LE MOUVEMENT ET SA DESCRIPTION CINEMATIQUE

I - INTRODUCTION

La cinématique consiste en la description mathématique du mouvement d'un objet sans se préoccuper des causes qui animent cet objet. Le but que se fixe la cinématique est donc de caractériser au mieux le mouvement de l'objet grâce à l'utilisation des outils mathématiques que sont la géométrie vectorielle et la géométrie différentielle.

Ce cours ne s'intéresse qu'à la description du mouvement d'un point matériel. La description du mouvement d'un corps réel est un peu plus complexe car il faut aussi pouvoir décrire son orientation (s'il tourne sur lui même par exemple) et ses déformations éventuelles tout au long du mouvement (mouvement d'un fluide par exemple). Dans tous les cas, on se ramène en dernier recours à la description du mouvement de chacun des points matériels qui composent le corps en question.

Un point matériel est modélisé par un objet mathématique sans dimension auquel sera affecté un coefficient (la masse). Ce coefficient est d'une importance capitale dès lors que l'on s'intéresse aux causes qui ont engendré le mouvement : ce sera l'objet de la dynamique.

Un point matériel ne peut pas être animé d'un mouvement de rotation sur lui-même car cela n'a mathématiquement pas de sens. Ce type de mouvement ne pourra se modéliser qu'en associant plusieurs points matériels qui formeront l'objet dont on étudie le mouvement.

Assimiler un objet à un seul point matériel pour étudier son mouvement peut être justifié ou pas : cela dépend à la fois du type de mouvement que l'on veut décrire et des distances caractéristiques de l'objet par rapport à celles de la trajectoire que l'on étudie. Par exemple, si on étudie le mouvement orbital de la Terre autour du Soleil, on peut assimiler la Terre à un point matériel avec une très bonne précision car son rayon moyen ($R_T = 6.37\,10^6 m$) est bien plus faible que le rayon moyen de l'orbite terrestre ($1.49\,10^{11} m$) ; si bien qu'il suffit de ne considérer qu'un seul point de la Terre, son centre par exemple. Par contre, si c'est le mouvement de rotation de la Terre sur elle-même que l'on veut étudier, cette approximation n'est bien sûr plus valable.

Pour décrire le mouvement, il est besoin des notions de temps et de distance, ainsi que d'un espace mathématique qui modélise l'espace physique dans lequel ce mouvement s'effectue. Dans ce cours, il est admis que vous avez déjà une connaissance empirique de ces notions et les unités employées seront conformes à celles du Système International (SI) adopté en 1960 lors de la 11ème Conférence Générale des Poids et Mesures [1]. *L'unité de temps* est aujourd'hui définie à l'aide de la physique atomique : *la seconde* est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133. *L'unité de longueur* est définie à l'aide de la vitesse de la lumière dans le vide, constante fondamentale de la physique : *le mètre* est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 ème de seconde. *Quant à l'espace physique, on le modélise en mécanique classique par un espace euclidien*, c'est à dire un espace mathématique dans lequel la géométrie euclidienne que l'on vous a apprise est licite [2]. Cette hypothèse, car c'en est une, n'est qu'une approximation (largement valable à notre échelle), car depuis Einstein (théorie de la relativité générale, 1916) on sait que la présence de matière déforme l'espace-temps au point de le rendre non-euclidien [3].

II - NECESSITE D'UN REFERENTIEL - COORDONNEES - BASES

II -1 Référentiels et coordonnées

On a la sensation de voir un objet en mouvement lorsque l'on constate que sa position dans l'espace par rapport à d'autres objets fixes a changé au cours du temps. L'expérience nous montre en effet que la description et la sensation visuelle de ce mouvement ne peuvent s'appréhender que relativement à un ou plusieurs objets de référence :

Exemple des deux trains - Vous êtes à la gare où deux trains sont à l'arrêt l'un à côté de l'autre. Montez dans l'un des deux et mettez-vous assis près d'une fenêtre qui donne sur l'autre train. Lorsque l'un des deux trains va démarrer, vous aurez la sensation pendant quelques secondes de ne pas savoir lequel est en mouvement [4]. Cela vient de ce que les deux objets de référence (les deux trains) prennent la même importance à vos yeux. Vous ne lèverez l'ambiguïté que lorsque votre regard aura capté le quai par exemple dont vous savez qu'il est fixe. Alors seulement vous saurez lequel des deux trains se déplace par rapport à cet environnement fixe.

Le système Soleil-Terre - Depuis la révolution scientifique du XVIIème siècle, on nous enseigne que la Terre tourne sur elle-même en 24 heures. Pourtant, depuis des temps immémoriaux, la plupart des gens pensaient que c'était le Soleil (et tous les astres, y compris les étoiles) qui tournait autour de la Terre, car c'est bien la sensation première que

[1] Les unités du Système International sont : le mètre, le kilogramme, la seconde, l'ampère, le kelvin, la mole et la candela. Vous trouverez plus de renseignements sur le site web du Bureau International des Poids et Mesures : http://www.bipm.fr/fra/

[2] Lisez à ce sujet le chapitre 1 du cours de Physique de Berkeley (volume 1 – mécanique).

[3] Dans un tel espace, la somme des angles d'un triangle ne fait plus 180°. Pour vous imaginer ce genre de propriété, pensez à un monde bi-dimensionnel tel que la surface d'une sphère ; les habitants de ce monde seraient plats et contraints de se déplacer sur la sphère uniquement. La somme des angles d'un triangle tracé sur cette sphère est alors supérieure à 180° et le théorème de Pythagore n'y est plus valable. Cet espace est dit non-euclidien.

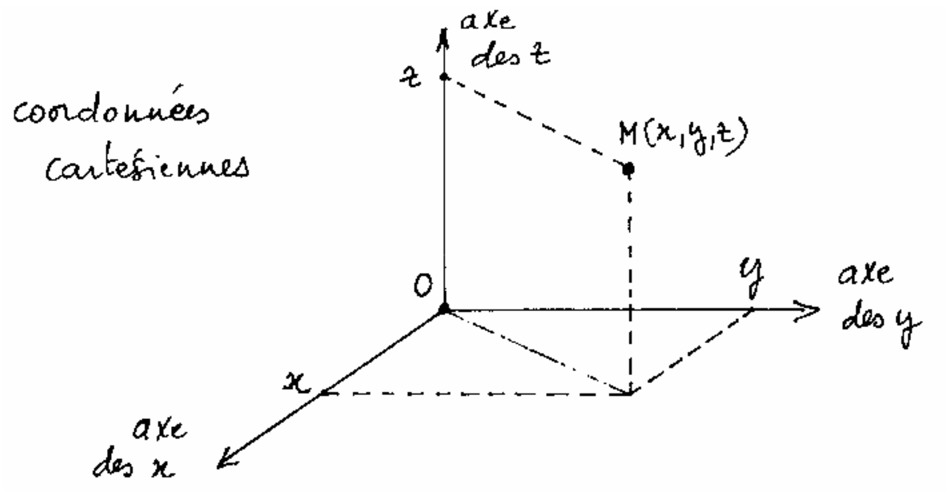
[4] A condition bien sûr qu'il n'y ait pas de secousse (c'est à dire qu'il n'y ait pas une brusque accélération).

l'on a. En effet, l'objet fixe de référence que capte votre regard, c'est le sol terrestre ; et par rapport à cet environnement fixe, c'est bien le Soleil et les autres astres qui se déplacent.

Expérience de pensée - Imaginez-vous seul(e) dans l'espace avec votre camarade. Vous observez que la distance qui vous sépare diminue au cours du temps. Saurez-vous dire si c'est votre camarade qui se déplace vers vous, ou vous qui allez vers lui, ou bien tous les deux qui vous vous rapprochez l'un de l'autre ?

Ce dernier exemple devrait achever de vous convaincre, si vous ne l'étiez pas déjà, qu'il est impossible d'affirmer qu'un objet est en mouvement ou pas sans faire référence à un autre objet. On traduit ce constat par la phrase suivante : **le mouvement absolu** (de même qu'une trajectoire absolue) **n'existe pas**, **il n'existe que des mouvements relatifs** (trajectoires relatives) **à des corps de référence supposés fixes.**

Il est donc nécessaire, pour décrire le mouvement d'un objet, de faire appel à un ou d'autres objets de référence considérés comme fixes. Une fois ce corps de référence adopté, décrire le mouvement d'un point matériel (relativement à ce corps) consiste à pouvoir donner sa position à chaque instant. Pour cela, on se choisit un point origine O, fixe par rapport au corps de référence, ainsi que 3 axes fixes également (non parallèles entre eux), qui passent par O, et qui vont permettre de repérer le point matériel M. Le nombre 3 provient de ce que notre espace physique possède 3 dimensions spatiales [5]. **Le point O et les 3 axes forment le référentiel par rapport auquel sera décrit le mouvement du point M**. Le plus simple est de choisir ces 3 axes perpendiculaires entre eux et de se donner 3 nombres x, y et z que l'on appellera **coordonnées** rectangulaires (ou cartésiennes) du point M relativement au référentiel {O, xyz}. Ces coordonnées permettent de positionner le point M de la façon suivante : depuis O, avançons de x fois la longueur unité le long de "l'axe des x", puis de y fois parallèlement à "l'axe des y", enfin de z fois parallèlement à "l'axe des z" : le point M est là.

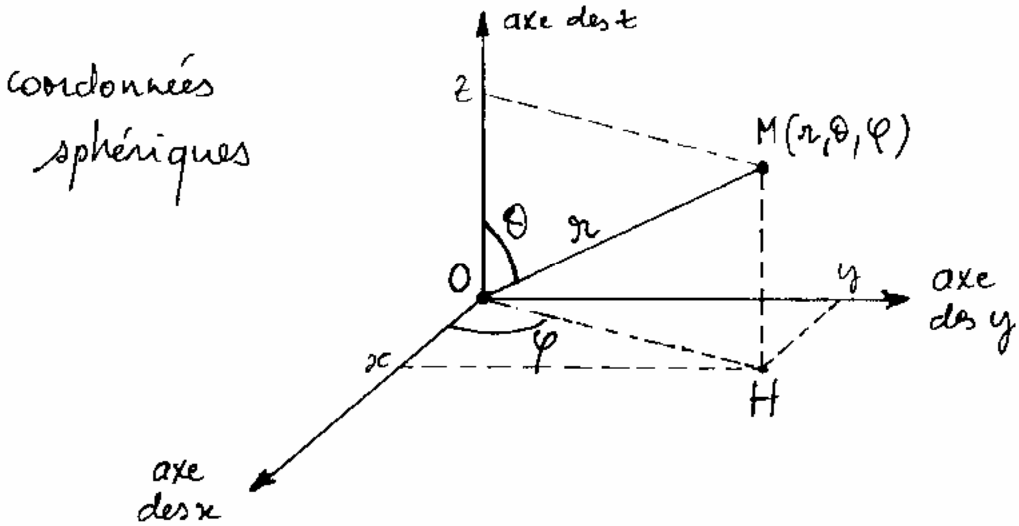


[5] En relativité, restreinte ou générale, ce nombre passe à 4 car le temps doit être considéré comme une coordonnée supplémentaire attachée à l'objet de référence : si on change d'objet de référence, cette coordonnée change également au même titre que les 3 autres coordonnées spatiales. En mécanique classique, le temps est le même quelque soit l'objet de référence choisi.

Afin de pouvoir repérer n'importe quel point de l'espace à 3 dimensions, on voit que les coordonnées cartésiennes x, y et z doivent chacune varier de $-\infty$ à $+\infty$.

II – 2 __Différents systèmes de coordonnées__

La façon qui vient d'être adoptée pour connaître la position du point M dans le référentiel {O, xyz} n'est pas la seule. On aurait pu par exemple décider de repérer le point M par 3 autres nombres r, θ et φ qui ont la signification suivante : avancez de r fois la longueur unité le long de l'axe des z et effectuez une rotation d'angle θ dans le plan zOx ; effectuez ensuite une deuxième rotation d'angle φ parallèlement au plan xOy : le point M est là. Cette autre façon de procéder est équivalente à la première puisque, au bout du compte, nous avons pu situer le point M dans l'espace relativement au référentiel {O, xyz}. Les 3 nombres r, θ et φ sont appelés coordonnées sphériques du point M.



Pour pouvoir repérer n'importe quel point M de l'espace à l'aide de ces 3 nouveaux nombres et pour que la correspondance soit bi-univoque, c'est à dire pour qu'à un point M donné de l'espace corresponde un triplet unique ($r\theta\varphi$), on doit restreindre leur domaine de variation : r est pris positif et varie de 0 à l'infini, θ varie de 0 à π inclus, et φ varie de 0 à 2π exclu.

Il existe bien sûr des relations mathématiques qui permettent de passer des coordonnées cartésiennes (xyz) du point M à ses coordonnées sphériques ($r\theta\varphi$) ou vice versa. En faisant un peu de géométrie, vous devriez pouvoir démontrer que :

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi \qquad z = r \cos\theta$$

Il existe un nombre indéfini de systèmes de coordonnées : elliptiques, hyperboliques, etc… **__Du point de vue pratique, vous vous devez de connaître les 4 systèmes de coordonnées les plus courants__** : coordonnées cartésiennes, sphériques et cylindriques pour le mouvement dans l'espace à 3 dimensions, et coordonnées polaires pour le mouvement dans un plan.

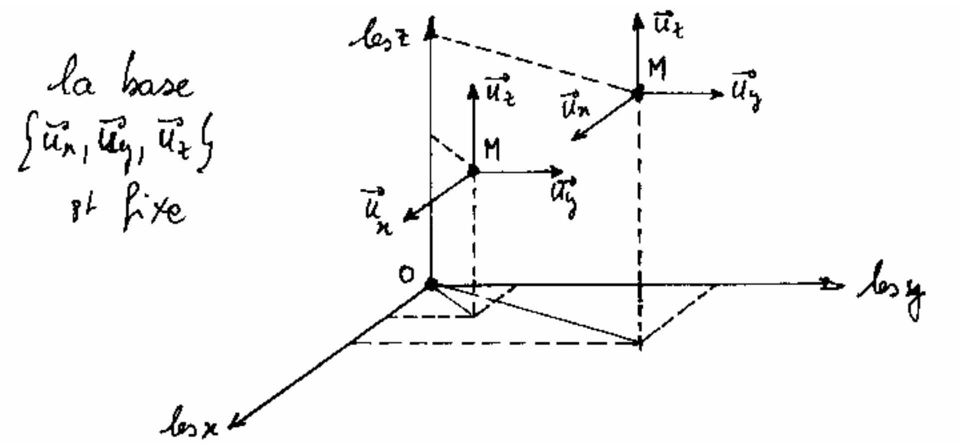
Le choix d'un système de coordonnées est guidé par ce qu'on appelle la symétrie du problème : si par exemple vous devez décrire des trajectoires dont vous savez qu'elles possèdent un axe de symétrie, alors il sera souvent bienvenu d'utiliser les coordonnées cylindriques, car les calculs que vous serez amené à faire seront beaucoup plus simples que si vous aviez choisi les coordonnées cartésiennes. De même, s'il existe une symétrie par rapport à un point (un centre de symétrie) ou si une certaine propriété liée à la trajectoire que vous étudiez ne dépend que de la distance entre deux points, ce sont les coordonnées sphériques qu'il sera préférable d'utiliser. En l'absence de toute symétrie, on recommande souvent de choisir les coordonnées cartésiennes.

