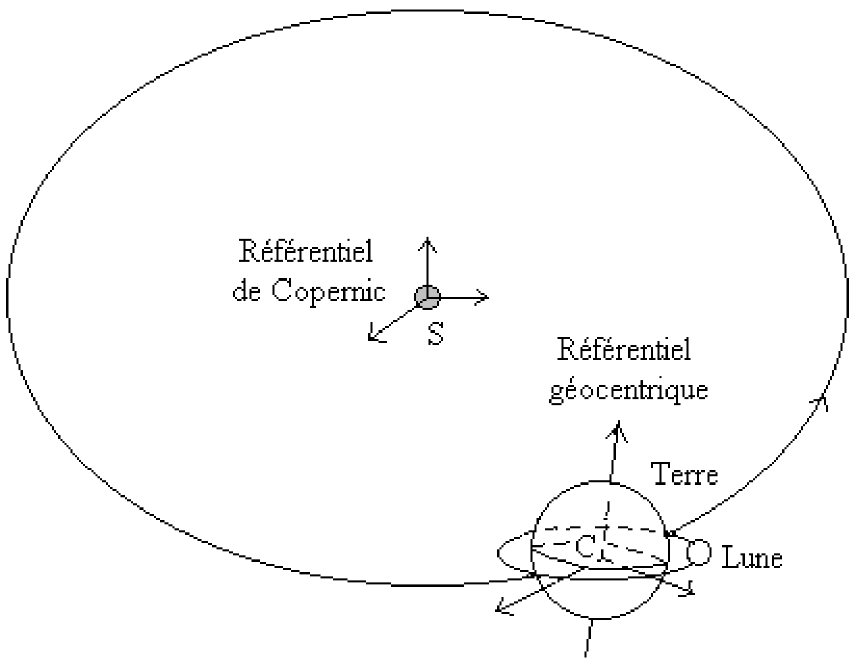
On peut utiliser le référentiel terrestre dans une première approximation lorsque la durée de l'expérience est négligeable devant la période de rotation de la Terre, ou lorsqu'il est évident que l'effet de cette rotation est négligeable devant d'autres erreurs.

2. Référentiel géocentrique

Le référentiel géocentrique a pour origine le centre de gravité terrestre, et ses axes sont définis par rapport à trois étoiles fixes. Deux de ces étoiles sont l'étoile polaire et Beta du Centaure. Ainsi, il n'est pas solidaire de la Terre dans son mouvement de rotation autour des pôles, et ce référentiel peut être considéré comme galiléen sur des expériences terrestres "peu longues" (dont la durée est brève devant une journée), car la rotation de la Terre autour du Soleil n'est alors pas prise en compte et ne faisant pas intervenir des vitesses trop importantes. Ce référentiel est un solide imaginaire constitué de la terre et d'étoiles suffisamment lointaines pour sembler immobiles.

3. Référentiel héliocentrique ou de Copernic

Le référentiel de Copernic est le référentiel centré sur le centre de masse du système solaire et dont les axes pointent vers trois étoiles éloignées. Le référentiel de Copernic est postulé galiléen et est adapté à l'étude du système solaire.



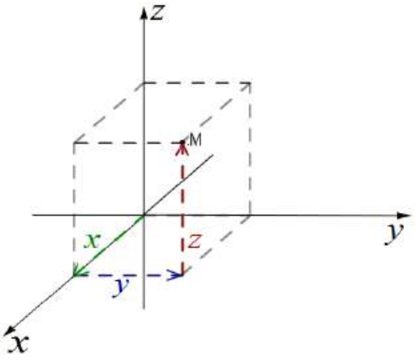
II. Repère d'espace et de temps

1. Repère d'espace

Pour munir l'espace d'un repère, on prend un point *O* appelé origine et les représentants de trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ passant par *O* qui définissent les unités et les directions, respectivement « gauche-droite », « avant-arrière » et « verticale » : on parle du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a. Coordonnées cartésiennes

Dans l'espace muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, à tout point M correspond un unique triplet (x,y,z) de nombres appelés **coordonnées cartésiennes** de M.



On a $$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

et on note $M(x(t), y(t), z(t))$.

