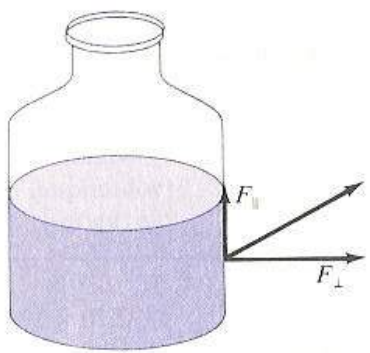
Pression hydrostatique

Au lieu de forces ponctuelles, nous considérons maintenant des forces qui agissent sur une surface étendue. Si une force est répartie sur une surface et agit normalement à cette surface, la **pression**,P, est définie comme le quotient de la force par cette surface :

$$P = \frac{F_\perp}{A}$$

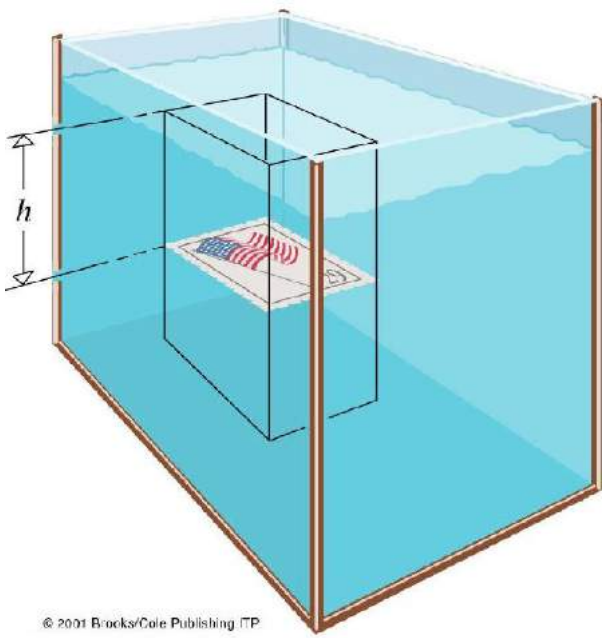
C'est un scalaire : en tout point elle a une valeur, mais pas de direction.
P s'exprime en N/m^2 ou pascal(Pa) : 1 N/m^2 =1 Pa.



- Le fluide exerce une force de pression vers l'extérieur sur la base et les parois latérales du récipient et celles-ci réagissent avec une contre-force.
- Un fluide exerce une pression dans toutes les directions. En un point précis d'un fluide au repos, la pression est la même dans toutes les directions.
- **La force F exercée par un fluide au repos sur toute surface rigide est toujours perpendiculaire à cette surface** : le fluide n'a aucune rigidité et ne peut subir ou exercer aucune contrainte de cisaillement.

Pesanteur et Pression hydrostatique

La pesanteur est la cause de la pression hydrostatique.



Soit un réservoir ouvert et contenant un timbre-poste d'aire A immergé dans le liquide à une profondeur h, parallèllement à la surface du liquide. La face supérieure du timbre est soumise, de la part du liquide, à une force normale vers le bas égale au poids de la colonne de fluide au-dessus du timbre.

Volume : $V = A\,h$

masse : $m = \rho\,A\,h$

Poids : $F_W = m\,g = \rho\,A\,h\,g$

Pression :

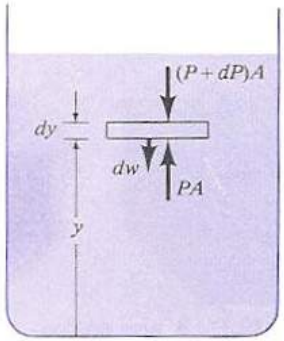
$$P = \frac{F_W}{A} = \frac{\rho A\,h\,g}{A} = \rho\,h\,g$$

Exemple : La pression subit par un nageur à 20m sous l'eau sera :

$$P = \rho g h = (1,025 \times 10^3 \text{kg/m}^3)(9,81 \text{m/s}^2)(20\text{m}) = 2,0 \times 10^5 \text{N}$$

ce qui est environ la pression d'un pneu automobile.

Variation de la pression avec la profondeur



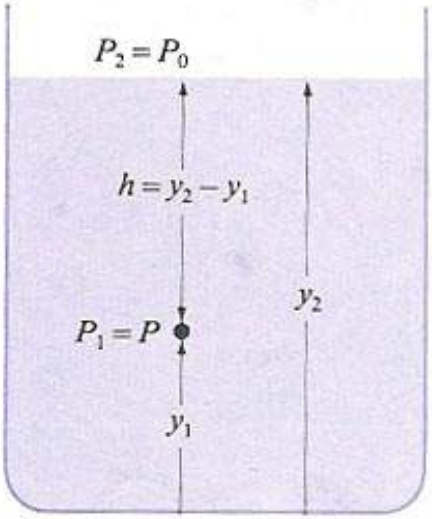
A l'intérieur du liquide, à une hauteur y, on délimite un minuscule volume plat dont l'aire est A, de masse dm et l'épaisseur dy. La pression du fluide sur la plaque exerce une force égale à PA vers le haut et à (P+dP)A vers le bas. La seule autre force qui agit sur ce volume est la force de gravitation, dw,

$$dw = (dm)g = (\rho dV)\, g = (\rho A dy)\, g = \rho g A\, dy$$

Le volume choisi est en équilibre, $\Sigma\, \vec{F} = 0$:

$$PA - (P + dP)\, A - \rho g\, A\, dy = 0$$

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g$$



Si ρ est constant (liquide) :

$$dP = -\rho g dy \qquad \int_{P_1}^{P_2} dP = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g dy$$

$$P_2 - P_1 = -\rho g \int_{y_1}^{y_2} dy = -\rho g\, (y_2 - y_1)$$

$$P_1 = P_2 + \rho\, g\, h$$

Cas de la pression atmosphérique : ρ n'est pas constant

On veut déterminer la variation de pression de l'atmosphère terrestre en fonction de la hauteur y au-dessus du niveau de la mer, en supposant que g demeure constant et que la masse volumique de l'air est proportionelle à la pression, soit $\frac{\rho}{\rho_o} = \frac{P}{P_o}$ où les quantités avec index $_o$ sont au niveau de la mer.

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g \qquad \frac{dP}{dy} = -P(\frac{\rho_o}{P_o})\, g \qquad \frac{dP}{P} = -(\frac{\rho_o}{P_o})\, g\, dy$$

$$\int_{P_o}^{P} \frac{dP}{P} = -(\frac{\rho_o}{P_o})\, g \int_o^y dy \qquad ln\frac{P}{P_o} = -(\frac{\rho_o}{P_o})\, g\, y$$

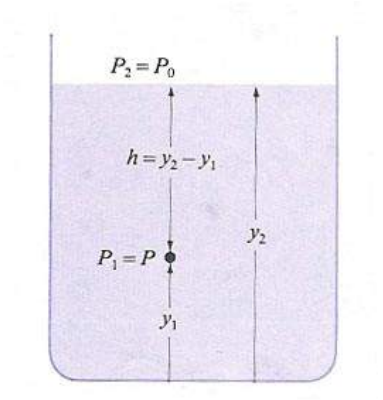
$$P = P_o\, e^{-(\rho_o g/P_o)y}$$

Exemple : A quelle hauteur la pression de l'air équivaut-elle à la moitié de sa valeur au niveau de la mer ?
$P_o = 1,013 \times 10^5$ N/m^2, $\rho_o = 1,29$ kg/m^3, et $g = 9,81$ m/s^2
En posant $P = P_o/2$

$$1/2 = e^{-(1,25\times10^{-4}\ \mathrm{m}^{-1})y}$$

$$y = (ln\ 2,00)/(1,25 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^{-1}) = 5500\ \mathrm{m}$$

Pression dans un récipient

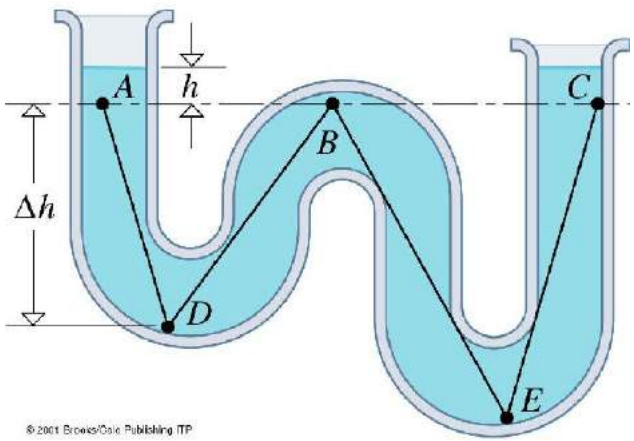


Pour un fluide, nous avons trouvé :

$P_1 = P_2 + \rho\, g\, h$.

