Physique Générale

Cinématique à une dimension de la particule

Vecteurs

TRAN Minh Tâm

Table des matières

Définitions, vitesses et accélérations

La **cinématique** est l'étude du mouvement de la particule ou des systèmes de particules sans la recherche des causes de ce mouvement. Les causes des mouvement sont à rechercher dans les forces, ce sera l'objet d'étude de *la dynamique*.

Nous nous limitons tout d'abord à l'étude du mouvement de la particule et, dans ce paragraphe, à son mouvement selon une droite. Par particule, nous sous-entendons un objet ponctuel ou un objet qui se meut comme un objet ponctuel, c.à.d. dont tous les points se meuvent dans la même direction et avec la même vitesse.

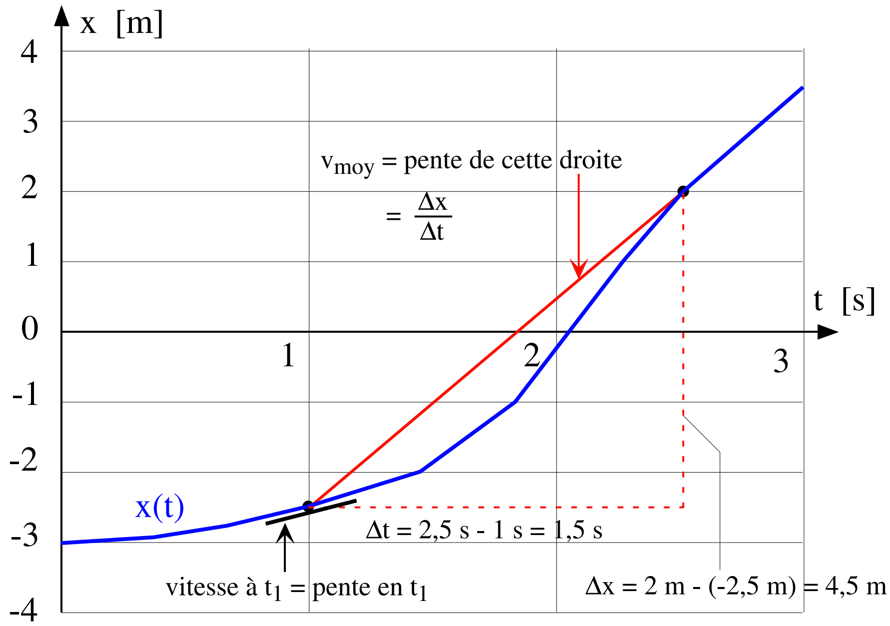
Position et déplacement. Pour localiser une particule, nous recherchons sa position relative par rapport à un point de référence ou **origine** sur un axe qui peut être porté par la droite sur laquelle se déplace la particule. Sur cet axe, nous pouvons définir un sens et, avec un étalon de longueur, mesurer la *position* de la particule en chaque instant. L'équation $x = x(t)$ est l'équation horaire.
Un changement de position d'une position initiale x_1 à une position finale x_2 est appelé *déplacement* $\Delta x = x_2 - x_1$; nous remarquons que le déplacement est une quantité vectorielle, puisqu'elle est caractétisée par une direction (ici, celle du mouvement), un sens et un module.

On peut représenter la position en fonction du temps sur un graphique par une courbe $x(t)$. On définit la **vitesse moyenne** par

$$v_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Sur un graphique de x en fonction de t, la vitesse moyenne v_{moy} est la pente de la droite reliant les points (t_1 , x_1) et (t_2 , x_2). Comme le déplacement, v_{moy} a une direction (ici, celle du mouvement), un sens qui dépend de x_2 et de x_1 et un module. Comme Δt est toujours positif, v_{moy} a le même signe que Δx dans le mouvement à une dimension.

La figure ci-après montre le calcul de cette vitesse moyenne.



La **vitesse instantanée** ou simplement la **vitesse** permet de connaître comment se déplace la particule à un instant donné :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

– v est le taux de variation de la position x de la particule en fonction du temps, c'est la dérivée de x par rapport au temps,

– v, à chaque instant est la <u>pente</u> de la tangente à la courbe $x(t)$ à l'instant considéré.

