



Christophe ANCEY

Hydraulique à surface libre

Crues, vagues, et ruptures de barrage
Phénomènes de propagation, outils de
simulations, applications

C. ANCEY,
EPFL, ENAC/IIC/LHE,
Ecublens, CH-1015 Lausanne, Suisse
christophe.ancey@epfl.ch, lhe.epfl.ch



Hydraulique à surface libre / C. ANCEY
version 16.1 du 20 janvier 2022, Lausanne



Attribution : pas d'utilisation commerciale, pas de modification, 3.0.
[Licence Creative Common 3.0](#). Ce travail est soumis aux droits d'auteurs. Tous les droits sont réservés ; toute copie, partielle ou complète, doit faire l'objet d'une autorisation de l'auteur. La gestion typographique a été réalisée à l'aide du package *efrench* de Bernard GAULLE. Tous les clichés sont de Christophe Ancey sauf mention contraire.

Crédit des illustrations. Première de couverture : l'Orbe à l'Isle (VD). **Table des matières :** Joseph Turner, *Négriers jetant par-dessus bord les morts et les mourants - un typhon approche* (Tate gallery, Londres); Joseph Turner, *tempête de neige dans le val d'Aoste* (Chicago Art Institute). Alexandre Calame, *vue sur le Lac Lemman, 1849* (Villa Vauban, Musée d'art de la ville de Luxembourg). **Chapitre 1 :** Alexandre Calame, *torrent de montagne par orage* (collection privée). **Chapitre 2 :** François Diday, *Rosenloui bei Meiringen* (collection privée). **Chapitre 3 :** *le déluge asiatique* par Riou dans « La terre avant le déluge » (Louis Figuier, Hachette, Paris 1863). **Chapitre 4 :** Katsushika Hokusai *la grande vague de Kanagawa* (musée Marmottan, Paris). **Bibliographie :** Claude Monet, *impression de soleil couchant* (musée Marmottan, Paris). **Index :** Philip James de Loutherbourg, *Une Avalanche dans les Alpes, 1803* (Tate gallery, Londres).




Table des matières

Table des matières	iii
1 Équations de base en hydraulique	1
1.1 Courbes de remous à partir de l'équation de Bernoulli	1
1.1.1 Charge hydraulique	1
1.1.2 Équation de la courbe de remous	2
1.1.3 Hauteur critique et régimes associés	3
1.1.4 Singularités	4
1.2 Équations de Saint Venant	11
1.2.1 Obtention des équations	11
1.2.2 Forme conservative et non conservative	15
1.2.3 Synthèse	16
1.2.4 Écoulement sur lit mobile	18
1.2.5 Forme tensorielle et structure des équations	18
1.2.6 Ressaut hydraulique mobile	21
1.2.7 Application: courbe de remous	23
1.3 Limites d'utilisation des équations de Saint-Venant	24
1.3.1 Singularité hydraulique	25
1.3.2 Courants secondaires	28
1.3.3 Interactions morphodynamiques	29
1.4 Résistance à l'écoulement	36
1.4.1 Mécanismes généraux de dissipation d'énergie	36
1.4.2 Loi de Darcy-Weisbach	38
1.4.3 Loi de Chézy	38
1.4.4 Loi de Manning-Strickler	39
1.4.5 Loi de Keulegan	40
1.4.6 Loi de Ferguson	42
1.4.7 Loi de Recking	42
1.4.8 Loi parabolique	42

1.5	Autres équations utiles en hydraulique	45
1.5.1	Équation de convection (ou d'advection)	45
1.5.2	Équation de diffusion	46
1.5.3	Équation de convection-diffusion	49
1.5.4	Équation des ondes	50
1.5.5	Processus à l'équilibre: équation de Laplace	52
2	Ondes de crue et inondations	55
2.1	Phénomènes physiques	55
2.1.1	Inondation et crue	55
2.1.2	Domages causés par les inondations	59
2.1.3	Crues torrentielles	61
2.2	Origine des crues	62
2.3	Définition de la période de retour: du problème au calcul mathématique	70
2.3.1	Problématique	70
2.3.2	Théorie des valeurs extrêmes	72
2.3.3	Définition de la période de retour	75
2.3.4	Cas des barrages	77
2.4	Estimation du débit par corrélation	78
2.4.1	Méthode Crupédix	78
2.4.2	Courbe enveloppe	79
2.5	Estimation du débit par la méthode du gradex	81
2.5.1	Méthode du gradex	81
2.5.2	Méthode QdF	83
2.6	Estimation du débit par des méthodes de transformation pluie-débit .	89
2.6.1	Méthode rationnelle	90
2.6.2	Méthode SCS	92
2.6.3	Méthode Socose	95
2.6.4	Modèle réservoir GR4	97
2.7	Calcul de la propagation d'une onde de crue	104
2.7.1	Onde cinématique	105
2.7.2	Onde diffusive	111
3	Rupture de barrage	115
3.1	Rupture de barrage et phénomènes similaires	115
3.1.1	Rupture de grand barrage	116
3.1.2	Rupture de petit barrage d'accumulation	123
3.1.3	Rupture de lac morainique et glaciaire	124
3.1.4	Rupture de digue	128
3.1.5	Rupture de terrils et bassins de décantation	129
3.2	Rupture de barrage en ingénierie des risques	138
3.2.1	Bases réglementaires	138
3.2.2	Cas des petites retenues d'accumulation	139


3.2.3	Plan des études en ingénierie	141
3.2.4	Charges exceptionnelles	141
3.3	Mécanismes de rupture et hydrogramme initial	143
3.3.1	Barrage en béton	144
3.3.2	Barrage en remblai	144
3.3.3	Barrage naturel en remblai	149
3.3.4	Barrage glaciaire	150
3.4	Rupture de barrage en régime laminaire	153
3.4.1	Équations du mouvement	153
3.4.2	Problème de Riemann: définition	154
3.4.3	Problème de Riemann: solution	155
3.4.4	Résolution des équations de Huppert	157
3.5	Rupture de barrage d'un fluide non visqueux	161
3.5.1	Rupture de barrage d'un volume infini (solution de Ritter)	161
3.6	Rupture de barrage dans un lit mouillé	167
3.7	Effet du frottement	171
3.7.1	Méthode de Whitham: rupture de barrage sur fond plat	171
4	Vagues	175
4.1	Phénomènes physiques	175
4.2	Équations de Saint-Venant et ondes dynamiques	185
4.3	Modèle d'Airy	186
4.3.1	Équations d'Airy	186
4.3.2	Relation de dispersion	188
4.3.3	Vitesse de groupe et propagation d'énergie	192
4.4	Vague	195
4.4.1	Classification	195
4.4.2	Ondes linéaires	198
4.4.3	Ondes de Stokes	199
4.4.4	Ondes cnoïdales	200
4.4.5	Ondes solitaires	202
4.5	Tsunami	204
4.5.1	Introduction	204
4.5.2	Modèle approximatif de tsunami arrivant de haute mer	205
4.6	Vague d'impulsion	209
4.6.1	Similitude du problème	211
4.6.2	Résultat des expériences pour des blocs solides	212
4.6.3	Résultat des expériences pour des écoulements granulaires	215
4.6.4	Remontée (run-up)	218
4.7	Mascaret	219
4.7.1	Phénomène physique	219
4.7.2	Ressaut mobile	221
4.8	Houle et vagues dues au vent	225

vi Table des matières



4.9	Trains d'onde	229
4.9.1	Problématique	229
4.9.2	Stabilité linéaire des équations de Saint-Venant	230
	Bibliographie	233
	Bibliographie	233
	Index	243



Avant-propos

 E RECUEIL DE NOTES contient les principales notions du cours d'hydraulique avancé. L'objet est ici de fournir les bases mathématiques et les concepts physiques permettant de faire des calculs d'écoulements fortement instationnaires dans les rivières. Les notions essentielles des méthodes numériques sont également vues.

J'emploie les notations usuelles modernes :

- les exemples sont le plus souvent introduits à l'aide de « ♣ **Exemple.** – » et on indique la fin d'un exemple par le symbole « qed » □ ;
- les problèmes d'interprétation sont indiqués par le symbole  dans la marge ;
- les notions qui nécessitent des compléments mathématiques sont annoncées à l'aide de la tête de Homer  , un hommage aux Simpson ;
- les notions qui dépassent le cadre de ce cours et qui ne sont données qu'à titre d'exemple sont signalées par le symbole ★ dans le titre ;
- les vecteurs, matrices, et tenseurs sont en gras ;
- les variables sont en italique ;
- les fonctions, opérateurs, et nombres sans dimension sont en roman ;
- le symbole O (O majuscule) signifie généralement « est de l'ordre de ». En fait, la définition est plus précise et dans certains cas peut ne signifier pas l'équivalence des ordres de grandeurs. Lorsque par exemple on a $u = O(v)$ avec $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions continues dans le voisinage d'un point M , alors cela veut dire que la limite $\lim_{x \rightarrow M} u/v$ est finie (elle n'est ni nulle ni infinie) ;
- le symbole o (o minuscule) signifie « est négligeable devant » ;
- je n'emploie pas la notation D/Dt pour désigner la dérivée particulière, mais d/dt (qu'il ne faudra donc pas confondre avec la différentielle ordinaire selon t). Je considère que le contexte est suffisant pour renseigner sur le sens de la

différentielle et préfère garder le symbole D/Dt pour d'autres opérations différentielles plus complexes ;

- le symbole \propto veut dire « proportionnel à » ;
- le symbole \sim ou \approx veut dire « à peu près égal à » ;
- les unités employées sont celles du système international : mètre [m] pour les longueurs, seconde [s] pour le temps, et kilogramme [kg] pour la masse. Les unités sont précisées entre crochets ;
- pour la transposée d'une matrice ou d'un vecteur, j'emploie le symbole \dagger en exposant : A^\dagger veut dire « transposée de A ».

Remerciements pour les relecteurs suivants : Viljami LAURMAA, Pascal VENETZ.

Ce travail est soumis aux droits d'auteurs. Tous les droits sont réservés ; toute copie, partielle ou complète, doit faire l'objet d'une autorisation de l'auteur.

La gestion typographique du français a été réalisée avec \LaTeX à l'aide du package *french.sty* de Bernard Gaulle.



Nomenclature

Symboles romans

Variable	Signification
a	rayon d'une particule
B	largeur au miroir
C	coefficient de Chézy
C_f	coefficient de frottement
c	célérité des ondes
\mathbf{D}	tenseur des taux de déformation
f	coefficient de frottement (Darcy-Weisbach)
g	accélération de la gravité
h	hauteur d'écoulement
h_c	hauteur critique
h_n	hauteur normale
\mathbf{k}	vecteur normal unitaire
k_s	rugosité
K	coefficient de Manning-Strickler
ℓ	échelle de longueur
ℓ	largeur
L_*	longueur caractéristique
\mathbf{n}	vecteur normal unitaire
p	pression
P_*	échelle de pression
Q	débit
q	débit par unité de largeur
R	rayon de courbure
R_H	rayon hydraulique

Variable	Signification
Re	nombre de Reynolds
S	section d'écoulement
T	tenseur des extra-contraintes (appelé encore partie déviatorique)
t	temps
u	vitesse, composante de la vitesse dans la direction x
u_*	vitesse de glissement, vitesse de cisaillement
\bar{u}	vitesse moyennée selon la hauteur d'écoulement
$\langle u \rangle$	vitesse moyennée dans le temps
\mathbf{u}	vitesse
\mathbf{u}'	fluctuation de vitesse
U_*	échelle de vitesse
v	vitesse, composante de la vitesse dans la direction y
v	vitesse quadratique moyenne
v	vitesse
\mathcal{V}	volume de contrôle

Symboles grecs

Variable	Signification
χ	périmètre mouillé
δ	fonction de Dirac
δ	petite variation
$\dot{\gamma}$	taux de cisaillement
ϵ	rapport d'aspect
κ	constante de von Kármán
μ	viscosité dynamique
ρ	masse volumique
σ	contrainte
σ	contrainte normale
θ	angle de pente
τ	contrainte de cisaillement
τ_p	contrainte de cisaillement à la paroi
ξ	variable de similitude



CHAPITRE 1

Équations de base en hydraulique



LES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT¹ sont une forme intégrée (intégration selon la hauteur) des équations de Navier-Stokes. Elles permettent de calculer les hauteurs d'eau et vitesses moyennes le long de la direction d'écoulement en fonction du temps. Elles ne sont applicables qu'en régime graduellement varié.

Dans ce chapitre, on va voir comment on peut obtenir les équations de Saint-Venant en intégrant les équations de Navier-Stokes. Avant cela, on va rappeler quelques notions fondamentales d'hydraulique vues durant le [cours de bachelor](#) « une introduction à la mécanique des fluides » (voir chap. 5 du cours de bachelor).

1.1 Courbes de remous à partir de l'équation de Bernoulli

1.1.1 Charge hydraulique

On a vu dans le cours de mécanique des fluides (bachelor GC) que l'énergie totale E se conserve le long d'une ligne de courant pour un écoulement en régime permanent

1. Adhémar Barré de Saint-Venant (1797–1886) était un mécanicien français. Polytechnicien de formation, il étudia aussi à l'École Nationale des Ponts et Chaussée, où il fit l'essentiel de sa carrière. Ses travaux de recherche ont couvert un champ considérable de domaines scientifiques et d'application: hydraulique maritime, navigation le long des canaux et sur route, élasticité, théorie des fluides visqueux, turbulence et perte de charge dans les conduites. Avant Reynolds, il avait pressenti l'importance de la turbulence dans le calcul des pertes de charge. En 1871, il proposa un jeu d'équations aux dérivées partielles décrivant le mouvement unidimensionnel d'une onde de crue.

2 Chapitre 1 Équations de base en hydraulique

lorsqu'on peut négliger la dissipation d'énergie. Cette énergie s'écrit

$$E = p + \psi + k$$

avec $p = \rho gh$ la pression, $\psi = \rho gz$ (z cote du lit) le potentiel gravitaire, et $k = \frac{1}{2}\rho\bar{u}^2$ l'énergie cinétique (\bar{u} vitesse moyennée le long de la hauteur); ρ masse volumique de l'eau et h hauteur d'eau.

En hydraulique à surface libre, il est d'usage d'écrire cette énergie sous forme de charge hydraulique, c'est-à-dire en équivalent de hauteur de colonne d'eau :

$$H = \frac{E}{\rho g} = h + z + \frac{\bar{u}^2}{2g}$$

Sur de courtes distances, l'énergie se conserve ($H = cst$), mais sur de longues distances, il y a une *perte de charge* due au frottement sur le lit, qui se traduit par une diminution localement faible, mais régulière de la charge le long de l'axe Ox . On définit la *pente de frottement* j :

$$j = -\frac{dH}{dx}$$

qui traduit cette petite perte de charge dH sur une distance dx .

1.1.2 Équation de la courbe de remous

On considère un écoulement unidirectionnel le long d'un lit de cote $z(x)$, dont la pente locale est $i = -z'(x)$. Cette pente définie par rapport à l'axe horizontal Ox est faible. Elle varie très faiblement le long de x .

On pose les hypothèses suivantes :

- le régime est *graduellement varié* (ce qui veut dire que la pente de la surface libre $h'(x)$ est faible et voisine de i), et les pertes de charge sont régulièrement réparties le long de x ;
- le régime d'écoulement permanent : $q = h\bar{u} = cst$ où q est débit le par unité de largeur, $h(x)$ est la hauteur d'eau, et $\bar{u}(x)$ est la vitesse moyenne de l'eau (dans ce chapitre, « vitesse moyenne » se comprend comme la vitesse moyennée selon la hauteur d'écoulement);
- le canal est infiniment large (on ne s'occupe donc pas de la section en travers).

Différentions la charge hydraulique $H(x)$ par rapport à x :

$$dH = -jdx = dh + dz + \frac{d(\bar{u}^2)}{2g},$$

or comme $\bar{u} = q/h$ et $dz = -idx$, on a aussi

$$dH = -jdx = dh - idx - \frac{q^2}{gh^3}dh,$$

soit encore

$$i - j = \frac{dh}{dx} \left(1 - \frac{q^2}{gh^3} \right).$$

En définissant le nombre de Froude pour un canal infiniment large :

$$\text{Fr} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} = \frac{q}{\sqrt{gh^3}},$$

on obtient l'équation différentielle dite *équation de la courbe de remous* :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - j}{1 - \text{Fr}^2}. \quad (1.1)$$

Quelques remarques :

- c'est une équation différentielle non linéaire du 1^{er} ordre, qui nécessite une seule condition aux limites (amont ou aval);
- pour un écoulement subcritique ($\text{Fr} < 1$), la condition aux limites doit être posée à l'aval;
- pour un écoulement supercritique ($\text{Fr} > 1$), la condition aux limites doit être posée à l'amont;
- il faut fermer l'équation (1.1) en fournissant une loi de résistance pour la pente de frottement j ;
- un régime permanent uniforme (caractéristique par $h'(x) = 0$) est atteint lorsque $j = i$. La hauteur atteinte durant le régime permanent uniforme est appelée *hauteur normale* h_n ;
- l'équation (1.1) admet une singularité quand $\text{Fr} \rightarrow 1$ (le régime est dit alors *régime rapidement varié*);
- il existe deux régimes aux comportements différents: subcritique $\text{Fr} < 1$ et supercritique $\text{Fr} > 1$. La hauteur croît ou décroît selon le signe respectif du numérateur et du dénominateur dans l'équation différentielle (1.1);
- la singularité correspond à la *hauteur critique* h_c atteinte lorsque $\text{Fr} = 1$

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (1.2)$$

1.1.3 Hauteur critique et régimes associés

Si le nombre de Froude prenait la valeur 1 dans l'équation (1.1), le dénominateur serait nul et en ce point la dérivée deviendrait infinie, ce qui est physiquement impos-

sible et cela violerait l'hypothèse de régime graduellement varié. En fait au voisinage de ce point, il se forme

- soit une discontinuité de la surface libre appelée *ressaut* qu'il faut étudier avec des outils spécifiques (cf. § 1.1.4) lorsqu'on passe d'un régime super- à subcritique ;
- soit une « chute » d'eau, c'est-à-dire une accélération brutale et un raidissement de la surface libre (passage d'un seuil par exemple, avec transition d'un régime sub- à supercritique).

Pour un canal infringement large ou bien un canal rectangulaire, la hauteur critique est donnée par l'équation (1.2). Pour un canal quelconque, la hauteur critique est définie comme la hauteur pour laquelle $Fr(h_c) = 1$, on tire que :

$$h_c = \left(\frac{1}{g \cos \theta} \frac{Q^2}{B^2} \right)^{1/3},$$

avec Q le débit total et B la largeur au miroir. Le débit critique ne dépend pas (directement) de la pente, mais uniquement du débit liquide.

1.1.4 Singularités

Ressaut hydraulique stationnaire

Au niveau d'un ressaut, la courbure de la ligne d'eau est trop importante et les équations de Saint Venant cessent d'être valables. On utilise alors le théorème de quantité de mouvement de part et d'autre du ressaut (sur un volume de contrôle) pour simplifier le problème et déduire les caractéristiques du ressaut. Pour cela on considère un volume de contrôle (par unité de largeur) de part et d'autre du ressaut. Notons que l'écoulement va de la gauche vers la droite et il faut se souvenir que dans ce sens d'écoulement, un ressaut provoque une augmentation de hauteur, jamais une diminution (en effet le ressaut est associé à une dissipation d'énergie, donc à un ralentissement de l'écoulement). La tranche amont (resp. aval) est référencée par l'indice 1 (resp. 2). La longueur du volume de contrôle est L .

On fait les hypothèses suivantes

- l'écoulement est permanent et le débit par unité de largeur vaut q ;
- l'écoulement est unidirectionnel ;
- le ressaut est immobile (sa vitesse de déplacement est nulle) ;
- la pression est hydrostatique loin du ressaut ;
- le profil de vitesse est uniforme ;
- le fond est peu rugueux.

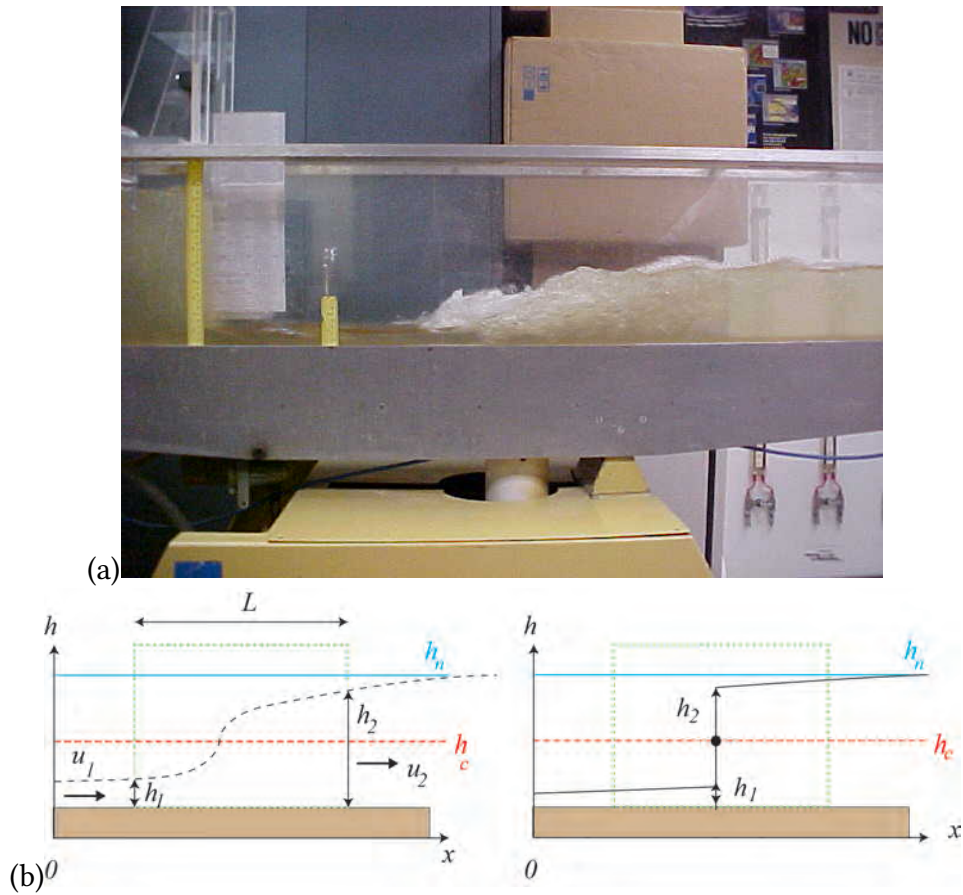


Figure 1.1 : simulation d'un ressaut au laboratoire (a) et schématisation d'un ressaut (b).

On considère un volume de contrôle dont les frontières englobent le ressaut.

- L'équation de continuité donne : $u_1 h_1 = u_2 h_2 = q$.
- L'équation de conservation de la quantité de mouvement en régime permanent est

$$\int_{\partial V} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_V \rho g dV - \int_{\partial V} p \mathbf{n} dS + \int_{\partial V} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS,$$

et lorsqu'elle est projetée le long de la direction d'écoulement, cela donne :

$$\rho q (u_2 - u_1) = -L \tau_p + \frac{1}{2} \rho g (h_1^2 - h_2^2).$$

On suppose que l'on connaît les conditions à l'amont et on veut déduire ce qui se passe

6 Chapitre 1 Équations de base en hydraulique

à l'aval. Quand on peut négliger le frottement τ_p , on tire :

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2} - 1 \right), \quad (1.3)$$

avec $\text{Fr}_1 = u_1/\sqrt{gh_1}$ le nombre de Froude à l'aval du ressaut.

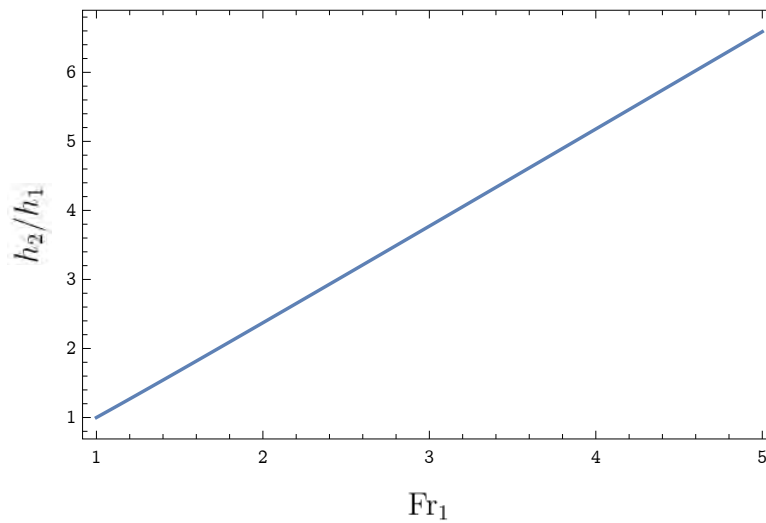


Figure 1.2 : variation du rapport h_2/h_1 en fonction du nombre de Froude.

La figure 1.2 montre que le rapport h_2/h_1 varie de façon à peu près linéaire avec le nombre de Froude amont Fr_1 .

L'équation (1.3) s'appelle *équation de conjugaison* et les hauteurs h_1 et h_2 sont dites *conjugées*. La perte de charge associée s'écrit :

$$\Delta H = H_2 - H_1 = h_2 - h_1 + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1h_2} = h_1 \frac{\left(\sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2} - 3 \right)^3}{16 \left(\sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2} - 1 \right)}.$$

Le ressaut n'est en général pas très long, ce qui permet de justifier notre approximation. Expérimentalement on trouve que :

$$\frac{L}{h_1} = 160 \tanh \frac{\text{Fr}}{20} - 12,$$

pour $2 < \text{Fr} < 16$.

Conjugaison d'une courbe de remous

Les ressauts hydrauliques stationnaires sont souvent observés au pied d'aménagements hydrauliques tels que les évacuateurs de crue des barrages ou les seuils. La figure 1.3 montre un ressaut au pied du seuil, qui sert à alimenter le laboratoire d'hydraulique Saint-Falls (SAFL) à Minneapolis. En modélisation hydraulique, il est souvent considéré que de tels aménagements sont des points singuliers ou *singularité*: la longueur de l'aménagement est très petite par rapport à la longueur caractéristique du bief étudié que l'on peut la considérer nulle; la courbe de remous n'est alors pas calculée car c'est juste un point, dont la position coïncide avec la position de l'aménagement. Dans un tel cas, la position du ressaut hydraulique est donc très simples à établir. Cela n'est toutefois pas toujours le cas.



Figure 1.3 : ressaut hydraulique stationnaire sur le Mississippi au pied du seuil du Saint-Falls Laboratory de Minneapolis (États-Unis). Source: www.thefullwiki.org/Hydraulic_jump.

En effet, lorsque les conditions hydrauliques varient doucement et se caractérisent par le passage d'un régime supercritique à un régime subcritique, il se forme un ressaut, dont la position n'est pas *a priori* fixée par une singularité. Pour déterminer la position du ressaut, il faut appliquer la méthode dite de « conjugaison ». Cette méthode repose en effet sur l'équation de conjugaison (1.3). Cette équation fournit les hauteurs de part et d'autre du ressaut, h_2 (hauteur aval) et h_1 (hauteur amont). Chacune de ces hauteurs doit également se trouver sur la courbe de remous: comme le montre la figure 1.4(a), les points B (hauteur h_1) et C (hauteur h_2) localisent le ressaut hydraulique, qui apparaît comme discontinuité. La branche AB est la courbe de remous du régime supercritique (elle se calcule en résolvant (1.1) avec une condition à la limite en A); la branche CD est la courbe de remous du régime subcritique (elle se calcule en résolvant (1.1), qui se résout avec une condition à la limite en D). Positionner le ressaut c'est donc positionner le segment vertical BC de telle sorte que la hauteur h_D vérifie la courbe de remous de la branche subcritique et que la hauteur h_C fasse de même pour la branche supercritique.

Ce problème peut se résoudre simplement en traçant la conjuguée d'une des branches et en cherchant son intersection avec l'autre branche. Par exemple, comme le montre la

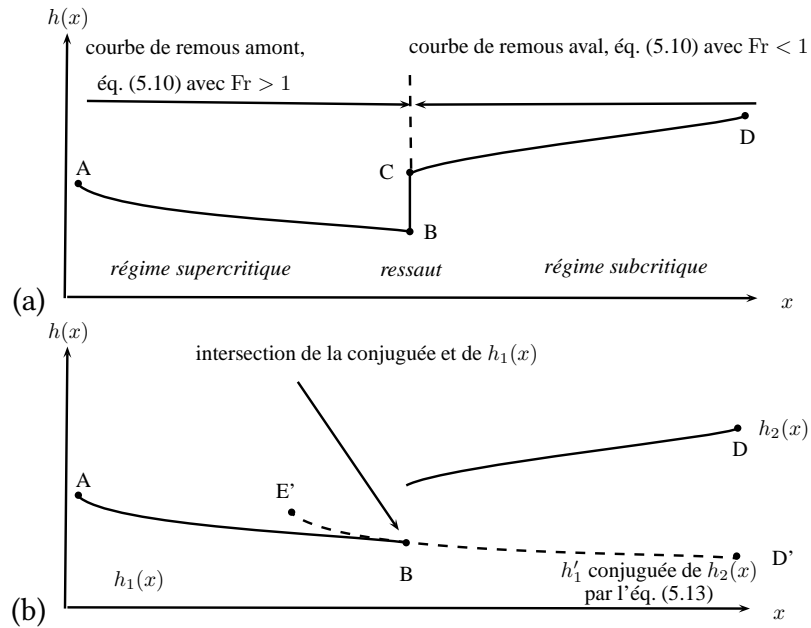


Figure 1.4 : (a) ressaut stationnaire entre deux courbes de remous, l'une en régime subcritique à l'aval, l'autre en régime supercritique à l'amont. (b) Principe de calcul de la position du ressaut à l'aide de la courbe conjuguée.

figure 1.4(b), admettons que l'on ait calculé la courbe de remous subcritique $h = h_2(x)$ partant du point D en résolvant (1.1); on peut calculer la courbe conjuguée D'E' $h = h'_1(x)$ (le prime désignant la hauteur conjuguée) en se servant de (1.3):

$$\frac{h_2}{h'_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1 \right) \quad (1.4)$$

avec $Fr_1 = q/\sqrt{gh_1^3}$. L'intersection de la courbe conjuguée $h = h'_1(x)$ avec la branche supercritique $h = h_1(x)$ se fait au point B. Comme ce point appartient à la courbe de remous supercritique et qu'il vérifie la relation de conjugaison (1.3), il nous fournit la position du ressaut.

On aurait pu procéder avec l'autre branche, ce qui conduit strictement au même résultat. Il faut noter au passage que c'est même une stratégie plus efficace car on note que dans la précédente méthode, l'inconnue $h'_1(x)$ apparaît à la fois dans le dénominateur du membre de gauche et dans la définition du nombre de Froude, ce qui demande un peu plus de travail numérique pour trouver la solution.

Passage d'un obstacle

On s'intéresse ici à un obstacle naturel (p. ex. une rupture de terrain causant la formation d'une cascade) ou artificiel (p. ex. seuil). Le passage d'un obstacle de type seuil entraîne souvent le passage d'un subcritique ($Fr < 1$) – à l'amont immédiat de l'obstacle – à supercritique ($Fr > 1$) – à l'aval de l'obstacle. En général, ce passage se traduit par une chute d'eau au passage de la crête de l'obstacle. La figure 1.5(a) montre un seuil sur la Reuss à Lucerne.

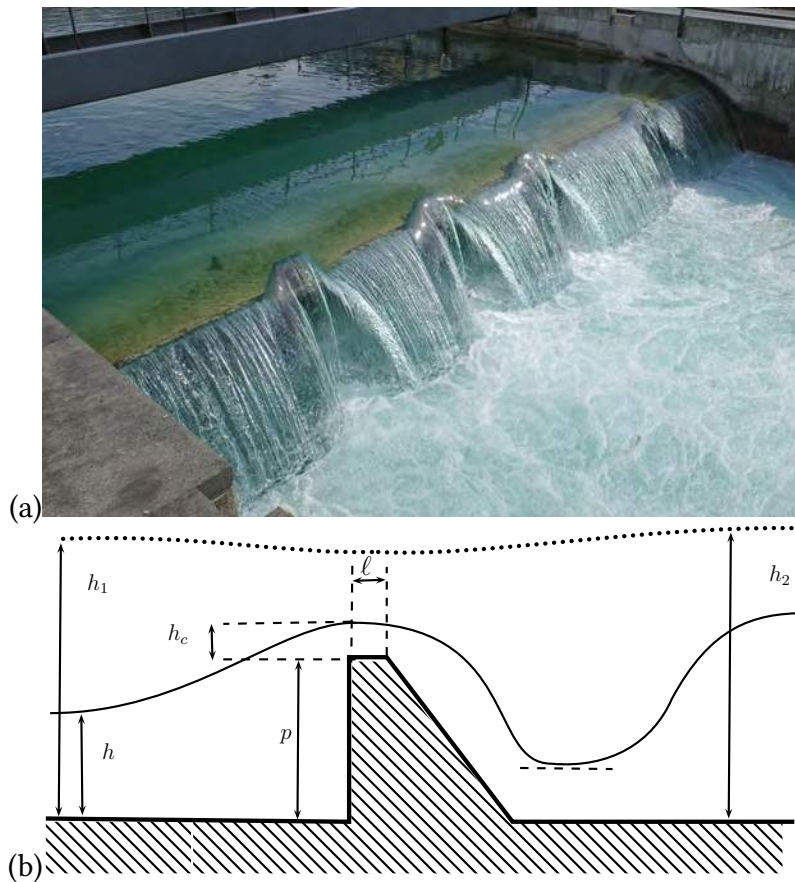


Figure 1.5 : (a) seuil placé à l'exutoire du lac de Lucerne au débouché de la Reuss. (b) Schéma de principe d'un seuil.

On fera ici, dans le cadre d'un traitement simplifié, que le changement de régime se produit au sommet de l'obstacle. En pratique, cela dépendra fortement de la géométrie de l'ouvrage. C'est la raison pour laquelle les formules théoriques sont appliquées aux cas pratiques avec des facteurs correctifs.

Considérons le seuil droit de la figure 1.5(b) qui barre un canal rectangulaire. Sa

10 Chapitre 1 Équations de base en hydraulique

hauteur par rapport à la cote du lit est notée p (*pelle* dans le jargon des hydrauliciens), et il est supposé épais². La hauteur est notée h_1 à l'amont de l'ouvrage, et h_2 à l'aval; la vitesse vaut u_1 à l'aval, et la cote du fond est z_1 qu'on posera arbitrairement à 0 sans perte de généralité. Comme le passage de $Fr < 1$ à $Fr > 1$ se fait sur la crête du seuil, la hauteur vaut h_c . La conservation de la masse implique: $q = u_1 h_1 = u_c h_c$.

La conservation de la charge hydraulique entre l'amont et la crête du seuil implique que:

$$H_1 = h_c + \frac{q^2}{2gh_c^2} + p = \frac{3}{2}h_c + p \Rightarrow h_c = \frac{2}{3}(H_1 - p),$$

soit si on retourne au débit $q = \sqrt{gh_c^3}$ sur le seuil:

$$q = \sqrt{g} \left(\frac{2}{3}(H_1 - p) \right)^{3/2}. \quad (1.5)$$

Notons qu'en pratique, on tient compte de pertes de charge singulières au passage de l'obstacle, et on pondère le débit d'un coefficient C_D appelé coefficient de débit:

$$q = C_D \sqrt{g} \left(\frac{2}{3}(H_1 - p) \right)^{3/2}, \quad (1.6)$$

avec $C_D < 1$ ([Chanson, 2004](#); [Hager, 2010](#); [Castro-Orgaz & Hager, 2019](#)).

Lorsque la hauteur h_2 à l'aval du seuil devient suffisamment grande par rapport h_1 , les conditions hydrauliques à l'aval modifient ce qui se passe à l'amont. Cela se produit lorsque:

$$\frac{h_2 - p}{h_1 - p} \geq \frac{2}{3}. \quad (1.7)$$

Le débit devient alors ([Rajaratnam & Muralidhar, 1969](#)):

$$q = C_D \sqrt{2g} (h_1 - h_2)^{1/2} (h_2 - p). \quad (1.8)$$

2. c'est-à-dire Un seuil est dit épais quand sa largeur vérifie $\ell > 3(H-p)$. Pour les seuils minces, on obtient des formules structurellement similaires à celles montrées ici, mais le principe d'obtention est différent, et les coefficients de débit C_D diffèrent également.

1.2 Équations de Saint Venant

1.2.1 Obtention des équations

Hypothèses

Nous allons utiliser ici les hypothèses simplificatrices suivantes :

- (H1) On s'intéresse à un écoulement d'eau le long d'un profil bidimensionnel curviligne (voir fig. 1.6), dont les variations sont faibles (rayon de courbure infini), c'est-à-dire la surface d'écoulement est à peu près plane, d'inclinaison θ par rapport à l'horizontale. On rattache un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) à ce repère (x est orienté selon la ligne de plus grande pente, y est normale au plan de glissement, z représente une direction latérale).
- (H2) On considère un mouvement essentiellement bidimensionnel (z n'intervient pas dans les calculs). Les calculs peuvent être généralisés à la dimension 3.
- (H3) Il n'y a pas de variation significative de la section d'écoulement sur de courtes distances (les variations sont toujours progressives). Il en est de même pour les hauteurs d'écoulement, qui varient doucement d'un point à l'autre de l'écoulement sur un même bief. On parle de *régime graduellement varié* ou bien d'approximation des grandes longueurs d'onde pour désigner ce régime ou cette approximation. Il s'agit donc d'un régime peu éloigné du régime permanent uniforme. Les lignes de courant sont donc parallèles à la surface libre, elle-même à peu près parallèle à la ligne de fond. Le rapport caractéristique

$$\epsilon = H_*/L_*$$

est appelé rapport d'aspect (avec H_* : échelle de hauteur et L_* : échelle de longueur). Il est supposé être petit devant 1 ($\epsilon \ll 1$); typiquement pour une rivière de 10 km et profonde de 10 m, on a $\epsilon = 10^{-3} \ll 1$.

- (H4) Les lignes de courant au sein de l'écoulement ne subissent pas de bifurcation brutale.
- (H5) La surface d'écoulement exerce une contrainte de frottement τ_p sur le fond de la rivière (lit).
- (H6) La masse volumique de l'eau ρ est constante (pas d'effet du transport solide en suspension).
- (H7) Il n'y a pas de variation de masse durant l'écoulement (apport ou perte d'eau).
- (H8) Le lit est fixe (pas de transport solide, pas d'érosion, pas de dépôt) et de rugosité uniforme tout le long du bief considéré. On va donc essentiellement ici considérer le cas $b(x,t) = 0$. Le cas d'un lit mobile peut également être traité dans le présent cadre théorique (mais on ne fournira ici aucune démonstration, voir (Gray, 2001)).

- (H9) La pente locale n'est pas trop forte ($\tan \theta$ doit être inférieur à 10–20 %) sinon il y a un risque d'instabilité de la surface libre (« roll waves » ou *train d'onde*, voir § 4.9.2).

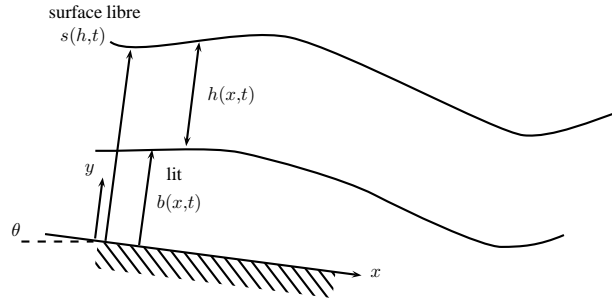


Figure 1.6 : notation employée dans la description des profils en long.

Le principe de base dans les modèles de type Saint-Venant est de partir des équations locales de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, de les intégrer suivant la verticale pour les moyenner, puis de les simplifier en supprimant les termes de faible influence.

Conservation de la masse

Considérons l'équation de conservation de la masse (appelée aussi équation de continuité)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

où \mathbf{u} désigne la vitesse locale de l'écoulement. L'intégration de cette équation selon la hauteur d'écoulement, c'est-à-dire le long de la direction y , donne :

$$\int_0^{h(x,t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u(x,y,t) dy - u(h) \frac{\partial h}{\partial x} + v(x,h,t) - v(x,0,t), \quad (1.9)$$

où u et v sont les composantes de la vitesse selon les directions x et y . À la surface libre et au fond, la composante normale de la vitesse v doit satisfaire respectivement

$$v(x,h,t) = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u(x,h,t) \frac{\partial h}{\partial x} \text{ et } v(x,0,t) = 0 \quad (1.10)$$

compte tenu de la définition de la surface libre (voir le livret « complément de cours » pour plus de détails). D'où l'on déduit l'équation moyennée de conservation de la masse :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (1.11)$$

où l'on a défini les valeurs moyennes de la façon suivante :

$$\bar{f}(x,t) = \frac{1}{h(x,t)} \int_0^{h(x,t)} f(x,y,t) dy.$$

Conservation de la quantité de mouvement

Considérons maintenant l'équation locale de conservation de la quantité de mouvement :

$$\varrho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \varrho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \varrho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (1.12)$$

où \mathbf{T} représente le tenseur des extra-contraintes et p la pression. Lorsque le tenseur des extra-contraintes varie linéairement avec le tenseur des taux de déformation \mathbf{D} (partie symétrique du tenseur gradient de vitesse $\nabla \mathbf{u}$) : $\mathbf{T} = 2\mu \mathbf{D}$ avec μ la viscosité dynamique, alors cette équation de conservation est appelée *équation de Navier-Stokes*.

La même procédure que précédemment peut être appliquée à l'équation locale de conservation de la quantité de mouvement. Comme il y a plus de termes que dans l'équation de conservation de la masse et comme certains ont un effet mineur sur la dynamique de l'écoulement, on va se servir de l'analyse dimensionnelle pour simplifier l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

Outre les échelles de longueur et de hauteur (L_* et H_*) introduites précédemment, on définit également une échelle de vitesse $U_* = \sqrt{gH_* \cos \theta}$ (de telle sorte que $\text{Fr} = O(1)$) dans la direction de l'écoulement, $V_* = \epsilon U_*$ l'échelle de vitesse dans la direction normale au lit (y), une échelle de temps $T = U_*/L_*$, une échelle de pression $P_* = \varrho g H_* \cos \theta$ (écoulement à surface libre, donc l'ordre de grandeur de la pression est la pression hydrostatique), et les nombres sans dimension de Reynolds et de Froude

$$\text{Re} = \frac{\varrho U_* H_*}{\mu} \quad \text{et} \quad \text{Fr} = \frac{U_*}{\sqrt{g H_* \cos \theta}}.$$

On suppose qu'on est en régime turbulent : $\text{Re} \gg 1$. On suppose que le nombre de Froude n'est ni très grand, ni très petit : $\text{Fr} = O(1)$ (il peut être plus petit ou plus grand que 1). On peut alors adimensionnaliser toutes les variables

$$\hat{u} = \frac{u}{U_*}, \quad \hat{v} = \frac{v}{V_*}, \quad \hat{x} = \frac{x}{L_*}, \quad \hat{y} = \frac{y}{H_*}, \quad \text{et} \quad \hat{t} = \frac{t}{T_*},$$

tandis que les contraintes sont transformées de la façon suivante

$$\hat{T}_{xx} = \frac{\mu U_*}{L_*} T_{xx}, \quad \hat{T}_{xy} = \frac{\mu U_*}{H_*} T_{xy}, \quad \hat{T}_{yy} = \frac{\mu U_*}{L_*} T_{yy}, \quad \text{et} \quad \hat{p} = \frac{p}{P_*}.$$

L'équation locale de quantité de mouvement s'écrit donc

$$\epsilon \text{Re} \frac{d\hat{u}}{d\hat{t}} = \frac{\epsilon \text{Re}}{\text{Fr}^2} \left(\frac{1}{\epsilon} \tan \theta - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial \hat{T}_{xx}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{T}_{xy}}{\partial \hat{y}}, \quad (1.13)$$

$$\epsilon^3 \text{Re} \frac{d\hat{v}}{d\hat{t}} = \frac{\epsilon \text{Re}}{\text{Fr}^2} \left(-1 - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial \hat{T}_{xy}}{\partial \hat{x}} + \epsilon^2 \frac{\partial \hat{T}_{yy}}{\partial \hat{y}}. \quad (1.14)$$

On va maintenant utiliser le fait que $\epsilon \ll 1$ et que le nombre de Reynolds $\text{Re} \gg 1$ (écoulement turbulent). On note que dans les équations apparaît parfois le produit ϵRe , dont la valeur est indéfinie ; on va ici supposer que $\epsilon \text{Re} = O(1)$ (ce qui implique donc $\epsilon^2 \text{Re} \ll 1$). L'équation (1.14) se simplifie considérablement puisque la plupart des termes sont négligeables sauf la pression et le terme de gravité

$$-1 - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} = 0,$$

qui une fois remise sous forme dimensionnelle et après intégration, nous montre que la distribution de pression est hydrostatique

$$p = \rho g (h - y) \cos \theta.$$

Dans l'équation (1.13) seule la composante avec T_{xx} disparaît ; les autres termes sont *a priori* du même ordre de grandeur

$$\frac{d\hat{u}}{d\hat{t}} = \tan \theta - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{T}_{xy}}{\partial \hat{y}},$$

qui remise sous forme dimensionnelle donne

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y}.$$

Sans difficulté nous obtenons l'équation moyennée de conservation de la quantité de mouvement après avoir intégré l'équation précédente selon y entre 0 et h :

$$\rho \left(\frac{\partial h \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}^2}{\partial x} \right) = \rho g h \sin \theta - \frac{\partial h \bar{p}}{\partial x} - \tau_p, \quad (1.15)$$

où la contrainte de frottement (appelée aussi contrainte pariétale) est $\tau_p = T_{xy}(x, 0, t)$, la pression moyenne est \bar{p} .

Le système d'équations (1.11–1.15) n'est pas fermé car le nombre d'inconnues dépasse le nombre d'équations. Une approximation courante est d'introduire un paramètre, appelé parfois le paramètre de quantité de mouvement de Boussinesq, qui relie le carré de la vitesse moyenne à la moyenne du carré de la vitesse

$$\bar{u}^2 = \frac{1}{h} \int_0^h u^2(y) dy = \alpha \bar{u}^2.$$

Généralement on a $1 \leq \alpha \leq 5/4$. Une approximation courante est d'écrire $\alpha = 1$. On peut ainsi transformer le terme $\partial \overline{hu^2} / \partial x$ dans l'équation (1.15)

$$\frac{\partial \overline{hu^2}}{\partial x} = \frac{\partial \alpha h \bar{u}^2}{\partial x} \approx \frac{\partial h \bar{u}^2}{\partial x}.$$

Une autre approximation, que nous avons implicitement utilisée ci-dessus, est relative au calcul des contraintes. Puisque nous avons supposé que les variations de hauteur le long de l'axe x sont faibles (approximation d'onde longue), cela implique que, pour toute quantité m relative au mouvement de l'écoulement, nous avons : $\partial m / \partial y \gg \partial m / \partial x$. Cela implique que toute tranche d'écoulement peut être traitée comme localement uniforme. Avec une telle hypothèse, il est possible de calculer la contrainte à la paroi en considérant que son expression en fonction de \bar{u} et h est identique à celle du régime permanent ; on utilise alors les formules classiques telles que celles de Manning-Strickler ou Chézy pour calculer τ_p .

1.2.2 Forme conservative et non conservative

Le jeu d'équations du mouvement moyen composé de la conservation de la masse (1.11) et de la quantité de mouvement (1.15) est appelé la forme conservative des équations de Saint-Venant car leur obtention et leur forme finale reflètent directement le principe général de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sur un volume de contrôle ; elles peuvent d'ailleurs être obtenues de cette façon sans passer par une intégration de la forme locale des équations du mouvement.

