MPSI
PCSI

1re ANNÉE

Conforme aux programmes

ALGÈBRE

COURS
EXERCICES CORRIGÉS

2e édition

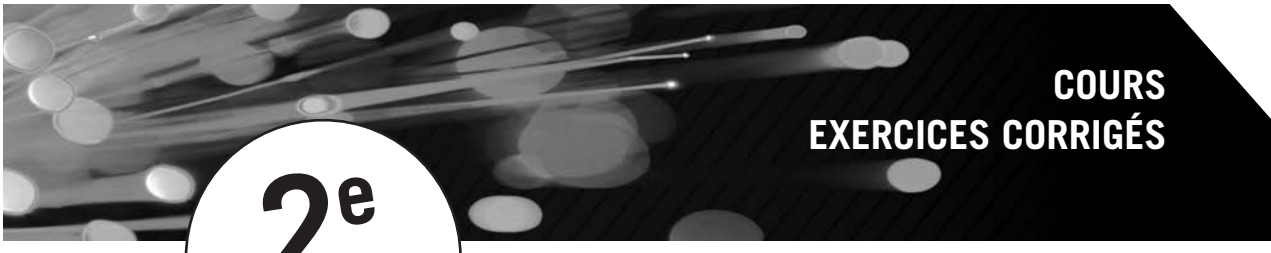
NICOLAS BASBOIS
PIERRE ABBRUGIATI

deboeck SUPÉRIEUR

MPSI / PCSI 1re ANNÉE

Conforme aux programmes

ALGÈBRE



COURS
EXERCICES CORRIGÉS

2e édition

NICOLAS BASBOIS
PIERRE ABBRUGIATI

deboeck SUPÉRIEUR

2e édition
Rue du Bosquet, 7 B-1348 Louvain-la-Neuve

Imprimé en Belgique

Dépôt légal :
Bibliothèque nationale, Paris : décembre 2016
Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2016/13647/178 ISBN : 978-2-8073-0640-0

Remerciements

Nous commençons par remercier Fabrice Chrétien des éditions de Boeck pour l'opportunité qu'il nous a offerte avec ce projet. Notre reconnaissance va évidemment à Olivier Rodot, directeur de la collection et auteur de l'ouvrage d'analyse de seconde année, pour son soutien, ses conseils et critiques avisés et sa grande disponibilité. Merci également à Gilles Costantini, rédacteur de l'ouvrage d'analyse de première année, pour son soutien également, et ses conseils. Enfin, nous remercions pour leur relecture attentive et leurs commentaires avisés Sébastien Duchâtel et Marie-Pierre Lorenzi. Nous sommes infiniment redevables à Ioana Paşca pour son investissement à nos côtés, et à Christophe Antonini pour sa disponibilité sans failles et tout le profit que l'on a pu tirer de ses compétences.

Nicolas et Pierre

Je profite de cette page pour remercier vivement Michel Schweitzer, qui m'a été d'une aide précieuse pour ma première année d'enseignement en CPGE. J'adresse un salut amical à mes collègues, qui m'ont encouragé et ont suivi l'avancée de mon projet. Enfin je ne dirai jamais assez merci à mes amis et à mes proches, en particulier ma mère, dont le soutien a été tellement important. Et j'adresse une pensée à mon père, qui reste présent à mes côtés.

Nicolas

J'aimerais profiter de ces quelques lignes pour remercier Jérôme Isaia qui, dix ans après m'avoir donné le goût des mathématiques alors qu'il était notre enseignant en MPSI, m'a guidé avec sagesse alors que je débutais dans l'enseignement en classe préparatoire. Je remercie vivement mes proches de m'avoir supporté, dans tous les sens du terme, pendant l'écriture de cet ouvrage. Je pourrais remercier tout particulièrement Ioana Paşca pour son support moral durant la rédaction de ce livre, mais cela ne serait pas correct ; la vérité est qu'elle a très largement participé à cette rédaction.

Pierre.

Table des matières

CHAPITRE 1

Rudiments de rédaction mathématique

1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est double :

- Présenter certaines techniques de raisonnement très utiles et que l'on emploiera tout au long de l'ouvrage.
- Donner des éléments de langage élémentaires concernant la rédaction d'une démonstration.

2 Énoncés et expressions mathématiques

2.1 Énoncés mathématiques : définition et exemples

Le lecteur sait qu'en mathématiques on s'intéresse à certains types d'objets (nombres, fonctions, ensembles, vecteurs...). On en définira précisément quelques-uns dans les chapitres qui suivent. Pour l'instant, on part du principe que le lecteur a déjà rencontré des concepts mathématiques et on donne la définition informelle suivante :

Définition 1 (informelle)

Un *énoncé mathématique* (ou *proposition mathématique*) est un énoncé portant sur certaines propriétés de certains objets ou concepts mathématiques.

Exemples 1

1. Le nombre 3 est un nombre impair.
2. Le nombre réel π est irrationnel.
3. La fonction exponentielle est une fonction continue de l'ensemble des réels vers l'ensemble des réels.
4. Tout entier naturel est pair ou impair.
5. Dans tout triangle non aplati, les trois médiatrices sont concourantes.
6. Si 6 divise l'entier n, alors n est pair.
7. L'entier n est pair si et seulement si l'entier $n+1$ est impair. □

Les énoncés mathématiques des exemples 1 partagent tous un point commun : ils sont vrais. On pourrait très facilement produire des énoncés mathématiques faux, mais les auteurs ont fait leur possible pour s'en garder dans cet ouvrage[1], sauf pour indiquer explicitement qu'ils sont faux[2].

Les deux derniers énoncés des exemples 1 partagent un point commun qu'ils ne partagent pas avec les 5 premiers : ils comportent une *variable libre*. On reviendra en détail sur cette notion dans le paragraphe 2.2.d, mais on peut déjà constater que la lettre n est utilisée pour désigner un entier non spécifié dans ces deux énoncés. Lorsqu'un énoncé comporte des variables libres, sa valeur de vérité peut dépendre de l'affectation des variables libres.

On utilisera dans ce chapitre les lettres P et Q pour désigner des énoncés quelconques. Lorsqu'il est possible qu'une variable libre v apparaisse dans un énoncé, on pourra noter ce dernier $P(v)$ pour bien insister sur le rôle de cette variable.

2.2 Formalisme symbolique

Les énoncés des exemples 1 sont écrits en langue naturelle. C'est encore la meilleure manière de les rendre clairs. Néanmoins, on sera parfois amené à enchaîner une longue succession d'énoncés mathématiques en lien les uns avec les autres. La langue française[3]

1. Voir le conseil 2 p. 12.
2. Voir aussi la sous-section 4.4.
3. Ou toute autre langue.

montre alors ses limites et ce sera en particulier illustré p. 230. On utilise alors le formalisme symbolique dont la grande vertu est d'être plus synthétique. Dans les sous-sections qui suivent, on présente atome par atome ce formalisme, mais on prendra garde qu'**on ne devrait pas mélanger langue naturelle et formalisme mathématique dans un même énoncé**. Dans l'idéal, lorsqu'on utilise le formalisme symbolique pour écrire un énoncé, on devrait l'utiliser exclusivement ; et lorsqu'on écrit un énoncé en langue naturelle, il devrait être exclu d'en écrire même une petite partie à l'aide du formalisme symbolique. Pour des raisons de clarté et de lourdeur, il n'est pas toujours possible d'observer scrupuleusement cette règle, mais les auteurs ont essayé de s'y tenir autant que possible.

a. Appartenance et inclusion

Notation 1

L'appartenance (d'un objet mathématique à un ensemble) est dénotée par le symbole $\in$. $a \in A$ se lit « a appartient à A » et signifie que l'élément a appartient à l'ensemble A. □

Exemple 2

L'énoncé $n \in \mathbb{Z}$ se lit « n est un entier relatif ». □

En s'appuyant sur des notations que nous n'avons pas présentées, mais qui sont sans doute connues du lecteur, on peut aussi traduire en formalisme symbolique certains énoncés des exemples 1, dont beaucoup peuvent être réécrits en termes d'appartenance.

Exemples 3

1. L'énoncé de l'exemple 1.2 peut s'écrire « $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ».
2. L'énoncé de l'exemple 1.1 peut s'écrire « $3 \in 2\mathbb{N} + 1$ ».
3. L'énoncé de l'exemple 1.3 peut s'écrire « $\exp \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ». □

Il est entendu dans les exemples 3 que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dénote l'ensemble des réels irrationnels, que $2\mathbb{N} + 1$ dénote l'ensemble des entiers naturels impairs, que exp dénote la fonction exponentielle et que $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dénote l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On revient sur les deux premières notations dans le chapitre 2.

Notation 2

Lorsqu'il n'est pas vrai qu'un objet mathématique a appartient à un ensemble A, c'est-à-dire lorsque a n'appartient pas à A, on note « $a \notin A$ ». □

Exemple 4

L'énoncé « π n'est pas rationnel » peut se réécrire « $\pi \notin \mathbb{Q}$ ». □

Remarque 1

Les ensembles sont eux-mêmes des objets mathématiques ! On peut donc être amené à écrire une expression de la forme « $a \in A$ », où a est lui-même un ensemble ! Exemples :

• L'énoncé « $\mathbb{N} \in \{7, \exp, \mathbb{N}\}$ » signifie que l'ensemble $\mathbb{N}$ est un élément de l'ensemble $\{7, \exp, \mathbb{N}\}$. L'ensemble $\{7, \exp, \mathbb{N}\}$ est, par définition, un ensemble à trois éléments qui sont l'entier 7, la fonction exponentielle, et l'ensemble $\mathbb{N}$.

• En notant $\mathcal{I}$ l'ensemble de tous les intervalles de $\mathbb{R}$, on a $[0, 1[\in \mathcal{I}$. Attention pour autant à ne pas confondre appartenance et *inclusion* : l'ensemble $\mathbb{N}$ **n'appartient pas** à $\mathbb{R}$, l'intervalle $[0, 1[$ **n'appartient pas** à l'intervalle $[0, 1]$. Autrement dit on a $\mathbb{N} \notin \mathbb{R}$ (l'ensemble des entiers naturels n'est pas un nombre réel) et de même $[0, 1[\notin [0, 1]$ (aucun élément de $[0, 1]$ n'est un intervalle !). □

Définition 2

On dit qu'un ensemble A est *inclus* dans un ensemble B lorsque tous les éléments de A sont des éléments de B. On le note $A \subset B$ (voire éventuellement $B \supset A$).

Comme on le verra dans la notation 4, cette définition peut s'écrire : $\forall x \in A,\ x \in B$.

Exemples 5

1. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.
2. On a $[0, 1[\subset [0, 1]$. □

Remarque terminologique :

• Pour indiquer qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B, on pourra aussi bien écrire que B *contient* A.

• Pour indiquer qu'un élément a appartient à un ensemble A, on pourra aussi bien écrire que A *comprend* a.

b. Connecteurs logiques

Notations 3

Les *connecteurs logiques* sont les symboles $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Leftrightarrow$.

• Le connecteur $\Rightarrow$ dénote l'implication. Si P et Q sont des énoncés mathématiques, $P \Rightarrow Q$ se lit « P implique Q » ou « si P, alors Q ».

• Le connecteur $\wedge$ dénote la conjonction (le « et »). Si P et Q sont des énoncés mathématiques, $P \wedge Q$ se lit « P et Q ».

• Le connecteur $\vee$ dénote la disjonction (le « ou »). Si P et Q sont des énoncés mathématiques, $P \vee Q$ se lit « P ou Q ».
• Le connecteur $\Leftrightarrow$ dénote l'équivalence logique. Si P et Q sont des énoncés mathématiques, $P \Leftrightarrow Q$ se lit « P équivaut à Q » ou « P si et seulement si Q ».
• $\neg$ dénote la négation. Si P est un énoncé mathématique, $\neg P$ se lit « non P ». □

Remarque 2

Les symboles $\wedge$ et $\vee$ sont surtout utilisés pour des *formules propositionnelles* (voir chapitre 2). Dans tout autre énoncé mathématique, on pourra aussi bien utiliser les mots « ou » et « et » qui sont tout aussi synthétiques et moins surchargés[4].
Par exemple, on pourra écrire « $a \in A$ ou $a \notin A$ » plutôt que « $a \in A \ \vee \ a \notin A$ ». □

Exemple 6

Les énoncés $a \notin A$ et $\neg(a \in A)$ sont identiques : ils se lisent tous deux « a n'appartient pas à A ». □

Exemples 7

1. En notant $6\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels qui sont divisibles par 6 et $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers pairs, l'énoncé de l'exemple 1.6 peut s'écrire « $n \in 6\mathbb{N} \Rightarrow n \in 2\mathbb{N}$ »
2. Avec les notations déjà introduites, l'énoncé de l'exemple 1.7 peut s'écrire ainsi : « $n \in 2\mathbb{N} \Leftrightarrow n+1 \in 2\mathbb{N}+1$ ». □

Rappelons qu'en mathématiques, le « ou » est inclusif. Par exemple, l'énoncé de l'exemple 1.4 n'exprime pas qu'il n'existe pas d'entier simultanément pair et impair, mais seulement qu'il n'existe pas d'entier qui ne soit ni pair ni impair.

Comme on va le voir en détail dans les exemples de la section 3, l'implication n'indique pas la causalité : un énoncé de la forme « P implique Q » signifie simplement qu'on peut, par une suite de déductions logiques, montrer que Q est vrai en supposant que P est vrai.

Par exemple, l'énoncé suivant est vrai :

Soient m et n sont deux entiers. Si on a $m \geqslant n$, alors mn est positif.

En effet, si m et n sont deux entiers, alors ils sont tous deux positifs, donc leur produit aussi. Mais on peut aussi prouver cela en faisant l'hypothèse $m \geqslant n$ (comme n est positif, on a $m \geqslant n \Rightarrow m \times n \geqslant n \times n = n^2 \Rightarrow mn \geqslant 0$).

4. Un symbole est dit *surchargé* lorsqu'il a plusieurs dénotations, le contexte permettant en pratique de lever les éventuelles ambiguïtés. Par exemple, on verra dans le chapitre 4 que le symbole $\wedge$ peut aussi désigner le PGCD, alors que le symbole $\vee$ peut aussi désigner le PPCM. Ces symboles sont donc surchargés.

Remarque 3

Introduisons ici un peu de terminologie. Lorsqu'une implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dira que Q *est une condition nécessaire de* P ou que P *est une condition suffisante de* Q. En effet, dire que P implique Q, c'est dire qu'il suffit d'avoir P pour observer Q, et c'est aussi dire qu'il est nécessaire d'avoir Q pour pouvoir observer P (si on n'a pas Q, on est certain de ne pas avoir P puisque P implique Q). □

On revient sur la sémantique précise des connecteurs logiques de façon plus technique dans le chapitre 2, pp. 40 et suivantes.

On introduit un peu de terminologie concernant les implications, car celle-ci sera utile dans la sous-section 4.2.

Définition 3

Étant donné une implication $P \Rightarrow Q$, on appelle

1. *contraposée de* $P \Rightarrow Q$ l'énoncé $\neg Q \Rightarrow \neg P$;
2. *réciproque de* $P \Rightarrow Q$ l'énoncé $Q \Rightarrow P$.

On notera bien qu'on ne peut donc parler de contraposée ou de réciproque d'un énoncé que lorsque cet énoncé est une implication.

Exemples 8

1. La contraposée de l'énoncé « si 6 divise l'entier n, alors n est pair » est l'énoncé « si n n'est pas pair, alors 6 ne divise pas n ». Ici l'énoncé de départ était vrai, et sa contraposée est vraie également : on verra dans la sous-section 4.2 que cela n'a rien d'un hasard.
2. La réciproque de l'énoncé « si 6 divise l'entier n, alors n est pair » est l'énoncé « si n est pair, alors 6 divise n ». Ici la réciproque n'est pas vraie, alors que l'énoncé de départ était vrai.
3. On peut s'amuser à considérer la contraposée de la réciproque de $P \Rightarrow Q$. Il s'agit de l'énoncé $\neg P \Rightarrow \neg Q$ et c'est aussi la réciproque de la contraposée de $P \Rightarrow Q$! □

c. Quantificateurs

Notations 4

Les *quantificateurs* sont les symboles $\forall$, $\exists$, $\exists!$.

• Le symbole $\forall$ dénote la quantification universelle et se lit « pour tout » ou « quel que soit ». Si $P(x)$ est un énoncé mathématique, l'énoncé $\forall x \in A,\ P(x)$ se lit « pour tout x appartenant à A, on a $P(x)$ ».

• Le symbole $\exists$ dénote la quantification existentielle et se lit « il existe ». Si $P(x)$ est un énoncé mathématique, $\exists x \in A,\ P(x)$ se lit « il existe x appartenant à A tel qu'on ait $P(x)$ ».