Point de contrôle Les équations suivantes donnent la position $x(t)$ d'une particule dans des situations différentes (x est en mètres, t en secondes et $t > 0$) :

$$(1)\ \ x = 3t - 2\ ,\ \ (2)\ \ x = -4t^2 - 2\ ,\ \ (3)\ \ x = \frac{2}{t^2}\ \ \text{et}\ \ (4)\ \ x = -2$$

Dans quelle(s) situation(s) la vitesse v de la particule est-elle constante ? Dans quel(s) cas v est-elle dans la direction négative ?

L'accélération. Quand la vitesse de la particule change, on dit qu'elle *subit une accélération* (ou qu'elle *accélère*). Dans notre cas d'un mouvement unidimensionnel, l'accélération moyenne est définie comme :

$$a_{moy} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

expression dans laquelle v_1 et v_2 sont les vitesses de la particule aux instants t_1 et t_2.

On définit de la même façon que précédemment **l'accélération instantanée** ou **accélération** :

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d v}{d t} = \frac{d}{d t}\left(\frac{d x}{d t}\right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

L'accélération d'une particule à l'instant t est la *dérivée seconde* par rapport au temps de sa position $x(t)$. L'accélération est exprimée en $\mathbf{m/s^2}$.

Signe de l'accélération. Dans le langage courant, le signe de l'accélération peut conduire à des conclusions fausses ; ainsi, une accélération positive ne veut pas toujours dire que la vitesse augmente et une accélération négative que la vitesse diminue, il faut aussi considérer le signe de la vitesse !

Point de contrôle Une souris se meut sur l'axe x . Quel est le signe de son accélération si elle se meut dans

a) le sens positif de l'axe avec une vitesse dont le module augmente,

b) le sens positif de l'axe avec une vitesse dont le module diminue,

c) le sens négatif de l'axe avec une vitesse dont le module augmente,

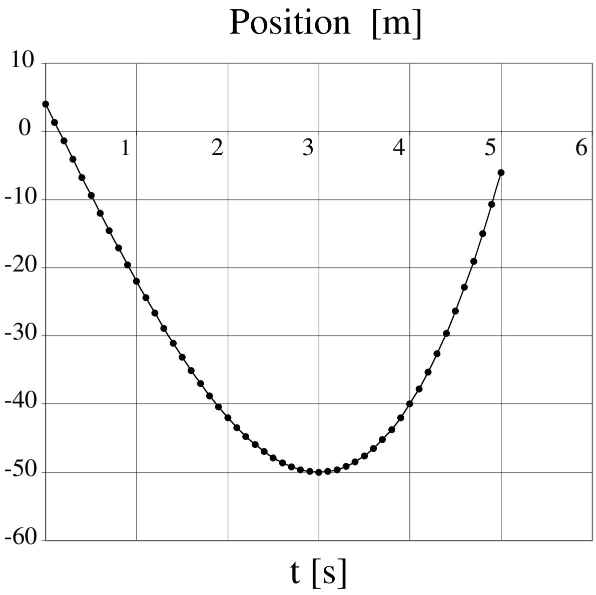
d) le sens négatif de l'axe avec une vitesse dont le module diminue ?

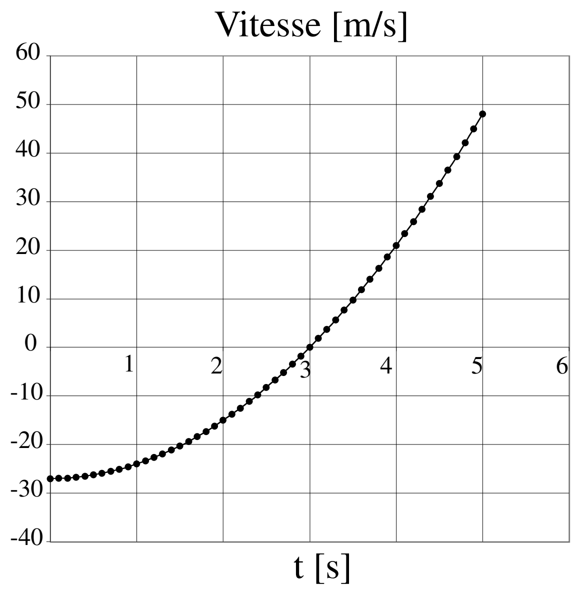
Exemple La position d'une particule sur l'axe x est donnée par $x = 4 - 27t + t^3$, expression dans laquelle x est en mètres et t en secondes. La vitesse en chaque instant $v(t)$ s'obtient en dérivant $x(t)$ (par rapport à t) :