II – 3 Différentes bases adaptées aux différents systèmes de coordonnée - vecteurs

Grâce à la notion de coordonnées, nous savons positionner un point M dans l'espace par rapport à un certain référentiel. Une description complète du mouvement du point M consistera à connaître ces 3 coordonnées à tous les instants. Mais, en fonction du type de coordonnées choisies, l'analyse mathématique du mouvement du point M peut s'avérer très différente et risque fort de cacher l'essentiel. C'est pour cette raison que les physiciens et les mathématiciens de la fin du XIXème siècle ont inventé la notion de **vecteurs**. Dans le cours, il est supposé que vous possédez déjà cette notion [6]. En cinématique (et en dynamique aussi), l'intérêt est porté sur le vecteur qui joint l'origine O du référentiel au point M (et sur ses dérivées par rapport au temps) : on l'appelle **le rayon vecteur**, ou encore le vecteur position, et on le note généralement $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. **la description mathématique du mouvement d'un point M consiste alors à connaître l'évolution du vecteur** $\overrightarrow{OM}$ **en fonction du temps**.

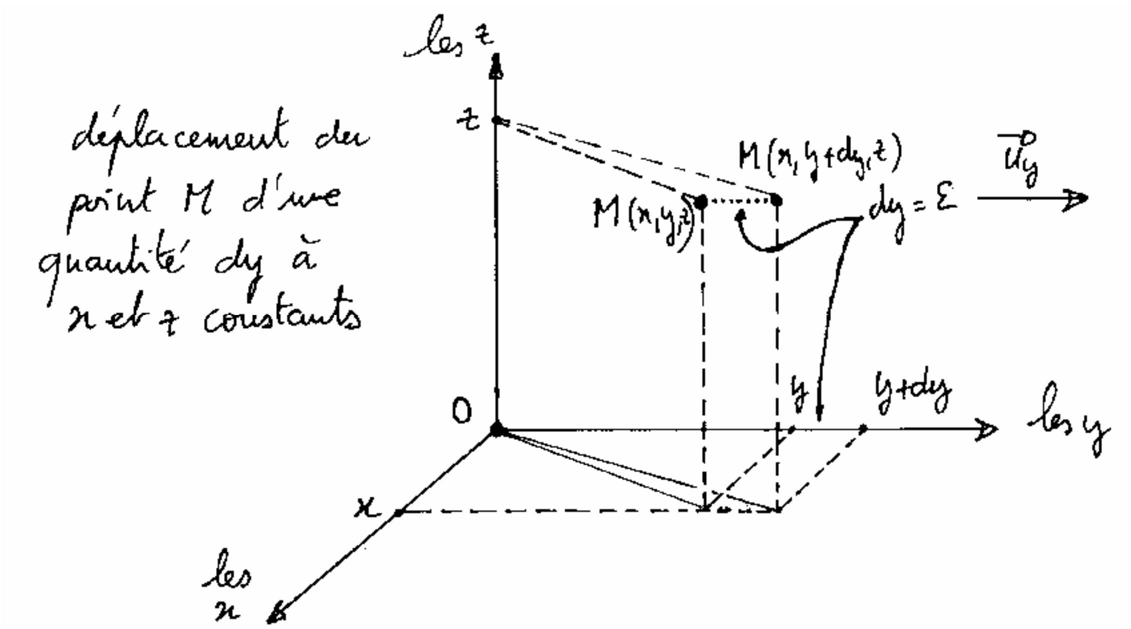
Naturellement, la façon d'écrire le rayon vecteur dépend du système de coordonnées choisi. Nous allons voir dans ce qui suit que **chaque système de coordonnées possède sa propre base vectorielle** dans laquelle tous les calculs visant à caractériser au mieux la trajectoire suivie par le point M vont s'effectuer. En coordonnées cartésiennes, vous savez sans doute déjà que le rayon vecteur s'écrit : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$ où les 3 vecteurs $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ sont unitaires (i.e. de norme 1) et orthogonaux entre eux (ils forment une base orthonormée). Le vecteur $\vec{u}_x$ indique la direction et le sens de l'axe des x, $\vec{u}_y$ le sens de l'axe des y et $\vec{u}_z$ celui de l'axe des z. Remarquez que la base $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ garde la même orientation quelle que soit la position du point M : **cette base est dite fixe**.

[6] Il est recommandé de lire à ce sujet le chapitre 2 du cours de Physique de Berkeley, volume 1 : mécanique

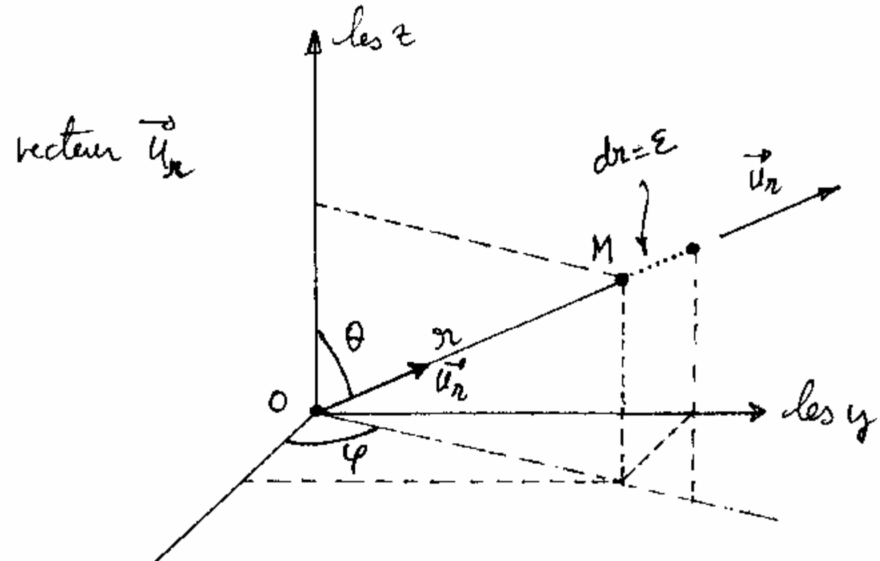


Le choix des vecteurs de base $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ a dû vous paraître évident. Mais qu'en est-il pour les coordonnées sphériques par exemple ? Dans un premier temps, on pourrait se dire qu'il n'y a qu'à garder la base $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ et remplacer x, y et z par leurs expressions en fonction de r, θ et φ qui ont été écrites un peu plus haut ; ce qui donnerait pour l'écriture du vecteur $\overrightarrow{OM}$: $\overrightarrow{OM} = r\sin\theta\cos\varphi\ \vec{u}_x + r\sin\theta\sin\varphi\ \vec{u}_y + r\cos\theta\ \vec{u}_z$. Mais, bien que correcte, cette façon d'écrire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ va à l'inverse de ce que l'on veut : le choix des coordonnées (rθφ) a pour but de simplifier l'écriture et les calculs, ce qui manifestement n'a pas l'air d'être le cas de l'expression ci-dessus. <u>Il faut donc trouver des vecteurs de base adaptés au système de coordonnées choisi</u>.

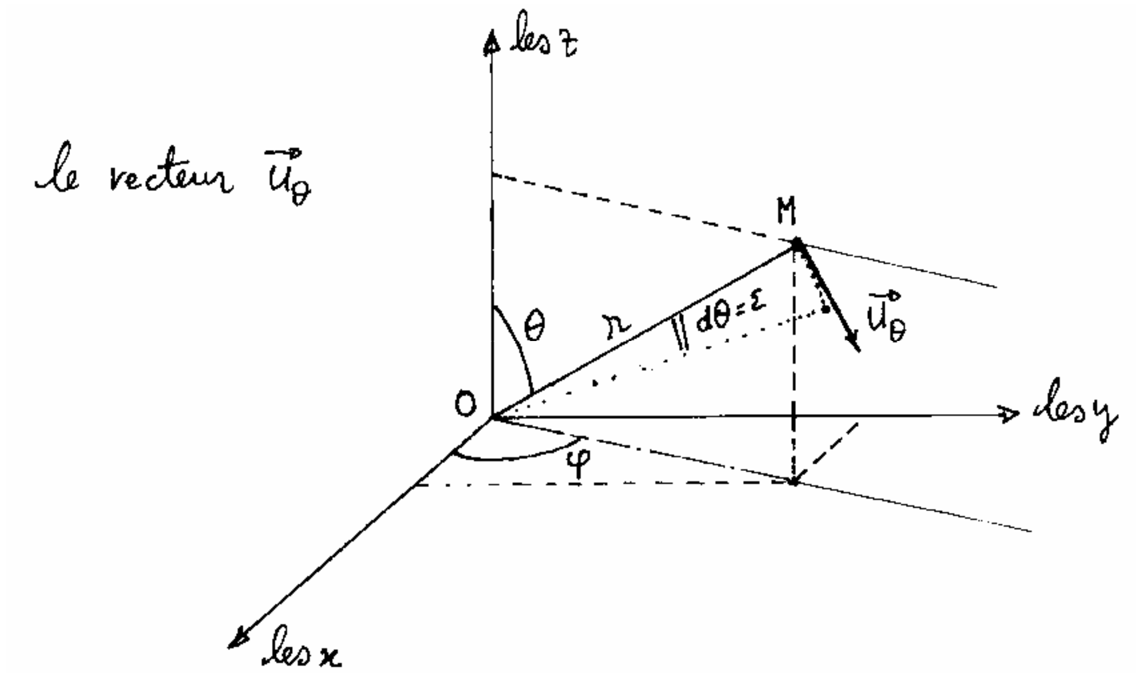
En fait, il existe une méthode « avec les mains » pour définir ces vecteurs. Appliquons d'abord cette méthode au cas des coordonnées cartésiennes : nous allons faire varier chacune à son tour les coordonnées x, y et z d'une quantité infinitésimale ε et nous poser la question de savoir dans quelle direction a bougé le point M après ce petit déplacement ; le vecteur unitaire le long de cette direction (et dans le sens ε > 0) sera alors désigné comme le vecteur unitaire associé à la coordonnée que l'on a fait varier. Bougeons donc x d'une quantité infinitésimale ε = dx en laissant y et z constants ; sous l'effet de cette variation, le point M s'est déplacé le long de l'axe des x : nous poserons donc que le vecteur unitaire qui indique la direction et le sens de l'axe des x est celui associé à la coordonnée x, et on le notera $\vec{u}_x$ (le x rappelle que ce vecteur est associé à la coordonnée x et le u rappelle que c'est un vecteur unitaire). Faites vous-même le raisonnement précédent pour définir les vecteurs $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ associés aux coordonnées y et z respectivement.



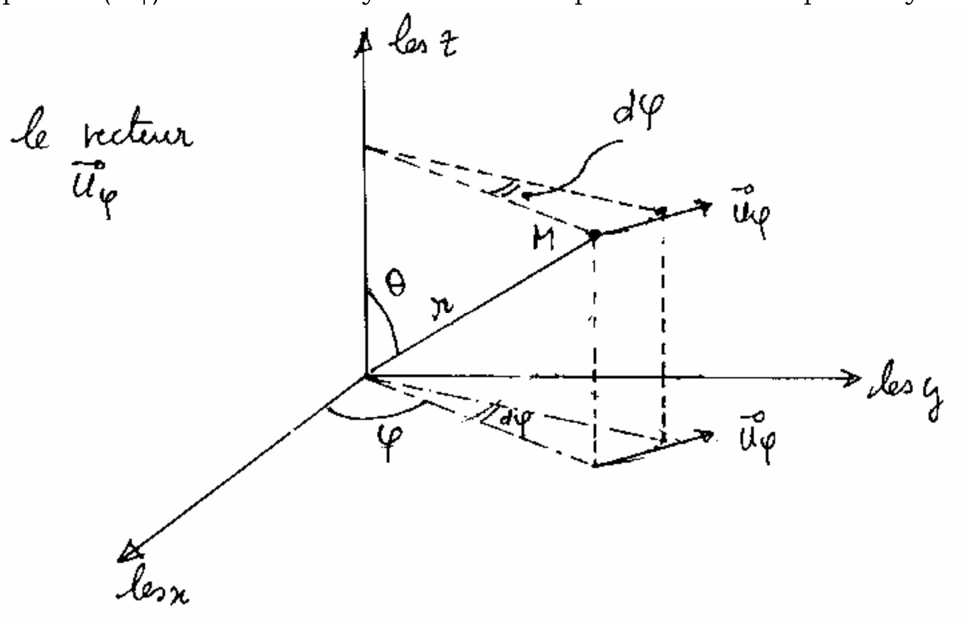
Passons maintenant au système de coordonnées sphériques (rθφ) et appliquons la même méthode. Dans un premier temps, fixons θ et φ et faisons varier r de ε = dr. Vous devez voir sur la figure qui suit que le point M s'est alors déplacé le long de la droite (OM) : nous poserons donc que le vecteur unitaire associé à la coordonnée r est celui qui indique la direction de la droite (OM), son sens est celui obtenu pour ε = dr > 0, et on le notera : $\vec{u}_r$.



Dans un second temps, fixons r et φ et faisons varier θ de ε = dθ. Cette fois, le point M s'est déplacé le long d'un arc de cercle infinitésimal dans le plan (Oz, $\overrightarrow{OM}$) dont le rayon est r (voir figure). Nous poserons donc que le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$ associé à la coordonnée θ est celui qui indique la direction de la droite qui se confond avec l'arc de cercle infinitésimal que nous avons obtenu : cette droite n'est rien d'autre que la tangente au point M(rθφ) du cercle de rayon r tracé dans le plan (Oz, $\overrightarrow{OM}$).



Enfin, fixons maintenant r et θ et faisons varier φ de ε = dφ : là aussi, le point M s'est déplacé sur un arc de cercle infinitésimal situé cette fois dans le plan (ou plutôt parallèle au plan) xOy (voir figure). Remarquez que ce cercle a pour rayon : r sinθ. Le vecteur $\vec{u}_\varphi$ associé à la coordonnée φ sera donc le vecteur unitaire qui indique le sens (pour dφ > 0) de la tangente au point M(rθφ) du cercle de rayon r sinθ tracé parallèlement au plan xOy.



Nous venons ainsi de définir une nouvelle base $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$ adaptée aux coordonnées sphériques (rθφ). Lorsque vous utiliserez ce type de coordonnées, vous apprendrez à ne travailler que dans cette base.