On utilise souvent en pratique une *forme dite non conservative* de l'équation de la quantité de mouvement, qui consiste à se servir de l'équation (1.11) pour transformer les termes $\partial h \bar{u}$ en $\partial \bar{u}$. On obtient facilement en faisant ainsi

$$\rho h \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) = \rho g h \sin \theta - \rho g h \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \tau_p.$$

Formes conservative et non conservative sont strictement équivalentes sur le plan mathématique tant que les solutions \bar{u} et h sont continues. En revanche, dans le cas de solutions discontinues (formation d'un ressaut hydraulique par exemple), la forme non conservative fournit une solution fautive au niveau de la discontinuité. Pour la résolution numérique des équations, il est préférable d'employer la forme conservative lorsque des solutions discontinues sont possibles.



1.2.3 Synthèse

Écoulement unidirectionnel

Dans le cas d'un écoulement unidirectionnel sur fond fixe et sans transport solide, les équations de Saint-Venant sont composées :

- d'une équation de conservation de la masse

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0,} \quad (1.16)$$

- d'une équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_p}{\rho h}.} \quad (1.17)$$

Pour boucler ces équations, il faut connaître la loi de frottement $\tau_p(\bar{u}, h)$. Il faut aussi préciser des conditions aux limites, qui dépendent principalement du type de régime (super- ou sub-critique) :



- pour un régime *supercritique*, l'information se propage uniquement de l'amont vers l'aval (il n'y a pas de remontée d'informations). La condition à la limite doit être posée à l'amont. Dans un problème d'évolution, il est nécessaire de spécifier à la fois les conditions initiales et les conditions aux limites ;
- pour un régime *subcritique*, l'information se propage non seulement de l'amont vers l'aval, mais également de l'aval vers l'amont (il y a une remontée d'informations). La condition à la limite doit être posée à l'aval pour un simple problème de type cours de remous. Dans un problème d'évolution, il faut préciser principalement les conditions initiales. Selon le problème, les conditions aux limites peuvent être superflues ou bien non compatibles avec les conditions initiales.

Les équations de Saint-Venant permettent de résoudre un grand nombre de problèmes hydrauliques dès lors que la courbure de la surface libre n'est pas trop forte, en particulier lorsqu'il n'y a pas de ressaut hydraulique séparant un régime supercritique d'un régime subcritique ou bien lorsqu'il y a une chute d'eau au niveau d'un seuil. En pratique, les types de problème que l'on peut résoudre sont très divers, par exemple :

- propagation d'une crue dans une rivière ;
- rupture de barrage dans une rivière ;
- évolution d'une ligne d'eau en fonction du débit fourni.

C'est ce que l'on va voir dans le reste de ce cours.

Formulation conservative

Sur le plan physique, ce n'est pas la vitesse et la hauteur qui se conservent quand on écrit les principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, mais le débit et la hauteur. Il peut alors être nécessaire de formuler les équations de Saint-Venant non pas en termes de hauteur et de vitesse, mais en termes de hauteur et débit. Cette formulation est dite conservative. Dans le cas d'un écoulement unidirectionnel sur fond fixe, infiniment large, et sans transport solide, les équations de Saint-Venant sous forme conservative sont :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}^2}{\partial x} = gh \sin \theta - gh \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_p}{\rho}. \quad (1.19)$$

Formulations conservatives (1.18)–(1.19) et non conservatives (1.16)–(1.17) sont équivalentes tant que les solutions sont continues. Si des discontinuités apparaissent (ressaut hydraulique), il est impératif de travailler avec la formulation conservative (1.18)–(1.19) sous peine de trouver de mauvaises solutions.

Écoulement à travers des sections quelconques

Les équations (1.16)–(1.17) ont été écrites pour un canal infiniment large et $h\bar{u}$ représente le débit par unité de largeur. On pourrait les écrire de façon plus générale pour une section $S(x, t)$ par laquelle transite un débit $Q(x, t)$. On a alors :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q^2 S^{-1}}{\partial x} = gS \sin \theta - gS \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \chi \frac{\tau_p}{\rho}. \quad (1.21)$$

Rappelons que $h = S/B$ et $\bar{u} = Q/S$. Dans cette forme générale, la loi de frottement s'exprime comme une fonction $\tau_p(\bar{u}, R_H)$. Pour un écoulement à travers une section quelconque, la célérité des ondes est

$$c = \sqrt{\frac{gS}{B}},$$

avec B la largeur au miroir. De là, on déduit que le nombre de Froude est défini comme

$$\text{Fr} = \frac{\bar{u}}{c} = \frac{Q\sqrt{B}}{\sqrt{gS^{3/2}}}.$$

1.2.4 Écoulement sur lit mobile

En présence de transport solide, il faut compléter ces équations par l'équation d'Exner qui décrit l'érosion ou l'engravement du lit :

$$(1 - \zeta_b) \frac{\partial b}{\partial t} = D - E = -\frac{\partial q_s}{\partial x}, \quad (1.22)$$

avec $b(x,t)$ la cote du lit (par rapport à un niveau de référence), E le taux d'érosion du lit (nombre de particules par unité de surface et par unité de temps qui sont entraînées par l'écoulement), D le taux de dépôt, q_s le débit solide (résultat net entre érosion et sédimentation du lit), et ζ_b la porosité du lit. La pente locale peut varier doucement autour de θ selon qu'il y a *aggradation* (érosion du lit, $\partial_t b < 0$) ou *déposition* (engravement du lit, $\partial_t b > 0$). L'équation de conservation de la quantité de mouvement doit être modifiée en conséquence

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\tau_p}{\rho h}.$$

avec $s = b + h$ la cote de la surface libre (Gray, 2001).

1.2.5 Forme tensorielle et structure des équations

On introduit le vecteur des variables inconnues $\mathbf{U} = (h, h\bar{u})$, la fonction de flux

$$\mathbf{F} = (h\bar{u}, h\bar{u}^2 + gh^2/2), \quad (1.23)$$

son jacobien \mathbf{A} et le vecteur source \mathbf{S} :

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh - \bar{u}^2 & 2\bar{u} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ igh - \tau_p/\rho \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

On peut écrire les équations de Saint-Venant (1.18) et (1.19) sous forme tensorielle :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}. \quad (1.25)$$

La matrice \mathbf{A} a deux valeurs propres $\lambda_1 = \bar{u} - c$ and $\lambda_2 = \bar{u} + c$ avec $c = \sqrt{gh}$ (la vitesse des ondes en eaux peu profondes) associées aux *vecteurs propres à gauche* \mathbf{v}_1 and \mathbf{v}_2 qui, par définition, vérifient :

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{v}_i,$$

avec

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -c/h \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} c/h \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un tel système d'équations possédant deux valeurs propres différentes et réelles pour la matrice \mathbf{A} est appelé *hyperbolique*. Il se distingue des équations *paraboliques* (comme l'équation de diffusion) – qui ont une seule valeur propre réelle – et des équations *elliptiques* (comme l'équation de Laplace) – dont les valeurs propres sont complexe. Une caractéristique essentielle des systèmes hyperboliques est qu'ils peuvent générer des discontinuités. Leur traitement est donc un peu plus complexe sur le plan mathématique ou numérique. Ces discontinuités reflètent des comportements particuliers des écoulements (tels que les ressauts hydrauliques).

On cherche de nouvelles variables dites *variables de Riemann* $\mathbf{r} = \{r_1, r_2\}$ telles que

$$\mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{U} = \mu_1 dr_1 \text{ et } \mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{U} = \mu_2 dr_2,$$

avec μ_i facteur intégrant tels que dr_i est une différentielle exacte. On peut se référer aux annexes du cours pour un rappel de ces notions mathématiques. On trouve :

$$\mu_1 = \mu_2 = 1, r_1 = u - 2c \text{ et } r_2 = u + 2c.$$

En multipliant les équations de Saint-Venant (1.25) par \mathbf{v}_1 , on obtient

$$\mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{S},$$

soit encore

$$\mathbf{v}_1 \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right) = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{S}.$$

On peut interpréter le terme entre parenthèses comme une dérivée le long de la courbe dite *caractéristique* \mathcal{C}_1

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1.$$

Pour montrer cela, considérons la différentielle de f

$$df(x,t) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

et pour toute quantité $f(x(t),t)$ avec $x(t)$ variant le long de la courbe caractéristique \mathcal{C}_1 , on a

$$\frac{d}{dt} f(x(t),t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x},$$

puisque par hypothèse, $\dot{x} = dx/dt = \lambda_1$. On peut donc écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \frac{d}{dt} \mathbf{U} \text{ le long de } \mathcal{C}_1 \text{ d'équation } \frac{dx}{dt} = \lambda_1.$$

Le terme différentiel dans les équations de Saint-Venant peut alors s'écrire :

$$\mathbf{v}_1 \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right) = \mathbf{v}_1 \cdot \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{dr_1}{dt}.$$

On montre ainsi l'équivalence entre les deux équations scalaires et l'équation (1.25):

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{\partial r_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial r_1}{\partial x} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{S} = igh - \frac{\tau_p}{\rho},$$

et

$$\frac{dr_2}{dt} = \frac{\partial r_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial r_2}{\partial x} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{S} = igh - \frac{\tau_p}{\rho}$$

ou sous la forme plus compacte d'équations aux dérivées partielles impliquant les variables u et $c = \sqrt{gh}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u \pm 2c) + (u \pm c) \frac{\partial}{\partial x}(u \pm 2c) = igh - \frac{\tau_p}{\rho}.$$

Ces deux équations aux dérivées partielles qui sont couplées sont équivalentes à un système d'équations différentielles ordinaires découplées qu'on appelle *équations caractéristiques*

$$\boxed{\frac{d}{dt}(u \pm 2c) = igh - \frac{\tau_p}{\rho} \text{ le long de } \frac{dx}{dt} = u \pm c.} \quad (1.26)$$

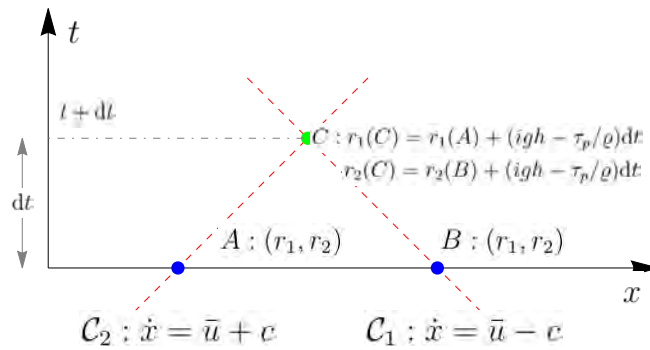


Figure 1.7 : schéma de principe. Ce qui se passe au point C au temps $t + dt$ peut se déduire de ce qui se passe au temps t en cherchant les caractéristiques \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 qui aboutissent au point C. Ces caractéristiques relient C aux points A et B situés au temps t . Chaque caractéristique propage une information r_i qui est modifiée le long de \mathcal{C}_i . En résolvant le système d'équations, on peut déterminer les variables r_i au point C.

L'équation (1.26) s'interprète physiquement comme la propagation (avec atténuation) de l'information le long du chemin \mathcal{C}_i . Comme l'illustre la figure 1.7, cette interprétation peut être exploitée pour créer des schémas numériques de résolution des équations de Saint-Venant. On appelle *méthode des caractéristiques* de tels schémas de résolution. De nos jours, on préfère toutefois des méthodes de résolution numérique

plus performantes fondées sur la *méthode des volumes finies* (LeVeque, 1992; Toro, 2001; LeVeque, 2002; Wu, 2007; Guinot, 2010; Ketcheson *et al.*, 2020).

On peut mettre la vitesse de propagation de l'information sous la forme

$$\lambda_i = \bar{u} \pm c = c \left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} \pm 1 \right) = c (\text{Fr} \pm 1) = ,$$

avec pour conséquence que lorsque le régime est supercritique ($\text{Fr} > 1$) alors $\lambda_1 = \bar{u} - c$ et $\lambda_2 = \bar{u} + c$ sont positives. L'information se propage dans la même direction à deux vitesses différentes. Inversement, lorsque le régime est subcritique ($\text{Fr} < 1$), alors $\lambda_1 < 0$ mais $\lambda_2 > 0$. L'information se propage dans deux directions différentes. Cela explique pourquoi lorsque l'on veut résoudre l'équation de la courbe de remous (1.39), il faut placer différemment les conditions aux limites (voir figure 1.8):

- le régime est supercritique, il faut fixer la condition à la limite à l'amont;
- le régime est subcritique, il faut fixer la condition à la limite à l'aval.

Pour des régimes non stationnaires, le principe de placement des conditions aux limites est similaire: il faut tenir compte du sens de propagation pour savoir où fixer la condition aux limites.

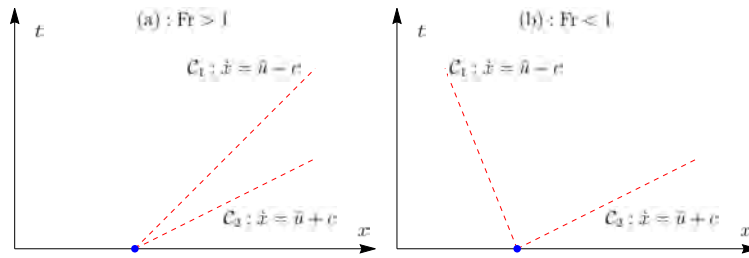


Figure 1.8 : courbes caractéristiques en régime supercritique (a) et subcritique (b). Dans le régime supercritique, l'information se propage à des vitesses différentes, mais dans la même direction alors qu'en régime subcritique, elle se propage dans des directions différentes.

1.2.6 Ressaut hydraulique mobile

On vient de voir que les équations de Saint-Venant se mettent sous la forme tensorielle suivante

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{S}, \quad (1.27)$$

ou bien sous la forme équivalente dite *conservative*

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}, \quad (1.28)$$

avec $\mathbf{U} = (h, \bar{u}h)$ le vecteur inconnu, le flux \mathbf{F} défini par l'équation (1.23) et la matrice jacobienne \mathbf{A} définie par l'équation (1.24). On rappelle la relation qui les lie : $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{F}(\mathbf{u})$.

Comme l'information se propage à des vitesses différentes, il se peut que des caractéristiques de la même famille se croisent, ce qui voudrait dire qu'aux points d'intersection, on aurait une information incohérente. En fait, quand les caractéristiques se croisent, cela veut dire que la solution est localement discontinue.

Physiquement, ces discontinuités reflètent des *ondes de choc*, qui en hydraulique, sont appelées *ressauts hydrauliques mobiles*. Le mascaret (qu'on verra au § 4.7) en est un exemple.

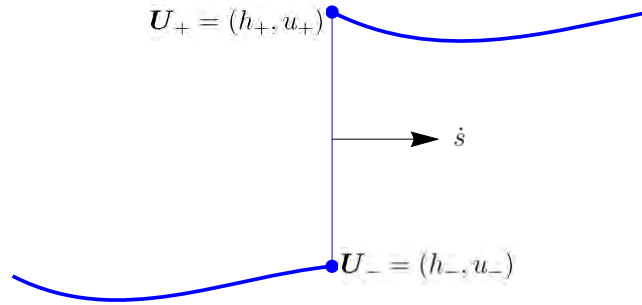


Figure 1.9 : schéma de principe d'un choc.

On peut montrer que la vitesse de la discontinuité n'est pas quelconque, mais elle est imposée par la structure des équations: une discontinuité située en $x = s(t)$ se propage à la vitesse \dot{s} donnée par la *condition de Rankine-Hugoniot*

$$\dot{s}[[\mathbf{U}]] = [[\mathbf{F}(\mathbf{U})]], \quad (1.29)$$

où les doubles crochets représentent la variation brutale de \mathbf{u} au passage du choc (voir figure 1.9):

$$[[U]] = U^+ - U^- = \lim_{x \rightarrow s, x > s} U - \lim_{x \rightarrow s, x < s} U,$$

les signes + et - sont employés pour désigner ce qui se passe à droite et à gauche respectivement de la discontinuité $x = s(t)$. Notons que le terme source \mathcal{S} des équations de Saint-Venant – défini par l'équation (1.24) – n'a pas d'influence sur la valeur de la vitesse du choc \dot{s} .

Pour les équations de Saint-Venant sous forme conservative (1.18)–(1.19), les conditions de Rankine-Hugoniot s'écrivent :

$$\dot{s}[[h]] = [[hu]], \quad (1.30)$$

$$\dot{s}[[hu]] = [[hu^2 + gh^2/2]], \quad (1.31)$$

avec \dot{s} la vitesse de propagation du choc. Si l'on écrit ces relations dans un repère lié à l'onde de choc, alors on a $v = u - \dot{s}$. On peut éliminer la vitesse du choc pour obtenir un système d'équations qui fournit la valeur de (h_2, v_2) lorsqu'on connaît (h_1, v_1)

$$h_1 v_1 = h_2 v_2, \quad (1.32)$$

$$h_1 v_1^2 + g h_1^2 / 2 = h_2 v_2^2 + g h_2^2 / 2. \quad (1.33)$$

On a ainsi :

$$\dot{s} = \frac{h_2 v_2 - h_1 v_1}{h_2 - h_1}, \quad (1.34)$$

$$\frac{(h_2 u_2 - h_1 u_1)^2}{h_2 - h_1} = h_2 u_2^2 + \frac{g h_2^2}{2} - h_1 u_1^2 - \frac{g h_1^2}{2}, \quad (1.35)$$

ce qui donne la vitesse de propagation du ressaut et $u_2(h_2 | h_1, v_1)$:

$$u_2 = u_1 \mp (h_2 - h_1) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2}}, \quad (1.36)$$

$$\dot{s} = u_1 \mp \sqrt{\frac{g}{2} (h_1 + h_2) \frac{h_2}{h_1}}. \quad (1.37)$$

1.2.7 Application : courbe de remous

La première application des équations de Saint-Venant concerne la courbe de remous. On montre ici qu'on retrouve l'équation de la courbe de remous (1.1) obtenue par application du théorème de Bernoulli.

Examinons ce qui passe pour un canal infiniment large. Puisque le régime est permanent ($\partial_t h = 0$), la conservation de la masse (1.16) implique que le débit (par unité de largeur) est également constant :

$$\frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} = 0 \Rightarrow q = h \bar{u} = cste.$$

Le long du bief, $h(x)$ et $\bar{u}(x)$ peuvent donc varier, mais ils sont toujours liés par la condition $h \bar{u} = cste$. La conservation de la quantité de mouvement (1.17) fournit

$$\bar{u} \frac{d\bar{u}}{dx} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{dh}{dx} - \frac{\tau_p}{\rho h},$$

où l'on a remplacé les dérivées partielles par des dérivées selon x car il n'y a plus qu'une seule variable. En se servant de la relation $h \bar{u} = q$, on a

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = q \frac{d}{dx} \frac{1}{h} = -\frac{q}{h^2} \frac{dh}{dx}.$$

En substituant dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on tire

$$-\frac{q^2}{h^3} \frac{dh}{dx} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{dh}{dx} - \frac{\tau_p}{\rho h},$$

et après arrangement des termes

$$\frac{dh}{dx} \left(g \cos \theta - \frac{q^2}{h^3} \right) = g \sin \theta - \frac{\tau_p}{\rho h},$$

ce qui donne finalement l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{g \sin \theta - \frac{\tau_p}{\rho h}}{g \cos \theta - \frac{q^2}{h^3}}, \quad (1.38)$$

que l'on peut mettre aussi la forme condensée

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\tan \theta - \frac{\tau_p}{\rho g h \cos \theta}}{1 - \text{Fr}^2}, \quad (1.39)$$

où le nombre de Froude est une fonction de $h(x)$:

$$\text{Fr} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh \cos \theta}} = \frac{q}{\sqrt{gh^3 \cos \theta}}.$$

On retrouve l'équation de la courbe de remous (1.1) obtenue par application du théorème de Bernoulli.

1.3 Limites d'utilisation des équations de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant ne sont localement plus valables ou peuvent être peu adaptées dans un certain nombre de situations :

- singularité : les ouvrages (seuils, vannes, ponts, dalots, ponceaux) placés au fil de l'eau créent des pertes de charge singulières et modifient les conditions hydrauliques. Dès que l'écoulement est en charge ou rapidement varié, les équations de Saint-Venant ne sont plus utilisables ;
- embranchement : les embranchements (confluence de rivières, bifurcation de canaux, etc.) entraînent des dissipations d'énergie supplémentaires, des courbes importantes des lignes de courant, de la vorticité et des courants secondaires ;

- courant secondaire: la topographie locale crée souvent des zones tourbillonnaires de grande échelle (courants secondaires) qui ne peuvent pas être décrits avec des équations moyennées sur la hauteur. Des modèles plus fins comme les modèles numériques de type *large eddy simulation* (LES) sont alors nécessaires (Keylock *et al.*, 2012);
- morphodynamique: un cours d'eau transporte du sédiment et/ou des débris (végétaux, glace). Il est en interaction avec le milieu environnant, et ces interactions sont plus ou moins faciles à prendre en compte selon leur complexité, l'échelle de temps considérée, et l'étendue spatiale;
- forte courbure de la surface libre: le régime peut être graduellement varié, mais présentait une courbe de la surface libre. La distribution de pression s'éloigne de la pression hydrostatique. Des corrections comme celle apportées par Dressler pour tenir compte des effets centrifuges permettent d'améliorer le pouvoir prédictif des équations de Saint-Venant (Dressler, 1978; Sivakumaran *et al.*, 1983; Dressler & Yevjevich, 1984; Castro-Orgaz & Hager, 2017). Il faut parfois utiliser des équations plus sophistiquées comme les *équations de Boussinesq* (Castro-Orgaz & Hager, 2017). Certaines vagues avec des longueurs d'onde courtes (par rapport à la profondeur) ou bien des écoulements sur des radiers curvilignes sont des exemples d'application des équations de Boussinesq.

1.3.1 Singularité hydraulique

Seuils

Les ouvrages de type seuil et déversoir sont des obstacles posés perpendiculairement à l'axe de la rivière (seuil) ou parallèlement (déversoir latéral) comme le montre la figure 1.10. Ce sont des singularités du point de vue hydraulique, avec le plus souvent un changement de régime (sub/super-critique) au passage de l'ouvrage. Le régime est localement rapidement varié et ne peut donc pas être décrit à l'aide des équations de Saint-Venant.

Le plus souvent, on traite ces singularités comme des conditions aux limites internes, c'est-à-dire il faut résoudre les équations de Saint-Venant de part et d'autre de la singularité. Un seuil impose en général une condition de débit au droit du seuil de la forme :

$$q = C_D \sqrt{2g} (H_{am} - p)^{3/2}, \quad (1.40)$$

avec C_D le coefficient de débit (qui dépend d'une série de nombres adimensionnels et de la géométrie de l'ouvrage), H_{am} est la charge hydraulique à l'amont immédiat de l'ouvrage, et p est la pelle (hauteur du seuil par rapport à la cote du lit). Très souvent, on néglige la vitesse à l'approche du seuil, et on a donc la charge hydraulique qui coïncide avec la hauteur amont: $H_{am} \approx h_{am}$. On notera que cette équation a la même structure



Figure 1.10 : différents types de seuil et déversoir. (a) Déversoir du lac de Louvie au-dessus de Fionnay (VS); (b) seuil de confortement du lit du torrent de Saint-Barthélemy au-dessus de Mex (VS); seuil noyé sur le Tibre à Rome (Italie); (d) déversoir latéral sur l'Aar à Berne.

que l'équation (1.6), mais la constante de proportionnalité diffère; il faut être vigilant quand on choisit la valeur du coefficient C_D à la forme exacte retenue pour q .

Cette équation correspond au régime *dénoyé*, c'est-à-dire au mode de fonctionnement normal où les conditions hydrauliques à l'aval du seuil n'influent pas sur le comportement à l'amont. Si la pelle p est petite par rapport à la hauteur d'eau de part et d'autre, le seuil est alors noyé; les conditions hydrauliques sont perturbées localement, et dépendent à la fois de ce qui se passe à l'amont et à l'aval. Le seuil est dénoyé lorsque

la pelle vérifie la condition

$$\frac{h_{av} - p}{h_{am} - p} < \frac{2}{3}, \quad (1.41)$$

avec h_{am} et h_{av} les hauteurs à l'amont et à l'aval du seuil. Si le seuil est noyé, alors débit au passage du seuil est décrit à l'aide d'une équation de la forme

$$q = C_D \frac{3\sqrt{3}}{2} \sqrt{2g(h_{av} - p)} \sqrt{h_{am} - h_{av}} \approx 2,6C_D \sqrt{2g(h_{av} - p)} \sqrt{h_{am} - h_{av}}. \quad (1.42)$$

Cette équation n'est valable que lorsque le terme de vitesse $u^2/(2g)$ est négligeable par rapport à la hauteur d'écoulement (Rajaratnam & Muralidhar, 1969).

Vannes

Les barrages au fil de l'eau sont souvent équipés de vannes qui permettent de réguler le débit d'eau ou imposer une hauteur d'eau (voir figure 1.11). Par application du théorème de Bernoulli, on trouve que lorsque la vanne est dénoyée, le débit par unité de largeur de vanne est de la forme (Hager & Schleiss, 2009)

$$q = C_D a \sqrt{2gh_1}, \quad (1.43)$$

avec h_1 la hauteur d'eau à l'amont de la vanne, a l'ouverture de la vanne, et C_D le coefficient de débit.



Figure 1.11 : différents types de vanne. (a) vanne secteur sur la Dranse à Fionnay (VS); (b) vanne plane sur l'Alphée à Olympie (Grèce).

Ponts, dalots, ponceau, buse

Les routes enjambant les cours d'eau nécessitent la construction de pont ou la canalisation de l'eau dans des buses, dalots, ou ponceau (voir figure 1.12). Ces ouvrages présentent plusieurs problèmes dans la modélisation hydraulique (Hager & Schleiss, 2009; Hager, 2010):

- il se comporte comme des vannes à ouverture fixe ;
- en cas de débordement, l'eau peut suivre le tablier du pont et inonder des zones selon un axe perpendiculaire à la rivière ;
- si la zone couverte est longue, l'écoulement peut se mettre localement en charge ;
- le rétrécissement entraîne des pertes de charge importantes (convergence des lignes de courant, ressaut hydraulique), et il y a souvent une modification de la topographie du lit à l'amont et à l'aval (zones d'atterrissement à l'amont, d'afouillement à l'aval) de la singularité.

Embranchement

Les embranchements couvrent toute une gamme de géométries d'écoulement où deux masses d'eau (ou plus) se rencontrent ou se séparent : confluence de deux rivières, débouché dans une étendue d'eau, bifurcation, et prise d'eau. Comme le montre la figure 1.13 de la confluence de l'Arve et du Rhône à Genève, le mélange des eaux des deux rivières se fait progressivement. Il entraîne en général une dissipation d'énergie due à la contraction de l'écoulement et un dépôt de sédiment (Hager & Schleiss, 2009).

1.3.2 Courants secondaires

Comme les équations de Saint-Venant sont moyennées sur la hauteur, elles ne peuvent pas représenter des écoulements secondaires qui prennent naissance lorsqu'il y a une variation de la topographie du lit ou si le lit est sinueux (voir figure 1.14). Si on estime que ces courants sont importants pour la compréhension de la dynamique des écoulements pour un site donné, il faut employer des jeux d'équations plus raffinées comme les modèles de type Large Eddy Simulation (LES) (Keylock *et al.*, 2012).



Figure 1.12 : différents types de passages couverts. (a) pont sur la Garonne à Toulouse (France). On notera les ouvertures aménagées au-dessus des piles du pont pour laisser transiter l'eau lors des crues; (b) passerelle sur l'Aar à Berne; (c) dalot sous l'autoroute A43 en Maurienne (France); (d) ressaut au passage entre deux piles du pont de Cordoue enjambant le Guadalquivir (Espagne).

1.3.3 Interactions morphodynamiques

L'interaction d'un cours d'eau avec le milieu environnant donne naissance à des différents processus agissant sur des échelles de temps diverses :

- sur le court terme :
 - transport de sédiment, de flottant, et de glace. La figure 1.15 montre quelques exemples de transport à grande échelle spatiale. Les cours d'eau trans-



Figure 1.13 : jonction de l'Arve et du Rhône à Genève. L'eau de l'Arve est riche en sédiment glaciaire, qui confère à l'eau sa couleur blanchâtre, alors que l'eau du Rhône a déposé une partie de la charge sédimentaire dans le Léman. La température de l'eau est également différente. Source: [wikimedia](#).

portent du sédiment, mais aussi de la glace [figure 1.15(b)]. Dans certains estuaires comme celui de la Leyre en Gironde (France), les structures morphologiques résultent d'une triple action : rivière, courant océanique et vagues, et vent [figure 1.15(d)] ;

- érosion et déposition potentiellement intenses durant des crues. Comme le montre la figure 1.16, les crues peuvent fortement affouiller le terrain naturel et déposer de grandes quantités de sédiment durant la crue. De telles modifications sont impossibles à calculer sur la seule base des équations de Saint-Venant ;
- transfert d'eau avec le sous-sol ou les zones humides environnantes. Les rivières naturelles franchissent des écosystèmes comme l'illustre la figure 1.17. La limite entre terre ferme et cours d'eau est floue et fluctuante. En cherchant à gagner des terrains agricoles et à lutter contre les crues, l'homme a drainé ces écosystèmes et il a forcé la chenalisation des principaux cours d'eau, ce qui a modifié la réponse de ceux-ci. On voit notamment des bancs alternés sur les cours canalisés comme celui du Pô à la figure 1.17(d)
- sur le moyen terme : formation et déplacement de structures morphologiques. Les structures morphologiques sont extrêmement variables selon le diamètre des

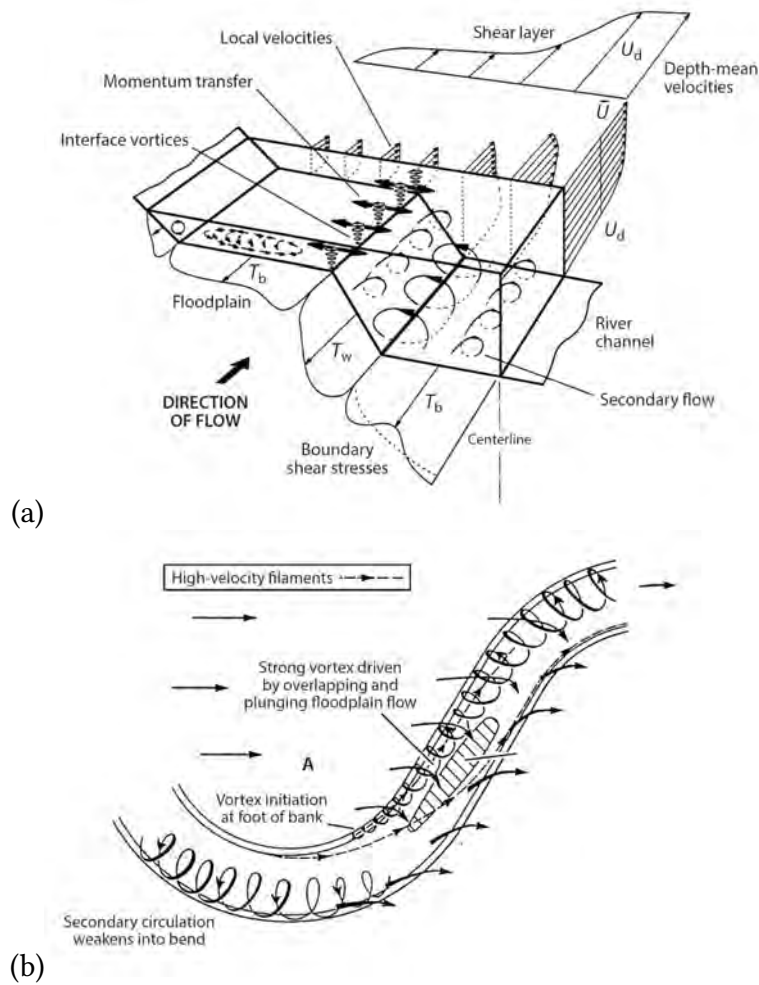


Figure 1.14 : (a). Les canaux droits composés sont le siège de recirculations (courants secondaires) qui modifient les caractéristiques de de l'écoulement principal. U est la vitesse et T est la contrainte de cisaillement sur le lit. Les indices d , b , et w renvoient, respectivement, à la profondeur moyenne, au lit et la paroi. (b) Dans les méandres d'une rivière, la courbure des lignes de courant crée des courants secondaires dans la direction transversale. Source : (Bates, 2022).

sédiments du lit et la pente moyenne. La figure 1.18 montre quelques exemples de structures du lit ;

- sur le long terme : modification des sections et profils d'écoulement.



Figure 1.15 : différents types de morphologies de lit à grande échelle. (a) Région du Zélande aux Pays-Bas, près de Terneuzen (frontière entre la Belgique et les Pays-Bas). Les couleurs claires représentent des zones peu profondes de l'estuaire de l'Escaut avec plusieurs bancs de sable visibles. Les couleurs plus foncées indiquent une charge sédimentaire plus élevée et des eaux plus profondes (mission Sentinel 2, 2020); (b) glacier Pie XI au Chili alimentant les eaux du lac Greve en Patagonie (mission Landsat 8, 2016); (c) baie du mont Saint-Michel éperon granitique situé à quelques centaines de mètres des côtes dans l'estuaire de la Rance en Normandie. Le marnage y est important – de l'ordre de 15 m – et met à découvert de vastes étendues (mission Sentinel 2, 2017); (d) baie d'Arcachon (France) avec la dune du Pilat – 2,7 km de long, 500 m de large et 110 m de hauteur – (satellite japonais ALOS, 2009). Source : [European Spatial Agency](#).



Figure 1.16 : modification substantielle du lit. (a) et (b) deux vues d'un du Rote Bach (BE) le 28 juillet 2003 et 4 août 2004, après le passage d'une crue qui a emporté une partie des berges. Source: Eva Gertsch ([Gertsch, 2009](#)); (c) village de Schlans dans les Grisons après une crue torrentielle en 2002 (source: [Planat](#)); (d) village de Saint-Martin-de-Vésubie (Alpes-Martimes, France) ravagé par la crue de la Vésubie le 2 octobre 2020 (source: [La Nouvelle République](#)).

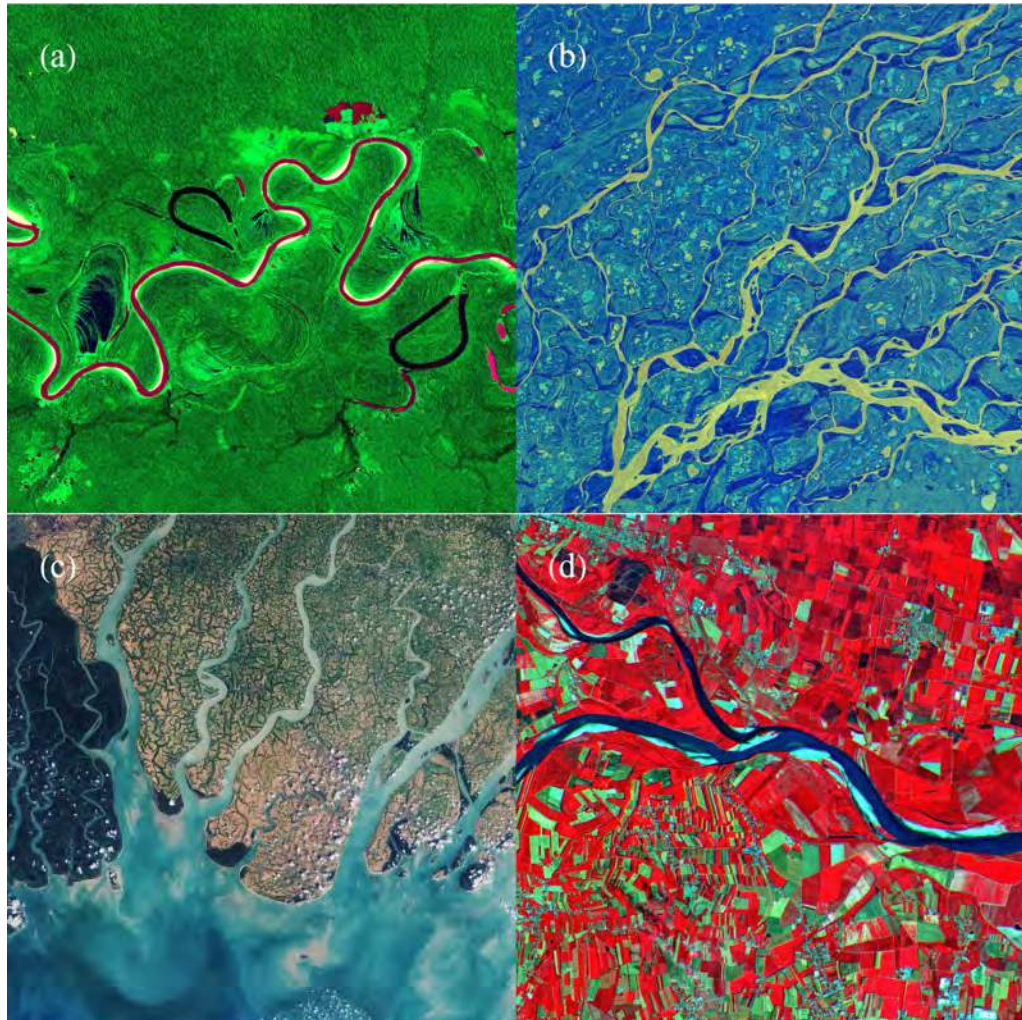


Figure 1.17 : différents types de morphologies de lit à grande échelle. (a) Lit en méandres de l'Amazone (Brésil) en 2019 (mission Copernicus Sentinel 2); (b) delta de rivière Lena (Russie) en 2019 (mission Copernicus Sentinel 1); (c) Sundarbans au Bangladesh dans la région du système Ganges-Brahmaputra. Les zones foncées à gauche sont fortement urbanisées tandis que sur la droite de l'image, on a une zone de mangrove irriguée par le delta du Gange (mission Sentinel 2A, 2016); (d) confluence de la rivière Tessin et du Pô à Pavie (mission Sentinel 2A, 2015). Les bancs de gravier sont bien visibles, ils sont alternés, et placés dans l'intrados des méandres. Source : [European Spatial Agency](https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2015/06/Sentinel_2A_01).



Figure 1.18 : différents types de morphologies de lit. (a) Lit de gros blocs de l'Avançon aux Plans-sur-Bex (VD); (b) alternance seuil-mouille sur la Navisence à Zinal (VS); (c) lit en tresse du Tagliamento (Italie); (d) lit de sable avec des rides.

1.4 Résistance à l'écoulement

1.4.1 Mécanismes généraux de dissipation d'énergie

Il existe différentes formes de lit (voir figure 1.19):

- lit fixe : bedrock, coursier en béton ;
- lit déformable :
 - lit alluvial : l'eau s'écoule sur les alluvions qu'elle a déposées. Ces lits peuvent être *mobiles*, c'est-à-dire que la surface du lit évolue au fil du temps sous l'effet du transport de sédiment transporté par la rivière. Le transport solide crée des structures morphologiques (dunes, bancs de sable ou gravier, seuils, etc.);
 - lit végétalisé : tout ou partie du lit est couvert de végétation (algues, végétation de berge, etc.)

La résistance à l'écoulement traduit la résistance qu'exerce le fond (lit fixe ou mobile) sur l'écoulement d'eau. On considère qu'il existe principalement deux processus de résistance :

- une résistance à l'échelle des particules, dite « frottement de peau », c'est-à-dire le frottement exercé par les grains composant le lit, ce qui explique pourquoi beaucoup de formules empiriques font appel au diamètre des grains comme paramètre d'influence ;
- une résistance à plus grande échelle, dite « frottement de forme », liée aux structures morphologiques (dunes, alternance de seuils et mouilles) qui accroissent la dissipation d'énergie au sein de l'écoulement.

À cela s'ajoutent d'autres processus plus spécifiques comme les résistances causées par des variations brutales de section d'écoulement ou la sinuosité du lit ou le transport de sédiment ; l'accélération, la décélération, les courants secondaires et la vorticité accroissent la dissipation d'énergie.

Comme très souvent en pratique pour la plupart des applications, on ne cherche pas à calculer individuellement les contributions à la résistance totale du lit sur l'écoulement, mais on généralise les formules de résistance de peau ou ajuste ses paramètres pour tenir compte des autres processus.

Une difficulté supplémentaire dans l'estimation de la résistance à l'écoulement est que le lit peut être hétérogène (voir figure 1.20) :

- lit composé : le lit peut être comporter des parties avec des comportements différents. Par exemple, un canal peut être en terre battue, avec des parois végétalisées ;

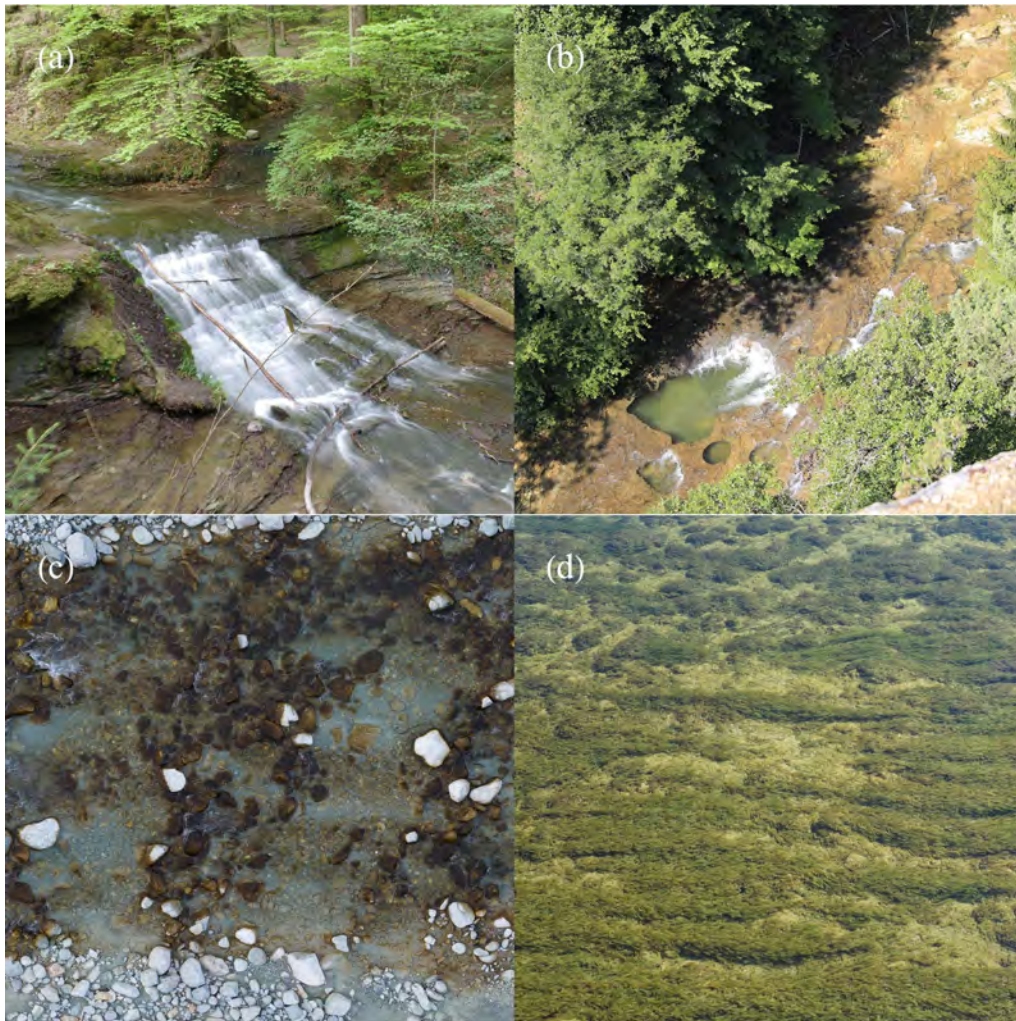


Figure 1.19 : (a) le Talent coulant sur son lit rocheux (bedrock) à Montheron (VD); (b) l'Orbe coulant sur son lit rocheux au-dessus de Vallorbe (VD); (c) la Navisence coulant sur un lit alluvial en partie colonisé par des algues (*Hydrurus foetidus*) à Zinal (VS); (d) le Doubs coulant sur un lit végétalisé à Saint-Ursanne (JU).

- lit mineur/lit majeur : la plupart du temps, l'eau s'écoule dans le lit mineur, mais si le débit augmente suffisamment, elle va déborder et occuper le lit majeur. La rugosité du lit majeur est généralement tout autre. Elle peut être composée de végétation haute ou de zone urbanisée.

Il existe des procédures spécifiques pour estimer la rugosité équivalente de sections de lit composé (Yen, 2002).

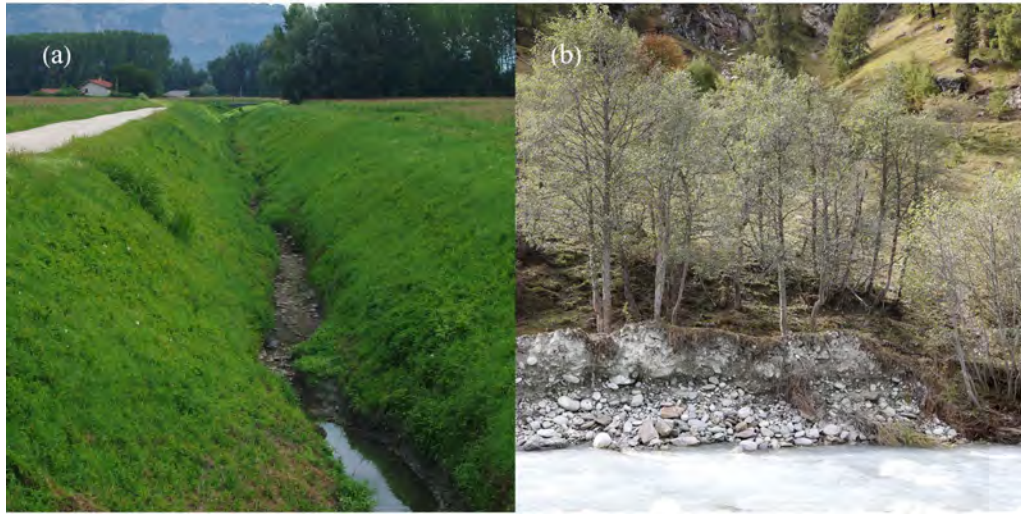


Figure 1.20 : (a) canal d'irrigation dans un champ, dont les berges sont végétalisées; (b) lit de la Navisence avec berges taillées dans les dépôts quaternaires et couvertes de végétation.

1.4.2 Loi de Darcy-Weisbach

La loi d'emploi le plus courant en hydraulique (en charge ou à surface libre) est la loi de Darcy-Weisbach :

$$\tau_p = \frac{f}{8} \rho \bar{u}^2, \quad (1.44)$$

avec f le coefficient de Darcy-Weisbach, qui est supposé *a priori* être une fonction de nombres sans dimension tels que les nombres de Reynolds Re , Froude Fr , et de submersion relative ξ (entre autres nombres) :

$$f = f(Re, Fr, \xi, \dots)$$

avec $\xi = k_s/R_h$ où k_s est une échelle de rugosité. On prend souvent $k_s = d_{90}$ (90 % des blocs ont un diamètre plus petit que d_{90}) ou $k_s = d_{84}$.

1.4.3 Loi de Chézy

Historiquement, la première loi a été celle de Chézy :

$$\tau_p = \frac{\rho g}{C^2} \bar{u}^2, \quad (1.45)$$

avec C le coefficient de Chézy [$m^{1/2}s^{-1}$]. Cette loi est peu employée en ingénierie de nos jours.

1.4.4 Loi de Manning-Strickler

La loi la plus employée en ingénierie hydraulique – car valable pour une large gamme de débits et de rugosité – est la loi de Manning-Strickler; la contrainte pariétale s'écrit

$$\tau_p = \frac{\rho g}{K^2} \frac{\bar{u}^2}{R_H^{1/3}}, \quad (1.46)$$

avec K le coefficient de Strickler.