$$v = -27 + 3t^2$$

et l'accélération $a(t)$, en dérivant $v(t)$: $a = 6t$.
Nous voyons que l'accélération augmente avec le temps et est positive ($t > 0$) alors que la vitesse et la position peuvent être positive ou négative. La vitesse s'annule pour $t = \pm 3$ s .

• A l'instant $t = 0$, la particule se trouve en $x(0) = +4$ et a une vitesse $v(0) = -27$ m/s : elle se meut donc dans le sens négatif de l'axe ; son accélération en cet instant est nulle.





• Pour $0 < t < 3$ s , la vitesse de la particule est toujours négative : la particule se déplace toujours dans le sens négatif ; cependant, l'accélération étant positive, le module de la vitesse diminue : la particule "ralentit". A $t = 3$ s, la vitesse de la particule est nulle, sa position est alors $x(3) = -50$ m .

• Pour $t > 3$ s , la vitesse est maintenant positive : la particule va dans le sens positif de l'axe, comme l'accélération est positive, le module de la vitesse augmentera constamment.

Dans ce paragraphe, nous nous limitons au cas d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA) où l'accélération est constante. Les conclusions que nous tirons ici ne sont valables que pour ce cas particulier.

Une première approche

En partant de la définition de l'accélération : $$a = \frac{d\,v}{d\,t},$$

nous pouvons écrire : $$dv = a\ dt$$

en prenant la *primitive* ou *intégrale indéfinie*

des deux membres : $$\int dv = \int a\,dt\ .$$

Comme l'accélération a est constante : $$\int dv = a \int dt,$$

ou $$v = a\,t + C.$$

La *constante d'intégration* C doit être déterminée par la valeur initiale v_0 de la vitesse à $t = 0$; par conséquent : $\boxed{v = a\,t + v_0}$.

De même, en partant de la définition de la vitesse : $v = \dfrac{d\,x}{d\,t},$

nous avons $$\int dx = \int v\,dt \quad \text{et,}$$

en remplaçant v par son expression : $$\int dx = \int (\,a\,t + v_0\,)\,dt$$

comme a et v_0 sont constants : $$\int dx = a \int t\,dt + v_0 \int dt$$

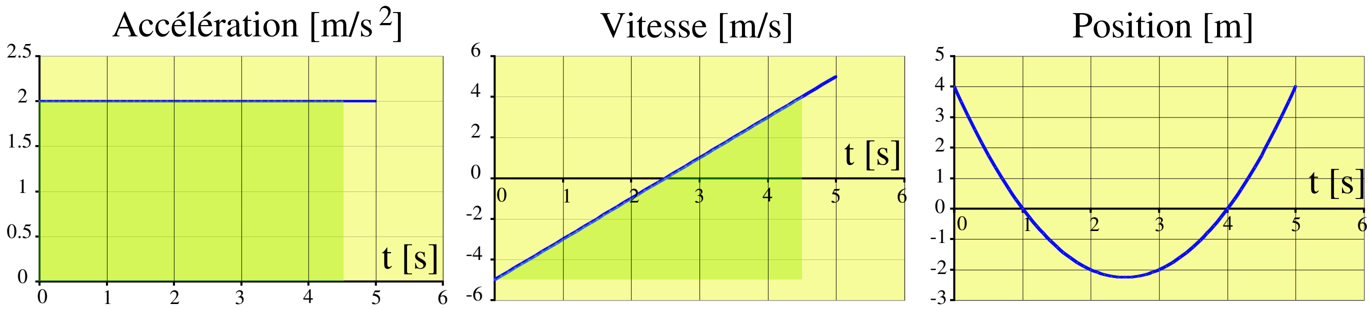
c.à.d. :

$$\boxed{x = \frac{1}{2}\,a\,t^2 + v_0\,t + x_0}$$

expression dans laquelle la position de la particule à $t = 0$, x_0 ,
est la constante d'intégration.