Comme dans le plan, il sera nécessaire de prendre un repère orthonormé si l'on désire travailler sur des distances et des angles. La distance s'écrira alors:

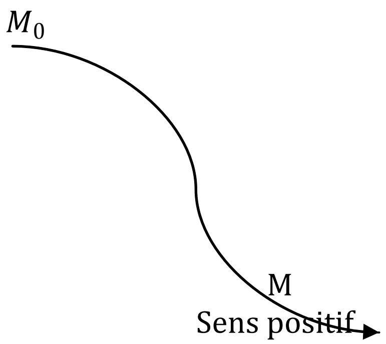
$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

b. Coordonnées curvilignes

Pour déterminer la position d'un point par son abscisse curviligne il est nécessaire au préalable de connaitre sa trajectoire. Il faut donc :

- choisir un point d'origine M_0 sur la trajectoire.
- l'orienter avec un sens positif arbitraire

On définit alors un point M à l'instant t par son abscisse curviligne :



$$\bar{s} = \widehat{M_0M}$$

$\bar{s}$ représente la valeur de l'arc orienté $de\ M_0$ à M.

2. Repère des temps

Il est déterminé par un point t_0 appelé origine des temps. On définira la date t comme l'intervalle de temps entre l'instant d'origine t_0 et l'instant de la date t. t est exprimé en seconde en S.I .

III. Trajectoire, Vitesse et Accélération

1. Trajectoire ou équation cartésienne

Définition : La trajectoire d'un solide est l'ensemble des points occupés successivement au cours du temps.
La trajectoire est une équation du type : y=f(x).
L'équation cartésienne s'obtient en éliminant le temps dans les équations horaires.

Mouvement rectiligne : **y=ax+b**

Exemple : mouvement d'un solide sur une pente inclinée, chute verticale, …

Mouvement circulaire de rayon R : $\mathbf{x^2+y^2=R^2}$

Exemple : mouvement d'un moulin,…

Mouvement parabolique : $\mathbf{y=ax^2+bx+c}$

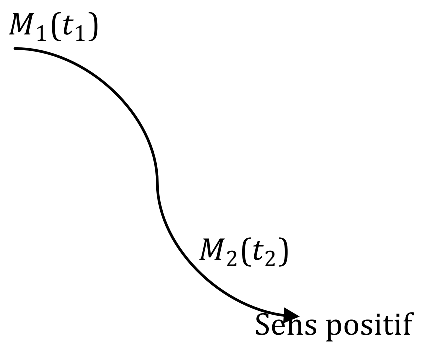
Attention !! l'équation horaire $y(t)=at^2+bt+c$ ne correspond pas forcement à un mouvement parabolique !

2. Vitesse dans un référentiel

a. Vitesse moyenne

Coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v}_{t_1 \to t_2} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{t_2 - t_1}$$



Coordonnées curvilignes :

$$\bar{v}_{t_1 \to t_2} = \frac{\widehat{M_1 M_2}}{t_2 - t_1}$$

b. Vitesse instantanée

Coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v}\,(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$$

$\overrightarrow{OM}(t)\begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{vmatrix}$ Représente le vecteur position du point M.

Les coordonnées du vecteur vitesse s'écrivent :

$$\vec{v}(t)\begin{vmatrix} \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dot{y} \\ \dfrac{dz}{dt} = \dot{z} \end{vmatrix}$$

Caractéristiques de la vitesse :

direction : tangente à la trajectoire
sens : celui du déplacement
norme : $v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

Coordonnées curvilignes :

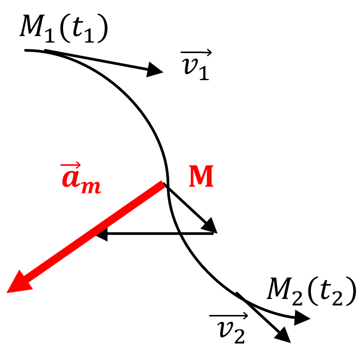
$$\bar{v}\,(t) = \frac{d\bar{s}}{dt}$$

3. Accélération dans un référentiel

a. Accélération moyenne

Coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a}_m = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1}$$



Pour construire $\vec{a}_m$:
On reporte $\overrightarrow{v_2}$ en M
On trace $-\overrightarrow{v_1}$ au bout de $\overrightarrow{v_2}$
On trace $\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}$ au point M et on en déduit la direction et le sens de $\vec{a}_m$

b. Accélération instantanée dans un repère cartésien

$$\vec{\boldsymbol{a}}\,(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{d\vec{v}(t)}}{\boldsymbol{dt}}$$