Ainsi si la surface du liquide est soumise à une pression extérieure, celle-ci doit être ajoutée à la pression, $\rho g h$. Si P_2 désigne la pression atmosphérique P_o

$$P_1 = \rho g h + P_o \qquad \textit{Pression absolue}$$



$$P_1 - P_o = \rho\, g\, h \qquad \textit{Pression de jauge ou manometrique}$$

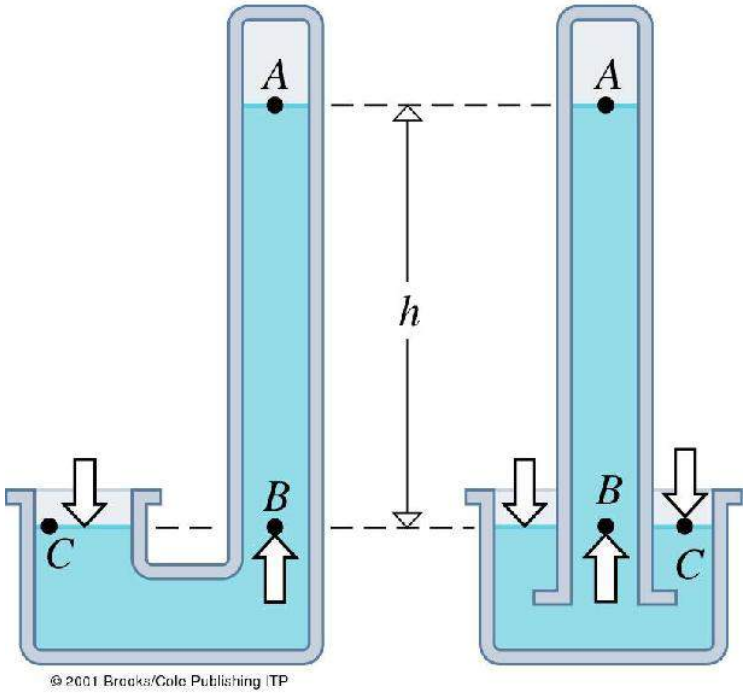
La pression est la même en tous les points situés à un même niveau horizontal d'un même fluide au repos :

$$P_A = P_B = P_C = P_o + \rho g\, h$$

$$P_D \neq P_A \neq P_E$$

Pression atmosphérique, le baromètre

La pression de l'air produit une force normale à la surface libre du mercure de la cuve et le pousse à l'intérieur du tube jusqu'à une hauteur telle que la pression excercée par le mercure du tube sur celui de la cuve est égale à celle de l'atmosphère. " Nous vivons immergés au fond d'un océan d'air (Toricelli)"



$$P_B = P_A + \rho gh = 0 + \rho gh = P_C$$

1 atmosphère est définie comme la pression équivalente à celle que produit à 0°C une colonne de 760 mm de mercure de masse volumique 13.5950×10^3kg/m^3.

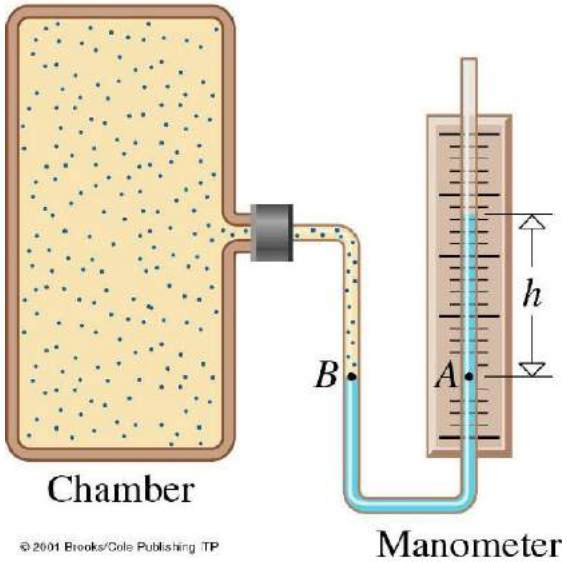
$$\begin{aligned} 1\text{atm} &= \rho gh \\ &= (13,595 \times 10^3 \text{kg/m}^3)(9,81 \text{m/s}^2)(0,76 \text{m}) \\ &= 1,013 \times 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

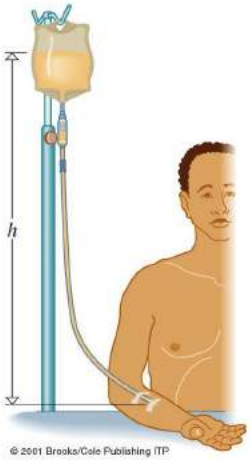
Par définition 1 bar =$1,0 \times 10^5$ Pa, donc
$1\text{atm} = 1,013$ bar$(1\text{millibar} = 1\text{hectopascal})$
$1\text{atm} = 760\text{torr}$ $(1\text{torr} = 1\text{mm Hg} = 1,333 \times 10^2\text{Pa})$

Appareil de mesure : Manomètre

Un manomètre mesure une différence de pression entre la pression recherchée et la pression atmosphérique : pression de jauge/manométrique.

$$P_A = P_B = \rho g h + P_{atm}$$
$$P_B - P_{atm} = \rho g h$$





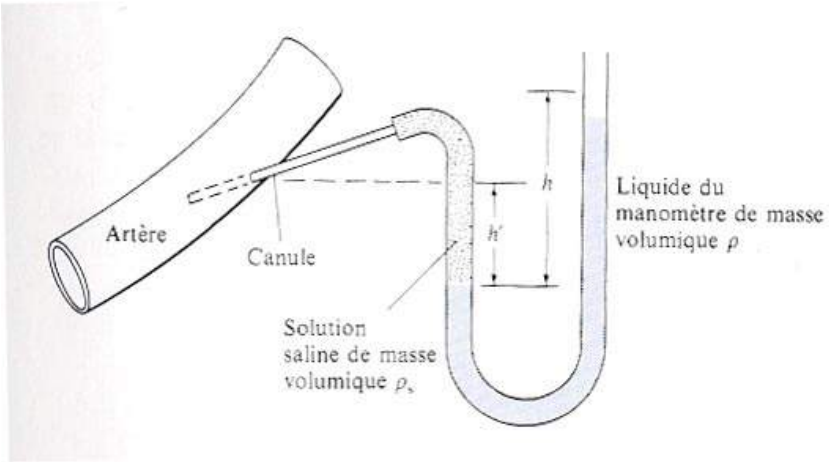
Si la pression du sang dans une veine, P_v, vaut ~ 2kPa $= 15$ mm Hg, la poche doit être placée à $h \geq \frac{P_v}{\rho g} \sim 20$ cm au-dessus de l'aiguille pour que le fluide de perfusion coule dans la veine.