Une seconde approche

Cette approche, plus intuitive, n'est valable que pour le MRUA.



Puisque dans le MRUA l'accélération est constante, accélérations instantannée et moyenne sont gales et nous avons :

$$a = a_{moy} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - 0}$$

v_0 est la vitesse à l'instant $t = 0$ et nous avons tout de suite :

$$\boxed{v = v_0 + a\,t}$$

Nous avons de même :

$$v_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - 0} \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + v_{moy}\,t$$

v est une fonction linéairement croissante avec le temps. La *vitesse moyenne* entre deux instants quelconques, comme par exemple entre $t = 0$ et t, est la moyenne arithmétique des vitesses entre ces deux instant :

$$v_{moy} = \frac{1}{2}\,(v_0 + v) = v_0 + \frac{1}{2}\,a\,t$$

Par conséquent :

$$\boxed{x - x_0 = v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2}$$

Les deux équation encadrées de cette page et de la page précédente sont les équations de base des mouvements rectilignes uniformément accélérés .

Point de contrôle L'équation horaire $x(t)$ d'une particule est donnée dans les cas suivants :

a) $x = 5t - 4$ **b)** $x = -5t^3 + 4t^2 + 6$

c) $x = 2/t^2 - 3/t$ **d)** $x = 5t^2 - 3$

Dans quel(s) cas le mouvement de la particule est-il un MRUA ?

Point de contrôle Des deux approches précédentes du MRUA, laquelle préférez-vous ? et pourquoi ?

L'accélération dans la chute libre

Sur Terre, une particule, lancée vers le haut ou vers le bas, subit une accélération, celle de gravité. En choisissant un axe y perpendiculaire à la surface de la Terre et dirigé vers le haut, nous avons une accélération

$$a = -g \approx -9.81\ m \cdot s^{-2} \text{ près de la surface de la Terre}$$

le signe - montre que l'accélération est toujours dirigée vers le centre de la Terre.

Exemple Une balle est lancée verticalement vers le haut avec une vitesse initiale de $12\ m/s$. A quel instant atteindra-t-elle sa hauteur maximale et quelle est cette hauteur maximale ?

Idées essentielles : Une fois lancée, dans son ascension et dans sa chute, la balle subit la même accélération $a = -g =$ constante : on est dons dans le cas d'un MRUA. D'autre part, à son apogée, la balle a une vitesse nulle.

De $v = v_0 + a\,t$, nous cherchons l'instant pour lequel la vitesse est nulle :

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 12\,\mathrm{m/s}}{-9.81\,\mathrm{m/s^2}} = 1.22\,\mathrm{s}$$

$$y_{max} - y_0 = v_0\,t + \frac{1}{2}a\,t^2 = \frac{\left(v^2 - v_0^2\right)}{2\,a} = \frac{0 - (12\,\mathrm{m/s})^2}{2\,(-9.81\,\mathrm{m/s^2})} = 7.34\ \mathrm{m}$$

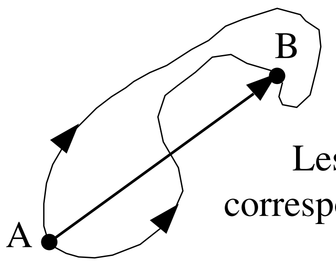
Point de contrôle Dans l'exemple précédent, donnez le signe du déplacement dans la partie ascensionnelle et dans la partie de chute de la balle. Quelle est l'accélération de la balle à son apogée ?

Vecteurs et scalaires

Un scalaire est une grandeur qui est entièrement déterminée par un nombre uniquement (éventuellement avec son signe) et une unité.

Les scalaires obéissent aux lois de l'algèbre ordinaire.