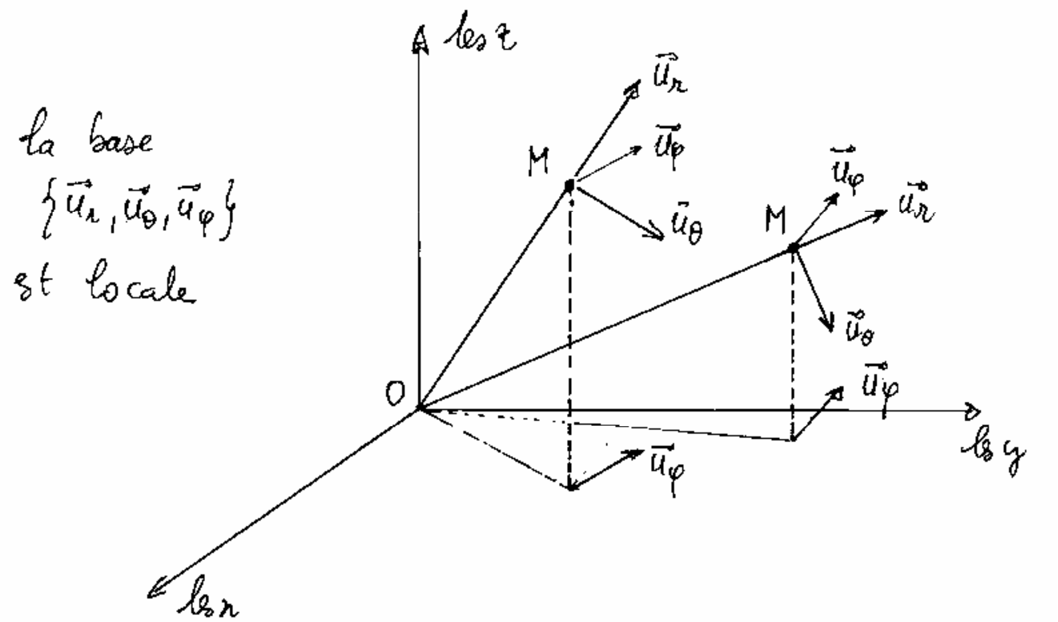
Plusieurs remarques doivent être faites sur ce type de base un peu particulière :

1. $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$ est une <u>base orthonormée</u> (les 3 vecteurs sont unitaires et orthogonaux entre eux). On dit alors que le système de coordonnées utilisé est orthogonal. Ce qui n'est pas toujours le cas.

2. Dans l'ordre où elle est écrite, cette base est <u>directe</u>. C'est à dire que : $\vec{u}_\varphi = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$; $\vec{u}_r = \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_\varphi$; $\vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r$ ($\wedge$: produit vectoriel) au même titre que l'on a : $\vec{u}_z = \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y$; $\vec{u}_x = \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z$; $\vec{u}_y = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x$ pour la base $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$.
3. Dans la base $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$ le rayon vecteur s'écrit de façon simple : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$. Les coordonnées θ et φ n'apparaissent pas dans l'écriture de $\vec{r}$. En fait, elles sont bien là, mais elles sont « cachées » dans le vecteur $\vec{u}_r$; on s'en rend compte quand on écrit ce vecteur dans la base $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ (voir ci-dessous).
4. Il existe bien sûr des relations mathématiques entre la base $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$ et la base $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$: ce sont les formules dites de changement de base. Essayez de démontrer géométriquement les formules ci-dessous en vous aidant du dessin :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{u}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{u}_y + \cos\theta\,\vec{u}_z \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{u}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{u}_y - \sin\theta\,\vec{u}_z \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{u}_x + \cos\varphi\,\vec{u}_y \end{cases}$$

5. La base $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$ a une propriété bien singulière : constatez en faisant un dessin que cette base change d'orientation en fonction de la position du point M ! **<u>On dit de cette base qu'elle est locale</u>**. <u>Cette propriété est d'une importance capitale</u> pour les calculs que nous ferons plus tard (il faudra toujours penser qu'une base locale n'est pas constante en orientation dans l'espace).



III - TRAJECTOIRE – VITESSE - ACCELERATION

III – 1 <u>Trajectoire</u>

La ligne que suit le point M au cours de son mouvement s'appelle sa trajectoire. Mathématiquement, **<u>une trajectoire est caractérisée par une ou plusieurs relations</u>**

existant entre les coordonnées du point M que l'on appelle équation(s) de la trajectoire. Connaître la trajectoire suivie par le point M, c'est connaître la ou les relations qui lient les coordonnées de ce point entre elles.

Exemple à deux dimensions - En coordonnées cartésiennes (x et y) : y = ax + b est l'équation d'une trajectoire rectiligne. En coordonnées polaires (r et θ), cette même trajectoire sera représentée par la relation r = b/(sinθ-acosθ).

Exemple à trois dimensions - en coordonnées cartésiennes (x, y et z), les deux équations : y = ax + b et z = cx + d forment les équations d'une trajectoire rectiligne. En coordonnées cylindriques (ρ, φ et z) : ρ = R et z = Aφ sont les équations d'une trajectoire hélicoïdale (hélice).

Dans ces exemples, le temps t n'apparaît pas. En effet, il n'est pas nécessaire de connaître x(t), y(t) et z(t) [ou bien r(t), θ(t) et φ(t), …] pour obtenir la trajectoire suivie par le point M : il suffit juste de connaître les relations qui existent entre x, y et z [ou bien r, θ et φ,…] . Mais si on veut une description complète du mouvement, il faut aussi savoir de quelle façon le point M parcourt cette trajectoire au cours du temps car on veut toujours pouvoir répondre à la question : au temps t, ou se trouve le point M ? Dans ce cas, la connaissance de x, y et z [ou bien r, θ et φ,…] en fonction du temps est indispensable. Les relations qui donnent l'expression des coordonnées du point M en fonction du temps s'appellent les **équations paramétriques de la trajectoire** (le paramètre est le temps t). Par exemple, les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} y = t + b \\ x = t/a \end{cases}$$

sont les équations paramétriques de la trajectoire du point M de coordonnées cartésiennes (x(t), y(t)). Elles permettent de savoir ou sera le point M à n'importe quel instant t. Si on élimine le paramètre t entre ces équations, on obtient l'équation de la trajectoire : y = ax + b.

III – 2 Vitesse et accélération

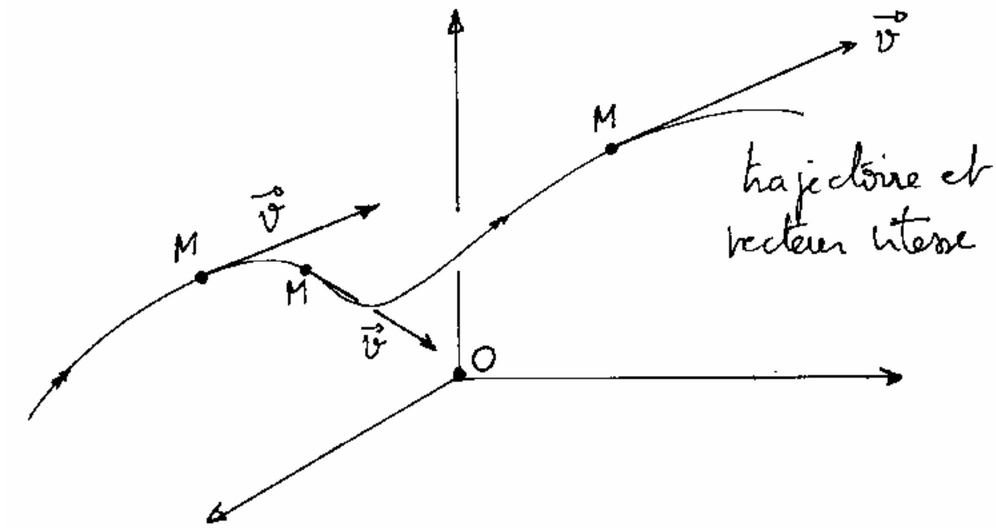
Pour caractériser l'allure à laquelle le point M parcourt sa trajectoire, on définit le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ du point M par [7]:

$$\vec{v}(t) \underset{def}{\equiv} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$$

Le vecteur vitesse est donc la dérivée du rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps. Lorsque l'on connaît $\vec{v}(t)$, on sait comment a évolué le rayon vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ pendant la

[7] Remarque générale à propos de la notation dite « différentielle » pour les dérivées : en toute rigueur, il y a une différence mathématique entre les écritures d et Δ : Δt est un petit intervalle de temps appelé à tendre vers 0, tandis que d/dt doit être compris comme un symbole mathématique inséparable (notation différentielle) signifiant : « dérivée par rapport à t ». Dans la pratique, on confond très souvent les deux, dans le sens où on sépare le symbole et on assimile dt à Δt et $d\vec{v}$ à $\Delta\vec{v}$. Les mathématiciens justifient cette façon de faire qui est d'ailleurs à l'origine de la notation différentielle. Bien sûr, ce qui vient d'être dit n'est pas propre à l'exemple choisi (temps et vitesse), mais à toute dérivée. Dans le cours, cette assimilation est utilisée à différents endroits.

durée infinitésimale dt : il aura évolué d'une quantité infinitésimale $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$. De par sa définition même, **<u>le vecteur vitesse est à chaque instant tangent à la trajectoire suivie par le point M</u>**.



Il est facile de se rendre compte intuitivement de cette propriété en traçant sur un dessin les rayons vecteurs pris à l'instant t et à l'instant suivant infiniment voisin $t+\Delta t$, puis en traçant leur différence.

Ce qu'on appelle la vitesse v du point M proprement dite est par définition le module du vecteur vitesse : $v = |\,\vec{v}\,|$. Une vitesse s'exprime en mètres par seconde : ms^{-1}

On définit également « la vitesse de la vitesse », c'est à dire le vecteur accélération du point M :

$$\vec{a} \underset{def}{\equiv} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

L'accélération a du point M proprement dite sera par définition le module du vecteur accélération : $a = |\,\vec{a}\,|$. Une accélération s'exprime en mètres par seconde, par seconde : ms^{-2}.

Quelque soit le mouvement, les 2 vecteurs $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$ définissent le plan dans lequel évolue la trajectoire pendant la durée dt après l'instant t. En effet, d'une part le vecteur vitesse, $\vec{v}(t)$, est constamment tangent à la trajectoire, et d'autre part le vecteur accélération, $\vec{a}(t)$, n'est rien d'autre que la petite variation $d\vec{v}$ du vecteur vitesse rapportée à la durée infinitésimale dt ($\vec{a}(t) = d\vec{v}/\,dt$) : ce vecteur indique donc la direction vers laquelle évolue la trajectoire pendant dt.

III – 3 <u>Notations</u>

Par souci de simplification d'écriture, les physiciens ont adopté la notation suivante pour la dérivée temporelle : **<u>la dérivée temporelle d'une grandeur sera notée en plaçant un point au dessus de cette grandeur</u>**. Par exemple :

$$\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} \text{ ou encore } \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \equiv \dot{\overrightarrow{OM}}$$

Si c'est la dérivée temporelle du second ordre, on mettra deux points ; par exemple :

$$\frac{d^2x}{dt^2} \equiv \ddot{x}$$

Toujours dans un souci de simplification de l'écriture, **on convient de ne pas noter systématiquement la dépendance temporelle d'une grandeur** : par exemple, au lieu d'écrire x(t), on écrit simplement x.

III – 4 Calcul des vecteurs vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes

Pour cet exemple nous nous limiterons à l'étude dans un plan. Soit un référentiel plan {O, xy} par rapport auquel on repère un point M en mouvement par ses coordonnées cartésiennes x = x(t) et y = y(t). Dans ce système de coordonnées, le rayon vecteur s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y$. Le vecteur vitesse s'écrira donc :

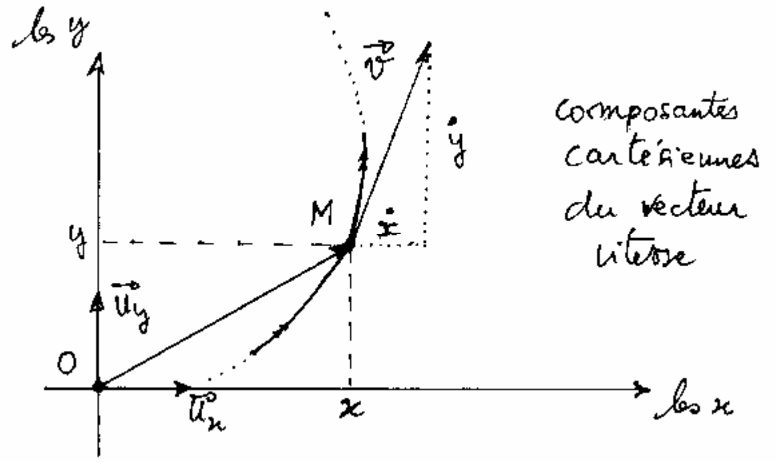
$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y\right) = \dot{x}\,\vec{u}_x + x\frac{d\vec{u}_x}{dt} + \dot{y}\,\vec{u}_y + y\frac{d\vec{u}_y}{dt}$$

Il reste à évaluer les dérivées par rapport au temps des vecteurs de base $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$. Mais ces vecteurs bougent-ils en fonction du temps ? La réponse est NON : nous avons déjà remarqué que quelle soit la position du point M dans l'espace, une base cartésienne garde toujours la même orientation : elle est fixe. Les deux dérivées sont donc nulles et on peut alors écrire le vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{u}_x + \dot{y}\,\vec{u}_y$$

et son module : $v = |\,\vec{v}\,| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

Un raisonnement identique donnera pour le vecteur accélération et son module : $\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{u}_x + \ddot{y}\,\vec{u}_y$ et $a = |\,\vec{a}\,| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$.



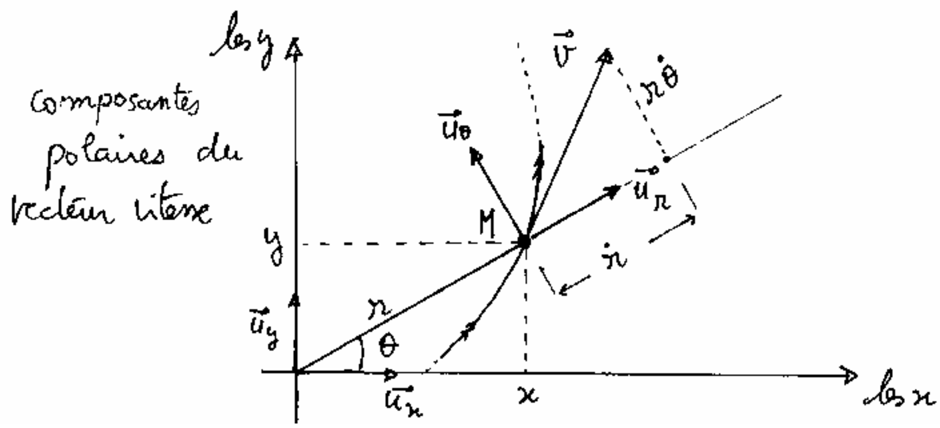
III – 5 <u>Calcul des vecteurs vitesse et accélération en coordonnées polaires</u>

Reprenons le point M de l'exemple qui précède, mais repérons-le cette fois à l'aide des coordonnées polaires r = r(t) et θ = θ(t). Dans ce nouveau système de coordonnées, le rayon vecteur s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\,\vec{u}_r$. Le vecteur vitesse s'écrira donc :

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(r\,\vec{u}_r\right) = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

Dans cette expression, il reste à évaluer la dérivée par rapport au temps du vecteur $\vec{u}_r$. Posons-nous la même question que tout à l'heure : ce vecteur bouge-t-il en fonction du temps ? Cette fois, la réponse est OUI : car la base $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$ associée aux coordonnées polaires est une base locale : elle change d'orientation en fonction de la position du point M dans le plan. En conséquence, la dérivée temporelle de ces deux vecteurs doit être non nulle. Pour faire le calcul de ces deux dérivées, nous allons exprimer la base $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$dans la base $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y\}$. Nous ne ferons ce calcul qu'une fois. Par la suite, on se rappellera du résultat sans refaire la démonstration (exactement comme quand vous écrivez que la dérivée de sinθ par rapport à θ vaut cosθ : vous ne le redémontrez pas à chaque fois). Après examen de la figure, on obtient facilement :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y \end{cases}$$



on a donc :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y\right) = \dfrac{d}{dt}(\cos\theta)\,\vec{u}_x + \dfrac{d}{dt}(\sin\theta)\,\vec{u}_y \\ \dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(-\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y\right) = \dfrac{d}{dt}(-\sin\theta)\,\vec{u}_x + \dfrac{d}{dt}(\cos\theta)\,\vec{u}_y \end{cases}$$

où l'on a utilisé le fait que les vecteurs $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ ne dépendent pas du temps. Il reste maintenant à exprimer les dérivées de sinθ et cosθ par rapport au temps t (et non pas par rapport à θ !). Pour cela nous allons utiliser un résultat de mathématiques que vous connaissez déjà, mais avec d'autres notations : lors de l 'étude des fonctions composées, vous avez certainement vu la formule de dérivation concernant la fonction composée $f \circ g$ de deux fonctions f et g qui dépendent de la variable x :

$$(f \circ g)' = g'.(f' \circ g) \text{ , qui s'écrit aussi : } \frac{d}{dx}\left[f\,(g(x))\right] = g'(x).\,f'\left[g(x)\right]$$

Faites l'identification suivante avec notre problème : x est le temps t, f est la fonction sin (ou cos), et $g(x)$ n'est rien d'autre que $\theta(t)$. On a donc :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\cos\theta) = \dfrac{d\theta}{dt}.\left(-\sin\theta(t)\right) = -\dot{\theta}\sin\theta \\ \dfrac{d}{dt}(\sin\theta) = \dfrac{d\theta}{dt}.\left(\cos\theta(t)\right) = \dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

Ce que nous venons de faire s'interprète aussi comme un changement de variable dans la dérivation qui peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\cos\theta) = \dfrac{d(\cos\theta)}{dt} = \dfrac{d(\cos\theta)}{dt}.\dfrac{d\theta}{d\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}.\dfrac{d(\cos\theta)}{d\theta} = -\dot{\theta}\sin\theta \\ \dfrac{d}{dt}(\sin\theta) = \dfrac{d(\sin\theta)}{dt} = \dfrac{d(\sin\theta)}{dt}.\dfrac{d\theta}{d\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}.\dfrac{d(\sin\theta)}{d\theta} = \dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

Comprenez bien cette façon de faire, car vous en aurez souvent besoin.