• Le symbole $\exists!$ se lit « il existe un unique ». Si $P(x)$ est un énoncé mathématique, $\exists! x \in A,\ P(x)$ se lit « il existe un unique x appartenant à A tel qu'on ait $P(x)$ ». □

Exemple 9

L'énoncé de l'exemple 1.4 peut s'écrire $\forall n \in \mathbb{N},\ n \in 2\mathbb{N}$ ou $n \in 2\mathbb{N}+1$.

L'énoncé de l'exemple 1.5 est aussi une quantification universelle, mais n'est pas facile à traduire en formalisme symbolique, et l'on ne gagne rien à le faire. □

Exemple 10

Considérons les trois énoncés suivants. Attention, ils ne sont pas tous les trois vrais.

i. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(2\pi x) = 0$;

ii. $\exists x \in \mathbb{R},\ \sin(2\pi x) = 0$;

iii. $\exists! x \in \mathbb{R},\ \sin(2\pi x) = 0$.

Sur cet exemple :

i. Le premier énoncé est faux : pour $x = \dfrac{1}{3}$, on a $\sin(2\pi x) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$. On renvoie le lecteur sceptique qui n'aurait pas en tête les valeurs remarquables des fonctions trigonométriques au chapitre 5.

ii. Le deuxième énoncé est vrai car pour $x = 0$ on a bien $\sin(2\pi x) = \sin(0) = 0$.

iii. Le troisième énoncé est faux car pour $x = 1$ on a $\sin(2\pi x) = \sin(2\pi) = 0$. L'égalité est donc vérifiée pour au moins deux valeurs de x : il n'y a pas unicité.

Le premier énoncé ne doit pas être confondu avec l'énoncé $\forall x \in \mathbb{Z},\ \sin(2\pi x) = 0$. Ce dernier énoncé est vrai : cela résulte de la 2π-périodicité de la fonction sinus. □

Remarque 4

On peut obtenir des énoncés mathématiques en emboîtant des quantifications, et considérer par exemple les énoncés :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ n < m$.

2. $\exists m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n < m$.

Attention, le premier énoncé est vrai (il exprime qu'étant donné un entier, on peut en trouver un autre qui soit plus grand) alors que le second est faux (il exprime qu'il existe un entier plus grand que tous les autres).

On touche du doigt dans cet exemple le fait que deux quantifications de nature différente ne commutent pas en général, ce qui est évident étant donné le sens des quantifications[5].

On peut évidemment, dans certains cas, être amené à emboîter de nombreuses quantifications. □

d. Statut des variables dans les expressions et les énoncés

Dans les exemples évoqués jusqu'à présent, on a régulièrement désigné un objet mathématique par une *variable* : une lettre, ou plus généralement un symbole, ou plus généralement une succession de symboles, pourvu qu'elle reste atomique[6]. Examinons les énoncés des exemples 1, à l'exception du 5-ième qui, encore une fois, n'est pas facile à traduire en formalisme symbolique (et l'on ne gagne rien à le faire).

1. $3 \in 2\mathbb{N}+1$;
2. $\pi \notin \mathbb{Q}$;
3. $\exp \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$;
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ n \in 2\mathbb{N}$ ou $n \in 2\mathbb{N}+1$;
6. $n \in 6\mathbb{N} \Rightarrow n \in 2\mathbb{N}$;
7. $n \in 2\mathbb{N} \Leftrightarrow n+1 \in 2\mathbb{N}+1$. □

Les énoncés 1., 2. et 3. ne comportent pas de variable : certains objets sont bien désignés par des lettres, symboles ou succession de symboles, comme 3, π et exp, mais ces symboles dénotent des *constantes mathématiques*, qui sont bien déterminées.
Les énoncés 4., 6. et 7. comportent chacun exactement une variable : dans chaque cas, cette variable est n. On verra néanmoins dans la remarque 5.2 qu'on aurait pu nommer cette variable différemment, du moins dans l'énoncé 4.

L'énoncé $\exists x \in \mathbb{R},\ \sin(2\pi x) = 0$ de l'exemple 10.ii comporte lui aussi une unique variable : cette variable est x. Les énoncés de la remarque 4 ont tous les deux deux variables : ces variables sont m et n.

Pour autant, un objet mathématique n'est pas nécessairement dénoté par une variable ou une constante mathématique, et le lecteur le sait bien : lorsqu'il lit une expression

5. On lira avec profit la remarque 6.
6. Une lettre indicée comme a_{42} par exemple.

de la forme $x^2 - 2x + 1$, ou encore[7] $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, il sait qu'il est question d'un objet mathématique, sans que cet objet soit dénoté par une variable ou une constante. Plus généralement, et en restant toujours très informel :

Définition 4 (informelle)

Une *expression mathématique* est une expression qui dénote un objet mathématique.

Exemples 11

1. On peut considérer l'expression $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
2. On peut considérer l'expression $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ qui dénote la somme $1 + 2 + \cdots + n$.

Notation 5

Une expression peut aussi dénoter un ensemble. Introduisons ici une notation importante : lorsque $P(a)$ est un énoncé mathématique pouvant éventuellement comporter a comme variable libre[8], l'expression $\{a \in A,\ P(a)\}$ désigne l'ensemble des éléments de A pour lesquels l'énoncé $P(a)$ est vrai[9]. Par exemple :

1. L'expression $\{n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k\}$ désigne l'ensemble des entiers n pour lesquels l'énoncé $\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k$ est vrai : il s'agit à l'évidence des entiers pairs. On a donc, avec les notations précédentes, $2\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k\}$.
2. L'expression $\left\{n \in \mathbb{N},\ \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}\right\}$ désigne l'ensemble des entiers n pour lesquels l'énoncé $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ est vrai. Mais cet énoncé ne dépend pas de n : il est vrai ! Il est donc vrai pour tout entier n. On a ainsi $\left\{n \in \mathbb{N},\ \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}\right\} = \mathbb{N}$.

Illustrons cette notation 5 à l'aide d'un autre exemple. On verra dans le chapitre 4 qu'un entier naturel p est *premier* si et seulement s'il est plus grand que 2 et que tout entier qui le divise est nécessairement égal à 1 ou p. En notant $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers, on peut ainsi écrire $\mathbb{P} = \left\{p \in \mathbb{N},\ p \geqslant 2 \text{ et } \left(\forall d \in \mathbb{N},\ (\exists k \in \mathbb{N},\ p = kd) \Rightarrow (d = 1 \text{ ou } d = p)\right)\right\}$. Il est d'ailleurs possible sur le même principe de trouver d'autres expressions de cette forme dénotant $\mathbb{P}$, dont certaines plus simples. On invite le lecteur à en chercher. □

À l'instar d'un énoncé, une expression mathématique peut comporter, ou pas, une ou plusieurs variables. Les expressions des exemples 11 comportent tous des variables, mais, par exemple, les expressions $\lim\limits_{+\infty} \exp$ ou $1 + 2 + \cdots + 100$ n'en comportent pas.

7. Attention à cet exemple qui n'en est un que pour certaines valeurs de f. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x)$ n'est pas une expression mathématique correcte car la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.
8. On a vu p. 2 une présentation informelle de la notion de variable libre qui sera précisée page 10.
9. On présente au chapitre 2 une notation alternative.

Il convient de distinguer deux types de variables : les variables dites *libres* et les variables dites *liées* (ou *muettes*). Donner une définition technique nous emmènerait trop loin, mais on peut énoncer :

Définition 5 (informelle)

1. Une variable figurant dans un énoncé ou une expression est dite *liée* (ou *muette*) lorsqu'elle est supportée par un ou plusieurs symboles qui l'introduisent manifestement, dits symboles *lieurs*[10].
2. Lorsqu'une variable figurant dans un énoncé ou une expression n'est introduite par aucun symbole, elle est dite *libre*.

Exemple 12

Les deux énoncés

6. $n \in 6\mathbb{N} \Rightarrow n \in 2\mathbb{N}$;

7. $n \in 2\mathbb{N} \Leftrightarrow n+1 \in 2\mathbb{N}+1$.

ont exactement une variable qui, dans les deux cas, est n. Dans les deux cas, cette variable n'est pas introduite, elle est libre. □

Exemple 13

Les quantificateurs sont des symboles lieurs. Même lorsque la variable x est libre dans l'énoncé $P(x)$, elle devient liée (par le quantificateur considéré) dans les énoncés de la forme $\forall x \in A,\ P(x)$, ou $\exists x \in A,\ P(x)$, ou $\exists! x \in A,\ P(x)$. Ainsi, dans l'énoncé

4. $\forall n \in \mathbb{N},\ n \in 2\mathbb{N}$ ou $n \in 2\mathbb{N}+1$,

la seule variable est n. Elle est liée (par le quantificateur $\forall$).
Si on réécrit cet énoncé sous la forme $\forall n \in \mathbb{N},\ (\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k)$ ou $(\exists \ell \in \mathbb{N},\ n = 2\ell+1)$, on obtient un énoncé avec trois variables n, k et ℓ, qui sont toutes les trois liées (n par le premier $\forall$, k par le premier $\exists$, ℓ par le second $\exists$). □

Exemples 14

On connaît de nombreux symboles lieurs dans les expressions. En dresser une liste exhaustive ne serait ni possible, ni souhaitable, mais on peut reprendre quelques exemples :

10. On dit aussi *symboles mutificateurs*.

1. Dans l'expression $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, il y a quatre variables a, b, f et t.
   Les variables a, b et f sont libres.
   La variable t est liée (par $\int \cdots \mathrm{d}t$).

2. Dans l'expression $\sum_{k=1}^{n} k$, il y a deux variables : n et k.
   La variable n est libre.
   La variable k est liée (par le symbole $\sum$).
   Bien sûr, si l'on considère l'énoncé [11] $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, on considère un énoncé dont les deux variables n et k sont toutes les deux liées.

3. Dans l'expression $\{n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k\}$, il y a deux variables : n et k.
   La variable k est liée (par le quantificateur $\exists$).
   La variable n est liée (par $\{\ ,\ \}$).

4. L'expression $x \mapsto x^n$, qui désigne une application, comporte deux variables x et n.
   La variable n est libre.
   La variable x est liée (par $\mapsto$). □

Remarques 5

1. Les variables liées sont finalement celles dont on pourrait se passer, quitte à rajouter des constantes, comme l'illustre l'égalité $2\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k\}$. En particulier, quand on sait réécrire un énoncé ou une expression qui comporte une variable sans utiliser cette variable dans la réécriture, c'est que cette variable était liée. Ainsi :
   a. La variable k est liée dans l'expression $\sum_{k=1}^{n} k$ car cette expression peut se réécrire $1 + 2 + \cdots + n$ et que k ne figure pas dans la seconde expression.
   b. La variable x est liée dans l'expression $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x$, car cette expression peut s'écrire $\lim_{+\infty} \exp$.

2. Lorsqu'on renomme une variable liée dans un énoncé[12] (respectivement une expression), on obtient un énoncé (respectivement une expression) que l'on peut considérer comme identique. En particulier les expressions $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{\ell=1}^{n} \ell$ sont identiques, les énoncés $\exists x \in \mathbb{R},\ \sin(2\pi x) = 0$ et $\exists y \in \mathbb{R},\ \sin(2\pi y) = 0$ sont identiques. Il y a néanmoins certains usages purement conventionnels : on utilise habituellement des majuscules pour des variables de type ensemble, les lettres x, y, t, ... pour des variables de types réel, les lettres k, m, n, p, q, r, ... pour des variables de type entier, etc. □

11. Cet énoncé est vrai ! Voir la bibliographie de Gauss dans le chapitre 8.
12. L'opération consistant à renommer les variables liées est appelée *α-conversion*.

Terminons cette section sur une mise en garde très importante :

Remarque 6

Le formalisme ne se substitue ni au sens, ni à la pensée. Lorsqu'on écrit des énoncés ou des expressions à l'aide du formalisme symbolique, on doit **toujours** être capable de les énoncer littéralement. □

3 Principes élémentaires de rédaction

La section précédente était consacrée aux énoncés mathématiques. Mais l'enjeu du discours mathématique n'est pas tant de produire des énoncés mathématiques que de les démontrer rigoureusement. Pour cela, on s'est donné un ensemble de règles qu'il convient de suivre : cela permet de s'assurer de la clarté de son raisonnement et de sa capacité à être communiqué à d'autres.

Avant d'entrer dans le cœur de cette section, les auteurs tiennent à adresser trois conseils aux étudiants devant passer des épreuves écrites d'examens ou de concours.

Conseil 1

Se conformer aux règles de rédaction prescrites. □

Conseil 2

Éviter (par ordre de gravité) :

- les assertions inutiles ;
- les assertions fausses ;
- les assertions qui n'ont pas de sens. □

Conseil 3

Identifier le niveau de détail attendu par le correcteur.

S'il est demandé de montrer un résultat complexe, il ne faut pas hésiter à utiliser sans démonstration des points de cours ou des résultats élémentaires. S'il est demandé de montrer un point de cours ou un résultat élémentaire, il faut le faire. L'expression « c'est évident » n'est jamais la réponse attendue à une question d'examen ou de concours. □

Voici maintenant un petit tour d'horizon de plusieurs schémas simples de démonstration, qu'il faut s'attacher à respecter autant que possible.

3.1 Préliminaires sur l'égalité

Une famille d'énoncés fondamentale est la famille des énoncés de la forme $e_1 = e_2$ où e_1 et e_2 sont des expressions mathématiques. Un même objet mathématique peut avoir

plusieurs écritures syntaxiquement différentes, comme $2+2=3+1$, et il convient donc d'apporter quelques précisions sur le sens de la relation d'égalité.

Définition 6

On dit que deux objets mathématiques a et b sont *égaux* lorsque, pour tout énoncé $P(x)$, on a $P(a) \Leftrightarrow P(b)$.

L'égalité entre a et b correspond donc au fait que les propriétés vérifiées par a sont précisément les mêmes que celles vérifiées par b. Il s'agit ici de la formulation moderne d'un principe dû à Gottfried Wilhelm von Leibniz[13] (1646-1716) : le *principe d'identité des indiscernables, et d'indiscernabilité des identiques*, qu'on appelera ci-dessous simplement *loi de Leibniz*.

On peut déjà, à l'aide de la loi de Leibniz, montrer que certaines égalités permettent d'en obtenir d'autres. Voyons tout d'abord trois propriétés fondamentales de l'égalité entre éléments d'un même ensemble A :

• Elle est réflexive : $\forall a \in A,\ a = a$.

En effet, pour tout énoncé $P(x)$, on a bien $P(a) \Leftrightarrow P(a)$.

• Elle est symétrique : $\forall a \in A,\ \forall b \in A,\ a = b \Rightarrow b = a$.

En effet, considérons l'énoncé $P(x)$ suivant : « $x = a$ ». Cet énoncé est vérifié par a par réflexivité, c'est-à-dire qu'on a $P(a)$. Supposons maintenant avoir $a = b$. D'après la loi de Leibniz, on a donc $P(b)$, c'est-à-dire $b = a$.

• Elle est transitive : $\forall a \in A,\ \forall b \in A,\ \forall c \in A,\ a = b$ et $b = c \Rightarrow a = c$.

Supposons en effet $a = b$ et $b = c$, et considérons l'énoncé $P(x)$ suivant : « $x = c$ ». Par hypothèse on a $P(b)$, mais comme $a = b$, on a $b = a$ par symétrie, et d'après la loi de Leibniz, on a aussi $P(a)$, c'est-à-dire $a = c$. La loi de Leibniz éclaire les manipulations algébriques que l'on peut faire sur les égalités. Sachant que a et b appartiennent à un ensemble A et que l'on a $a = b$, on peut déduire $f(a) = f(b)$ pour toute application de source A. En effet, l'énoncé $P(x)$ défini par « $f(a) = f(x)$ » est vérifié par a par réflexivité, donc par b d'après la loi de Leibniz. En particulier, dans le cas où l'ensemble A est un ensemble de nombres, par exemple l'ensemble des nombres réels, on obtient qu'on peut additionner, soustraire, ou multiplier les deux membres d'une égalité, et qu'on obtient alors une égalité encore vraie : il suffit de considérer des applications de la forme $f = t \mapsto t + s$, $f = t \mapsto t - d$, $f = t \mapsto t \times p$.

13. Le lecteur curieux d'en savoir un peu plus sur la vie de Leibniz pourra consulter sa notice biographique dans O. Rodot, *Analyse*. 2e année, De Boeck (2014), p. 178.

On prendra garde qu'on vient seulement d'exposer comment obtenir des **implications** correctes entre égalités. Considérons un réel x pour lequel on a $x = x^2$. Cette égalité donne une information sur le réel x considéré[14]. En multipliant chaque membre par 0, on obtient l'égalité $0 = 0$, qui ne donne plus aucune information sur x.

Voyons maintenant comment obtenir des équivalences entre égalités portant sur des éléments d'un ensemble de nombres, disons $\mathbb{R}$. On admettra néanmoins les règles de calcul connues du lecteur sur l'addition, la multiplication, la différence...