Un vecteur possède une direction, un sens et un module.
Le vecteur le plus simple est le vecteur déplacement. Nous avons vu qu'un *déplacement* dans un mouvement à une dimension devait être caractérisé par un signe indiquant le sens du déplacement et un module. Dans un mouvement à trois dimensions, nous devons spécifier le point origine et le point destination, c.à.d. utiliser un *vecteur*, grandeur caractérisée par une direction (la droite reliant les deux points), un sens (de l'origine vers la destination) et un module (la distance entre les points).



Les trois chemins connectant A et B correspondent au même vecteur déplacement

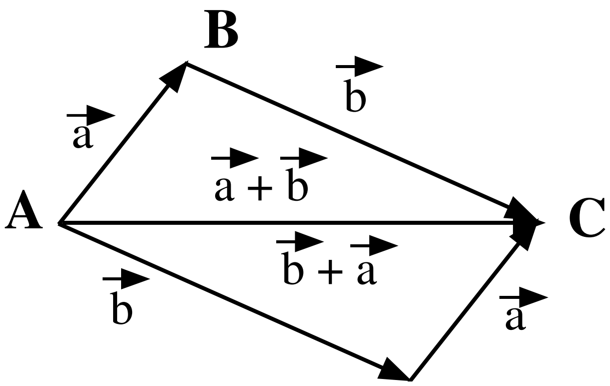
Sur la figure, nous voyons que le *vecteur déplacement* représente le résultat du mouvement et non le mouvement lui-même.

Un vecteur est un être mathématique définie par plusieurs valeurs numériques ; ces dernières décrivent sa longueur, sa direction et son sens. Les vecteurs obéissent aux lois de l'algèbre vectorielle.

Exemples :
Grandeurs scalaires : une masse de 4 kg, une durée de 45 minutes, une température de 20 ° C, etc...
Grandeurs vectorielles : une force, une vitesse, un moment de forces, un *rayon vecteur*, un *vecteur position*, etc...

L'addition des vecteurs

Considérons la somme de deux déplacements : le premier, $\vec{a}$, de A à B, puis de B à C, $\vec{b}$. L'effet résultant de ces deux déplacements est le déplacement $\vec{c}$ de A à C ; cette résultante n'est pas une somme algébrique usuelle.



On voit bien que le *module* du vecteur résultant n'est pas égal à la somme des modules des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ [nous désignerons le module d'un vecteur $\vec{v}$ par $|\,\vec{v}\,|$] : $\quad |\,\vec{s}\,| = |\,\vec{a} + \vec{b}\,| \neq |\,\vec{a}\,| + |\,\vec{b}\,|$

On vérifie très facilement les deux propriétés suivantes :

Commutativité : $\quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Associativité : $\quad \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

Le vecteur $-\vec{\mathbf{b}}$ est un vecteur qui a le même module que $\vec{b}$ mais une direction opposée. Donc : $\quad \vec{b} + \left(-\vec{b}\right) = 0$ et :

Soustraction : $\quad \vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$ et $\vec{a} = \vec{d} + \vec{b}$

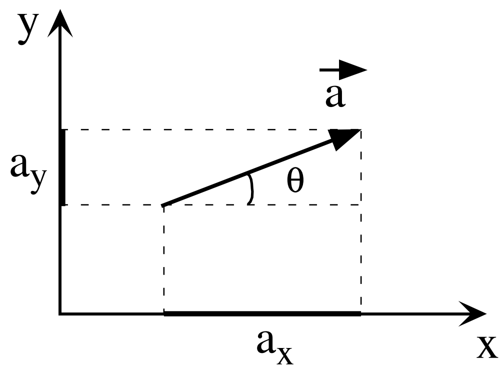
Point de contrôle

Quelle relation doit-il exister entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ pour que le module de leur somme $|\,\vec{a} + \vec{b}\,|$ soit égal à : (a) $|\,\vec{a}\,| + |\,\vec{b}\,|$, (b) $|\,\vec{a}\,| - |\,\vec{b}\,|$,
(c) $|\,\vec{b}\,| - |\,\vec{a}\,|$, (d) $\sqrt{|\,\vec{a}\,|^2 + |\,\vec{b}\,|^2}$?