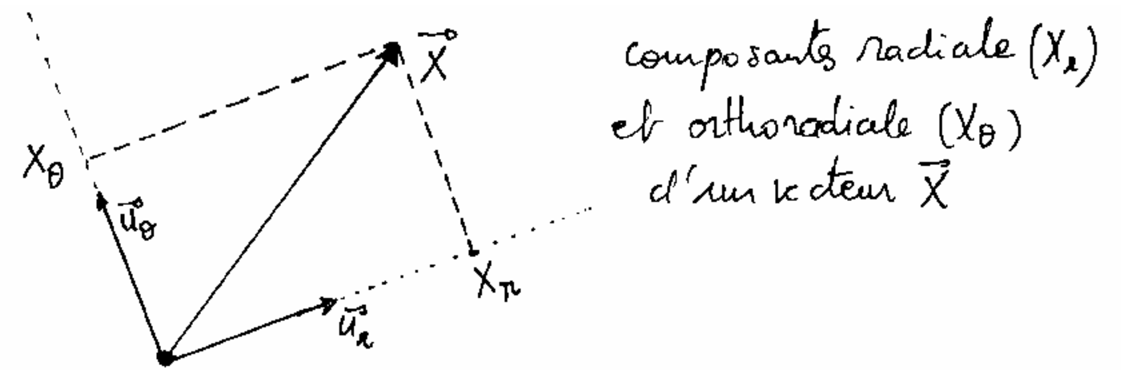
Dans le résultat de ce calcul figure la dérivée temporelle de l'angle θ , $\dot{\theta}$: cette variable nous indique à quelle allure varie l'angle θ : c'est **<u>la vitesse angulaire</u>**. Une vitesse angulaire s'exprime en radians[8] par seconde : $rd\ s^{-1}$.

Nous avons maintenant à notre disposition tout ce qu'il faut pour exprimer les dérivées temporelles des vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ dans la base $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y\}$ que nous allons retranscrire dans la base $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$:

[8] Attention : stricto senso, **<u>le radian n'est pas une unité</u>**. Un angle est un nombre sans dimension. Toutefois, pour des raisons pratiques, on a inventé des unités pour mesurer les angles : le degré ou le grade. Du coup, pour éviter toute confusion, lorsqu'un angle est exprimé en tant que nombre, on convient de dire que cet angle est exprimé en radians.

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{u}_x + \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{u}_y = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \\ \dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{u}_x - \dot{\theta}\sin\theta\,\vec{u}_y = -\dot{\theta}\,\vec{u}_r \end{cases}$$

Le vecteur vitesse en coordonnées polaires s'écrit donc : $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ et son module : $v = |\,\vec{v}\,| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}$. La composante selon $\vec{u}_r$ est appelée **composante radiale**, tandis que la composante selon $\vec{u}_\theta$ est appelée **composante orthoradiale**. Cette appellation est valable pour n'importe quel vecteur exprimé dans la base des coordonnées polaires.



Le calcul du vecteur accélération est un peu plus long mais ne présente aucune autre difficulté que celles que nous avons déjà rencontrées. Vous êtes fortement encouragés à le faire par vous-même. Vous trouverez : $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta$

IV – MOUVEMENTS SIMPLES

IV – 1 __Mouvement rectiligne__

Par définition, un mouvement est dit rectiligne si la trajectoire est une droite. Une droite se situant toujours dans un plan, on travaillera dans ce plan pour simplifier les calculs. Le système de coordonnées le mieux adapté pour décrire ce type de trajectoire est le système de coordonnées cartésiennes. Soit donc un référentiel {0, xy} muni du système de coordonnées cartésiennes x et y et de la base associée $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y\}$. Nous allons étudier quelques propriétés du mouvement rectiligne en partant de l'équation de la trajectoire : $y(t) = \alpha\, x(t) + \beta$ où α et β sont deux constantes réelles.

Le point M évoluant sur la trajectoire, le rayon vecteur s'écrit donc :

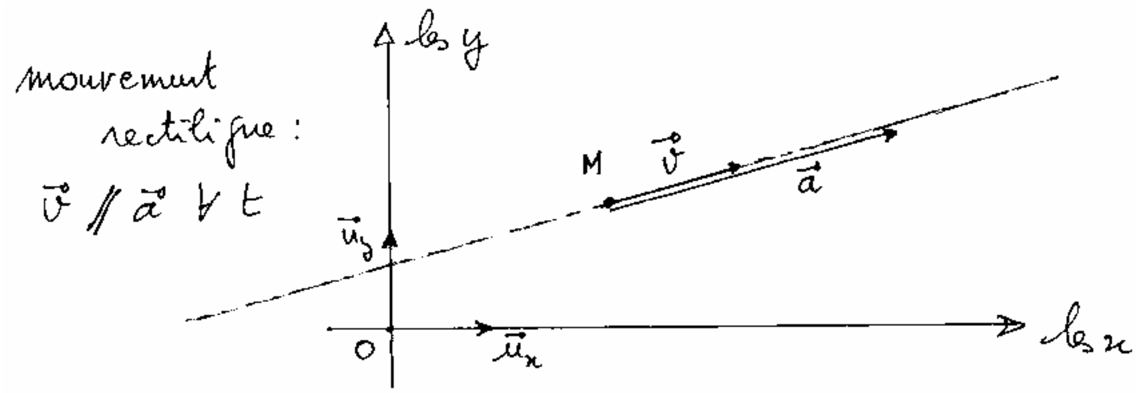
$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y = x\,\vec{u}_x + (\alpha\, x + \beta)\,\vec{u}_y$$

d'où les vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs modules :

$$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{u}_x + \alpha\,\dot{x}\,\vec{u}_y = \dot{x}\left(\vec{u}_x + \alpha\,\vec{u}_y\right) \qquad \text{et} \qquad v = |\,\vec{v}\,| = |\,\dot{x}\,|\sqrt{1+\alpha^2}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{u}_x + \alpha\,\ddot{x}\,\vec{u}_y = \ddot{x}\left(\vec{u}_x + \alpha\,\vec{u}_y\right) \qquad \text{et} \qquad a = |\,\vec{a}\,| = |\,\ddot{x}\,|\sqrt{1+\alpha^2}$$

L'examen de ces résultats montre **<u>que dans le cas d'un mouvement rectiligne, les vecteurs vitesse et accélération sont constamment co-linèaires et tangents à la trajectoire</u>**. D'autre part, on voit que, comme on l'a déjà dit, la seule donnée de la trajectoire ne suffit pas pour connaître la nature exacte du mouvement : en effet, si on ne se donne pas x en fonction du temps, on ne peut pas savoir ce que valent $\dot{x}$ et $\ddot{x}$ en fonction du temps : il y a donc plusieurs types (une infinité en fait) de mouvements rectilignes qui se distinguent par la façon dont se déplace le point M le long de la droite.



<u>1er cas</u> : le point M se déplace à vitesse constante le long de la trajectoire (<u>mouvement rectiligne uniforme</u>) – On a alors $v = Cte = v_0$. Dans ce cas, x est une fonction linéaire du temps et $\dot{x}$ est une constante (positive ou négative selon le sens de parcours).

<u>2ème cas</u> : le point M se déplace à accélération constante le long de la trajectoire (<u>mouvement rectiligne uniformément varié</u>) – On a alors $a = Cte = a_0$. Dans ce cas, x est une fonction quadratique du temps et $\ddot{x}$ est une constante (positive ou négative selon le sens de parcours).

Tous les autres cas portent la dénomination de mouvement rectiligne varié. On l'appelle mouvement rectiligne sinusoïdal si $x = \sin t$ par exemple, exponentiel si $x = e^t$, etc…

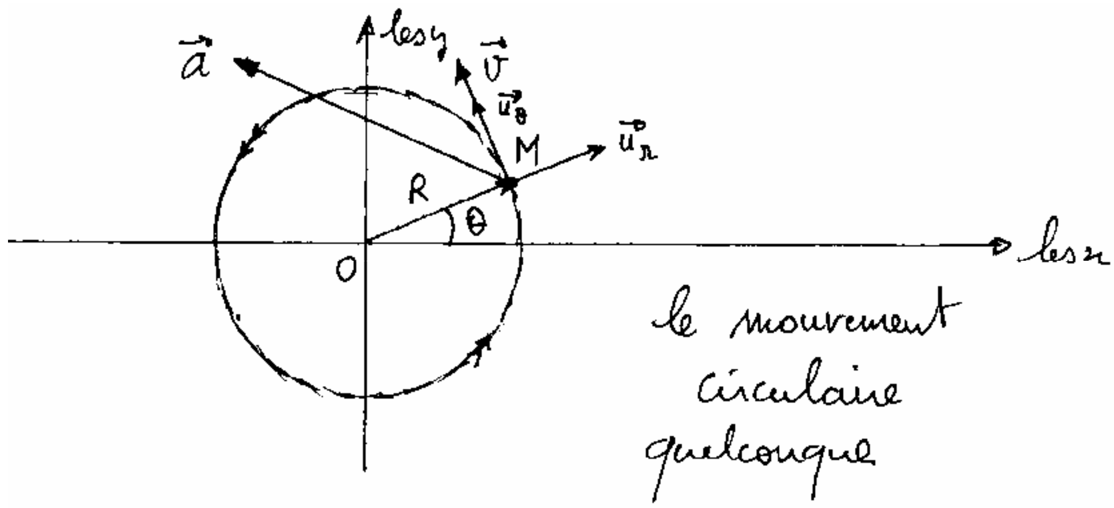
IV – 2 <u>Mouvement circulaire</u>

Par définition, un mouvement est dit circulaire si la trajectoire est un cercle. Un cercle est une courbe plane, on peut donc se placer dans un plan pour étudier ce type de trajectoire. De plus, il existe un centre de symétrie (le centre du cercle), ce qui signifie que les coordonnées polaires sont les mieux adaptées. Soit donc un référentiel {O, xy} (O, centre du cercle) muni des coordonnées polaires r et θ et de la base associée $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$. L'équation de la trajectoire est $r = Cte = R$, où R est le rayon du cercle. Les vecteurs vitesse et accélération, ainsi que leurs modules, s'écrivent alors :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \qquad \text{et} \qquad v = |\,\vec{v}\,| = \sqrt{R^2\dot{\theta}^2} = R\,|\,\dot{\theta}\,|$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta \qquad \text{et} \qquad a = |\,\vec{a}\,| = R\,\sqrt{\dot{\theta}^4 + \ddot{\theta}^2}$$

Comme pour le mouvement rectiligne, il existe une infinité de types de mouvements circulaires, selon la manière dont θ varie avec le temps. Vous remarquerez que de façon générale, on ne peut rien dire de particulier à propos de l'angle que font entre eux les vecteurs vitesse et accélération, sauf dans le cas du mouvement circulaire uniforme, c'est-à-



dire lorsque le module de la vitesse est constante. Dans ce cas, la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est constante : $\dot{\theta} = \pm v/\ R$ (± selon le sens de parcours), et les vecteurs vitesse et accélération sont alors constamment perpendiculaires entre eux. On peut dire aussi dans ce cas que le vecteur accélération est constamment perpendiculaire à la trajectoire.

IV – 3 Mouvement hélicoïdal

De façon très générale, un mouvement est dit hélicoïdal si la trajectoire s'enroule autour d'un axe. Ce type de trajectoire s'effectue dans l'espace à 3 dimensions. Nous n'étudierons ici qu'un cas très particulier de mouvement hélicoïdal, celui où la trajectoire est une hélice proprement dite. En coordonnées cylindriques (ρφz) (système le mieux adapté), les équations d'une hélice de centre 0 s'écrivent :

$$\rho = Cte = R \qquad \text{et} \qquad z = \frac{H}{2\pi}\,\varphi$$

R est le rayon de l'hélice : c'est le rayon du cercle obtenu en projetant l'hélice sur le plan xOy. H est le pas de l'hélice (que nous choisirons constant ici) qui nous dit de combien est-on monté (ou descendu) après avoir fait un tour autour de l'axe Oz.