On a la relation d'équivalence entre coefficients de Darcy-Weisbach, Chézy, et Strickler:

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = \frac{\sqrt{g}}{KR_h^{1/3}} = \frac{\sqrt{g}}{C}.$$

Les Anglo-Saxons emploient le coefficient de Manning $n = 1/K$. Pour les applications en ingénierie, il est fréquent d'employer des valeurs de K tabulées en fonction du type de cours d'eau:

- canal en béton lisse: $K = 65 - 80 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$;
- canal en terre: $K = 40 - 60 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$;
- rivière à galet, rectiligne, section uniforme: $K = 30 - 40 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$;
- rivière avec méandre, sinuosité, etc.: $K = 20 - 30 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$;
- rivière végétalisée ou torrent: $K = 10 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$.

Une approche moins grossière consiste à relier à la rugosité du lit, par exemple la loi historique de [Strickler \(1924\)](#)

$$K = \frac{21,1}{d_{50}^{1/6}}. \quad (1.47)$$

[Meyer-Peter & Müller \(1948\)](#) ont suggéré de prendre le diamètre d_{90} pour les rivières à lit de gravier:

$$K = \frac{26}{d_{90}^{1/6}},$$

ou bien sa variante actuelle ([Smart & Jaeggi, 1983](#); [Jäggi, 1984](#)):

$$K = \frac{26}{k_s^{1/6}} = \frac{23,2}{d_{90}^{1/6}},$$

où d_{90} est diamètre des gros blocs; ce diamètre caractéristique sert aussi à définir une échelle caractéristique $k_s = 2d_{90}$, qui est utilisée notamment dans la formule de Keulegan (voir *infra*). Pour les torrents, il est assez fréquent de considérer que le coefficient K est une fonction de la pente θ et la submersion relative h/d_{90} . Il existe plusieurs

approches pour quantifier de façon plus précise la dépendance de K vis-à-vis de θ et h/d_{90} :

- l’approche empirique consiste à corrélérer – à partir d’expériences sur des canaux en laboratoire ou des données de terrain – le coefficient K et les paramètres caractérisant le lit. Les équations obtenues par [Rickenmann \(1990\)](#) en sont un exemple;
- une approche théorique dite de répartition des contraintes permet de rendre compte des effets liés à la distribution granulométrique dans le calcul de la résistance ([Ackers & White, 1973](#); [Wiberg & Smith, 1991](#); [Yager et al., 2007](#)). L’idée est qu’un lit torrentiel peut être scindé en une partition de grains immobiles (blocs de taille supérieure au d_{90}) et de grains mobiles;
- de façon plus anecdotique, des chercheurs ont proposé des idées fondées sur la théorie de la couche limite, s’inspirant de la pratique en turbulence atmosphérique avec la prise en compte de la canopée ([Katul et al., 2002](#)).

↪ On se reportera à la publication « [Rauheiten in ausgesuchten schweizerischen Fließgewässern](#) » (en allemand) du Bundesamt für Wasser und Geologie (maintenant rattaché à l’Office fédéral de l’énergie) pour une analyse de 12 cours d’eau en Suisse pour différents débits. Cet ouvrage fournit une estimation du paramètre de Manning-Strickler K en fonction des conditions hydrologiques, morphologiques, granulométriques, et hydrauliques.

On pourra aussi se référer au site [de l’USGS](#) pour un catalogue de valeurs de $n = 1/K$ pour différentes rivières (américaines); le tableau fournit à la fois des photographies de biefs et les caractéristiques des sections mouillées.

1.4.5 Loi de Keulegan

Pendant longtemps, on a utilisé le profil de vitesse logarithmique (en principe variable uniquement près du fond) pour décrire tout le profil de vitesse d’un écoulement hydrauliquement turbulent dans un canal (voir chap. 6 du [cours de bachelor](#) « introduction à la mécanique des fluides »). Un des tout premiers modèles empiriques de turbulence est dit « modèle de longueur de mélange » ou loi de Prandtl; ce modèle implique que la contrainte de cisaillement près d’une paroi peut être approchée par la relation empirique

$$\tau(y) = \mu_t \frac{d\langle u \rangle}{dy} = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{d\langle u \rangle}{dy} \right)^2, \quad (1.48)$$

où la viscosité turbulente est définie en fonction du gradient de vitesse moyenne $\langle u \rangle$, de la longueur de mélange $\ell_m = \kappa y$, et de la constante de von Kármán $\kappa \approx 0,41$

$$\mu_t = \rho \ell_m^2 \frac{d\langle u \rangle}{dy}.$$

Près de la paroi, la contrainte de cisaillement est constante et vaut τ_p . On définit une *vitesse de frottement* (appelée encore *vitesse de cisaillement*):

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}.$$

En régime permanent uniforme ($\tau_p = \rho g R_h \sin \theta$), on a: $u_* = \sqrt{g R_h \sin \theta} \approx \sqrt{g R_h i}$. Si on suppose que $\tau(y) = \tau_p = \rho u_*^2$ dans la loi de Prandtl (1.48), alors on peut intégrer facilement l'équation

$$\tau(y) = \rho u_*^2 \Rightarrow \kappa y \frac{d\langle u \rangle}{dy} = u_*,$$

ce qui donne

$$u(y) = \kappa^{-1} u_* \ln y + c_1,$$

avec c_1 une constante d'intégration. On suppose que y_0 correspond à la cote à laquelle la condition de non-glissement ($u(y_0) = 0$) est satisfaite. On obtient donc le profil de vitesse logarithmique (Keulegan, 1938):

$$\frac{u(y)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0}. \quad (1.49)$$

On a typiquement $y_0 = k_s/a$ avec $a \approx 30$ pour des rivières de gravier (Keulegan, 1938). Si on intègre entre y_0 et $y_0 + h$ et en supposant $y_0 \ll h$, on obtient la vitesse moyenne

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{ch}{k_s} - 1 \right) = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{ah}{ek_s}, \quad (1.50)$$

avec $e = 2,718$. Keulegan (1938) a également exprimé sa loi de la façon suivante (en base logarithmique 10)

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 6,25 + 5,75 \log \frac{h}{k_s}. \quad (1.51)$$

Fondée sur cette approximation, la loi de Keulegan est une formule bien adaptée pour les écoulements sur des lits à gravier. Elle revient à supposer que la contrainte à la paroi serait similaire à celle donnée par la formule de Chézy, mais avec un coefficient $C = \sqrt{g} \kappa^{-1} \ln(ch/k_s)$ – avec $c = a/e \approx 11$, mais certains auteurs recommandent $c=12,2$ (Ferguson, 2021) – fonction de la hauteur d'eau et de la rugosité, soit encore :

$$\tau_p = \frac{\kappa^2}{\ln^2 \left(\frac{ch}{k_s} \right)} \rho \bar{u}^2, \quad (1.52)$$

avec κ la constante de von Kármán et k_s une taille caractéristique des plus grosses rugosités du lit $k_s \approx 2d_{90}$. La formule est valable tant que le fond est suffisamment rugueux, c'est-à-dire $h/k_s < 10$. Cette formule peut se généraliser à des géométries plus complexes en substituant la hauteur h par le rayon hydraulique R_H .

Notons que de nos jours, on préfère employer une loi puissance de type Manning-Strickler plutôt qu'une loi logarithmique pour relier le coefficient de Chézy aux paramètres hydrauliques. Par exemple, pour des lits à gravier (fond mobile), la formule de Parker donne

$$C = 8,10\sqrt{g} \left(\frac{h}{k_s} \right)^{1/6},$$

qui fournit des résultats bien meilleurs que la formule de Keulegan pour des lits très rugueux ($h/k_s < 5$) (Parker, 1991; Wong & Parker, 2006).

1.4.6 Loi de Ferguson

Les rivières de montagne sont le plus souvent caractérisées par de faibles hauteurs par rapport à la rugosité du lit, et dans ce cas, les équations classiques de frottement ont tendance à sous-estimer considérablement la dissipation d'énergie (voir figure 1.21). Des lois spécifiques ont été proposées comme la loi de Ferguson (Ferguson, 2007, 2021) :

$$C_f = \frac{C}{\sqrt{g}} = \sqrt{\frac{8}{f}} = \frac{a_1 a_2 \frac{R_h}{k_s}}{\left(a_1^2 + a_2^2 \left(\frac{R_h}{k_s} \right)^{5/3} \right)^{1/2}}, \quad (1.53)$$

avec $a_1 = 6,5$ et $a_2 = 2,5$ quand $k_s = d_{84}$.

1.4.7 Loi de Recking

Lorsqu'il y a du transport solide sous forme de charriage, il y a une dissipation d'énergie liée notamment aux transferts de quantité de mouvement entre l'eau (de masse volumique ϱ) et les sédiments (de masse volumique ϱ_s). Recking (2013) a proposé d'écrire la contrainte pariétale sous la forme

$$\tau^* = \frac{\tau_p}{(\varrho_s - \varrho)gd_{84}} = \frac{i}{(s-1)d_{84} \left(2/B + 74p^{2,6}(gi)^p q^{-2p} d_{84}^{3p-1} \right)} \quad (1.54)$$

avec $q = Q/B$ le débit par unité de largeur (B largeur au miroir) et $p = 0,23$ quand $q/\sqrt{gid_{84}^3} < 100$ et $p = 0,3$ sinon.

1.4.8 Loi parabolique

On a vu en cours de Bachelor les équations de Navier-Stokes (voir chap. 6) moyennées au sens de Reynolds. On introduit la décomposition de Reynolds de la vitesse

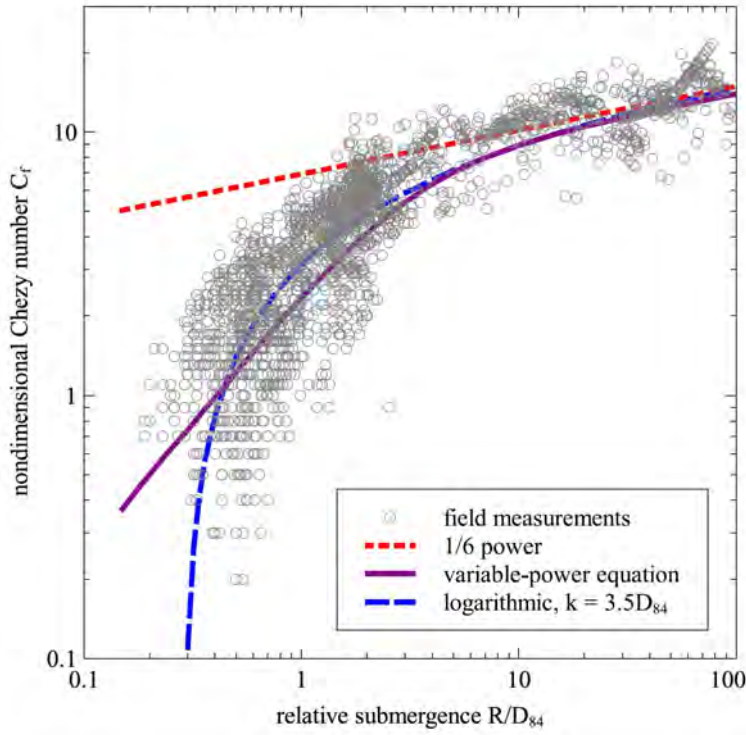


Figure 1.21 : variation du nombre adimensionnel de Chézy $C_f = C/\sqrt{g}$ en fonction de la submergence relative R_h/d_{84} . Les mesures de terrain obtenues par [Rickenmann & Recking \(2011\)](#) sont reportées ainsi que la loi de Manning-Strickler (tireté rouge) qui prédit $C_f \propto (R_h/d_{84})^{1/6}$, la loi de Ferguson dite « variable-power equation » et la loi de Keulegan qui prédit $C_f \propto \ln(R_h/d_{84})$. D'après ([Ferguson, 2021](#)).

$\langle \mathbf{u} = (u, v) \rangle$ dans les équations de Navier-Stokes (1.12)

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}', \quad (1.55)$$

avec $\langle \mathbf{u} \rangle$ la moyenne d'ensemble de la vitesse et $\langle \mathbf{u}' \rangle$ la fluctuation. Après substitution dans l'équation (1.12) et après avoir pris la moyenne d'ensemble on obtient les équations de Navier-Stokes moyennées au sens de Reynolds

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{u} \rangle + \langle \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \rangle \langle \mathbf{u} \rangle \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla \langle p \rangle + \nabla \cdot (\mathbf{T} - \rho \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle), \quad (1.56)$$

avec $\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D}$ le tenseur des contraintes (visqueuses) et $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^\dagger)$ le tenseur des taux de déformation. Dans ce cadre-là, on montre que la contrainte pariétale s'écrit

$$\tau_p = \mu \frac{\partial}{\partial y} \langle u \rangle - \rho \langle u'v' \rangle$$

et qu'elle est donc composée de deux contributions : la contrainte visqueuse $\mu \partial_y u$ et la contrainte turbulente $-\rho \langle u'v' \rangle$. En régime turbulent, la contrainte visqueuse est négligeable. Les modèles qu'on a vus ci-dessus (Manning-Strickler, Keulegan, etc.) sont des « fermetures algébriques » (c'est-à-dire sous forme d'expression analytique non différentielle) qui permettent d'exprimer la contrainte turbulente $-\rho \langle u'v' \rangle$ (qui fait appel aux composantes fluctuantes de vitesse qui sont inconnues) en fonction du champ de vitesse moyenne $\langle u \rangle$.

Il existe également une contrainte normale σ_x dans la direction x qui se réduit également à sa contribution turbulente quand le nombre de Reynolds est grand :

$$\sigma_x = 2\mu \frac{\partial}{\partial x} \langle u \rangle - \rho \langle u'^2 \rangle \approx -\rho \langle u'^2 \rangle. \quad (1.57)$$

On se sert du même type d'équation de fermeture que pour le modèle de Prandtl (1.48), mais on fait maintenant l'hypothèse (dite de Boussinesq) que la viscosité turbulente est constante

$$-\rho \langle u'^2 \rangle = \mu_t \frac{\partial}{\partial x} \langle u \rangle.$$

Quand on intègre selon la hauteur les équations de Navier-Stokes moyennées au sens de Reynolds, on va donc retomber sur les équations de Saint-Venant obtenues précédemment, avec un terme supplémentaire qui résulte de l'intégration de la contrainte normale σ_x le long de y

$$\int_0^h \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \sigma_x dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \left(\mu_t \frac{\partial}{\partial x} \langle u \rangle \right) dy \approx \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_t h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)$$

compte tenu de la condition aux limites $\sigma_x(x, h, t) = 0$ et si l'on définit

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h \langle u \rangle dy.$$

La conservation de la quantité de mouvement moyennée selon Saint-Venant s'écrit alors

$$\frac{\partial h \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} = gh \sin \theta - gh \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_p}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_t h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right), \quad (1.58)$$

avec $\nu_t = \mu_t / \rho$ la viscosité cinématique turbulente supposée être une constante.

Ce modèle d'équations est dit *parabolique* car il ajoute un terme de diffusion dont l'effet est d'adoucir les discontinuités. On avait lors de l'adimensionalisation des équations de Navier-Stokes que dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.13), le terme lié à la contrainte normale était d'ordre ϵ^2 , ce qui justifiait qu'on le néglige dans les équations de Saint-Venant. Le terme parabolique a le même ordre de grandeur ; le maintenir dans l'équation 1.58 implique qu'on passe outre ce que dit l'adimensionalisation, et se justifie principalement par le souhait d'imposer une structure parabolique aux équations du mouvement plutôt que parabolique.

1.5 Autres équations utiles en hydraulique

Nous allons maintenant voir les principaux types d'équations aux dérivées partielles rencontrées en hydraulique :

- transport par convection (ou advection);
- transport par diffusion;
- phénomènes ondulatoires;
- phénomènes d'équilibre.

1.5.1 Équation de convection (ou d'advection)



- Qu'est-ce qu'une équation aux dérivées partielles du premier ordre?
- ↪ Voir la définition au § 1.5 du complément de cours
- Savez-vous mettre une équation aux dérivées partielles sous forme caractéristique?
- ↪ Voir la méthode au § 1.4.4 du complément de cours
- Connaissez-vous la méthode des caractéristiques pour résoudre une équation aux dérivées partielles?
- ↪ Voir la méthode au § 1.7.2 du complément de cours
- Qu'est-ce qu'une équation différentielle hyperbolique?
- ↪ Relire l'annexe 1, avec plus particulièrement le § 1.5.1.

La convection est un mode de transfert d'un élément ou d'une quantité où celle-ci est advectée par le fluide. Par exemple, si on libère un polluant dans un cours d'eau, celui-ci sera généralement transporté à la même vitesse que l'eau. On parle de convection ou d'*advection* (la convection est plus souvent employée en thermique pour décrire le transfert de chaleur).

L'équation la plus simple qui soit représentative de la convection est la suivante

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (1.59)$$

où $f(x, t)$ est une quantité advectée par un courant d'eau à la vitesse constante u . C'est une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre. l'équation caractéristique associée à l'équation aux dérivées partielles (1.59) est

$$\frac{df}{dt} = 0 \text{ le long de la droite } \frac{dx}{dt} = u$$

Comme u est supposée constante, cela veut dire que la solution de l'équation caractéristique est $x - ut = cste$; toute fonction $F(x - ut)$ dont l'argument est $x - ut$

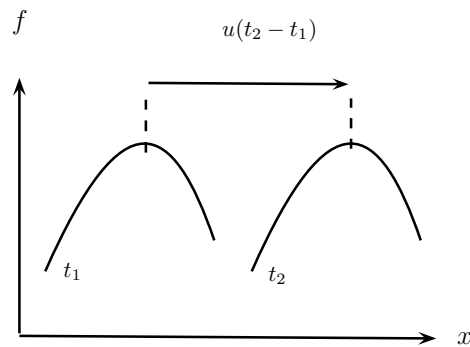


Figure 1.22 : advection d'une quantité f . Quand l'advection est linéaire et se fait sans amortissement, le transport est une simple translation sans changement de forme.

est solution de l'équation (1.59). L'une des caractéristiques de cette solution est que la forme initiale $F(x)$ (à $t = 0$) est conservée tout le long du mouvement: elle est simplement translatée de ut comme le montre la figure 1.22.

1.5.2 Équation de diffusion



- Qu'est-ce qu'un laplacien ?
- ↪ Voir la définition au § 1.3.3 du complément de cours
- Qu'est qu'une solution auto-similaire ?
- ↪ Voir la méthode au § 1.7.5 du complément de cours
- Qu'est-ce qu'une équation différentielle du second ordre ?
- ↪ Voir la définition au § 1.5 du complément de cours

La *diffusion* est un mode de transfert d'un élément sous l'effet de l'agitation thermique (mouvement brownien) ou bien de la turbulence. Dans un cours d'eau, outre le mouvement moyen, il existe des fluctuations de vitesse qui dispersent rapidement un élément ou un fluide dans le volume.

Un des exemples classiques de diffusion est l'équation de diffusion d'un polluant dans un aquifère ou bien l'équation de diffusion de la chaleur. La température $T(x, y; t)$ varie au cours du temps dans un matériau (en dimension 2) selon l'équation

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (1.60)$$

avec $\alpha = k/(\rho C)$ la diffusivité thermique, ρ la masse volumique, k la conductivité thermique, C la chaleur massique.

La matière diffuse également. L'équation de diffusion est la suivante en dimension 1

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (1.61)$$

avec D le coefficient de diffusion et $f(x, t)$ est ici une quantité telle que la concentration d'un polluant dans une rivière. C'est une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre.

Il s'agit ici d'équations linéaires. Il est fréquent que le coefficient de diffusion ne soit pas constant, mais dépende de la fonction f . On parle alors d'équation de diffusion non linéaire. Par exemple, lorsqu'on a $D(f) = \kappa f^k$, l'équation de diffusion est

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left(f^k \frac{\partial f}{\partial x} \right). \quad (1.62)$$

Pour de la diffusion d'un gaz dans un milieu poreux on a $k = 1$ (f représente la concentration); pour la diffusion d'un fluide newtonien sur un substrat horizontal, on a $k = 3$ (f représente la hauteur de fluide); pour la diffusion de chaleur lors des premiers instants d'une explosion nucléaire, on a $k = 5$.

Solution auto-similaire au problème de Green

Selon les conditions initiales imposées, il existe parfois des solutions analytiques à l'équation (1.61) sous la forme de solution auto-similaire $t^m F(\xi)$ avec $\xi = x/t^n$. Quand on substitue f par cette forme dans l'équation (1.61), on trouve que $n = \frac{1}{2}$. On note que m n'est pas déterminé par l'équation différentielle, mais il l'est par les conditions aux limites. En général, dans les problèmes physiques, on impose que la quantité de matière diffusée soit constante

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = V,$$

où V est le volume total (supposé constant) de matière qui diffuse. Un changement de variable donne $\int f(x) dx = \int t^{m+1/2} F(\xi) d\xi = V$. Il est donc nécessaire que $m = -\frac{1}{2}$ car V ne dépend pas de t .

L'avantage de ce changement de variable est qu'on transforme l'équation aux dérivées partielles en équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2, bien plus simple à résoudre. Voyons cela en pratique dans un cas particulier où l'on suppose que dans une retenue d'eau au repos (lac), on lâche un volume V de polluant initialement contenu en un point $x = 0$; la condition initiale est donc $f(x, 0) = \delta(x)$ où δ est la fonction Dirac ($\delta(x) = 1$ si $x = 0$ et $\delta(x) = 0$ si $x \neq 0$). Ce problème où la condition initiale est une « impulsion », c'est-à-dire une quantité localisée en un point, s'appelle *problème de Green*. En substituant la forme $f = t^{-1/2} F(\xi)$ dans l'équation (1.61), on obtient une

équation différentielle ordinaire pour F et ce faisant, on a transformé un problème aux dérivées partielles en problème différentiel ordinaire :

$$F + \xi F'(\xi) + 2DF''(\xi) = 0,$$

qui donne en intégrant une première fois

$$\xi F + 2DF' = a,$$

avec a une constante d'intégration. Comme la solution est attendue être symétrique en $x = 0$ (donc en $\xi = 0$), on a $F' = 0$ en $x = 0$ (F doit admettre une tangente horizontale en ce point), donc $a = 0$. Une nouvelle intégration donne

$$F(\xi) = be^{-\frac{\xi^2}{4D}} \Rightarrow f(x, t) = \frac{b}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}},$$

avec b une constante d'intégration. Comme $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = 2\sqrt{D\pi}$, on déduit que $b = V/2\sqrt{D\pi}$, d'où la solution

$$f(x, t) = \frac{V}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \quad (1.63)$$

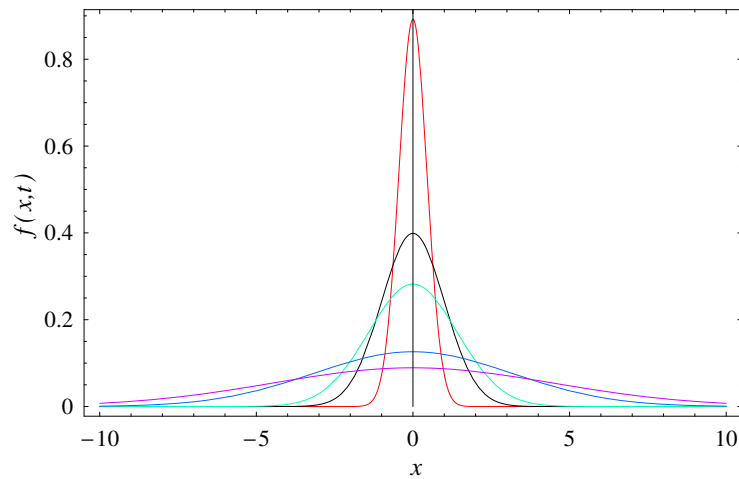


Figure 1.23 : diffusion d'une quantité f . Calcul avec $D = 1 \text{ m}^2/\text{s}$ et au temps $t = 0,1$, $t = 0,5$, $t = 1$, $t = 5$, et $t = 10 \text{ s}$.

Comme le montre la figure 1.23, la forme du front de diffusion reste identique au cours du temps (elle est en forme de cloche), quoique le front s'étale de plus en plus. Notons que la solution obtenue a un intérêt général car elle est la solution particulière du problème dit de Green. Par exemple, admettons que la condition initiale soit plus

complexe: $f(x, 0) = g(x)$. Puisque l'équation différentielle est linéaire, la somme de deux solutions est également solution. La solution générale s'écrit alors

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta) e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4Dt}} d\zeta.$$

Cette intégrale signifie que la concentration f à tout temps t et pour tout x est la somme des contributions élémentaires induites par la distribution de source d'intensité $g(\zeta)$ par unité de longueur.

1.5.3 Équation de convection-diffusion

La convection-diffusion est la combinaison des deux phénomènes. C'est le phénomène couramment rencontré en hydraulique. Par exemple, le déversement d'un polluant dans une rivière conduit à un transport de ce polluant par diffusion (turbulente) et convection (advection à la vitesse de l'eau). L'équation caractéristique est donc

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (1.64)$$

où D et u sont supposées constantes. On peut se ramener à un problème de diffusion linéaire par le changement de variable suivant (qui revient à faire un changement de référentiel et à se placer dans le référentiel du cours d'eau)

$$\begin{aligned} \zeta &= x - ut, \\ \tau &= t. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \cdot}{\partial x} &= \frac{\partial \cdot}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \cdot}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x}, \\ &= \frac{\partial \cdot}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial \cdot}{\partial t} &= \frac{\partial \cdot}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \cdot}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t}, \\ &= -u \frac{\partial \cdot}{\partial \zeta} + \frac{\partial \cdot}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

L'équation (1.64) devient alors

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2},$$

qui est similaire à l'équation de diffusion (1.61) vue plus haut.

1.5.4 Équation des ondes

Les ondes dynamiques sont les solutions d'une équation différentielle telle que l'équation aux dérivées partielles (du second ordre) suivante :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (1.65)$$

avec c la vitesse (de phase). Cette forme n'est pas exhaustive ; par exemple, l'équation des ondes de surface s'écrit (voir § 4.2) :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

avec ici ϕ le potentiel de vitesse ($\mathbf{u}(x, y, t) = \nabla \phi$) et g l'accélération de la gravité.

On recherche souvent les solutions sous la forme d'harmoniques (onde périodique) :

$$\phi(x, t) = A \exp[i(kx - \omega t)] = \operatorname{Re}(A) \cos(kx - \omega t) - \operatorname{Im}(A) \sin(kx - \omega t),$$

où A est l'amplitude, k le nombre d'onde ($\lambda = 2\pi/k$ est la longueur d'onde), $\omega = 2\pi/T$ la fréquence angulaire ; on introduit aussi une fréquence f définie comme $f = \omega/(2\pi) = 1/T$: c'est le nombre d'oscillations complètes durant une seconde à une position donnée. La période est définie comme $T = \lambda/c$.

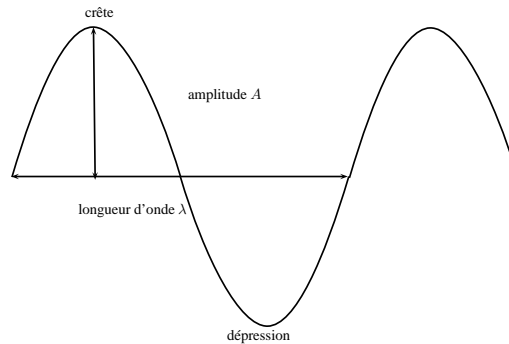


Figure 1.24 : longueur d'onde et amplitude d'une onde harmonique.

La vitesse de l'onde est ici $c = \omega/k$. Cela veut dire que pendant un intervalle δt , on a observé que l'onde s'est déplacée d'une distance $c\delta t$. La relation de dispersion $\omega(k)$ est ici linéaire puisqu'on a : $\omega(k) = ck$, c'est-à-dire les crêtes de la vague se déplacent à une vitesse constante qui est indépendante de la longueur d'onde. Dans la plupart des systèmes que l'on va étudier dans ce cours, la relation n'est pas linéaire, ce qui en pratique implique que la vitesse des crêtes dépend de la longueur d'onde. On introduit alors la vitesse de phase c_p

$$c_p = \frac{\omega(k)}{k}.$$

Dans un processus physique où les ondes résultent de la superposition de plusieurs ondes harmoniques de longueur d'onde différente, chaque composante harmonique se déplace à sa propre vitesse, ce qui aboutit finalement à une séparation ou dispersion de l'onde, d'où le nom de relation de dispersion pour $\omega(k)$. Il existe une troisième vitesse, appelée *vitesse de groupe*, qui représente la vitesse à laquelle l'énergie associée à l'onde se propage :

$$c_g = \frac{d\omega}{dk}. \tag{1.66}$$

En général, pour la plupart des phénomènes physiques, on a $c_g \leq c_p$.

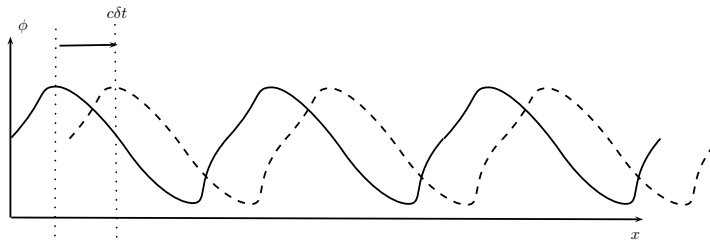


Figure 1.25 : déplacement vers la droite à la vitesse c d'une onde progressive.

L'équation différentielle (1.65) est linéaire, ce qui implique que toute combinaison de solutions est également solution (principe de superposition). Il existe deux sens de propagation :

- onde progressive $f = f(x - ct)$: l'onde va dans le sens $x > 0$;
- onde régressive $f = f(x + ct)$: l'onde va dans le sens $x < 0$.

Notons par ailleurs que l'équation (1.65) peut se factoriser ainsi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) f = 0,$$

ce qui permet également de transformer une équation aux dérivées partielles du second ordre en un système d'équations du premier ordre

$$\begin{cases} f_t - cf_x = v, \\ v_t + cv_x = 0. \end{cases}$$

Cela permet notamment de montrer que la solution générale de l'équation des ondes (1.65) s'écrit

$$f = a(x - ct) + b(x + ct),$$

avec a et b deux fonctions quelconques (solution dite d'*Alembert*).

Remarquons que dans bien des cas d'intérêt pratique, les équations sont linéaires ; la linéarité permet d'appliquer le principe de superposition. Une onde *stationnaire* résulte de la superposition d'une onde régressive et d'une onde progressive de même amplitude. Dans ce cas, la dépendance en temps disparaît.

Dans les problèmes d'intérêt pratique, les ondes ne sont des formes régulières et périodiques, mais ont un comportement aléatoire. Une fonction aléatoire $f(x, t)$ peut se caractériser à l'aide de sa densité de probabilité. Lorsqu'elle est stationnaire (c'est-à-dire lorsque ses moments tels que la valeur moyenne ne dépendent pas du temps) alors l'autocorrélation $R(s)$ sert à caractériser la fonction :

$$R(s) = \langle f'(t)f'(t+s) \rangle,$$

où $f'(t) = f(t) - \langle f(t) \rangle$ désigne la fluctuation par rapport à la valeur moyenne $\langle f(t) \rangle$. Le plus souvent, on se sert de cette fonction sous une autre forme, qui permet de déterminer les composantes qui ont le plus de poids : la *densité spectrale de puissance*. On introduit aussi la densité spectrale de puissance en prenant la transformée de Fourier de l'autocorrélation (cela est aussi le résultat du théorème de Wiener-Khinchin) :

$$E(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(s)e^{-i\omega s} ds = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(s) \cos(\omega s) ds$$

qui est une fonction réelle paire. Une propriété fondamentale de la densité spectrale est que son intégrale sur la gamme de fréquences $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} E(\omega) d\omega$$

représente la contribution à « l'énergie » $\langle f'^2(t) \rangle$ transportée par l'onde.

1.5.5 Processus à l'équilibre: équation de Laplace



- Qu'est-ce qu'une équation aux dérivées partielles elliptique ?
- ↪ Voir la définition au § 1.5 du complément de cours
- Qu'est ce que l'opérateur ∇ ?
- ↪ Voir la définition au § 1.3.1 du complément de cours

Les équations elliptiques traduisent en général comment un processus à l'équilibre est organisé spatialement. Le prototype de l'équation elliptique est l'*équation de Laplace* :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (1.67)$$

Par exemple, l'équation de la chaleur (1.60) en régime permanent ($\partial_t T = 0$) devient elliptique. L'équation de Laplace sert à décrire un grand nombre d'écoulements stationnaires dans les problèmes environnementaux. Ainsi, l'écoulement lent d'eau dans un milieu poreux est également une équation de Laplace. En effet, si la vitesse \mathbf{u} suit la loi de Darcy, alors elle est reliée au gradient de pression p par : $\mathbf{u} = -k\nabla p/\mu$, avec μ la viscosité et k la perméabilité du milieu. On peut reformuler cette équation de la façon

suivante $\mathbf{u} = -\nabla\psi$ avec $\psi = -kp/\mu$; on dit que \mathbf{u} dérive du potentiel ψ . L'équation de continuité (incompressibilité du fluide) impose que $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, soit encore

$$\nabla \cdot \nabla\psi = 0 \Rightarrow \Delta\psi = 0.$$



CHAPITRE 2

Ondes de crue et inondations



CE CHAPITRE traite des crues lentes ou rapides. On va s'intéresser à une multitude de phénomènes tels que :

- crues lentes des grands fleuves conduisant souvent à des inondations ;
- crues torrentielles sous forme de crues liquides (avec transport solide) ;

Tous ces phénomènes peuvent être calculés, à des degrés divers de précision, par les équations de Saint-Venant ou des équations approchées tirées des équations de Saint-Venant. Nous commençons par décrire les phénomènes physiques de façon qualitative avant d'aborder chacun d'eux à travers des équations.

2.1 Phénomènes physiques

2.1.1 Inondation et crue

Une inondation peut être définie selon les auteurs comme une « irruption d'eau sur un terrain normalement sec » comme une « submersion par l'eau débordant du lit normal d'un cours d'eau », ou comme « une accumulation d'eau provenant de drainages, sur des zones qui ne sont pas normalement submergées ». Il s'agit d'une situation temporaire qui peut être dommageable (destruction d'habitations, par exemple) ou bénéfique (apport d'alluvions fertilisants, par exemple). Les causes des inondations sont multiples et peuvent être classifiées comme on le montre ci-après.

Inondations fluviales et crues

On fait la distinction entre crue et inondation :

- les *inondations fluviales* sont les plus fréquentes et également les plus dommageables. Elles surviennent à la suite de longues périodes de pluie ou de la combinaison de pluies avec la fonte des neiges et glaces. Elles peuvent concerner des surfaces très importantes (plusieurs centaines à milliers de km²). La crue de l'Elbe en Tchéquie et en Allemagne en août 2002 est un exemple récent d'inondation sur une vaste échelle ;
- les *crues* sont des phénomènes brutaux qui surviennent à la suite de violentes précipitations sur un périmètre limité et souvent dans un contexte montagneux, de piémont, ou de collines. Elles sont soudaines, de courte durée et ont un débit de pointe relativement élevé. Pour souligner leur caractère brutal, on parle souvent de « crue éclair » (*flash flood* en anglais). En zone de montagne, elles peuvent être extrêmement dévastatrices, d'autant plus qu'elles ont une capacité de charriage très importante, pouvant conduire aux laves torrentielles. Les crues de l'automne 2000 sur le Val d'Aoste, la haute Maurienne, et le Valais (Gondo, Fully pour le Valais) sont des exemples de crues quasi concomitantes sur une période de temps courte. Les crues du sud-est de la France offrent des exemples dramatiques de crues éclair sur de grands bassins-versants dans un contexte de colline : pour la crue historique du Tarn de mars 1930, on estima le débit à 6000 m³/s contre 160 m³/s pour le débit de pointe annual. Ces crues font souvent des victimes compte tenu de leur soudaineté et de la force du courant (la crue d'octobre 1988 à Nîmes fit 10 morts à Nîmes, la crue de l'Ouvèze à Vaison-la-Romaine fit 41 morts en 1992, la crue de l'Aude fit 35 victimes en 1999) ([Gaume et al., 2009](#)).

On peut relier les inondations à des scénarios météorologiques, qui sur l'Europe sont bien établis :

- les inondations hivernales, causées par des dépressions d'ouest associées à un front chaud, qui apportent des précipitations pouvant être longues, continues et intenses. Le sol se sature et de grands volumes d'eau ruissellent (crue du Rhône en décembre 2003 sur la Fig. 2.1) ;
- les inondations dues à la fonte des neiges se produisent lorsque le stock neigeux est encore important au printemps et lorsque du vent chaud provenant du sud traverse les Alpes. Si des précipitations accompagnent ce vent, les volumes d'eau ruisselée sont également importants ;
- les inondations dues aux précipitations convectives d'été ou d'automne peuvent avoir des effets catastrophiques sur des régions fortement urbanisées. Elles sont de type « crue éclair » (crues de la Vésubie sur la Fig. 2.2) ;
- les inondations dues aux grandes marées, qui affectent principalement les Pays-Bas (tempête de janvier 1953).



Figure 2.1 : crue du Rhône (région d'Arles, France) en décembre 2003.



Figure 2.2 : (a) vue aérienne du pont sur la Vesubie à Saint-Martin-Vésubie (Alpes-Maritimes, France) le 3 octobre 2020 et (b) maison à Roquebillière emportée par la Vesubie. Le 2 octobre 2020, la tempête Alex a déversé 200 à 400 mm de pluie sur quelques heures sur le Mercantour, causant des crues majeures de la Roya et de la Vesubie.

Remontées de nappe

Les remontées de nappe surviennent à la suite de la saturation du sol en eau et, par conséquent, lorsqu'il n'est plus en mesure d'absorber de nouvelles quantités d'eau, soit par un apport direct (pluie), soit par un apport indirect (écoulement souterrain, ruissellement à partir des versants). Dans les zones urbanisées (l'Oise en France) ou

certaines régions géologiquement favorables (avec des terrains aquifères calcaires ou crayeux comme dans la Somme), ces remontées de nappe causent des inondations assez fréquentes. Au printemps 2001, après un hiver très humide, plus de 3000 personnes sont sinistrées dans la région d'Abbeville (Somme), leur maison restant inondée pendant deux à trois mois.

Débordement de lac

Les lacs, lorsque leur exutoire a une capacité d'évacuation (naturelle ou artificielle) limitée, peuvent voir leur niveau d'eau augmenter de plusieurs mètres, comme ce fut le cas au Tessin en 1993 ou plus récemment en novembre 2014 avec le lac Majeur. L'inondation historique est celle de 1868 pour la région du lac Majeur (voir figure 2.3), causant la mort de mort d'environ 50 personnes.



Figure 2.3 : La Piazza Grande de Locarno, pendant l'inondation de 1868 Source : archives de MétéoSuisse.

Rupture de barrage

On se reportera au chapitre 3 pour plus de renseignements.

Ruissellement

Dans les zones urbanisées, le ruissellement sur les chaussées lors de violents orages peut provoquer des inondations dans les maisons attenantes. Ces problèmes sont sou-

vent associés à un dysfonctionnement du réseau d'évacuation des eaux pluviales, à des obstructions de cours d'eau ou de drain, ou à des orages particulièrement intenses. Les photographies de la figure 2.4 montrent un exemple d'inondations provoquées le ruissellement des eaux sur les chaussées goudronnées de Châtel à la suite d'un violent orage sur le Morclan en juin 2000.



Figure 2.4 : inondations lors de l'orage du 5 juin 2000 à Châtel (Haute-Savoie). Source : Thierry Hauteville.

Autres phénomènes

D'autres types d'inondations, plus anecdotiques pour nos contrées, sont également possibles. Parmi ceux-ci, mentionnons le phénomène de seiche, due à des phénomènes oscillatoires dans les grandes étendues d'eau fermées (par exemple les grands lacs aux États-Unis), les tsunamis affectant principalement les côtes japonaises, les marées de tempêtes associées aux cyclones tropicaux, les mouvements d'affaissement du terrain ou encore l'écroulement d'un barrage naturel. Les inondations des cotes de l'Océan Indien en Asie du Sud-Est à Noël 2004 ou les inondations à la Nouvelle-Orléans après le passage de l'ouragan Katrina sont des exemples d'inondations dues à des tsunamis ou des cyclones.

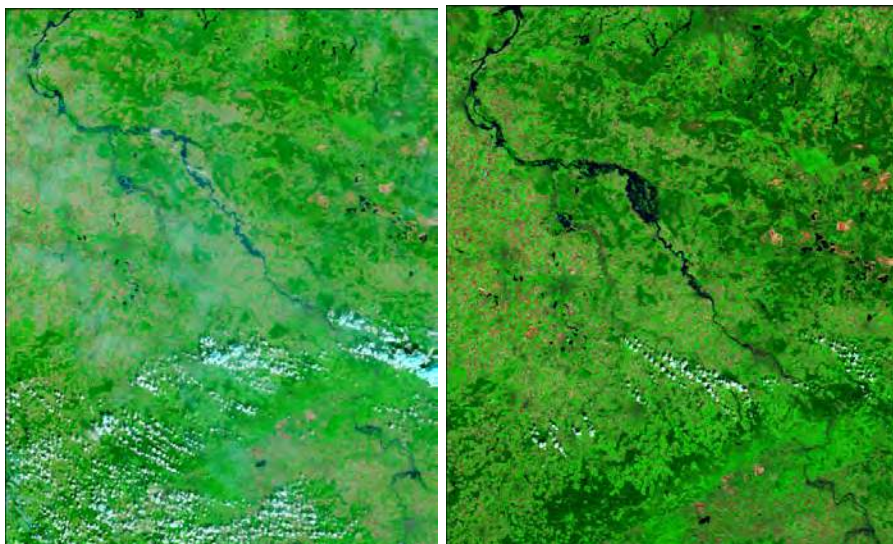
2.1.2 Dommages causés par les inondations

Les inondations représentent chaque année un pourcentage important des pertes économiques dues aux catastrophes naturelles (49 % du total mondial en 1999). Pour la période 1985–1999, le nombre d'événements ayant provoqué des dommages s'élevait à 2410 pour l'ensemble de la planète (430 pour l'Europe), représentant 30 % (respectivement 25 %) de l'ensemble des catastrophes naturelles. Durant la même période, elles ont provoqué la mort de plus de 250 000 personnes (1 800 pour l'Europe), soit environ la moitié du nombre total de victimes imputées aux catastrophes naturelles (MunichRe,

Tableau 2.1 : statistiques des inondations catastrophiques par continent sur la période 1985–1999 d’après les données de MünchenRe.

	<i>Inondation</i> nombre (part en %)	<i>Pertes économiques</i> millions US\$ (part en %)	<i>Pertes en vie humaine</i> nombre (part en %)
Europe	430 (18 %)	41 230 (15 %)	1 800 (1 %)
Asie	900 (37 %)	192 690 (69 %)	222 780 (88 %)
Amérique du Nord	420 (17 %)	37 540 (13 %)	3 670 (2 %)
Amérique du Sud	210 (9 %)	4 130 (1 %)	4 480 (2 %)
Afrique	330 (14 %)	1 950 (1 %)	15 810 (6 %)
Océanie	130 (5 %)	2 280 (1 %)	3 290 (1%)
Totaux	2410 (100 %)	279 810 (100 %)	251 820 (100 %)

1999). Parmi l’ensemble des continents, l’Asie est celui qui paie le plus lourd tribut aux inondations : le pourcentage d’événements dommageables est de 37 %, celui des pertes en vies humaines est de 88 %, et celui des pertes économiques est de 68 % des totaux respectifs mondiaux. Cette situation est évidemment à mettre en relation avec les grands fleuves chinois et la situation particulière du Bangladesh. Dans ce dernier pays, 85 % du territoire national est exposé à d’importants risques d’inondations. La situation chinoise n’est pas en reste, bien que les plaines inondables ne représentent qu’une partie infime du territoire. Par exemple, pour le Yangtse, elle représente 1,5 % de la surface du pays, mais elle concentre 250 millions d’habitants et 45 % de la production du riz et des autres céréales y est produite.

**Figure 2.5** : l’Elbe en crue le 19 août 2002 : situation en temps normal (à gauche) et situation le 19 août 2002. Source : Agence Spatiale Européenne.

2.1.3 Crues torrentielles

Les crues torrentielles sont des écoulements d'eau avec un fort transport solide, qui se produisent dans les torrents et les rivières de montagne ou de piémont. On distingue :

- les crues avec charriage : le cours d'eau transporte du sédiment grossier par roulement, glissement, saltation le long du lit (processus appelé charriage). Ce type de crue se produit dans les cours d'eau dès que le débit est suffisamment fort pour mettre en mouvement les matériaux composant le lit de la rivière. Contrairement aux rivières de plaine, où le sédiment est relativement fin et transporté en suspension dans l'eau, les rivières torrentielles et les torrents peuvent transporter des volumes importants de matériaux, avec une échelle granulométrique étendue (du micromètre à plusieurs décimètres). Des crues comme celle de Brigue en septembre 1993 (Valais) peuvent provoquer des dommages importants en provoquant l'obstruction des ponts, l'exhaussement du lit, l'inondation des berges, et un important dépôt solide ;
- les laves torrentielles : lorsque la pente est forte, le transport par charriage est instable. La gravité est en effet suffisante à maintenir les particules en mouvement une fois qu'elles ont été érodées. Une lave torrentielle est donc un transport en masse d'un mélange de blocs, de terre, et d'eau ; la concentration solide est très importante (de l'ordre de 70–80 %). Le mélange prend alors souvent l'apparence d'une boue ou d'un béton. Les laves torrentielles ont donc un comportement mécanique très différent des crues liquides et, d'une certaine façon, elles sont plus proches d'une avalanche que d'une crue. La plupart des torrents peuvent produire avec une fréquence plus ou moins importante des laves torrentielles. Certains torrents comme le Nant du Pissot au-dessus de Villeneuve (Vaud) ne fournissent des laves qu'en moyenne une fois par siècle ; ce sont souvent des torrents à clappiers : le matériau mobilisé par les laves torrentielles provient de l'éboulement de falaises (les éboulis sont les « clappiers » ou clappes) et il faut plusieurs années à décennies pour former un stock suffisant de matériau mobilisable. D'autres torrents sont plus actifs car le terrain présente souvent une instabilité à un niveau local (berges) ou étendu (mouvement de terrain affectant une grande partie du bassin-versant). C'est le cas par exemple de l'Illgraben, qui peut produire plusieurs laves torrentielles chaque année.

Signalons que certains écoulements naturels sont très proches des laves torrentielles que nous rencontrons dans les Alpes :

- les *lahars* sont des écoulements d'un mélange d'eau et de cendres, que l'on rencontre dans les régions volcaniques. Les éruptions volcaniques peuvent en effet déposer des quantités colossales de cendres, qui sont ensuite très facilement érodables. Des catastrophes récentes en Indonésie, Philippines (volcan Pinatubo en octobre 1991) sont consécutives à de fortes pluies. En Europe, la catastrophe de Sarno et Quindici (Italie) en mai 1998 est due à un mouvement de terrain affectant des sols volcaniques (dépôt de cendres du Vésuve) ; elle fit 137 morts et

environ 300 M€ de dommages ;

- au cours des éruptions volcaniques, le mélange de cendres et d'eau (par exemple résultant de la fusion d'un manteau neigeux ou d'un glacier) peut provoquer des coulées froides de cendres, semblables aux lahars. En novembre 1985, le volcan Nevado del Ruiz en Colombie entra en éruption ; la fusion de la glace forma une coulée de cendres, qui engloutit la ville d'Armero et d'autres villages (23 000 morts environ). En mai 1980, l'éruption du volcan Mount Saint Helens aux États-Unis provoqua un affaissement complet du versant nord du volcan et causa la formation de lahars dévastateurs ; la vallée de la rivière North Fork Toutle fut comblée de sédiments sur une longueur d'environ 22 km et sur une épaisseur moyenne de 45 m (épaisseur pouvant localement atteindre les 200 m) ;
- certains mouvements de terrain ou écroulements peuvent se mettre à accélérer brutalement et causer des écoulements proches des laves torrentielles lorsque la teneur en eau est suffisante. En juillet 1965, le glissement de terrain de la Ravoir de Pontamafrey (France) accéléra soudainement après un printemps humide et forma une lave torrentielle de plusieurs centaines de milliers de m³, qui coupa la route nationale et la ligne de chemin de fer, isolant toute la vallée de Maurienne.