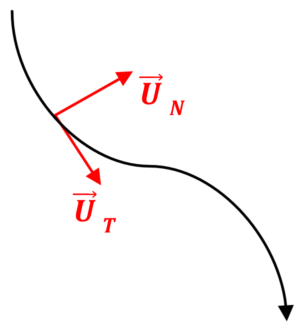
Les coordonnées du vecteur accélération s'écrivent :

$$\vec{a}(t)\left|\begin{array}{l}\dfrac{dv_x}{dt} = \ddot{x}\\ \dfrac{dv_y}{dt} = \ddot{y}\\ \dfrac{dv_z}{dt} = \ddot{z}\end{array}\right.$$

La norme du vecteur accélération s'exprime par : $a(t) = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$

c. Accélération instantanée dans la base de Frenet

Il s'agit d'un repère local associé à un point M, décrivant une courbe (C). Elle sert de base de projection du vecteur accélération dans le cas des mouvements circulaires et curvilignes.



$$\vec{a} = a_N\vec{U}_N + a_T\vec{U}_T$$

Important :

$$a_T = \frac{dv}{dt} \qquad et \qquad a_N = \frac{v^2}{r}$$

r : rayon de courbure.

IV. Etude des différents mouvements

1. Phase d'un mouvement

a. Mouvement accéléré

$a_T = \frac{dv}{dt} > 0$ => La vitesse augmente, c'est donc un mouvement accéléré.

b. Mouvement retardé

$a_T = \frac{dv}{dt} < 0$ => La vitesse diminue, c'est donc un mouvement décéléré.

c. Mouvement uniforme

$a_T = \frac{dv}{dt} = 0$ => La vitesse est constante, c'est donc un mouvement uniforme.

Exercice d'application :

Sur un axe x'Ox d'origine O, l'équation horaire de l'abscisse x d'un point mobile M est :
$x(t) = -2t^2 + 3t - 1$

1. Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse du mobile à l'instant t .
2. Déterminer les coordonnées du vecteur accélération à l'instant t.
3. Déterminer la nature du mouvement.

Solution :

1. $v(t) = \frac{dx}{dt} = -4t + 3$
2. $a = \frac{dv}{dt} = -4$
3. $a = -4 < 0$, il s'agit donc d'un mouvement retardé.

2. Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU)

a. Définition

Il est caractérisé par une trajectoire rectiligne, son équation est celle d'une droite du type :

y=ax+b .
Un point M est animé d'un mouvement rectiligne uniforme si le vecteur vitesse est constant : $\vec{v} = \overrightarrow{cste}$ donc $\vec{a} = \vec{0}$.

b. Equation horaire

Pour un mouvement rectiligne uniforme on a :