En coordonnées cylindriques le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \rho\,\vec{u}_\rho + z\,\vec{u}_z$, qui devient ici :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = R\,\vec{u}_\rho + \frac{H\varphi}{2\pi}\,\vec{u}_z$$

D'où les vecteurs vitesse, accélération et leurs modules :

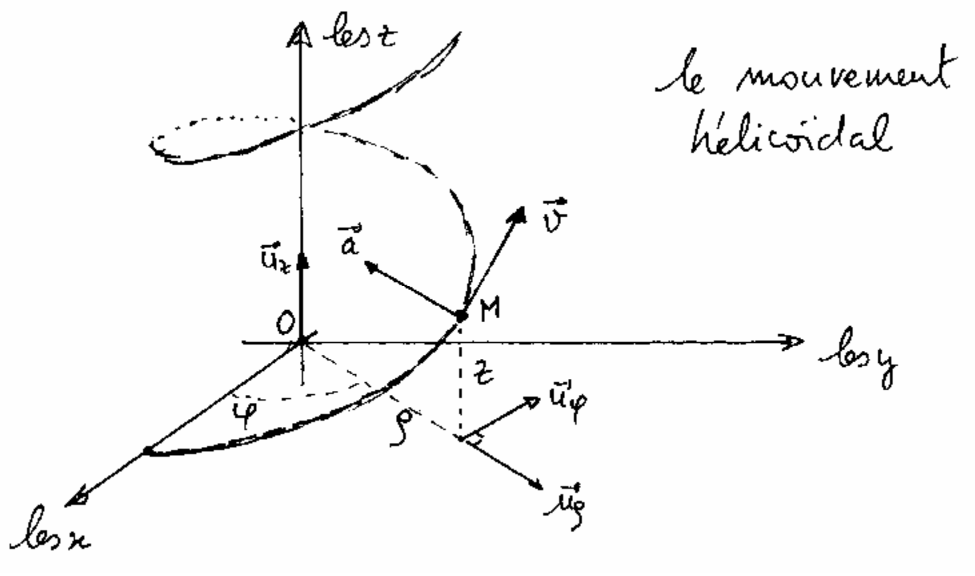
$$\vec{v} = R\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi + \frac{H\dot{\varphi}}{2\pi}\vec{u}_z \qquad \text{et} \qquad v = |\,\dot{\varphi}\,|\sqrt{R^2 + \frac{H^2}{4\pi^2}}$$

$$\vec{a} = -R\dot{\varphi}^2\,\vec{u}_\rho + R\ddot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi + \frac{H\ddot{\varphi}}{2\pi}\vec{u}_z \quad \text{et} \qquad a = \sqrt{R^2\dot{\varphi}^4 + R^2\ddot{\varphi}^2 + \frac{H^2\ddot{\varphi}^2}{4\pi^2}}$$

La donnée de φ en fonction du temps nous dit à quelle allure se déplace le point M sur l'hélice, ce qui détermine complètement la nature du mouvement. Nous nous restreindrons au cas particulier où l'angle φ est une fonction linéaire du temps : $\varphi = \omega\, t$, où ω est une constante choisie positive qui n'est rien d'autre que la vitesse angulaire du point M (en effet : $\dot{\varphi} = \omega$). Remarquez que la vitesse et l'accélération du point M sont alors constantes en module et que les vecteurs vitesse et accélération deviennent :

$$\vec{v} = R\omega\,\vec{u}_\varphi + \frac{H\omega}{2\pi}\vec{u}_z \qquad \text{et} \qquad \vec{a} = -R\omega^2\,\vec{u}_\rho$$

On constate que, comme pour le mouvement circulaire uniforme, ces deux vecteurs sont constamment perpendiculaires entre eux. Toutefois, à la différence du mouvement circulaire, les 3 vecteurs : $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ ne sont pas situés dans un même plan.



V – ABSCISSE CURVILIGNE ET TRIEDRE DE SERRET-FRENET

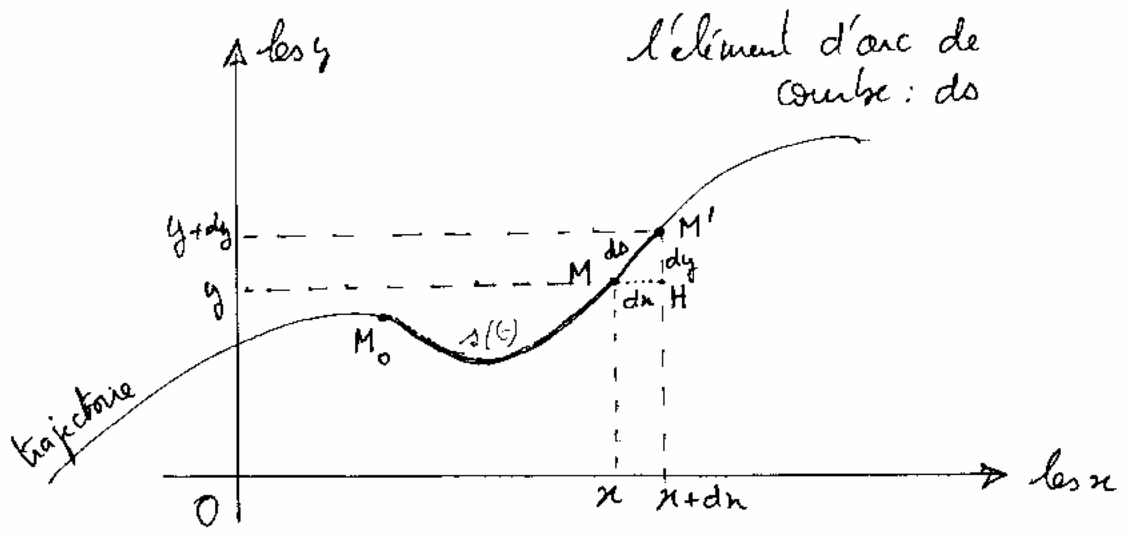
Au travers des trois exemples précédents, vous avez pu constater quelques propriétés liées à certains types de mouvements (par exemple : si le vecteur accélération est constamment colinéaire au vecteur vitesse, alors la trajectoire est une droite). Serret et Frenet ont développé une méthode de caractérisation des trajectoires et de leur nature en se servant d'une base particulière (le trièdre dit de Serret-Frenet) et de 2 paramètres que nous appellerons rayon de courbure et rayon de torsion de la trajectoire. Avant de définir plus précisément ces nouvelles variables, il nous faut faire un détour par la notion d'abscisse curviligne.

V – 1 <u>Notion d'abscisse curviligne - élément d'arc de courbe</u>

<u>Elément d'arc de courbe</u>

Considérons une trajectoire spatiale quelconque parcourue par un point M. Pendant la durée infinitésimale dt, le point M se déplace le long un petit **<u>élément d'arc de courbe</u>** de longueur ds. De sorte que la vitesse du point M peut s'écrire :

$$v = \frac{ds}{dt}$$



Cette nouvelle façon d'écrire la vitesse du point M est bien sûr cohérente avec ce que nous avons déjà vu : imaginez par exemple que le point M se déplace dans un plan et qu'il soit repéré par ses coordonnées cartésiennes ; pendant dt le point M(x,y) aura avancé jusqu'au point M'(x+dx,y+dy), de sorte que la petite distance parcourue sera :

$$MM' = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Cette distance parcourue pendant dt est infinitésimale, si bien que la distance MM' doit s'identifier avec l'élément d'arc de courbe ds qui n'est rien d'autre que l'arc MM' :

$$ds \equiv MM' = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Vous voyez sur le dessin qu'on obtient cette formule en assimilant l'arc de courbe infinitésimal avec l'hypoténuse du petit triangle rectangle MM'H, et en appliquant le théorème de Pythagore. La vitesse du point M au cours de ce mouvement sera donc :

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt} = \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

Ce résultat est analogue au calcul que nous avions fait au *III - 4*. A titre d'exercice vous devriez refaire le même raisonnement en utilisant cette fois les coordonnées polaires.

Abscisse curviligne

Supposons qu'à l'instant t_0 le point matériel passe par un point M_0 de la trajectoire et choisissons ce point M_0 comme origine. A un instant t ultérieur, le point matériel est en M sur la courbe (voir dessin). La distance qui le sépare de M_0 est égale à la longueur de l'arc de courbe M_0M . On appelle **abscisse curviligne** $s(t)$ du point M cette longueur :

$$s(t) \equiv M_0M$$

Si on connaît la vitesse du point M en tout point de la courbe en fonction du temps, alors on peut calculer son abscisse curviligne. En effet :

$$s(t) = \int_{M_0}^{M} ds = \int_{t_0}^{t} v\, dt$$

Si en plus on a choisi de repérer le point M par ses coordonnées cartésiennes, alors on peut continuer le calcul et obtenir (dans le cas du mouvement dans un plan):

$$s = \int_{t_0}^{t} v\, dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \int_{M_0(x_0,y_0)}^{M(x,y)} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx$$

Cette dernière relation permet de calculer l'abscisse curviligne du point M si on connaît l'équation de la trajectoire y(x). Etablissez une formule identique qui permet de calculer l'abscisse curviligne du point M lorsqu'il est repéré par ses coordonnées polaires.

V – 2 Trièdre de Serret-Frenet

Le trièdre de Serret-Frenet $\{\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}\}$ est une base locale particulière qui permet en quelque sorte de décomposer n'importe quel mouvement en une combinaison de mouvements rectilignes et de mouvements circulaires. Ce trièdre est constitué de 3 vecteurs particuliers orthogonaux entre eux et unitaires.

Vecteur $\vec{\tau}$

Le premier de ces vecteurs est défini de la façon suivante : $\vec{\tau}$ **est un vecteur unitaire constamment tangent à la trajectoire**. Nous connaissons déjà un vecteur constamment tangent à la trajectoire : il s'agit du vecteur vitesse. Si on divise ce vecteur par sa norme, on obtiendra un vecteur unitaire. Si bien qu'une façon de définir $\vec{\tau}$ mathématiquement est la suivante :

$$\vec{\tau} \equiv \frac{\vec{v}}{v}$$

C'est de cette façon que vous calculerez le plus souvent ce vecteur. Une définition plus fondamentale consiste à écrire :

$$\vec{\tau} \equiv \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$$. On peut donc définir $\vec{\tau}$ par : $\vec{\tau} \equiv \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$

<u>Vecteur $\vec{n}$ - formule de Serret-Frenet – Rayon de courbure – Plan osculateur</u>

Intéressons-nous maintenant à la variation du vecteur $\vec{\tau}$ au cours du temps : comme ce vecteur est unitaire, sa dérivée par rapport au temps lui est perpendiculaire ; en effet :

$$\vec{\tau}^2 = \vec{\tau}.\vec{\tau} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}(\vec{\tau}.\vec{\tau}) = 2\,\vec{\tau}.\frac{d\vec{\tau}}{dt} = 0$$

Cela va nous fournir un moyen de définir le second vecteur du trièdre de Serret-Frenet : le vecteur $\vec{n}$ **<u>est un vecteur unitaire constamment perpendiculaire à</u>** $\vec{\tau}$ **<u>, qui pointe dans la direction de la variation de</u>** $\vec{\tau}$. Comme $\vec{\tau}$ est constamment tangent à la trajectoire, on en déduit que $\vec{n}$ est constamment perpendiculaire à la trajectoire : $\vec{n}$ définit ce qu'on appelle la **<u>normale principale</u>** à la trajectoire. Une façon de calculer le vecteur $\vec{n}$ peut être la suivante :

$$\vec{n} = \frac{\frac{d\vec{\tau}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|}$$

$\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ définissent à chaque instant un plan appelé **<u>plan osculateur. Pendant la durée</u>** dt **, <u>la trajectoire appartient à ce plan</u>**.

A partir d'un raisonnement géométrique dans le plan osculateur, nous allons établir la formule dite de Serret-Frenet : considérons deux points de la trajectoire infiniment rapprochés M(t) et M'(t+dt) ainsi que leurs deux vecteurs tangents associés $\vec{\tau} = \vec{\tau}(t)$ et $\vec{\tau}' = \vec{\tau}(t+dt)$. L'élément d'arc ds qui sépare les deux points peut être considéré comme un petit arc de cercle de centre C et de rayon R, de sorte que $ds = R\,d\alpha$, où $d\alpha$ est l'angle infiniment petit indiqué sur la figure. Dans ces conditions , le vecteur $\vec{n}$ peut s'écrire :

$$\vec{n} = \frac{\frac{d\vec{\tau}}{d\alpha}}{\left|\frac{d\vec{\tau}}{d\alpha}\right|}$$

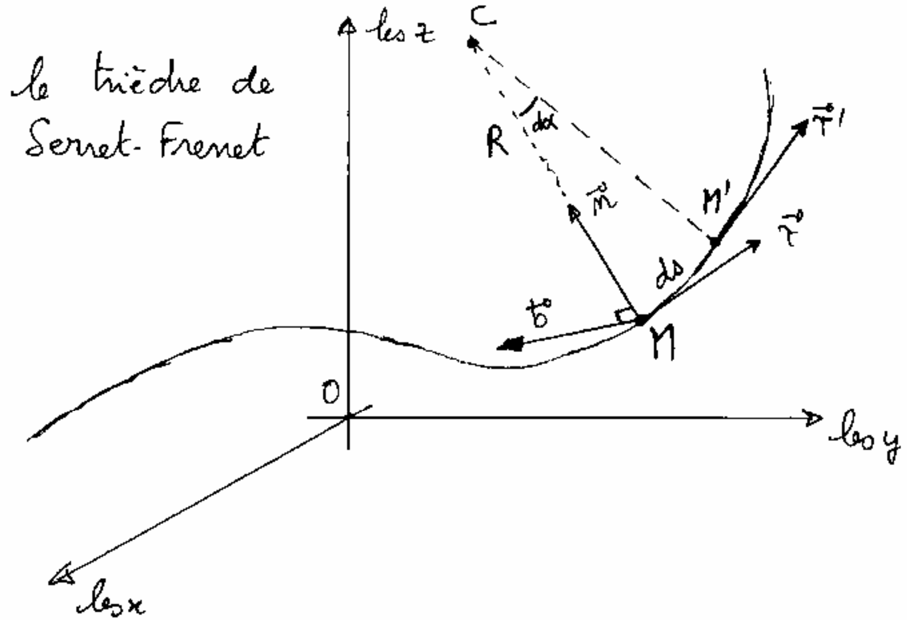
Calculons $\left|\dfrac{d\vec{\tau}}{d\alpha}\right|$:

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{d\alpha}\right| = \left|\frac{\vec{\tau}'-\vec{\tau}}{d\alpha}\right| = \frac{\sqrt{\vec{\tau}'^2+\vec{\tau}^2-2\,|\vec{\tau}|\,|\vec{\tau}'|\cos(\vec{\tau},\vec{\tau}')}}{d\alpha} = \frac{\sqrt{2-2\cos(d\alpha)}}{d\alpha} = 1$$

On en déduit immédiatement :

$$\vec{n} = \frac{d\vec{\tau}}{d\alpha} = \frac{d\vec{\tau}}{ds/R} \qquad \text{soit encore :} \qquad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}$$

<u>R est appelé rayon de courbure</u>, c'est un paramètre caractéristique de la courbe qui dépend en général du temps : sa connaissance nous renseigne sur la façon dont s'incurve la courbe au cours du temps de sorte que, pendant la durée dt, la courbe peut être assimilée à un arc de cercle de rayon R ; le cercle en question est situé dans le plan osculateur. Vous noterez enfin que le vecteur $\vec{n}$ est toujours dirigé vers la concavité de la courbe.



<u>Vecteur $\vec{b}$ - Rayon de torsion</u>

Pour compléter le trièdre de Serret-Frenet, il reste à définir un troisième vecteur que nous appellerons $\vec{b}$. La façon la plus simple de définir ce dernier vecteur consiste à poser :

$$\vec{b} \equiv \vec{\tau} \wedge \vec{n}$$

Comme $\vec{b}$ résulte d'un produit vectoriel de deux vecteurs unitaires, il sera lui-même unitaire et constamment perpendiculaire aux deux autres vecteurs. $\vec{b}$ est donc constamment perpendiculaire au plan osculateur : autrement dit, il est constamment perpendiculaire au plan auquel appartient la trajectoire pendant la durée dt. La direction ainsi définie par $\vec{b}$ s'appelle la **<u>bi-normale</u>** à la trajectoire. La connaissance de $\vec{b}$ nous renseigne sur la façon dont évolue la courbe dans l'espace. Par exemple, si $\vec{b}$ est constant au cours du temps, cela veut dire que la trajectoire est plane.