• on obtient un énoncé équivalent en ajoutant ou en soustrayant un même réel aux deux membres de l'égalité ;

• on obtient un énoncé équivalent en multipliant ou en divisant par un même réel **non nul** les deux membres de l'égalité ;

• on obtient un énoncé équivalent en appliquant une même application **bijective**[15] aux deux membres de l'égalité ;

• on peut appliquer une même application non bijective aux deux membres de l'égalité mais on n'obtient pas alors un énoncé nécessairement équivalent (on peut perdre de l'information) : il est alors nécessaire, pour obtenir un énoncé équivalent, de faire une conjonction avec l'information perdue.

Par exemple on a $\sqrt{x-a} = x - b \Leftrightarrow \begin{cases} x - a = (x-b)^2 \\ x \geqslant b \end{cases}$.

Cet exemple surprendra peut-être le lecteur, qui s'attendrait à ce que l'information perdue soit $x \geqslant a$. Il est vrai que cette information figure dans l'égalité $\sqrt{x-a} = x - b$, mais elle est conservée dans l'égalité $x - a = (x-b)^2$, puisque celle-ci indique que $x - a$ est un carré, et qu'un carré est toujours positif. Il est donc inutile (quoiqu'inoffensif) de la faire figurer après passage au carré. En revanche, l'information $x - b \geqslant 0$ figure **elle aussi** dans l'égalité de départ, car une racine carrée est positive par définition, mais **elle ne figure plus en général dans l'égalité** $x - a = (x-b)^2$.

Cet exemple élémentaire ne doit pas faire oublier qu'il n'est pas toujours facile d'identifier l'information perdue, et qu'il est possible que toute l'information soit perdue (il suffit d'appliquer une application constante).

Le troisième point s'obtient par définition de la bijectivité[16]. Le premier et le deuxième point s'en déduisent en prenant le cas particulier des applications $x \mapsto x + s$ et $x \mapsto x \times p$ et qui sont alors bijectives. Le quatrième point est informel.

14. Laquelle ?
15. Le lecteur pourra retrouver la définition de la bijectivité p. 73.
16. Il suffit même que f soit *injective*, voir p. 79.

3.2 Implication

Pour montrer une implication, c'est-à-dire un énoncé de la forme $P \Rightarrow Q$, le schéma de rédaction le plus simple est le suivant : on introduit l'hypothèse P, on forme une suite de déduction logiques jusqu'à obtenir Q, puis on conclut.

- Supposons P.

⋮ (enchaînement de raisonnements valides)

- On a donc Q.
- On a bien montré Q sous l'hypothèse P, c'est-à-dire $P \Rightarrow Q$.

Exemple 15

Montrons l'énoncé de l'exemple 1.6 : si 6 divise n, alors n est pair.
C'est bien un énoncé de la forme $P \Rightarrow Q$ avec P l'énoncé « 6 divise n » et Q l'énoncé « n est pair ».

On part de P	Supposons que 6 divise n.
⋮ déductions logiques ⋮	Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k$. On a donc $n = 2 \times 3 \times k$. Donc $n = 2(3k) = 2k'$ en posant $k' = 3k$, qui est bien un entier naturel.
On obtient Q	Donc n est pair.
On conclut	On a donc bien montré l'implication demandée.

Bien sûr, l'énoncé à montrer était ici évident[17]. □

3.3 Quantification universelle

Pour montrer une quantification universelle, c'est-à-dire un énoncé qui est de la forme $\forall x \in A,\ P(x)$, le schéma de rédaction le plus simple est le suivant : on introduit la variable x, on forme une suite de déductions logiques jusqu'à obtenir $P(x)$, puis on conclut.

- Soit $x \in A$.

⋮ (enchaînement de raisonnements valides)

- On a donc $P(x)$.

17. Voir conseil 3.

• Ceci étant vrai pour tout élément x de A, on a montré $\forall x \in A,\ P(x)$.

Exemple 16

Montrons $\forall x \in [0,1],\ x^2 \leqslant x$.

On introduit x	Soit $x \in [0,1]$.
⋮	
déductions logiques	En particulier, on a $x \leqslant 1$. Comme on a de plus $x \geqslant 0$, on peut multiplier l'inégalité précédente par x et cela ne change pas son sens.
⋮	
On obtient P	On trouve bien $x^2 \leqslant x$.
On conclut	Ceci étant valable pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$, on a bien montré l'énoncé demandé.

Bien sûr, l'énoncé à montrer était ici évident[18]. □

Remarques 7

Montrer une quantification universelle revient à montrer une inclusion. Supposons en effet avoir deux ensembles A et E avec $A \subset E$, et un énoncé $P(x)$. Par définition, les énoncés « $\forall x \in A,\ P(x)$ » et « $A \subset \{x \in E,\ P(x)\}$ » sont équivalents. Ainsi, par exemple, on vient de montrer qu'on a $[0,1] \subset \left\{x \in \mathbb{R},\ x^2 \leqslant x\right\}$.

Réciproquement, montrer une inclusion, c'est montrer une quantification universelle : les énoncés $A \subset B$ et $\forall x \in A,\ x \in B$ sont équivalents.

En particulier, le schéma de rédaction le plus simple pour montrer $A \subset B$ est le suivant : on introduit une variable $x \in A$, on forme une suite de déductions logiques jusqu'à obtenir $x \in B$, puis on conclut.

• Soit $x \in A$.
⋮ (enchaînement de raisonnements valides)
• On a donc $x \in B$.
• Ceci étant vrai pour tout élément x de A, on a montré $A \subset B$. □

18. Voir conseil 3.

3.4 Implication sous quantification universelle et inclusion

En synthétisant les deux sous-sections précédentes, on obtient le schéma de rédaction le plus simple pour montrer une implication sous quantification universelle, c'est-à-dire un énoncé de la forme $\forall x \in A,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$: on introduit la variable x et on suppose $P(x)$, on forme une suite de déductions logiques jusqu'à obtenir $Q(x)$, puis on conclut.

- Soit $x \in A$ et supposons $P(x)$.

⋮ (enchaînement de raisonnements valides)

- On a donc $Q(x)$.
- Ceci étant vrai pour tout élément x de A, on a montré $\forall x \in A,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$.

Exemples 17

1. On a a déjà essentiellement démontré l'énoncé « pour tout entier n, si 6 divise n alors n est pair ». Il suffit de rajouter « soit $n \in \mathbb{N}$ » au début de la démonstration de l'exemple 15.

2. Voyons un autre exemple : soit à montrer l'énoncé $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 2 \Rightarrow x^3 \geqslant 7$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$ et supposons $x \geqslant 2$.

   L'application $x \mapsto x^3$ étant croissante sur $\mathbb{R}$,
   on déduit de l'inégalité précédente l'inégalité $x^3 \geqslant 2^3$,
   c'est-à-dire $x^3 \geqslant 8$.
   Comme de plus on a $8 \geqslant 7$, on conclut :

   $x^3 \geqslant 7$.

   Ceci étant valable pour tout réel x tel que $x \geqslant 2$, on
   a bien montré l'énoncé demandé. □

Remarque 8

Montrer une implication sous quantification universelle $\forall x \in E,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$ équivaut à montrer l'inclusion $\{x \in E,\ P(x)\} \subset \{x \in E,\ Q(x)\}$.

Par exemple, en gardant les notations précédemment introduites, on a démontré dans l'exemple 17.1 l'inclusion $6\mathbb{N} \subset 2\mathbb{N}$. □

Remarque 9

En fait, les quantifications universelles « $\forall x \in A,\ P(x)$ » peuvent toujours être vues comme des implications sous quantification universelle. L'énoncé « $\forall x \in A,\ P(x)$ » signifie au fond « $\forall x,\ x \in A \Rightarrow P(x)$ ». On évitera néanmoins dans cet ouvrage de manipuler

des quantification *non bornées*, c'est-à-dire qui ne sont pas de la forme « $\forall x \in A,\ P(x)$ », qui du reste est la seule qui nous intéresse. □

3.5 Équivalence et égalité ensembliste

On a au moins deux schémas de démonstration simples pour montrer une équivalence, c'est-à-dire un énoncé de la forme $P \Leftrightarrow Q$.

La première méthode se base sur la remarque suivante : les énoncés « $P \Leftrightarrow Q$ » et « $P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P$ » sont équivalents. Ainsi, pour démontrer $P \Leftrightarrow Q$ on peut démontrer successivement $P \Rightarrow Q$ puis $Q \Rightarrow P$. On dit qu'on procède par double implication, ou encore par condition nécessaire et suffisante, en suivant la terminologie de la remarque 3.

Exemple 18

Soit à montrer l'énoncé suivant : un produit de deux entiers naturel est impair si et seulement si ces deux entiers sont impairs.

On veut montrer $\forall a \in \mathbb{N},\ \forall b \in \mathbb{N},\ ab \in 2\mathbb{N}+1 \Leftrightarrow a \in 2\mathbb{N}+1$ et $b \in 2\mathbb{N}+1$.

Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$. On veut montrer une équivalence. Procédons par double implication.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons a et b impairs.

Par définition, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $a = 2k+1$, et il existe un entier $k' \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $b = 2k'+1$.

On a donc $ab = (2k+1)(2k'+1) = 4kk'+2(k+k')+1 = 2k''+1$ en posant $k'' = 2kk'+k+k'$, qui est bien un entier naturel. Donc ab est impair.

L'implication réciproque est établie.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons ab impair.

Alors ab n'est pas pair et donc 2 ne divise pas ab. Donc 2 ne divise ni a ni b (sinon il diviserait clairement leur produit).

Donc a est impair et b est impair. L'implication directe est établie.

Conclusion : On a donc bien montré, par double implication, l'équivalence demandée. □

La seconde méthode, lorsqu'elle est possible, est de trouver une suite d'énoncés $P_0 = P$, P_1, P_2, …, $P_n = Q$ pour lesquelles chaque équivalence $P_i \Leftrightarrow P_{i+1}$ est claire (ou constitue un résultat connu). On dit qu'on procède par équivalences successives.

Exemple 19

Soit à montrer $n^2+1 = 2n \Leftrightarrow n = 1$.

On procède par équivalences successives. On a :

$$\begin{aligned} n^2+1=2n &\Leftrightarrow n^2-2n+1=0 && \text{en soustrayant } 2n \text{ à chaque membre}\\ &\Leftrightarrow (n-1)^2=0 && \text{en reconnaissant une identité remarquable}\\ &\Leftrightarrow n-1=0 && \text{car un produit est nul si et seulement si}\\ & && \text{l'un de ses facteurs est nul}\\ &\Leftrightarrow n=1 && \text{en ajoutant 1 à chaque membre.} \end{aligned}$$

D'où l'équivalence demandée. □

Remarque 10

Cet exemple montre que résoudre une équation c'est montrer une équivalence, à ceci près qu'on ne nous donne pas, en général, le membre de droite de cette équivalence.

Plus généralement, on est parfois amené à résoudre un exercice de type : « trouver tous les $x \in E$ tels que $P(x)$ » (dans le cas d'une équation, $P(x)$ est une égalité). On présente dans la sous-section 4.1 une troisième méthode adaptée à ce type de problèmes. □

Remarque 11

Montrer que deux ensembles A et B sont égaux, où A et B sont tous deux inclus dans un même ensemble E, c'est montrer une équivalence sous quantification universelle[19] : $\forall x \in E,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

En particulier, pour montrer une égalité entre ensembles $A = B$, on peut montrer successivement $A \subset B$ puis $B \subset A$. On dit alors qu'on procède par double inclusion. □

3.6 Égalité entre applications

Deux applications f et g de A dans B sont égales si et seulement si elles prennent les mêmes valeurs en chaque point : $\forall x \in A,\ f(x) = g(x)$.
Démontrer une égalité entre applications se ramène donc à démontrer une quantification universelle. On pourra se référer à l'exemple 22.

3.7 Quantification existentielle

Pour montrer un énoncé de la forme $\exists x \in A,\ P(x)$, on exhibe une valeur de x dans A et on démontre[20] que l'énoncé $P(x)$ est vrai pour cette valeur de x.

Exemple 20

Soit à montrer l'énoncé $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant n \Rightarrow x^3 \geqslant 7$.
On peut rédiger la démonstration ainsi :

19. Voir proposition 10 du chapitre 2, p. 51.
20. Correctement ! Il est donc indispensable d'avoir exhibé une valeur **convenable** de x et c'est en général là que se trouve la difficulté.

Posons $n = 2$. On a vu dans l'exemple 17.2 qu'on avait $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 2 \Rightarrow x^3 \geqslant 7$. D'où le résultat. □

3.8 Quantification existentielle unique

On a au moins deux schémas de démonstration simples pour montrer une quantification existentielle unique, c'est-à-dire un énoncé de la forme $\exists! x \in A,\ P(x)$.

La première méthode consiste à procéder par équivalences successives jusqu'à obtenir $P(x) \Leftrightarrow x = a$, pour un certain $a \in A$: assurément, il existe un unique élément égal à a.

Exemple 21

Soit $x \in \mathbb{R}$, fixé. Pour tout réel t, notons $\mathrm{sh}(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}$. Montrons qu'il existe un unique réel t tel qu'on ait $\mathrm{sh}(t) = x$.

On a : $\mathrm{sh}(t) = x$

$\Leftrightarrow$ $e^t - e^{-t} = 2x$

$\Leftrightarrow$ $T - \dfrac{1}{T} = 2x$ en notant $T = \mathrm{e}^t$

$\Leftrightarrow$ $T^2 - 2xT - 1 = 0$ puisqu'une exponentielle réelle ne s'annule jamais.

Le discriminant en T de $T^2 - 2xT - 1$ est $4(x^2+1) > 0$.

Les solutions en T de $T^2 - 2xT - 1 = 0$ sont donc $x \pm \sqrt{x^2+1}$. Les solutions telles que T soit une exponentielle sont précisément les solutions strictement positives. On a $x^2 + 1 > x^2$ donc $\sqrt{x^2+1} > |x|$ et par suite $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ et $x - \sqrt{x^2+1} < 0$. L'égalité $e^t - e^{-t} = 2x$ équivaut donc à $e^t = x + \sqrt{x^2+1}$, ce qui équivaut encore à $t = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Finalement on a $\mathrm{sh}(t) = x \Leftrightarrow t = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. Il existe donc bien un unique réel t tel que $\mathrm{sh}(t) = x$. □

Si on montre seulement que $P(x)$ implique $x = a$ pour un certain $a \in A$ au lieu d'établir l'équivalence, on montre seulement l'unicité, le travail n'est pas terminé.

La seconde méthode consiste justement à établir séparément l'existence et l'unicité. On a déjà exposé comment rédiger une preuve de l'existence. Pour établir l'unicité, on considère deux éléments x_1 et x_2 vérifiant la propriété, et on montre qu'ils sont nécessairement égaux.

Exemple 22

Il existe une unique application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour toute application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et tout réel x, on ait $\varphi\big(f(x)\big) = f\big(\varphi(x)\big) = f(x)$. En convenant de noter $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, cet énoncé peut s'écrire formellement :

$\exists! \varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi\big(f(x)\big) = f\big(\varphi(x)\big) = f(x)$. Montrons-le.

Existence : Considérons l'application identité $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$.

On a $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\big(f(x)\big) = f(x) = f\big(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x)\big)$. En particulier une telle application φ existe : il suffit de prendre $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Unicité : Soient φ_1 et φ_2 deux applications convenables. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Pour tout application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a $\varphi_1\big(f(x)\big) = f(x)$.

  En particulier pour $f = \varphi_2$ on trouve $\varphi_1\big(\varphi_2(x)\big) = \varphi_2(x)$.
- Pour tout application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a $f\big(\varphi_2(x)\big) = f(x)$.

  En particulier pour $f = \varphi_1$ on trouve $\varphi_1\big(\varphi_2(x)\big) = \varphi_1(x)$.
- En conclusion, on a $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$.

Ceci étant vrai pour tout réel x, on a finalement $\varphi_1 = \varphi_2$. D'où l'unicité de φ.

Conclusion : On a bien montré l'existence et l'unicité de φ. □

On verra dans la sous-section 4.1 une troisième méthode possible.

4 Exemples de raisonnements classiques

4.1 Analyse - Synthèse

L'analyse-synthèse est une technique démonstrative utilisée pour caractériser simplement l'ensemble des éléments vérifiant une certaine propriété, typiquement :

- la recherche de lieux géométriques[21],
- la résolution d'une équation.

Le raisonnement se fait en deux temps. Dans un premier temps (l'*analyse*), on suppose donné un élément vérifiant la propriété, puis on procède par implications successives afin de réduire le plus possible le nombre de cas à étudier. Dans un second temps (la *synthèse*), on teste les candidats obtenus et on écarte éventuellement ceux qui ne conviennent pas.

Illustrons cette méthode de raisonnement sur trois exemples.

a. Une équation dans $\mathbb{R}$

Déterminons les solutions réelles de l'équation $\sqrt{x+6} = x$.

21. Ce type de problème est de moins en moins l'objet de l'enseignement en CPGE.

Procédons par analyse-synthèse.