$P_B - P_{atm}$: Pression de jauge
P_B : Pression absolue

Circulation sanguine

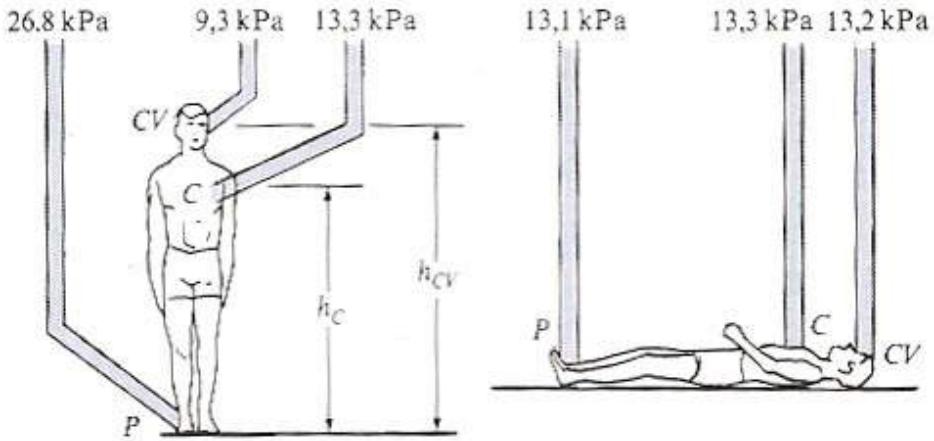
Mesure de la pression sanguine par cathétérisation

$$P_{sang} = P_{atm} + \rho g h - \rho_s g h'$$



Tension artérielle : mercure
Tension veineuse, plus basse : solution de sel

Role de la gravitation dans la circulation sanguine



Pour $h_c = 1,3$ m,

$$P_p - P_c = \rho g h_c = (1,0595 \times 10^3 \text{kg/m}^3)(9,81\text{m/s}^2)(1,3\text{m}) = 13,5\text{kPa}$$

Mais le sang circule, il aurait fallu utiliser l'équation de Bernoulli, mais comme les vitesses de circulation sanguine sont petites et $\sim$ égales, on retombe sur la même équation.

La pression : Exemple

Un buveur aspire de l'eau grâce à une paille. Sa bouche est à 15cm au-dessus de la surface du liquide. (a) Quelle doit être la pression absolue dans sa bouche, P_s ? et (b) la pression manométrique, P_M ?
SOLUTION : (a) La colonne d'eau doit avoir une hauteur de 0,15m au-dessus de la surface libre de l'eau où la pression est P_{atm}. La pression, P, dans la colonne de liquide dans la paille au niveau de la surface libre de l'eau est :

$$P = P_s + P_l = P_s + \rho\, g\, h = P_{atm}$$

$$\begin{aligned} P_s = P_{atm} - \rho g h &= 1,013 \times 10^5 \text{Pa} - (1,00 \times 10^3 \text{kg/m}^3)(9,81 \text{m/s}^2)(0,15 \text{m}) \\ &= 0,998 \times 10^5 \text{Pa} \end{aligned}$$

C'est 98,5% de la pression atmosphérique.
(b) La pression manométrique, P_M, vaut :

$$P_M = P - P_{atm} = -1,53 \times 10^3 \text{Pa}$$

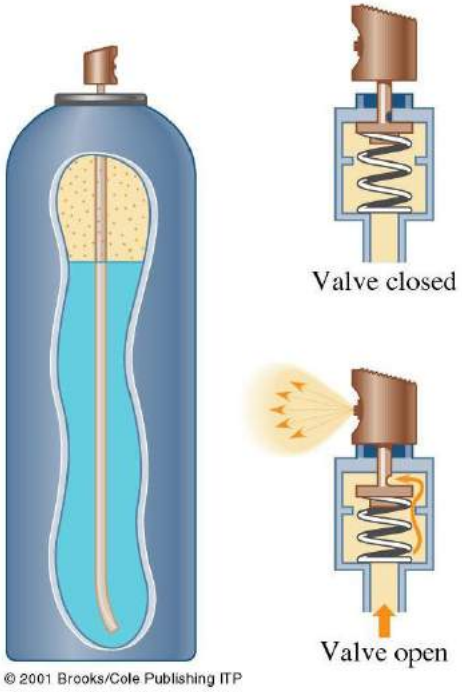
Principe de Pascal

Une pression externe appliquée à un fluide confiné à l'intérieur d'un récipient fermé est transmise intégralement à travers tout le fluide.

La seringue de Pascal

La pression appliquée est transmise uniformément en tous points du liquide.

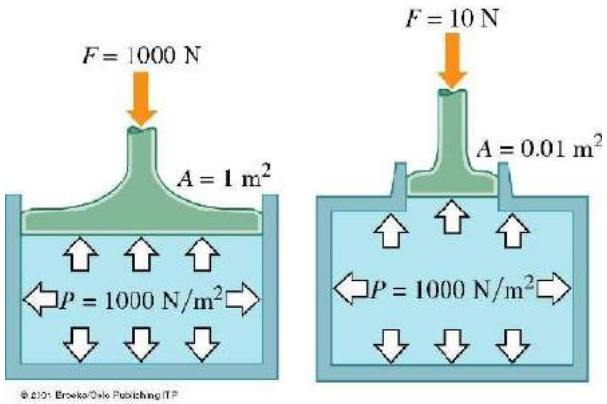
Pulvérisateur aérosol

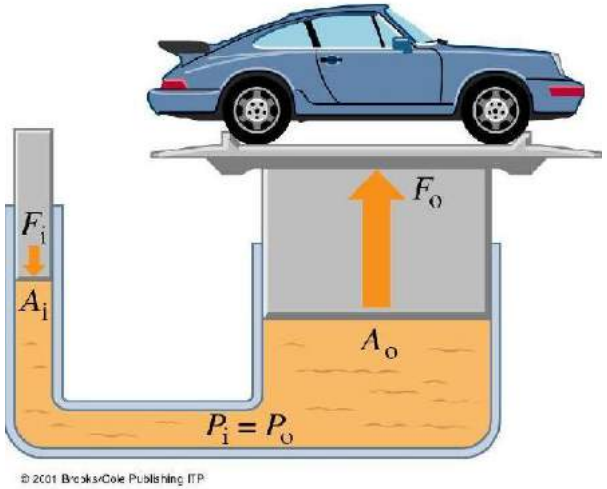


Un gaz sous pression (propulseur) pousse vers le bas sur la surface du liquide à pulvériser.

Principe de Pascal

Une même pression peut être produite au sein d'un liquide par des pistons de sections différentes qui exercent des forces qui diffèrent en proportion.





Machines hydrauliques

Deux enceintes communicantes (même fluide) sont munies de 2 pistons de différentes sections. La pression générée par l'un des pistons est transmise intégralement à l'autre :

$$P_i = P_o$$

$$\frac{F_i}{A_i} = \frac{F_o}{A_o}$$

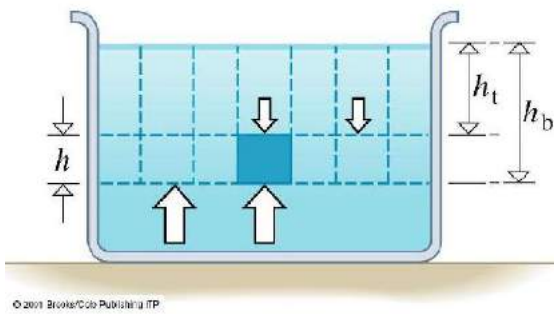
$$F_o = F_i \frac{A_o}{A_i}$$

C'est un multiplicateur de force et non un multiplicateur de travail comme toutes les machines. Il y a conservation d'énergie mécanique : le travail de F_i est égal au travail de F_o.

Poussée d'Archimède

Un objet immergé dans un fluide parait plus léger : il est poussé vers le haut avec une force égale au poids du fluide qu'il déplace.

La poussée d'Archimède est causée par la pesanteur agissant sur le fluide. Elle a son origine dans la différence de pression entre la partie supérieure et la partie inférieure de l'objet immergé. Considérons un cube plein, dont les faces ont une surface A, immergé dans un liquide de masse volumique ρ_o.