2.2 Origine des crues

À l'échelle de la planète et si on prend des temps longs (allant jusqu'au paléolithique), les plus grosses crues connues par l'homme ont été principalement causées par des phénomènes géologiques tels que des ruptures de barrages de glace ou remblais naturels barrant des vallées fluviales (voir tableau 2.2)¹. Quoique la plupart de ces crues se soient produites à la fin de la dernière glaciation marquant le pléistocène, il existe encore de nos jours plusieurs sites qui peuvent générer de tels phénomènes. Par exemple, dans le Pamir au Tadjikistan, un tremblement de terre en 1911 a causé un glissement de terrain, qui a barré le Bartang et formé un lac naturel le Sarez. Le remblai naturel haut de 600 m stocke un volume d'eau de 16 km³ (1/5 du lac Léman) (Schuster & Alford, 2004). Sa rupture menace les populations à l'aval (5 millions de personnes). Le caractère paroxystiques de ces crues a poussé à leur donner le nom de « méga-crues » (*megaflood* en anglais).

1. *Pléistocène* : c'est une époque géologique qui marque le début du quaternaire, couvrant la période allant de 2,58 millions d'années à 11 700 ans avant le présent, et marquée par de grands cycles glaciaires. Cet âge est suivi par l'*holocène*.

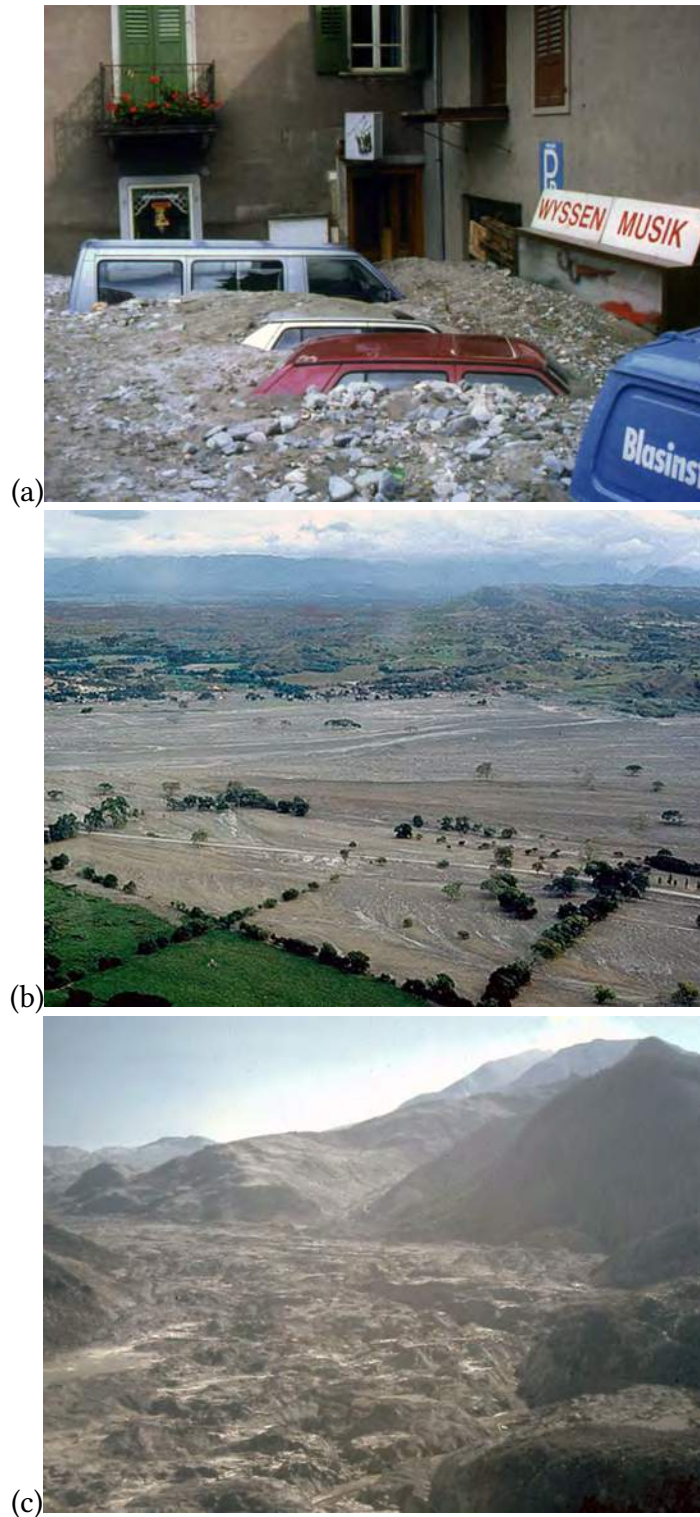


Figure 2.6 : (a) Brigue en septembre 1993 (cliché J.-P. Jordan, OFEG); (b) la plaine autour du Nevado del Ruiz couverte par les dépôts de lahars (source : J. Marso); (c) la vallée creusée par la rivière *North Fork Toutle* après le passage des lahars de mai 1980 causés par l'éruption du Mount Saint Helens (source: USGS).

Tableau 2.2 : Cause des principales crues majeures connues dont le débit de pointe a dépassé 100 000 m³/s. D'après (O'Connor & Costa, 2004).

<i>nom</i>	<i>région</i>	<i>date</i>	$Q_p (\times 10^6 \text{ m}^3/\text{s})$	<i>cause probable</i>
Kuray	Altaï, Russie	fin pléistocène	18	barrage de glace
Missoula	nord ouest EUA	fin pléistocène	17	barrage de glace
Lacs Darkhat	Mongolie	fin pléistocène	4	barrage de glace
Lacs Jassater	Altaï, Russie	fin pléistocène	2	barrage de glace
Lacs Yaloman	Altaï, Russie	fin pléistocène	2	barrage de glace
Lacs Ulymon	Altaï, Russie	fin pléistocène	1,9	barrage de glace
Lake Agassiz	Alberta, Canada	début holocène	1,2	déverse de lac proglaciaire
Aniakchak	Alaska, USA	fin holocène	1	brèche dans une caldera
Lake Bonneville	nord ouest EUA	fin pléistocène	1	surverse de lac
Lake Regina	Canada/EUA	fin pléistocène	0,8	barrage de glace
Jökulsá á Fjöllum	Islande	début holocène	0,7	éruption volcanique en zone glaciaire
rivière Indus	Pakistan	1841	0,54	barrage de remblais
rivière Amazone	Obidos, Brésil	1953	0,37	pluie
Katla	Islande	1918	0,3	éruption volcanique en zone glaciaire
rivière Wabash	Indiana, EUA	fin pléistocène	0,27	barrage de glace
rivière Toutle	nord-ouest USA	fin holocène	0,26	barrage de remblais
rivière Amazone	Obidos, Brésil	1963	0,25	pluie
rivière Amazone	Obidos, Brésil	1976	0,24	pluie
rivière Columbia	nord-ouest EUA	env. 1450	0,22	barrage de remblais
Lac Agassiz	Canada/EUA	début holocène	0,2	surverse de lac proglaciaire
rivière Lena	Kasur, Russie	1967	0,19	bouchon de glace et neige
rivière Lena	Kasur, Russie	1962	0,17	bouchon de glace et neige

rivière Lena	Kasur, Russie	1948	0,17	bouchon de glace et neige
Lac Agassiz	Canada/EUA	fin pléistocène	0,13	barrage de glace
Rivière Porcupine	Canada/EUA	fin pléistocène	0,13	barrage de glace
rivière Yangtze	Chine	1870	0,11	pluie
Russell Fiord	Alaska, EUA	1986	0,1	barrage de glace

Si la plupart des méga-crues sont le fait de phénomènes géologiques (O'Connor & Costa, 2004; O'Connor & Beebee, 2009), leur fréquence d'occurrence est faible et elles ne concernent que des régions spécifiques. La plupart des crues concernant des zones urbanisées sont consécutives à des phénomènes météorologiques. Ainsi, dans les Alpes, on observe trois scénarios majeurs dans la formation des crues :

- les pluies brèves et intenses : typiquement des orages de fin d'après-midi l'été quand il fait chaud et humide. La saison à risque est l'été (juin à septembre). Les débits spécifiques de pointe se situent dans une fourchette large $1-10 \text{ m}^3/\text{s}/\text{km}^2$ pour une période de retour $T = 10$ ans. Le coefficient d'écoulement est souvent moyen (0,3 à 0,8). Les crues sont rapides et ne durent en général que quelques heures. Le plus souvent, seul un bassin-versant est touché de façon isolée. En conditions exceptionnelles, des valeurs dépassant $20 \text{ m}^3/\text{s}/\text{km}^2$ ont été observées (crue de l'Orba dans les Alpes italiennes en août 1935 ou bien du Tech en octobre 1940 dans les Pyrénées) lors d'épisodes de pluie diluviens et hors normes (pour l'Europe) sur des massifs montagnes proches de la Méditerranée ;
- les pluies soutenues sur de longues périodes (plusieurs jours, parfois plusieurs semaines) liées au passage d'un ou plusieurs systèmes dépressionnaires bien organisés sur les Alpes. La saison à risque est en général l'automne et le début du printemps, très exceptionnellement en hiver. Les crues sont lentes, durent plusieurs jours, et concernent une vallée entière, voire tout un massif ou une région. Les débits spécifiques de pointe dépassent exceptionnellement $1-2 \text{ m}^3/\text{s}/\text{km}^2$ pour $T = 10$ ans. Le coefficient d'écoulement est élevé (de 0,6 à 1) ;
- la fonte des neiges au printemps ou bien un important redoux accompagné de pluie durant l'hiver ou le printemps. Les crues sont lentes et étalées sur plusieurs jours à semaines. La saison à risque est la fin du printemps (mai et juin). Les débits spécifiques de pointe dépassent exceptionnellement $1 \text{ m}^3/\text{s}/\text{km}^2$ pour $T = 10$ ans.

Un exemple est fourni par la crue de l'Arc (Haute Maurienne) et celle du Guil en juin 1957 et de nombreux autres rivières de la chaîne frontalière : le mois de mai 1957 avait été plus froid que la normale et un important stock de neige subsistait en altitude, au-dessus de 2000 m. Au début de juin, les températures se sont mises à s'élever très brutalement (plus de 20°C) sous l'effet de l'arrivée d'air chaud et humide de Méditerranée. Les précipitations faibles du mois de juin se sont intensifiées avec l'arrivée d'air froid de Scandinavie. À ces chutes de pluie s'est ajoutée la fonte rapide du manteau neigeux, ce qui a conduit à des crues extrêmes. Ainsi à Saint-Michel-de-Maurienne, alors que le débit moyen interannuel pour le mois de juin est $\bar{Q} = 84 \text{ m}^3/\text{s}$, un débit moyen journalier de $500 \text{ m}^3/\text{s}$ a été enregistré le 14 juin 1957 (voir figure 2.7).

La réponse d'un bassin-versant à une pluie est variée. Certains bassins-versants sont sensibles à tous les scénarios décrits ci-dessus tandis que d'autres ne réagissent qu'à un scénario précis. La réponse d'un bassin-versant à une pluie dépend :

- de la forme générale du bassin-versant : selon que le bassin-versant est de forme

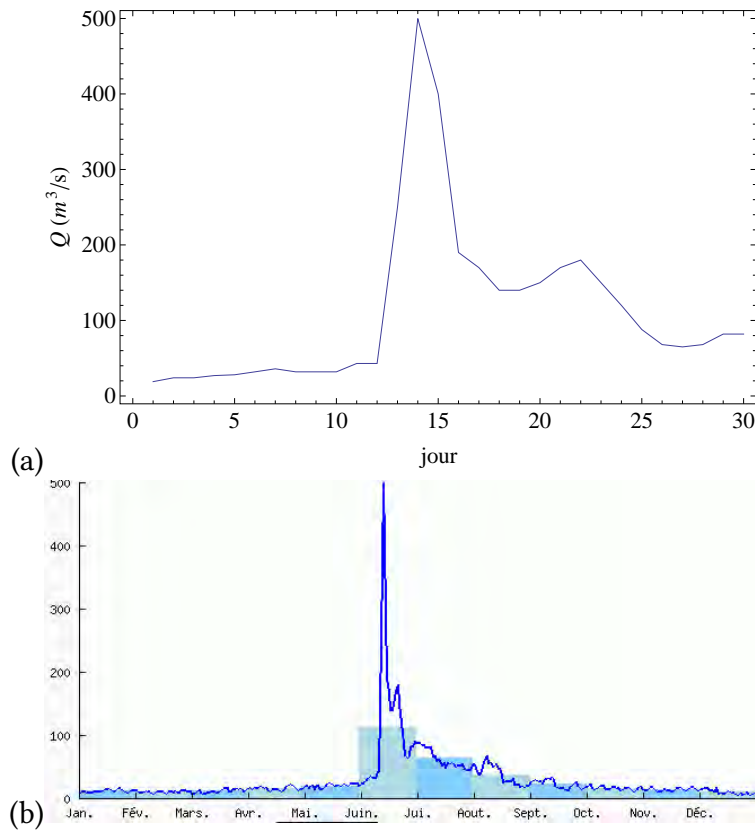


Figure 2.7 : débit journalier de l'Arc à Saint-Michel-de-Maurienne (Savoie) en juin 1957. (a) variation du débit moyen journalier en juin 1957, (b) variation du débit de l'Arc en 1957 et comparaison avec les moyennes mensuelles.

oblongue ou ramassée, le temps mis par l'eau pour atteindre l'exutoire peut différer notablement ;

- la densité du réseau hydrographique drainant le bassin-versant ;
- le couvert végétal : densité, nature, réseau racinaire, etc.
- l'inclinaison moyenne des pentes ;
- la nature des sols, la géologie du sous-sol, la capacité d'infiltration et de résurgence, l'existence de surfaces imperméables (glacier, route, etc.) ;
- l'altitude et ses effets sur la limite des neiges, nature pédologique du sol, pergisol/permafrost, végétation, etc. ;
- la possibilité de blocage de cellules orageuses ou un effet de barrière sur le passage d'une perturbation.

On peut distinguer trois classes de réponses :

- réponse rapide (groupe 1) : le bassin-versant répond à peu près systématique-

ment et de la même façon aux pluies brèves et intenses. Aucune crue ne survient après des précipitations longues, mais peu soutenues. Le débit de crue dépend foncièrement de l'intensité des pluies : plus l'intensité est forte, plus le débit de pointe est élevé. Le temps de montée et la durée spécifique de la crue sont courts. Les petits bassins-versants de montagne, raides et peu végétalisés, entrent le plus souvent dans cette catégorie. Le torrent de l'Alptal (SZ) en est un exemple ;

- réponse moyenne (groupe 2) : le bassin-versant répond de façon atténuée aux pluies mêmes intenses ou soutenues sur plusieurs jours. En général, la capacité d'infiltration est bonne, le ruissellement est faible (forte résistance, végétation dense, pente modérée). Toutefois, des concours de circonstances font qu'exceptionnellement des crues peuvent se produire avec des débits importants ;
- réponse lente (groupe 3) : le bassin-versant ne répond pas ou faiblement aux pluies. Le débit de pointe est généralement faible et l'onde de crue est assez étalée.

Tableau 2.3 : nom de la rivière, surface S du bassin-versant (km^2), région et localité où le débit est estimé, débit spécifique de pointe en conditions décennales $Q_{s,10}$ ($\text{m}^3/\text{s}/\text{km}^2$), surface occupée par la végétation selon son type, pente moyenne (%) du bassin-versant, pluie décennale horaire $P_{10}(1)$ et journalière $P_{10}(24)$, nature géologique du terrain. D'après (Graff, 2004).

Nom	S	Région	Localité	$Q_{s,10}$	% nu	% pâturage	% boisé	Pente	$P_{10}(1)$	$P_{10}(24)$	Géologie
Groupe 1											
Laval	0,86	Alpes-du-Sud	Draix	14,3	68	10	22	58	32	100	marnes
Erlenbach	0,64	Suisse Centrale	Alptal, Schwyz	7	0	60	40	20	35	120	flysh
Groupe 2											
Rimbaud	1,5	Alpes-du-Sud	Toulon	5,2	-			35		160	gneiss
Latte	0,19	Massif Central	Mont Lozère	3,5	-						granit
Sapine	0,54	Massif Central	Mont Lozère	2,7							granit
Groupe 3											
Rietholzbach	3,31	Suisse Centrale	Mosnang	2,1		76		20			molasse
Lumpenenbach	0,93	Suisse Centrale	Alptal, Schwyz	4,1		55	20	15	40	140	flysh
Vogelbach	1,55	Suisse Centrale	Alptal, Schwyz	3,1		10	65	15	40	110	flysh
Brusquet	1,08	Alpes-du-Sud	Draix	1,3	13		87	53	44	92	marnes

2.3 Définition de la période de retour: du problème au calcul mathématique

2.3.1 Problématique

Pour un cours d'eau naturel, le débit varie en fonction du temps au gré des conditions météorologiques sur le bassin-versant et d'autres processus (fonte de la neige, circulation d'eau souterraine). En général, il existe des cycles annuels, mais selon les précipitations, le débit peut évoluer d'une année sur l'autre d'une façon extrêmement variable (voir l'exemple de la Lonza, un affluent du Rhône, à la fig. 2.8). Ce qui va nous intéresser ici c'est de caractériser les crues, donc ce qui se passe pour des débits forts, c'est-à-dire en pratique des débits maximaux.

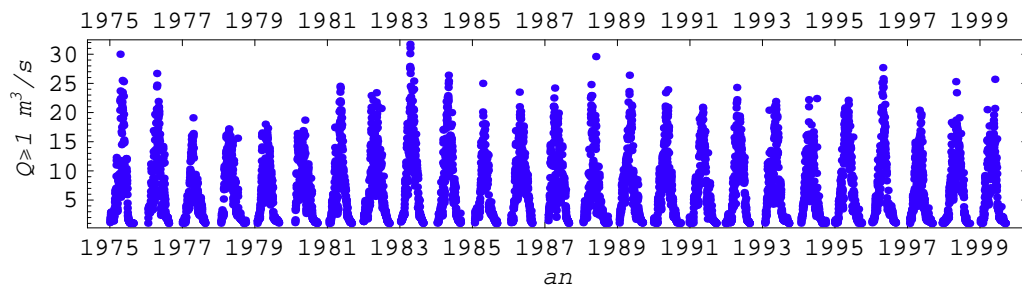


Figure 2.8 : variation du débit de pointe journalier sur la rivière Lonza (Valais) sur la période 1974–1999. Chaque point représente le débit maximal journalier.

Plusieurs méthodes s'offrent en pratique pour définir un débit maximal (voir figure 2.9):

- la méthode des maxima annuels consiste à prendre la valeur maximale observée chaque année. On fait donc une partition de la série temporelle en blocs d'une année (en général, année civile);
- la méthode par dépassement d'un seuil consiste à se fixer un seuil s suffisamment élevé et à prendre toutes les valeurs au-dessus de ce seuil.

En général, on cherche à relier la fréquence d'occurrence et l'intensité (débit) de la crue. Cette relation est souvent recherchée par (i) une caractérisation de la probabilité d'occurrence du phénomène en fonction de l'intensité, (ii) le calcul du nombre de fois qu'une crue d'une certaine intensité peut se produire par unité de temps, ou (iii) le temps qui sépare deux événements de même intensité ou dont l'intensité dépasse un certain seuil. La plupart du temps, toutes ces questions sont connectées et la réponse à l'une fournit la réponse aux autres. Ici, on va s'intéresser à la relation intensité-fréquence que l'on va définir à travers la loi de probabilité que le débit (maximal) Q

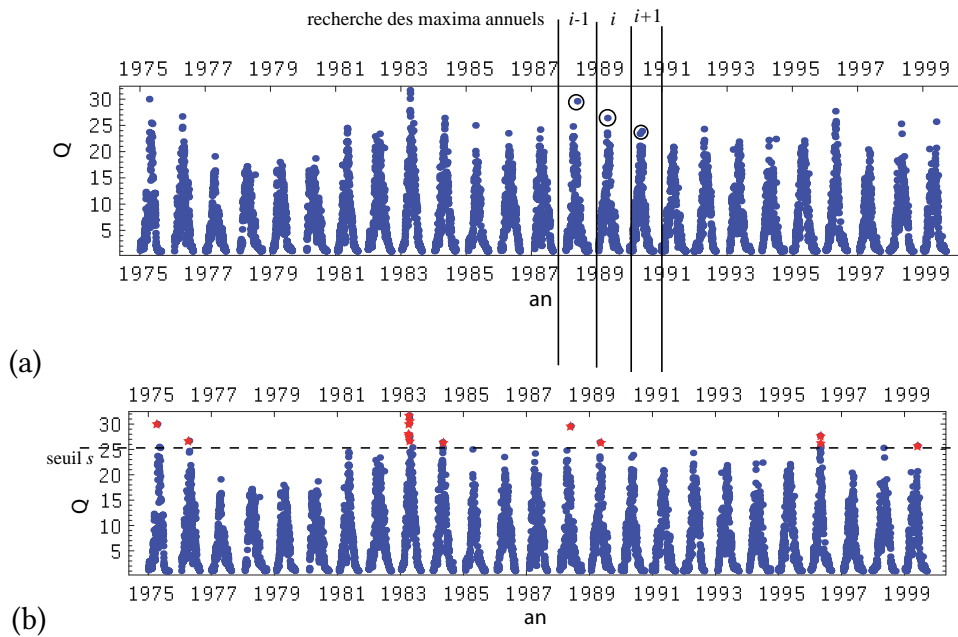


Figure 2.9 : définition des maxima de débits par (a) la méthode des maxima annuels et (b) la méthode par dépassement d'un seuil s .

dépasse une certaine valeur q :

$$P = \text{prob}(Q > q) = \int_q^\infty f(\eta) d\eta,$$

avec $f = dP/dq$ la densité de probabilité; on parle de *probabilité de dépassement*. Les mathématiciens travaillent en général avec la *probabilité de non-dépassement*

$$P = \text{prob}(Q < q) = \int_0^q f(\eta) d\eta,$$

On a la relation: $P + P' = 1$ car, par définition des probabilités, $\int_q^\infty f(\eta) d\eta = 1$.

Plusieurs théories ont été proposées depuis le début du xx^e siècle pour calculer f ou P . Aujourd'hui, la théorie des valeurs extrêmes est la plus couramment utilisée. Elle repose sur des hypothèses (stationnarité, indépendance des variables, etc.) qui sont le plus souvent vérifiées en Europe. Dans certaines régions (notamment le pourtour méditerranéen), cette théorie peut être mise en défaut car les crues sont générées par des processus très différents (la « population » des événements, au sens statistique du terme, est donc très hétérogène).

2.3.2 Théorie des valeurs extrêmes

Théorie mathématique

La théorie des valeurs extrêmes démontre que, sous réserve que X vérifie quelques conditions, cette loi tend vers une loi de forme générique quand $N \rightarrow \infty$, dont la fonction de répartition s'écrit (Coles, 2001):

$$P(x; \mu, \sigma, \xi) = \exp \left[- \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-1/\xi} \right]. \quad (2.1)$$

On l'appelle *la distribution généralisée des valeurs extrêmes*, notée souvent GEV dans la littérature technique pour *Generalized Extreme Value*. Attention, le terme élevé à la puissance $-1/\xi$ peut être négatif.

La distribution généralisée des valeurs extrêmes dépend de trois paramètres: un paramètre de localisation μ , un paramètre de forme ξ , et un paramètre d'échelle σ ($\sigma > 0$). En fait, cette forme générique synthétise trois distributions élémentaires:

- la *loi de Gumbel* est une loi à deux paramètres définie sur \mathbb{R}_+ , obtenue en faisant tendre ξ vers 0:

$$Gu(x; \mu, \sigma) = \exp \left[- \exp \left(- \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right].$$

La moyenne est: $\mathbb{E}(X) = \mu + \sigma\gamma$ (avec $\gamma \approx 0,5772$ la constante d'Euler); la variance est: $\text{Var}(X) = \sigma^2\pi^2/6$.

- la *loi de Fréchet* est une loi à trois paramètres définie sur $]-\sigma/\xi, +\infty[$, obtenue en prenant $\xi > 0$:

$$Fr(x; \mu, \sigma, \xi) = \exp \left(- \frac{1}{(1 + \xi(x - \mu)/\sigma)^{1/\xi}} \right).$$

- la *loi de Weibull*² est une loi à trois paramètres définie sur $]-\infty, \mu + \sigma/|\xi|[$, obtenue en prenant $\xi < 0$. On peut utiliser la même fonction de répartition que précédemment ou bien l'arranger un peu:

$$We(x; \mu, \sigma, \xi) = \exp \left(- \left(|\xi| \frac{\mu + \sigma/|\xi| - x}{\sigma} \right)^{1/|\xi|} \right).$$

Sur la figure 2.10, une distribution particulière de la loi de Gumbel a été reportée. Par rapport à la loi de Gauss-Laplace, on notera la forme dissymétrique de la courbe

2. Attention, il existe aussi dans la littérature technique des lois de distribution dite de *Weibull* mais qui se présentent sous une forme simplifiée (loi à deux paramètres) qu'il ne faut pas confondre avec la forme générale donnée par la théorie des valeurs extrêmes.



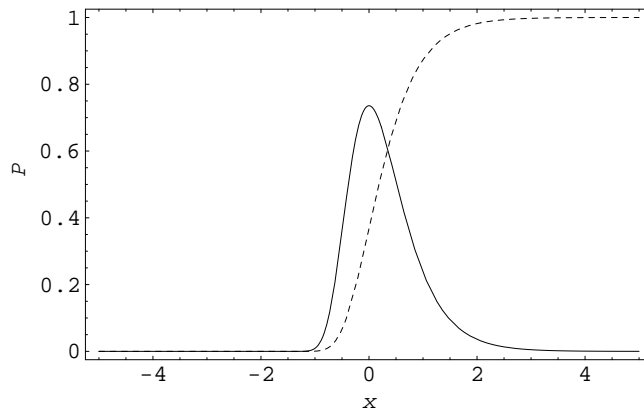


Figure 2.10 : représentation graphique de la loi $\mathcal{G}u(0, 1/2)$. La courbe continue représente la densité de probabilité tandis que la courbe à tiret représente la fonction de répartition.

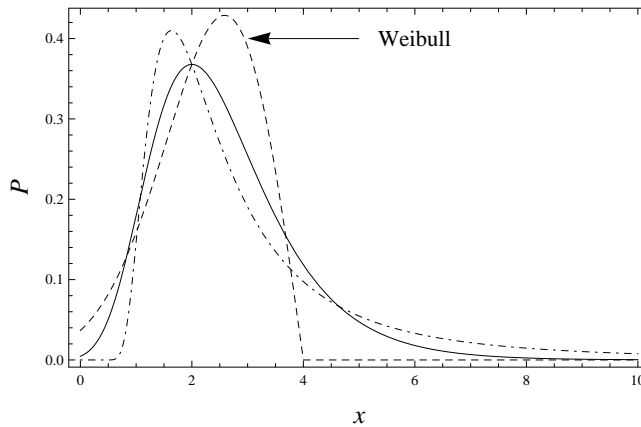


Figure 2.11 : représentation graphique des densités de probabilité de la loi $\mathcal{G}u(2, 1)$ (courbe continue), de Fréchet $\mathcal{F}r(\mu = 2, \sigma = 1, \xi = 1/2)$ (courbe à tiret court), et de Weibull $\mathcal{W}e(\mu = 2, \sigma = 1, \xi = -1/2)$ (courbe à tiret long).

puisque la queue vers les grandes valeurs est épaisse : il y a une convergence lente vers 0 de $\mathcal{G}u(x)$ pour $x \rightarrow \infty$. Cela a des répercussions très importantes car cela veut dire que des fluctuations de grande amplitude par rapport aux valeurs les plus fréquentes ne sont pas rares.

Sur la figure 2.11, les densités de probabilité des trois distributions sont reportées. À noter les points suivants :

- La lente convergence de la densité de la loi de Fréchet vers 0 quand x croît, ce qui implique que la fonction de répartition tend lentement vers 1. En pratique, cela signifie que pour des événements distribués selon une telle loi, des phénomènes rares peuvent être observés avec une amplitude sans commune mesure avec ce qui est observé ordinairement.
- La loi de Weibull tend vers une valeur limite, puisqu'en $x = \mu + \sigma/|\xi|$, on a $We(x) = 1$ ($x = 4$ sur la figure 2.11) et la densité de probabilité nulle. En pratique, la loi de Weibull peut servir à décrire des phénomènes qui tendent vers un palier (en pouvant l'atteindre).

Un point que nous n'abordons pas ici mais qui a son importance : la théorie des valeurs extrêmes garantit que les valeurs maximales d'un échantillon de valeurs indépendantes et identiquement distribuées sont distribuées par une loi de forme générique donnée par l'équation (2.1), mais nous n'avons pas précisé ici la vitesse de convergence. Celle-ci peut être assez lente, ce qui a une conséquence pratique importante : pour un échantillon de valeurs empiriques de taille réduite, une partie des valeurs sera effectivement bien distribuée selon une loi de valeurs extrêmes, mais les valeurs les plus fréquentes peuvent s'éloigner très sensiblement de cette loi asymptotique.

Théorie des valeurs extrêmes : formulation pour les ingénieurs

Lorsqu'on travaille avec des lois de valeurs extrêmes, il est plus agréable de travailler dans un diagramme semi-logarithmique et avec la période de retour définie comme $T = 1/P$ (voir *infra*). Dans un tel système de représentation (voir figure 2.12)

- la loi de Gumbel ($\xi = 0$) apparaît alors comme une droite ;
- la loi de Fréchet ($\xi > 0$) comme une courbe convexe (orientée vers le haut) ;
- la loi de Weibull ($\xi < 0$) comme une courbe concave (orientée vers le bas).

Le tableau 2.4 recense l'ensemble des distributions de loi de valeurs extrêmes. Le rôle de l'exposant ξ est capital car il conditionne le comportement des valeurs extrêmes comme le montre le schéma de la figure 2.12. Très souvent, on possède des données et on cherche à caler une loi de la forme donnée ci-dessus mais la moindre erreur sur le calcul de l'exposant ξ entraîne des valeurs significativement différentes dès que l'on va chercher à extrapoler la courbe pour déterminer les valeurs extrêmes.

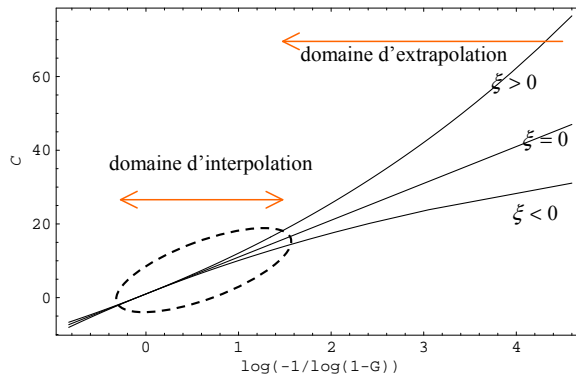


Figure 2.12 : comportement de la loi de probabilité G en fonction de ξ ($\xi = -0,2; 0; 0,2$). L'ellipse représente le domaine où l'on dispose en général de mesures.

Tableau 2.4 : densité de probabilité, fonction de répartition P (dépassement), et quantiles Q pour les lois de valeurs extrêmes. On introduit la période de retour comme $T = P^{-1}$.

fonction	$\xi \neq 0$	$\xi = 0$
densité de probabilité	$f = \frac{1}{\sigma} e^{-\left(\frac{(q-\mu)\xi}{\sigma} + 1\right)^{-1/\xi}} \left(\frac{(q-\mu)\xi}{\sigma} + 1\right)^{-\frac{\xi+1}{\xi}}$	$f = \frac{1}{\sigma} e^{\frac{\mu-q}{\sigma}} - e^{\frac{\mu-q}{\sigma}}$
fonction de répartition	$P = e^{-\left(\frac{(q-\mu)\xi}{\sigma} + 1\right)^{-1/\xi}}$	$P = e^{-e^{\frac{\mu-q}{\sigma}}}$
quantile ($Q(P)$)	$Q = \mu - \frac{\sigma}{\xi} \left(1 - (-\ln(1 - P))^{-\xi}\right)$	$Q = \mu - \sigma \ln(-\ln(1 - P))$
quantile ($Q(T)$)	$Q = \mu - \frac{\sigma}{\xi} \left(1 - \left(-\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right)\right)^{-\xi}\right)$	$Q = \mu - \sigma \ln\left(-\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right)\right)$

2.3.3 Définition de la période de retour

Définition pour un processus à une seule variable aléatoire

En ce qui concerne la période de retour pour un phénomène aléatoire caractérisé par une seule variable X (aléatoire), la période de retour est une construction qui consiste à relier la probabilité $P' = \text{prob}(X < x)$ (c'est-à-dire la probabilité P' que la variable X soit inférieure une valeur x) à un temps arbitraire, appelé « période de

retour » :

$$T = \frac{1}{1 - P'} = \frac{1}{P} \quad (2.2)$$

Comme c'est une probabilité (donc un nombre réel entre 0 et 1), la fonction P n'a pas d'unité alors qu'en général, on attribue l'unité « ans » à T . Comme on le voit, cette définition est une définition opérationnelle et empirique, qui facilite les choses pour l'ingénieur. On peut la justifier mathématiquement avec des modèles poissonien et de tirage d'urne, mais des difficultés sérieuses apparaissent dès lors que l'on va caractériser un événement « extrême » comme un événement dépassant un certain seuil ou bien le maximum sur un intervalle de temps donné (généralement l'année) (Meylan *et al.*, 2008). Si on ne regarde que le comportement asymptotique (donc pour P devenant proche de 1, T très grand), on peut, par construction, faire coller les définitions sur des blocs de temps et par dépassement de seuil. En pratique, cela veut dire que, sous réserve que les hypothèses de la théorie des valeurs extrêmes soient valides et si on a des séries temporelles suffisamment longues, les deux approches convergent (Coles, 2001). Pour des séries courtes, des différences significatives existent. Toujours, en restant dans le domaine des processus à une variable aléatoire, on pourrait faire des constructions différentes de la distribution de l'intensité et de la fréquence d'occurrence des phénomènes pour s'abstraire des problèmes de convergence. C'est le cas par exemple des modèles employés pour les processus industriels, dits de *renouvellement*, qui ont été également employés avec succès en hydrologie (Miquel, 1984). Ces constructions ne font pas appel aux arguments asymptotiques qui sous-tendent la théorie des valeurs extrêmes.

Définition pour un processus à deux variables aléatoires

Les choses se corsent lorsqu'on aborde des processus caractérisés par deux variables aléatoires X et Y . Dans le cas général, si on continuait de définir la période de retour en termes de probabilité jointe

$$T = \frac{1}{1 - P'(X,Y)},$$

Avec $P(X,Y) = \text{prob}(X < x, Y < y)$, alors, la période de retour n'est plus définie de façon univoque, mais varie selon les valeurs de x et y . Une fois que l'on a constaté le problème, on a deux choix :

- soit travailler avec des probabilités marginales

$$T = \frac{1}{1 - P'(X)},$$

- ou avec des probabilités conditionnelles

$$T = \frac{1}{1 - P'(X|Y)},$$

- soit considérer qu'on a, d'une façon ou d'une autre, une relation étroite entre X et Y , donc si l'on connaît X , on connaît Y : $X = f(Y)$. On se ramène donc à un processus à une variable.

Pour les crues/inondations de plaine, les efforts des hydrologues ont porté sur la construction d'hydrogramme de crue synthétique (donc des constructions intellectuelles), qui lie volume de crue et débit. Pour l'application de la méthode en France, on trouvera une littérature abondante du Cemagref (Gilard, 1998; Lang & Lavabre, 2007). Pour la Suisse, on peut se référer utilement au guide de Manfred Spreafico (en ligne sur le site BUWAL) (Spreafico *et al.*, 2003), qui éclaire bien les différentes approches et leur applicabilité selon le contexte, et aux guides de l'Office fédéral de l'environnement pour les recommandations quant à la mise en pratique pour le zonage réglementaire (Loat & Petrascheck, 1997). En gros, si on connaît le débit de pointe, on peut construire un hydrogramme caractéristique qui représente en moyenne les crues; à cet hydrogramme de référence ne correspond qu'un volume de crue. Connaissant l'hydrogramme, on peut se servir des lois de l'hydraulique pour déduire les hauteurs d'eau ou les vitesses d'écoulement. Comme au final, on n'a qu'une variable (le débit de pointe) dont toutes les autres dérivent, on n'a en fait affaire qu'à un processus à une variable. L'approche est pertinente tant que les hypothèses du modèle sont valables (ce qui reste toujours à vérifier quand on en a la possibilité). Jusqu'à présent, l'expérience de milliers d'ingénieurs et d'universitaires dans le monde a montré une certaine robustesse de l'approche, même si naturellement elle est loin d'être parfaite. On notera aussi que la comparaison sur différents pays montre des variations méthodologiques importantes même si les principes fondateurs sont souvent les mêmes.

2.3.4 Cas des barrages

Pour d'autres phénomènes hydrologiques, tels que les crues qui menacent les grands barrages (dimensionnement des évacuateurs de crue), il a fallu obtenir des définitions opérationnelles de la crue de projet – une crue de très grande période de retour (1000 à 10 000 ans) – qui diffèrent notablement des autres méthodes (on doit à ces réflexions sur la sécurité des grands barrages la notion de courbe enveloppe, la méthode du gradex, le concept de pluie maximale probable, etc.). Pour l'anecdote, citons Jean Francou et Jean Rodier (Francou & Rodier, 1967):

« Avant qu'il ne fut question de Kariba, quelques hommes de chantier, apparemment philosophes autant qu'ingénieurs, s'étaient déjà donné de la crue millénaire une définition assez impertinente : c'est la crue qui a de bonnes chances d'intervenir au cours des deux années les plus critiques de la construction d'un barrage . »

2.4 Estimation du débit par corrélation

2.4.1 Méthode Crupédix

La méthode Crupédix est une formule qui permet d'évaluer le débit de pointe de période de retour $T = 10$ ans. La formule a été obtenue à partir d'une analyse statistique sur 630 bassins-versants documentés français dont la taille variait entre 1,4 et 52 000 km² :

$$Q_{crup.} = \hat{Q}_{p,10} = RS^{0,8} \left(\frac{P_{j,10}}{80} \right)^2 \quad [\text{m}^3/\text{s}],$$

avec S la surface du bassin-versant en km², $P_{j,10}$ la pluie journalière décennale (en mm), et R un coefficient régional qui vaut $R = 1$ partout en France sauf sur le Massif Central, les Pyrénées, le Languedoc-Roussillon, le bassin de la Seine et de la Meuse, la Vendée et une partie de l'Aquitaine.

Selon Galéa & Ramez (1995), il y a seulement une probabilité de 70 % que le vrai débit se situe entre $\frac{1}{2}Q_{crup.}$ et $2Q_{crup.}$

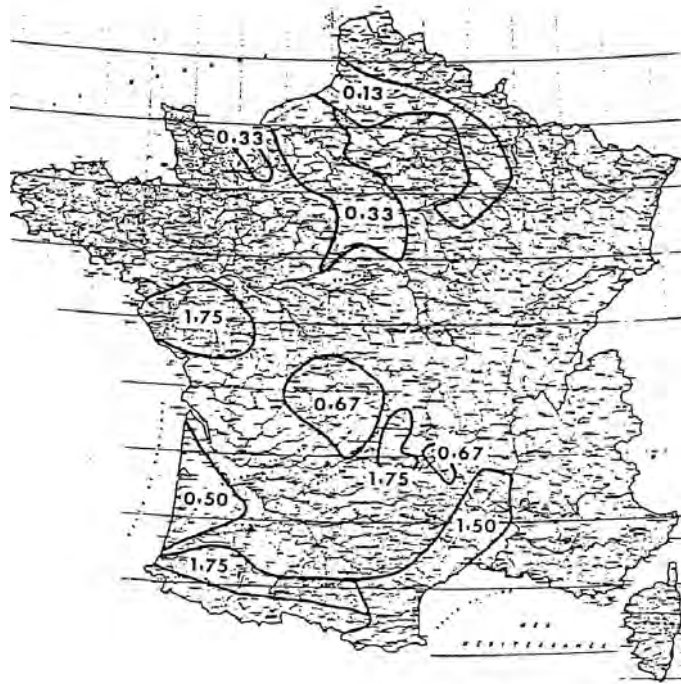


Figure 2.13 : valeur du paramètre R dans la méthode Crupédix.

2.4.2 Courbe enveloppe

Plusieurs formules empiriques ont été calées en corrélant (par régression linéaire) le débit de pointe mesuré/estimé et la superficie d'un bassin versant sous la forme d'une loi puissance

$$Q_p = aS^b \quad (2.3)$$

avec Q_p le débit de pointe (en m³/cube/s), S la superficie (en km²), a et b sont deux paramètres qui dépendent du contexte hydrologique. On parle de courbe enveloppe car en général, ces courbes cherchent à fournir une borne maximale des débits de pointe. La figure 2.14 montre des courbes enveloppes de crues éclair pour différentes régions en Europe. Le tableau 2.5 fournit les valeurs de a et b de l'équation (2.3) pour des crues éclair en Europe, en France, dans le monde, et en Suisse. Le tableau 2.6 donnent ces valeurs pour des crues sur différents bassins-versant suisses. Une courbe enveloppe d'équation un peu plus complexe que la loi puissance (2.3) a été ajustée sur des données de crue issues de plusieurs bassins-versants dans le monde :

$$Q_p = \frac{3009,2}{(S + 41,31)^{0,78}} S,$$

avec Q_p le débit de pointe (en m³/cube/s), S la superficie (en km²) (Hingray *et al.*, 2009).

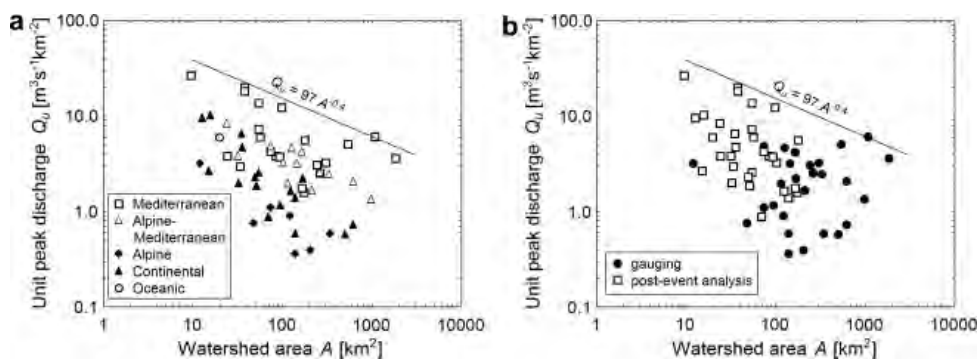


Figure 2.14 : variation du débit spécifique (de pointe) en fonction de la superficie du bassin versant, avec (a) selon la localisation du bassin versant et (b) la nature de la mesure. D'après (Marchi *et al.*, 2010).

Tableau 2.5 : valeurs des coefficients a et b selon le contexte météorologique.

Zone géographique	a	b	S	T	Source
Gard	30	0,75	20 à 400 km ²	$T = 100$	(Lang & Lavabre, 2007)
Monde	350	0,6	$S \leq 10^4$ km ²	rare ^a	(Gaume <i>et al.</i> , 2009)
Méditerranée	97	0,6	1 à 10 ⁴ km ²	rare	(Gaume <i>et al.</i> , 2009)
Europe	230	0,43	1 à 10 ⁴ km ²	rare	(Marchi <i>et al.</i> , 2010)
Monde	850	0,357	$S \geq 100$ km ²	extrême ^b	(Marchi <i>et al.</i> , 2010)
Zone océanique ^c	4,05	0,72	1 à 10 ⁴ km ²	$T \sim 1000$ ans	(Lang & Lavabre, 2007)
Zone de piedmont ^d	7,4	0,72	1 à 10 ⁴ km ²	$T \sim 1000$ ans	(Lang & Lavabre, 2007)
Zone méditerranéenne ^e	16,4	0,72	1 à 10 ⁴ km ²	$T \sim 1000$ ans	(Lang & Lavabre, 2007)
Suisse	c^f	0,66	10 à 500 km ²	$T = 100$ ans	(Spreatico <i>et al.</i> , 2003)
Suisse	7,2	0,566	1 à 10 ⁴ km ²	$T = 100$ ans	(Spreatico <i>et al.</i> , 2003)

^a Rare ici veut dire que la période de retour est dans une fourchette $T = 100 - 1000$ ans.

^b Extrême ici veut dire que la crue était exceptionnelle et correspondait à la plus grosse crue connue.

^c Bassin de la Loire, Bretagne, Saône, Moselle.

^d Pyrénées, Préalpes, Dordogne, Pyrénées centrales et occidentales, Aude, Ariège, Drôme.

^e Alpes maritimes, Corse, Cévennes, Tarn, Ardèche, Haute-Loire, Pyrénées orientales.

^f Pour des terrains relativement plats, bordés de collines peu élevées, on a $c = 2,5 - 4$. Pour des terrains vallonnés, on a $c = 4 - 6$. Pour des terrains vallonnés des Préalpes, on a $c = 6 - 9$. Pour des bassins-versants à forte pente, on a $c = 9 - 12$ sauf en zone glaciaire ($c = 3 - 5$)

Tableau 2.6 : valeurs des coefficients a et b pour calculer le débit de pointe centennal selon les régions en Suisse. Adapté de (Spreatico *et al.*, 2003).

Région	a	b
Jura, Neuchâtel	1,44	0,73
Jura bernois	5,98	0,59
Saint Gall, Thurgovie	2,65	0,61
Zürich	7,86	0,58
Argovie, Bâle	0,68	0,79
Alpes vaudoises	7,18	0,60
Berne	17,66	0,54
Mont-Blanc, Valais oriental	4,36	0,64
Valais central	1,3	0,74
Oberland oriental	1,4	0,78
Tessin oriental	0,83	0,58
Tessin occidental	12,41	0,69
Grisons orientales	0,9	0,83
Grisons occidentales	4,41	0,74

2.5 Estimation du débit par la méthode du gradex

2.5.1 Méthode du gradex

La méthode du gradex a été proposée à la fin des années 1960 par Pierre Guillot et Daniel Duband (EDF) (Guillot & Duband, 1967). Le principe de la méthode est très simple, ce qui explique son large succès et sa popularité. Cette méthode se fonde sur les observations suivantes :

- la plupart des pluies maximales annuelles sont distribuées selon une loi exponentielle ou une loi de Gumbel. Ainsi deux pluies extrêmes P_1 et P_2 de période de retour respective T_1 et T_2 vérifient la relation

$$P_2 - P_1 = G \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad (2.4)$$

avec $G > 0$ un coefficient exprimé en mm (si les pluies en mm) et appelé le *gradex* des pluies ;

- l'infiltration dans le sol diminue au cours du temps du fait de la saturation progressive du sol. Lorsque le sol est saturé, toute l'eau qui continue de précipiter ruisselle au sol. Cette eau ruisselée participe directement au volume de crue ;
- lorsque le sol est saturé, tout surcroît de pluie pendant une durée égale au temps de concentration t_c se transforme intégralement en un surcroît de débit sur une durée à peu près égale à t_c (à 10–20 % près).

De ces observations, on admet l'hypothèse du gradex : la courbe intensité-fréquence des pluies de durée t_c est parallèle à la courbe intensité-fréquence du débit. En conséquence, lorsque sur un bassin-versant on dispose de données de pluie sur une période suffisamment longue (quelques dizaines d'années), on peut estimer les débits extrêmes en considérant que le gradex des débits G_q (en m^3/s) équivaut à celui des pluies G_p (en mm) lorsqu'on les exprime dans la même unité, c'est-à-dire

$$G_q = \frac{S}{3,6t_c} G_p, \quad (2.5)$$

avec S la superficie du bassin-versant en km^2 , t_c le temps de concentration en h , 3,6 un facteur de conversion des unités. On se sert du temps de concentration t_c comme durée caractéristique car c'est la durée optimale de pluie : en effet, une pluie de durée $d < t_c$, l'intensité de pluie (rappelons la loi de Montana $I_m = ad^{-b}$) est supérieure à l'intensité I_c associée au temps t_c ($I_c = at_c^{-b}$), mais seule une partie du bassin-versant contribue à la crue (puisque toutes les gouttes d'eau n'ont pas pu atteindre l'exutoire) et donc le début résultant est plus petit que le débit Q_c généré par une pluie de durée t_c . Lorsque $d > t_c$, tout le bassin-versant contribue, mais l'intensité moyenne associée est plus faible, donc le débit résultant est aussi plus faible.