Analyse : Soit x une solution de l'équation. En passant au carré on obtient $x+6=x^2$, c'est-à-dire $x^2-x-6=0$. C'est un trinôme de discriminant $\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-6)=25$. Il a donc deux racines réelles $\dfrac{1-\sqrt{25}}{2}=-2$ et $\dfrac{1+\sqrt{25}}{2}=3$. On a donc deux candidats $x=-2$ et $x=3$.

Synthèse : Testons les candidats obtenus : -2 ne convient pas étant donné qu'on a $\sqrt{-2+6}=2\neq-2$; par contre 3 convient car on a bien $\sqrt{3+6}=3$.

Conclusion : L'équation a une unique solution $x=3$.

Sur cet exemple, on aurait pu raisonner par équivalences successives, en prenant garde d'effectivement raisonner par équivalences. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+6}=x &\Leftrightarrow \begin{cases} x+6=x^2 \\ x\geqslant 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-6=0 \\ x\geqslant 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+2)=0 \\ x\geqslant 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \text{ ou } x=-2 \\ x\geqslant 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x=3.
\end{aligned}$$

b. Une équation fonctionnelle

Cherchons toutes les applications $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ f(x)^3+f(y)^3=f(xy)\quad(E).$$

Procédons par analyse-synthèse.

Analyse : Soit f une fonction solution de l'équation (E). En évaluant en $y=0$ on obtient $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)^3=f(0)-f(0)^3$. En appliquant la fonction $\sqrt[3]{\ }$, on obtient ensuite $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{f(0)-f(0)^3}$. Les solutions sont donc à chercher parmi les fonctions constantes.

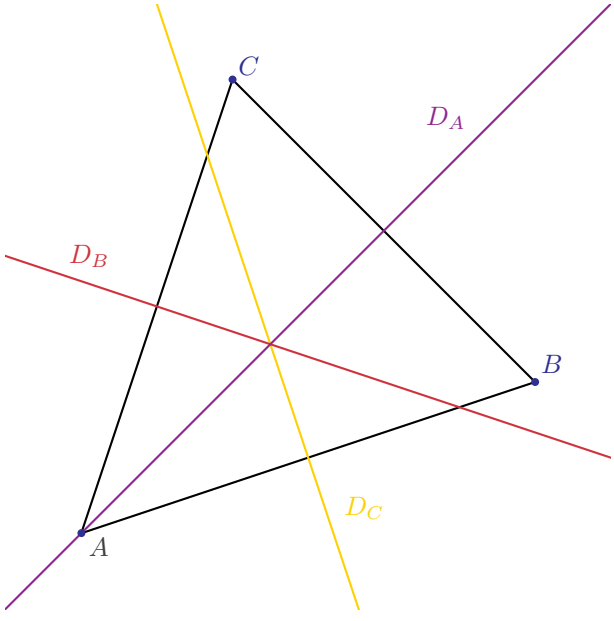
Synthèse : Testons les candidats obtenus : soit $f:t\mapsto c$ une fonction constante. En réinjectant dans (E) on trouve $c^3+c^3=c$, c'est-à-dire : $2c^3-c=0$. On résout :

$$\begin{aligned} 2c^3 - c = 0 &\Leftrightarrow c(2c^2-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow c = 0 \text{ ou } 2c^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow c = 0 \text{ ou } c^2 = \tfrac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow c = 0 \text{ ou } c = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } c = -\tfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion : L'équation fonctionnelle (E) a trois solutions : les fonctions constantes $t \mapsto 0$, $t \mapsto \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $t \mapsto -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c. Un lieu géométrique

Soit à montrer l'énoncé 5 de l'exemple 1 : « Dans tout triangle non aplati, les trois médiatrices sont concourantes. ». Soit ABC un tiangle non aplati (rappelons que cela signifie que les droites (AB), (AC) et (BC) sont bien définies et non parallèles). Notons D_A la médiatrice du segment $[BC]$, et de même D_B la médiatrice de $[AC]$ et D_C la médiatrice de $[AB]$. Il s'agit bien ici de déterminer un ensemble d'éléments vérifiant une propriété donnée : l'ensemble des points appartenant simultanément aux trois droites D_A, D_B et D_C. Simplement, on a ici une indication sur ce qu'il faut trouver : on doit obtenir un ensemble à un seul élément (cela équivaut à dire que les droites sont concourantes).



Procédons par analyse-synthèse.

Analyse : Soit M un point appartenant simultanément à D_A, D_B et D_C. En particulier il appartient à D_A et D_B. Par hypothèse, les droites (BC) et (AC) ne sont pas parallèles :

on en déduit que les droites D_A et D_B sont non parallèles, étant perpendiculaires aux précédentes. Ces droites sont donc sécantes en un point, notons-le O. Finalement, on a nécessairement $M = O$.

Synthèse : Reste à montrer que D_C passe par O. Comme O est sur D_A, on a $OB = OC$. Comme O est sur D_B, on a $OC = OA$. Finalement on a $OA = OB$ et donc O est sur D_C. L'unique candidat obtenu dans l'analyse convient donc bien.

Conclusion : On a bien montré que les médiatrices de ABC sont concourantes.

4.2 Raisonnement par contraposition

Cette technique de raisonnement s'appuie sur le théorème suivant :

Théorème 1 (Théorème de contraposition)

Si P et Q sont deux énoncés, alors les énoncés $P \Rightarrow Q$ et $\neg Q \Rightarrow \neg P$ sont équivalents.

Ce théorème sera démontré dans le chapitre 2.

Remarque 12

Le théorème 1 affirme donc qu'une implication et sa contraposée sont toujours équivalentes. En particulier, plutôt que de montrer une implication, il est loisible de montrer sa contraposée, lorsqu'on y trouve un avantage. □

En pratique on écrit :

- On veut montrer $P \Rightarrow Q$. Procédons par contraposition.
- Supposons $\neg Q$.

⋮ (enchaînement de raisonnements valides)

- On a donc $\neg P$.
- On a ainsi montré, par contraposition, $P \Rightarrow Q$.

Exemple 23

Montrons que, pour tout entier n, si n^2 est pair alors n est pair.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer que si n^2 est pair alors n est pair. Procédons par contraposition. Supposons que n ne soit pas pair. On sait qu'alors n est impair, c'est-à-dire qu'on a $\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k + 1$. On en tire $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2k' + 1$, en posant $k' = 2k^2 + 2k$, qui est un entier naturel.

Donc n^2 est impair, et on sait qu'alors n^2 n'est pas pair.

On a donc bien montré, par contraposition, l'énoncé « n^2 pair implique n pair ». □

Il ne faut pas confondre la contraposée de $P \Rightarrow Q$, qui est $\neg Q \Rightarrow \neg P$, et la réciproque de $P \Rightarrow Q$, qui, comme on l'a vu, est $Q \Rightarrow P$.

L'implication de départ et sa réciproque n'ont pas de lien logique en général.

Par exemple, les implications :

- $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$;
- si f est dérivable, alors f est continue ;

sont toujours vraies, mais leurs réciproques ne le sont pas.

4.3 Raisonnement par disjonction des cas

Ce raisonnement consiste à examiner toutes les possibilités d'une situation donnée et à conclure dans chaque cas.

On donne ici trois exemples. Dans les deux premiers exemples qui suivent, on notera $k \mid n$ pour « k divise n ».

Exemple 24

Montrons : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \mid (n^3 - n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On observe qu'on a $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$. Examinons les deux cas possibles : n est pair ou n est impair.

- Si n est pair, alors $2 \mid n$, donc $2 \mid (n-1)n(n+1)$ et donc $2 \mid (n^3 - n)$.
- Si n est impair, alors $n+1$ est pair et on a $2 \mid n+1$, donc $2 \mid (n-1)n(n+1) = (n^3-n)$.

On a bien montré dans chaque cas l'énoncé demandé. □

Exemple 25

Montrons : $\forall n \in \mathbb{N},\ 3 \mid (n^3 - n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On distingue cette fois les trois cas possibles suivants :

- Si $n = 3k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, alors $3 \mid n$, donc $3 \mid (n-1)n(n+1) = (n^3 - n)$.
- Si $n = 3k+1$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, alors $3 \mid n-1$, donc $3 \mid (n-1)n(n+1) = (n^3-n)$.
- Si $n = 3k+2$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, alors $3 \mid n+1$, donc $3 \mid (n-1)n(n+1) = (n^3-n)$.

On a bien montré dans chaque cas l'énoncé demandé. □

Remarque 13

On constate qu'on a ici utilisé le même type de disjonction, une première fois avec l'entier 2 et une seconde fois avec l'entier 3. On induit facilement le principe général, qui s'appuie sur le *théorème de division euclidienne*[22]. □

Voyons maintenant un exemple de disjonction des cas ne s'appuyant pas sur ce principe.

22. Voir les chapitres 3 et 4.

Exemple 26

Montrons qu'il existe deux irrationnels a et b tels que a^b soit un rationnel.

On distingue deux cas :

- Ou bien $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ et il suffit de poser $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$. On sait en effet que $\sqrt{2}$ est irrationnel (et on le montrera dans la sous-section suivante).
- Ou bien $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ et il suffit de poser $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$.

  En effet on a alors $a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q}$.

On a bien montré dans chaque cas l'énoncé demandé. □

4.4 Raisonnement par l'absurde

Les *Premiers analytiques* d'Aristote, troisième livre de l'Organon, forment le premier texte nous étant parvenu qui mentionne le raisonnement par l'absurde[23]. Il y est évoqué ou utilisé à maintes reprises[24]. Cette technique de raisonnement semble déjà bien établie à l'époque d'Aristote, car il l'utilise rapidement, sans au préalable en donner de définition. Il en rappelle néanmoins le principe dans le chapitre XXIII, accompagné d'un exemple[25] :

> *En effet, tous les syllogismes qui démontrent par l'absurde concluent le faux par syllogisme ; mais ils démontrent la donnée initiale par hypothèse, en prouvant qu'il y a une absurdité dans la supposition de la contradictoire. En voici un exemple : on prouve que le diamètre est incommensurable, parce que, si on le suppose commensurable, il s'ensuit que le pair est égal à l'impair. On conclut donc par syllogisme que l'impair devrait être égal au pair ; et l'on ne démontre alors que par hypothèse que le diamètre est incommensurable, parce que la contradiction de ceci conduit à une erreur évidente. En effet, raisonner par l'absurde, c'est précisément montrer que quelque impossibilité résulte de l'hypothèse d'abord admise.*

Cette technique de raisonnement s'appuie sur le théorème suivant :

Théorème 2

Soient P un énoncé et F un énoncé faux.

1. L'énoncé $\neg P \Rightarrow F$ et l'énoncé P sont équivalents.
2. L'énoncé $P \Rightarrow F$ et l'énoncé $\neg P$ sont équivalents.

23. ἡ εις ἄτοπον απαγωγή, littéralement *réduction à l'impossible*.
24. Chapitres II, V, VI, VII, X, XV, XVI, XVII...
25. Le passage qui suit est une traduction de Jules Barthélemy Saint-Hilaire, extraite du tome II de *Logique* d'Aristote, Paris, Ladrange, 1839-1844 (en 4 tomes).

Ce théorème sera démontré dans le chapitre 2. Le premier point est une formulation possible de l'axiome du *tiers exclu* [26], le second point reste vrai en logique intuitionniste[27].

Ainsi, le raisonnement par l'absurde consiste

1. ou bien à montrer P en montrant que la négation de P ne peut pas être vraie, c'est-à-dire que $\neg P$ entraîne une contradiction (un énoncé manifestement faux) ;
2. ou bien à montrer $\neg P$ en montrant que P entraîne une contradiction.

Le lecteur s'étonne peut-être des deux formulations présentées ici, qu'il estime sans doute parfaitement équivalentes. Elles le sont en effet[28] : il suffit de renommer P en $\neg P$, et d'identifier $\neg\neg P$ et P[29]. On ne fera donc plus la distinction par la suite[30].

On a en fait déjà utilisé des micro-raisonnements par l'absurde dans certains exemples qui précèdent : par exemple pour justifier que si 2 ne divise ni a ni b, alors il ne divise pas ab. Ou pour justifier que les médiatrices d'un triangle non aplati ne sont pas parallèles. Ou encore pour éclairer la terminologie « condition nécessaire ».

En général on rédige ainsi :

- On veut montrer P. Montrons-le par l'absurde.
- Supposons $\neg P$

⋮ (enchaînement de raisonnements valides)

- On obtient donc une contradiction.
- On a ainsi montré P, par l'absurde.

Exemple 27

Soit à montrer $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. On écrit :

On veut montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Montrons-le par l'absurde.

Supposons que $\sqrt{2}$ ne soit pas irrationnel. Il est donc rationnel. On peut ainsi écrire

26. Le lecteur est peut-être habitué à une autre formulation, qui est que pour tout énoncé P, l'énoncé $P \vee \neg P$ est vrai.

27. Le cadre logique utilisé habituellement en mathématique, et en particulier en CPGE, est celui de la *logique classique*. À partir du début du XX^{e} siècle, et en particulier sous l'impulsion de Luitzen Egbertus Jan Brouwer, un cadre logique concurrent, basé sur le rejet du tiers exclu, a été développé. C'est celui de la *logique intuitionniste*. Dans ce nouveau cadre, les techniques de démonstration par contraposition et par disjonction des cas ne sont plus nécessairement valides, car elles s'appuient également sur le tiers exclu. Le premier point du théorème 2 est rejeté, mais le second reste valable.

28. Dans le cadre de la logique classique.

29. L'équivalence, pour tout énoncé P, des énoncés $\neg\neg P$ et P est elle aussi une formulation possible du tiers exclu.

30. Les auteurs prennent donc l'expression dans le sens rappelé par Aristote, qui a longtemps été le seul : un raisonnement par l'absurde est un raisonnement dont la forme conduit à montrer une contradiction. Signalons toutefois qu'une tendance récente pousse certains ouvrages à réserver l'expression « raisonnement par l'absurde » aux raisonnements du premier type, au mépris de son sens historique. Le raisonnement d'Aristote cité plus haut, par exemple, est du second type.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, p et q premiers entre eux[31]. On en déduit : $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$, c'est-à-dire $2 = \frac{p^2}{q^2}$, c'est-à-dire

$$2q^2 = p^2 \quad (*).$$

Donc p^2 est pair. Donc p est pair d'après l'exemple 23, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$. D'où $p^2 = 4k^2$.

En réinjectant dans $(*)$ on trouve $2q^2 = 4k^2$ c'est-à-dire $q^2 = 2k^2$ et q^2 est pair. D'après l'exemple 23, on a donc q pair.

Ainsi p et q sont tous les deux pairs, mais c'est une contradiction avec le fait que p et q sont premiers entre eux !

On a ainsi démontré par l'absurde l'irrationalité de $\sqrt{2}$. □

4.5 Raisonnement par récurrence

Rappelons qu'on a noté $P(n)$ un énoncé pouvant comporter n comme variable libre. Pour un tel énoncé, et étant donnée une expression mathématique e, on notera $P(e)$ l'énoncé obtenu en substituant dans $P(n)$ toutes les occurrences de la variable n par l'expression e. Si par exemple $P(n)$ dénote l'énoncé $n^2 \leqslant 2^n$, l'énoncé $P(0)$ est $0^2 \leqslant 2^0$, et l'énoncé $P(n+1)$ est $(n+1)^2 \leqslant 2^{n+1}$.

Le raisonnement par récurrence est adapté pour montrer une quantification universelle sur $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une propriété portant sur tous les nombres entiers naturels. Il s'appuie sur le théorème suivant :

Théorème 3 (Théorème de récurrence)

Soit $P(n)$ un énoncé.

Si l'on a $P(0)$ et que l'on a $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$, alors on a $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$.

Ce théorème sera démontré dans le chapitre 3.

Insistons sur le sens de ce théorème. L'énoncé $P(0)$ est l'instance de $P(n)$ obtenue en particularisant n à 0 : on dira qu'il s'agit de l'énoncé obtenu « au rang 0 ». Lorsqu'il est vérifié, on dira que « $P(n)$ est initialisé ».

L'énoncé $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ exprime que **si** la propriété est vraie au rang n, **alors** elle est encore vraie au rang $n+1$. L'énoncé $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$ se lit « $P(n)$ est héréditaire ». Il indique une forme de propagation de la validité de $P(n)$.

31. La fraction $\frac{p}{q}$ est donc sous forme *irréductible*. On revient précisément sur cette notion, ainsi que sur celle de nombres premiers entre eux, dans le chapitre 4.

On peut proposer l'image suivante. Voyons l'ensemble des nombres entiers comme une tour ayant un nombre infini d'étages, et interprétons la validité de $P(n)$ comme le fait que l'étage n est accessible. L'énoncé $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ s'interprète par le fait que tout étage est accessible. Le théorème de récurrence indique que, si le rez-de-chaussée est accessible et si tout étage est muni d'un escalier vers l'étage suivant, alors tout étage est accessible. **Toutes les hypothèses sont importantes** : si le rez-de-chaussée est inaccessible, il se peut bien qu'aucun étage ne soit accessible, même si tout étage est muni d'un escalier vers l'étage suivant. Si le rez-de-chaussée est accessible, mais que les étages ne sont munis d'un escalier vers l'étage suivant qu'à partir du premier, il se peut bien que seul le rez-de-chaussée soit accessible.