Pression manométrique inférieure : $P_b = \rho_o\, g h_b$

Pression manométrique supérieure : $P_t = \rho_o\, g h_t$

Différence de pression :

$\Delta P = \rho_o\, g\, (h_b - h_t) = \rho_o\, g\, h$

est à l'origine de la poussée d'Archimède, soit :

$F_A = A\, \Delta P = \rho_o\, g\, A\, h$

Or, $A\ h = V$ est le volume du corps, égal aussi au volume du fluide déplacé, si le corps est totalement immergé. Comme la masse du fluide déplacé est $m_o = \rho_o\, V$, on peut écrire :

$$F_A = \rho_o\, g\, V = m_o\, g$$

La poussée d'Archimède est égale au poids du liquide déplacé

Poussée d'Archimède : exemple

Submergée dans l'eau, une couronne de 14,7 kg a un poids apparent de 13,4 kg. Est-elle en or pur ?
SOLUTION : le poids apparent de l'objet submergé, F'_W, équivaut à son poids réel,F_W, moins la poussée d'Archimède, F_A, vers le haut, soit :

$$F'_W = F_W - F_A = \rho\, g\, V - \rho_o\, g\, V$$

où ρ, ρ_o sont les masses volumiques de l'objet et de l'eau respectivement. On peut donc écrire :

$$\frac{F_W}{F_W - F'_W} = \frac{\rho g V}{\rho_o\, g V} = \frac{\rho}{\rho_o}$$

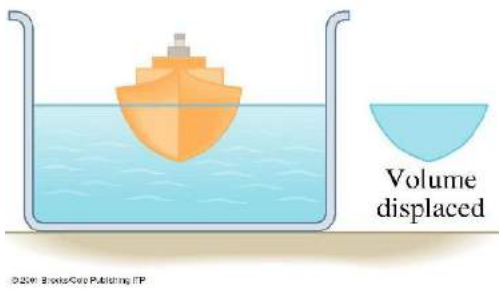
La quantité $F_W/(F_W - F'_W)$ représente la densité de l'objet. Pour la couronne on obtient :

$$\frac{\rho}{\rho_o} = \frac{F_W}{F_W - F'_W} = \frac{14,7\text{kg}}{1,3\text{kg}} = 11,3$$

ce qui correspond à une masse volumique de 11300kg/m^3. Cet objet semble être en plomb.

Flottabilité

Si un objet pèse plus que le volume total de liquide qu'il déplace, il coule.
Si un objet pèse moins que le volume total de liquide qu'il déplace, il s'enfonce partiellement jusqu'à ce que la poussée d'Archimède équilibre son poids, il flotte.



Si une portion V_{im} de son volume est immergée, la poussée d'Archimède vaut $\rho_o g V_{im}$. Cette force doit être égale et opposée au poids $\rho g V$ de l'objet, soit $\rho_o g V_{im} = \rho g V$

$$\frac{\rho}{\rho_o} = \frac{V_{im}}{V}$$

Le rapport des masses volumiques est égal à la fraction du volume immergé.

Si le poids de l'objet est exactement égal au poids du fluide qu'il peut déplacer, le corps ne peut ni couler ni flotter partiellement : il est totalement immergé en équilibre métastable, n'importe où au-dessous de la surface du liquide.

Flottabilité : Iceberg

On parle souvent de la partie visible de l'iceberg sous-entendant que la plus grande partie de l'iceberg est cachée sous l'eau. Quelle est la fraction visible ?
SOLUTION : Le poids d'un iceberg de volume V_i est :

$$F_{Wi} = \rho_i V_i g$$

où $\rho_i = 917$kg/m^3, masse volumique de la glace. Le poids de l'eau déplacée est :

$$F_A = \rho_o V_o g$$

où $\rho_o = 1025$kg/m^3, masse volumique de l'eau de mer et V_o le volume de l'eau déplacée, i.e le volume immergé de l'iceberg. Pour que l'iceberg flotte,il faut que

$$\rho_i V_i g = \rho_o V_o g$$

Si bien que la fraction visible, f_{vis}, de l'iceberg vaut :

$$f_{vis} = \frac{V_i - V_o}{V_i} = 1 - \frac{V_o}{V_i} = 1 - \frac{\rho_i}{\rho_o}$$
$$= 1 - \frac{917\text{kg/m}^3}{1025\text{kg/m}^3} = 0,1 \quad ou \quad 10\%$$

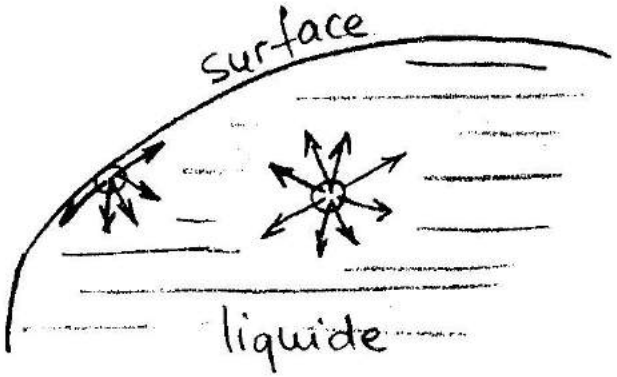
Tension superficielle : γ

C'est un phénomène qui a lieu à la surface de séparation entre liquide et gaz. Une molécule, au sein d'un liquide, est soumise, par ses voisines, à des forces intermoléculaires (forces de Van der Waals). Ces forces sont symétriques et s'équilibrent mutuellement. Il n'en est pas de même pour une molécule en surface qui est sollicitée de façon dissymétrique, la résultante des forces étant dirigée vers le liquide. Donc pour accroître l'aire de la surface d'un liquide, il faut exercer une force et effectuer un travail afin d'amener les molécules de l'intérieur à la surface. Ce travail augmente l'énergie potentielle des molécules, appelée *énergie superficielle*.

Plus l'aire est grande, plus l'énergie superficielle prend une valeur considérable. La densité d'énergie superficielle, γ, peut être définie par :

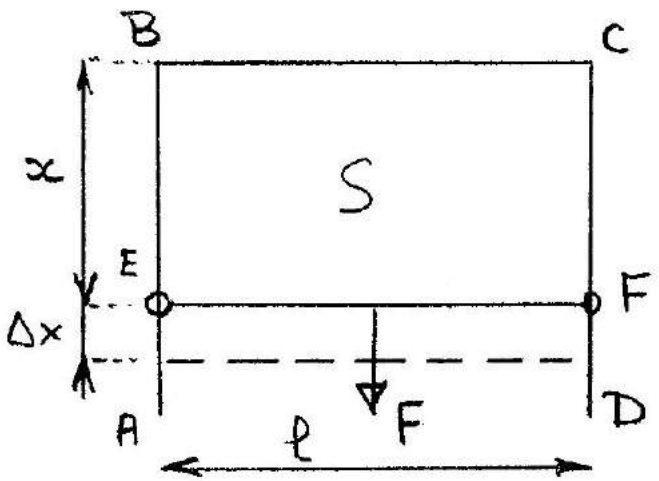
$$\gamma = \Delta\epsilon / \Delta A$$

exprimée en Joules/m^2 ou Newton/m. $\Delta\epsilon$ est l'énergie correspondant à la surface ΔA. γ s'appelle aussi une **tension superficielle**, ce qu'on justifie de la façon suivante :



Tension superficielle γ

Considérons un cadre ABCD, sur lequel coulisse une tringle EF. Une pellicule de liquide est tendue sur la surface EBCF. L'energie superficielle vaut :
$\epsilon = \gamma\, 2A = \gamma\, 2\, x\, l$ (la pellicule a 2 faces, d'où le facteur 2).



On tire la tringle avec une force F, on effectue un travail $W = \Delta x\, F$ et l'énergie superficielle devient $\epsilon' = \gamma\, 2A' = \gamma\, 2\, (x + \Delta x)\, l$.
La différence $(\epsilon' - \epsilon)$ est égale au travail W :

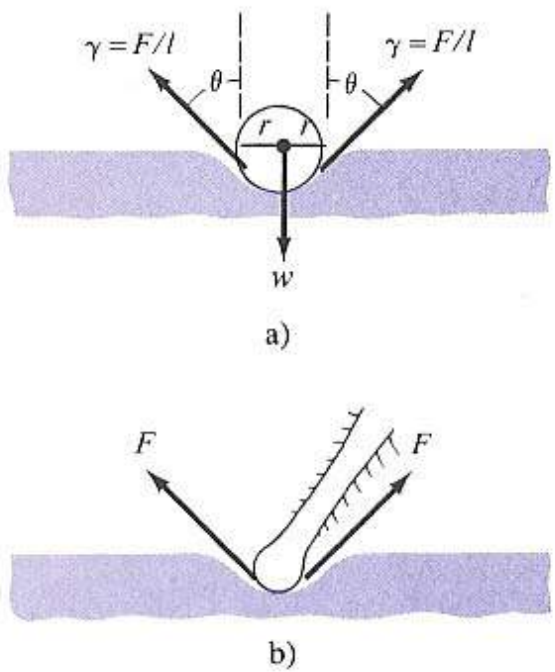
$$(\epsilon' - \epsilon) = \gamma\, 2\, \Delta x\, l = \Delta x\, F \quad \text{d'ou} \quad \gamma = \frac{F}{2l}$$

exprimé en Newton/m. On a bien la dimension d'une force divisée par une longueur.
La tension est dirigée tangentiellement à la surface du liquide. Tout se passe comme si le liquide était surmonté d'une pellicule tendue. Par exemple un volume de liquide laissé à lui-même en état d'apesanteur et sans récipient a tendance à se mettre en boule, la sphère étant la forme où la surface est minimum pour un volume donné.