Composantes et vecteurs unitaires

L'addition des vecteurs par la méthode graphique devient rapidement peu pratique, surtout si nous devons traiter des vecteurs dans l'espace. On préfère la méthode analytique. La figure ci-après représente le vecteur $\vec{a}$ dans un cas à deux dimensions, dans le plan xy.

Une **composante** du vecteur $\vec{a}$ est la projection du vecteur sur un axe;



ainsi, au lieu de définir $\vec{a}$ par son module et sa direction $(\,|\,\vec{a}\,|\,,\,\theta\,)$, on peut le définir par ses composantes $(\,a_x\,,\,a_y\,)$. On a évidemment :

$$a_x = |\,\vec{a}\,|\,\cos\theta \text{ et } a_y = |\,\vec{a}\,|\,\sin\theta$$

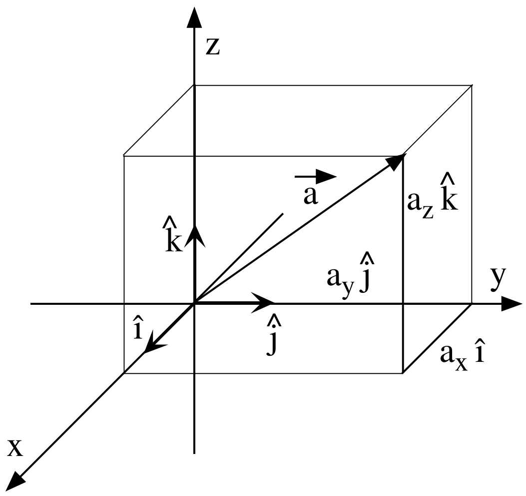
$$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \text{ et } \tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

Vecteurs unités

Pour des raisons de commodités, nous introduisons les vecteurs unités $\hat{\mathbf{i}}\,,\,\hat{\mathbf{j}}\,,\,\hat{\mathbf{k}}$. Un vecteur unité est sans dimension et sert uniquement à définir la direction de l'axe qui le porte. Son module est de 1 : $|\,\hat{i}\,| = |\,\hat{j}\,| = |\,\hat{k}\,| = 1$.
Dans l'espace, un vecteur quelconque peut s'écrire comme la somme de trois vecteurs parallèles à chacun des axes : $\vec{a} = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j} + a_z\,\hat{k}$.

Exemple : un déplacement : $\vec{d} = (-5\,\text{km})\,\hat{i} + 10\,\text{km}\,\hat{j} + 30\,\text{km}\,\hat{k}$

Nous utiliserons par la suite un système d'axes cartésien droit, dans lequel les axes sont perpendiculaires entre eux et suivent l'orientation des trois doigts de la main droite.



Remarque En Physique, nous pouvons choisir notre système de coordonnées ; cependant, les relations de Physique impliquant des vecteurs ne dépendent pas de ce choix.

Egalité des vecteurs Si $\vec{a} = \vec{b}$, alors :

$$a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j} + a_z\,\hat{k} = b_x\,\hat{i} + b_y\,\hat{j} + b_z\,\hat{k}$$

Comme $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ sont perpendiculaires entre eux, cette équation est satisfaite si et seulement si $a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$.

Par conséquent, si $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$, alors :

$$s_x = a_x + b_x \;,\; s_y = a_y + b_y \;,\; s_z = a_z + b_z$$

Vecteur unité quelconque

Nous pouvons étendre la notion de vecteurs unités à des directions autres que celles des axes. Ainsi, à un vecteur $\vec{a}$, nous pouvons associer un vecteur unité $\hat{u}_a$, de même direction et de même sens que le vecteur $\vec{a}$ mais dont le module est de 1 :

$$\hat{u}_a = \frac{\vec{a}}{|\,\vec{a}\,|} = \frac{a_x\,\hat{i}}{|\,\vec{a}\,|} + \frac{a_y\,\hat{j}}{|\,\vec{a}\,|} + \frac{a_z\,\hat{k}}{|\,\vec{a}\,|}$$

Multiplication de vecteurs

Multiplication par un scalaire Nous l'avons déjà abordé avec la définition des composantes d'un vecteur : le vecteur $\lambda\vec{a}$, $\lambda \in \Re$, a la même direction que $\vec{a}$, son sens est le même que celui de $\vec{a}$ si $\lambda > 0$, dans le sens opposé si $\lambda < 0$, son module est $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$.