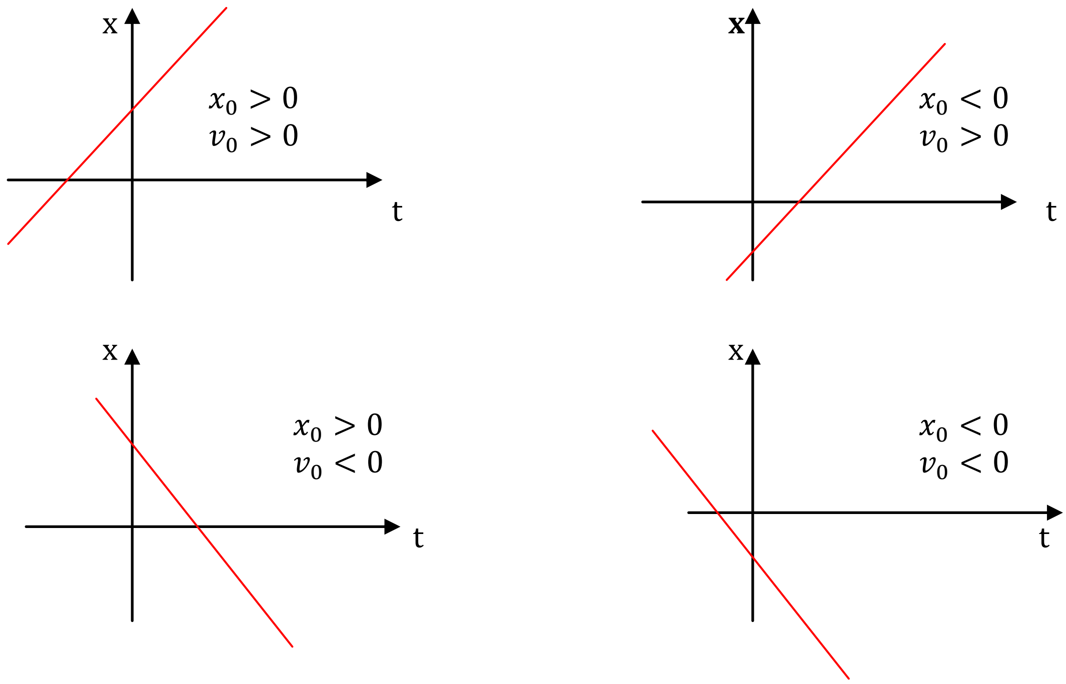
$$a = \frac{dv}{dt} = 0$$

donc $v = \frac{dx}{dt} = cste = v_0$ ou v_0 est la vitesse initiale.

en intégrant : $x(t) = v_0 t + x_0$ ou x_0 est la position initiale.
v_0 et x_0 forment les conditions initiales du mouvement.

c. Diagramme horaire

Il y a quatre cas possible selon les conditions initiales du mouvement :



3. Mouvement Rectiligne Uniformément Varié(MRUV)

a. Définition

Un point est animé d'un mouvement uniformément varié si le vecteur accélération est constante à chaque instant.
Les vecteurs vitesse et accélération seront donc de même direction et pas forcement le même sens.

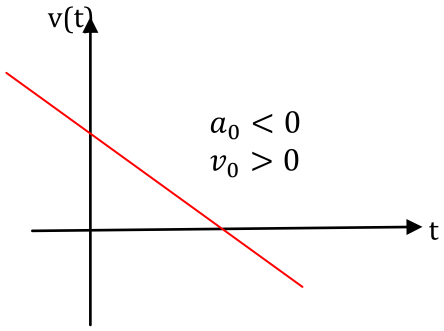
b. Equations horaires

Pour un MRUV on a :

$a = cste = a_0 \quad => \quad \frac{dv}{dt} = a_0$

en intégrant : $v(t) = a_0 t + v_0$

v_0 représente la vitesse initiale du mouvement.

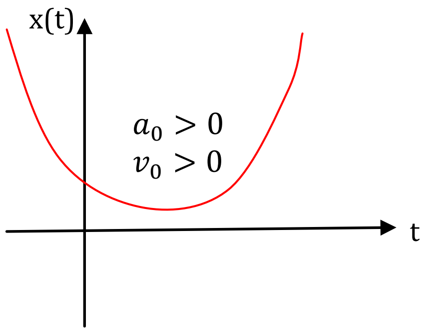


en intégrant une seconde fois on a :

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

x_0 : condition initiale de la position.

Remarque : L'équation x(t) est une équation parabolique



Important ! Dans un mouvement uniformément varié :

$$a = cste$$
$$v(t) = at + v_0$$
$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

c. Relation entre position, vitesse et accélération

On considère v_1 et v_2 les vitesses respectives du point M aux instants t_1 et t_2.

Relation en la vitesse et le temps :

D'après les équations horaires on écrit :

$$v_1 = a_0 t_1 + v_0$$
$$v_2 = a_0 t_2 + v_0$$

En faisant la différence on trouve donc la relation voulue :

$$\boldsymbol{v_2 - v_1 = a_0(t_2 - t_1)}$$

Relation en la vitesse et la position :

les carrés des deux relations précédentes s'écrivent :

$$v_1{}^2 = a_0{}^2 t_1{}^2 + 2a_0 t_1 + v_0{}^2$$
$$v_2{}^2 = a_0{}^2 t_2{}^2 + 2a_0 t_2 + v_0{}^2$$

d'où $v_2{}^2 - v_1{}^2 = a_0{}^2(t_2{}^2 - t_1{}^2) + 2a_0(t_2 - t_1)$

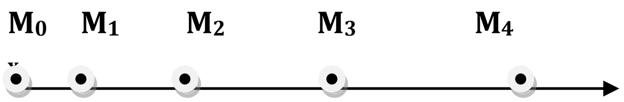
$$v_2{}^2 - v_1{}^2 = 2a_0\left((\frac{1}{2}a_0 t_1{}^2 + v_0 t_1 + x_0) - (\frac{1}{2}a_0 t_2{}^2 + v_0 t_2 + x_0)\right)$$