Le temps de concentration est le plus souvent estimé à l'aide de formules empiriques. En théorie, il est défini comme le temps maximal que met une goutte pour parcourir tout le bassin-versant jusqu'à l'exutoire de ce bassin. Dans les modèles hydrologiques, le temps de concentration est souvent compris comme le temps entre la fin de la pluie nette et la fin du ruissellement direct. En pratique, c'est une grandeur difficile à évaluer. Il existe plusieurs formules d'usage courant, certaines relativement vieilles comme la formule de Kirpich qui date de 1940 et a été élaborée à la suite des crues qui ont frappé le nord-est des États-Unis en 1936 (Folmar *et al.*, 2007); les données ayant servi à l'élaboration de ces formules sont souvent indisponibles et il convient d'être particulièrement méfiant dans l'utilisation des formules empiriques. Des différences d'un ordre de grandeur entre les formules ne sont pas rares. Il faut en général choisir la formule qui correspond le mieux au type de bassin-versant analysé. Parmi les formules classiques et très générales (donc souvent très approximatives), on peut citer :

- formule de Turraza

$$t_c = 0,108 \frac{\sqrt[3]{SL}}{\sqrt{i_m}} \quad (2.6)$$

- t_c : temps de concentration en h ;
- S : surface du bassin-versant en km^2 ;
- L : longueur du chemin hydraulique le plus long en km ;
- i_m : pente moyenne pondérée le long du thalweg en % définie comme

$$\frac{1}{\sqrt{i_m}} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n \frac{\ell_k}{\sqrt{i_k}},$$

avec ℓ_k la longueur du k^{e} tronçon du thalweg, de pente i_k .

- Formule de Kirpich

$$t_c = 19,47 \times 10^{-3} \frac{L^{0,77}}{i^{0,385}}$$

- t_c : temps de concentration en mn ;
- L : longueur du chemin hydraulique en m ;
- i : pente moyenne du cours d'eau en %.

En se servant de la relation (2.4) et en considérant que la période de retour pour laquelle on observe la saturation du sol est $T = 10$ ans, on aboutit à une approximation dite du gradex de la loi intensité-fréquence pour les débits

$$Q = Q_{10} + G_q \ln \frac{T}{10}, \quad (2.7)$$

avec Q_{10} le débit de pointe décennal.

Dans cette méthode, le débit décennal Q_{10} et le temps de concentration doivent être estimés indépendamment. Des variations de cette méthode ont été proposées. En particulier, la « formulation esthétique » lisse la transition entre les régimes des crues

ordinaires et des crues extrêmes. Plus récemment, la prise en compte du type de conditions météorologiques a permis d'améliorer la performance de cette méthode (Paquet *et al.*, 2006).

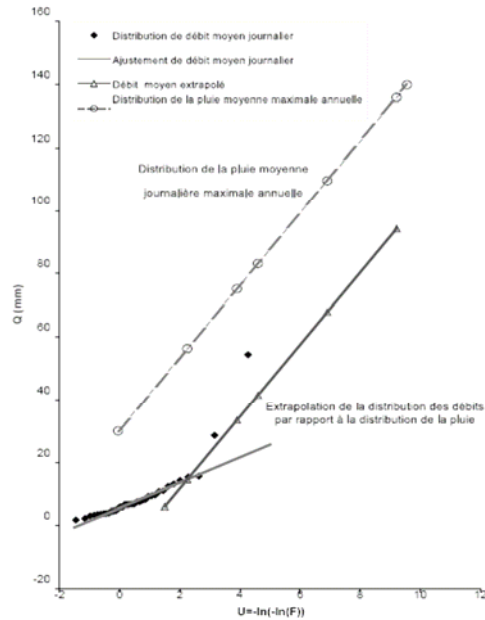


Figure 2.15 : extrapolation de la distribution des débits moyens journaliers max. annuels par la distribution des pluies journalières maximales annuelles. D'après (Djeboua *et al.*, 2004).

2.5.2 Méthode QdF

La méthode QdF est une méthode développée par Prudhomme, Galéa, et Javelle au Cemagref de Lyon (France), qui permet de donner une relation intensité-fréquence pour le débit en fonction du débit décennal (qui doit être connu ou bien évalué par ailleurs), de la superficie du bassin-versant, du gradex des pluies, et du type de réponse du bassin-versant.

Principe

Il y a trois idées de base :

1. L'idée fondamentale de la méthode QdF est qu'on peut étudier les hydrogrammes de crue en les caractérisant par des débits Q moyens ou bien systématiquement

dépassés sur des durées d variables ; chaque hydrogramme est valable pour une période de retour ou fréquence F donnée. D'où le nom QdF.

2. L'extrapolation des quantiles de débit se fait selon une approche de type gradex : on suppose que la courbe $Q(T)$ varie parallèlement à la courbe des pluies $P(T)$ pour les périodes de retour T suffisamment grandes.
3. Pour une même région, le comportement des bassins-versants est à peu près identique. Il existe une « loi-maitresse » valable régionalement qui permet de représenter la réponse hydrologique des bassins-versants à l'aide d'une seule courbe adimensionnelle. Il existe donc également des « marqueurs » qui permettent d'adimensionnaliser les variables hydrologiques. Ici, on va considérer deux marqueurs ou échelles (durée et débit) D_* et Q_* , qui sont propres à chaque bassin-versant ; le principe de régionalisation affirme que les débits et durées sur un bassin-versant (BV) sans observation peuvent être estimés à partir des débits et durées observées sur un bassin-versant de référence par une simple loi d'homothétie

$$\left(\frac{Q(T, d)}{Q_*} \right)_{\text{BV de réf.}} = \left(\frac{Q(T, d)}{Q_*} \right)_{\text{BV non obs.}},$$

$$\left(\frac{d}{D_*} \right)_{\text{BV de réf.}} = \left(\frac{d}{D_*} \right)_{\text{BV non obs.}}.$$

Sélection d'un modèle

Pour la France métropolitaine, il existe trois réponses types de bassin-versant :

- type « Soyans » : le bassin-versant typique est celui du Roubion (Drôme provençale). Il est caractéristique des bassins-versants avec des écoulements rapides et un faible stockage (climat à dominante continentale). Les crues ne durent généralement pas très longtemps ; l'hydrogramme est pointu. Les crues extrêmes ne sont pas en continuité avec les crues ordinaires ;
- type « Florac » : le bassin-versant typique est celui de la Mimente à Florac, dans la partie méridionale des Cévennes (Lozère), donc sous influence climatique méditerranéenne. Ce bassin sert de référence pour des crues rapides, mais avec un stockage ; une partie de l'eau stockée est restituée durant la crue, ce qui allonge la durée de la crue et augmente son volume, sans toutefois accroître le débit de pointe ;
- type « Vandenesse » : le bassin-versant typique est celui de la Dragne (Nièvre, Bourgogne). Les crues sont volumineuses et s'étalent sur des durées longues comme c'est souvent le cas pour régions à dominante océanique.

Pour les régions tempérées hors de France métropolitaine, il est possible d'appliquer la méthode QdF, mais il est vraisemblable qu'il faille choisir d'autres sites de référence.

Selon sa situation et sa taille, les caractéristiques d'un bassin-versant varient d'amont en aval, avec une modification du régime des crues : plus la taille augmente, plus le volume de crue tend à être important et moins l'hydrogramme est pointu. Une même rivière peut générer des crues de type « Soyans » dans la partie supérieure et des crues « Vandenesse » à sa confluence.

La question qui se pose est : parmi ces modèles de référence, quel est le modèle le plus approprié pour décrire un bassin-versant quelconque pour lequel on n'a pas ou peu de données hydrologiques ? La réponse apportée par la méthode QdF est la suivante : on trace la variation du gradex adimensionnel $\Gamma = \hat{G}_p/Q_{10}$ des pluies en fonction de la durée η (adimensionnelle) de la pluie et on compare cette courbe avec les courbes limites séparant les domaines Soyans, Florac, et Vandenesse. Ces courbes limites sont au nombre de deux

$$L_1(\eta) = \frac{1}{0,768\eta + 2,332}, \quad (2.8)$$

$$L_2(\eta) = \frac{1}{0,419\eta + 1,580}, \quad (2.9)$$

avec $\eta = d/D_*$. En pratique, on considère des durées de pluie allant de $\frac{1}{2}D_*$ à $5D_*$; on calcule le gradex G_p des pluies associées à ces durées et à l'aide de l'équation (2.12), on exprime ces gradex de pluie en gradex de débit et on les norme en les divisant par Q_{10} pour obtenir $\Gamma = \hat{G}_p/Q_{10}$. On reporte ensuite les couples (η, Γ) .

♣ **Exemple.** – Sur un petit bassin-versant du Chablais, d'une superficie de 2 km², l'étude des pluies a donné les estimations suivantes du gradex des pluies : $G_p = 3,7$ mm pour $d = 1$ h, 4,8 mm pour $d = 2$ h, 5,5 mm pour $d = 3$ h, 7,0 mm pour $d = 6$ h, 8,9 mm pour $d = 12$ h, 11,4 mm pour $d = 24$ h. Une estimation empirique du débit décennal donne $Q_{10} = 3$ m³/s et une durée spécifique $d_s = 1$ h. On pose $D_* = d_s$; le gradex des pluies est transformé en gradex de débit à l'aide de la relation (2.12). Cela fournit $\hat{G}_p(d = 1) = 2,05$ m³/s, $\hat{G}_p(d = 2) = 1,33$ m³/s, $\hat{G}_p(d = 3) = 1,02$ m³/s, $\hat{G}_p(d = 6) = 0,65$ m³/s, $\hat{G}_p(d = 12) = 0,41$ m³/s, et $\hat{G}_p(d = 24) = 0,26$ m³/s. On forme ensuite la suite (η_i, Γ_i) , avec $\eta_i = d_i/D_*$ et $\Gamma_i = \hat{G}_p/Q_{10}$, où $d_i = 1, 2, 3, 6, 12, \text{ et } 24$ h. On reporte sur la figure 2.16 la courbe empirique $\Gamma = \Gamma(\eta)$ et les limites entre les comportements de type Soyans, Vandenesse, et Florac. On note qu'aux temps courts ($\eta < 2$), le comportement est de type Soyans, mais qu'aux temps longs ($\eta > 2$) le comportement se rapproche de celui de Florac, voire Vandenesse. Comme on se situe dans un contexte de petit bassin-versant de montagne, caractérisé par des crues rapides et brèves, le comportement retenu est de type Soyans.

Loi débit-fréquence

La loi débit-fréquence est fondée sur la méthode du gradex dans sa version dite « formulation esthétique ». Le quantile de débit suit une loi de Gumbel pour les petites

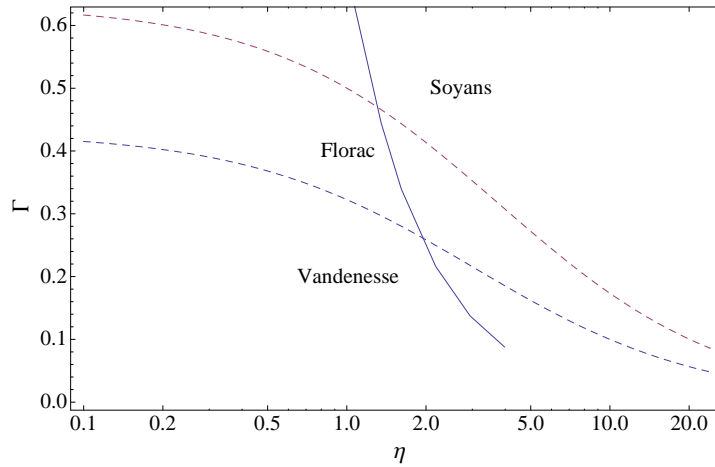


Figure 2.16 : variation de Γ en fonction de η pour le Chablais. La courbe continue représente la courbe empirique $\Gamma = \Gamma(\eta)$ pour un poste du Chablais – simple interpolation linéaire des points (η_i, Γ_i) – et les courbes à tiret représentent les courbes L_1 et L_2 .

périodes de retour ($T \leq 20$ ans), puis la « formulation esthétique » (pour $20 \leq T \leq 1000$):

$$\frac{Q(T, d)}{Q_*} = A(\eta) \ln T + B(\eta) \text{ pour } 0,5 \leq T \leq 20 \text{ ans,} \quad (2.10)$$

$$\frac{Q(T, d) - Q(10, d)}{Q_*} = C(\eta) \ln \left(1 + \frac{A(\eta) T - 10}{C(\eta) 10} \right) \text{ pour } 20 \leq T \leq 1000 \text{ ans,} \quad (2.11)$$

où $Q(10, d)$ est le débit décennal obtenu à l'aide de l'équation (2.10). Les fonctions A , B , et C sont de la forme $f(\eta)$ avec

$$f(\eta) = \frac{1}{\alpha_1 \eta + \alpha_2} + \alpha_3.$$

Les lois (2.10–2.11) sont valables aussi bien pour des débits moyens $Q_m(d)$ ou des débits seuils $Q_s(d)$. Les paramètres des lois changent selon le type de variable employée. Les tableaux 2.5.2 et 2.5.2 fournissent les valeurs des paramètres selon que, respectivement, l'on opte pour un débit moyen Q_m ou un débit seuil Q_s .

Hydrogramme synthétique

La formulation QdF en termes de débit seuil permet d'obtenir un hydrogramme de crue synthétique. Cet hydrogramme est par ailleurs consistant avec les quantiles de

Tableau 2.7 : valeurs des coefficients α_i pour les fonctions A , B , et C lorsqu'on cherche à calculer le débit moyenné sur une période d .

Modèle	A			B			C		
	α_1	α_2	α_3	α_1	α_2	α_3	α_1	α_2	α_3
Soyans	0,87	4,60	0	1,07	2,50	0,099	0,569	0,690	0,046
Florac	1,12	3,56	0	0,95	3,18	0,039	1,56	1,91	0,085
Vandenesse	2,635	6,19	0,016	1,045	2,385	0,172	1,083	1,75	0

Tableau 2.8 : valeurs des coefficients α_i pour les fonctions A , B , et C lorsqu'on cherche à calculer le débit seuil sur une période d .

Modèle	A			B			C		
	α_1	α_2	α_3	α_1	α_2	α_3	α_1	α_2	α_3
Soyans	2,57	4,86	0	2,10	2,10	0,050	1,49	0,660	0,017
Florac	3,05	3,53	0	2,13	2,96	0,010	2,78	1,77	0,040
Vandenesse	3,970	6,48	0,010	1,910	1,910	0,097	3,674	1,774	0,013

débit moyen Q_m . L'hydrogramme pour une crue de période de retour T est défini par :

- $t < d_s$, une courbe (droite) de montée: $Q = Q_m t / d_s$. Il y a une augmentation linéaire du débit Q jusqu'au temps $t = d_s$ où le débit atteint le débit de pointe Q_p ;
- $t = d_s$, un débit de pointe: $Q_p = Q_m(T, d_p)$. C'est le débit moyen instantané, donc un débit observé sur une durée $d_p = 1 \text{ s} = 0,0003 \text{ h}$;
- $t > d_s$, une courbe de décrue: $Q = Q_s(T, d)$. Le débit à l'instant t se calcule à partir du débit seuil dépassé sur une durée $d = t - d_s Q / d_m$.

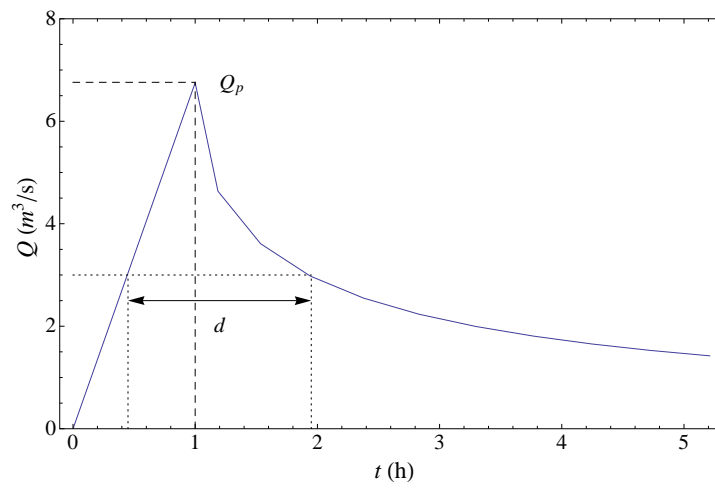


Figure 2.17 : principe de formation de l'hydrogramme.

2.6 Estimation du débit par des méthodes de transformation pluie-débit

Les débits dans les rivières sont souvent des données peu disponibles : hormis pour certaines grandes villes ou bien pour des sites avec un intérêt hydroélectrique, il y a peu de postes de mesures installés. Comme par ailleurs les débits peuvent varier de façon substantielle le long des cours d'eau en fonction des apports par les affluents et que les séries de données sont souvent courtes, il reste difficile d'estimer les quantiles de débit en un point donné d'un cours d'eau. Il est dès lors très tentant de contourner cette difficulté en cherchant à relier les débits aux pluies qui sont censées les générer. En effet, les pluies sont mieux connues, plus faciles à mesurer ; leur distribution spatiale est un peu mieux appréhendée que les débits et leur distribution temporelle se prête bien à une analyse statistique de type théorie des valeurs extrêmes. Très tôt les hydrologues ont donc cherché à développer des modèles de transformation pluie-débit qui visent à reproduire la génération d'une crue à partir de la pluie. Nous allons passer en revue quelques-uns des modèles les plus connus

Comme toute simplification de la réalité, ce type de modélisation est limité par

- la complexité des interactions entre le sol, l'atmosphère, et l'eau ;
- le nombre de paramètres conceptuels qui sont introduits et qui rendent difficile les procédures de calage.

Il y a en général deux sous-modèles dans un modèle de transformation pluie-débit :

- un module de passage de la pluie brute (pluie précipitée) à la pluie efficace (pluie participant à la crue). Cette transformation nécessite de connaître les pertes dues à l'interception par les végétaux, la rétention dans le sol, le ruissellement direct, etc. ;
- un module de transformation de la pluie efficace en volume de crue. Cette transformation nécessite de modéliser les différents processus de ruissellement, drainage, et écoulement dans le cours d'eau jusqu'à l'exutoire.

Les différentes transformations sont basées sur des représentations le plus souvent conceptuelles du fonctionnement du bassin-versant, avec parfois une approximation physique du comportement réel.

Nous commençons par décrire une méthode très simple dite « méthode rationnelle », qui a été utilisée dès la moitié du XIX^e siècle. Ce modèle calcule le débit de pointe à partir du volume d'eau précipité et d'un temps caractéristique (temps de concentration). Nous voyons ensuite deux méthodes un peu plus élaborées : le modèle SCS et sa variante française SoCoSe. Ces méthodes calculent le débit à partir du volume d'eau ruisselé, c'est-à-dire le volume d'eau précipité auquel on a retranché l'eau interceptée par la végétation et l'eau infiltrée dans le sol. Nous décrivons ensuite un modèle conceptuel un peu plus complexe, où le sol est modélisé comme un réservoir. Avec ce type de

modèles, on entre véritablement dans le domaine des outils utilisables aussi bien pour la prévision de crues que dans les calculs hydrauliques. Un modèle comme le modèle suédois HBV (hydrologiska byrans vattenbalansavdelning) est par exemple utilisé en Suisse pour la prévision des crues sur le Rhin jusqu'à Bâle.

Notons que nous ne parlerons pas ici des modèles spatialement distribués, qui affinent la description des crues en scindant le bassin-versant en plusieurs unités hydrologiquement homogènes. Le modèle TOPMODEL développé par Beven et Kirby est l'un des plus connus. La classe de modèles ORAGE, SOCONT, puis MINERVE a été développée à l'EPFL pour décrire des crues sur des bassins-versants alpins (Bérod, 1994; Jordan, 2007). Ces modèles tiennent compte d'une multitude de processus hydrologiques pour évaluer l'apport des précipitations et leur effet sur la génération d'une crue: infiltration, évaporation, interception par les végétaux, fusion de la neige et des glaciers. Le débit drainé par une parcelle du bassin-versant est ensuite évacué par un cours d'eau; on parle de routage de crue (flood routing). On peut alors utiliser des outils de calcul hydraulique tels que les équations de Saint-Venant. Ce type de procédures sort du cadre de ce cours, mais le lecteur peut se référer au cours d'hydraulique ainsi qu'à des livres spécialisés (Brutsaert, 2005).

2.6.1 Méthode rationnelle

La méthode la plus ancienne d'estimation du débit de pointe à partir des pluies est appelée méthode rationnelle. La pluie est supposée d'intensité i_p constante sur une durée $t = t_c$ et le volume de crue est proportionnel au volume de pluie. La réponse en débit est un hydrogramme triangulaire, de durée $2t_c$ et de débit de pointe Q_p . Le volume de pluie est $V_p = t_c i_p S$. Le volume de crue est

$$V_c = 2 \times \frac{1}{2} Q_p t_c,$$

avec S la surface du bassin-versant. On suppose que le coefficient de proportionnalité est C ($0 < C \leq 1$), appelé encore coefficient de ruissellement de pointe. De l'égalité $V_c = C V_p$, on tire

$$Q_p = C i_p S.$$

Notons que i_p est généralement exprimé en mm/h alors que Q_p est en m^3/s . Pour que la formule précédente soit dans ces unités, on modifie la formule de la façon suivante

$$Q_p = \frac{C i_p S}{3,6} \text{ [m}^3/\text{s]}.$$

Variables hydrologiques employées

Pour faire les calculs d'hydrogramme, on ne sert pas du débit instantané $Q(t)$ car il y a trop d'informations. À la place, on suppose que tout hydrogramme peut se présenter

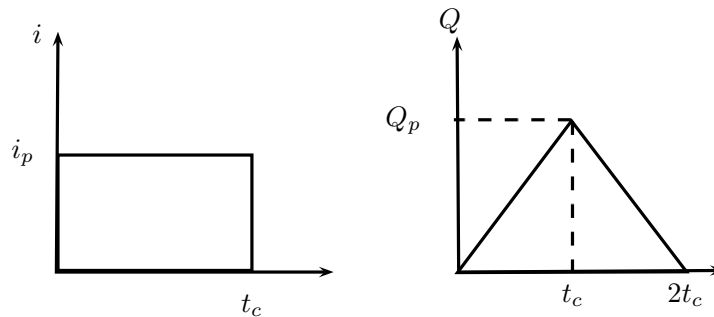


Figure 2.18 : principe de transformation pluie-débit dans la méthode rationnelle.

Tableau 2.9 : quelques valeurs guides de C selon l'occupation du sol.

Type de surface	C
zone urbanisée	0,7–0,95
zone résidentielle	
lâche	0,3–0,5
dense	0,5–0,75
parcs	0,1–0,2
pelouse	
terrain meuble, peu pentu ($i < 2\%$)	0,05–0,2
terrain peu perméable et pentu ($i > 5\%$)	0,15–0,25

sous la forme d'un hydrogramme synthétique de crue, avec une courbe montante et une courbe descendante (décrué), appelé encore hydrogramme mono-fréquence car il n'y a qu'un seul pic de crue. On introduit deux variables qui permettent de réduire l'information nécessaire (voir figure 2.19):

- le débit seuil $Q_s(d)$ de durée d est la plus grande valeur de débit qui est systématiquement dépassée au cours d'une durée d de la crue. La forme supposée de l'hydrogramme fait que la relation $Q_s(d)$ est unique et continue;
- le débit moyen $Q_m(d)$ de durée d est la valeur moyenne du débit sur une durée d .

Pour un pays au climat tempéré comme la France, on considère deux échelles de débit et de temps, qui sont appelées marqueurs :

- $Q_* = Q_{10}$ le débit de pointe instantané de la crue décennale. Ce débit sert à séparer les débits ordinaires correspondant aux petites crues fréquentes et les débits plus importants;
- l'échelle de temps (durée) D_* peut être définie comme le temps de concentration t_c (voir équation (2.6) p. ex.) ou bien la durée spécifique d_s (voir équation (2.17) p. ex.). L'avantage de d_s est que c'est une donnée mesurable alors que t_c reste

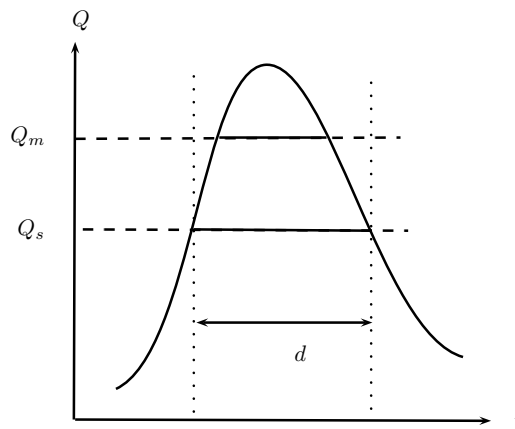


Figure 2.19 : définition du débit seuil Q_s (débit systématiquement dépassé pendant une durée) et du débit moyen Q_m .

une variable plus conceptuelle.

Dans les deux cas, il faut utiliser des formules empiriques pour déterminer les « marqueurs ». Par exemple, la méthode Crupédix peut donner un ordre de grandeur de Q_{10} , tandis que la méthode Socose (voir § 2.6.3) peut fournir une estimation de d_s .

Les autres données du problème peuvent s'exprimer en unités de temps ou de débit. Par exemple, quand on utilise le gradex des pluies pour différentes durées d , on peut le transformer en gradex adimensionnel de la façon suivante : tout d'abord, on transforme les unités de mm en m^3/s à l'aide de la relation

$$\hat{G}_p [\text{m}^3/\text{s}] = \frac{S}{3,6d} G_p [\text{mm}], \quad (2.12)$$

avec S la surface du bassin-versant exprimée en km^2 et d la durée de la pluie en h .

2.6.2 Méthode SCS

Cette méthode a été développée au cours des années 1960 au Soil Conservation Service (SCS) de l'United States Forest Administration (USFA), ce qui explique son nom. Elle s'applique pour les petits bassins-versants en milieu rural, sans observations.

Elle repose sur les quatre hypothèses suivantes :

- lorsque la pluie tombe, une partie est interceptée par la végétation. Il faut transformer la pluie brute P_b en pluie utile P_u

$$P_u = P_b - I, \quad (2.13)$$

où I est l'interception par la végétation (en mm).

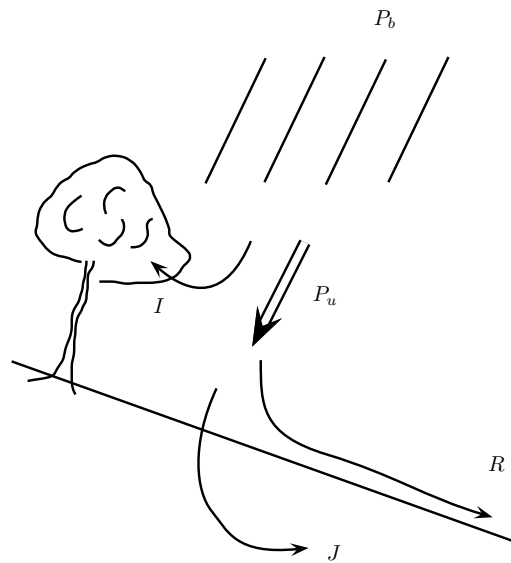


Figure 2.20 : schéma de la méthode SCS.

- la pluie qui atteint le sol participe au ruissellement $R(t)$ et à l'infiltration $J(t)$

$$P_u = R + J. \quad (2.14)$$

- Le rapport entre l'eau ruisselée (R) et l'eau précipitée (P_u) est égal au rapport entre la quantité d'eau $J(t)$ infiltrée au temps t et la quantité maximale d'eau J_∞ que le sol peut recevoir quand il y a saturation

$$\frac{R(t)}{P_u} = \frac{J(t)}{J_\infty}. \quad (2.15)$$

Cette hypothèse très forte peut être démontrée dans le cas où la saturation dans le sol au cours du temps suit une loi de Horton (variation exponentielle de l'intensité d'infiltration) (Yu, 1998).

- l'interception par la végétation est indépendante de la pluie utile et est liée à la capacité maximale d'infiltration

$$I = 0,2J_\infty. \quad (2.16)$$

C'est une loi empirique tirée des observations.

En combinant les équations (2.13) à (2.15), puis en servant de la relation empirique (2.16), on tire la relation

$$\frac{R}{P_u} = \frac{P_u}{P_u + J_\infty}.$$

De là, on déduit que la quantité d'eau ruisselée vaut

$$R = \frac{P_u^2}{P_u + J_\infty} = \frac{(P_b - 0,2J_\infty)^2}{P_b + 0,8J_\infty}.$$

Dans ce modèle, la quantité d'eau ruisselée dépend de façon non linéaire de la quantité de pluie reçue P_b ; la relation est aussi fonction d'un seul paramètre (capacité maximale d'infiltration du sol) J_∞ qui doit être calé (voir ci-dessous).

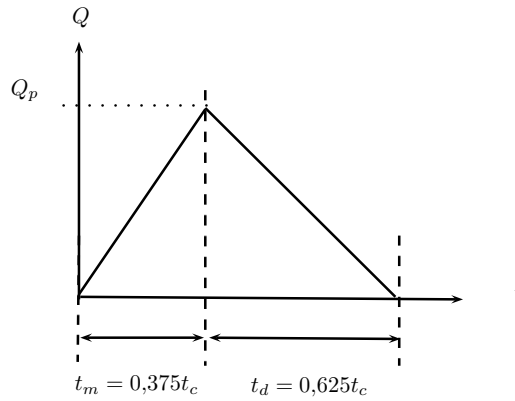


Figure 2.21 : hydrogramme de crue dans la méthode SCS.

Cette pluie brute génère une crue, dont le débit de pointe peut être estimé en considérant un hydrogramme triangulaire (voir figure 2.21). Le volume de crue étant R , on déduit que si t_c est le temps de concentration, t_m le temps de montée (estimé ici à $t_m = 0,375t_c$), on déduit

$$Q_p = 2 \frac{SR}{3,6t_c} \approx 0,2 \frac{SR}{t_m} \text{ [m}^3\text{/s]},$$

avec S la surface du bassin-versant en km^2 , t_c le temps de montée en h . Rappelons que le facteur 3,6 provient de la conversion des unités en $\text{m}^3\text{/s}$. Le temps de concentration doit être estimé indépendamment.

Reste à évaluer le seul paramètre du modèle, qui est la capacité maximale d'infiltration du sol) J_∞ . Ce paramètre dépend de l'état d'humidité dans le sol et du type d'occupation des sols. Le bassin-versant doit être subdivisé en parcelles de surface S_i à interception J_i homogène. L'interception moyenne du bassin-versant est alors calculée par une moyenne pondérée

$$\frac{J_\infty}{S} = \sum_i \frac{J_i}{S_i}.$$

Chaque valeur de J_i est évaluée à partir du coefficient de ruissellement C_n

$$J_i = 25,4 \left(\frac{1000}{C_n} - 10 \right).$$

Tableau 2.10 : quelques valeurs guides de C_n selon le type de sol et la densité de la végétation. Sol A: sol sablonneux (très perméable); sol B: sol sableux ou limoneux (perméable); sol C: sol argileux à limoneux (peu perméable); sol D: sol argileux (très peu perméable). D'après (Ponce, 1994).

culture	végétation	sol A	sol B	sol C	sol D
jachère		77	86	91	94
céréales	lâche	63	74	82	85
	dense	61	73	81	84
légumineuse	lâche	64	75	83	85
	dense	55	69	78	83
prairie		30	58	71	78
bois	lâche	45	66	77	83
	dense	25	55	70	77
pistes, routes		72	82	87	89

2.6.3 Méthode Socose

La méthode Socose est une variante française de la méthode SCS, développée par Claude Michel au Cemagref. Elle a été ajustée sur 5000 crues survenues dans 187 bassins-versants de 2 à 200 km². Par rapport à la méthode SCS, elle introduit les expressions suivantes pour le paramètre de rétention J et la durée spécifique d_s (en remplacement du temps de montée)

$$\ln d_s = -0,69 + 0,32 \ln S + 2,2 \sqrt{\frac{P_a}{P_{10} t_a}}, \quad (2.17)$$

$$J = 260 + 21 \ln \frac{S}{L} - 54 \sqrt{\frac{P_a}{P_{10}}}, \quad (2.18)$$

avec J exprimée en mm, d_s en h, P_a le cumul annuel moyen de précipitations (en mm), P_{10} la pluie maximale journalière décennale (en mm), t_a la température moyenne annuelle réduite au niveau de la mer (en °C), L le chemin hydraulique le plus long jusqu'à l'exutoire, S la surface en km²– avec $S \geq 2$ km²– (voir figure 2.22).

La méthode propose un hyétogramme de projet

$$P(t) = a \left(\frac{t}{\left[\left(\frac{t}{d_s} \right)^2 + 2 \frac{d_s}{t} - 2 \right]^{3/7}} \right)^{1-b}$$

valable pour $0 < t \leq 2d_s$ qui représente la pluie d'intensité maximale. La pluie totale durant l'événement de durée d_s est donc $P(2d_s) = a(1,25d_s)^{1-b}$. Le passage de la pluie locale à la pluie moyenne sur le bassin-versant se fait à l'aide du coefficient

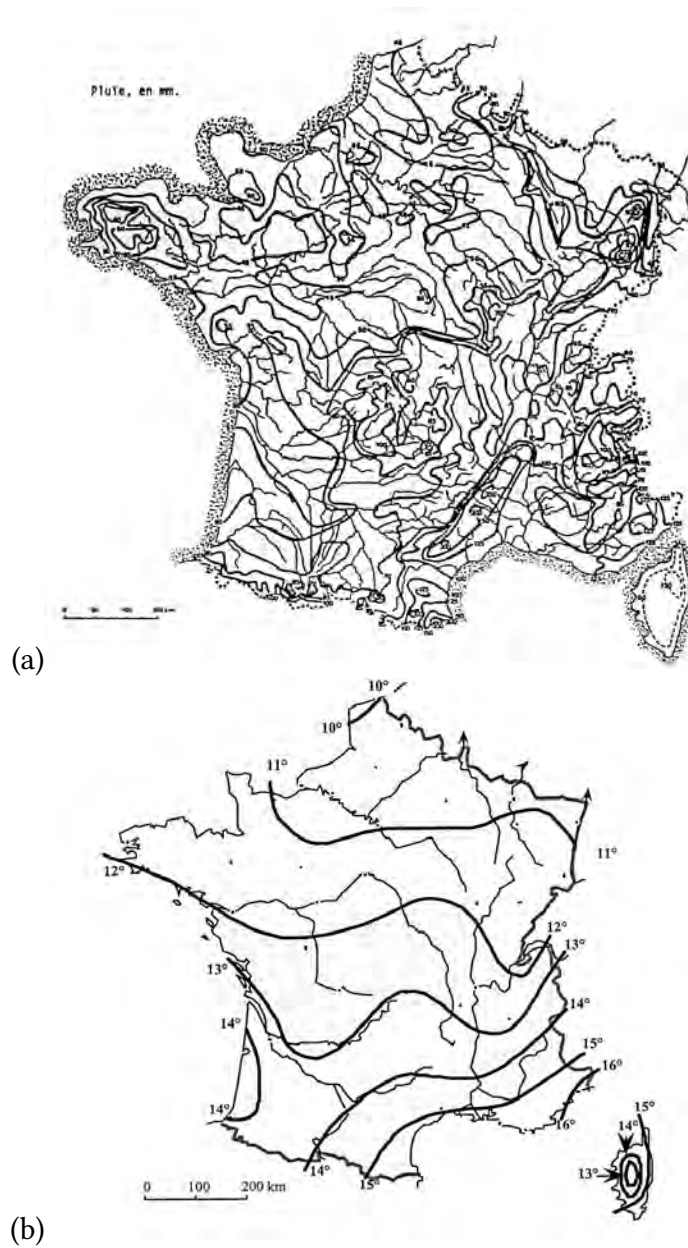


Figure 2.22 : (a) distribution du cumul annuel moyen de précipitations P_a sur la France et (b) distribution des températures moyennes annuelles ramenées au niveau de la mer t_a .

d'épicentrage k_a . La méthode Socose introduit donc un indice k appelé « indice pluvio-

métrique »

$$k = \frac{24^b}{21} \frac{P_{10}}{1 + \frac{\sqrt{S}}{30 \sqrt[3]{d_s}}},$$

avec b le coefficient de Montana ($P = at^{1-b}$). La méthode Socose définit également deux paramètres

$$\rho = 1 - 0,2 \frac{J}{k(1,25d_s)^{1-b}}$$

et ξ est un paramètre proche de 1, qui est déterminé à partir d'une abaque (voir figure 2.23). Le débit de pointe décennal est

$$Q_{10} = \xi \frac{kS}{(1,25d_s)^b} \frac{\rho^2}{15 - 12\rho} \text{ [m}^3\text{/s]}.$$

L'hydrogramme associé à cette méthode a pour équation

$$Q(\tau) = Q_{10} \frac{2\tau^4}{1 + \tau^8},$$

avec $\tau = 2t/(3d_s)$ un temps adimensionnel.

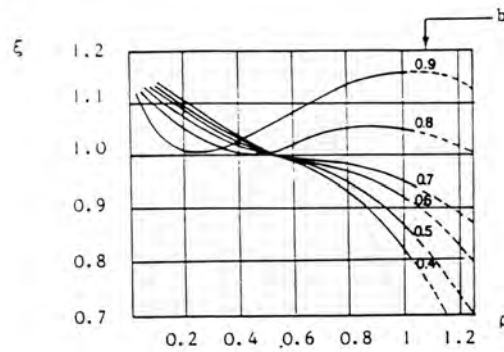


Figure 2.23 : valeur du coefficient ξ en fonction du paramètre ρ et du coefficient de Montana b .

2.6.4 Modèle réservoir GR4

subsectionModèle réservoir GR4

Principe

Les modèles à n réservoirs et p paramètres sont des représentations conceptuelles du fonctionnement d'un bassin-versant qui généralisent le modèle SCS. La principale nouveauté est qu'on considère maintenant que le sol agit comme un réservoir et qu'en conséquence, une partie de l'eau infiltrée est restituée avec un temps de latence au cours d'eau en crue. Nous considérons ici un des modèles qui offre le meilleur compromis entre simplicité et performance (Perrin *et al.*, 2001) : il s'agit d'un modèle à un réservoir et 4 paramètres ; ce modèle est appelé GR4 (pour Génie Rural à 4 paramètres) et fait partie d'une classe de modèles conceptuels de transformation pluie-débit développés par Claude Michel au Cemagref (Rojas-Serna, 2005). Il offre une approximation satisfaisante des petits bassins-versants rapides (Graff, 2004). Il existe plusieurs formulations de ce modèle, qui généralement se distinguent par le pas de temps employé : les modèles de type GR4H à pas de temps horaire pour les crues rapides et les modèles GR4J à pas de temps journalier pour les crues lentes (Perrin *et al.*, 2003; Oudin *et al.*, 2008). Ici, nous ferons une présentation générale indépendante du pas de temps (on emploie donc des équations différentielles au lieu des équations de bilan employées dans les modèles d'ingénierie).

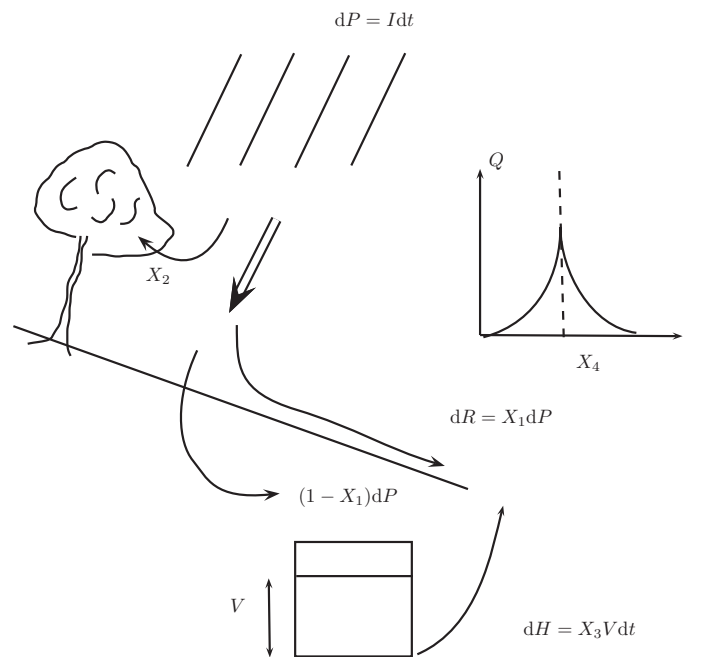


Figure 2.24 : schéma de principe d'un modèle réservoir GR4.

Le modèle prend en compte quatre phénomènes (voir figure 2.24) :

- les pertes initiales (interception par la végétation) sont en général faibles. On les

prend égales à une valeur X_2 (en mm);

- une fois que la capacité d'interception est saturée, il y a ruissellement. La quantité d'eau ruisselée par unité de temps est liée à la pluie précipitée $dP = I(t)dt$

$$dR(t) = X_1 dP, \quad (2.19)$$

avec X_1 un coefficient sans dimension (exprimé en %);

- dans le même temps dt , une partie de l'eau $(1 - X_1)Idt$ est infiltrée et stockée dans un réservoir dont le volume initial est nul $V(0) = 0$; V est un volume par unité de surface, il s'exprime donc en mm. Une partie du volume stocké est restituée par des écoulements hypodermiques au cours d'eau

$$dH(t) = X_3 V(t)dt, \quad (2.20)$$

avec X_3 un taux de vidange linéaire (exprimé en %/h);

- le temps de montée t_m de l'hydrogramme est noté X_4 (en h). On suppose que l'hydrogramme est symétrique, donc $t_d = X_4$. La lame totale d'eau transmise au cours d'eau est $T = R + H$.

Les valeurs moyennes des coefficients X_1 , X_2 , X_3 , et X_4 sont données dans le tableau 2.11.

Tableau 2.11 : valeurs moyennes des coefficients pour les différents bassins-versants. Adapté de (Graff, 2004).

Nom	Surface km ²	Région	X_1 %	X_2 mm	X_3 %/h	X_4 h	R/T %
Groupe 1							
Laval	0,86	Alpes-du-Sud	57,6	7,28	2,4	0,38	91
Erlenbach	0,64	Suisse Centrale	46,5	13,6	16,2	0,63	53
Groupe 2							
Rimbaud	1,5	Alpes-du-Sud	35,4	40	2,28	1,07	57
Latte	0,19	Massif Central	14,4	75,4	3,96	0,78	41
Sapine	0,54	Massif Central	15,7	71,1	0,90	1,03	34
Groupe 3							
Rietholzbach	3,31	Suisse Centrale	26,5	17	2,82	1,11	41
Lumpenbach	0,93	Suisse Centrale	22,6	12,2	9,6	0,5	41
Vogelbach	1,55	Suisse Centrale	31,4	11,5	5,88	0,64	56
Brusquet	1,08	Alpes-du-Sud	13,8	22,4	0,72	1,63	54

Il reste une dernière opération pour passer de la pluie au débit. Sur le plan physique, ce passage est complexe car il implique des processus très différents : ruissellement le long du sol, drainage des sols, propagation d'une intumescence de crue le long d'un cours d'eau à la géométrie plus ou moins complexe (cours d'eau principal et tributaires), etc. Mathématiquement, on remplace tous ces processus par une « boîte noire », qui

permet de relier le débit à la pluie nette par l'intermédiaire d'une *fonction de transfert*. L'idée de base est calquée sur la théorie de la réponse linéaire (Dooge, 1973; Brutsaert, 2005). On peut l'exprimer de la façon suivante : on considère une pluie unitaire de durée infinitésimale (c'est-à-dire la quantité de pluie est de 1 mm et la durée est infiniment petite); dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire, cette impulsion initiale est une fonction de Dirac δ . Cette pluie se produisant à l'instant $t = 0$ génère une crue unitaire, dont l'hydrogramme est appelé l'*hydrogramme unitaire instantané*. La figure 2.25 montre l'allure de l'hydrogramme pour le modèle étudié ici; son équation est

$$q(t) = \frac{3}{2X_4}\eta^2 \text{ pour } 0 \leq \eta \leq 1,$$

$$q(t) = \frac{3}{2X_4}(2 - \eta)^2 \text{ pour } 1 \leq \eta \leq 2,$$

$$q(t) = 0 \text{ pour } \eta > 2,$$

avec ici $\eta = t/X_4$; l'unité de q est m/(km s) (le fait que l'on introduise l'unité m/(km s) est justifié pour que le débit final Q soit en m³/s). La fonction q est aussi appelée *fonction de transfert* car elle permet de passer d'une pluie quelconque au débit induit par cette pluie. Le choix de cette fonction est arbitraire, mais il doit satisfaire la contrainte $\int_t q(t)dt = 1$. Physiquement, on peut interpréter la fonction de transfert q comme une fonction qui étale le volume de pluie nette sans en changer son volume total.

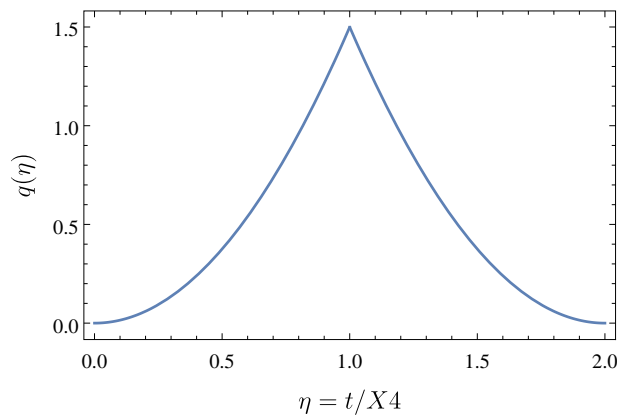


Figure 2.25 : hydrogramme unitaire $q(\eta)$ d'un modèle réservoir GR4.

Comme le schématise la figure 2.26, une pluie complexe peut être décomposée en une succession d'impulsions. En effet, on peut par définition écrire

$$P(t) = \int I(\tau)d\tau,$$

où τ est une variable d'intégration. On peut interpréter $I(\tau)d\tau$ comme pluie de durée $d\tau$, qui vaut I fois la pluie unitaire $\delta(t - \tau)$. Comme une pluie unitaire provoque une

crue unitaire $q(t - \tau)$, la pluie $I(\tau)d\tau$ provoque une crue élémentaire $I(\tau)q(t - \tau)d\tau$. Comme le système est supposé linéaire, la réponse totale du système est la somme de toutes les contributions élémentaires. En intégrant sur le temps et en multipliant par la surface S du bassin-versant, on déduit le débit résultat de la pluie $P(t)$

$$Q(t) = \alpha S \int_0^t I(\tau)q(t - \tau)d\tau, \tag{2.21}$$

où S est ici exprimé en km^2 et $\alpha = 1/3,6$ (comme pour la méthode rationnelle, la conversion des unités pour aboutir à des m^3/s nécessite d'introduire α). Cette opération est un produit de convolution entre l'intensité nette I et la fonction de transfert q . En pratique, la pluie n'est pas une fonction continue, mais une succession de valeurs discrètes (un histogramme); il est alors d'usage de remplacer l'équation (2.21) par un produit de convolution discret; c'est un point que nous n'aborderons pas ici. Dans le modèle GR4, ce n'est pas la pluie I que l'on va utiliser, mais la lame d'eau T représentant la somme du volume d'eau ruissellée et du volume d'eau restituée après infiltration et stockage dans le sol-réservoir.