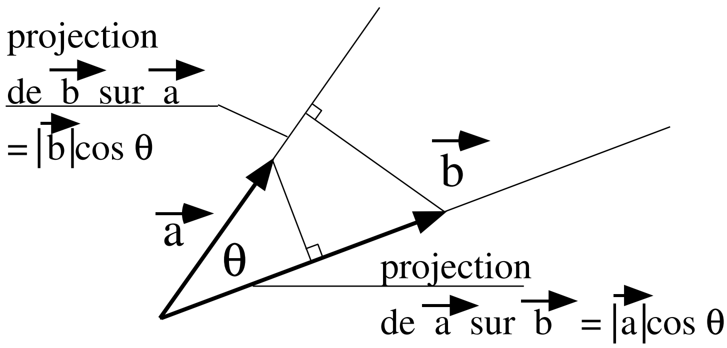
Multiplication de deux vecteurs Deux possibilités :

- obtenir un scalaire comme résultat,
- ou bien obtenir un vecteur.

Produit scalaire On le définit par :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta \ , \quad \theta \ est \ l'angle \ de \ \vec{a} \ à \ \vec{b}$$

. Propriétés



– $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux.
– Si l'un des vecteurs est un vecteur unité $\hat{u}$, le produit scalaire $\vec{a} \cdot \hat{u} = |\vec{a}| \cos\theta$ est la projection de $\vec{a}$ sur la direction portant $\hat{u}$.
– Le produit scalaire est commutatif : $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
– En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$$

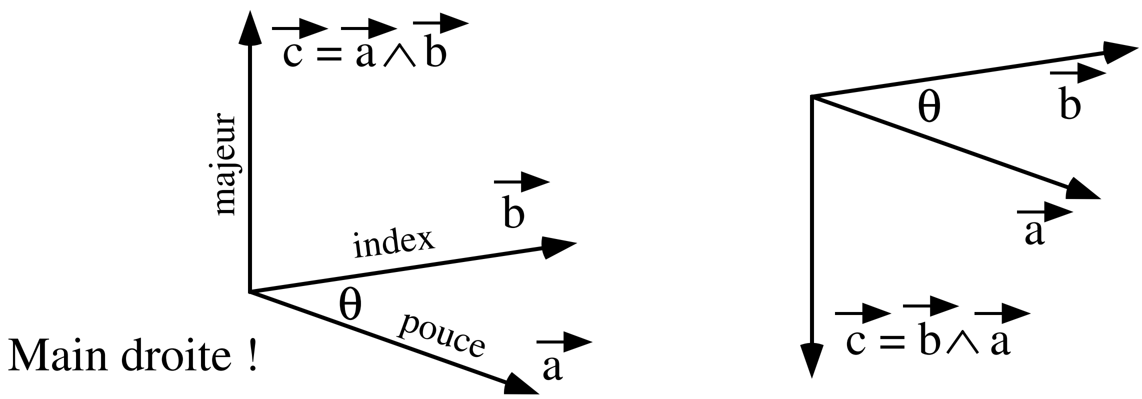
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Produit vectoriel La définition nécessite le choix d'un système d'axes cartésiens $Oxyz$. $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ est défini par :

une direction perpendiculaire à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$,

un sens tel que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ait la même orientation que $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$,

une norme $|\,\vec{a}\,|\,|\,\vec{b}\,|\sin\theta$ où θ est l'angle de $\vec{a}$ à $\vec{b}$.



Propriétés

– $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$ si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont parallèles ou antiparallèles.

– Le produit vectoriel n'est **pas** commutatif : $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$ (cf. figure ci-dessus).

– En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_y\,b_z - b_y\,a_z)\,\hat{i} + (a_z\,b_x - b_z\,a_x)\,\hat{j} + (a_x\,b_y - b_x\,a_y)\,\hat{k}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Point de contrôle

Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ont pour modules 3 et 4 unités.

Quel est l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ pour que :

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -12$ c) $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$ d) $\vec{a} \wedge \vec{b} = 12$