L'usage veut, dans ce contexte, qu'on parle plutôt de la *propriété* $P(n)$ que de *l'énoncé* $P(n)$.

Un modèle de rédaction possible est le suivant :

- On veut montrer $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$. Montrons-le par récurrence.
- Initialisation : on veut montrer $P(0)$.

⋮ (enchaînement de raisonnements valides)

- Donc $P(0)$.
- La propriété est bien vraie au rang 0.

- Hérédité : on veut montrer $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $P(n)$.

⋮ (enchaînement de raisonnements valides)

- On a donc $P(n+1)$.
- Ceci étant vrai pour tout entier n tel que $P(n)$ est vrai, on a bien montré l'hérédité.
- Conclusion : La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 28

Montrons ici un résultat très utile, l'inégalité de Bernoulli[32] :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Soit $x \geqslant 0$. Notons $P(n)$ la propriété $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.
On veut montrer $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$. Montrons-le par récurrence.
Initialisation : Au rang $n = 0$ on a $P(0)$: $(1+x)^0 \geqslant 1 + 0x \Leftrightarrow 1 \geqslant 1$, ce qui est vrai.
On a donc bien $P(0)$.

32. Au sujet de l'histoire de cette inégalité, on pourra consulter l'ouvrage G. Costantini, *Analyse*. 1re année, De Boeck (2013), p. 75.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $P(n)$ (hypothèse de récurrence), c'est-à-dire $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

Comme x est positif, on a aussi $1+x \geqslant 0$, on peut donc multiplier l'inégalité par $1+x$ sans en changer le sens. On obtient $(1+x)^n(1+x) \geqslant (1+nx)(1+x)$, c'est-à-dire $(1+x)^{n+1} \geqslant 1+nx+x+nx^2$, c'est-à-dire $(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x+nx^2$.

Comme on a $nx^2 \geqslant 0$, on a $1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x$. On en déduit en particulier qu'on a $(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x$, c'est-à-dire que $P(n+1)$ est vraie.

La propriété est donc bien héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. □

Remarque 14

En examinant attentivement la démonstration précédente, le lecteur se convaincra sans peine que l'inégalité de Bernoulli est plus généralement vraie pour tout réel $x \geqslant -1$. □

5 Exercices corrigés

1.1 Des rédactions de démonstrations élémentaires

En suivant le protocole indiqué dans ce chapitre, effectuez les tâches suivantes.

1. Montrez qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ 1 \leqslant 1+\dfrac{1}{n} \leqslant 2$.
2. Montrez qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x \geqslant 0$.
3. Montrez qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \leqslant x \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1$.
4. Résolvez l'équation $x = \sqrt{2-x}$.

C 1.1 Des rédactions de démonstrations élémentaires

Cet exercice a pour seul objet de s'assurer que la forme d'une rédaction d'un raisonnement basique est maîtrisée.

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a alors $n \geqslant 1$.

   Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, et comme n et 1 sont strictement positifs, il vient $0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant 1$.

   Par somme, on a alors $1 \leqslant 1+\dfrac{1}{n} \leqslant 2$.

2. On peut proposer au moins deux rédactions convenables d'une solution.
   - Méthode expéditive : soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant 0$.

     Par différence, il vient $x-1 \geqslant -1$, et par croissance de la fonction cube on a

alors $(x-1)^3 \geqslant -1$.

On a donc établi $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \geqslant -1$, d'où, par somme, $x^3 - 3x^2 + 3x \geqslant 0$.

- Méthode plus traditionnelle : soit $x \in \mathbb{R}$.

  On a $x^3 - 3x^2 + 3x = x(x^2 - 3x + 3)$. Notons $P(x) = x^2 - 3x + 3$. C'est un trinôme de discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3 < 0$. Par conséquent il est toujours du signe de son coefficient dominant, c'est-à-dire strictement positif. Supposons maintenant $x \geqslant 0$. Il vient alors, par produit, $x^3 - 3x^2 + 3x = xP(x) \geqslant 0$.

3. On peut proposer au moins deux rédactions convenables d'une solution.
   - Par double implication : soit $x \in \mathbb{R}$.

     $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $x^2 \leqslant x$. Alors $x^2 - x \leqslant 0$. Or un trinôme de coefficient dominant positif est négatif entre ses racines.

     Comme les racines de $X^2 - X = X(X-1)$ sont clairement 0 et 1, il vient $0 \leqslant x \leqslant 1$.

     $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $0 \leqslant x \leqslant 1$. En particulier x est positif et, par produit, de $x \leqslant 1$ on déduit $x^2 \leqslant x$.
   - Directement : Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^2 \leqslant x \Leftrightarrow x^2 - x \leqslant 0 \Leftrightarrow x(x-1) \leqslant 0$. Un produit de réels est négatif si et seulement si ces réels sont de signes distincts. Comme $x - 1 < x$, on a donc ici $x(x-1) \leqslant 0 \Leftrightarrow x - 1 \leqslant 0 \leqslant x$. Enfin, $x - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$, et donc $x - 1 \leqslant 0 \leqslant x \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1$. D'où le résultat.

4. On peut proposer au moins deux rédactions convenables d'une solution.
   - Par analyse-synthèse :

     Analyse : Soit $x \in \mathbb{R}$ et supposons $x = \sqrt{2-x}$. On a alors, en passant au carré, $x^2 = 2 - x$, puis $x^2 + x - 2 = 0$. Calculons le discriminant Δ du trinôme $X^2 + X - 2$. On a $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$. On en déduit aisément que le trinôme a pour racines 1 et -2. Nécessairement x est à chercher parmi ces valeurs.

     Synthèse : Testons nos deux candidats.

     Si $x = -2$ alors $\sqrt{2-x} = 2 \neq -2 = x$. Le candidat -2 n'est pas solution.

     Si $x = 1$ alors $\sqrt{2-x} = 1 = x$. Le candidat 1 est bien solution.

     Conclusion : L'équation initiale a pour unique solution $x = 1$.
   - Par équivalences : soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x = \sqrt{2-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 - x \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -2 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

1.2 Inflation de démonstrations pour un énoncé évident

Pour tout entier naturel n, l'entier $5^n + 1$ est pair.

L'énoncé de la ligne précédente est vrai (et essentiellement évident).

Proposez de cet énoncé diverses démonstrations correctement rédigées :

1. par récurrence ;
2. par l'absurde ;
3. en utilisant une identité remarquable pour factoriser $5^n - 1$;
4. en utilisant une méthode distincte des trois précédentes.

C 1.2 Inflation de démonstrations pour un énoncé évident

On résout l'exercice en faisant bien remarquer que les démonstrations n'utilisant *a priori* pas de récurrence s'appuient en fait sur des résultats qui l'utilisent.

1. Montrons le résultat par récurrence. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $5^n + 1$ est pair ».
   On veut montrer $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$. Montrons-le par récurrence.
   Initialisation : L'entier $5^0 + 1 = 2$ est pair. La propriété $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(n)$. On a alors $5^n + 1$ pair. Par suite $5(5^n + 1)$ vaut cinq fois un entier pair et c'est donc un entier pair. De même $5(5^n + 1) - 4$ est la différence de deux entiers pairs et c'est donc un entier pair. On a donc montré que $5(5^n + 1) - 4 = 5^{n+1} + 5 - 4 = 5^{n+1} + 1$ est pair, c'est-à-dire que la propriété $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
   La propriété est donc bien héréditaire.
   Conclusion : La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire, donc d'après le théorème de récurrence elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrons le résultat par l'absurde.
   Supposons que $5^n + 1$ ne soit pas pair. Il est donc impair, c'est-à-dire de la forme $5^n + 1 = 2k + 1$ et par suite il vient $5^n = 2k$ et 5^n est pair. Ainsi 2 divise 5^n, et comme 2 est premier, 2 divise 5, ce qui est notoirement faux.
   Notons qu'on a utilisé ici le *lemme d'Euclide amélioré*, qu'on démontrera dans le chapitre 4, lemme 12 p. 180, et qui nécessite lui-même une récurrence.
3. Montrons le résultat en utilisant l'identité remarquable suivante :
   $$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + \cdots + x + 1).$$
   On a en particulier $5^n - 1 = (5 - 1)(5^{n-1} + \cdots + 5 + 1) = 2k$, où l'on a ici noté $k = 2(5^{n-1} + \cdots + 5 + 1)$ qui est bien entier. En conclusion $5^n - 1$ est pair et $5^n + 1 = (5^n - 1) + 2$ est une somme d'entiers pairs, c'est donc un entier pair.

Remarquons tout de même que la démonstration de l'identité remarquable utilisée nécessite une récurrence.

4. On peut plus directement écrire : $5^n = 5 \times 5 \times \cdots \times 5$ est un produit d'entiers impairs, c'est donc un entier impair. Par conséquent $5^n + 1$ est le successeur d'un entier impair et c'est un entier pair.
   Notons tout de même que la première phrase contient une récurrence cachée.
5. On verra dans le chapitre 4 la notion de *congruence*, dont les propriétés algébriques (qui s'établissent aussi par récurrence, voir p. 165) permettent d'obtenir directement le résultat de cet exercice.

1.3 Quantifications existentielles ouvertes

Répondez à la question posée en démontrant votre réponse.

1. Existe-t-il un réel x tel que $x = \sqrt{x} + 6$?
2. Existe-t-il un entier n tel que $n^2 + 11$ soit une puissance de 2 ?

C 1.3 Quantifications existentielles ouvertes

1. On peut proposer au moins deux rédactions convenables d'une solution.
   - Première méthode : on résout l'équation par analyse-synthèse.
     Analyse : Soit x un tel réel. On a alors $\sqrt{x} = x - 6$ et donc $x = (x-6)^2 = x^2 - 12x + 36$, d'où $x^2 - 13x + 36 = 0$. Trinôme de discriminant $\Delta = 25$, de racines 9 et 4. Les seuls candidats possibles sont donc 4 et 9.
     Synthèse : Testons ces valeurs : $\sqrt{4} + 6 = 8 \neq 4$ mais $\sqrt{9} + 6 = 9$.
     Conclusion : Il existe donc bien un tel réel.
   - Deuxième méthode : par contemplation[33].
     On remarque que $x = 9$ convient. Un tel réel existe donc.
2. On va montrer qu'un tel entier n'existe pas, c'est-à-dire montrer que, pour tout entier n, $n^2 + 11$ n'est pas une puissance de 2. Le point clé est que le seul nombre impair qui soit une puissance de deux est 1, et donc qu'un impair $\geqslant 3$ n'est jamais une puissance de 2. Distinguons trois cas suivant les restes de n dans la division euclidienne par 4.
   - Si $n = 4k$ ou $n = 4k + 2$, n est pair et peut donc s'écrire sous la forme $n = 2p$. On a alors $n^2 + 11 = 4p^2 + 11 = 2(2p^2 + 5) + 1 = 2\ell + 3$ en notant $\ell = 2p^2 + 4$. Par conséquent $n^2 + 11$ est un impair supérieur à 3 et ce n'est pas une puissance de 2.

33. C'est une méthode très respectable.

- Si $n = 4k+1$ on a $n^2+11 = 4(4k^2+2k+3) = 4(2\ell+3)$ en notant $\ell = 2k^2+k$. C'est une puissance de 2 si et seulement si $2\ell+3$ en est une, ce qui n'est pas possible puisque c'est un impair supérieur à 3.
- Si $n = 4k+3$ on a $n^2+11 = 4(4k^2+6k+5) = 4(2\ell+3)$ en notant $\ell = 2k^2+3k+1$. C'est une puissance de 2 si et seulement si $2\ell+3$ en est une, ce qui n'est pas possible puisque c'est un impair supérieur à 3.

1.4 Une version et un thème

On conseille d'utiliser une contraposée pour répondre à la première question et un raisonnement par l'absurde pour répondre à la seconde.

1. Reformulez l'énoncé suivant en français puis démontrez-le :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ [(\forall \varepsilon \in]0,+\infty[,\ |x| \leqslant \varepsilon) \Rightarrow x = 0]\,.$$
2. Écrivez l'énoncé suivant à l'aide du formalisme symbolique, puis démontrez-le :
« le successeur du carré d'un entier strictement positif n'est jamais le carré d'un entier naturel ».

C 1.4 Une version et un thème

1. En français : il s'agit de montrer qu'un nombre réel dont la valeur absolue est inférieure à tout réel strictement positif est nécessairement nul.
Démonstration : soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons l'implication demandée par contraposition. On veut donc montrer $x \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon \in]0,+\infty[,\ |x| > \varepsilon)$. Supposons donc $x \neq 0$. Posons $\varepsilon = \dfrac{|x|}{2}$. On a bien $\varepsilon > 0$. De plus, on a $1 > \dfrac{1}{2}$ et, comme $|x| > 0$, on obtient par produit $|x| > \varepsilon$. C'est ce qu'il fallait montrer.
2. En formalisme symbolique : l'énoncé peut s'écrire $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \forall p \in \mathbb{N},\ n^2+1 \neq p^2$.
Démonstration : montrons-le par l'absurde.
Supposons qu'il existe $n > 0$ et p tels que $n^2+1 = p^2$. On a alors $p^2 > n^2$ donc $p > n$. On a aussi $p^2 - n^2 = 1$, ce qui équivaut à $(p-n)(p+n) = 1$. Comme $p-n$ et $p+n$ sont entiers naturels, on a donc $p-n = p+n = 1$ et finalement $p = 1$, $n = 0$, contradiction avec $n > 0$.

1.5 Des récurrences

1. Montrez par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, 8 divise $9^n - 1$.
2. Montrez que la propriété « 8 divise $9^n + 1$ » est héréditaire.
Qu'illustre cet exemple ?

3. Montrez par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $n^2 < 3^n$.
   Pour cet énoncé, on pourra s'écarter légèrement du modèle de rédaction proposé.
4. Étant donné un entier n, montrez par récurrence qu'on a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2$.
   Indication : on a $2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$.

C 1.5 Des récurrences

Notons comme on l'a déjà fait précédemment $k \mid n$ pour « k divise n ».

1. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $8 \mid 9^n - 1$ ». On veut montrer $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$. Montrons-le par récurrence.
   Initialisation : On a $9^0 - 1 = 0 = 8 \times 0$. La propriété $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(n)$. Il existe alors un entier k tel que $9^n - 1 = 8k$. On peut alors écrire $9^n = 8k + 1$. Ainsi l'égalité $9^{n+1} - 1 = 9 \times 9^n - 1$ devient $9^{n+1} - 1 = 9 \times (8k + 1) - 1 = 8(9k + 1)$ et $9^{n+1} - 1$ est bien un multiple de 8.
   La propriété est donc bien héréditaire.
   Conclusion : La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire, donc d'après le théorème de récurrence elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
   Remarque : cette propriété résulte de l'identité $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + \cdots + x + 1)$ *revue plus haut. Mais puisqu'on nous demandait de l'établir par récurrence...*

2. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $8 \mid 9^n + 1$ ». On veut montrer que cette propriété est héréditaire. Recyclons notre travail précédent. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(n)$. Il existe alors un entier k tel que $9^n + 1 = 8k$. On peut alors écrire $9^n = 8k - 1$ et $9^{n+1} + 1 = 9 \times 9^n + 1 = 9 \times (8k - 1) + 1 = 8(9k - 1)$ et c'est bien un multiple de 8.
   La propriété est donc bien héréditaire.
   Cet exemple illustre la nécessité de l'hypothèse d'initialisation dans le théorème de récurrence. Le lecteur se convaincra sans peine que, bien que la propriété soit héréditaire, elle n'est vraie pour aucun entier n !

3. Notons $\mathcal{P}(n)$:« $n^2 < 3^n$ ». On veut : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$. Montrons-le par récurrence.
   On prend ici l'initiative d'initialiser sur plusieurs rangs, les rangs 0 et 1 et 2. Voici pourquoi : tous calculs faits, on a réalisé que l'implication $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n + 1)$ était difficile à montrer pour tout entier n, mais très facile à obtenir à partir du rang 2. Reprenons l'image donnée dans le chapitre : on a ici une tour pour laquelle on voit facilement qu'il existe un escalier entre tout étage n et l'étage suivant $n + 1$, mais seulement à partir du deuxième étage. Pour voir que tout étage est accessible, il ne suffit donc pas de voir que le rez-de-chaussée est accessible, mais bien que le

rez-de-chaussée, le premier et le deuxième sont accessibles[34].

Initialisation : $0^2 = 0 < 3^0 = 1$. La propriété $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie. De même $1^2 = 1 < 3^1 = 3$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie et $2^2 = 4 < 3^2 = 9$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Hérédité (à partir du rang 2) : Soit $n \geqslant 2$ et supposons $\mathcal{P}(n)$.