Substance	γ (N/m)	$(°C)$
Eau-Air	0,076	0
Eau-Air	0,059	100
Sang-Air	0,058	37
Mercure-Air	0,465	20
Glycérine-Air	0,063	20

Tension superficielle : applications

La tension superficielle permet aux insectes de marcher sur l'eau et à des objets plus denses que l'eau, comme une aiguille en acier, de flotter.



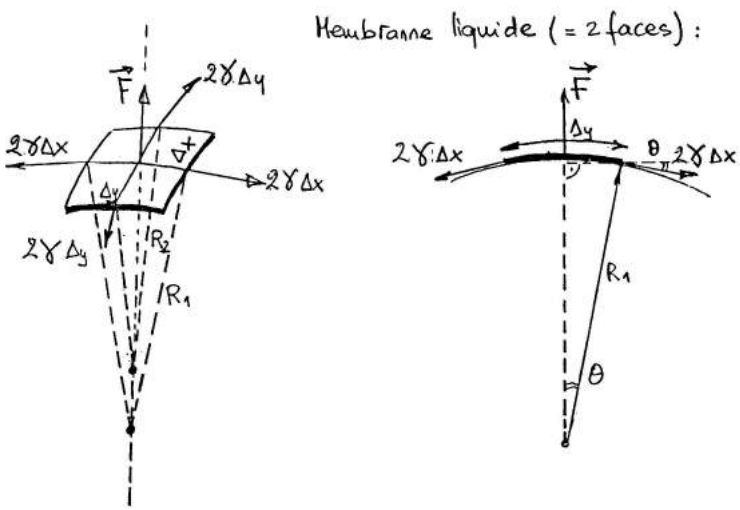
L'objet s'enfonce légèrement dans l'eau : son poids effectif F_W est son poids véritable moins la force de poussée du liquide. Lorsque l'objet est sphérique, la tension superficielle γ s'exerce en tout point le long d'un cercle de rayon r. Seule la composante verticale $\gamma \cos\theta$ agit pour compenser F_W. Ainsi la force nette ascendante attribuable à la tension superficielle est :

$$F = (\gamma \cos\theta) L = 2\pi r \gamma \cos\theta$$

Les savons et les détergents diminuent la tension superficielle de l'eau, ce qui s'avère fort utile pour les lavages.

Loi de Laplace

Découpons dans une membrane liquide un élément de surface $\Delta x, \Delta y$. Cet élément est soumis à 4 tensions superficielles et à une force normale due à la différence de pression entre les 2 surfaces $\Delta P = P_i - P_e$, soit $F = \Delta P \, \Delta x \, \Delta y$. Cette force est $\perp$ à la surface et est équilibrée par les 4 tensions dont la résultante doit être opposée à $\vec{F}$. (Une surface quelconque est caractérisée par 2 rayons de courbures $R_1 \neq R_2$.)



La projection d'une tension selon la direction de $\vec{F}$ vaut : $2\gamma\Delta x \tan\theta$ et $\tan\theta \sim \frac{\Delta y/2}{R_1}$ (même expression selon R_2).

L'équilibre pour les 4 tensions s'exprime par :

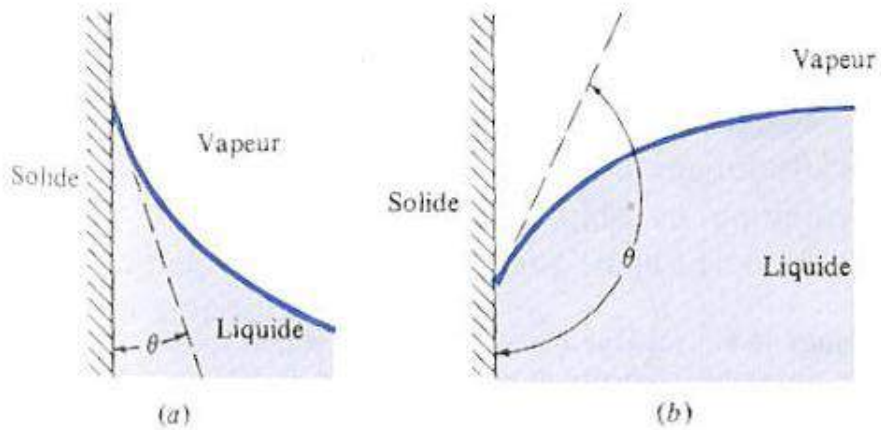
$$\Delta P \, \Delta x \, \Delta y = 2\,\gamma \Delta x \, \Delta y \, (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$$

$$\Delta P = 2\,\gamma\,(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) \quad \textit{Loi de Laplace}$$

Pour une sphère (bulle de savon) de rayon R ($R_1 = R_2$), $\Delta P = \frac{4\,\gamma}{R}$. La pression interne est d'autant plus grande que R est petit ; une petite bulle, en contact avec une grosse, va gonfler la grosse et disparaître. Pour une goutte sphérique, la surface ne présente plus qu'une face, alors $\Delta P = \frac{2\,\gamma}{R}$.

La capillarité : Angle de contact

L'angle de contact, θ, est le résultat de la compétition entre les forces de cohésion des molécules du liquide et les forces d'adhésion entre les molécules du liquide et celles du solide.



Interface	$\theta[°]$
Eau- verre	0
Ethanol - Verre propre	0
Mercure -Verre propre	140
Eau -paraffine	107

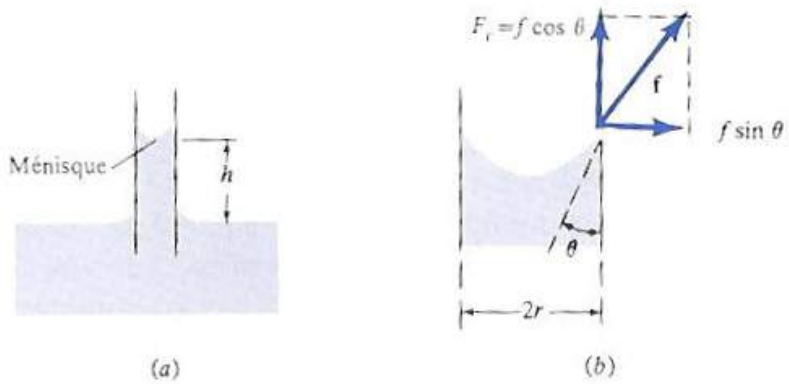
Si $\theta < \pi/2$, le liquide est **mouillant** et monte vers une paroi verticale (les molécules du liquide sont plus attirées par le solide que par le liquide).
Si $\theta > \pi/2$, le liquide est **non-mouillant** et fait une dépression contre une paroi verticale.
Ces valeurs dépendent non seulement des matériaux en présence, mais encore de leur pureté (un détergent dans l'eau modifie complètement sa tension superficielle) et de la température.