On en déduit donc le **théorème des vitesses** :

$$\boldsymbol{v_2{}^2 - v_1{}^2 = 2a_0(x_2 - x_1)}$$

Relation en la distance parcourue et le temps :

Lorsque les positions du point M sont repérés à des intervalles de temps τ constant, alors les distances parcourue durant les différents intervalles de temps τ forment une progression arithmétique de raison $v_0\tau = a_0\tau^2$



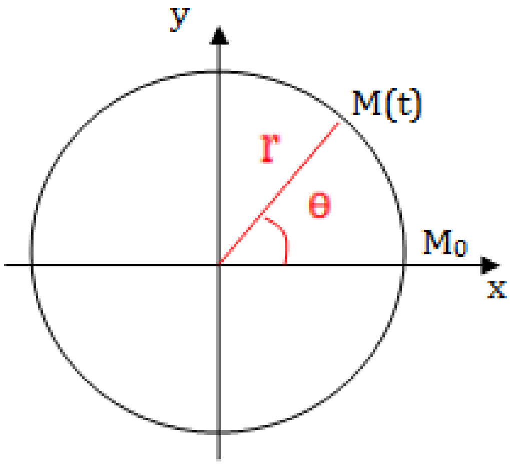
On a donc : $\boldsymbol{d_{k+1}} = \boldsymbol{d_k} + a_0\tau^2$

soit : $\boldsymbol{d_k} = \boldsymbol{d_0} + k a_0\tau^2$

4. Mouvement Circulaire Uniforme (MCU)

a. Définition

Un point M est animé d'un mouvement circulaire uniforme si :
$a = a_N$ donc $a_T = 0$ les deux vecteurs vitesse et accélération sont donc perpendiculaires à tout instant et ils sont dans le même plan.



d'où

$a_T = 0$ $v = cste = v_0$ c'est donc un mouvement uniforme.
$a_N = \frac{v^2}{r} = cste$ donc r=cste c'est donc un mouvement circulaire.

Remarque :

Dans un MCU la norme de l'accélération est : $\|\vec{a}\| = a_N = \frac{{v_0}^2}{r}$

Position du point M(t) sur le cercle avec l'abscisse curviligne et l'abscisse angulaire :

Position	$\bar{s}$	θ	$\bar{s} = r\theta$
Vitesse	$\bar{v} = \dot{s} = \frac{d\bar{s}}{dt}$	$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$	$\bar{v} = r\omega$
Accélération	$a_T = \frac{d\bar{v}}{dt} = 0$ $a_N = \frac{\bar{v}^2}{r}$	$\dot{\omega} = \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$	$a_T = r\frac{d\omega}{dt} = 0$ $a_N = r\dot{\omega}^2 = 0$

Important ! Dans un mouvement circulaire uniforme :

$$v = r\omega \quad et \quad a = r\omega^2$$

b. Equation hraire

Par intégrations successives on obtient :

$a_T = r\frac{d\omega}{dt} = 0$ => $\omega = cste = \omega_0 = \frac{d\theta}{dt}$ => $\theta = \omega_0 t + \theta_0$

ω_0 et θ_0 représentent les conditions initiales du mouvement.

On écrit donc les équations horaires dans un repère cartésien sous la forme :

Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM}(t)\left|\begin{array}{l} x(t) = rcos(\theta) = rcos(\omega_0 t + \theta_0) \\ y(t) = rsin(\theta) = rsin(\omega_0 t + \theta_0) \end{array}\right.$$

Vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t)\left|\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = -r\omega_0 sin(\omega_0 t + \theta_0) \\ \dfrac{dy}{dt} = r\omega_0 cos(\omega_0 t + \theta_0) \end{array}\right.$$

Vecteur accélération :

$$\vec{a}(t)\left|\begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -r{\omega_0}^2 cos(\omega_0 t + \theta_0) \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -r{\omega_0}^2 sin(\omega_0 t + \theta_0) \end{array}\right.$$

Conclusion : $\vec{a}(t) = -{\omega_0}^2\overrightarrow{OM}(t)$

Remarque : Le vecteur accélération est à tout instant radial centripète et sa norme est constante.