En considérant la variation du vecteur $\vec{n}$, des raisonnements analogues à ceux que nous avons fait précédemment (concernant la variation du vecteur $\vec{\tau}$) conduiraient à définir le **rayon de torsion** T qui est un autre paramètre caractéristique de la courbe. On se contentera dans ce cours de noter son existence et de dire que sa connaissance nous renseigne sur la façon dont se tord la courbe dans l'espace. Avec ce dernier paramètre, on démontre que la formule de Serret-Frenet démontrée ci-dessus fait partie du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = \dfrac{\vec{n}}{R} \\ \dfrac{d\vec{n}}{ds} = -\dfrac{\vec{\tau}}{R} - \dfrac{\vec{b}}{T} \\ \dfrac{d\vec{b}}{ds} = \dfrac{\vec{n}}{T} \end{cases}$$

V – 3 Vitesse et accélération dans le trièdre de Serret-Frenet

Il est souvent utile de calculer les composantes de la vitesse et surtout de l'accélération dans le trièdre de Serret-Frenet. Concernant la vitesse, on a simplement :

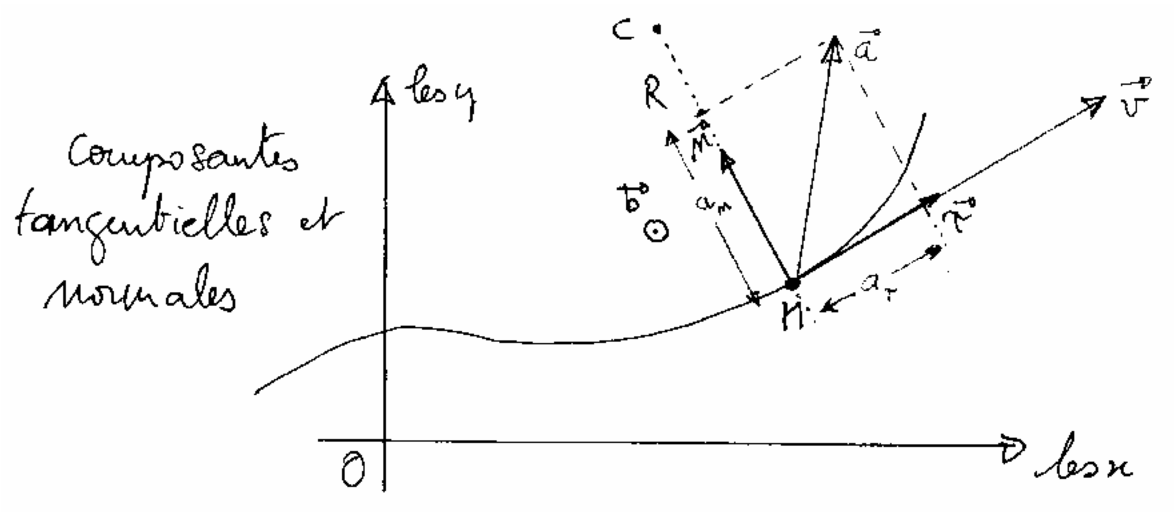
$$\vec{v} = v\vec{\tau}$$

Le vecteur vitesse n'a donc qu'une **composante tangentielle** (composante selon $\vec{\tau}$) dans le trièdre de Serret-Frenet.

Pour obtenir les composantes du vecteur accélération, il suffit de dériver le vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v\vec{\tau}\right) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v^2\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

Ainsi la **composante tangentielle de l'accélération** , souvent notée a_τ, est la dérivée par rapport au temps du module de la vitesse. On conclut donc que l'existence d'une accélération tangentielle signifie que le module de la vitesse change au cours du temps. Par contre, l'existence de cette composante de l'accélération ne modifie pas la direction de la trajectoire : le mouvement dû seulement à l'accélération tangentielle est donc rectiligne.



La **composante normale de l'accélération** (composante selon $\vec{n}$), souvent notée a_n, est le rapport v^2/R. L'existence de cette composante signifie que la direction de la vitesse change au cours du temps (donc que la trajectoire s'incurve). Dès lors qu'une trajectoire est incurvée, on peut donc être sûr de l'existence d'une accélération normale.

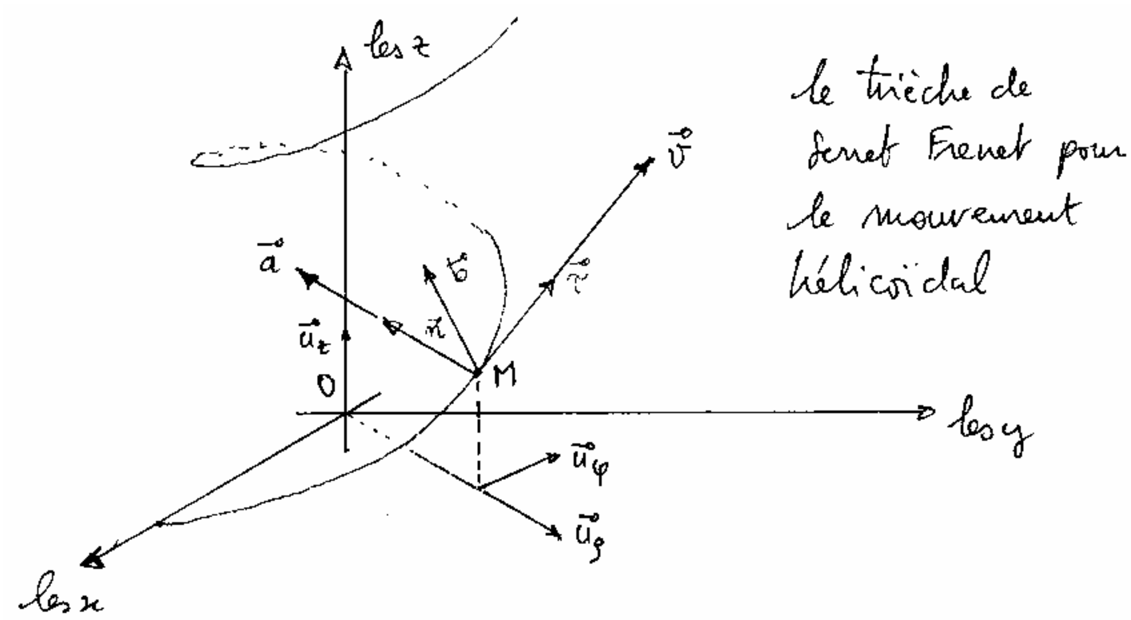
V – 4 <u>Exemple d'application : mouvement hélicoïdal</u>

A titre d'exemple, nous allons définir le trièdre de Serret-Frenet, le rayon de courbure et le rayon de torsion dans le cas du mouvement hélicoïdal déjà abordé au *IV – 3*. Reprenez les notations de ce paragraphe, faites le choix $\dot{\varphi} = \omega > 0$ où ω est une constante, et démontrez les résultats suivants (attention, ici R est le rayon de l'hélice) :

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{H^2}{4\pi^2}}}\left[R\,\vec{u}_\varphi + \frac{H}{2\pi}\vec{u}_z\right] \qquad \vec{n} = \frac{\frac{d\vec{\tau}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|} = -\vec{u}_\rho \qquad \vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{H^2}{4\pi^2}}}\left[-\frac{H}{2\pi}\vec{u}_\varphi + R\,\vec{u}_z\right]$$

Démontrez que les rayons de courbure R_C et de torsion T de l'hélice sont constants et valent :

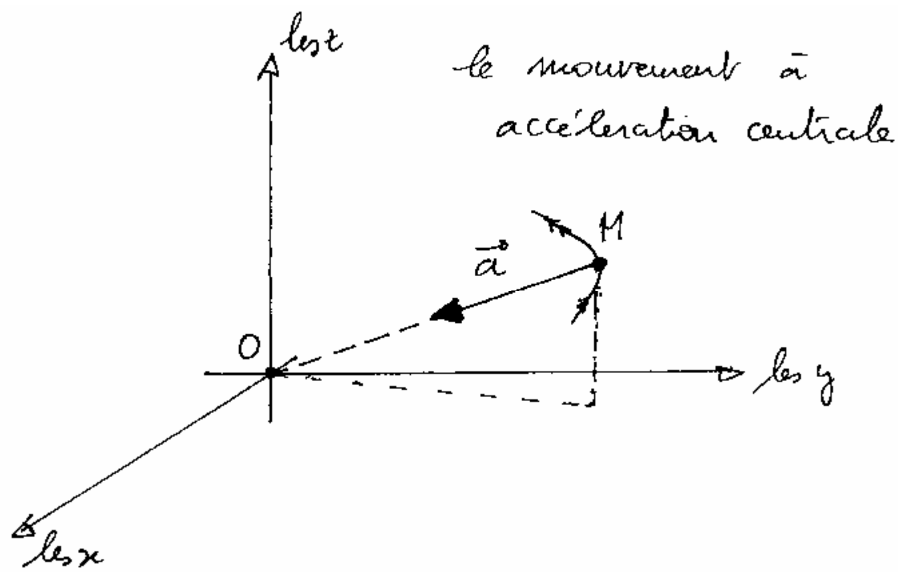
$$R_C = \frac{1}{\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|} = \frac{v}{\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|} = R + \frac{H^2}{4\pi R} \qquad T = \frac{1}{\left|\frac{d\vec{b}}{ds}\right|} = \frac{v}{\left|\frac{d\vec{b}}{dt}\right|} = \frac{H}{2\pi} + \frac{2\pi R^2}{H}$$



Amusez-vous maintenant à chercher des cas limites pour vous familiariser avec le trièdre de Serret-Frenet et les deux paramètres R_C et T : faites par exemple tendre R vers 0 et regardez ce qui se passe dans les formules (la trajectoire est alors presque une droite) ; ou encore faites tendre H vers 0 (la trajectoire est alors presque un cercle).

VI – MOUVEMENT A ACCELERATION CENTRALE - LOI DES AIRES – FORMULE DE BINET

Dans ce paragraphe, nous allons étudier quelques propriétés concernant un type de mouvement particulièrement important que l'on appelle **mouvement à accélération centrale** (ou à force centrale). Son importance vient du fait qu'on le rencontre très souvent dans la nature : l'interaction gravitationnelle entre deux objets donne lieu à ce type de mouvement, tout comme l'interaction coulombienne entre deux objets chargés, de même que le mouvement d'un pendule, etc…



On appelle mouvement à accélération centrale, tout mouvement dont le vecteur accélération est constamment dirigé vers un point O. Afin de simplifier les calculs, on choisit naturellement ce point O comme origine du référentiel par rapport auquel on étudie ce type de mouvement.

VI – 1 Le mouvement à accélération centrale est plan

Rappelons-nous d'abord que quelque soit le type de mouvement, les 2 vecteurs $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$ définissent le plan de la trajectoire pendant la durée dt après l'instant t (au même titre que les deux vecteurs $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$).

Imaginons maintenant que l'accélération soit centrale : cela signifie qu'à tous les instants, elle est dirigée vers le point O du référentiel et donc colinéaire au rayon vecteur $\vec{r}(t)$. Dans ce cas, le plan de la trajectoire à l'instant t est aussi le plan engendré par les deux vecteurs $\vec{v}(t)$ et $\vec{r}(t)$. Nous allons alors montrer que ce plan est constamment orthogonal à un vecteur constant. Pour ce faire, formons le produit vectoriel $\vec{r}(t) \wedge \vec{a}(t)$. D'après ce qui vient d'être dit, ce produit vectoriel est nul ; on a donc :

$$\vec{0} = \vec{r}(t) \wedge \vec{a}(t) = \vec{r}(t) \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}(t) \wedge \vec{v}(t)) - \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{v}(t)$$

D'après les propriétés du produit vectoriel, le dernier terme de cette expression est nul et on peut alors écrire que :

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}(t) \wedge \vec{v}(t)) = \vec{0}$$

Lorsque l'accélération est centrale, le résultat du produit vectoriel $\vec{r}(t) \wedge \vec{v}(t)$ est donc un vecteur constant dans le temps (puisque sa dérivée est nulle). Or, toujours d'après les propriétés du produit vectoriel, on sait que ce vecteur est perpendiculaire à la fois à $\vec{v}(t)$ et à $\vec{r}(t)$; il est donc orthogonal au plan de la trajectoire à chaque instant. Comme ce vecteur est constant dans le temps, c'est donc que le plan de la trajectoire est le même pendant tout le mouvement : la trajectoire est plane.

VI – 2 La loi des aires

Nous venons de voir que dans le mouvement à accélération centrale, le vecteur $\vec{r}(t) \wedge \vec{v}(t)$ est constant dans le temps : on dit que c'est une constante du mouvement. Dire que ce vecteur est constant dans le temps, c'est dire que non seulement il garde la même orientation (et que du coup la trajectoire est plane) mais que son module aussi reste constant. Pour calculer le module de ce vecteur, plaçons nous dans le plan de la trajectoire et utilisons les coordonnées polaires ρ et φ. Le calcul donne alors :

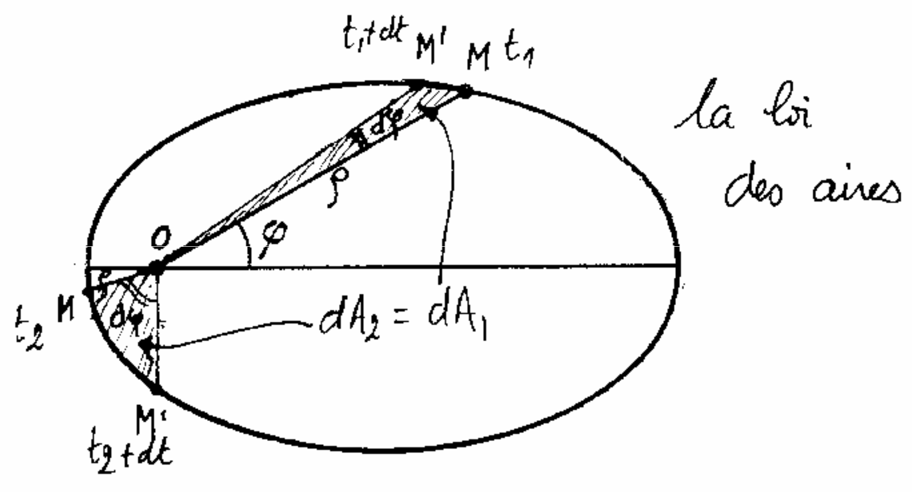
$$\vec{r}(t) \wedge \vec{v}(t) = \rho^2 \dot{\varphi} \ \vec{k}$$

où $\vec{k}$ est un vecteur unitaire orthogonal au plan de la trajectoire. On en conclu que lorsque le mouvement est à accélération centrale, la quantité $\rho^2\dot{\varphi}$ est une constante du mouvement. On appelle cette propriété du mouvement à accélération centrale la loi des aires. En effet, l'interprétation géométrique de ce résultat est la suivante. Traçons une portion de la trajectoire entre deux instants infiniment voisins t et $t+dt$; la petite aire dA du triangle OMM' vaut à l'ordre 1 :

$$dA = \frac{1}{2} Base \times Hauteur = \frac{1}{2}\rho \times \rho\, d\varphi$$

si bien que sa variation dans le temps, que l'on appelle vitesse aréolaire, s'écrit :

$$V_{aré} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}$$



Si $\rho^2\dot{\varphi}$ est une constante, on voit immédiatement que la vitesse aréolaire l'est aussi, ce qui conduit à énoncer la loi des aires : les aires balayées par le rayon vecteur en des temps égaux, en n'importe quel endroit de la trajectoire, sont égales.