La Capillarité

L'ascension et la dépression d'un liquide dans un tube capillaire (tube de faible diamètre) sont appelées phénomènes de capillarité. **Le degré d'élévation (ou abaissement) est lié à la tension superficielle, à l'angle de contact et au rayon du tube.**

La tension superficielle γ agit avec un angle θ autour d'un cercle de rayon r. La grandeur de la force verticale due à cette tension vaut :

$$F_v = 2\,\pi\,r\,\gamma\,\cos\theta$$



Cette force est exactement compensée par le poids du liquide en-dessous, soit $F_W = \rho g V = \rho g \pi\, r^2 h$. A l'équilibre, $F_v = F_W$:

$$2\,\pi\,r\,\gamma\,\cos\theta = \rho\,g\,\pi\,r^2\,h$$

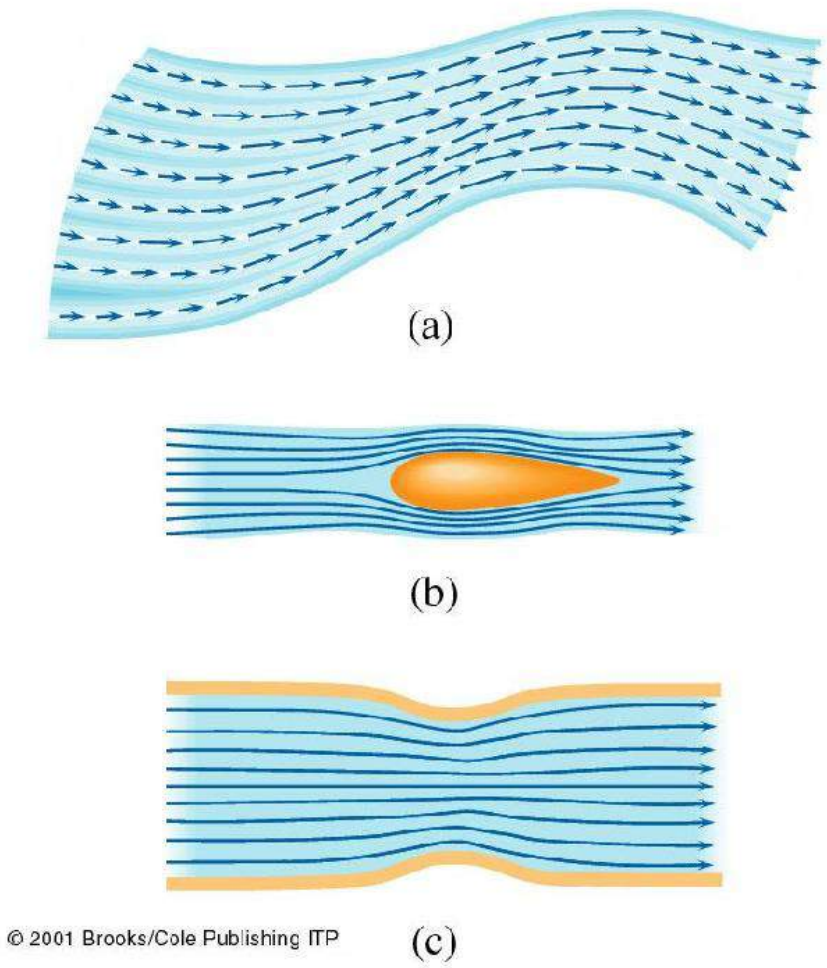
$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r}$$ Loi de Jurin

Si $\theta = 90°$, alors $h = 0$. Si $\theta > 90°$, $\cos\theta$ et $h < 0$: il y a dépression.
Les effets de capillarité sont plus grands pour les faibles valeurs de r.

Ecoulement d'un fluide parfait

Les expériences menées par O.Reynolds en 1883 ont montré qu'il y avait 2 régimes distincts d'écoulement : **laminaire et turbulent**.

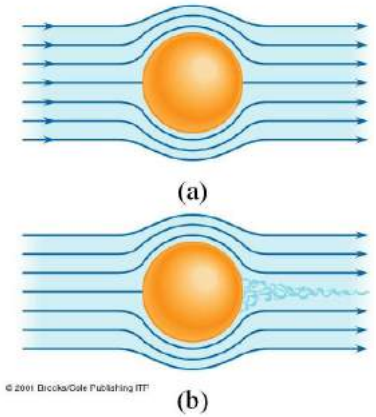
Ecoulement laminaire

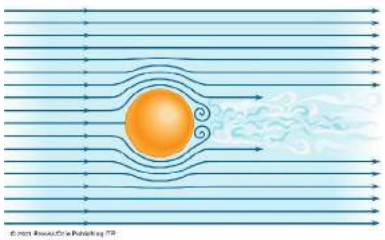


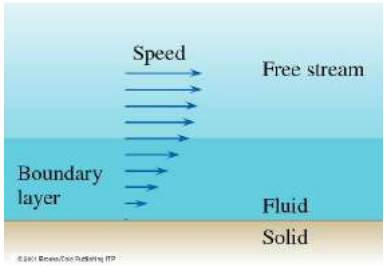
- Si un fluide se déplace de façon que sa vitesse en tout point reste constante en module et en direction, on a un écoulement régulier. C'est un écoulement lent.
- La vitesse peut être différente en différents points.
- On a des **lignes de courant**. La tangente est dans la même direction que la vitesse, si bien que 2 lignes de courant ne peuvent se croiser, car au point de rencontre une particule du fluide aurait 2 vitesses différentes.
- **Les lignes de courant sont plus sérrées là où la vitesse est plus grande.**

Ecoulement d'un fluide parfait

Ecoulement turbulent



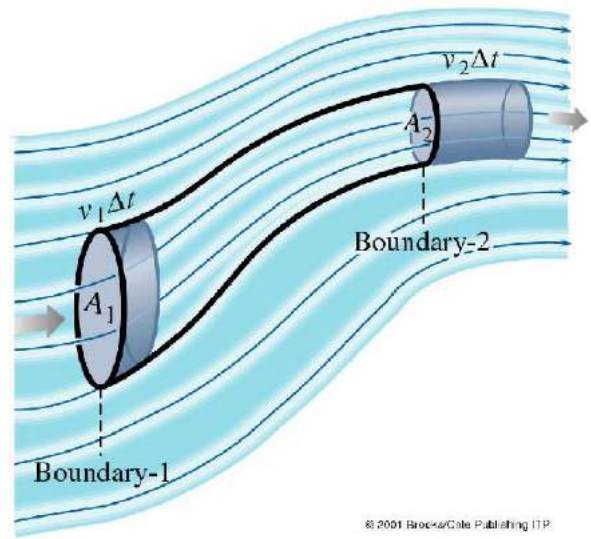




- L'écoulement turbulent correspond à un mouvement irrégulier chaotique et variable.
- Un fluide réel ne peut pas toujours suivre la surface d'un solide ; il forme alors derrière l'obstacle un fouillis de tourbillons qui constituent l'écoulement turbulent.
- Lorsque la vitesse d'écoulement augmente, son aptitude à suivre les contours d'un obstacle solide diminue encore. Il s'éloigne de la surface de l'obstacle et forme derrière lui des turbulences qui emporte l'énergie.
- L'écoulement d'un fluide réel dépend aussi de sa viscosité. La couche du fluide qui est en contact avec la paroi solide adhère et reste immobile par rapport à la paroi.

Equation de continuité

La constance de la masse volumique d'un liquide est la base d'une relation fondamentale qui nous permet de comprendre comment un liquide s'écoule dans les tuyaux et les veines. Considérons un tube de courant dans un fluide en écoulement laminaire. Le fluide entre par l'élément de tube 1 de section A_1 et sort par l'élément de tube 2 de section A_2. Pendant un intervalle de temps Δt, les molécules entrant dans le tube traversent une distance $v_1 \Delta t$ et les particules sortant une distance $v_2 \Delta t$ (v_1 et v_2 sont les vitesses moyennes du fluide en 1 et en 2). Puisque les volumes entrant et sortant sont les mêmes :



$$(A_1 v_1 \Delta t) = (A_2 v_2 \Delta t)$$

$$A_1\, v_1 = A_2\, v_2$$

Ceci est **l'équation de continuité.**

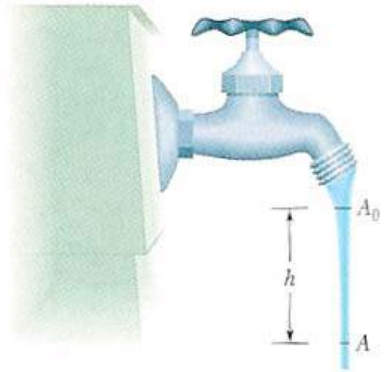
Si la section du tube augmente, la vitesse d'écoulement diminue et vice-versa.