c. Trajectoire

Les équations précédentes nous permettent d'écrire :

$$\left|\begin{array}{l} x^2(t) = r^2cos^2(\omega_0 t + \theta_0) \\ y^2(t) = r^2sin^2(\omega_0 t + \theta_0) \end{array}\right.$$

d'où $x^2(t) + y^2(t) = r^2(sin^2(\omega_0 t + \theta_0) + cos^2(\omega_0 t + \theta_0))$

or $sin^2(\omega_0 t + \theta_0) + cos^2(\omega_0 t + \theta_0) = 1$

d'où $x^2(t) + y^2(t) = r^2$

C'est donc l'équation d'un cercle de centre O et de rayon r.

d. Période, fréquence et vitesse angulaire

Période : La période est le temps nécessaire au point M pur faire un tour.
On le note T. Elle s'exprime en seconde (s) en S.I.

Fréquence : La fréquence est le nombre de tour effectué par le point M en une seconde.
On le note souvent *f*, c'est l'inverse de la période :

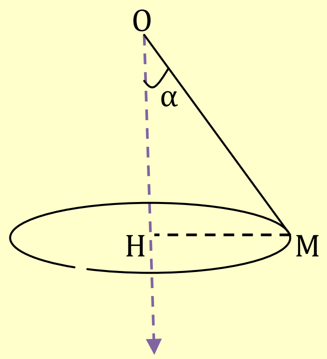
$f = \frac{1}{T}$.   Elle s'exprime en Hz (hertz).

Vitesse angulaire : La vitesse angulaire est l'angle balayé par le vecteur position en une seconde. On la note ω et elle s'exprime en $rad.s^{-1}$.

$$\omega = 2\pi f$$

Exercice d'application :

On considère un point M en mouvement de rotation uniforme autour d'un axe verticale Oz. L'angle α est constant (figure 1)
Données :
Le point M fait six tours en une minute.
$\alpha = 30°; OM = 1\text{m}$



1. Calculer la période et la fréquence en S.I
2. Calculer la vitesse angulaire ω de M
3. Calculer la vitesse *v* de M.

Solution :

1. $T = \frac{60}{6} = 10s$ et $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{10} = 0.1Hz$
2. $\omega = 2\pi f = 2\pi.0.1 = 0.628\, rad.s^{-1}$
3. $v = \text{HM}.\omega = OM.\sin\alpha.\omega = 1.\sin 30°.0.628 = 0.314\text{m.s}^{-1}$

5. Mouvement Rectiligne Sinusoïdal (MRS)

a. Définition

Un point M est animé un mouvement rectiligne sinusoïdal si :

$$\vec{a}(t) = -\omega^2\overrightarrow{OM}(t)$$

ω : Pulsation propre. Elle s'exprime en $rad.s^{-1}$.

Remarque : Le mouvement rectiligne sinusoïdal est donc un mouvement périodique. Le point M oscille autour de sa position d'équilibre.

b. Equations horaires

Par définition un MRS est tel que : $\vec{a}(t) = -\omega^2\overrightarrow{OM}(t)$

en projetant su l'axe du mouvement : $a = -\omega^2 x = \ddot{x}$

Cette équation s'écrit en général sous la forme : $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

La résolution de cette équation différentielle permet d'avoir l'équation horaire du mouvement. On admet que la solution générale de cette équation s'écrit :

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$x(t)$: Abscisse du point M à l'instant t.
x_m : Amplitude du mouvement, c'est la valeur maximale et positive de x(t).

ω : Pulsation du mouvement liée à la fréquence et s'exprime en $rad.s^{-1}$.

φ : Phase initiale et elle s'exprime en rad.

Remarque : x_m et φ se déterminent par les conditions initiales.