VI – 3 <u>Formule de Binet</u>

Nous allons établir une formule qui permet de calculer le vecteur accélération centrale si on connaît l'équation de la trajectoire $\rho(\varphi)$. Nous avons déjà calculé p 14 le vecteur accélération dans la base des coordonnées polaires pour n'importe quel type de mouvement :

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\vec{u}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\right)\vec{u}_\varphi$$

Pour le mouvement à accélération centrale, la composante orthoradiale de $\vec{a}$ est nulle, ce qui conduit à la loi des aires $\rho^2\dot{\varphi} = Cte = C$ (vérifiez-le !). Utilisons cette même loi des aires et la constante des aires C pour écrire l'accélération sous la forme :

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \frac{C^2}{\rho^3} \right) \vec{u}_\rho$$

Nous allons maintenant exprimer $\vec{a}$ en fonction des dérivées de ρ, non pas par rapport au temps, mais par rapport à φ. Pour cela, vous devriez pouvoir démontrer que :

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{C}{\rho^2} \qquad \text{et} \qquad \ddot{\rho} = \frac{C^2}{\rho^2} \left\{ \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} - \frac{2}{\rho^3} \left[\frac{d\rho}{d\varphi} \right]^2 \right\}$$

Enfin, pour simplifier le résultat, on a l'habitude d'exprimer la formule de Binet en fonction de $u = 1/\rho$. Faites ce changement de variable pour trouver finalement :

$$\vec{a} = -C^2 u^2 \left[\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u \right] \vec{u}_\rho$$

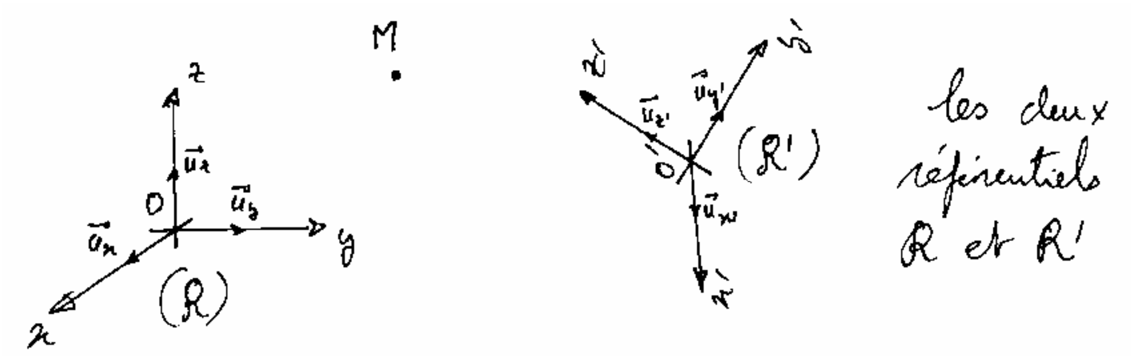
Nous nous servirons de cette relation liant la trajectoire à l'accélération centrale lorsque nous étudierons le mouvement des planètes autour du soleil.

VII – CHANGEMENT DE REFERENTIEL – COMPOSITION DES MOUVEMENTS

VII – 1 __Introduction au problème__

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, le mouvement et la trajectoire d'un point matériel ne sont que des notions relatives à un référentiel donné tout comme le sont les notions de vitesse et d'accélération. Il est donc évident qu'a priori, deux observateurs différents en mouvement l'un par rapport à l'autre vont décrire et voir de manière différente le mouvement d'un même point M. Pour fixer les idées, imaginez par exemple le mouvement de la valve d'une roue de vélo : pour un observateur sur le vélo, la valve décrit un mouvement circulaire, tandis que pour un observateur au sol, la valve décrit un mouvement plus compliqué dont la trajectoire est appelée cycloïde. La question qui se pose alors est de savoir comment les deux observateurs vont-ils tomber d'accord entre eux ? Ce problème sera résolu si, connaissant le mouvement des deux observateurs l'un par rapport à l'autre, on dispose de __**lois de transformations**__ qui permettent à chaque observateur de déduire le mouvement du point M vu par l'autre observateur. Ces lois de transformation à découvrir doivent concerner la position du point M, sa vitesse et son accélération, qui sont toutes les trois différentes pour chacun des deux observateurs.

Les données du problème sont les suivantes (voir dessin). Soient deux référentiels $\Re \equiv \Re(O, xyz)$ et $\Re' \equiv \Re'(O', x'y'z')$. O et O' sont les origines de chacun des deux référentiels, de même que (OxOyOz) et (O'x'O'y'O'z') sont les axes de référence des deux référentiels. Pour déterminer les lois de transformation, nous allons utiliser les coordonnées cartésiennes du point M en mouvement : (xyz) et (x'y'z') pour chacun des deux référentiels, ainsi que les bases cartésiennes associées $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ et $\{\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'}\}$. Bien sûr, les observateurs sont en droit de choisir n'importe quel autre système de coordonnées pour décrire le mouvement du point M ; il se trouve simplement que les calculs que nous allons faire seront plus simples avec les coordonnées cartésiennes. A la fin des calculs, nous exprimerons les lois de transformation que nous aurons trouvées sous une forme vectorielle, c'est à dire indépendantes du choix initial des systèmes de coordonnées.



Les deux référentiels $\Re$ et $\Re'$ sont en mouvement l'un par rapport à l'autre. Ce mouvement est supposé connu. Par commodité de langage, nous appellerons $\Re$ le référentiel fixe ou absolu, et $\Re'$ le référentiel mobile ou relatif, c'est à dire que nous adoptons le point de vue de l'observateur situé en O qui se considère comme fixe et qui voit O' animé d'un certain mouvement connu. Ce point de vue, ne l'oubliez pas, n'est que relatif car bien sûr, pour l'observateur en O', c'est lui qui est fixe et c'est O qui est animé du mouvement inverse. Les formules de transformation que nous allons établir pourrons bien sûr s'inverser, le choix qui est fait est répétons-le purement arbitraire. Dans le référentiel $\Re$, position, vitesse et accélération d'un point seront qualifiées d'absolues ; dans le référentiel $\Re'$, elles seront qualifiées de relatives.

VII – 2 __Loi de transformation des positions__

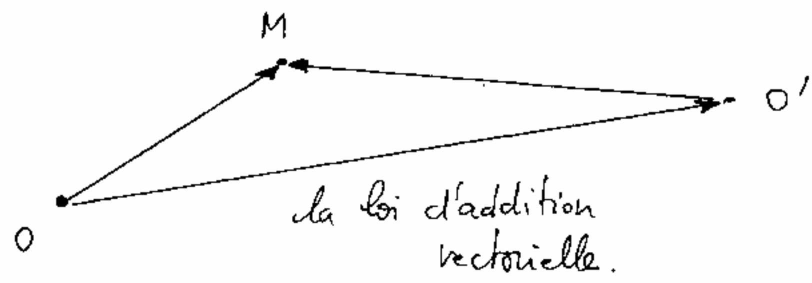
Cette loi est la plus simple à découvrir. Pour l'observateur de $\Re$, la position (absolue) du point M est repérée par le vecteur qui joint l'origine du référentiel à ce point : $\overrightarrow{OM}$. Tandis que pour l'observateur de $\Re'$, la position (relative) du point M est repérée par le vecteur qui joint cette fois l'origine O' du référentiel à ce point : $\overrightarrow{O'M}$. Afin d'établir un lien entre ces deux vecteurs il suffit d'utiliser la loi d'addition vectorielle (ou relation de Chasle) que vous connaissez déjà, et qui est valable à tout instant :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

C'est la loi de transformation des positions. Pour passer de la position du point M dans $\Re'$ à la position du point M dans $\Re$ ou vice versa, il suffit de connaître le vecteur $\overrightarrow{OO'}$, qui est connu dès lors que le mouvement entre $\Re$ et $\Re'$ est connu.

<u>Remarque</u> - Bien que cette loi soit très simple, elle cache en vérité deux hypothèses sous-jacentes que nous avons déjà émises au début de ce cours : premièrement, nous avons

supposé implicitement que la géométrie euclidienne reste valable dans chacun des deux référentiels, ce qui n'est qu'une approximation (excellente mais une approximation tout de même). Deuxièmement, nous avons admis que le temps s'écoule de la même façon dans les deux référentiels, ce qui là aussi n'est qu'une approximation.



VII – 3 Loi de transformation des vitesses

La vitesse (absolue) du point M pour l'observateur de $\Re$ s'obtient en calculant la dérivée temporelle du rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$:

$$\vec{v}_a = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\Re} = \dot{x}\,\vec{u}_x + \dot{y}\,\vec{u}_y + \dot{z}\,\vec{u}_z$$

où nous avons pris soin dans les notations de mettre l'indice a pour absolue, et de préciser par rapport à quel référentiel nous faisons la dérivation. La vitesse (relative) du point M pour l'observateur de $\Re'$ s'obtient en calculant la dérivée temporelle du rayon vecteur $\overrightarrow{O'M}$:

$$\vec{v}_r = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{\Re'} = \dot{x}'\,\vec{u}_{x'} + \dot{y}'\,\vec{u}_{y'} + \dot{z}'\,\vec{u}_{z'}$$

où nous avons pris soin dans les notations de mettre l'indice r pour relative, et de préciser que la dérivation se fait dans le référentiel $\Re'$.

Nous allons maintenant partir de la loi de transformation des positions pour obtenir la loi de transformation des vitesses.

On peut écrire la vitesse absolue du point M sous la forme :

$$\begin{aligned}\vec{v}_a &= \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\Re} = \left.\frac{d\left[\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}\right]}{dt}\right|_{\Re} = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{\Re} + \frac{d}{dt}\left[x'\,\vec{u}_{x'} + y'\,\vec{u}_{y'} + z'\,\vec{u}_{z'}\right]_{\Re} \\ &= \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{\Re} + \left[x'\left.\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt}\right|_{\Re} + y'\left.\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt}\right|_{\Re} + z'\left.\frac{d\vec{u}_{z'}}{dt}\right|_{\Re}\right] + \left[\dot{x}'\,\vec{u}_{x'} + \dot{y}'\,\vec{u}_{y'} + \dot{z}'\,\vec{u}_{z'}\right]\end{aligned}$$

Dans cette expression, on reconnaît le dernier terme entre crochets qui n'est rien d'autre que la vitesse relative du point M.

Les deux autres termes dépendent du mouvement relatif des deux référentiels : pour le premier terme, c'est évident puisqu'il s'agit du vecteur vitesse absolue du point O'. Vous êtes peut-être surpris de voir apparaître le second terme : il s'agit d'une somme où interviennent les dérivées temporelles de vecteurs de base cartésiens. Or dans les paragraphes précédents, nous avions annulé ces dérivées en invoquant le fait qu'une base cartésienne est fixe ! Faut-il donc annuler cette somme comme auparavant ? la réponse est NON, surtout pas ! car il y a une différence de taille : la base cartésienne dont il s'agit ici est la base liée au référentiel $\Re'$; les dérivées de ces vecteurs seraient bien nulles si on effectuait la dérivation en restant dans ce référentiel, mais ça n'est pas le cas ici : on dérive ces vecteurs en se plaçant dans le référentiel $\Re$, et comme $\Re'$ est en mouvement par rapport à $\Re$, il en résulte que les vecteurs $\{\vec{u}_{x'},\vec{u}_{y'},\vec{u}_{z'}\}$ sont également en mouvement par rapport à $\Re$: les dérivées du second terme sont donc a priori non nulles.

On donne le nom de **<u>vitesse d'entraînement</u>** (du référentiel $\Re'$ par rapport au référentiel $\Re$) à la somme des deux termes que nous venons de discuter :

$$\vec{v}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{\Re} + \left[x' \left.\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt}\right|_{\Re} + y' \left.\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt}\right|_{\Re} + z' \left.\frac{d\vec{u}_{z'}}{dt}\right|_{\Re} \right]$$

de sorte que la loi de transformation des vitesses peut s'écrire :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

VII – 4 <u>Vitesse d'entraînement – Vecteur rotation</u>

Notre loi de transformation des vitesses est encore incomplète : en effet, dans l'expression de la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$ figurent les coordonnées et la base cartésiennes associées au référentiel $\Re'$. Cette expression n'est pas générale car elle prendrait une forme différente si nous avions utilisé un autre système de coordonnées. Il faut donc trouver une expression vectorielle de $\vec{v}_e$ (du second terme en particulier) qui sera valable quel que soit le système de coordonnées envisagé. Dans ce but, examinons un peu plus profondément la signification physique de $\vec{v}_e$.

Plaçons-nous dans le cas particulier où le point M est fixe pour l'observateur de $\Re'$: on a alors $\vec{v}_r = \vec{0}$ et $\vec{v}_a = \vec{v}_e$. $\vec{v}_e$ est dans ce cas la vitesse du point M par rapport au référentiel fixe $\Re$. Ce raisonnement est valable pour n'importe quel point M(x'y'z') fixe du référentiel $\Re'$: la conclusion est que $\vec{v}_e$ est la vitesse mesurée dans $\Re$ du référentiel $\Re'$ et de tout point de l'espace repéré par rapport à $\Re'$.

De façon générale, la vitesse $\vec{v}_e$ n'est pas la même pour tous les points fixes de $\Re'$ puisque $\vec{v}_e$ dépend de x', y' et z'. Il existe toutefois certaines situations réelles où le mouvement de $\Re'$ par rapport à $\Re$ est tel que la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$ est la même pour tous les points M fixes de $\Re'$: imaginez par exemple que $\Re'$ soit un train qui avance en ligne droite à la vitesse $\vec{v}_e = \vec{V}_{train}$ et que $\Re$ soit le sol : ou que vous soyez (immobile) dans le train, vous savez bien que votre vitesse par rapport au sol sera la même : $\vec{V}_{train}$. Une telle situation nécessite que les coordonnées x', y' et z' n'interviennent pas dans l'expression de $\vec{v}_e$ ci-dessus. Cela ne peut être le cas que si, et seulement si :

$$\left.\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt}\right|_{\Re} = \left.\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt}\right|_{\Re} = \left.\frac{d\vec{u}_{z'}}{dt}\right|_{\Re} = \vec{0}$$

et alors, $\vec{v}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{\Re}$

Pour cet exemple, seule la donnée de la vitesse (absolue) du point O' est nécessaire pour connaître $\vec{v}_e$, tous les autres points du référentiel $\Re'$ aurons cette même vitesse ; cela correspond bien à l'exemple. Pour ce faire, il nous a fallu annuler les dérivées des vecteurs de base $\{\vec{u}_{x'},\vec{u}_{y'},\vec{u}_{z'}\}$: dans une telle situation ces vecteurs ne bougent pas, ils gardent constamment la même orientation, même dans $\Re$ [9].