Le produit $A\ v$, qui est constant dans un tube de courant, est le débit volumique, J :

$$J = A\, v = \frac{\Delta\, V}{\Delta\, t}$$

Exemple : Ecoulement d'un robinet

Vous avez surement remarqué que juste au sortir d'un robinet, la section du tube de courant d'eau est plus large que quelques centimètres plus bas. Pourquoi ? Prenez $A_o = 1,2\text{cm}^2$, et $A = 0,35\text{cm}^2$. Les 2 mesures sont séparées d'une distance $h = 45\text{mm}$.



SOLUTION : l'équation de continuité donne :

$$A_o\, v_o = A\, v$$

avec v, v_o les vitesses respectives. Mais l'eau s'écoule librement sous l'effet de la gravitation, soit :

$$v^2 = v_o^2 + 2gh$$

En éliminant v entre ces 2 équations, on obtient pour v_o :

$$v_o = \sqrt{\frac{2ghA^2}{A_o^2 - A^2}} = \sqrt{\frac{(2)(9,81\text{m/s}^2)(0,045\text{m})(0,35\text{cm}^2)^2}{(1,2\text{cm}^2)^2 - (0,35\text{cm}^2)^2}} = 0,286\text{m/s}$$

Le débit volumique J vaut alors :

$$J = A_o\, v_o = (1,2\text{cm}^2)(28,6\text{cm/s}) = 34\text{cm}^3/\text{s}$$

Exemple : Circulation du sang

Le sang est pompé vers l'extérieur du coeur dans l'aorte, un tube aux parois épaisses (2mm) et de diamètre intérieur 18mm, à une vitesse moyenne de 0,33 m/s, dans le cas d'un adulte au repos. (a) Calculer le débit. L'aorte se divise en 32 grandes artères, approximativement de même taille, environ 4 mm de diamètre intérieur. (b) Quelle est la vitesse du sang dans ces artères. Les plus petites branches du système sont les capillaires, de diamètre intérieur proche de 8 $\times 10^{-6}$m. (c) Sachant que la section totale de l'ensemble des capillaires est 2,5$\times 10^5$mm^2, quelle est la vitesse du sang dans un capillaire ?
SOLUTION : (a) Pour l'aorte (indice A)

$$J_A = A_A v_A = \pi \left(\frac{D_A}{2}\right)^2 v_A = \pi(9,0 \times 10^{-3}\text{m})^2(0,33\text{m/s}) = 8,4 \times 10^{-5}\text{m}^3/\text{s}$$

(b) L'aorte se divise en 32 artères. Comme le débit à travers l'aorte est le même qu'à travers l'ensemble des 32 artères (indice a) $J_A = J_a = A_a v_a$

$$v_a = \frac{J_A}{A_a} = \frac{8,4 \times 10^{-5}\ \text{m}^3/\text{s}}{32\pi(D_a/2)^2} = 0,21\text{m/s}$$

(c) De même, dans les capillaires (indice c) : $J_A = J_c = A_c\, v_c$

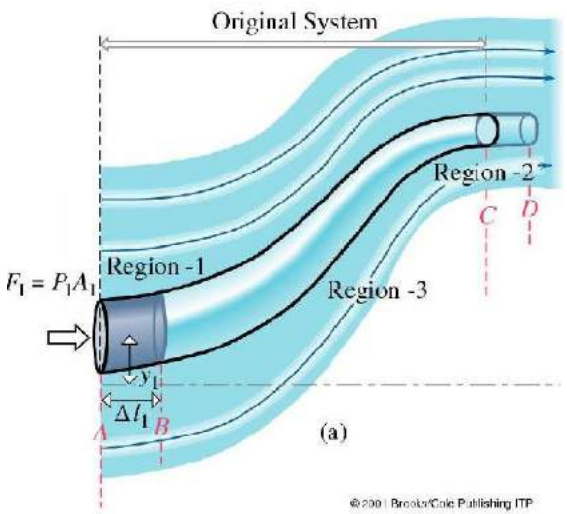
$$v_c = \frac{J_A}{A_c} = \frac{8,4 \times 10^{-5}\ \text{m}^3/\text{s}}{2,5 \times 10^{-1}\text{m}^2} = 3,4 \times 10^{-4}\text{m/s}$$

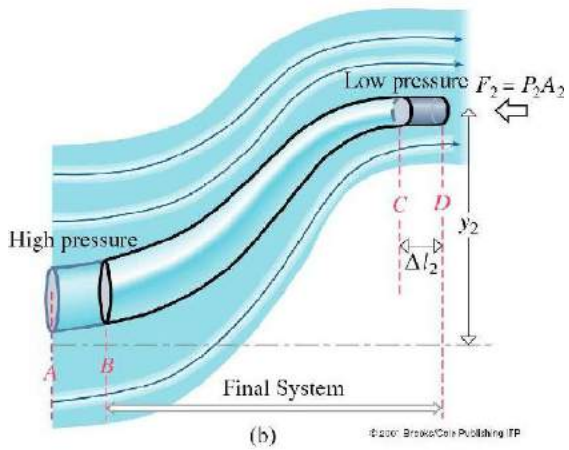
Equation de Bernoulli

Elle découle du principe de conservation de l'énergie, d'après lequel le travail fourni à un fluide lors de son écoulement d'un endroit vers un autre est égal à la variation de son énergie mécanique (fluide incompressible, non-visqueux, écoulement laminaire et stationnaire) : $\boldsymbol{\Delta W = \Delta E_c + \Delta E_p}$.

Un fluide sous pression contient de l'énergie car un travail sur lui a été nécéssaire pour établir la pression. Un fluide dont la pression varie subit une variation d'énergie.

La pression agissant sur un élément de volume de ce fluide en mouvement exerce un travail sur lui, qui se traduit par une variation de son énergie cinétique,$\boldsymbol{E_c}$, ou de son énergie potentielle,$\boldsymbol{E_p}$.





Equation de Bernoulli

– Travail fourni au fluide ΔW

$$\Delta W = F_1 \Delta l_1 - F_2 \Delta l_2 = P_1\ A_1 \Delta l_1 - P_2\ A_2 \Delta l_2$$

Comme $\Delta l_1 = v_1 \Delta t$ et $\Delta l_2 = v_2 \Delta t$

$$\Delta W = P_1\ A_1\ v_1 \Delta t - P_2\ A_2\ v_2 \Delta t$$

Avec l'équation de continuité : $A_1\ v_1 = A_2\ v_2 = A\ v$

$$\Delta W = v\ A\ \Delta t (P_1 - P_2)$$

La masse de l'élement de volume déplacé :$\Delta m = \rho \Delta V = \rho (A\ v\ \Delta t)$

$$\Delta W = (\frac{\Delta m}{\rho})(P_1 - P_2)$$

– Variation d'énergie cinétique

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2)$$

– Variation d'énergie potentielle gravitationnelle

$$\Delta E_p = \Delta m\ g\ (y_2\ - y_1)$$

Equation de Bernoulli

D'après les 3 dernières équations, nous obtenons : $\Delta W = \Delta E_c + \Delta E_p$

$$(\frac{\Delta m}{\rho})(P_1 - P_2) = \frac{1}{2}\Delta m(v_2^2 - v_1^2) + \Delta m\, g\, (y_2 - y_1)$$

$$(P_1 - P_2) = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(y_2 - y_1)$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho\, g\, y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + \rho\, g\, y_2$$

Le long d'une ligne de courant, un fluide parfait en écoulement régulier et laminaire obéit au *théorème de Bernoulli* :

$$P + \frac{1}{2}\rho\, v^2 + \rho\, g\, y = Ctte$$

Chaque terme a les dimensions d'une énergie par unité de volume ou densité d'énergie. Cas particulier pour un fluide au repos, $v_1 = v_2$:

$$P_1 - P_2 = \rho g(y_2 - y_1)$$

On retrouve que la pression est la même en tous points situés à la même profondeur quelle soit la forme et le volume du récipient.