Cas général de la détermination des constantes $\boldsymbol{x_m}$ et $\boldsymbol{\varphi}$:

Conditions initiales :

$$x(t = 0) = x_0$$
$$v(t = 0) = v_0$$

Calcul de x_m :

$$x(t = 0) = x_m \cos(\varphi) = x_0$$
$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi)$$
$$v(t = 0) = -\omega x_m \sin(\varphi)$$

En effet :

$$\frac{x_0}{x_m} = \cos(\varphi)$$

$$\frac{v_0}{\omega x_m} = -\sin(\varphi)$$

Donc $\left(\frac{x_0}{x_m}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega x_m}\right)^2 = \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$

d'où
$$x_m = \sqrt{{x_0}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

Calcul de φ :

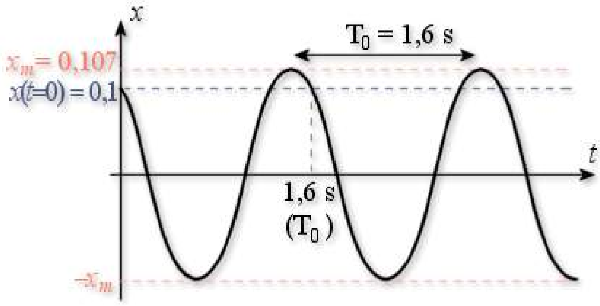
$$\cos(\varphi) = \frac{x_0}{x_m} = \frac{x_0}{\sqrt{{x_0}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{x_0}{\sqrt{{x_0}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}}\right)$$

c. Diagrammes horaires

Exemple de solution numérique :

$x(t) = \ 0.107\cos(3.925t + 0.36)$



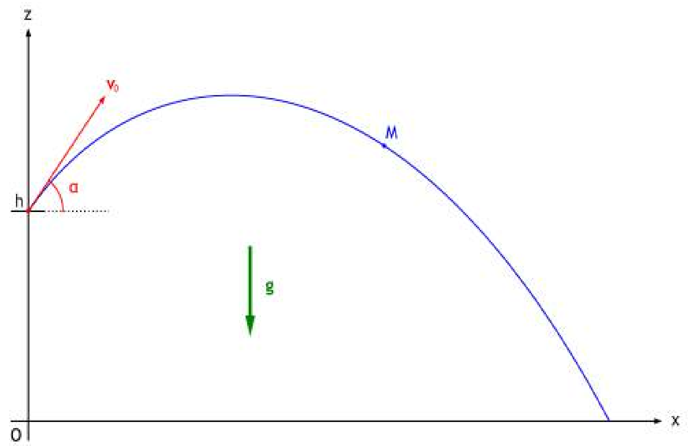
6. Mouvement Parabolique

a. Définition

Un point M est animé d'un mouvement parabolique si les vecteurs accélération et vitesse ne sont pas parallèles et le vecteur accélération est constant.

b. Equations horaires

Le vecteur accélération étant constant. La majorité des exercices ont pour accélération le champs de pesanteur. Nous nous placerons donc dans le cas le vecteur accélération est verticale vers le bas.



D'où $\vec{a}(t)\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_z = -a = cste \end{vmatrix}$

En intégrant une première fois on obtient les équations horaires de la vitesse :

$$\vec{v}(t)\begin{vmatrix} v_x = cste = v_0 \cos(\alpha) \\ v_z = -at + v_0 \sin(\alpha) \end{vmatrix}$$

En intégrant une seconde fois on obtient les équations horaires de la position :

$$\overrightarrow{OM}(t)\begin{vmatrix} x(t) = (v_0 \cos(\alpha))t + x_0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}at^2 + (v_0 \sin(\alpha))t + z_0 \end{vmatrix}$$

x_0 et z_0 sont les conditions initiales de la position.

c. Equation de la trajectoire

Pour avoir l'équation cartésienne de la trajectoire on élimine le temps dans les équations horaires :

On se place dans le cas le plus courant où x_0=0 :

on élimine t : $t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$

On reporte dans l'équation de z(t) :

$$z = -\frac{1}{2}a\left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}\right)^2 + (v_0 \sin(\alpha))\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} + z_0$$

d'où

$$z = -\frac{1}{2} a \frac{x^2}{{v_0}^2 \cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha)\, x + z_0$$

Cette equation est l'équation d'une parabole, donc la trajectoire est parabolique.