On a $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, or on a $1 < n^2$ et $2n \leqslant n^2$ (car $n \geqslant 2$).

Ainsi, par somme, il vient $(n+1)^2 < n^2 + n^2 + n^2 = 3n^2$. Enfin, par hypothèse de récurrence, on a $n^2 < 3^n$ et donc $3n^2 < 3 \times 3^n = 3^{n+1}$, et finalement $(n+1)^2 < 3^{n+1}$.

La propriété est donc bien héréditaire à partir du rang 2.

Conclusion : La propriété est vraie aux rangs 0, 1 et 2, et elle est héréditaire à partir du rang 2, par théorème de récurrence elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : même s'il est autrement plus difficile de montrer que la propriété est héréditaire tout court, c'est-à-dire à partir du rang 0, c'est tout à fait possible.

4. C'est clair pour $n = 0$, car la somme est alors nulle[35].

Reste à montrer : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2$.

On commence par montrer l'énoncé suivant, bien plus simple à établir (!) : pour tout entier $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$ ».

On veut montrer $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \mathcal{P}(n)$. Montrons-le par récurrence[36].

Initialisation : On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = 1 \leqslant 1 = 2 - \frac{1}{1}$. La propriété $\mathcal{P}(1)$ est donc vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(n)$.

On a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$ et donc :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Or on a : $2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{(n+1)^2} = 2 + \dfrac{n - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = 2 + \dfrac{-n^2 - n - 1}{n(n+1)^2}$,

et de plus : $2 + \dfrac{-n^2 - n - 1}{n(n+1)^2} \leqslant 2 + \dfrac{-n^2 - n}{n(n+1)^2} = 2 - \dfrac{n(n+1)}{n(n+1)^2} = 2 - \dfrac{1}{n+1}$,

donc on en déduit : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}$, ce qui signifie que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

La propriété est donc bien héréditaire.

Conclusion : La propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang 1, et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

34. On revient sur cette variante de la récurrence, et bien d'autres, au chapitre 3.
35. Si le lecteur n'en est pas convaincu, on l'invite à se reporter à la définition 1 du chapitre 3, p. 142.
36. On utilise là encore une variante : on initialise à 1 et on montre l'hérédité à partir du rang 1, ce qui établit que la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$. Voir théorème 3 du chapitre 3, p. 131.

On vient de voir que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$ et comme, pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$, on en déduit, pour tout entier $n \geqslant 1$ (et donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ vu le premier cas traité), l'inégalité demandée.

1.6 Une équation fonctionnelle

Déterminer toutes les fonctions dérivables f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

C 1.6 Une équation fonctionnelle

Analyse : Soit f une telle fonction. Soit $y \in \mathbb{R}$. L'hypothèse indique que les fonctions $x \mapsto f(x+y)$ et $x \mapsto f(x) + f(y)$ sont égales. Ces fonctions sont dérivables puisque la fonction f l'est. En dérivant, on trouve que les fonctions $x \mapsto f'(x+y)$ et $x \mapsto f'(x)$ sont égales. En évaluant en $x = 0$ on trouve $f'(y) = f'(0)$. Ceci étant vrai pour tout réel y, la fonction f' est constante sur $\mathbb{R}$, et la fonction f est affine sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il existe a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$.

Synthèse : Réinjectons : l'équation devient $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ a(x+y)+b = ax+b+ay+b$, ce qui équivaut à $b = 0$. Par conséquent, parmi nos candidates (les fonctions affines), les solutions sont celles pour lesquelles on a $b = 0$ (les fonctions linéaires).

Conclusion : L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions linéaires, c'est-à-dire de la forme $f_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax, \end{array} \right.$ $a \in \mathbb{R}$.

1.7 Problème de fin de chapitre

Le présent problème se propose de déterminer ce qu'on appelle le *centre* de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, où l'on convient de noter $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Étant données deux applications f et g de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on note[37] $f \circ g$ l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(g(t)). \end{array} \right.$ On dit que f *commute* avec g lorsqu'on a : $f \circ g = g \circ f$.
   a. Pour $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, réécrire $f \circ g = g \circ f$ à l'aide d'une quantification universelle.
   b. Donner deux fonctions $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telles que f ne commute pas avec g.
   c. Que peut-on dire de l'énoncé $\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \forall g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f \circ g = g \circ f$?
2. On note $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ l'application identité : $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x. \end{array} \right.$
   a. Montrer que $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ commute avec toutes les applications $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

b. Que peut-on dire de l'énoncé suivant : $\exists f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \forall g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f \circ g = g \circ f$?

3. Soit $h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui commute avec toutes les applications $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

   a. Montrer que $h = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde.*

   b. Que peut-on dire de l'énoncé suivant : $\exists! f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \forall g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f \circ g = g \circ f$?

C 1.7 Problème de fin de chapitre

1. a. Cette question est importante. L'égalité de deux applications de même domaine de définition signifie que ces deux applications prennent les mêmes valeurs en tout point. Ainsi, $f \circ g = g \circ f$ peut se réécrire : $\forall x \in \mathbb{R},\ f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big)$.

   b. Considérons $f : x \mapsto x+1$ et $g : x \mapsto x^2$. On a alors $f \circ g : x \mapsto x^2+1$ et $g \circ f : x \mapsto (x+1)^2 = x^2+2x+1$. Montrons qu'on a $f \circ g \neq g \circ f$. Par définition de l'égalité cela revient à montrer qu'il existe un réel x tel que $x^2+1 \neq x^2+2x+1$. Un tel réel existe bien, puisque par exemple $x = 1$ convient ($2 \neq 4$).

   c. Cet énoncé indique que deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ commutent toujours. Il est faux puisqu'on vient d'exhiber deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ne commutant pas.

2. a. Il s'agit de montrer : $\forall g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ g \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ g$. Soit donc $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $(g \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}})(x) = g\big(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x)\big) = g(x)$ et $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ g)(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\big(g(x)\big) = g(x)$. Par définition de l'égalité des applications, on a donc $g \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}} = g$ et $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ g = g$, et par suite $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ g = g \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

   b. Cet énoncé indique qu'il existe une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui commute avec toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Il est vrai puisque l'identité convient.

3. a. Supposons $h \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Cela signifie donc qu'il existe un réel x_1 tel que $h(x_1) \neq x_1$.
   Considérons maintenant l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x_1 & \text{si } x = h(x_1) \\ x & \text{sinon.} \end{array} \right. \end{array} \right.$
   On a alors $h\big(f(x_1)\big) = h(x_1)$ et $f\big(h(x_1)\big) = x_1$ et donc $(h \circ f)(x_1) \neq (f \circ h)(x_1)$, ce qui est en contradiction avec le fait que h commute avec toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a donc bien montré, par l'absurde, que h était nécessairement l'application identité.

   b. Cet énoncé indique qu'il existe une unique application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ commutant avec toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Il est vrai puisqu'on a vu, d'une part, qu'il existait bien une telle application, l'identité, et qu'on a aussi vu, d'autre part, qu'il n'en existait pas d'autres.

37. Pour la composition des fonctions, vue en Terminale S sur plusieurs exemples, on pourra consulter les définitions 13 et 14 du chapitre 2, pp. 69 et suivantes.

CHAPITRE 2

Logique, ensembles, applications, relations

1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les objets mathématiques les plus élémentaires, qui seront ensuite utilisés dans l'ensemble de l'ouvrage. Concernant le contexte historique de l'émergence du formalisme dont traite ce chapitre, les auteurs conseillent au lecteur désireux d'en apprendre davantage la lecture de l'ouvrage de Jean van Heijenoort *From Frege to Godel : A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*[1]. On se contentera ici de contextualiser quelques résultats.

Décrire les techniques élémentaires de dénombrement ne fait pas partie des enjeux de ce chapitre. On donnera néanmoins les résultats de dénombrement dont on verra ensuite un analogue dans le contexte des espaces vectoriels. Il s'agit des propositions 17, 20, 21 et 29.

2 Logique

2.1 Logique propositionnelle

Dans cette sous-section, on s'intéresse aux *formules propositionnelles*, c'est-à-dire aux énoncés qui s'obtiennent sans quantifications, uniquement à l'aide des connecteurs logiques et de *variables propositionnelles* P, Q, R, S, ... dénotant des énoncés mathéma-

1. Harvard University Press, 1967.

tiques. Ainsi :

$$(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$$

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

$$\dots$$

Remarque 1

Bien sûr, en mathématiques, les énoncés que l'on manipule ne sont quasiment jamais des formules propositionnelles. L'intérêt de cette étude préliminaire est que si une formule propositionnelle est vraie, alors tout énoncé obtenu en substituant les variables propositionnelles par des énoncés mathématiques sera également vrai. On l'utilise en particulier dans la sous-section 3.5. □

a. Tables de vérité

La notion de *table de vérité* d'une formule propositionnelle ne figure pas explicitement au programme en CPGE, mais il est difficile de démontrer rigoureusement les propriétés des opérations ensemblistes en s'en passant, et elle est un guide utile pour déterminer la validité de certains énoncés de longueur conséquente, qu'on peut être amené à rencontrer aussi bien en algèbre qu'en analyse. On la présente donc rapidement.

La valeur de vérité d'une formule propositionnelle ayant n variables propositionnelles (nécessairement libres) dépend des 2^n distributions possibles des valeurs de vérité de ses n variables. Par exemple, l'énoncé $P \vee Q \vee R$ est faux si P, Q et R sont faux, mais vrai dans les 7 autres cas possibles.

Étant donnée une formule propositionnelle $\mathcal{F}$, on appelle *table de vérité de* $\mathcal{F}$ un tableau donnant toutes les valeurs de vérité possibles de la formule en fonction des valeurs de vérité de ses variables.

Déterminons les tables de vérité de $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$ et $\neg P$. Revenons au sens de ces connecteurs :

1. Un énoncé de la forme $P \vee Q$ est vrai si l'un, ou l'autre, ou les deux des énoncés P et Q est vrai, et faux uniquement si P et Q sont faux.
2. Un énoncé de la forme $P \wedge Q$ est vrai si les deux énoncés P et Q sont vrais, et faux dès que l'un des deux est faux.
3. Un énoncé de la forme $P \Rightarrow Q$ signifie que de P, l'on peut déduire Q. C'est clairement vrai si Q est vrai : en effet, si Q est vrai, alors il peut se déduire sans hypothèse

particulière, et donc *a fortiori* se déduire de l'énoncé P. Si par contre Q est faux, il ne sera pas possible de le déduire d'un énoncé vrai, mais on pourra le déduire d'un autre énoncé faux.

4. Un énoncé de la forme $P \Leftrightarrow Q$ est vrai si et seulement si P et Q ont même valeur de vérité.
5. Enfin, un énoncé de la forme $\neg P$ est faux lorsque P est vrai, et vrai lorsque P est faux.

On obtient donc les tables suivantes. On note v l'énoncé vrai et f l'énoncé faux.

P	Q	$P \wedge Q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

P	Q	$P \vee Q$
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

P	Q	$P \Rightarrow Q$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	v

P	$\neg P$
v	f
f	v

Bonne nouvelle : maintenant qu'on connaît les tables de vérité des formules précédentes, on peut en déduire les tables de vérité de **toutes** les formules propositionnelles, puisqu'une formule propositionnelle s'écrit toujours à l'aide des seuls connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ et $\neg$. Reprenons le premier exemple donné en introduction.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$
v	v	v	v	v
v	f	f	v	v
f	v	f	v	v
f	f	f	f	v

Les troisième et quatrième colonne correspondent aux tables de $\wedge$ et de $\vee$. La cinquième colonne s'obtient par lecture de la table de $\Rightarrow$ appliquée aux troisième et quatrième colonnes. Bien évidemment un traitement sémantique est aussi possible : en effet, l'énoncé $(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$ exprime que, si l'on suppose $P \wedge Q$, on peut montrer $P \vee Q$, ou dit encore autrement, que si l'on suppose P et que l'on suppose Q, on peut montrer P ou on peut montrer Q ; cet énoncé est donc toujours vrai[2], ce qui donne bien la table obtenue. Les deux autres exemples de l'introduction se traitent de la même façon :

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P \wedge \neg Q)$	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
v	v	v	f	f	f	v
v	f	f	f	v	f	f
f	v	f	v	f	f	f
f	f	f	v	v	v	v

2. Rappelons que le « ou » est un ou inclusif.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
v	v	v	v	v
v	f	f	v	f
f	v	v	f	f
f	f	v	v	v

Bien sûr, ces exemples étaient des formules propositionnelles n'ayant que deux variables, ce qui donnait lieu à des tables de vérité de taille raisonnable. Pour une formule propositionnelle ayant n variables, la table de vérité a 2^n lignes et n'est plus possible à obtenir à la main pour $n \geqslant 5$. Le procédé présenté ici étant toutefois complètement automatisable, cette question est adaptée à un traitement informatique[3].

b. Égalité sémantique

On considère que deux formules propositionnelles sont *égales* lorsqu'elles ont la même table de vérité[4].

Exemples 1

1. On vient de voir que la formule $(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$ est l'énoncé vrai, puisqu'elle a la même table de vérité. Bien évidemment, une autre façon de le voir est d'examiner le contenu sémantique de cet énoncé, comme on l'a détaillé précédemment.
2. On vient de voir que les formules $P \Leftrightarrow Q$, $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ et $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ avaient les mêmes tables de vérité.
   On peut donc écrire $P \Leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.
3. Dressons la table de vérité de $(\neg P) \vee Q$.

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
v	v	f	v
v	f	f	f
f	v	v	v
f	f	v	v

3. Le problème (dit *problème SAT*) de satisfaisabilité d'une formule propositionelle, consistant à déterminer si une formule propositionnelle est (ou n'est pas) toujours fausse, est néanmoins un problème NP-complet. On ne connaît pas d'algorithme permettant de répondre à la question en temps polynomial par rapport à la taille de la formule.

4. Il n'y a ainsi, par exemple, qu'un seul énoncé vrai et qu'un seul énoncé faux. Il semble peut-être surprenant au lecteur d'identifier tous les énoncés vrais : c'est qu'il y a ici deux niveaux de discours, un premier niveau, syntaxique, où on les distingue, et un second niveau, sémantique, où on les identifie. Ce double niveau de discours se rencontre plus généralement avec tous les énoncés et toutes les expressions. Par exemple, les expressions $2 + 2$ et $4 + 0$ sont égales bien qu'elles se distinguent l'une de l'autre syntaxiquement.

On constate que $(\neg P) \vee Q$ et $P \Rightarrow Q$ ont la même table de vérité. Il s'agit donc du même énoncé[5] ! □

Application 1

On a vu que la disjonction était un « ou inclusif », et qu'on n'avait pas de connecteur pour le « ou exclusif ». Si un tel connecteur existait, on sait quelle table de vérité il aurait : « P ou exclusif Q » serait faux lorsque les deux variables P et Q prennent la même valeur de vérité, et vrai lorsqu'ils prennent deux valeurs de vérité différentes. Or on sait former de nombreuses formules propositionnelles ayant cette table de vérité, par exemple $(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$ ou encore $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ ou encore $\neg(P \Leftrightarrow Q)$, etc. Toutes ces expressions sont donc autant de formules égales à « P ou exclusif Q ». □

Remarque 2

Le connecteur logique $\Leftrightarrow$ permet, à partir de deux formules propositionnelles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, de former une nouvelle formule propositionnelle $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}$. Il convient de bien le distinguer de l'égalité $=$ qui est une relation sur l'ensemble des formules propositionnelles : l'énoncé $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ n'est pas une formule propositionnelle, il appartient au métadiscours.

On a néanmoins un lien très fort entre les deux, permettant d'internaliser le métadiscours : pour toute formule propositionnelle $\mathcal{F}$ et toute formule propositionnelle $\mathcal{G}$ on a $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ si et seulement si $(\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}) = v$. □

Démonstration

L'égalité $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ signifie que les valeurs de vérité prises par $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont les mêmes. L'égalité $(\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}) = v$ signifie que la formule propositionnelle $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}$ ne prend qu'une seule valeur de vérité v, mais d'après la table de vérité de $\Leftrightarrow$, cela signifie que les valeurs de vérité prises par $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont les mêmes. □

À l'aide des tables de vérité, on peut aisément démontrer le théorème de contraposition et le théorème fondateur du raisonnement par l'absurde. Les formulations de ces théorèmes données ici diffèrent légèrement des formulations données dans le chapitre 1, car on se limite ici aux formules propositionnelles, mais en utilisant la remarque 1 p. 40, on obtient les formulations du chapitre 1.

Théorème 1 (Théorème de contraposition)

On a $(P \Rightarrow Q) = (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

5. Un exemple connu pour illustrer l'identité de ces deux formules est la phrase « Vous n'avancez pas ou je tire », qui a clairement le même contenu sémantique que « Si vous avancez, je tire ».