Exemple

L'eau, qui circule à travers une maison dans un système de chauffage à l'eau chaude, est pompée à une vitesse de 0,50 m/s par un tuyau mesurant 4,0cm de diamètre et placé dans la cave à une pression de 3,0 atm. Déterminer la pression dans un tuyau d'un diamètre de 2,6 cm situé à l'étage, à 5,0m au-dessus de la cave.

SOLUTION : On calcule d'abord v_2 la vitesse de l'eau à l'étage :

$$v_2 = \frac{v_1 A_1}{A_2} = (0,50\text{m/s})\frac{(\pi)(0,020\text{m})^2}{(\pi)(0,013\text{m})^2} = 1,2\text{m/s}$$

Pour obtenir la pression, P_2, on se sert de Bernouilli :

$$P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

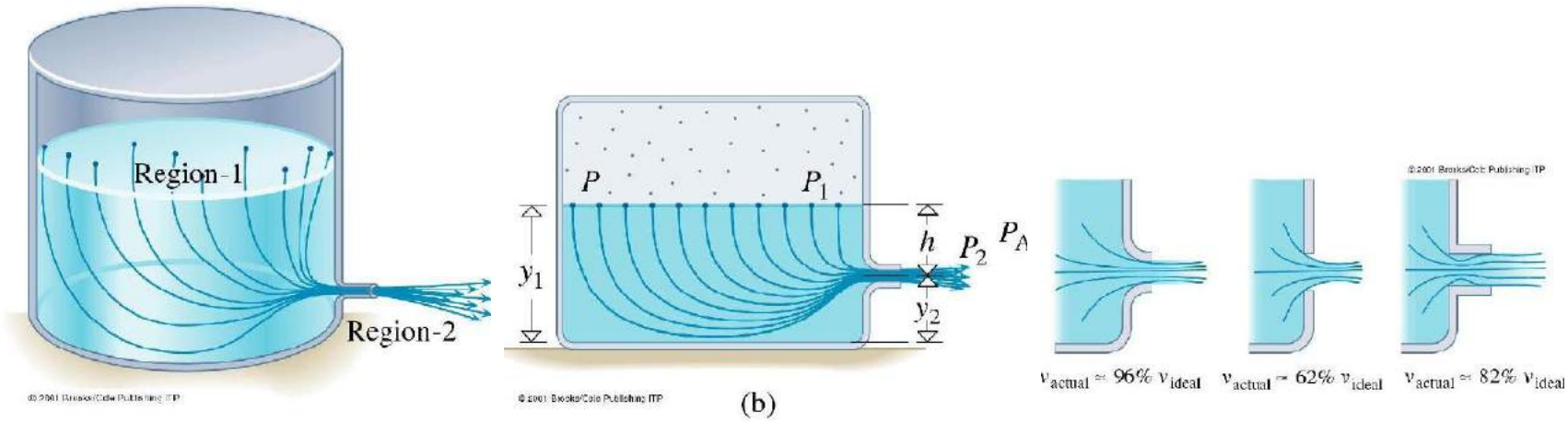
$$P_2 = P_1 + \rho g(y_1 - y_2) + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)$$

$$= (3,0 \times 10^5\text{N/m}^2) + (1,0 \times 10^3\text{kg/m}^3)(9,81\text{m/s}^2)(-5,0\text{m})$$

$$+\frac{1}{2}(1,0 \times 10^3\text{kg/m}^3)[(0,50\text{m/s})^2 - (1,2\text{m/s})^2]$$

$$= 3,0 \times 10^5\text{N/m}^2 - 4,9 \times 10^4\text{N/m}^2 - 6,0 \times 10^2\text{N/m}^2 = 2,5 \times 10^5\text{N/m}^2$$

Expérience de Torricelli



Un liquide coulant à l'air libre est à la pression atmosphérique, $P_2 = P_A$

$$P + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho\, g\, h = P_A + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2$$

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2(P - P_A)}{\rho} + 2gh$$

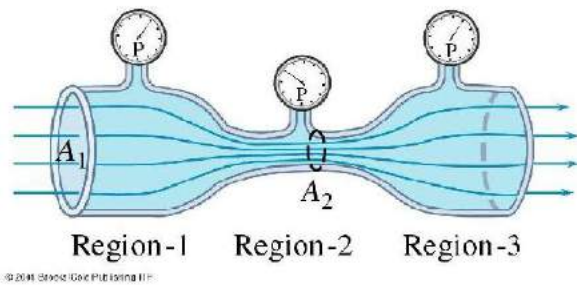
De l'équation de continuité, si $A_1 \gg A_2$, $v_2 \gg v_1$, v_1^2 est négligeable devant v_2^2. Si le réservoir est à l'air libre, $P = P_A$

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

Si le frottement est négligeable, le liquide jaillit de l'ouverture avec une vitesse égale à celle qu'il aurait gagnée en chute libre à partir de la hauteur h.

Effet Venturi

Certaines applications pratiques de l'hydrodynamique des fluides résultent de l'interdépendance de la pression et de la vitesse. Regardons le cas où la variation d'énergie potentielle gravitationnelle est négligeable. Soit un tube horizontal présentant un rétrécissement :



$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho\, g\, y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho\, g\, y_2$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2$$

Comme $A_1\, v_1 = A_2\, v_2$:

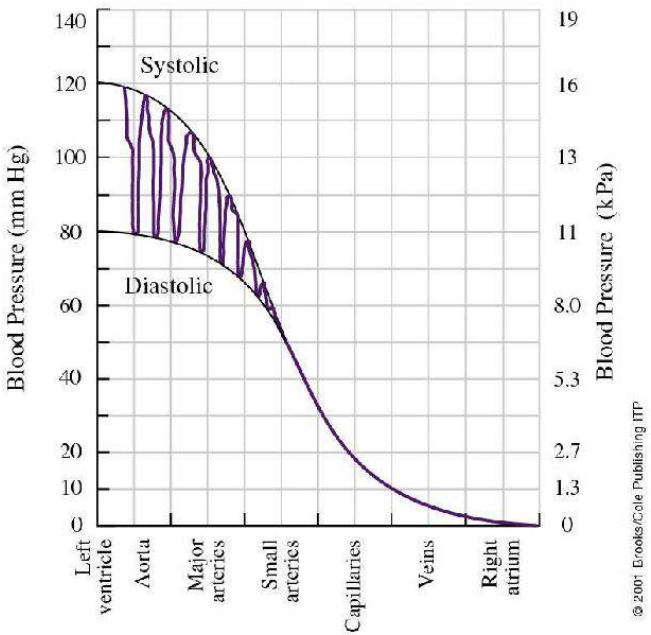
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, (\frac{A_1\, v_1}{A_2})^2 \text{ et } P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\, v_1^2\, (\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2})$$

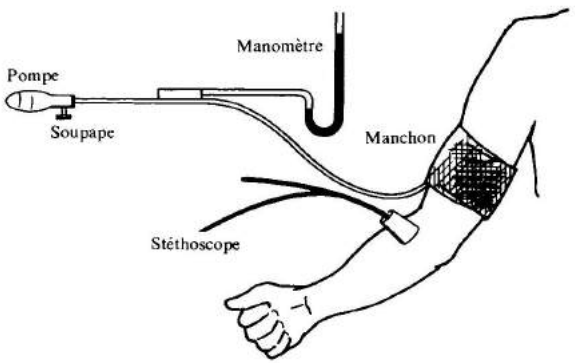
$$v_1 = A_2 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\, (A_1^2 - A_2^2)}}$$

Comme $A_1 \geq A_2 \rightarrow P_1 \geq P_2$. Une partie du liquide, forcée à se déplacer plus rapidement, est le siège d'une pression inférieure à celle d'une partie du fluide qui se déplace lentement.

Mesure de la tension artérielle

Pendant un cycle cardiaque complet, la pression dans le coeur et le système circulatoire passe par un maximum (phase de pompage du coeur) et par un minimum (sang renvoyé par les veines). On mesure ces pressions extrêmes.
Son principe est basé sur le fait que l'écoulement sanguin dans les artères n'est pas tjs laminaire. L'écoulement devient turbulent quand les artères sont comprimées. Il est alors bruyant et peut être perçu au moyen d'un stéthoscope.





Rapport systolique/diastolique :
120/80 en mm Hg