7. Cinématique des solides étendus

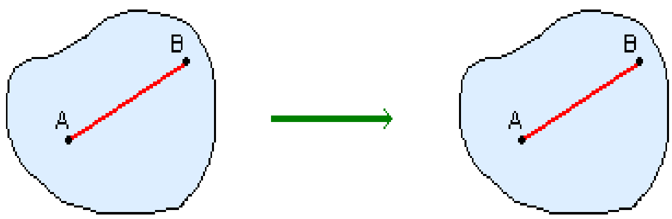
ab Contrairement à ce qui précède nous traitons ici des solides étendus c'est-à-dire un système qui ne pas être modalisé par un point matériel

.

a. Mouvement de translation

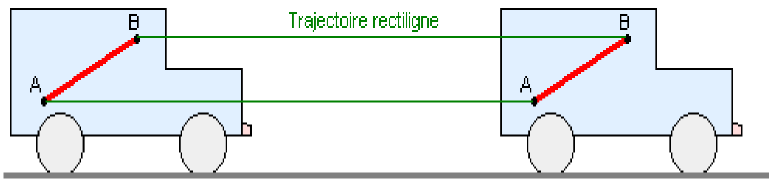
Définition :

Un solide possède un mouvement de translation si tout segment du solide reste parallèle à lui même au cours du mouvement.



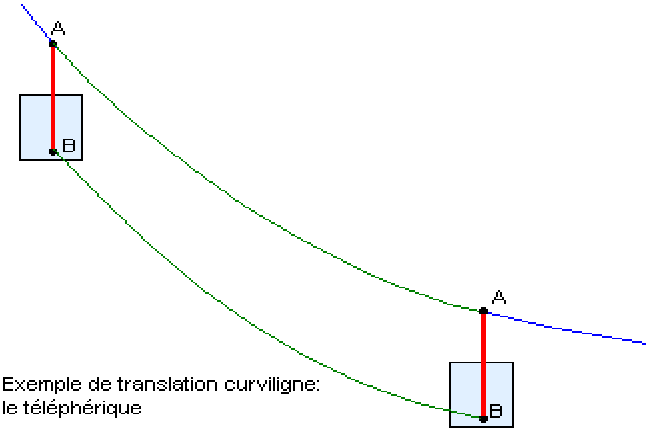
Translation rectiligne:

Tout segment du solide se déplace en restant parallèle à lui même et le mouvement de chaque point est rectiligne.



Translation curviligne:

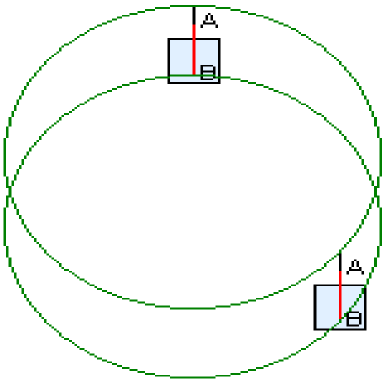
Tout segment du solide se déplace en restant parallèle à lui même et le mouvement de chaque point est curviligne.



Exemple de translation curviligne: le téléphérique

Translation circulaire:

Tout segment du solide se déplace en restant parallèle à lui même et le mouvement de chaque point est un cercle.



Exemple de translation circulaire: la grande roue

b. Mouvement de rotation autour d'un axe

Définition : Un solide possède un mouvement de rotation autour d'un axe fixe si le mouvement de chacun de ses points est un cercle centré sur l'axe de rotation.

Dans ce cas tous les points ont la même vitesse angulaire ω .
La vitesse d'un point M du solide est $v=R\,\omega$ avec R le rayon de la trajectoire de M.

c. Mouvement quelconque

Tous les mouvements sont décomposables en une succession de translation et de rotation.

d. Mouvement de la Terre.

Le mouvement de la Terre peut être considéré comme la composition :

d'un mouvement de translation circulaire autour du soleil.
D'un mouvement de rotation autour de son axe Nord Sud, d'Ouest en Est appelé mouvement propre.

Jour sidéral:

Un jour sidéral est la durée que met une planète pour faire un tour sur elle-même par rapport aux étoiles, indépendamment de sa révolution autour du Soleil.

T_{sid}=23h56min4s=86164s

Jour solaire :

Le *jour solaire* est le temps mis par la Terre pour faire un tour sur elle-même du point de vue du Soleil. Autrement dit, le *jour solaire* est le temps séparant deux passages consécutifs du Soleil au méridien d'un lieu. Cette durée combine la rotation de la Terre sur elle-même et le déplacement de la Terre sur son orbite.

T_{sol}=24h=86400s

Année solaire :

C'est la période de révolution de la terre autour du soleil. Elle est utilisée dans le repère héliocentrique.

$T_{rév}$= 1 année = 365,25 jours