Revenons maintenant au cas général où $\vec{v}_e$ dépend des coordonnées x', y' et z ' : cela signifie donc que les vecteurs de base $\{\vec{u}_{x'},\vec{u}_{y'},\vec{u}_{z'}\}$ bougent dans $\Re$. Comme ces vecteurs ont une norme constante (ils sont unitaires), la seule façon qu'ils ont de varier au cours du temps est de tourner. Il s'ensuit que le second terme entre crochets dans l'expression de $\vec{v}_e$ est relié à une rotation de la base $\{\vec{u}_{x'},\vec{u}_{y'},\vec{u}_{z'}\}$ au cours du temps (par rapport à $\Re$). De façon générale l'axe de cette rotation et son amplitude sont quelconques et varient bien sûr au cours du temps, mais nous allons montrer maintenant que cette rotation, quelle qu'elle soit, peut être représentée à chaque instant par un unique vecteur : **le vecteur rotation**.

Le vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}$

Soit un référentiel fixe. Considérons un point M qui, à l'instant t (et pendant la durée dt), est en mouvement circulaire de centre C autour d'un axe instantané Δ (c'est à dire un axe dont l'orientation est fonction du temps) qui passe par l'origine O du référentiel (voir dessin). La vitesse angulaire du point M est notée $\Omega = \Omega(t)$. Comme nous l'avons dit lors de l'étude du mouvement circulaire, la vitesse (le module du vecteur vitesse) du point M est reliée à sa vitesse angulaire par la relation :

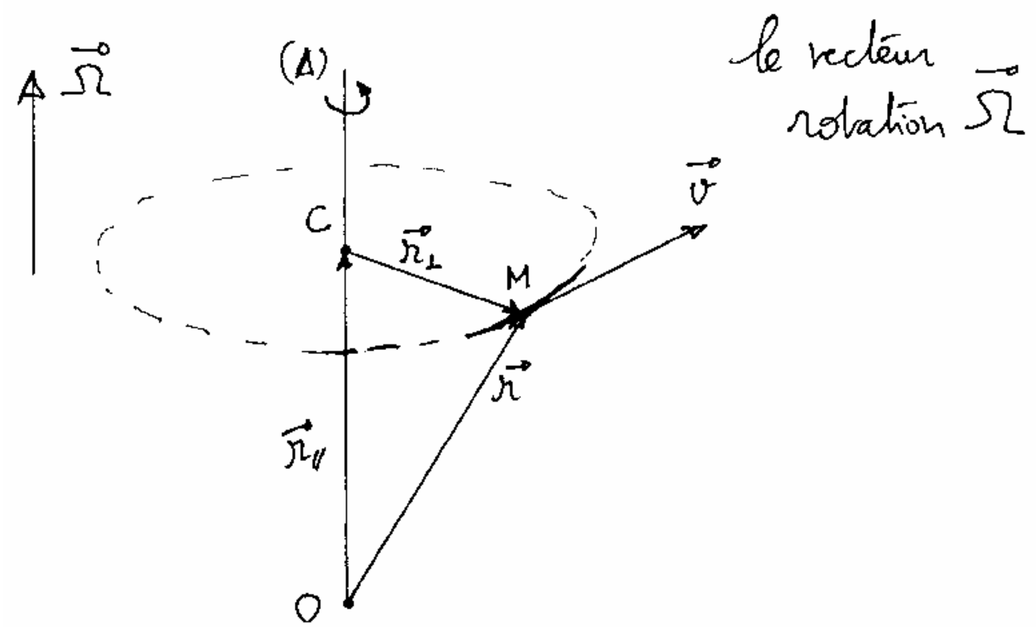
$$v = \Omega \ r_{\perp}$$

où $r_{\perp}$ est la distance du point M à l'axe de rotation (CM sur le dessin). Introduisons alors le vecteur $\vec{\Omega}$ défini par le produit vectoriel :

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{r}_{\perp} \wedge \vec{v}}{r_{\perp}^2}$$

9 Attention : l'exemple choisi pourrait faire croire que seul un mouvement rectiligne de $\Re'$ par rapport à $\Re$ donne lieu à ce genre de situation. Cela n'est pas vrai : pensez à ce qu'on appelle le mouvement de translation circulaire : un tel mouvement est caractérisé par une rotation du point O' autour de O , mais les vecteurs $\{\vec{u}_{x'},\vec{u}_{y'},\vec{u}_{z'}\}$ gardent constamment la même orientation à la fois dans $\Re$ et dans $\Re'$.

où $\vec{r}_\perp$ est le rayon vecteur $\overrightarrow{CM}$. Avec cette définition, **le vecteur $\vec{\Omega}$ a pour module la valeur absolue de la vitesse angulaire**, Ω, **et pour direction, celle de l'axe de rotation** Δ.



Les trois vecteurs, $\vec{r}_\perp, \vec{v}$ et $\vec{\Omega}$, sont orthogonaux, de sorte que l'on peut inverser la relation précédente pour obtenir :

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}_\perp$$

On peut mettre cette dernière relation sous une forme plus générale en remarquant que le rayon vecteur $\vec{r}$ s'écrit : $\vec{r} = \vec{r}_{//} + \vec{r}_\perp$ où $\vec{r}_{//}$ est le vecteur $\overrightarrow{OC}$ le long de Δ. Comme ce vecteur est parallèle au vecteur rotation $\vec{\Omega}$, leur produit vectoriel est nul. Si bien qu'on peut écrire :

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$$

Cette relation importante est valable quelque soit le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ dès lors que le mouvement est un pur mouvement de rotation ; peu importe si la vitesse angulaire et l'axe de rotation varient dans le temps : cela implique simplement que $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(t)$, mais la formule ci-dessus ne change pas.

Revenons maintenant à notre problème initial qui était d'exprimer le second terme entre crochets dans $\vec{v}_e$ d'une autre façon. Grâce à l'introduction du vecteur rotation instantanée, ce problème est pratiquement résolu : en effet, nous avons vu que le seul moyen qu'avaient les vecteurs de base $\{\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'}\}$ de bouger dans le référentiel $\Re$ était d'effectuer une rotation. Ainsi, pour chacun de ces vecteurs, on peut appliquer la formule ci-dessus où les dérivées sont bien sûr obtenues en se plaçant dans le référentiel $\Re$:

$$\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} = \vec{\Omega}_{x'} \wedge \vec{u}_{x'} \qquad \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} = \vec{\Omega}_{y'} \wedge \vec{u}_{y'} \qquad \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} = \vec{\Omega}_{z'} \wedge \vec{u}_{z'}$$

où les trois vecteurs $\vec{\Omega}_{x'}$, $\vec{\Omega}_{y'}$ et $\vec{\Omega}_{z'}$ sont a priori différents. Si on rajoute maintenant la condition que la base $\{\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'}\}$ reste toujours orthonormée au cours du temps, alors il est facile de démontrer que ces trois vecteurs n'en sont en réalité qu'un seul [10]. Ainsi, on peut écrire :

$$\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}_{x'} \qquad \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}_{y'} \qquad \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}_{z'}$$

$\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation instantanée associé au mouvement du référentiel $\Re'$ par rapport au référentiel $\Re$. Si ce mouvement est connu, alors $\vec{\Omega}$ est connu.

Il est maintenant possible d'écrire la vitesse d'entraînement sous la forme :

$$\vec{v}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{\Re} + \left[x'\,\vec{\Omega} \wedge \vec{u}_{x'} + y'\,\vec{\Omega} \wedge \vec{u}_{x'} + z'\,\vec{\Omega} \wedge \vec{u}_{x'}\right] = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{\Re} + \vec{\Omega} \wedge \left[x'\,\vec{u}_{x'} + y'\,\vec{u}_{x'} + z'\,\vec{u}_{x'}\right]$$

on reconnaît dans la dernière expression le vecteur $\overrightarrow{O'M}$, ce qui va permettre d'écrire enfin $\vec{v}_e$ sous la forme vectorielle voulue. En résumé, la loi de transformation des vitesses s'exprime de la manière suivante :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

où $\vec{v}_a$ est la vitesse absolue du point M :

$$\vec{v}_a = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\Re}$$

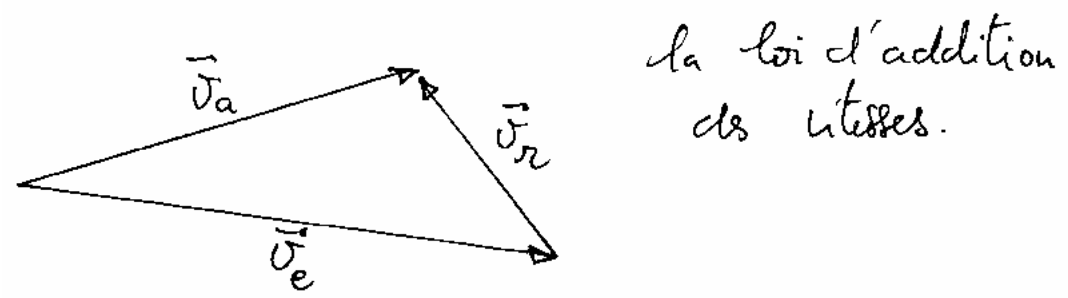
$\vec{v}_r$ est la vitesse relative du point M :

$$\vec{v}_r = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{\Re'}$$

et $\vec{v}_e$ est la vitesse d'entraînement du référentiel relatif ($\Re'$) par rapport au référentiel absolu ($\Re$) :

$$\vec{v}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{\Re} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

[10] La démonstration sera faite en cours.



*VII – 5 **Opération de dérivation dans un référentiel donné***

Ce paragraphe plutôt formel a pour but de simplifier les calculs survenant lors de l'étude de la loi de transformation des accélérations développée dans la prochaine section. Dans le même temps, ce que nous allons faire peut être vu comme une introduction plus ou moins intuitive à la notion d'opérateurs.

Au cours de l'établissement de la loi de transformation des vitesses, nous avons dû calculer la dérivée dans un certain référentiel $\Re$ d'un vecteur (le vecteur $\overrightarrow{O'M}$) repéré dans un autre référentiel $\Re'$ en mouvement par rapport à $\Re$. A la fin du calcul, nous avons pu exprimer le résultat en fonction de la dérivée de ce même vecteur dans le référentiel $\Re'$, et du produit vectoriel de ce vecteur par le vecteur rotation $\vec{\Omega}$:

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{\Re} = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{\Re'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

Cette relation est valable quel que soit le point M considéré. On peut ainsi voir cette égalité de la façon suivante : à gauche, on réalise une certaine opération sur un vecteur qui est l'opération de dérivation de ce vecteur dans le référentiel $\Re$. A droite, le résultat est la somme de deux opérations : une opération de dérivation du vecteur dans le référentiel $\Re'$, plus une opération de type produit vectoriel. On pourrait noter ce processus opératoire de la façon suivante, valable pour n'importe quel vecteur pourvu qu'il soit repéré dans $\Re'$:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{\Re} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{\Re'} + \vec{\Omega} \wedge$$

où encore de façon plus condensée :

$$D = D' + \vec{\Omega} \wedge$$

où D désigne l'opérateur de dérivation par rapport au temps dans le référentiel $\Re$, et D' la même opération dans $\Re'$. Nous allons nous servir de ces notions dans le paragraphe qui suit.

*VII – 6 **Loi de transformation des accélérations***

Nous partirons de l'accélération absolue du point M :

$$\vec{a}_a = \left.\frac{d\vec{v}_a}{dt}\right|_{\Re} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_{\Re} = D^2\overrightarrow{OM} = D\ [D\ \overrightarrow{OM}]$$

Utilisons maintenant la loi de transformation des positions et continuons le calcul en prenant bien soin de n'appliquer le résultat du paragraphe précédent qu'au vecteur $\overrightarrow{O'M}$ qui est le seul vecteur à être repéré depuis le référentiel $\Re'$, et donc le seul à être concerné par la règle opératoire. Cela donne :

$$\vec{a}_a = D[D\ \overrightarrow{OM}] = D[\ D[\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}]\ ] = D[D\ \overrightarrow{OO'}] + D\ [D' + \vec{\Omega}\wedge\ ]\ \overrightarrow{O'M}$$

$$= D^2\overrightarrow{OO'} + D\ [\ D'\ \overrightarrow{O'M}\ ] + D\ [\ \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}]$$

$$= D^2\overrightarrow{OO'} + [D' + \vec{\Omega}\wedge]\ D'\ \overrightarrow{O'M} + D\ [\ \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}]$$

d'où

$$\vec{a}_a = D^2\overrightarrow{OO'}\ + D'^2\ \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}\wedge[D'\ \overrightarrow{O'M}] + [D\ \vec{\Omega}]\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}\wedge[D' + \vec{\Omega}\wedge]\ \overrightarrow{O'M}$$

soit enfin

$$\vec{a}_a = D'^2\ \overrightarrow{O'M} + D^2\overrightarrow{OO'} + [D\ \vec{\Omega}]\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}\wedge[\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}] + 2\ \vec{\Omega}\wedge[D'\ \overrightarrow{O'M}]$$

ce qui se réécrit dans le langage habituel :

$$\vec{a}_a = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\right|_{\Re'} + \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_{\Re} + \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_{\Re}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}\wedge[\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}] + 2\ \vec{\Omega}\wedge\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{\Re'}$$

C'est la loi de transformation des accélérations. On a l'habitude de mettre cette expression un peu compliquée sous la forme d'une somme de trois vecteurs permettant une interprétation physique :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

<u>*Accélération relative*</u>

Le premier terme est simplement l'accélération relative du point M, c'est à dire l'accélération du point M lorsque son mouvement est vu depuis le référentiel relatif $\Re'$:

$$\vec{a}_r = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\right|_{\Re'} = \left.\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right|_{\Re'}$$

<u>*Accélération d'entraînement*</u>

Le second terme est l'accélération d'entraînement du point M :

$$\vec{a}_e = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_{\Re} + \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_{\Re} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge [\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}]$$

Si le point M était fixe dans $\Re'$, c'est l'accélération que l'on trouverait en regardant son mouvement depuis $\Re$. Cette accélération rend donc compte du mouvement d'entraînement du référentiel $\Re'$ par rapport au référentiel $\Re$ au même titre que la vitesse d'entraînement. D'ailleurs on peut obtenir $\vec{a}_e$ en dérivant $\vec{v}_e$ par rapport au temps dans le référentiel $\Re$ <u>tout en maintenant le point M fixe dans</u> $\Re'$ (faites-le !).

L'accélération d'entraînement est à l'origine de ce qu'en dynamique nous appellerons la force d'inertie d'entraînement : lorsque vous êtes sur un manège par exemple, vous ressentez une force qui tend à vous éloigner de l'axe de rotation du manège (c'est le terme en $\vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$ qui intervient ici) – ou encore, lorsque votre voiture freine brusquement, vous êtes entraîné vers l'avant (ici, c'est le terme en $d^2\overrightarrow{OO'}/dt^2$ qui intervient).

<u>Accélération de Coriolis</u>

Le dernier terme enfin s'appelle l'accélération de Coriolis du point M :

$$\vec{a}_c = 2\,\vec{\Omega} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{\Re'} = 2\,\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

C'est un terme hybride où interviennent à la fois le mouvement d'entraînement de rotation de $\Re'$ par rapport à $\Re$ (via le vecteur $\vec{\Omega}$) et le mouvement du point M vu depuis $\Re'$ (via la vitesse relative $\vec{v}_r$). Il est non nul si et seulement si ces deux mouvements existent. L'accélération de Coriolis est à l'origine des forces de Coriolis en dynamique, en partie responsables sur terre de la direction des vents. Vous ressentirez l'effet de la force de Coriolis si, étant sur un manège en rotation, vous tentez d'avancer. Faites l'expérience : vous serez déséquilibré par la force de Coriolis.

Loi d'addition des accélérations