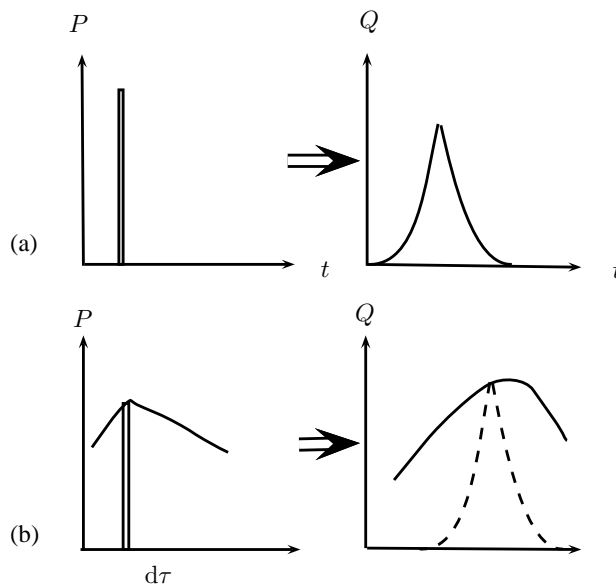


Figure 2.26 : (a) réponse à une impulsion de pluie. (b) décomposition d'une pluie complexe en une série d'impulsions élémentaires.

Application

On va examiner ici la solution dans le cas d'une pluie d'intensité constante pendant une durée t_0 .

Le bilan hydrique dépend du niveau dans le réservoir. Le volume V obéit à l'équation

$$\frac{dV}{dt} = -X_3V(t) + (1 - X_1)\frac{dP}{dt}. \quad (2.22)$$

Considérons une pluie d'intensité constante $I = dP/dt = I_0$, qui commence à $t = 0$ et s'arrête à un instant t_0 . Durant les premiers instants, la pluie est interceptée. Jusqu'au temps $t_1 = X_2/I_0$, il n'y a pas d'eau qui atteint le sol ; on suppose que $t_1 < t_0$. Pour $t \geq t_1$, l'eau touche le sol, commence à ruisseler et à s'infiltrer. La résolution de l'équation (2.22) fournit

$$V(t) = I_0 \frac{1 - X_1}{X_3} e^{-(t-t_1)X_3} (e^{(t-t_1)X_3} - 1).$$

Le flux d'eau restituée au torrent à l'instant $t_0 \geq t > t_1$ est donc

$$\dot{T} = X_3V + X_1I_0 = I_0 \left((1 - X_1)e^{-(t-t_1)X_3} (e^{(t-t_1)X_3} - 1) + X_1 \right).$$

À l'instant t_0 , la pluie s'arrête. Le niveau dans le réservoir diminue selon l'équation

$$\frac{d}{dt}V(t) = -X_3V(t),$$

avec pour condition initiale $V(t_0) = V_0 = I_0 \frac{1-X_1}{X_3} e^{-(t_0-t_1)X_3} (e^{(t_0-t_1)X_3} - 1)$. La solution est

$$V(t) = V_0 e^{-(t-t_0)X_3}.$$

Le flux total d'eau restituée au torrent à l'instant $t > t_0$ est donc

$$\dot{T} = X_3V = X_3V_0 e^{-(t-t_0)X_3}.$$

Le débit résultant est obtenu par le produit de convolution (2.21) en remplaçant I par \dot{T} :

$$Q(t) = \alpha S \int_0^t \dot{T}(\tau)q(t-\tau)d\tau.$$

En changeant la variable d'intégration, on obtient la relation suivante

$$Q(t) = \alpha S \int_0^t \dot{T}(t-\tau)q(\tau)d\tau,$$

qui peut s'intégrer facilement numériquement (et peut s'intégrer à la main, mais plus laborieusement).

Pour aller plus loin

Il faut signaler la suite de modèles de type réservoir dans le langage R ([Coron et al., 2017](#); [Delaigue et al., 2018](#)): [airGR](#) et [airGRteaching](#).

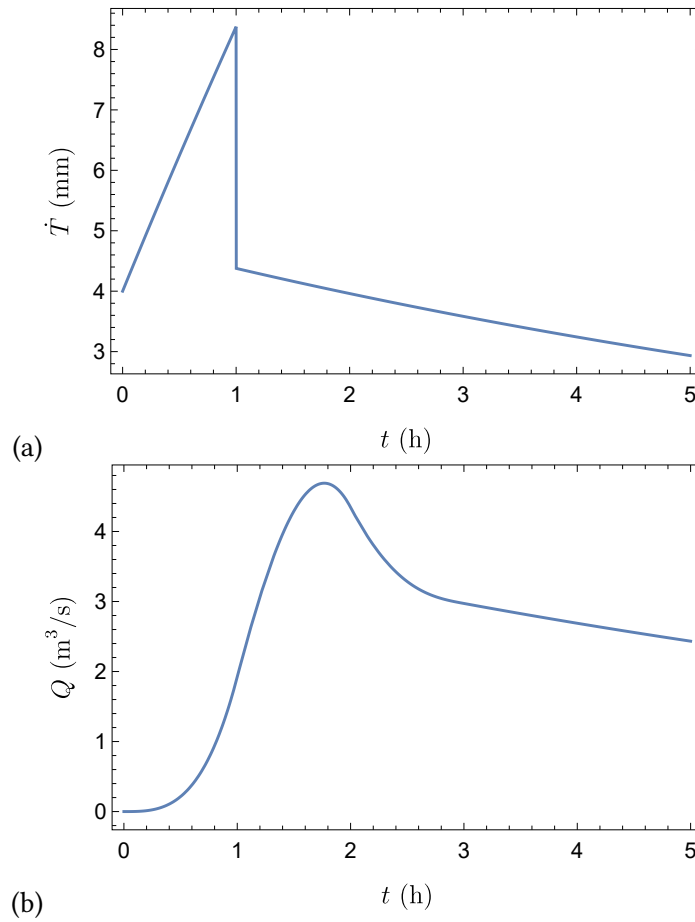


Figure 2.27 : (a) variation de la lame d'eau \dot{T} . (b) Hydrogramme résultant. Calcul effectué avec: $I_0 = 50$ mm/h pendant $t_0 = 1$ h; paramètres du bassin-versant: $S = 1$ km², $X_1 = 8$ %, $X_2 = 40$ mm, $X_3 = 0,1$ h⁻¹, et $X_4 = 1$ h.

2.7 Calcul de la propagation d'une onde de crue



- Vous souvenez-vous des équations de Saint-Venant ?
- ↪ Voir la définition au § 1.2.2.
- Que veut dire « conservatif » et « non conservatif » quand on parle d'équation ?
- ↪ Voir la définition au § 1.2.2.
- Y a-t-il une différence entre choc et ressaut ?
- ↪ Voir la définition dans l'annexe 2, § 2.1.2.

Dans le cas d'un écoulement unidimensionnel, les équations de Saint-Venant s'écrivent dans leur formulation non conservative :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (2.23)$$

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}}_{\text{inertie}} = \underbrace{\rho g \sin \theta}_{\text{force motrice}} - \underbrace{\rho g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x}}_{\text{pression}} - \underbrace{\frac{\tau_p}{h}}_{\text{frottement}}. \quad (2.24)$$

Comme on l'a vu au chapitre 1, l'équation de conservation de la quantité de mouvement (2.24) traduit l'équilibre entre plusieurs processus : termes inertiels, force motrice due à la gravité, gradient de pression hydrostatique, et frottement aux parois. Il est assez fréquent que seuls deux de ces processus soient prédominants par rapport aux autres même dans un régime qui n'est pas permanent uniforme. Le mouvement résulte alors de l'équilibre de deux processus :

- équilibre frottement \leftrightarrow force motrice. Si l'écoulement est uniforme, on ne traduit là que la condition (exacte) d'équilibre. Cet équilibre peut se maintenir lorsque l'on n'est pas trop éloigné du régime permanent uniforme. La hauteur varie au cours du temps, mais cette variation est tellement lente et de si petite amplitude qu'à tout instant, l'écoulement local se comporte comme s'il était dans un régime permanent uniforme (gradient de pression nul, inertie négligeable). On parle d'approximation d'*onde cinématique* (voir § 2.7.1). À noter également que si l'amplitude de l'onde est trop importante, il n'est rapidement plus possible de négliger le gradient de pression. Il se produit alors un équilibre entre trois processus : gradient de pression, frottement, force motrice. On parle d'*onde diffusive* (voir § 2.7.2);
- équilibre gradient de pression \leftrightarrow inertie. De l'eau au repos ou bien en écoulement permanent (sur une faible pente) présente une surface libre, qui peut être parcourue d'ondes. On parle assez souvent de vagues dans le langage courant pour désigner ces ondes. Si l'onde peut être considérée comme une petite perturbation de la surface libre, les deux processus dominants sont les termes inertiels

et le gradient de pression. On parle d'approximation d'*onde dynamique* (voir § 4.2).

Notons que toutes les combinaisons de processus ne sont pas physiquement possibles ou intéressantes. Signalons enfin qu'il s'agit là d'ondes continues (c'est-à-dire dont les variables $\bar{u}(x, t)$ et $h(x, t)$ sont des fonctions continues). Les équations de Saint-Venant peuvent également générer des ondes discontinues, appelées *ondes de choc* en physique et *mascaret* ou *ressaut* en hydraulique (voir § 4.7).

Si les équations de Saint-Venant s'avèrent très utiles pour étudier les ondes, toutes les phénomènes ondulatoires ne peuvent être étudiés à l'aide de ces équations. Il faut rappeler que les équations de Saint-Venant sont fondées sur l'approximation d'écoulement peu épais ou d'onde longue (voir chap. 1).

2.7.1 Onde cinématique



- Vous souvenez-vous des équations de Saint-Venant ?
- ↪ Voir la définition au § 1.2.2.
- Qu'est ce que l'adimensionnalisation des équations ?
- ↪ Voir le cours de [mécanique des fluides](#).
- Qu'est ce que la convection ? la diffusion ?
- ↪ Voir les définitions au § 1.5.1 et au 1.5.2.
- Qu'est ce que la méthode aux perturbations ?
- ↪ Voir la définition dans l'annexe 1, § 1.7.3.

Définition

Même pour des écoulements non permanents et non uniformes, les variations dans l'espace et dans le temps sont tellement faibles que localement tout se passe comme si l'écoulement était permanent uniforme. C'est par exemple ce qui se passe sur de grands fleuves lors de crue : le niveau d'eau monte tellement lentement que la vitesse de l'écoulement s'adapte à la hauteur en suivant une loi de régime permanent.

Fixons quelques ordres de grandeur pour comprendre ce qui se passe et pour cela mettons de nouveau les équations sous forme adimensionnelle en introduisant des échelles :

$$\hat{u} = \frac{\bar{u}}{U_*}, \quad \hat{x} = \frac{x}{L_*}, \quad \hat{t} = \frac{tU_*}{L_*}, \quad \hat{\tau}_p = \frac{\tau_p}{\rho g H_* \sin \theta}, \quad \text{et} \quad \hat{h} = \frac{h}{H_*},$$

avec U_* , L_* , et H_* des échelles de vitesse, de longueur, de profondeur. Les équations



Figure 2.28 : la crue de la Seine de 1910 à Paris [DR].

de Saint-Venant (2.23)–(2.24) s'écrivent donc :

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{h} \hat{u}}{\partial \hat{x}} = 0, \quad (2.25)$$

$$\frac{U_*^2}{L_*} \left(\rho \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \rho \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \right) = \rho g \sin \theta - \rho g \cos \theta \frac{H_*}{L_*} \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} - \frac{\tau_p}{\hat{h} H_*}. \quad (2.26)$$

En introduisant le nombre d'aspect $\varepsilon = H_*/L_*$ et le nombre de Froude $Fr = U_*/\sqrt{gH_*}$, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit également :

$$Fr^2 \varepsilon \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \right) = \sin \theta - \cos \theta \varepsilon \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} - \frac{\tau_p}{\rho g H_*} \frac{1}{\hat{h}}. \quad (2.27)$$

Les valeurs typiques que l'on a au cours d'une crue lente sont : $Fr \sim 0,1$ et $\varepsilon \sim 10^{-3}$ (si l'on s'intéresse à de longs linéaires de rivière). On voit dans le bilan de quantité de mouvement que tous les termes sont petits sauf le terme moteur $\sin \theta$ et le terme de frottement. On conclut que l'équation de conservation de la quantité de mouvement, qui est à l'origine une équation aux dérivées partielles, se réduit à l'équation scalaire

$$\frac{\hat{\tau}_p}{\hat{h}} = 1, \quad (2.28)$$

ou sous forme dimensionnelle

$$\frac{\tau_p}{\rho g h} = \sin \theta, \quad (2.29)$$

qui n'est rien d'autre que la condition d'équilibre pour le régime permanent uniforme.

Équation d'onde cinématique

On vient de voir que le cas d'une crue lente (typiquement ce qui se passe pour de grands bassins-versants), les termes inertiels jouent un rôle faible dans la propagation des ondes. On peut, en première approximation, considérer qu'en toute section la vitesse d'écoulement s'adapte immédiatement à tout changement de profondeur. Autrement dit, en résolvant l'équation (2.29) – en considérant une loi de type Chézy ou Manning-Strickler par exemple –, on obtient la relation $\bar{u} = \bar{u}(h)$, c'est-à-dire la relation obtenue en régime permanent.

Dans ce cas-là, la vitesse est la variable « esclave » ; la hauteur d'eau varie en fonction des apports amont (c'est la variable « maître ») et la vitesse s'ajuste en fonction de h . On peut calculer les caractéristiques de l'onde de crue à l'aide de l'équation de continuité (2.23). Prenant l'exemple d'une courbe de tarage fondée sur la loi de Chézy, c'est-à-dire $\bar{u}(h) = C\sqrt{i}\sqrt{h}$, avec C le coefficient de Chézy et $i = \tan \theta$ la pente, on tire de (2.23) :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0,$$

l'équation d'onde cinématique

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + c(h)\frac{\partial h}{\partial x} = 0,} \quad (2.30)$$

avec $c = \bar{u} + h\bar{u}' = \frac{3}{2}C\sqrt{i}\sqrt{h}$ la vitesse de propagation de l'onde (vitesse d'advection) et \bar{u}' est la dérivée de $\bar{u}(h)$ par rapport à h . On note que l'onde de crue se déplace plus rapidement que l'écoulement moyen (50 % plus vite) et elle se déplace d'autant plus vite que la hauteur est grande. Si on prend une loi de Manning-Strickler, on obtient une vitesse d'advection égale à $c = 5\bar{u}/3$, soit une valeur légèrement supérieure à celle obtenue avec la formule de Chézy.

Pour un canal de section quelconque, on peut montrer en suivant la même procédure que la célérité des ondes est donnée par :

$$c = \frac{\partial Q}{\partial S},$$

avec Q le débit total et S la section mouillée (formule de Kleitz³-Seddon).

3. Charles Kleitz (1808–1886) était un hydraulicien français, diplômé de l'École des Ponts et Chaussées. Il travailla principalement sur l'aménagement du Rhône et son travail d'ingénieur l'amena à publier des travaux en hydraulique. En particulier, il s'intéressa à la propagation des crues et aux hydrogrammes de crue. Il montra notamment comment on pouvait estimer la vitesse de propagation d'une crue en fonction de la hauteur d'eau et du débit. Sa formule fut, semble-t-il, découverte indépendamment une trentaine d'années après par Seddon dans son étude de la rivière Missouri.

Notons qu'il s'agit d'une équation de type convectif (ou équation d'advection). La solution générale est donc de forme $f(x - ct)$: il s'agit d'une onde progressive (« travelling wave » en anglais) qui ne se propage que dans un seul sens contrairement aux équations dynamiques.

L'approximation d'onde cinématique offre une bonne description des ondes de crue en particulier lorsque l'écoulement est suffisamment rapide ($Fr = O(1)$). Dans la limite des petits nombres de Froude ($Fr \rightarrow 0$), un amortissement important de l'onde se produit et l'approximation d'onde diffusive est alors en général plus précise. Les ondes cinématiques ne sont en fait que des approximations des ondes dynamiques lorsque les propriétés dynamiques de la transmission d'onde sont négligeables. Leur avantage par rapport aux ondes dynamiques réside principalement dans un traitement mathématique allégé. Les ondes de crue dans les gros cours d'eau peuvent souvent être traitées dans le cadre des ondes cinématiques.



Figure 2.29 : vague déferlante. C'est ce qui se passe quand la crête dépasse le pied de la vague.

Comme $c(h)$ est une fonction croissante de h , la vitesse croît avec la hauteur. Il arrive donc un moment où la crête d'une vague dépasse son pied et déferle (voir figure 2.29). Par la suite, on traite les variations trop brutales telles que le déferlement ou le ressaut hydraulique comme des discontinuités et on sert de l'équation de Rankine-Hugoniot (1.29) pour traiter ces discontinuités (voir figure 2.30).

Résolution par la méthode des caractéristiques

On souhaite étudier la propagation d'une onde de crue. Par exemple, admettons que dans une rivière on est un écoulement d'eau uniforme avec une hauteur h_0 . On

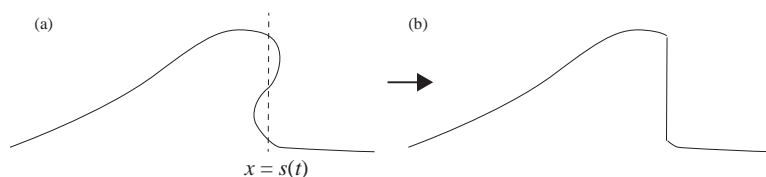


Figure 2.30 : en hydraulique, on remplace les solutions réelles (a) de type « vague déferlante » (solutions où en un point il y a plusieurs interfaces air/eau) par une discontinuité, c'est-à-dire une simplification mathématique (b) idéalisant le comportement réel.

modélise la crue par la méthode rationnelle

$$q(t) = \begin{cases} \frac{t}{t_c} q_p & \text{pour } 0 \leq t \leq t_c, \\ \left(2 - \frac{t}{t_c}\right) q_p & \text{pour } 2t_c \geq t > t_c. \end{cases} \quad (2.31)$$

avec q_p le débit de pointe et t_c le temps de concentration. Ce débit peut être converti en équivalent hauteur d'eau pour fournir une condition à la limite à l'équation (2.30)

$$h(0, t) = f(t) = \begin{cases} \left(\frac{q_p}{K\sqrt{i}} \frac{t}{t_c}\right)^{3/5} + h_0 & \text{pour } 0 \leq t \leq t_c, \\ \left(\left(2 - \frac{t}{t_c}\right) \frac{q_p}{K\sqrt{i}}\right)^{3/5} + h_0 & \text{pour } 2t_c \geq t > t_c. \end{cases} \quad (2.32)$$

où l'on s'est servi de la formule de Manning-Strickler pour passer des débits aux hauteurs.

L'équation d'onde cinématique

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x, t) + c(h) \frac{\partial}{\partial x} (h) = 0 \quad (2.33)$$

avec $c(h) = 5K\sqrt{i}h^{2/3}/3$ la célérité, peut se résoudre analytiquement. On peut l'écrire sous la forme équivalente

$$\frac{dh}{ds} = 0 \text{ le long d'une courbe caractéristique } \frac{dx}{ds} = c(h) \quad (2.34)$$

où s est une variable auxiliaire. Toutes les courbes caractéristiques sont des droites. On peut décomposer le problème en un « problème aux valeurs initiales » (domaine 1) et un « problème aux limites » (domaine 2) comme cela est illustré sur la figure 2.31. On pourrait aussi considérer un domaine 3 qui correspond à un retour à l'état initial; le domaine 3 est séparé du domaine 2 par la droite $t = 2t_c + x/c(h_0)$ (soit encore $x = c(h_0)(t - 2t_c)$). Il n'est pas montré sur la figure 2.31.

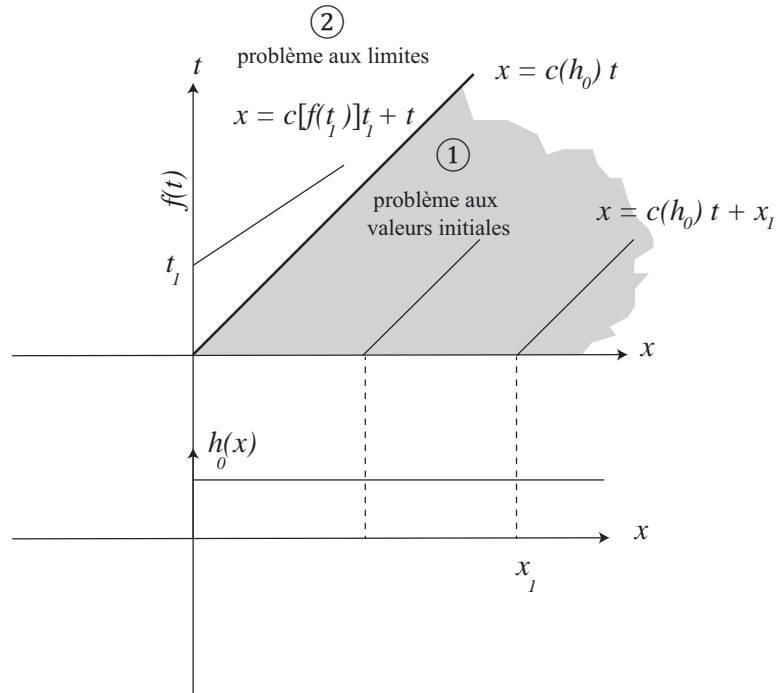


Figure 2.31 : diagramme caractéristique. Le diagramme supérieur montre la famille de courbes caractéristiques $x(s)$ dans le plan $x - t$. La courbe caractéristique $x = c(h_0)t$ partant du point origine scinde le quadrant en deux domaines : le domaine 1 correspond au problème aux valeurs initiales tandis que le domaine 2 représente le problème aux limites. Pour le domaine 1 toutes les caractéristiques sont des droites parallèles. Le diagramme inférieur montre la condition initiale $h(x,0) = h_0$.

On commence par résoudre l'équation d'onde cinématique sous forme caractéristique pour le domaine 1 (voir figure 2.31)

$$\frac{\partial t}{\partial s} = 1, \frac{\partial x}{\partial s} = c(h_0) \text{ et } \frac{\partial h}{\partial s} = 0 \quad (2.35)$$

avec pour conditions initiales

$$x(s = 0) = x_1, t(s = 0) = 0 \text{ et } h(s = 0) = h_0. \quad (2.36)$$

L'intégration est triviale :

$$h(x,t) = h_0. \quad (2.37)$$

Nous attaquons maintenant la résolution de l'équation d'onde cinématique sous forme caractéristique pour le domaine 2 (see figure 2.31)

$$\frac{\partial t}{\partial s} = 1, \frac{\partial x}{\partial s} = c(h) \text{ and } \frac{\partial h}{\partial s} = 0. \quad (2.38)$$

Les conditions initiales pour le problème aux limites s'écrivent sous forme paramétrique

$$x(s=0) = 0, t(s=0) = t_1 \text{ et } h(s=0) = f(t_1) \quad (2.39)$$

La solution est

$$t = s + t_1, \quad (2.40)$$

$$x = c(f(t_1))s, \quad (2.41)$$

$$h = f(t_1). \quad (2.42)$$

Cette solution est implicite et doit être résolue numériquement. Comme le montre la figure 2.32, certaines caractéristiques se coupent, ce qui indique qu'il y a un choc qui se forme. Cela est confirmé si on fait des coupes : l'évolution de h en différentes positions (voir figure 2.33) montre que la solution numérique est irréaliste dans la phase de montée de la crue. De même si on trace h en fonction de x pour des temps donnés, on obtient localement des comportements aberrants, qui trahissent la présence d'un choc.

Pour traiter correctement le problème, il faut alors adjoindre l'équation de Rankine-Hugoniot (voir § 1.2.6) pour traiter le choc

$$\dot{S} = \frac{[[F(h)]]}{[[h]]} = \frac{K\sqrt{i}(h^{5/3} - h_0^{5/3})}{h - h_0}, \quad (2.43)$$

avec $S(t)$ la position du choc, \dot{S} sa vitesse, $F(h) = \bar{u}h = K\sqrt{i}h^{5/3}$, h la hauteur d'eau à gauche du front. On se reportera à l'exemple du § 3.4.4 pour voir comment traiter une condition de choc en parallèle de l'équation d'onde cinématique.

2.7.2 Onde diffusive



- Qu'est ce que la convection-diffusion ?
- ↔ Voir la définition au § 1.5.3.

Un problème apparaît assez rapidement dans la dérivation de l'équation de l'onde cinématique : en général, la pente du lit est très faible et il n'est pas rare que $\sin \theta \sim \varepsilon$ ou $\sin \theta \ll \varepsilon$ dans l'équation (2.27). Cela implique que pour les rivières à faible pente, on ne peut pas négliger le gradient de pression puisqu'il est du même ordre de grandeur, voire supérieur, que la force motrice.

Un autre problème majeur rencontré avec l'approximation d'onde cinématique est que ce modèle conduit à la formation d'onde de choc (ressaut hydraulique) compte tenu du caractère hyperbolique de l'équation du mouvement sans que cela corresponde à ce qui est observé.

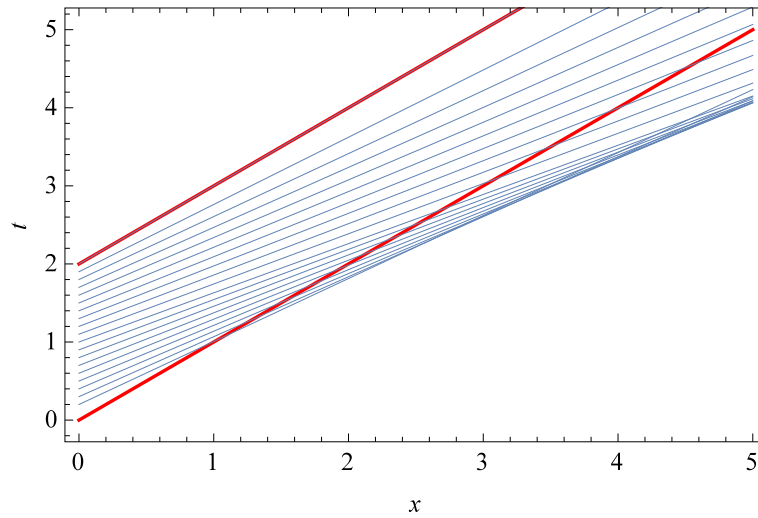


Figure 2.32 : diagramme caractéristique pour le problème étudié. (Pour simplifier la représentation, on a pris $i = K = q_p = 1$, ce qui correspond à une adimensionnalisation non détaillée ici.) Les courbes rouges représentent les caractéristiques qui délimitent le domaine 2 (parcouru par les droites caractéristiques) des domaines 1 et 3 (hauteur d'eau constante égale à h_0).

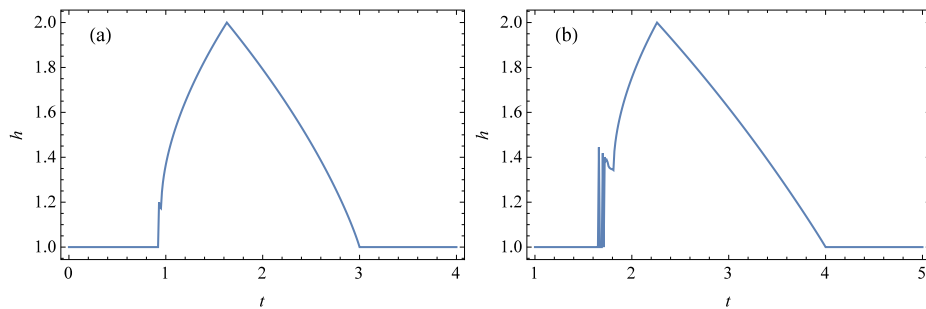


Figure 2.33 : évolution de h en (a) $x = 1$ et (b) $x = 2$.

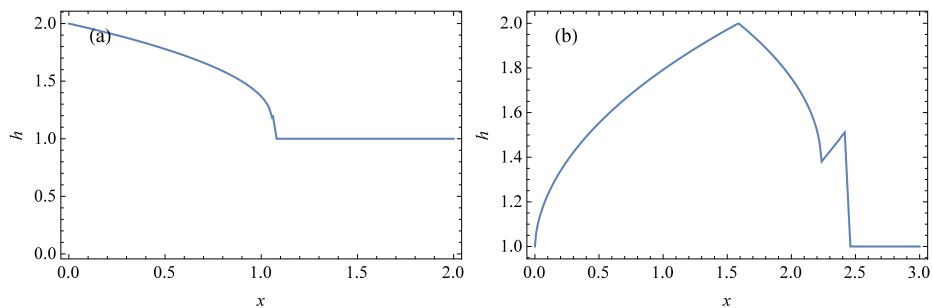


Figure 2.34 : variation de h en (a) $t = 1$ et (b) $t = 2$.

Un modèle un peu plus fin est l'approximation d'*onde diffusive*, où l'on considère que la vitesse n'est pas reliée univoque à la hauteur d'écoulement, mais peut varier relativement lentement. De la sorte, les termes inertiels dans les équations de Saint-Venant (1.16)–(1.17) disparaissent. On se retrouve alors avec l'équation de continuité (1.16)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (2.44)$$

et l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.17) amputée des termes inertiels

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \tan \theta - \frac{\tau_p}{\rho g h \cos \theta}, \quad (2.45)$$

avec $\tau_p(q, h)$ donnée par une loi de type Chézy ou Manning-Strickler. En différentiant (2.44) par rapport à x et (2.45) par rapport à t , puis en les soustrayant membre à membre, on obtient une équation du second ordre de la forme

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\tau_p}{\rho g h \cos \theta} \right),$$

soit encore en se servant de l'équation de continuité (2.44)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\tau_p}{\rho g h \cos \theta} \right) \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\tau_p}{\rho g h \cos \theta} \right) \frac{\partial q}{\partial t}, \\ &= - \left(\frac{1}{\rho g h \cos \theta} \frac{\partial \tau_p}{\partial h} - \frac{\tau_p}{\rho g h^2 \cos \theta} \right) \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial \tau_p}{\partial q} \frac{1}{\rho g h \cos \theta} \frac{\partial q}{\partial t}. \end{aligned}$$

Après réarrangement des termes, on aboutit à l'équation d'évolution de q

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \rho g h \cos \theta \left(\frac{\partial \tau_p}{\partial q} \right)^{-1} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \tau_p}{\partial h} - \frac{\tau_p}{h} \right) \left(\frac{\partial \tau_p}{\partial q} \right)^{-1} \frac{\partial q}{\partial x}. \quad (2.46)$$

Il s'agit d'une équation d'advection-diffusion non linéaire, dont la résolution est rendue ici peu aisée car les coefficients d'advection et de diffusion dépendent non seulement de q , mais aussi de h . Cette équation peut être simplifiée si on la linéarise, c'est-à-dire on décompose les variables

$$q = q_0 + q' \text{ et } h = h_0 + h',$$

où (q_0, h_0) désigne l'état de l'écoulement en régime permanent uniforme et (q', h') représente la perturbation de l'état d'équilibre. L'approximation de l'équation (2.46) au premier ordre est alors

$$\frac{\partial q'}{\partial t} = \rho g h_0 \cos \theta \left(\frac{\partial \tau_p(q_0, h_0)}{\partial q_0} \right)^{-1} \frac{\partial^2 q'}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \tau_p(q_0, h_0)}{\partial h_0} - \frac{\tau_p(q_0, h_0)}{h_0} \right) \left(\frac{\partial \tau_p(q_0, h_0)}{\partial q_0} \right)^{-1} \frac{\partial q'}{\partial x}. \quad (2.47)$$

Cette équation peut sembler de prime abord compliquée, mais il s'agit en fait d'une équation d'advection-diffusion linéaire :

$$\frac{\partial q'}{\partial t} = D \frac{\partial^2 q'}{\partial x^2} + C \frac{\partial q'}{\partial x}. \quad (2.48)$$

dont le coefficient de diffusion est :

$$D = \rho g h_0 \cos \theta \left(\frac{\partial \tau_p(q_0, h_0)}{\partial q_0} \right)^{-1},$$

et le coefficient d'advection est

$$C = - \left(\frac{\partial \tau_p(q_0, h_0)}{\partial q} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \tau_p(q_0, h_0)}{\partial h_0} - \frac{\tau_p(q_0, h_0)}{h_0} \right).$$

Dans le cas d'une loi de Manning-Strickler, on a

$$\tau_p = \frac{\rho g}{K^2} \frac{\bar{u}^2}{h^{1/3}} = \frac{\rho g}{K^2} \frac{q^2}{h^{7/3}},$$

d'où l'on déduit

$$D = \frac{1}{2} q_0 \cot \theta \text{ et } C = \frac{5}{3} \bar{u}_0 = \frac{dq_0}{dh_0}.$$

On vérifie que le coefficient d'advection dans le modèle d'onde diffusive est le même que le coefficient déterminé dans l'approximation d'onde cinématique. Cela montre que dans le cadre de l'approximation linéaire (petite perturbation autour du régime d'équilibre) l'onde de débit est advectée à une vitesse $C = \frac{5}{3} u_0$, mais diffuse également avec un coefficient D proportionnel au débit initial q_0 . Contrairement à l'onde cinématique qui se raidit au cours de sa propagation, l'onde diffusive tend à s'étaler au cours du mouvement.

Rupture de barrage

3.1 Rupture de barrage et phénomènes similaires

IL EXISTE aujourd'hui environ 45 000 barrages dans le monde pour la production hydroélectrique, l'alimentation en eau, ou bien la régulation des cours d'eau (Marche, 2008). Comme tout ouvrage de génie civil, les barrages peuvent connaître des défaillances de sécurité, qui peuvent aboutir à des accidents plus ou moins graves. Le taux de rupture moyen annuel est d'environ 3 pour l'ensemble des barrages construits dans le monde, mais actuellement le nombre de ruptures va en diminuant (Marche, 2008). Quelques catastrophes ont causé des dommages considérables et provoqué la mort des centaines ou des milliers de personnes :

- Malpasset (Var, France) : le 2 décembre 1959, le barrage-voûte barrant la rivière Reyran cède à cause d'un défaut géologique dans le massif où s'ancrait la voûte. Une vague de 40 mètres déferle sur la vallée et atteint la ville de Fréjus. Des blocs rocheux (jusqu'à 600 t!) sont entraînés et détruisent le quartier de Malpasset. En tout, ce sont 423 victimes qui sont déplorées.
- Vajont (Italie) : le 9 octobre 1963 un glissement de terrain a mobilisé 260 Mm³ de terres et de roches dans la retenue du Vajont barrée par un barrage-voûte achevé en 1959 (Panizzo *et al.*, 2005a). Deux vagues d'une hauteur prodigieuse (150–200 m) se sont engouffrées dans l'étroit ravin à l'aval du barrage 150 mètres de haut. La masse d'eau dévaste Longarone, Pirago, Rivalta, Villanova et Faè et de nombreux petits villages aux alentours (voir fig. 3.4). On estime à 1909 le nombre de personnes tuées. Le barrage n'a subi que de très légers dommages.
- Le barrage de Molare (bordure sud des Alpes italiennes au nord-est de Gênes) céda en août 1935 après des pluies diluviennes. Les évacuateurs de crue furent dans l'impossibilité d'évacuer le débit de crue généré par des pluies d'une intensité exceptionnelle (environ 500 mm dans la journée du 13 août 1935), ce qui entraîna la rupture de la digue de Zerbino. Une vague d'une hauteur de 20 mètres

dévasta la vallée de l'Orba, causant environ la mort de 100 personnes (Visentini, 1936);

- aux États-Unis, à Taum Sauk dans les collines du Missouri (voir figures 3.1 et 3.2), une retenue d'environ 5 millions de m³ implantée à 1500 m d'altitude a cédé en décembre 2005 et a généré une onde de submersion dévastatrice (dénivellation de l'ordre de 700 m).

3.1.1 Rupture de grand barrage

Causes de rupture

La rupture d'un barrage peut être causée par :

- par l'érosion provoquée par une surverse intempestive en cas de trop-plein (résultant d'une crue ou bien d'une arrivée d'eau mal contrôlée). En décembre 2005, le barrage de Taum Sauk s'est ainsi rompu à la suite de défaillances de plusieurs systèmes de contrôle et de pompage, qui ont amené à un niveau d'eau trop important dans la retenue. En 1916, en Californie près de San Diego, le barrage (poids-voûte) de Sweetwater a connu une surverse à la suite de fortes pluies et d'une montée des eaux. La surverse n'a pas entraîné la ruine de l'ouvrage, a provoqué une érosion très importante de son appui latéral (voir figure 3.5). En février 2017, dans des circonstances similaires et toujours en Californie, l'évacuateur de crue du barrage d'Oroville a subi des dommages, qui ont laissé craindre que sa capacité d'évacuation soit amoindrie, que les eaux du lac montent, et qu'il y ait une surverse dans des terrains non préparés à recevoir un flux d'eau important (voir figure 3.6);
- par l'infiltration d'eau ou des phénomènes de « renard » dans les remblais;
- par des fuites dans les conduites d'eau sous pression;
- la rupture ou l'affaissement de la paroi du barrage. En décembre 1959, la retenue de Malpasset (Var, France) céda, libérant 48 millions de m³ d'eau. La rupture du barrage provoqua une crue majeure jusqu'à Fréjus, causant la mort de 423 personnes;
- la surverse induite par une seiche, une avalanche, ou un mouvement de terrain entraînant une grande masse d'eau par-dessus le barrage. La catastrophe du Vajont résulta d'un glissement de terrain, qui en pénétrant dans le lac de retenue a provoqué une vague qui submergea le barrage-voûte et s'engouffra dans un ravin étroit;
- par un tremblement de terre, qui peut induire la rupture du barrage ou bien la formation de vagues déferlantes.



Figure 3.1 : rupture du barrage de Taum Sauk dans le Missouri (États-Unis) en décembre 2005.

Selon [Marche \(2008\)](#), l'analyse des ruptures de barrage à travers le monde amène aux observations suivantes :

- il y a deux causes principales de rupture :
 - capacité insuffisante de l'évacuateur de crue (35 % des ruptures documen-



Figure 3.2 : vue de la brèche dans le remblai du barrage de Taum Sauk.



Figure 3.3 : barrage du Vajont après le mouvement de terrain du 9 octobre 1963.

- tées),
- problème de fondation (25 % des ruptures documentées);
- la probabilité de rupture d'un barrage en béton est peu dépendante de leur hau-



Figure 3.4 : village de Longarone avant et après la catastrophe de 1963.



Figure 3.5 : érosion des berges contre lesquelles s'appuyait le barrage de Sweetwater en 1916.

- teur (probabilité de l'ordre de rupture de 0,6 % pour des barrages jusqu'à 100 m de haut);
- la probabilité de rupture d'un barrage en remblai croît avec la hauteur, passant de 0,2 % pour les toutes petites hauteurs (moins de 10 m) à 14 % pour les grands barrages (hauteur supérieure à 50 m);
 - la phase de remplissage et les cinq premières années de service sont les plus critiques;
 - les barrages en remblai présentent un taux de rupture deux fois plus important que les barrages en béton (1,11 contre 0,54 %, respectivement);

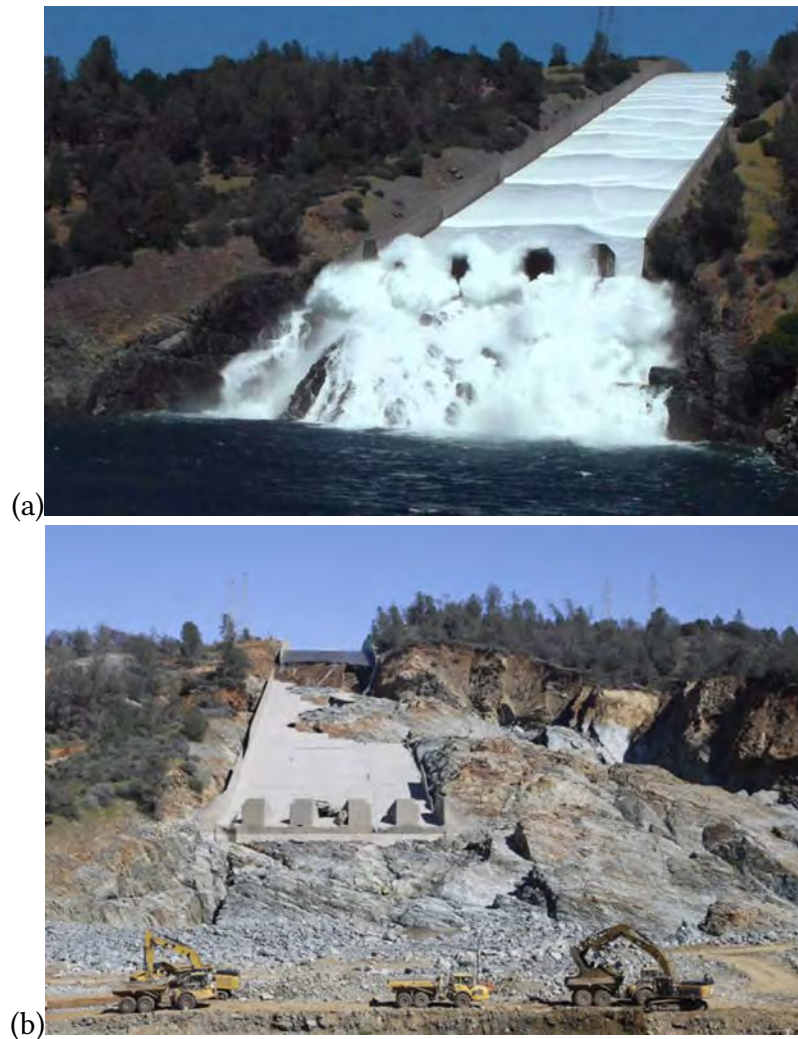


Figure 3.6 : évacuateur de crue du barrage d’Oroville (Californie) avec son état lors de la crue de juillet 2011 (a) et celle de février 2017 (b), qui a entraîné la ruine de l’ouvrage. Le barrage n’a pas été touché.

- l’adoption de mesures réglementaires, comme la capacité minimale d’évacuation, a permis d’améliorer la sécurité des barrages, notamment aux États-Unis.

Dans l’étude plus récente de [Bacchus et al. \(2019\)](#), les ruptures liées à un trop-plein et une surverse représentent 40 % des défaillances sur les grands ouvrages, et dans 75 % des cas, le problème est venu de l’évacuateur de crue. Si avant 1975, un mauvais dimensionnement était en cause dans 80 % des cas, il n’est impliqué depuis que dans 50 % des cas; l’obstruction de l’évacuateur, un défaut d’entretien, ou des défaillances sur des vannes sont devenus les causes majoritaires.

Tableau 3.1 : liste de quelques grands accidents intervenus sur des barrages de retenue artificielle. Se reporter au site www.hydrocoop.org ou www.wikiwand.com pour de plus amples informations.

<i>Nom</i>	<i>Année</i>	<i>Lieu</i>	<i>Détails</i>	<i>Domages</i>
Dale Dike Reservoir	1864	South Yorkshire, Royaume-Uni	défaut de construction, fuite dans le mur	Loxley, Don, le centre de Sheffield dévastés (plusieurs centaines de morts)
South Fork Dam	1889	Johnstown, Pennsylvania, États-Unis	rupture consécutive à de fortes pluies (mais barrage mal entretenu)	2200 morts à Johnstown, Pennsylvania, USA,
Gleno	1923	Lombardie, Italie	rupture consécutive à de fortes pluies, ciment de mauvaise qualité et ancrages insuffisants	trois villages touchés, 356 morts
Llyn Eigiau Dam	1925	Dolgarrog, Royaume-Uni	rupture consécutive à de fortes pluies (630 mm en 5 j)	village de Dolgarrog endommagé, 17 morts
St. Francis Dam	1928	Valencia, Californie, États-Unis	instabilité géologique non détectée	~ 600 morts
Malpasset	1959	Fréjus, France	ouverture d'une faille géologique entraînant la rupture de la voûte	421 morts
Baldwin Hills Reservoir	1963	Los Angeles, Californie, États-Unis	subsidence causée par la sur-exploitation des champs de pétrole voisins	277 habitations détruites, 5 morts.
Barrage du Vajont	1963	Italie	vague d'impulsion créée par l'entrée massive d'un gigantesque mouvement de terrain	destruction de plusieurs villages, entraînant la mort de 2000 personnes environ

Buffalo Creek	1972	Virginie occidentale, États-Unis	affaissement d'une digue d'un terril minier (charbon) sous l'effet de fortes pluies	une crue d'un volume 0,5 Mm ³ d'un mélange de produits miniers et d'eau en résultat, détruisant plusieurs villages et tuant 125 personnes
Barrages Banqiao et Shimantan	1975	Chine	pluies extrêmes dépassant la capacité du barrage	la crue tua environ 26000 personnes ; 145 000 moururent à cause des épidémies et de la famine. En tout, 6 millions d'habitations furent détruites
Teton Dam	1976	Idaho, États-Unis	renard	11 personnes tuées, 13000 têtes de bétail emportées
Kelly Barnes Dam	1977	Géorgie, États-Unis	inconnu (erreur de conception ?)	39 morts
Lawn Lake Dam	1982	Rocky Mountain National Park, États-Unis	renard	0,8 Mm ³ d'eau furent libérés, causant la mort de 2 campeurs à l'aval et 31 millions US\$ de dommages à la ville d'Estes Park (Colorado).
Big Bay Dam	2004	Mississippi, États-Unis		104 bâtiments détruits
Barrage de Shakidor	2005	Pakistan	pluies extrêmes	~ 70 morts
Taum Sauk réservoir	2005	Lesterville, Missouri, États-Unis	sur-remplissage accidentel du barrage (erreur de consigne)	pas de victime
Koshi barrage	2008	Koshi, Népal	surverse après la mousson	250
Xe-Pian Xe-Namnoy Dam	2018	Attapeu, Laos	rupture après fortes pluies	36
Rishiganga dam	2021	Chamoli, Inde	vague de submersion	145



Figure 3.7 : barrage de Malpasset. [DR].

3.1.2 Rupture de petit barrage d'accumulation

Les Alpes ont été équipées au cours du xx^e siècle d'un grand nombre de barrages pour la production d'électricité. Plus récemment, au cours des 10–20 dernières années, des petits barrages ont été construits pour la production de neige de culture dans les stations de ski et, dans une moindre mesure, pour assurer l'approvisionnement en eau potable lors des pics de fréquentation touristique. On prévoit au cours des 10–20 prochaines années un accroissement considérable du nombre de petites retenues (d'un facteur 3 environ d'après les études prospectives) et une augmentation du volume de stockage (qui passerait de l'ordre de 50 000 m³ en moyenne actuellement à quelques centaines de milliers de m³ dans le futur).

Les petites retenues peuvent connaître des accidents plus ou moins graves. Ainsi, en août 2004 et au printemps 2005, deux ouvrages ont connu une rupture lors de leur mise en eau en France, entraînant une ruine partielle ou totale. En mars 2006, une retenue pour la production de neige de culture à Pelvoux (Hautes-Alpes, France) a été impactée et vidée par une avalanche, heureusement sans conséquence pour le camping (vide en saison) situé en contrebas. Une situation similaire est observée aux États-Unis, qui a un parc de 2,5 millions de petites retenues, un certain nombre d'entre elles étant considérées comme dangereuses (Brewitt & Colwyn, 2020).



Figure 3.8 : rupture du barrage en terre de Teton (Idaho) en 1976. (b) Ruines du barrage de Saint-Francis (Californie) en 1928. [DR].

3.1.3 Rupture de lac morainique et glaciaire

Aux risques qualifiés d'anthropiques mentionnés plus haut, il faut également ajouter les risques liés aux lacs naturels :

- notamment ceux qui sont en train de se former à la suite du retrait glaciaire.



Figure 3.9 : avalanche du 9 mars 2006 détruisant la retenue de la station de Pelvoux (Hautes-Alpes, France) situé dans le bassin-versant de la Bouisse. Source : (Evette *et al.*, 2011).