Démonstration

Il suffit de dresser les deux tables de vérité et de constater leur identité.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
v	v	v	f	f	v
v	f	f	v	f	f
f	v	v	f	v	v
f	f	v	v	v	v

Les tables sont bien identiques. □

Théorème 2

1. On a $\big(\neg P \Rightarrow f\big) = P$.
2. On a $\big(P \Rightarrow f\big) = \neg P$.

Démonstration

Il suffit de dresser les deux tables de vérité et de constater leur identité. On le fait seulement pour le premier point, le second étant analogue.

P	$\neg P$	f	$\neg P \Rightarrow f$
v	f	f	v
f	v	f	f

Les tables sont bien identiques. □

Les propositions suivantes peuvent s'obtenir en dressant des tables de vérité. On invite le lecteur à en dresser quelques-unes.

Proposition 1 (Propriétés de la conjonction et de la disjonction)

1. $P \wedge P = P$;
2. $P \vee P = P$;
3. $P \wedge Q = Q \wedge P$;
4. $P \vee Q = Q \vee P$;
5. $P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R$;
6. $P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R$.

Proposition 2 (Distributivités des connecteurs logiques)

1. $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$;
2. $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

c. Négation d'une formule propositionnelle

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au problème de la *simplification* d'une formule propositionnelle obtenue à l'aide d'une négation. La technique exposée ici va s'appuyer sur les deux propositions suivantes, qui comme d'habitude peuvent s'obtenir en dressant des tables de vérité.

Proposition 3 (Involutivité de la négation)

On a : $\neg(\neg P) = P$.

Proposition 4 (Lois de De Morgan propositionnelles)

1. $\neg(P \vee Q) = (\neg P) \wedge (\neg Q)$;
2. $\neg(P \wedge Q) = (\neg P) \vee (\neg Q)$.

Proposition 5

1. $P \vee (\neg P) = v$;
2. $P \wedge (\neg P) = f$.

Au risque de nous répéter, rappelons encore une fois la remarque 1 : les théorèmes 1 et 2, et les propositions 1, 2, 3, 4 et 5 restent vraies en remplaçant les variables propositionnelles par des énoncés mathématiques, en particulier des formules propositionnelles.

Ces propositions permettent donc de simplifier des formules propositionnelles, en particulier les formules obtenues à l'aide d'une négation.

Exemple 2

Soit à nier la formule propositionnelle $\big(\neg P\big) \vee \big(Q \wedge (\neg R)\big)$.

On a : $\neg\Big(\big(\neg P\big) \vee \big(Q \wedge (\neg R)\big)\Big)$
$= \quad \Big(\neg\big(\neg P\big)\Big) \wedge \Big(\neg\big(Q \wedge (\neg R)\big)\Big)$
$= \quad P \wedge \Big(\big(\neg Q\big) \vee \big(\neg(\neg R)\big)\Big)$
$= \quad P \wedge \Big(\big(\neg Q\big) \vee R\Big)$

On pourrait procéder de la même façon pour une formule propositionnelle comportant des $\Rightarrow$ et des $\Leftrightarrow$, quitte à utiliser les réécritures des exemples 1. □

Application 2

On a : $\neg\big(P \Rightarrow Q\big)$
$= \quad \neg\big((\neg P) \vee Q\big)$
$= \quad \Big(\big(\neg(\neg P)\big) \wedge \big(\neg Q\big)\Big)$
$= \quad P \wedge (\neg Q).$

En particulier, montrer qu'une implication $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ est fausse, c'est montrer que $\mathcal{F}$ est vraie et $\mathcal{G}$ fausse, ce qui ressort d'ailleurs de la table de vérité de l'implication. □

2.2 Énoncés quantifiés

Dans cette sous-section, on présente brièvement quelques propriétés des énoncés mathématiques que l'on est amené à manipuler en pratique, c'est-à-dire ceux qui comportent des quantifications, et des variables libres dénotant d'autres objets mathématiques que les énoncés. Il n'est pas question ici de présenter l'ensemble des règles logiques formelles portant sur ces énoncés, mais on en donnera quelques-unes.

a. Remarques immédiates

Définissons l'égalité des énoncés mathématiques de la même façon que pour les formules propositionnelles : deux énoncés mathématiques seront dit *égaux* lorsqu'ils ont la même valeur de vérité quels que soient les valeurs de leurs variables. Ainsi les énoncés :

- « $(\exists k \in \mathbb{N},\ x = k)$ ou $(\exists \ell \in \mathbb{N},\ x = -\ell)$ »,
- « $\exists n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N}, x = n - m$ »,
- et « $x \in \mathbb{Z}$ »

sont égaux.

Cette définition est informelle mais donner une définition formelle nous emmènerait beaucoup trop loin.

Rappelons ici sous forme formelle la technique de démonstration d'une quantification existentielle vue dans le chapitre 1.

Proposition 6

Soit $P(x)$ un énoncé. Si $a \in E$ et que $P(a)$ est vrai, alors $\exists x \in E,\ P(x)$ est vrai.

Cette proposition est la traduction directe du sens du quantificateur $\exists$.

Pour les quantifications universelles, on pourra utiliser la proposition suivante :

Proposition 7

Si E et F sont deux ensembles tels qu'on ait $F \subset E$, et si on a $\big(\forall x \in E,\ P(x)\big)$, alors on a $\big(\forall y \in F,\ P(y)\big)$.

Démonstration

Supposons avoir $\big(\forall x \in E,\ P(x)\big)$.

Soit $x \in F$. Comme on a $F \subset E$ on a en particulier $x \in E$, et donc, par hypothèse, $P(x)$.

Ceci étant vrai pour tout élément x appartenant à F, on a bien montré $\big(\forall x \in F,\ P(x)\big)$, c'est-à-dire $\big(\forall y \in F,\ P(y)\big)$. □

Terminons sur une propriété qu'il est important de bien comprendre :

Proposition 8

Toute quantification universelle sur l'ensemble vide[6] est vraie : pour tout énoncé $P(x)$ on a $\forall x \in \emptyset,\ P(x)$.

Démonstration

Il faut comprendre que la notation $\forall x \in A,\ P(x)$ est une abréviation pour $\forall x, x \in A \Rightarrow P(x)$. Dans le cas particulier où l'on a $A = \emptyset$, l'énoncé $x \in A$ est faux indépendamment de x, et l'énoncé $x \in A \Rightarrow P(x)$ est donc une implication dont la prémisse est fausse, qui est donc vraie. Ceci étant établi indépendamment de x, on a bien $\forall x \in \emptyset,\ P(x)$. □

b. Émulation d'un $\exists!$.

Le lecteur s'interroge peut-être sur le fait qu'on lui ait présenté un quantificateur pour exprimer le fait qu'il existe au moins un élément vérifiant une propriété donnée (le quantificateur $\exists$) et un quantificateur pour exprimer le fait qu'il existe exactement un élément

6. L'ensemble vide $\emptyset$ est l'unique ensemble ne comprenant aucun élément. On a ainsi, pour tout objet mathématique x, $x \notin \emptyset$.

vérifiant une propriété donnée (le quantificateur $\exists!$), mais pas de quantificateur pour exprimer le fait qu'il existe **au plus** un élément vérifiant une propriété donnée.

Cela est dû au fait qu'on n'a nul besoin d'un tel quantificateur : pour tout ensemble A et tout énoncé $P(x)$, dire qu'il existe au plus un élément de A vérifiant $P(x)$, c'est dire que deux éléments de A vérifiant $P(x)$ sont nécessairement égaux.

Ainsi, l'énoncé « il existe au plus un élément de A tel que $P(x)$ » peut s'écrire sous la forme « $\forall a_1 \in A,\ \forall a_2 \in A,\ \big(P(a_1) \wedge P(a_2)\big) \Rightarrow a_1 = a_2$ ». Cela éclaire la technique de démonstration d'une unicité vue au chapitre 1.

Allons un peu plus loin. Pour tout ensemble A et tout énoncé $P(x)$, dire qu'il existe exactement un élément de A vérifiant $P(x)$, c'est dire que, d'une part, il en existe au moins un, et que, d'autre part, il en existe au plus un. **On en déduit qu'on peut émuler le quantificateur $\exists!$ à l'aide des seuls quantificateurs $\exists$ et $\forall$.**
Plus précisément, l'énoncé $\Big(\exists! x \in A,\ P(x)\Big)$ est l'énoncé :
$\Big(\big(\exists x \in A,\ P(x)\big)$ et $\big(\forall a_1 \in A,\ \forall a_2 \in A,\ (P(a_1) \wedge P(a_2)) \Rightarrow a_1 = a_2\big)\Big)$.

c. Négation d'un énoncé quantifié

On a déjà exposé comment nier une formule propositionnelle. Pour savoir nier un énoncé quantifié, il suffit donc de savoir comment nier une quantification existentielle et une quantification universelle (le quantificateur $\exists!$ pouvant être émulé à l'aide des deux précédents). On utilise les deux règles suivantes, qui résultent directement du sens des quantificateurs[7] :

Proposition 9

Soit $P(x)$ un énoncé et A un ensemble. On a :

1. $\neg\big(\forall x \in A,\ P(x)\big) = \exists x \in A,\ \big(\neg P(x)\big)$ et
2. $\neg\big(\exists x \in A,\ P(x)\big) = \forall x \in A,\ \big(\neg P(x)\big)$.

Exemples 3 Rappelons qu'on a $\neg(P \Rightarrow Q) = P \wedge \neg Q$.

1. Reprenons l'exercice 1.4.1 du chapitre 1, p. 34. On a été amené à nier l'énoncé $\forall x \in \mathbb{R},\ \big((\forall \varepsilon \in]0, +\infty[,\ |x| \leqslant \varepsilon) \Rightarrow x = 0\big)$. En utilisant la règle précédente, et

7. S'il n'est pas vrai que tout élément de A vérifie une propriété donnée, c'est qu'il existe un élément de A ne vérifiant pas cette propriété. De même, s'il n'est pas vrai qu'il existe un élément de A vérifiant une propriété donnée, c'est qu'aucun élément de A ne vérifie cette propriété, c'est-à-dire que tout élément de A vérifie la négation de la propriété.

les règles déjà vues pour les connecteurs, on trouve bien que sa négation est l'énoncé $\exists x \in \mathbb{R},\ \neg\big((\forall \varepsilon \in]0,+\infty[,\ |x| \leqslant \varepsilon) \Rightarrow x = 0\big)$ c'est-à-dire, d'après le rappel, l'énoncé $\exists x \in \mathbb{R},\ \big((\forall \varepsilon \in]0,+\infty[,\ |x| \leqslant \varepsilon) \wedge x \neq 0\big)$.

2. Soit à nier l'énoncé[8] $\forall \varepsilon \in]0,+\infty[,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$.
   En appliquant les règles précédentes et le rappel, on trouve que cette négation est $\exists \varepsilon \in]0,+\infty[,\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0$ et $|u_n - \ell| \geqslant \varepsilon$. □

3 Ensembles

3.1 Le paradoxe de Russell

Parler ici de théorie des ensembles est exclu. On aimerait néanmoins que le lecteur comprenne pourquoi on prend le temps d'énoncer dans la suite du chapitre des propositions qui peuvent sembler « aller de soi ».

Le point sur lequel on souhaite insister est que **les ensembles sont des objets mathématiques comme les autres**[9] et que le discours mathématique ne doit pas être différent à leur endroit qu'à l'endroit des autres objets mathématiques. Malheureusement, ce parti pris n'est pas concilliable avec le le point de vue naïf selon lequel un ensemble pourrait être une collection arbitraire d'objets mathématiques.

Voici pourquoi : si l'on s'autorise à appeler « ensemble » toute collection arbitraire d'objets mathématiques, alors la collection de tous les ensembles doit être un ensemble. C'est déjà perturbant, car cet « ensemble de tous les ensembles », étant lui-même un ensemble, devrait s'appartenir à lui-même. Mais pourquoi pas, après tout, accepter qu'un ensemble puisse s'apartenir à lui-même. Il y aurait donc deux types d'ensembles : ceux qui appartiennent à eux-mêmes, et ceux qui n'appartiennent pas à eux-mêmes. Mais, puisque nous avons provisoirement accepté l'idée naïve que toute collection d'objets soit un ensemble, il nous est loisible de considérer « l'ensemble de tous les ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes », que nous noterons A, et de considérer l'énoncé $\big(A \in A\big)$, que nous noterons P. L'énoncé P signifie que A appartient à « l'ensemble de tous les ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes », c'est-à-dire que A est un ensemble qui n'appartient pas à lui-même, ce qui s'écrit encore $A \notin A$, ou plus simplement $\neg P$. Par conséquent, l'énoncé $P \Leftrightarrow \neg P$ est vrai, ce qui est une contradiction puisqu'on a déjà vu qu'un tel énoncé est l'énoncé faux !

8. Qu'exprime-t-il ?
9. Dans la théorie des ensembles qui s'est imposée, celle de Zermelo-Fraenkel, ce sont même les seuls.

Ce paradoxe a été publié par Russel en 1903 dans *Principles of mathematics*, Cambridge University Press : on pourra en trouver la description pp. 101 à 105. Mais Russell connaissait manifestement ce paradoxe avant cette publication ; il en fait notamment mention dans une lettre à Frege en 1902[10]. Du reste, d'autres paradoxes étaient déjà connus au siècle précédent[11], et l'un d'eux fait l'objet de l'exercice 2.2.

Il faut donc accepter que les règles de formation d'un ensemble ne soient pas arbitraires, et que certaines collections d'objets mathématiques ne puissent être qualifiées d'ensemble. Encore une fois, expliciter les règles de formation correctes (primitives ou non) des ensembles[12], nous emmènerait trop loin : on se contentera ici de donner celles dont nous aurons besoin dans cet ouvrage, sans toujours préciser en détail comment on les obtient.

3.2 Deux méthodes de définition d'un ensemble

Voyons une première façon de définir un ensemble :

Proposition-Définition 1 (Définition en extension)

Étant donné un entier n et des objets mathématiques $a_1, \ldots, a_n$, il existe un ensemble dont les éléments sont $a_1, \ldots, a_n$ et aucun autre. On le note $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ et on dit qu'on a ainsi défini cet ensemble *en extension*.

Montrer l'existence de cet ensemble nous emmènerait trop loin, nous l'admettrons donc[13].

Remarques 3

1. Dans le cas particulier où l'on ne considère qu'un seul objet mathématique a_1, l'ensemble $\{a_1\}$ est appelé un *singleton*.
2. Dans le cas particulier où l'on ne considère que deux objets mathématiques (non nécessairement distincts) a_1 et a_2, l'ensemble $\{a_1, a_2\}$ est appelé une *paire*.

0. Dans le cas particulier où l'on ne considère aucun objet mathématique, l'ensemble $\{\}$ obtenu est appelé *l'ensemble vide*. Cet ensemble ne comprend donc aucun élément. On le note $\emptyset$. □

Attirons l'attention du lecteur sur un point que l'on a déjà mentionné au chapitre 1

10. Qu'on peut trouver dans l'ouvrage de Jean van Heijenoort *From Frege to Godel : A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 1967, pp. 124 et 125.
11. Voir la référence précédente pour plus de détails.
12. Il est d'usage de se placer dans la théorie des ensembles dite *de Zermelo-Fraenkel*, mais les autres théories donnent lieu de toutes façons aux mêmes règles.
13. Pour le lecteur curieux, l'existence de cet ensemble s'obtient facilement par utilisation répétée de l'axiome de la paire et de l'axiome de l'union.

Proposition 10 (Axiome d'extensionnalité)

Deux ensembles qui ont les mêmes éléments sont égaux.

Comme son nom l'indique, cette proposition est en fait un axiome de la théorie des ensembles. Elle ne se démontre pas. On peut considérer qu'elle donne la définition de l'égalité entre ensembles.

Ainsi, les ensembles $\{1,2,1,2,2,1\}$, $\{2,1\}$ et $\{1,2\}$ sont égaux : ces ensembles ont exactement deux éléments, 1 et 2.

De même, tout singleton est un cas particulier de paire : $\{a_1\} = \{a_1, a_1\}$.

Voyons maintenant un second moyen de définir un ensemble :

Proposition-Définition 2 (Définition en compréhension)

Étant donné un ensemble E et un énoncé $P(x)$, il existe un ensemble dont les éléments sont précisément les éléments x de E pour lesquels $P(x)$ est vrai. On le note $\{x \in E,\ P(x)\}$ et on dit qu'on a ainsi défini cet ensemble *en compréhension*.

Montrer l'existence d'un tel ensemble nous emmènerait trop loin, nous l'admettrons donc[14]. C'est la restriction aux seuls éléments de E qui permet de définir un ensemble dont les éléments sont exactement ceux pour lesquels l'énoncé $P(x)$ est vrai : comme on l'a vu, pour certains énoncés $P(x)$, la collection des objets mathématiques pour lesquels $P(x)$ est vrai peut ne pas être un ensemble.