Durant le « petit âge glaciaire » (de la fin du xvi^e siècle au milieu du xix^e siècle), les glaciers des Alpes avaient fortement avancé. Leur retrait a laissé des moraines, qui ont piégé une partie des eaux de fonte des glaciers. Ces moraines sont en général constituées de matériaux très grossiers, sans réel liant si ce n'est une gangue de glace qui peut assurer une certaine cohésion ; elles sont en général assez hautes (avec un rapport hauteur/largeur assez faible) et raides ;

- outre ces lacs périglaciaires, les glaciers peuvent former des lacs glaciaires ou des poches d'eau en leur sein. La rupture des glaces emprisonnant le volume d'eau conduit à des crues importantes ;
- certains lacs peuvent se former lorsqu'une vallée drainée par un cours d'eau est soudainement obstruée. En effet, à la suite d'un écroulement rocheux, d'un déplacement du sol à la suite d'un tremblement de terre, d'un dépôt d'avalanche ou de lave torrentielle, le cours d'eau peut être barré, ce qui forme un lac naturel.

Les lacs morainiques peuvent céder pour plusieurs raisons (Clague & Evans, 2000; Korup & Tweed, 2006):

- les lacs étant souvent entourés de pentes abruptes, des glissements de neige, de sol, ou de glace sont possibles. Une avalanche ou un mouvement de terrain peut provoquer une intumescence qui submerge la moraine. Le flot déversé sur la paroi raide de la moraine entraîne en général une incision rapide, qui forme une brèche dans le talus morainique, puis la rupture d'une partie de la moraine. En août 1985, une avalanche de glace dans le lac Dig Tsho au Népal provoqua

l'une des plus grosses crues d'origine glaciaire connues à ce jour (8 million m³ d'eau libérés). En juillet 1983, une rupture du glacier Cumberland dans le lac Nostetuko (Canada) a généré une vague qui a incisé la moraine. Cette érosion s'est poursuivie pendant 4 h, formant une brèche entaillant sur une profondeur de 40 m, libérant $6,5 \times 10^6$ m³ d'eau et entraînant un volume d'environ 10^6 m³ de sédiment ;

- le lac collectant les eaux de pluie, de fonte des neiges et des glaces, il peut déborder si les eaux drainées arrivent en quantité excessive. Le débordement entraîne en général la rupture de la moraine par érosion. En juillet 1996, le lac Ha! Ha! (Québec, Canada) déborda à la suite de précipitations très importantes (200 mm de pluie sur 5000 km²), ce qui entraîna la rupture de la digue morainique et une crue exceptionnelle (débit de l'ordre de 1100 m³/s, soit 8 fois la crue centennale). Le débordement de la rivière Ha! Ha! amena à la création d'un nouveau lit et mobilisa plusieurs millions de m³ de sédiment (Lapointe *et al.*, 1998) ;
- comme une partie de la stabilité de la moraine est assurée par la glace contenue dans le matériau grossier, la fonte de cette glace peut amener à une perte de cohésion et à une perméabilité accrue, et finalement à la rupture (géotechnique) de la moraine sous l'effet de la poussée des eaux ;
- une instabilité (résonance) de vagues sur la surface du lac peut entraîner la formation d'ondes déferlantes qui submerge le moraine. Les oscillations de masses d'eau (phénomène appelé seiche) sont impliquées dans quelques ruptures de barrage dans le monde (Balmforth *et al.*, 2008) ;
- la perméabilité d'une moraine est très hétérogène. Le matériau présente en général une granulométrie bimodale avec, d'une part, de gros blocs et, d'autre part, des éléments plus fins (arène granitique, sable) qui colmate les vides entre blocs. L'eau peut néanmoins s'infiltrer et créer des « renards », c'est-à-dire des circulations d'eau au sein de la moraine. Si la conduite naturelle creusée par les eaux d'infiltration croît en taille, cela peut entraîner une forte érosion interne, puis la rupture de la moraine ;
- les tremblements de terre peuvent également déstabiliser une moraine et entraîner la rupture. Le tremblement de terre de mai 1970 au Pérou entraîna la vidange partielle du lac Safuna Alta, qui mobilisa environ 25 m d'eau dans le lac, soit 5×10^6 m³ d'eau ; en avril 2002, un écroulement rocheux affecta de nouveau ce lac (Hubbard *et al.*, 2005).

Les crues provoquées par la rupture d'un lac glaciaire ou morainique sont généralement dévastatrices. On parle parfois de *débâcle glaciaire*, et de *glacial lake outburst flood* (GLOF) en anglais. Quelques exemples de rupture de lac :

- Les ruptures de poche glaciaire peuvent provoquer des dommages importants en zone de montagne à cause des fortes vitesses, mais également des nombreux débris et sédiments charriés par l'onde de crue. En Suisse, le glacier Giétro¹, do-

1. La catastrophe de Giétro (ou Giétroz) en 1818 a endeuillé le Valais : en plein petit âge



Figure 3.10 : le village de Täsch après la crue du Täschbach en juin 2001. Source : Crealp.

minant aujourd'hui le barrage de Mauvoisin dans le val de Bagnes (Valais), a connu plusieurs débâcles meurtrières (1595 et 1818). En France, en 1898, la débâcle du glacier de Tête-Rousse a entraîné un mélange d'environ 300 000 m³ d'eau, de glace ainsi que 800 000 m³ de matériaux sur son parcours; 175 personnes furent tuées à Saint-Gervais-les-Bains. Plus récemment, en juin 2001, le petit lac du Weingarten a rompu sa digue morainique et s'est déversé dans un torrent dominant le village de Täsch (Valais), remobilisant les laisses de crues (dépôts de lave de l'automne 2000) et causant d'importants dommages au village.

- Les ruptures de barrage naturel sont aussi des causes de crue torrentielle dévastatrice. En 1191, un écoulement rocheux dans le défilé de la Vaudaine (France) barra la Romanche entre Bourg-d'Oisans et Grenoble; un lac se forma, mais la digue naturelle se rompit en 1219 et la vidange du lac entraîna une crue torrentielle d'ampleur exceptionnelle, qui détruisit en partie Grenoble (à l'époque une petite bourgade). En 563, l'écroulement du Tauredunum dans la vallée du

glaciaire, des blocs de glace se détachent continuellement du glacier du Giétro et s'accumulent dans le lit de la Dranse de Bagnes jusqu'à faire obstacle à l'écoulement de la Dranse (au niveau actuel occupé par le barrage de Mauvoisin). C'est ainsi qu'entre 1806 et 1818, un lac de 3,5 km de long se forme à l'amont de ce cône. Malgré le percement d'une galerie pour drainer le lac, le barrage naturel cède sous la pression de l'eau, provoquant la vidange rapide du lac et causant la mort d'environ 40 personnes.

Rhône² a causé un tsunami sur le Lac Léman, dont les effets dévastateurs se firent sentir jusqu'à Genève.

- Les scientifiques pensent qu'un effondrement d'un glacier du pic Raunthi (district de Chamoli, État d'Uttarakhand, près de la frontière tibétaine) en Inde a causé la formation d'un lac temporaire. Le 7 février 2021, la rupture du barrage de glace a entraîné une forte débâcle le long des rivières Alaknanda et Dhauliganga. Une cinquantaine d'ouvriers travaillant sur le barrage hydroélectrique de Rishiganga sont portés disparus (voir Fig. 3.12).

On emploie parfois le mot d'origine islandaise « jökulhlaup » pour désigner une crue liée à la libération d'un volume d'eau depuis un glacier concerné par une éruption volcanique (Roberts, 2005; Emmer, 2017).

Comme le montrait le tableau 2.2, la plupart des méga-crues sont consécutives à des ruptures de grands lacs glaciaires. La Suisse a été, et reste toujours, très concerné par ce risque, mais il reste très localisé dans certaines vallées, avec souvent les mêmes appareils glaciaires qui donnent naissance à des lacs, dont la rupture entraîne des débâcles (voir tableau 3.2). À l'échelle de la planète, les observations menées par plusieurs équipes montrent qu'avec le réchauffement climatique, le risque de débâcle a sensiblement augmenté (Westoby *et al.*, 2014; Emmer *et al.*, 2016; Nie *et al.*, 2018; Harrison *et al.*, 2018). Dans leur enquête à travers les différents continents, Carrivick & Tweed (2016) ont noté que les débâcles avaient pour origine

- dans 70 % des cas, des barrages glaciaires,
- dans 9 % des cas, des lacs morainiques,
- et pour 3 % des cas, des éruptions volcaniques.

(Il s'ensuit que 16 % n'ont pas une origine déterminée). Les régions connaissant le plus de débâcles sont l'Alaska, les Alpes, l'Islande, la cordillère Blanche au Pérou, et l'Himalaya.

3.1.4 Rupture de digue

En août 2002, l'Elbe et ses affluents entrèrent en crue, entraînant de graves inondations en Tchéquie et en Allemagne (environ 100 morts et 20 millions € de dommages). Plusieurs digues cédèrent entre Dresde et Magdebourg en Allemagne; notamment, le bassin de rétention près de la bourgade de Glasshütte rompit et libéra 60 000 m³ d'eau qui causa des dommages aux bâtiments de la ville.

2. Où est ce sommet? Dans un scénario actuellement couramment développé, l'écroulement aurait affecté la falaise de la Suche au Grammont (Kremer *et al.*, 2012). Pour expliquer le même phénomène, certains auteurs indiquent que l'éboulement serait parti des Dents du Midi et non du Grammont (Montandon, 1925), ce qui semblerait plus logique compte tenu de la configuration de la vallée du Rhône entre Martigny et Noville, si le tsunami est le résultat d'une débâcle.

Tableau 3.2 : quelques événements de débâcle glaciaire survenus en Suisse au cours des deux derniers siècles. Les volumes drainés V sont exprimés en millions de m^3 et les débits de pointe en m^3/s . Source : (Haeberli, 1983; Walder & Costa, 1996; Raymond *et al.*, 2003; Bohorquez & Darby, 2008; Worni *et al.*, 2014).

Date	Lieu	V	Q_p
1818	Glacier du Giétro (VS)	20	8000 à 20 000
1878	Lac de Märjelen, glacier d'Aletsch (VS)	10,7	300
1913	Lac de Märjelen, glacier d'Aletsch (VS)	4,5	195
1943	Glacier de Ferpècle (VS)	1,6	400
1944	Lac de Gorner, glacier du Gorner (VS)	6	200
1951	lac de Grindelwald (BE)	0,135	74,6
1952	Glacier de Ferpècle (VS)	0,25	230
1968	Lac de Gorner, glacier du Gorner (VS)	2,9	29
2008	Lac de Grindelwald (BE)	0,57	111

3.1.5 Rupture de terrils et bassins de décantation

Certains phénomènes assimilés à des ruptures de barrage concernent des ruptures de terrils miniers, des bassins de rétention/décantation des eaux polluées, et aires de stockage³. Plus de 80 ruptures de tels bassins de décantation, dont au moins 18 au cours de la dernière décennie. Voici pour l'Europe quelques catastrophes marquantes :

- catastrophe de Bento Rodrigues (Brésil) : le 5 novembre, le village de Bento Rodrigues dans l'État de Minas Gerais est touché par un écoulement de boue toxique à la suite de la rupture de deux bassins de décantation. La cause de cette rupture n'est pas connue. Elle a mobilisé 60 Mm^3 de boue. On compte au moins 20 victimes. La vallée est fortement polluée (voir figure 3.14);
- catastrophe de l'usine d'Ajka (Hongrie) : le 4 octobre 2010, une digue haute de 30 m s'effondre et laisse s'échapper environ 1 Mm^3 de boues contenant des métaux lourds et résultant du traitement de l'uranium. La crue a dévasté Kolontar, le village le plus proche, et plus en aval Devecser et Somlóvásárhely. En tout, 9 personnes sont tuées, plusieurs sont brûlées par les boues toxiques, des bâtiments sont endommagés sur plusieurs hectares pour un coût estimé entre 5 et 10 M€. Le sol et les eaux sont gravement pollués pour plusieurs années (voir figure 3.15);
- catastrophe d'Aznalcóllar (Andalousie, Espagne) : le 25 avril 1998, la rupture d'une digue libère un volume considérable (8 km^3) d'eau contaminée par des

3. Dans l'industrie minière, il est courant de stocker les eaux chargées de métaux lourds et autres polluants, produites lors de l'extraction et lavage des minerais, en les confinant dans des enceintes en remblai. Par évaporation, filtration, réactions chimiques, la phase liquide se sépare lentement de la charge solide.

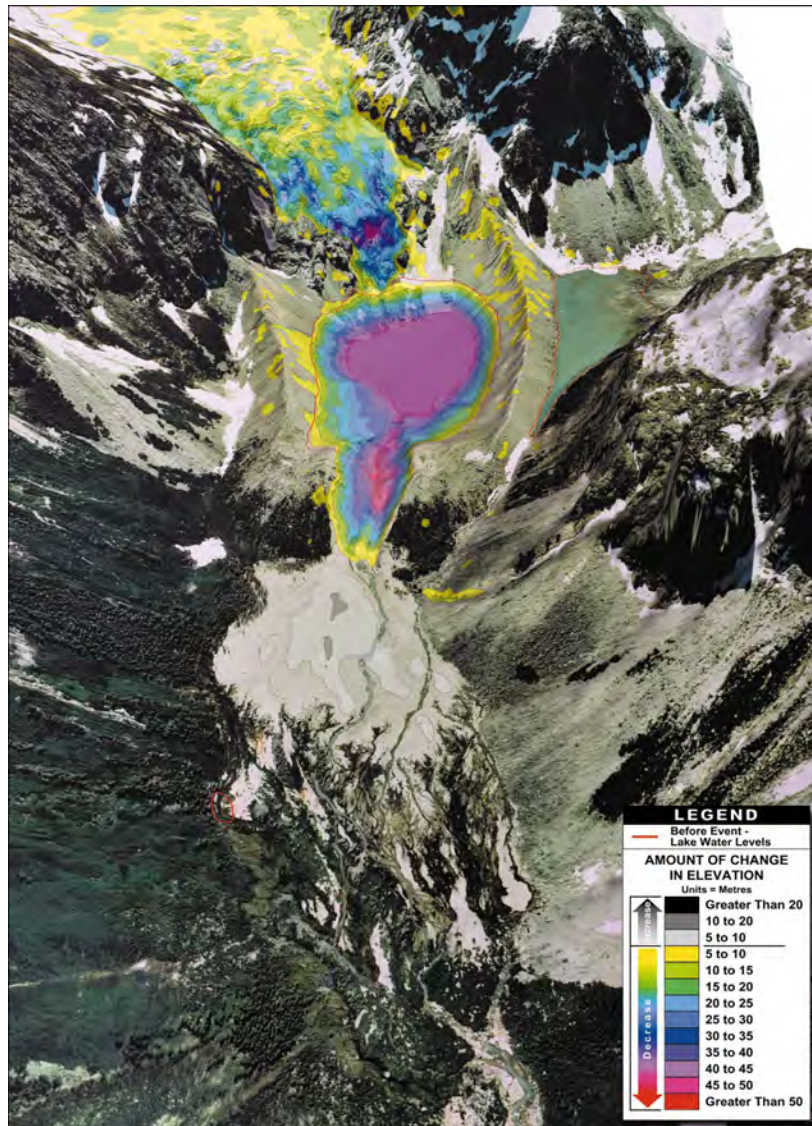


Figure 3.11 : rupture du lac morainique Nostetuko (Colombie britannique, Canada) en juillet 1983. La chute du front du glacier Cumberland dans le lac a entraîné une onde de submersion, qui a incisé la moraine et formé une brèche. La photographie reporte les changements de topographie sur le site entre 1981 et 1994. D'après (Clague & Evans, 2000).

- métaux lourds et de résidus miniers. La rupture a généré une onde de crue dans les rivières Guadiamar et Guadalquivir et a pollué le parc naturel de Doñana ;
- catastrophe du Val de Stava (Trentin-Haut-Adige, Italie): le 19 juillet 1985, un



Figure 3.12 : passage de la débâcle glaciaire au niveau de l'usine hydroélectrique de Tapovan sur la Rishiganga (Inde) le 7 février 2021. Source : Utkarsh Singh (Twitter) sur [India Today](#).

barrage retenant les boues de décantation d'une mine cède sous la pression de l'eau après qu'un drain vétuste s'est bouché. En environ une trentaine de secondes, ce sont quelque 200 000 m³ de boue qui sont libérés et s'écoulent dans le Rio di Stava. La coulée de boue a tué 268 personnes et détruit 62 bâtiments dans le village de Stava, près de Tesero (voir figure 3.16).



Figure 3.13 : inondation de Glasshütte à la suite de la rupture de la digue du bassin de rétention. Source : der Spiegel.



Figure 3.14 : le 5 novembre 2015, deux bassins de décantation miniers cèdent près de la ville de Bento Rodrigues (Brésil) causant victimes et pollution dans toute la vallée.



Figure 3.15 : zones inondées par la rupture du bassin de décantation de l'usine d'Ajka en Hongrie. Photographie satellitaire prise le 9 octobre 2010. Source : [NASA](#).



Figure 3.16 : vue du Val di Stava avant et après la catastrophe. Source : www.wise-uranium.org.

Tableau 3.3 : liste de quelques grands accidents au cours des deux dernières décennies. Source : www.wise-uranium.org.

<i>Date</i>	<i>Site</i>	<i>Type</i>	<i>Détails</i>	<i>Dommmages</i>
25 jan. 2019	Brumadinho, Minas Gerais, Brésil	rupture de digue	boue riche en minerai	pollution, 57 morts, 300 disparus
27 oct. 2016	Mulberry, Floride, EUA	doline	840 000 m ³ de boue riche en phosphate	pollution
5 nov. 2015	Bento Rodrigues, Brésil	rupture de digue	32 M m ³ de boue	pollution lourde sur 663 km de rivière, 17 morts
4 oct. 2010	Kolontár, Hongrie	rupture de digue	700 000 m ³ de boue déversés	8 km ² de terres dévastés, 10 morts
29 août 2009	Karamken, Magadan, Russie	rupture de digue après de fortes pluies	?	1 mort, 11 maisons détruites
14 mai 2009	Huayuan County, Préfecture de Xiangxi, Chine	rupture de digue	?	3 morts
22 déc. 2008	Usine de Kingston, Harriman, Tennessee, EUA	rupture du mur de rétention	4,1 Mm ³ de boue lâchés	1,6 km ² de terrain dévastés, pas de victime
8 sep. 2008	Taoshi, province de Shanxi, Chine	effondrement d'un terril à la suite de pluies	?	254 morts
30 avr. 2006	Miliang, Province de Shaanxi, Chine	rupture de digue lors du réhaussement	?	17 morts, forte pollution de la rivière Huashui
14 avr. 2005	Bangs Lake, Mississippi, EUA	rupture de terrils après des pluies	64 350 m ³ d'acide déversés	forte pollution
30 nov. 2004	Pinchi Lake, British Columbia, Canada	rupture de digue lors des travaux de rénovation	6,000 to 8,000 m ³ de débris déversés	5,500 ha de terrain concernés

5 sep. 2004	Riverview, Florida, USA	rupture de digue lors du passage du cyclone Frances	227,000 m ³ d'acide déversés	pollution marine
22 mai 2004	Partizansk, Primorski Krai, Russie	brèche dans la digue	160,000 m ³ de débris fins	pollution
20 mars 2004	Malvésí, Aude, France	rupture de digue	30 000 m ³ de boue déversés	pollution du canal du Tauran
3 oct. 2003	Cerro Negro, Petorca prov., Quinta region, Chili	rupture de digue	50,000 tonnes of débris lâchés	pollution
22 juin 2001	Sebastião das Claras, Nova Lima district, Minas Gerais, Brésil	rupture de terril	?	5 morts
18 oct. 2000	Nandan county, province de Guangxi, Chine	rupture de digue	?	env. 115 morts
11 oct. 2000	Inez, Martin County, Kentucky, EUA	rupture de digue par effondrement de cavité	950 000 m ³ de débris déversés	120 km de rivières pollués
8 sep. 2000	mines d'Aitik, Gällivare, Suède	rupture de digue (drain mal dimensionné)	2,5 million m ³ déversés	?
10 mars 2000	Borsa, Roumanie	rupture de digue après de fortes pluies	22 000 t de métaux lourds lâchés	pollution de la rivière Vaser stream
30 jan. 2000	Baia Mare, Roumanie	rupture de digue par surverse	100 000 m ³ of d'eaux polluées déversées	contamination majeure des eaux du bassin-versant de la Tisza

3.2 Rupture de barrage en ingénierie des risques

3.2.1 Bases réglementaires

En Suisse, les bases légales relatives à la sécurité des ouvrages d'accumulation sont contenues dans :

- historiquement, l'article 3bis de la loi fédérale du 22 juin 1877 sur la police des eaux ;
- plus récemment l'ordonnance du 7 décembre 1998 sur la sécurité des ouvrages d'accumulation (OSOA).

L'article 3bis de la loi sur la police des eaux énonce que le Conseil fédéral doit veiller à ce que pour tout barrage (existant ou projeté), des mesures spécifiques soient mises en œuvre pour prévenir les dangers et les dommages qui pourraient résulter d'un problème dans leur construction, d'un défaut d'entretien, ou d'acte délibéré (bombardement, vandalisme, terrorisme).

L'ordonnance sur la sécurité des ouvrages d'accumulation (OSOA) complète la police des eaux. Cette ordonnance concerne tout ouvrage :

- dont la hauteur de retenue au-dessus du niveau d'étiage du cours d'eau (ou du niveau du terrain naturel) est supérieure ou égale à 10 m ;
- dont la hauteur est comprise en 5 et 10 m, avec une capacité de retenue supérieure à 50 000 m³ ;
- qui représentent un danger particulier pour les biens et les personnes (selon les critères édictés au tableau 3.6).

L'OSOA confie la surveillance des petites retenues aux cantons.

En France, la réglementation relative à la sécurité des barrages a longtemps été dictée par la circulaire interministérielle du 14 août 1970, qui introduisait la notion de « barrage intéressant la sécurité publique » comme seul classement des retenues. Cette circulaire a été récemment abrogée et remplacée par le décret n° 2007-1735 du 11 décembre 2007 relatif à la sécurité des ouvrages hydrauliques. Ce décret introduit un classement avec quatre classes d'ouvrages définies selon la géométrie du barrage et le volume de la retenue (voir tableau 3.4). Le décret n° 93-743 du 29 mars 1993 (modifié par le décret n° 2007-397 du 22 mars 2007) relatif à la nomenclature des opérations soumises à autorisation indique que toute construction d'ouvrage hydraulique est soumise à autorisation préalable ; la seule exception concerne les ouvrages de classe D qui ne barrent pas le lit mineur d'une rivière. Notons enfin que le préfet du département dans lequel l'ouvrage hydraulique est construit peut modifier le classement de cet ouvrage s'il y a suffisamment d'éléments qui établissent un risque pour les personnes et les biens.

Tableau 3.4 : classes de barrage de retenue en France en fonction de la hauteur H (mesurée verticalement entre le terrain naturel et le sommet de l'ouvrage) et V le volume d'eau exprimé en millions de m^3 . D'après le décret du 11 décembre 2007 (Peyras & Mériaux, 2009).

Classe	Caractéristiques géométriques
A	$H \geq 20$ m
B	ouvrage non classé en A, et pour lequel $H^2\sqrt{V} \geq 200$ et $H \geq 10$ m
C	ouvrage non classé en A ou B et pour lequel $H^2\sqrt{V} \geq 20$ et $H \geq 5$ m
D	ouvrage non classé en A, B, ou C et pour lequel $H \geq 2$ m

Le classement a d'importances répercussions tant pour l'instruction du dossier (désignation du service instructeur, éléments du dossier) que pour l'exploitation de l'ouvrage (surveillance et auscultation, visite technique, dossier d'ouvrage, etc.). En particulier, le choix de la période de retour de la crue de projet pour les barrages en remblai dépend de la classe de l'ouvrage et du risque encouru, comme le récapitule le tableau 3.5.

Tableau 3.5 : période de retour minimale de la crue de projet des barrages en remblai en fonction de la classe, de la hauteur H (mesurée verticalement entre le terrain naturel et le sommet de l'ouvrage) et du volume V (exprimé en millions de m^3). D'après (Peyras & Mériaux, 2009).

Classe	Absence d'enjeu	Présence d'enjeu
A	$T = 10\,000$ ans	$T = 10\,000$ ans
B	$T = 5\,000$ ans	$T = 10\,000$ ans
C	$T = 1\,000$ ans	$T = 5\,000$ ans
D avec $H^2V^{1/2} \geq 5$	$T = 500$ ans	$T = 1\,000$ ans
D avec $H^2V^{1/2} < 5$	$T = 100$ ans	$T = 1\,000$ ans

Pour toute information générale, on pourra consulter les deux opuscules sur la sécurité des barrages édités par la Commission internationale des grands barrages « Étude d'onde de submersion de barrage, synthèse et recommandations » (ICOLD, 1998) et « Évaluation du risque dans la gestion de la sécurité du barrage » (ICOLD, 2005).

3.2.2 Cas des petites retenues d'accumulation

En Suisse jusqu'à l'ordonnance sur la sécurité des ouvrages d'accumulation, les nouveaux ouvrages de retenue ont échappé aux contraintes réglementaires imposées aux grands barrages « intéressant la sécurité publique » car le plus souvent, ils sont de petite taille et offrent une capacité de retenue qui reste modérée (de l'ordre de 10^4 – 10^5 m^3) (Bischof *et al.*, 2002a). L'ordonnance a permis de corriger cette situation en

confiant aux cantons le soin d'exercer une surveillance des petits ouvrages. En France, il n'existe pas de réglementation précise pour les petites retenues. Un récent rapport parlementaire – faisant suite à un rapport confidentiel d'EDF éventé par la presse – a pointé la situation jugée préoccupante du parc des barrages en France (Kert, 2008).

Les ouvrages d'accumulation sont pourtant placés dans un milieu naturel hostile et donc exposés à des contraintes sévères (cycle gel/dégel, vieillissement des bétons, géo-membranes, etc.) ainsi qu'à des dangers naturels (mouvement de terrain, avalanche, chute de blocs, etc.). Comme ils sont assez souvent construits à l'amont d'enjeux significatifs (typiquement une station de ski), leur rupture peut éventuellement causer des dommages sévères.

Pourtant, la prise en compte de la sécurité de ces ouvrages n'a été que partiellement prise en compte. Ainsi, une enquête menée dans le canton du Valais a révélé que 41 petites retenues avaient déjà construites et que parmi elles, 11 présentaient une menace sérieuse en cas de rupture. En France, une enquête diligentée par les services du Ministère française en charge de l'agriculture sur la Haute-Savoie en 2005 a mis en évidence des carences graves sur les 16 ouvrages de ce département (Mériaux *et al.*, 2005; Evette *et al.*, 2009):

- absence d'étude d'impact en cas de rupture du barrage pour la majorité des ouvrages ;
- absence de qualification du bureau de maîtrise d'œuvre pour ce type d'ouvrage ;
- étude hydrologique sommaire ;
- évacuateur de crue sous-dimensionné dans 75 % des cas ;
- défaut d'étanchéité des géo-membranes dans 30 % des cas ;
- absence de dispositif d'auscultation et de procédure de suivi dans 80 % des cas.

La responsabilité de la maîtrise d'œuvre, maîtrise d'ouvrage, et des chargés d'étude était soulignée dans cette étude ; on pourrait également dresser la liste des erreurs lourdes dans l'instruction des dossiers d'autorisation de travaux par les services en charge de ces dossiers. Ce qu'il convient donc de pointer ici, c'est l'insuffisance de la sécurité des petits barrages de montagne (Peyras & Mériaux, 2009).

L'effet de la rupture d'un petit barrage est l'un des points les plus importants pour estimer la sécurité d'un barrage et c'est assurément l'un des moins bien traités, ce qui peut s'expliquer par plusieurs éléments :

- forte pente des exutoires (typiquement plus de 10 %) alors que les codes de calcul à disposition des bureaux d'étude ne permettent pas de faire de l'hydraulique au-delà de quelques pour-cent ;
- faible connaissance de la dynamique des ondes de rupture sur forte pente (la solution de Ritter est établie sur fond horizontal) ;
- fort transport solide potentiellement associé à l'onde de rupture ;
- lit mobile composé de blocs de toute taille, dont certains restent en général en

place et influent sur le transport solide (notamment dans les lits avec une structuration alternée en seuils et mouilles);

- volume engagé relativement faible (quelques dizaines de milliers de m³), pour lequel les effets de frottement jouent un rôle essentiel dans la propagation;
- absence de connaissances précises sur les conditions initiales : ouverture d'une brèche dans le cas d'une petite retenue ? Effet de surverse en cas d'avalanche ou de mouvement de terrain (comme pour le Vajont en 1963) ?
- rôle de la rugosité du lit torrentiel (souvent de gros blocs) et des ouvrages de génie civil (ponts, seuils).

En pratique, ni les méthodes analytiques, ni les codes de calcul établis pour la rupture de barrage dans le cas des grandes retenues ne sont applicables pour de petites retenues en montagne. À défaut, les chargés d'étude emploient des méthodes très approximatives, voire fantaisistes comme l'utilisation de formules établies pour des laves torrentielles en régime permanent. Une étude récente menée au Canada sur l'emploi des méthodes dites simplifiées de calcul de l'onde de rupture a ainsi mis en évidence de graves problèmes de dimensionnement (Marche & Oriac, 2005).

3.2.3 Plan des études en ingénierie

Pour les calculs en ingénierie, on a généralement besoin de calculer :

- l'hydrogramme initial : en fonction de la brèche créée dans le barrage, il faut estimer le débit d'eau libéré au cours du temps. Il existe plusieurs méthodes de calcul fondées sur des données historiques (régression sur des observations) ou bien des modèles physiques reproduisant la rupture du remblai ou du béton;
- la propagation de l'onde de crue (*flood routing*) : il faut estimer comment le volume d'eau libéré se propage dans le cours d'eau. Cette estimation peut se faire :
 - à la main à l'aide de méthodes simplifiées;
 - numériquement en se servant de modèles « filaires » (écoulement unidimensionnel);
 - numériquement en utilisant des modèles bidimensionnels de type Saint-Venant.
- l'emprise des zones touchées par la crue : il faut cartographier les zones concernées par l'onde de crue. En Suisse, l'OFEN a fourni des critères pour distinguer différentes classes de danger (voir tableau 3.6).

3.2.4 Charges exceptionnelles

Les barrages sont dimensionnés pour résister à une multitude de phénomènes. Le risque de rupture toléré est généralement de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-4} par an. En termes de

Tableau 3.6 : valeurs seuils pour la mesure du danger en cas d'inondation rapide. D'après les recommandations de l'OFEN (Bischof *et al.*, 2002b).

<i>Valeurs seuils</i>	<i>Effets</i>	<i>Règle d'assujettissement</i>
danger élevé: $h > 2$ m ou $q > 2$ m ² /s	Les personnes sont en danger même à l'intérieur des bâtiments. En cas d'érosion du lit et des berges, il y a aussi menace d'effondrement de constructions situées à proximité. Les laves torrentielles par l'effet de pression peuvent aussi conduire à la destruction de bâtiments.	L'ouvrage d'accumulation est assujetti si au moins une habitation, un lieu de travail, un bâtiment public, une place de camping publique, une route très fréquentée ou une ligne de chemin de fer est touchée.
danger moyen: $2 \geq h > 1$ m ou $2 \geq q > 1$ m ² /s	Les personnes à l'extérieur et dans les véhicules sont menacées. La retraite vers les étages supérieurs des bâtiments est la plupart du temps possible. Des bâtiments, selon leur mode de construction, peuvent subir des dégâts.	L'ouvrage d'accumulation est assujetti si une habitation (de construction légère), un lieu de travail (construction légère), une place de camping publique ou si une route très fréquentée est touchée.
danger modéré: $1 \geq h > 0,5$ m ou $1 \geq q > 0,5$ m ² /s	Les personnes à l'extérieur et dans les véhicules sont menacées. La retraite vers les étages supérieurs des bâtiments est la plupart du temps possible. Des bâtiments, selon leur mode de construction, peuvent subir des dégâts.	L'ouvrage d'accumulation est assujetti si une place de camping publique ou si une route très fréquentée est touchée.
danger faible: $h \leq 0,5$ m ou $q \leq 0,5$ m ² /s	Les personnes ne sont pratiquement pas menacées tant à l'extérieur qu'à l'intérieur des bâtiments.	L'ouvrage d'accumulation n'est pas assujetti.

période de retour (pour des phénomènes hydrologiques), cela veut dire qu'un barrage est généralement dimensionné pour résister à des phénomènes de période de retour 1000 à 10 000 ans. Pendant longtemps seuls les grands barrages étaient assujettis à cette contrainte de sécurité, mais dans de nombreux pays européens, la jurisprudence et l'état de l'art sont en train de changer pour les petits ouvrages.

Un barrage est soumis à des charges permanentes (son poids propre) et variables (la poussée des eaux retenues, les sous-pressions générées par la percolation des eaux sous le barrage), auxquelles il doit pouvoir résister sans dommage jusqu'à l'état limite de service. Il est également soumis à des charges exceptionnelles telles que :

- une crue des cours d'eau dans le bassin-versant alimentant la retenue et conduisant à faire monter le niveau des eaux. Si le niveau de la retenue dépasse le niveau des plus hautes eaux (PHE), le surplus doit être évacué par des évacuateurs de crue ou bien vidangé/turbiné. Certaines retenues comme celle de la Grande Dixence sont dépourvues d'évacuateur ;
- un séisme. Il existe des critères statistiques qui permettent selon la région considérée de définir un « séisme de projet » ou « séisme de vérification » auquel le barrage doit résister ;
- une avalanche ou un mouvement de terrain, qui en entrant dans la retenue peut provoquer une intumescence submergeant le barrage. En Suisse, la période de retour de l'avalanche de projet est de 300 ans ;
- la poussée des glaces, qui peut générer des efforts importants ou endommager la couche de géotextile imperméabilisant une retenue artificielle de petit volume (par exemple pour la production de neige de culture). Le phénomène de poussée des glaces est encore documenté, mais les valeurs citées dans la littérature technique se situent dans une fourchette large 20–300 kN/ml.

3.3 Mécanismes de rupture et hydrogramme initial

Le processus de rupture d'un barrage ou d'une digue a fait l'objet de plusieurs études pour en étudier la dynamique. Cela reste un processus complexe et assez souvent, il est commode de faire l'hypothèse d'un lâcher instantané du volume d'eau : on parle d'*effacement* du barrage. Cette hypothèse va dans le sens de la sécurité, mais peut conduire à majorer le risque hydraulique induit par l'onde de crue, en particulier pour les barrages en remblai (qui sont majoritaires) ou les barrages poids-voûtes ; pour des barrages voûtes en béton, l'hypothèse n'est pas déraisonnable car la rupture se produit en cas des problèmes dans les fondations, les appuis, ou une faiblesse structurelle, autant de problèmes qui peuvent conduire à une ruine rapide de l'ouvrage. D'autres causes exogènes tels que séismes ou attaque militaire sont des scénarios possibles.

3.3.1 Barrage en béton

Pour les barrages en béton, la rupture de barrage implique une fissuration rapide de la voûte en béton et l'ouverture d'une brèche dans des délais courts de quelques secondes. Il est d'usage de considérer que la rupture est soudaine. Tout ou partie de la voûte cède sous le poids de l'eau. Le barrage de Malpasset offre l'exemple d'une brèche de forme grossièrement triangulaire (voir figures 3.7 et 3.17). Le calcul se fait en supposant un effacement brutal de la voûte sur une certaine largeur, largeur qui est un paramètre à faire varier pour étudier l'influence sur l'onde de propagation.



Figure 3.17 : brèche dans la voûte du barrage de Malpasset. Source : www.wikiwand.com.

3.3.2 Barrage en remblai

Pour des barrages en remblai, la rupture se fait graduellement, le plus souvent (i) lors de submersion du remblai pendant des durées significatives, (ii) à cause d'un défaut d'étanchéité ou (iii) en cas de faiblesse dans les fondations ou le sol. On considère qu'il se forme alors une ouverture progressive, appelée *brèche*, sur un temps t_b de plusieurs minutes (parfois quelques dizaines de minutes). On observe que la largeur ℓ de la brèche est généralement située dans la fourchette $h_b \leq \ell \leq 3h_b$, où h_b est la hauteur du barrage. Pour ces barrages, le temps nécessaire à former une brèche varie de façon

considérable (de quelques minutes à quelques heures) selon le matériau et la cause de la rupture. Pour évaluer l'hydrogramme de crue au travers d'une brèche, il faut connaître la dynamique de formation de la brèche. Trois approches sont utilisées (Wu, 2011) :

- les *méthodes empiriques* fournissent les principales dimensions de la brèche, le temps de formation, et le débit de pointe de l'hydrogramme de la crue (ICOLD, 1998; Chinnarasri *et al.*, 2004; Marche, 2008; Froehlich, 2008; Pierce *et al.*, 2010; Thornton *et al.*, 2011; Froehlich, 2016). Ces grandeurs sont obtenues à partir de régressions établies à partir d'événements documentés. Les méthodes empiriques sont simples d'emploi, mais leur marge d'incertitude atteint souvent l'ordre de grandeur pour le débit de pointe.
- les *modèles numériques* examinent l'érosion d'un remblai sous l'effet de l'eau (Singh, 1996; Faeh, 2007; Cao *et al.*, 2011; Wu *et al.*, 2012; Castro-Organ & Hager, 2013; Larocque *et al.*, 2013; Begam *et al.*, 2018). S'ils sont en principe plus précis, ils sont aussi plus gourmands en termes d'information sur la constitution du remblai, l'état initial, et les conditions aux limites. Leur précision est limitée par des connaissances encore imparfaites sur les processus d'érosion.
- les *modèles conceptuels* prédisent la formation progressive d'une brèche à l'aide d'une série d'équations différentielles traduisant l'érosion d'un remblai et l'écoulement en conditions critiques d'une lame d'eau (Walder *et al.*, 2006; Walder & O'Connor, 1997; Ng & Björnsson, 2003; Capart, 2013; De Lorenzo & Macchione, 2013; Wu, 2013; Peter *et al.*, 2018). Ils sont de complexité intermédiaire entre les méthodes empiriques et les modèles numériques.

Ici, on fait le point sur les premières méthodes. Comme souvent en ingénierie, les formules empiriques conduisent à des valeurs très différentes (des écarts supérieurs à 500 % sont possibles) entre elles. Cette variabilité reflète en grande partie la diversité des modes de rupture et de constitution des remblais (granulométrie du remblai, caractéristiques du noyau étanche). Les valeurs calculées précédemment ne sont donc que des estimations très grossières. Une étude de sensibilité doit en général être menée pour apprécier les conséquences du choix de la méthode de formation de la brèche.

Régressions à partir des données caractéristiques

Il existe un grand nombre de relations empiriques établissant une corrélation entre le débit de pointe et des grandeurs représentant le volume d'eau, les dimensions du barrage, et/ou la taille de la brèche. Ces relations ont le plus souvent été obtenues par régression sur des données tirées d'événements documentés. Parmi les plus simples, on trouve la formule de Pierce *et al.* (2010) qui donne le débit de pointe en fonction du volume d'eau V contenu derrière le barrage et la hauteur de ce volume H

$$Q_p = 0,00919V^{0,745}, \quad (3.1)$$

ou bien

$$Q_p = 0,0176(VH)^{0,606}, \quad (3.2)$$

avec V volume en m^3 , H en m, et Q_p en m^3/s . Certaines formules fournissent également le débit maximal. La formule de Froehlich (1995) a été établie sur 22 événements bien documentés ; elle donne l'estimation suivante

$$Q_p = 0,607V_w^{0,295}H_w^{1,24}, \quad (3.3)$$

avec h_W la hauteur au droit de la brèche et V_W le volume d'eau vidangé. Le tableau 3.7 recense quelques-unes de ces régressions tandis que la figure 3.18 montre qu'il existe une grande dispersion des données (et cela est vrai quelle que soit la régression choisie).

Tableau 3.7 : formule empirique donnant le débit de pointe en fonction du volume d'eau V contenu derrière le barrage, la hauteur de ce volume H , la hauteur d'eau au droit de la brèche H_w , et le débit vidangé V_w . La hauteur H_w correspond à la hauteur h sur la figure 3.20. On a également reporté le coefficient de détermination R^2 et le nombre de cas considéré pour la régression.

Référence	cas	formule	R^2
Kirkpatrick (1977)	13	$Q_p = 1,268(H_w + 0,3)^{2,5}$	0,79
Pierce <i>et al.</i> (2010)	72	$Q_p = 0,874H^{2,68}$	0,633
Pierce <i>et al.</i> (2010)	87	$Q_p = 0,00919V^{0,745}$	0,805
MacDonald & Langridge-Monopolis (1984)	23	$Q_p = 1,154(H_wV_w)^{0,412}$	0,788
Costa (1988)	31	$Q_p = 0,763(H_wV_w)^{0,42}$	0,745
Pierce <i>et al.</i> (2010)	87	$Q_p = 0,0176(HV)^{0,606}$	0,844
Froehlich (1995)	22	$Q_p = 0,607H_w^{1,24}V_w^{0,295}$	
Pierce <i>et al.</i> (2010)	87	$Q_p = 0,038H^{1,09}V^{0,475}$	0,85

Temps de formation de la brèche

D'autres formules ont été établies pour fournir plus d'éléments sur l'hydrogramme de crue, notamment le temps de formation de la brèche. Ainsi, Fread et Harbaugh donne la formule suivante pour estimer l'ordre de grandeur de la largeur ℓ de la brèche au bout d'un temps t_b (ICOLD, 1998; Marche, 2008)

$$\ell = 0,657K_0\sqrt[4]{Vh} \text{ et } t_b = 7,14 \times 10^{-3} \frac{V^{0,47}}{h^{0,9}}, \quad (3.4)$$

avec V volume en m^3 , h hauteur d'eau de la retenue en m, et K_0 un facteur qui vaut 1 pour une rupture par submersion et 0,7 pour une rupture par érosion interne. Singh (1996) propose plusieurs formules en fonction du rapport $\zeta = h_s/h$ (avec h la hauteur du barrage et $h_s = \sqrt[3]{V}$ une hauteur représentative du volume V de la retenue). La hauteur d (\bar{d} sa valeur moyenne) et la largeur ℓ de la brèche sont données par

$$\frac{\ell}{d} = 0,4\zeta. \quad (3.5)$$

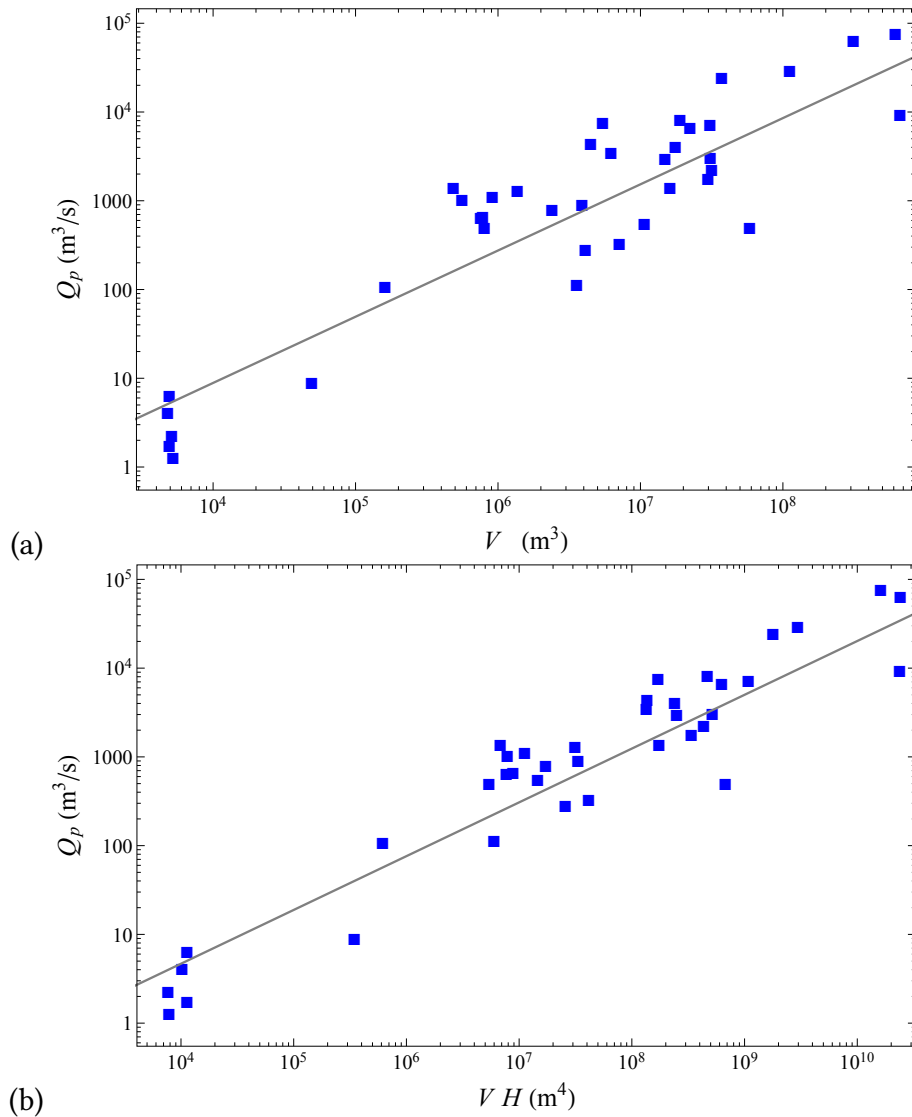


Figure 3.18 : (a) relation entre volume du barrage V et débit de pointe Q_p ; la courbe de régression (3.1) donne la tendance moyenne. (b) relation entre le produit VH (volume \times hauteur d'eau derrière le barrage) et débit de pointe Q_p ; la courbe de régression (3.2) donne la tendance moyenne. D'après (Pierce *et al.*, 2010).

La brèche se forme en un temps

$$t_b = 1,5 \sqrt{\frac{h}{g} \frac{h}{d}} \zeta,$$

tandis que le débit de pointe lors de la rupture est

$$Q_p = 0,0125\zeta\sqrt{gh^3\bar{d}^2}.$$

On se reportera au rapport de Wahl (1998) (US Bureau of Reclamation) pour une analyse plus complète des formules empiriques de calcul des paramètres de brèche. Sur la base de 74 ruptures de digue, Froehlich (2008) arrive aux corrélations suivantes

$$\ell = 0,27k_0V^{0,32}H_b^{0,04} \text{ et } t_b = 63,2\sqrt{\frac{V}{gh_b^2}}, \quad (3.6)$$

avec $k_0 = 1,3$ si la rupture intervient par surverse et $k_0 = 1,0$ dans les autres cas.

Recommandations OFEN

En Suisse, l'Office fédéral de l'énergie (OFEN) recommande de procéder ainsi pour le scénario de rupture (Bischof *et al.*, 2002b):

- pour les barrages-voûtes et barrages-poids: rupture totale et instantanée de tout le barrage (voir § 3.3.1);
- pour les digues: formation d'une brèche de forme trapézoïdale de base égale à deux fois la hauteur d'eau et avec une pente de talus de 1:1 (en veillant à ce que la surface ne soit pas plus grande que la digue elle-même);
- pour les barrages mobiles: rupture totale ou partielle en fonction du type de construction.

Le niveau d'eau est généralement le niveau des plus hautes eaux (PHE) admis dans la retenue. Pour certains petits ouvrages, en particulier en cas d'obstruction de l'évacuateur de crue par des flottants, il convient de prendre la hauteur du barrage (jusqu'au couronnement) comme niveau d'eau initial avant la rupture.

Le débit initial (au moment de la rupture) dépend de la forme de la brèche dans la digue. La figure 3.19 et le tableau 3.8 recensent quelques formules empiriques.

Tableau 3.8 : débit instantané au moment de la rupture. Pour les talus, on considère des déclivités (fruit) de $1/m$. ℓ désigne la largeur au miroir pour les profils paraboliques et rectangulaires, mais la base du trapèze pour une section trapézoïdale. D'après les recommandations de l'OFEN (Bischof *et al.*, 2002b).