Exemples 4

1. Pour $E = \{1,2,3,4,5\}$ et $P(x) = \big(x \leqslant 3\big)$, on a $\{x \in E,\ P(x)\} = \{1,2,3\}$.
2. Pour E un ensemble quelconque, et $P(x)$ un énoncé faux, par exemple l'énoncé « $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ », on a $\{x \in E,\ P(x)\} = \emptyset$.
3. Pour $E = \mathbb{N}$ et $P(n) = \big(\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k\big)$, on a déjà introduit la notation $2\mathbb{N}$: on a $2\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N},\ P(n)\}$. □

Notation 1

On sera souvent amené à considérer des ensembles de la forme $\{x \in E,\ \exists y \in F,\ x = f(y)\}$. Dans un souci d'économie, on convient que l'on pourra tout aussi bien noter un tel ensemble $\{f(y),\ y \in F\}$. On notera par exemple $2\mathbb{N} = \{2n,\ n \in \mathbb{N}\}$. □

14. Dans la théorie des ensembles originelle de Zermelo, présentée en 1908 dans *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, il s'agissait même d'un axiome (schéma d'axiome de séparation). On peut l'obtenir à l'aide du schéma d'axiome de remplacement.

Remarque 4

On peut déjà distinguer deux types d'ensembles : ceux qui ont un nombre fini d'éléments, et les autres. Les premiers seront dits *finis* et les autres *infinis*. Étant donné un ensemble E, on appellera *cardinal de* A, et on notera arbitrairement $\#A$, $|A|$ ou $\mathrm{Card}(A)$ le nombre d'éléments de A. Attention, cette définition est informelle, mais on verra à la remarque 18 comment on pourrait la rendre formelle. □

3.3 Ensemble des parties d'un ensemble

Définition 1

Étant donné un ensemble E, on appelle *partie de* E un ensemble inclus dans E, c'est-à-dire un ensemble dont tous les éléments appartiennent à E.

Exemples 5

1. Déterminons toutes les parties de la paire $\{1, 2\}$. Les éléments d'une telle partie ne peuvent être que 1 ou 2, mais il n'est pas nécessaire qu'elle comprenne ces deux éléments, elle peut n'en comprendre qu'un seul, voire même aucun. On peut lister ces parties suivant leur nombre d'éléments :
   - Il y a une unique partie de E ne comprenant aucun élément, l'ensemble vide $\emptyset$.
   - Il y a deux parties de E comprenant un seul élément, les singletons $\{1\}$ et $\{2\}$.
   - Il y a une unique partie de E comprenant deux éléments, la partie $\{1, 2\}$ qui est l'ensemble E lui-même.
2. Déterminons toutes les parties de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Listons-les là encore suivant leur nombre d'éléments :
   - Il y a une unique partie de E ne comprenant aucun élément, l'ensemble vide $\emptyset$.
   - Trois parties de E comprennent un seul élément, les singletons $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{3\}$.
   - Trois parties de E comprennent deux éléments, les paires $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ et $\{2, 3\}$.
   - Il y a une unique partie de E comprenant trois éléments, la partie $\{1, 2, 3\}$ qui est l'ensemble E lui-même.
3. Il n'est pas possible de lister toutes les parties de l'ensemble $\mathbb{R}$, mais on peut en citer quelques-unes. Les intervalles sont des parties de $\mathbb{R}$. Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont des parties de $\mathbb{R}$. Il y en a encore beaucoup d'autres, de nature assez différente. □

Rappelons que les ensembles sont des objets mathématiques comme les autres. S'il nous prend maintenant la fantaisie de définir un ensemble dont les éléments soient exactement

les parties de l'ensemble $\{1,2\}$, cela nous est parfaitement loisible en extension : cet ensemble est $\big\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\big\}$. De même, l'ensemble des parties de $\{1,2,3\}$ existe, c'est l'ensemble $\big\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\big\}$. Bien évidemment, cette définition en extension de l'ensemble des parties de E n'était possible dans les deux constructions précédentes que parce que l'ensemble E considéré était fini. La proposition suivante garantit que l'on peut encore définir l'ensemble des parties de E dans le cas général.

Proposition-Définition 3 (Axiome des parties)

Pour tout ensemble E, il existe un ensemble appelé *ensemble des parties de* E dont les éléments sont exactement les parties de E. On le note $\mathcal{P}(E)$.

Comme le nom de cette proposition l'indique, l'existence de $\mathcal{P}(E)$ est en fait un axiome de la théorie des ensembles. Elle ne se démontre pas.

Exemples 6 Reformulons les exemples 5.

1. On a $\mathcal{P}\big(\{1,2\}\big)=\big\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\big\}$.
2. On a $\mathcal{P}\big(\{1,2,3\}\big)=\big\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\big\}$.
3. L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ne peut pas être défini en extension mais on peut noter, par exemple, qu'on a $\emptyset\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathbb{N}\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathbb{Z}\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathbb{Q}\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$; ou encore qu'on a, pour tous réels a et b, $]a,b[\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $[a,b[\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $]a,b]\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $[a,b]\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$; etc.

Proposition 11

Soit E un ensemble.

- Si E est infini, alors $\mathcal{P}(E)$ est infini.
- Si E est fini et $|E|=n$, alors $|\mathcal{P}(E)|=2^n$.

Notre définition du cardinal étant informelle, la démonstration sera, elle aussi, informelle (mais rigoureuse !).

Démonstration

• L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ comprend comme éléments tous les singletons de la forme $\{x\}$, qui sont au même nombre que les éléments de x. Il a donc au moins autant d'éléments que E et en particulier si E est infini, alors $\mathcal{P}(E)$ l'est aussi.

• Supposons que E est fini de cardinal n. On peut alors écrire $E=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ où les x_i sont tous distincts. Pour définir une partie de E :

– on peut ou pas prendre x_1 : deux choix ;
– on peut ou pas prendre x_2 : deux choix ;
– $\vdots$
– on peut ou pas prendre x_n : deux choix.

Au total on a $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ fois}} = 2^n$ façons de constituer une partie de E, d'où le résultat. □

Revenons sur la notion d'ensemble défini en compréhension. Considérons un ensemble E. Étant donné un énoncé $P(x)$, l'ensemble défini en compréhension $\{x \in E,\ P(x)\}$ est, par définition, une partie de E. On peut ainsi, une fois fixée une variable, associer à tout énoncé une partie de E. Réciproquement, une fois fixée une variable x on peut, à toute partie F de E, associer un énoncé qui n'est vérifié que si x appartient à F : l'énoncé $x \in F$. Finalement, une fois fixée une variable, la technique de définition d'un ensemble en compréhension peut être considérée comme un dictionnaire entre énoncés et parties de E. Ce dictionnaire va être intensivement utilisé dans la section 3.5.

3.4 Produit cartésien

Définition 2 (Couples - Complément)

Soient a et b deux objets mathématiques. On appelle *couple formé des éléments a et b* l'ensemble $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$. On le notera indifféremment (a,b) ou $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

On doit cette définition au mathématicien polonais Kazimierz Kuratowski (ses articles publiés en français sont signés *Casimir Kuratowski*), qui l'a publiée en 1921 dans l'article *Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles*, Fundamenta Mathematicae **2** (1), pp. 161-171[15]. Ce n'est pas la première définition à avoir été proposée, Norbert Wiener en ayant donné une autre dès 1914 dans une communication à la Cambridge Philosophical Society[16].

Il est important de comprendre que cette définition **n'est qu'un codage ensembliste** ayant pour seul objectif de définir un concept qui vérifie la proposition suivante.

Proposition 12 (Propriété fondamentale des couples)

Étant donnés des objets mathématiques a, b, x, y on a $(a,b)=(x,y) \Leftrightarrow a=x$ et $b=y$.

15. La définition en question est donnée à la toute fin de l'article.
16. Cette note est reproduite elle aussi dans l'ouvrage de Jean van Heijenoort *From Frege to Godel : A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 1967, pp. 224-227.

C'est cette proposition qui définit les couples, bien plus que le codage ensembliste de la définition.

Démonstration

Montrons la propriété fondamentale des couples. Soient a, b, x, y des objets mathématiques tels que $(a,b)=(x,y)$, c'est-à-dire tels que $\big\{\{a\},\{a,b\}\big\}=\big\{\{x\},\{x,y\}\big\}$. En particulier, on a $\{a\}\in\big\{\{x\},\{x,y\}\big\}$. On a donc deux cas : soit $\{a\}=\{x\}$, soit $\{a\}=\{x,y\}$. Dans tous les cas on a $x\in\{a\}$ et donc $a=x$. En réinjectant dans l'égalité initiale on trouve $\big\{\{a\},\{a,b\}\big\}=\big\{\{a\},\{a,y\}\big\}$, en particulier on a ou bien $\{a,b\}=\{a\}$ ou bien $\{a,b\}=\{a,y\}$, et comme on a $\{a\}\subset\{a,y\}$, on a dans tous les cas $\{a,b\}\subset\{a,y\}$. En particulier on a $b\in\{a,y\}$, c'est-à-dire $b=y$ ou $b=a$.

- Si $b=y$, c'est fini.
- Si $b=a$ alors $x=a=b$ et en réinjectant dans $\{a,b\}=\{a,y\}$ on trouve $y=a=x=b$, et en particulier $y=b$. □

Remarque 5

On notera donc qu'un couple est **ordonné** : si $a\neq b$, on a $(a,b)\neq(b,a)$ (alors qu'on a $\{a,b\}=\{b,a\}$). □

Proposition-Définition 4

Étant donnés deux ensembles A et B, il existe un ensemble dont les éléments sont tous les couples (a,b) avec $a\in A$ et $b\in B$. On l'appelle *produit cartésien de A par B* et on le note $A\times B$.

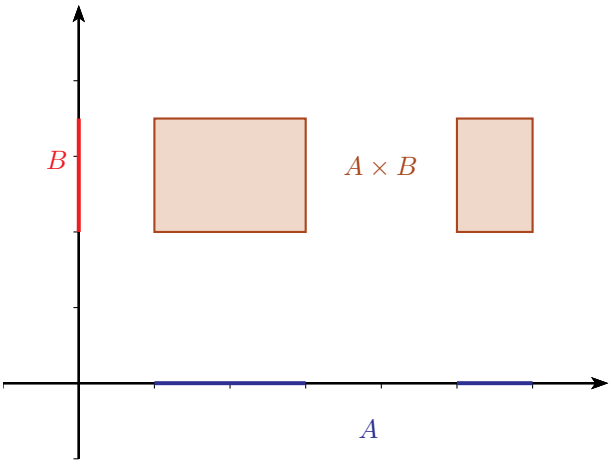
Montrer l'existence de cet ensemble nous emmènerait trop loin, nous l'admettrons donc[17].

Exemples 7

1. Pour $A=\{1,2\}$ et $B=\{x,y\}$ on a $A\times B=\big\{(1,x),(1,y),(2,x),(2,y)\big\}$.
2. Sous les mêmes hypothèses, on a $B\times A=\big\{(x,1),(x,2),(y,1),(y,2)\big\}$.
3. Pour tout ensemble A, on a $A\times\emptyset=\emptyset\times A=\emptyset$. □

Lorsque A et B sont des parties de $\mathbb{R}$, on convient généralement de représenter $A\times B$ dans le plan muni d'un repère orthonormé par tous les points dont l'abscisse appartient à A et l'ordonnée à B.

17. Pour le lecteur curieux, l'existence de cet ensemble peut s'obtenir par compréhension après utilisation des axiomes de la paire (une fois), de l'union (une fois) et des parties (deux fois).



Exemple avec $A = [1, 3] \cup [5, 6]$ et $B = \left[2, \frac{7}{2}\right]$.

Éclairons le choix de notation qui a été fait.

Proposition 13

Si A et B sont des ensembles finis, alors $A \times B$ l'est aussi et $|A \times B| = |A| \times |B|$.

Notre définition du cardinal étant informelle, la démonstration sera, elle aussi, informelle (mais rigoureuse).

Démonstration

Supposons A fini de cardinal n et B fini de cardinal m. On peut alors écrire qu'on a $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ où les a_i sont tous distincts, et $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ où les b_i sont tous distincts. Pour définir un couple (a, b) :

– on doit choisir un élément a dans A : n choix ;

– doit choisir un élément b dans B : m choix.

Au total on a $n \times m$ façons de constituer un élément de $A \times B$, et chacune de ces façons donne lieu à un couple différent, d'où le résultat. □

Notations 2

1. On notera A^2 pour $A \times A$. C'est l'ensemble des couples d'éléments de A.
2. Par souci d'économie, on notera $A_1 \times A_2 \cdots \times A_n$ pour $A_1 \times \big(A_2 \times (\cdots \times A_n) \cdots\big)$. On appellera *$n$-uplets* un élément d'un tel ensemble.
   On fera attention que pour autant l'opération $\times$ n'est pas associative[18] ; en général l'ensemble $A_1 \times (A_2 \times A_3)$ que l'on note $A_1 \times A_2 \times A_3$ est distinct de l'ensemble

18. Voir la définition 3 p. 374 pour la définition générale.

$(A_1 \times A_2) \times A_3$, même si l'on verra dans l'exercice 2.6 qu'ils sont naturellement en bijection[19].

3. On notera A^n pour $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$. Cet ensemble est appelé *ensemble des n-uplets d'éléments A*.

4. Par souci d'économie encore, un élément de $A_1 \times A_2 \cdots \times A_n$ sera noté $(a_1, \ldots, a_n)$ ou $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ plutôt que $(a_1, (a_2, (\ldots, a_n)))$. □

La propriété fondamentale des couples est encore valable pour les n-uplets :

Proposition 14 (Propriété fondamentale des n-uplets)

Si on a $(a_1, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \cdots \times A_n$, $(x_1, \ldots, x_n) \in A_1 \times A_2 \cdots \times A_n$, et $(a_1, \ldots, a_n) = (x_1, \ldots, x_n)$, alors on a : $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ a_i = x_i$.

C'est cette propriété qui définit les n-uplets, bien plus que le codage ensembliste à l'aide de couples emboités.

Démonstration

Comme $(a_1, \ldots, a_n) = (x_1, \ldots, x_n)$, on a $a_1 = x_1$ et $(a_2, \ldots, a_n) = (x_2, \ldots, x_n)$.
Comme $(a_2, \ldots, a_n) = (x_2, \ldots, x_n)$, on a $a_2 = x_2$ et $(a_3, \ldots, a_n) = (x_3, \ldots, x_n)$.
Etc. On démontre ainsi de proche en proche le résultat. On dit qu'on a procédé par *récurrence immédiate*. □

Les ensembles produits sont bien pratiques pour synthétiser des emboîtements de quantifications universelles.
Ainsi, on pourra par exemple écrire $\forall (a, b) \in A \times B,\ P(a, b)$ pour $\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ P(a, b)$.
Ou encore $\forall (a_1, \ldots, a_n) \in A^n,\ P$ pour $\forall a_1 \in A,\ \forall a_2 \in A,\ \ldots,\ \forall a_n \in A,\ P$.

3.5 Opérations sur $\mathcal{P}(E)$

Les programmes de première et terminale scientifiques décrivent déjà les opérations de réunion, intersection et complémentaire. On rappelle rapidement les définitions et les propriétés immédiates de ces opérations ici.

Dans toute cette sous-section, E désigne un ensemble.

19. Voir p. 84.

Cet ouvrage, tout en couleurs, développe une approche originale et approfondie du programme d'algèbre de première année des classes préparatoires.

- Cet ouvrage est destiné aux élèves de CPGE scientifiques de première année. Il permet de revisiter le cours de mathématiques de façon imagée.
- Le texte écrit dans un style clair et détaillé permet à tous les étudiants, quel que soit leur niveau, de suivre pas à pas les démonstrations. De nombreuses figures facilitent la compréhension des notions abordées.
- En fin de chapitre, des exercices et des problèmes de synthèse corrigés de façon très détaillée permettent de vérifier les acquis et de s'entraîner dans l'optique des concours.
- Des repères historiques accompagnent la progression : des théorèmes et résultats sont datés, des sources sont indiquées et des notices biographiques évoquent les faits marquants de la vie de mathématiciens cités.
- L'ouvrage propose des compléments destinés aux lecteurs souhaitant un approfondissement du programme officiel.

L'ouvrage intéressera également les étudiants de licence ainsi que les candidats au CAPES et à l'agrégation.

LES +

+ Conforme aux programmes
+ Plus de 100 exercices et 12 problèmes de synthèse intégralement corrigés
+ Texte abondamment illustré

Nicolas Basbois, ancien élève de l'École normale supérieure de Cachan, est professeur agrégé de mathématiques en MP à l'Institut Stanislas de Cannes.

Pierre Abbrugiati est professeur agrégé de mathématiques en MPSI au lycée Alphonse Daudet de Nîmes.

< Dans la même collection dirigée par Olivier Rodot

ISBN : 978-2-8073-0640-0

9782807306400

deboeck SUPÉRIEUR

www.deboecksuperieur.com

Conception graphique : Primo&Primo