Forme de la brèche		Débit instantané
triangulaire	(a)	$Q_b = 0,72mh^{5/2}$
trapézoïdale	(b)	$Q_b = 0,93\ell h^{3/2} + 0,72mh^{5/2}$
rectangulaire	(c)	$Q_b = 0,93\ell h^{3/2}$
parabolique	(d)	$Q_b = 0,54\ell h^{3/2}$

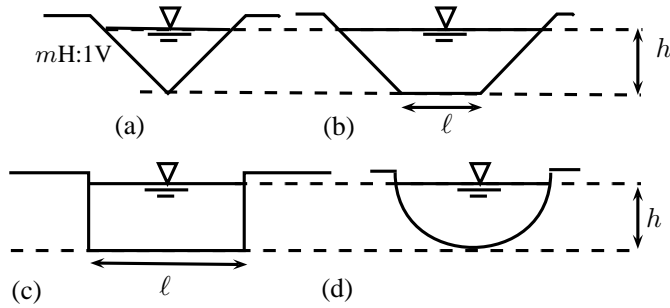


Figure 3.19 : forme des brèches considérée dans les calculs.

3.3.3 Barrage naturel en remblai

On considère des barrages naturels résultant d'un glissement de terrain, de moraines ou de laves torrentielles, et formant un lac d'accumulation. Pour des lacs morainiques, [Costa & Schuster \(1988\)](#) ont proposé une relation donnant le débit de pointe en fonction de l'énergie potentielle du lac (voir figure 3.20)

$$Q_p = 0,063(\rho gbV)^{0,42}, \quad (3.7)$$

avec V le volume d'eau vidangé (en m^3), g l'accélération de la gravité, b la cote moyenne du fond de la brèche par rapport à un plan de référence (en m), et ρ la masse volumique de l'eau (en $kg\ m^{-3}$). Voir aussi ([Clague & Evans, 2000](#)). Molinaro a retravaillé sur les données obtenues par Costa pour arriver à la formule basée sur une analyse dimensionnelle ([ICOLD, 1998](#))

$$Q_p = 0,116h^2\sqrt{gh}\left(\frac{V}{h^3}\right)^{0,22}. \quad (3.8)$$

Pour des digues fusibles (en remblai grossier), la rupture se fait beaucoup plus rapidement, et Lempérière a proposé une équation dérivée de la formule de Molinari ([ICOLD, 1998](#))

$$Q_p = 0,07h^2\sqrt{gh}\left(\frac{V}{h^3}\right)^{0,5}, \quad (3.9)$$

atteint en un temps

$$t_b = 10\sqrt{h\frac{V}{g}}. \quad (3.10)$$

[Walder & O'Connor \(1997\)](#) ont examiné 72 événements suffisamment documentés. Ils ont calculé soit la tendance moyenne donnant le débit de pointe en fonction d'une variable-clé (V volume d'eau vidangé lors de la rupture, b cote de la brèche, bV énergie potentielle), soit la courbe enveloppe fournissant la borne supérieure. On note la marge d'incertitude considérable associée (voir figure 3.21). Le tableau 3.9 fournit les valeurs des courbes de régression ou enveloppe selon la nature du matériau.

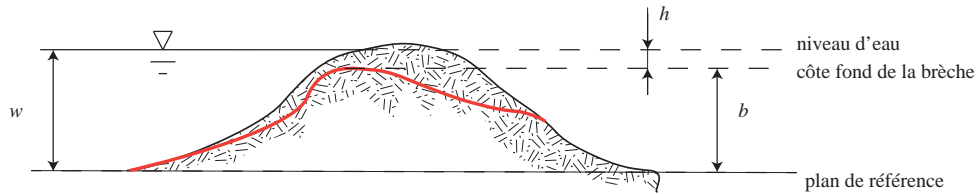


Figure 3.20 : coupe à travers un barrage naturel. La ligne rouge représente le fond de la brèche qui s'est formée à travers le remblai.

Tableau 3.9 : équations donnant le débit de pointe Q_p et le matériau du remblai. On cale soit une loi de régression, soit une courbe enveloppe. Les valeurs des paramètres selon le type de variable choisie (V volume d'eau vidangé lors de la rupture, b cote de la brèche, bV énergie potentielle) sont indiquées ainsi que le coefficient de détermination R^2 . D'après (Walder & O'Connor, 1997).

	a	A	c	R^2
équation $Q_p = aV^c$ (rég.) ou $Q_p = AV^c$ (env.)				
<i>glissement de terrain</i>	1,6	46	0,46	0,73
<i>barrage construit</i>	1,16	8,5	0,46	0,60
<i>moraine</i>	0,045	0,22	0,66	0,62
équation $Q_p = ab^c$ (rég.) ou $Q_p = Ab^c$ (env.)				
<i>glissement de terrain</i>	6,7	200	1,73	0,53
<i>barrage construit</i>	2,5	12	2,34	0,82
<i>moraine</i>	60,3	610	0,84	0,09
équation $Q_p = a(bV)^c$ (rég.) ou $Q_p = A(bV)^c$ (env.)				
<i>glissement de terrain</i>	0,99	25	0,4	0,76
<i>barrage construit</i>	0,61	2,9	0,43	0,70
<i>moraine</i>	0,19	1,1	0,47	0,49

3.3.4 Barrage glaciaire

Des lacs glaciaires peuvent se former lorsqu'une vallée est barrée par un chute de glace. La vidange du lac glaciaire peut se produire lorsque (Walder & Costa, 1996) :

- l'eau creuse un tunnel (ou plusieurs) entre la base rocheuse et le barrage de glace, mais le processus est instable et conduit souvent à la fermeture du tunnel ;
- la poussée de l'eau ou bien sur la surverse provoque l'effondrement du barrage de glace. Dans ce cas, la configuration de la rupture est similaire à celle d'un barrage en remblai naturel.

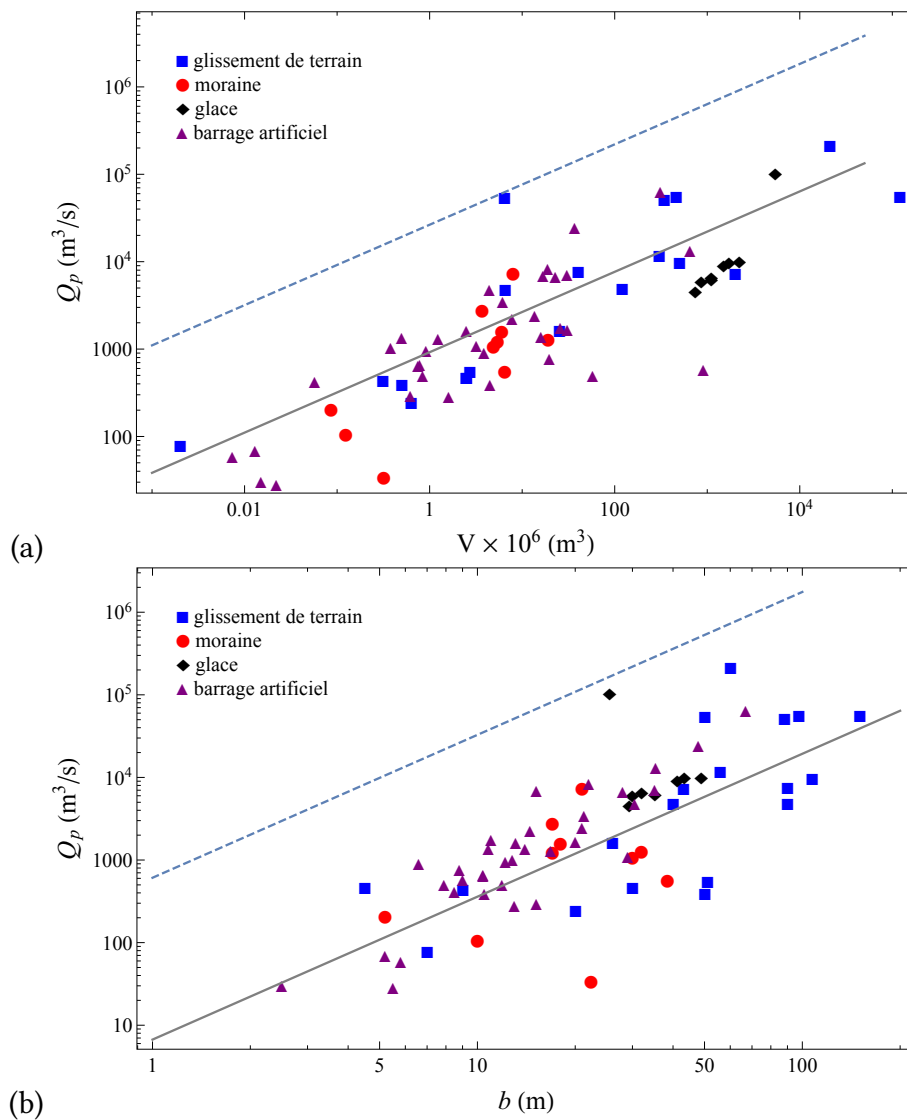


Figure 3.21 : (a) relation entre volume vidangé V et débit de pointe Q_p ; la courbe de régression $Q_p = 1,6V^{0,46}$ (courbe continue) donne la tendance moyenne, tandis que l'enveloppe (courbe discontinue) $Q_p = 46V^{0,46}$ montre la borne supérieure. (b) relation entre cote de la brèche d et débit de pointe Q_p ; la courbe de régression $Q_p = 6,7d^{1,73}$ (courbe continue) donne la tendance moyenne, tandis que l'enveloppe $Q_p = 610V^{1,73}$ (courbe discontinue) $Q_p = 46V^{0,46}$ montre la borne supérieure. Dans chaque cas, on distingue la nature du matériau constituant le barrage. D'après (Walder & O'Connor, 1997).

À partir de l'étude de 10 ruptures de barrages glaciaires, Clague & Mathews (1973) ont trouvé que le débit de pointe Q_p était corrélé au volume vidangé V

$$Q_p = KV^b,$$

avec Q_p en m^3/s , V exprimé en $10^6 \text{ m}^3/\text{s}$, $K = 75$ et $b = 0,67$ (Clague & Mathews, 1973; Costa, 1988; Walder & Costa, 1996; Ng & Björnsson, 2003). Sur la base d'une étude portant sur 72 événements documentés, Walder & Costa (1996) ont trouvé que la vidange par tunnel était le scénario majoritairement observé (avec 90 % des occurrences) et que le débit de pointe associé était bien plus faible que pour des ruptures classiques (voir figure 3.22):

$$Q_p = 0,005V^{0,66} \text{ avec } R^2 = 0,70, \quad (3.11)$$

avec V exprimé en $10^6 \text{ m}^3/\text{s}$ et Q_p en m^3/s . Pour des ruptures sans tunnel, Walder & Costa (1996) ont trouvé des régressions proches de celle obtenue par Clague & Mathews (1973) ou pour des glissements de terrain dans le tableau 3.9:

$$Q_p = 2,51V^{0,44} \text{ avec } R^2 = 0,58. \quad (3.12)$$

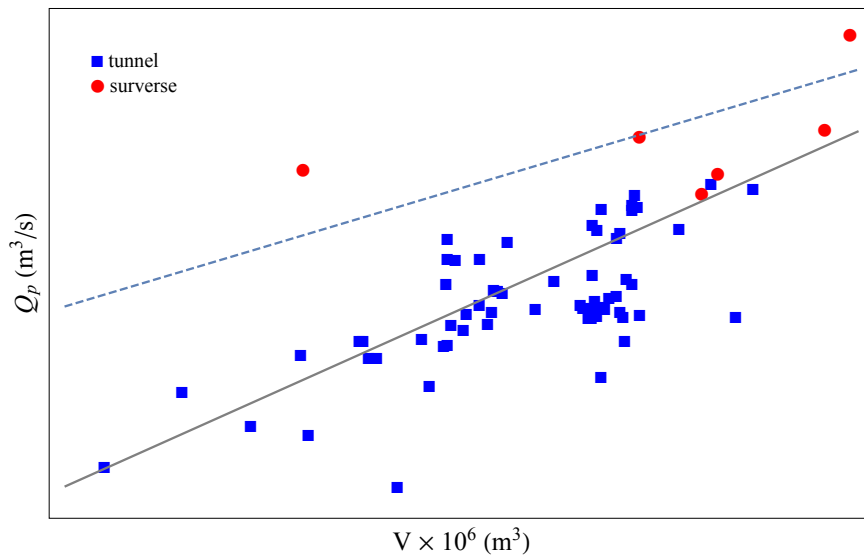


Figure 3.22 : relation entre volume vidangé V et débit de pointe Q_p . La courbe continue montre l'équation (3.11), tandis que la courbe discontinue représente l'équation (3.12). D'après (Walder & Costa, 1996).

3.4 Rupture de barrage en régime laminaire



- Vous souvenez-vous des équations de Navier-Stokes? Qu'est ce que l'adimensionnalisation des équations?
- ↪ Voir le cours de [mécanique des fluides](#).
- Connaissez-vous la méthode des caractéristiques pour résoudre une équation aux dérivées partielles?
- ↪ Voir la méthode dans l'annexe 2, § 2.1.1
- Qu'est ce que la diffusion? la diffusion-convection?
- ↪ Voir la définition au § 1.5.3.
- Qu'est ce qu'une solution auto-similaire?
- ↪ Voir la définition dans l'annexe 1, § 1.7.5.
- Qu'est ce que la méthode aux perturbations?
- ↪ Voir la définition dans l'annexe 1, § 1.7.3.

Nous allons commencer par étudier la rupture de barrage pour des fluides newtoniens en régime laminaire. Cela ne concerne donc pas directement les écoulements d'eau claire (qui sont en régime turbulent). Cette étude représente deux intérêts :

- mieux comprendre les processus d'écoulements dans une géométrie de rupture de barrage en l'absence d'inertie ;
- développer des modèles théoriques pour décrire des écoulements naturels qui peuvent, en première approximation être considérés comme des écoulements newtoniens laminares.

En effet, quoique les matériaux naturels ne soient pas newtoniens, le modèle newtonien peut néanmoins offrir une première approximation du comportement. C'est ainsi que des modèles d'écoulement newtonien ont été employés pour décrire le mouvement d'avalanches ([Dent & Lang, 1983](#)) ou des laves torrentielles ([Hunt, 1994](#)).

3.4.1 Équations du mouvement

Nous allons résoudre l'équation de Huppert, qui représente le mouvement d'un fluide très visqueux sur un plan incliné :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\rho g h^2 \sin \theta}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (3.13)$$

Notons que cette équation est obtenue à partir des équations de Navier-Stokes en supposant que les termes inertiels sont négligeables et en utilisant l'approximation d'onde

cinématique (Huppert, 1982):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}h}{\partial x} = 0 \text{ avec } \bar{u} = \frac{\rho g h^2 \sin \theta}{3\mu}.$$

Les conditions aux limites sont données à la figure 3.23 : il s'agit du lâcher d'un volume fini de fluide. On suppose pour simplifier que la forme initiale est rectangulaire.

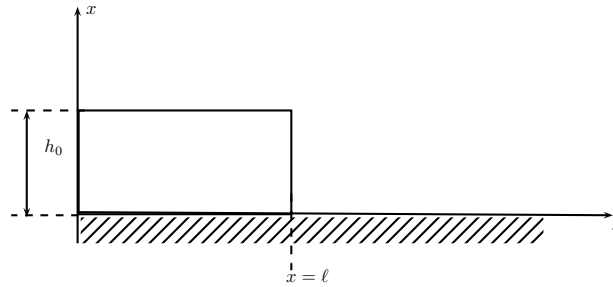


Figure 3.23 : configuration initiale de l'écoulement.

Il s'agit d'une équation non linéaire de convection de la forme $\partial_t h + c(h)\partial_x h = 0$ avec $c(h) = \rho g h^2 \sin \theta / \mu$ ou bien encore $\partial_t h + \partial_x f(h) = 0$ avec $f(h) = \rho g h^3 \sin \theta / (3\mu)$.

Cette équation se résout assez simplement avec les conditions aux limites. Il s'agit en effet d'un double problème de Riemann, un premier en $x = 0$ et un autre en $x = \ell$.

3.4.2 Problème de Riemann : définition

On appelle *problème de Riemann* un problème aux valeurs initiales de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x [f(h)] &= 0, \\ h(x, 0) = h_0(x) &= \begin{cases} h_L & \text{si } x < 0, \\ h_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.14)$$

avec h_L et h_R deux constantes. Ce problème correspond à l'évolution d'une fonction h initialement constante par morceaux, avec une discontinuité en $x = 0$. Ce problème est fondamentale pour la résolution théorique de problèmes ainsi que la résolution numérique des équations hyperboliques. En hydraulique, il a également son importance car la configuration étudiée correspond à la rupture d'un barrage sur fond sec ou humide. Dans le cas linéaire, une discontinuité initiale se propage ; réciproquement pour qu'une solution soit discontinue, il faut qu'elle le soit initialement. Le cas non linéaire est un peu complexe.

On va voir que selon que h_R est plus grand ou plus petit que h_L , différentes solutions peuvent être générées. Lorsque $f'(h)$ est une fonction croissante ($f''(h) > 0$)

et que $h_L < h_R$, la solution initialement discontinue devient continue car une onde dite de détente permet de relier les deux états initiaux et donc d'atténuer la discontinuité initiale. Inversement lorsque $h_L > h_R$, la discontinuité initiale se propage et la solution reste discontinue. Rappelons par ailleurs que même si la solution est initialement continue, une équation non linéaire peut générer des discontinuités au cours du temps. Lorsque la fonction f est elle-même complexe, des solutions plus ou moins compliquées au problème de Riemann peuvent en résulter.

3.4.3 Problème de Riemann : solution

Cas linéaire

Considérons tout d'abord le cas linéaire où $f(u) = au$, avec a une constante. La solution est triviale :

$$u(x, t) = u_0(x - at) = \begin{cases} u_L & \text{si } x - at < 0, \\ u_R & \text{si } x - at > 0. \end{cases}$$

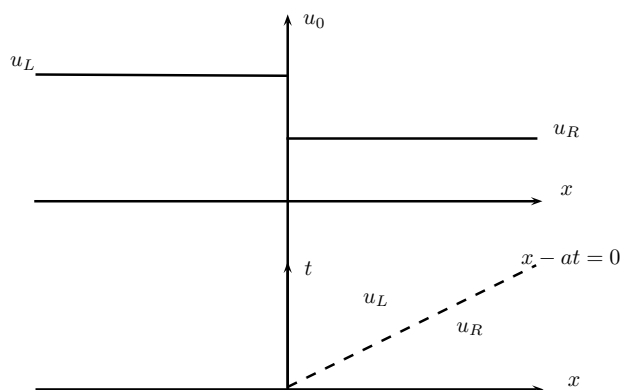


Figure 3.24 : problème de Riemann dans le cas linéaire.

La discontinuité se propage avec une vitesse a , avec a vérifiant la relation de Rankine-Hugoniot

$$a = \frac{[[f(u)]]}{[[u]]} = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L}. \quad (3.15)$$

Cas non linéaire

Cas général du flux convexe ($f'' > 0$) Dans le cas général (où $f'' \neq 0$), le problème de Riemann est un problème aux valeurs initiales de la forme suivante :

$$\partial_t u + \partial_x [f(u)] = 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < 0, \\ u_R & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

avec u_L et u_R deux constantes. On suppose que $f'' > 0$ en tout premier lieu ; le cas d'un flux non convexe sera considéré après. On va montrer qu'il existe deux types possibles de solution :

- soit une solution appelée *onde de détente* (ou bien onde simple) qui est continue,
- soit une solution discontinue qui représente la propagation de la discontinuité initiale (*onde de choc*).

Physiquement, une seule de ces solutions est possible et le choix sera dicté par une condition (dite d'entropie) selon la valeur respective de u_L et u_R .

Onde de détente. Notons tout d'abord que cette équation est invariante par la transformation $x \rightarrow \lambda x$ et $t \rightarrow \lambda t$. Une solution générale peut donc être recherchée sous la forme $U(\xi)$ avec $\xi = x/t$. En reportant cette forme générale dans l'équation aux dérivées partielles, on obtient une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$(f'(U(\xi)) - \xi) U' = 0.$$

Il y a deux types de solution à cette équation :

- *onde de détente*: $(f'(U(\xi)) - \xi) = 0$. Si $f'' > 0$, alors $f'(u_R) > f'(u_L)$; l'équation $f'(U) = \xi$ admet une seule solution lorsque $f'(u_R) > \xi > f'(u_L)$. On dit que u_L est relié à u_R par une *onde de détente*: $\xi = f'(U(\xi))$. En inversant f' , on trouve la solution recherchée

$$u(x, t) = f'^{(-1)}(\xi) ;$$

- *état constant*: $U'(\xi) = 0$. C'est la solution triviale $u(x, t) = \text{cte}$. Cette solution ne vérifie pas le problème initial.

La solution s'écrit donc

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } \frac{x}{t} \leq f'(u_L), \\ f'^{(-1)}(\xi) & \text{si } f'(u_L) \leq \frac{x}{t} \leq f'(u_R) \\ u_R & \text{si } \frac{x}{t} \geq f'(u_R). \end{cases} \quad (3.16)$$

Onde de choc. On a précédemment vu que l'existence de solutions faibles (discontinues) à l'équation différentielle hyperbolique (3.14). En admettant une discontinuité le long d'une droite $x = s(t) = \dot{s}t$, on tire: $[[f(u)]] = \dot{s}[[u]]$. La solution est alors :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < \dot{s}t, \\ u_R & \text{si } x > \dot{s}t. \end{cases}$$

Il y a alors formation d'une onde de choc de vitesse \dot{s} donnée par :

$$\dot{s} = \frac{[[f(u)]]}{[[u]]} = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L}. \quad (3.17)$$

Sélection de la solution physique. Deux cas de figures peuvent se présenter (rappelons que $f'' > 0$). On appelle $\lambda(u) = f'(u)$ la vitesse caractéristique (voir section ci-dessous); c'est la pente de la caractéristique (droite) du problème.

- 1^{er} cas: $u_R > u_L$. Puisque $f'' > 0$, alors $\lambda(u_R) > \lambda(u_L)$. À l'instant initial $t = 0$, les deux caractéristiques définissent un cône. L'équation $\xi = f'(U(\xi))$ a une solution sur l'intervalle $\lambda(u_R) > \xi > \lambda(u_L)$. Voir Fig. 3.25;
- 2^{ème} cas: $u_R < u_L$. Les caractéristiques se croisent dès le temps initial $t = 0$. Le choc se propage à une vitesse $\lambda(u_R) < \dot{s} < \lambda(u_L)$. Cette dernière condition s'appelle *condition de Lax*; elle définit si la vitesse d'un choc est physiquement admissible.

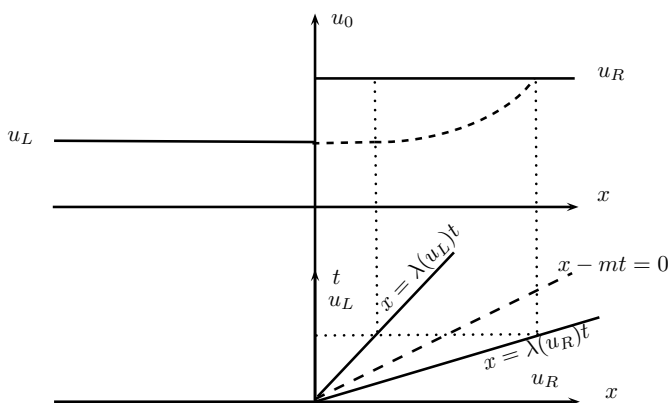


Figure 3.25 : problème de Riemann dans le cas $u_R > u_L$.

3.4.4 Résolution des équations de Huppert

Il faut donc chercher les chocs et les ondes de détente associées à cette équation. Pour les solutions de type choc présentant une discontinuité en $x = s(t)$, on a une relation qui donne h de part et d'autre de $x = s$

$$\dot{s}[[h]] = [[f(h)]] \tag{3.18}$$

en fonction de \dot{s} la vitesse de la discontinuité. Les ondes de détente sont des solutions auto-similaires de la forme $\mathcal{H}(\xi)$ avec $\xi = x/t$. Ici, en substituant $h(x, t)$ par $\mathcal{H}(\xi)$ dans (3.13), on obtient

$$\mathcal{H}'(-\xi + c(\mathcal{H})) = 0,$$

ce qui veut dire qu'on a soit $\mathcal{H}' = 0$, soit

$$\mathcal{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho g \sin \theta}} \xi. \tag{3.19}$$

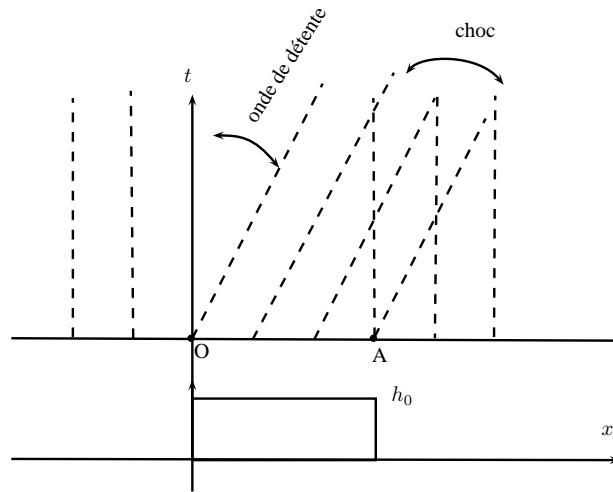


Figure 3.26 : caractéristiques.

Notons que mise sous forme caractéristique, l'équation (3.13) s'écrit

$$\frac{dh}{dt} = 0 \text{ le long de } \frac{dx}{dt} = c(h). \quad (3.20)$$

Il s'ensuit qu'initialement les caractéristiques sont des droites, dont la pente est donnée par $c(h_0)$ comme le montre la figure 3.26.

Dans les tout premiers temps, il se développe

- à droite un choc. D'après (3.17), on a

$$\begin{aligned} \dot{s}_0[[h]] &= [[f(h)]], \\ \dot{s}_0(0 - h_0) &= f(0) - f(h_0), \\ \dot{s}_0 &= \frac{f(h_0)}{h_0} = \frac{\rho g h_0^2 \sin \theta}{3\mu} \end{aligned}$$

donc la caractéristique émanant de A a pour équation

$$x = l + \dot{s}_0 t = l + \frac{1}{3} \frac{\rho g h_0^2 \sin \theta}{\mu} t.$$

- à gauche une onde de détente. La solution est donnée par (3.16). Du point O, il part un faisceau en éventail de courbes caractéristiques d'équation

$$x = mt,$$

avec m un réel variant entre 0 et $m_0 = \rho g h_0^2 \sin \theta / \mu$.

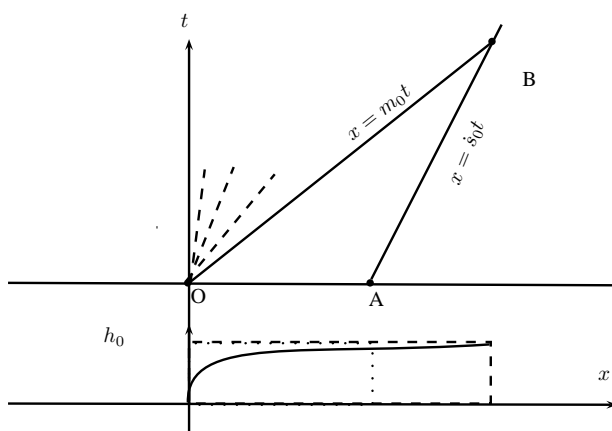


Figure 3.27 : rencontre des deux caractéristiques.

Les deux caractéristiques $x = m_0 t$ et $x = \ell + \dot{s}_0 t$ se rencontrent au point B au temps t_B

$$t_B = \frac{\ell}{m_0 - \dot{s}_0} = \frac{3}{2} \frac{\mu \ell}{\rho g h_0^2 \sin \theta}.$$

L'abscisse de B sera

$$x_B = m_0 t_B = \frac{3}{2} \ell.$$

La solution aux temps courts ($0 \leq t \leq t_B$) est donc

$$h(x, t) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho g \sin \theta} \frac{x}{t}} \text{ pour } 0 \leq x \leq m_0 t, \quad (3.21)$$

$$h(x, t) = h_0 \text{ pour } m_0 t \leq x \leq \ell + \dot{s}_0 t \quad (3.22)$$

$$h(x, t) = 0 \text{ pour } x > s(t) = \ell + \dot{s}_0 t \text{ ou } x < 0. \quad (3.23)$$

On vérifie par intégration que le volume est bien conservé.

Pour $t > t_B$, la hauteur à droite de $x = s(t)$ est toujours 0, mais à gauche la hauteur a diminué; elle vaut d'après (3.13)

$$h_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho g \sin \theta} \frac{s}{t}}$$

d'où l'on déduit la nouvelle vitesse de choc

$$\begin{aligned} \dot{s}[[h]] &= [[f(h)]], \\ \dot{s}(0 - h_s) &= f(0) - f(h_s), \\ \dot{s} &= \frac{f(h_s)}{h_s} = \frac{\rho g h_s^2 \sin \theta}{3\mu} = \frac{1}{3} \frac{s}{t}. \end{aligned}$$

En intégrant cette équation on trouve que la caractéristique associée au choc est

$$s(t) = x_B \left(\frac{t}{t_B} \right)^{1/3} = \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} \frac{\rho g h_0^2 \ell^2 \sin \theta}{\mu} t \right)^{1/3} = At^{1/3},$$

avec $A = \left(\frac{9}{4} \frac{\rho g h_0^2 \ell^2 \sin \theta}{\mu} \right)^{1/3}$. La solution aux temps longs ($t > t_B$) est donc

$$h(x, t) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho g \sin \theta} \frac{x}{t}} \text{ pour } 0 \leq x \leq At^{1/3}, \quad (3.24)$$

$$h(x, t) = 0 \text{ pour } x > s(t) = At^{1/3} \text{ ou } x < 0. \quad (3.25)$$

3.5 Rupture de barrage d'un fluide non visqueux

Nous allons nous intéresser à la rupture d'un barrage contenant un volume de fluide non visqueux. Contrairement au cas précédent (§ 3.4), nous négligeons ici tout effet dissipatif lié à la viscosité du fluide. On va tout d'abord étudier le cas d'un barrage contenant un volume infini de fluide sur un fond horizontal ; la solution est connue sous le nom de *solution de Ritter* car c'est Ritter (1892)⁴ qui l'a établie à la fin du XIX^e siècle. On va obtenir la solution de Ritter à l'aide différentes techniques, ce qui permettra de se familiariser avec ces techniques. Puis nous verrons comment prendre en compte l'effet d'un volume fini de fluide et l'effet de la pente. L'effet du frottement visqueux sera examiné ultérieurement.

3.5.1 Rupture de barrage d'un volume infini (solution de Ritter)

On considère un mur vertical qui retient un lac de retenue, dont le volume est supposé infini. La hauteur d'eau initiale est h_i . À l'instant $t = 0$, on suppose que le mur du barrage s'efface totalement et laisse s'écouler le volume d'eau sur un lit horizontal. C'est la géométrie la plus simple qu'on puisse imaginer. Le problème correspondant est appelé problème de rupture de barrage. La première solution analytique connue est due à Ritter. La méthode classique de résolution est fondée sur la *méthode des caractéristiques*. Nous allons voir cette méthode ainsi qu'une autre approche dite « méthode des formes autosimilaires » qui exploite les propriétés d'invariance des équations différentielles.

Rappelons que lorsqu'on néglige le frottement sur le fond et qu'on considère un fond horizontal, les équations de Saint-Venant s'écrivent sous forme non conservative

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (3.27)$$

4. August Ritter (1826–1908) était un ingénieur (génie mécanique) allemand. Il commença sa carrière dans des usines fabriquant des machines, puis en 1859 il obtient un poste à l'université d'Hannovre. Il fut nommé professeur de mécanique à Aix-la-Chapelle en 1870, où il finit sa carrière. Ses recherches l'ont amené à s'intéresser à différents problèmes pratiques de la mécanique et de la thermique. En particulier, il proposa en 1892 la première solution analytique du problème de rupture de barrage. En fait, la première solution mathématique de ce type de problème est vraisemblablement dû au mathématicien allemand Georg Friedrich Bernhard Riemann, qui proposa en 1859 une méthode générale de résolution des équations hyperboliques comme celles de Saint-Venant.

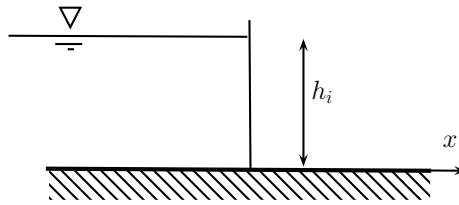


Figure 3.28 : géométrie du problème dit de « rupture de barrage ».

Dans le cas d'une rupture de barrage, les conditions initiales et aux limites sont les suivantes

$$\begin{aligned} -\infty < x < \infty, u(x,0) &= 0, \\ x < 0, h(x,0) &= h_i, \\ x > 0, h(x,0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Méthode des formes auto-similaires



- Comment s'écrivent les équations de Saint-Venant sous forme conservative ?
- ↪ Voir la définition au § 1.2.2.
- Qu'est ce qu'une solution auto-similaire ?
- ↪ Voir la définition dans l'annexe 1, § 1.7.5.

On recherche une solution sous la forme d'une solution auto-similaire

$$\bar{u} = t^{\beta/\alpha} U(\zeta) \text{ et } h = t^{\gamma/\alpha} H(\zeta),$$

avec $\zeta = x/t^\alpha$ la variable de similarité, H et U deux fonctions à déterminer. En remplaçant \bar{u} et h par leur forme auto-similaire dans les équations (3.26–3.27), on trouve : $\beta + \alpha = 1$ et $\gamma + 2\alpha = 2$. Pour que cette solution satisfasse les conditions initiales et aux limites, on doit poser $\beta = \gamma = 0$, d'où $\alpha = 1$. Le système d'équations (3.26–3.27) devient alors

$$\begin{aligned} H \frac{dU}{d\zeta} + (U - \zeta) \frac{dH}{d\zeta} &= 0, \\ (U - \zeta) \frac{dU}{d\zeta} + g \frac{dH}{d\zeta} &= 0 \end{aligned}$$

On aboutit alors à un système d'équations, qui mis sous forme matricielle s'écrit

$$\begin{pmatrix} H & U - \zeta \\ U - \zeta & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U' \\ H' \end{pmatrix} = 0,$$

où le prime symbolise la dérivée selon ζ . Pour que ce système admette une solution non triviale, il faut que son déterminant s'annule, ce qui conduit à $gH = (U - \zeta)^2$. On substitue cette relation dans le système d'équations ci-dessus et on tire $U' = 2\zeta/3$, d'où $U = 2(\zeta + c)/3$, où c est une constante d'intégration, $H = 4(c - \frac{1}{2}\zeta)^2/(9g)$. La constante c_0 est trouvée en se servant des conditions aux limites: $c_0 = \sqrt{gh_i}$. Retournant aux variables originales, on déduit finalement la solution dite de Ritter des équations de Saint-Venant

$$\bar{u}(x, t) = \bar{u} = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} + c_0 \right), \quad (3.29)$$

$$h(x, t) = \frac{1}{9g} \left(-\frac{x}{t} + 2c_0 \right)^2. \quad (3.30)$$

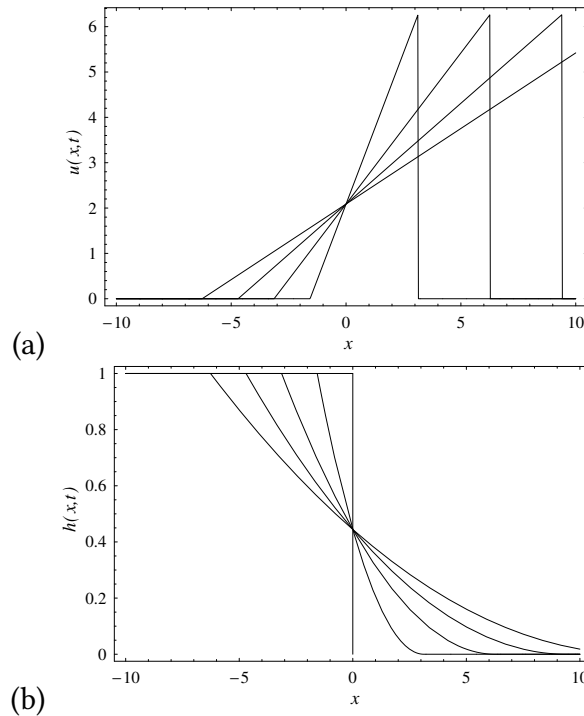


Figure 3.29 : solution du problème de rupture de barrage aux temps: $t = 0; 0,5 \text{ s}; 1 \text{ s}; 1,5 \text{ s}; 2 \text{ s}$. (a) Variation de la vitesse moyenne u en fonction de x pour les différents temps; notons que la variation verticale au niveau du front n'est pas la solution physique et ne sert ici qu'à positionner le front. (b) variation de la hauteur en fonction de x pour différents temps.

La justification du terme de forme auto-similaire apparaît clairement quand on examine la solution tracée sur la figure 3.29: les solutions se ressemblent toutes et semblent

être des formes « étirées » à partir d'une seule courbe. Quelques autres remarques :

- le front est le point où $h = 0$, donc ici c'est le point tel que $x = 2c_0t$, ce qui indique que la vitesse du front est $u_f = 2c_0$. C'est une valeur qui ne dépend que de la hauteur initiale et d'aucun autre paramètre (comme le volume de fluide). Cette valeur est aussi le double de la célérité des ondes en eau peu profonde $c_0 = \sqrt{gh_i}$;
- la forme du front est parabolique : le fluide se présente comme une lame de plus en plus fine au fur et à mesure que l'on s'approche du front. Cela n'est pas cohérent avec les observations puisqu'en général le front se présente plutôt comme un mur d'eau. On verra comment on peut expliquer cela en faisant intervenir localement la rugosité du lit (voir § 3.7.1);
- toutes les courbes $h(x, t)$ passent par le point $x = 0$ et $h = 4c_0^2/(9g) = 4h_i/9$. De même, toutes les courbes $u(x, t)$ passent par le point $x = 0$ et $u = 2c_0/3$. Cela montre que la rupture de barrage est équivalent à injecter un débit constant et égal à $uh = 8\sqrt{gh_i^3}/27$.

Méthode des caractéristiques



- Qu'es-ce qu'un invariant de Riemann ?
- ↪ Voir la définition dans l'annexe 2, § 2.1
- Connaissez-vous la méthode des caractéristiques pour résoudre une équation aux dérivées partielles ?
- ↪ Voir la méthode à l'annexe 2, § 2.1.1.
- Qu'est-ce que le problème de Riemann ? Qu'appelle-t-on « onde simple » et « onde de choc » ?
- ↪ Voir les définitions dans l'annexe 2, § 2.1.3.

On transforme les équations de Saint Venant :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) = 0, \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (3.32)$$

en un système d'équations différentielles ordinaires en soustrayant ou additionnant membre à membre chaque équation

$$\frac{dr}{dt} = 0 \text{ le long de } \frac{dx}{dt} = \lambda_+ = u + \sqrt{gh}, \quad (3.33)$$

$$\frac{ds}{dt} = 0 \text{ le long de } \frac{dx}{dt} = \lambda_- = u - \sqrt{gh}. \quad (3.34)$$

Cela fait apparaître deux nouvelles inconnues : $r = u + 2\sqrt{gh}$ et $s = u - 2\sqrt{gh}$, dites *variables de Riemann*. Dans le cas présent, les variables r et s sont constantes le long des courbes caractéristiques d'équation $dx/dt = \lambda_{\pm}$. Pour cette raison elles sont appelées *invariants de Riemann*.

Les équations de Saint-Venant sont équivalentes au système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{d}{dt}(u \pm 2\sqrt{gh}) = 0,$$

le long des courbes caractéristiques C_{\pm} : $dx/dt = u \pm \sqrt{h}$.

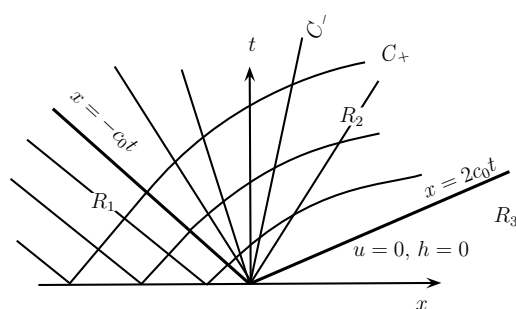


Figure 3.30 : éventail des caractéristiques émanant du point origine.

Si on considère une rupture de barrage, on doit avoir comme conditions initiales :

$$\begin{array}{ll} \text{– pour la vitesse} & -\infty < x < \infty \quad u(x, 0) = 0 \\ \text{– pour la hauteur} & x < 0 \quad h(x, 0) = h_0 \\ & x > 0 \quad h(x, 0) = 0 \end{array}$$

La perturbation engendrée à $t = 0$ et $x = 0$ par la rupture va se propager à l'amont et à l'aval.

Initialement, comme u et h sont constants, les variables r et s le sont aussi. Après la rupture, toute la partie du volume d'eau qui n'est pas encore mise en mouvement est également caractérisée par des valeurs de r et s constantes. Mathématiquement, on montre que lorsqu'on a un domaine d'écoulement « constant » (R_1 sur la figure 3.30), c'est-à-dire où u et h sont constants, il existe nécessairement un domaine dit « onde simple » (R_2) avec une dépendance $u(h)$ et une famille de caractéristiques qui sont des droites. Il existe un troisième domaine « vide » (R_3) où l'écoulement n'est pas encore parvenu. On ne connaît pour l'instant pas les limites de ces différents domaines dans le plan $x - t$.

Examinons tout d'abord les caractéristiques C_+ émanant de l'axe $t = 0$ et $x < 0$. Le long de ces caractéristiques, les invariants sont

$$r = u + 2\sqrt{gh} = 2c_0, \quad (3.35)$$

avec $c_0 = \sqrt{gh_0}$ la vitesse initiale de l'onde de rupture. Ces caractéristiques ont pour équation

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_+ = u + \sqrt{gh},$$

qui sont des courbes (que l'on ne connaît pas encore) dans le domaine R_2 , mais des droites dans le domaine R_1 puisque u et h sont constants. L'information est transmise le long de ces caractéristiques du domaine R_1 vers le domaine R_2 .

La caractéristique marquant les limites de cette zone non perturbée, que l'on appellera domaine R_1 (voir figure 3.30), est la droite $x = -c_0t$ reportée en gras sur la figure 3.30. Cette caractéristique émanant de 0 représente tout simplement la propagation de la discontinuité initiale de h en $x = 0$ (à $t = 0$). Elle appartient à la famille C_- d'équation

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_- = u - \sqrt{gh},$$

qui avec les valeurs initiale à gauche de 0 donne ici $dx/dt = -c_0$. Dans le domaine R_2 , la famille de caractéristiques C_- forme un réseau en éventail (onde simple centrée) d'équation

$$\frac{x}{t} = \lambda_- = u - \sqrt{gh}, \quad (3.36)$$

En résolvant le système d'équation (3.35–3.36), on trouve alors :

$$u = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} + c_0 \right), \quad (3.37)$$

$$h = \frac{1}{9g} \left(-\frac{x}{t} + 2c_0 \right)^2, \quad (3.38)$$

À noter qu'en $x = 2c_0t$, la hauteur devient nulle. Le domaine R_3 représentant le domaine non encore concerné par la rupture de barrage est délimité par la caractéristiques $x = 2c_0t$ qui est à la fois une caractéristique C_- et C_+ . L'avancée du front se fait à la vitesse $2c_0$.

À noter qu'on a ici : $u = 2(c_0 - \sqrt{gh})$ dans tout le domaine d'écoulement (c'est l'invariant r de Riemann qui se conserve). En reportant cette expression dans l'équation de conservation de la masse, on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (2c_0 - 3\sqrt{gh}) \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

qui est l'équation de l'onde cinématique, avec une vitesse de propagation $2c_0 - 3\sqrt{gh}$.

Remarque sur les invariants de Riemann

Le passage du système (3.31–3.32) au système (3.33–3.34) peut ressembler à un tour de passe-passe puisqu'on a additionné et retranché des équations pour obtenir le résultat souhaité. En fait, cette transformation repose sur un mécanisme assez général de transformation des équations différentielles hyperboliques que l'on a explicité dans l'annexe 2.

3.6 Rupture de barrage dans un lit mouillé



- Qu'es-ce que la relation de Rankine Hugoniot?
- ↪ Voir la définition dans l'annexe 2, § 2.1
- Connaissez-vous la méthode des caractéristiques pour résoudre une équation aux dérivées partielles?
- ↪ Voir la méthode dans l'annexe 1, § 1.7.2.
- Qu'est-ce que le problème de Riemann? Qu'appelle-t-on « onde simple » et « onde de choc »?
- ↪ Voir les définitions dans l'annexe 2, § 2.1.2.

On considère un mur vertical qui sépare deux lacs de retenue, dont le volume est supposé infini. La hauteur d'eau initiale à droite est h_0 , celle à gauche est $h_1 < h_0$ (voir figure 3.31). À l'instant $t = 0$, on suppose que le mur du barrage s'efface totalement et laisse s'écouler le volume d'eau de la gauche vers la droite.

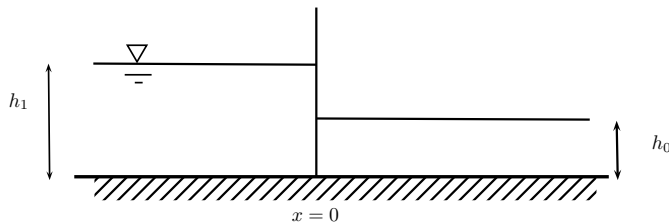


Figure 3.31 : géométrie du problème dit de « rupture de barrage » avec un lit mouillé.

Rappelons que lorsqu'on néglige le frottement sur le fond et qu'on considère un fond horizontal, les équations de Saint-Venant s'écrivent sous forme non conservative

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \tag{3.40}$$

Dans le cas d'une rupture de barrage sur lit mouillé, les conditions initiales et aux limites sont les suivantes

$$\begin{aligned} -\infty < x < \infty, u(x,0) &= 0, \\ x < 0, h(x,0) &= h_1, \\ x > 0, h(x,0) &= h_0. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Le problème a été résolu par [Stoker \(1957\)](#). Le problème à résoudre entre dans la classe des problèmes de Riemann, dont l'annexe 2 présente une méthode générale de résolution. Comme le schématise la figure 2.11 de l'annexe 2, l'idée de base est de rechercher

le chemin qui permet de l'état à gauche $\mathbf{u}_\ell = (h_1, 0)$ à l'état à droite $\mathbf{u}_r = (h_0, 0)$ en suivant un réseau de courbes de détente ou de choc. Pour passer de \mathbf{u}_ℓ à \mathbf{u}_r , on passe par un état transitoire $\mathbf{u}_* = (h_*, u_*)$ en passant par une 1-onde de détente

$$u_* = S_1(h_* | h_1, 0) = 2\sqrt{gh_1} - 2\sqrt{gh_*}, \quad (3.42)$$

puis par une 2-onde de choc

$$u_* = R_2(h_* | h_0, 0) = (h_* - h_0)\sqrt{g\frac{h_* + h_0}{2h_*h_0}}. \quad (3.43)$$

On a ici un système de deux équations avec deux inconnues (h_*, u_*) . Comme l'illustre la figure 3.32, la solution au temps t comporte quatre régions :

- aux deux extrémités, les états initiaux non perturbés $\mathbf{u}_\ell = (h_1, 0)$ et $\mathbf{u}_r = (h_0, 0)$;
- une onde de détente qui permet de passer de $\mathbf{u}_\ell = (h_1, 0)$ à $\mathbf{u}_* = (h_*, u_*)$. Dans le plan caractéristique $x - t$, les 1-caractéristiques sont des droites en éventail (centrées sur O), limitées à gauche par la caractéristique $x = -c_1 t$ (avec $c_1 = \sqrt{gh_1}$ la vitesse de l'onde progressive) et à droite par la caractéristique $x = \lambda_-^* t$ avec $\lambda_-^* = u_* - \sqrt{gh_*}$;
- une onde de choc qui permet de passer de $\mathbf{u}_* = (h_*, u_*)$ à $\mathbf{u}_r = (h_0, 0)$. La vitesse du choc est donnée par la relation de Rankine-Hugoniot :

$$\dot{s} = \frac{[[hu]]}{[[h]]} = \frac{h_* u_*}{h_* - h_0}. \quad (3.44)$$

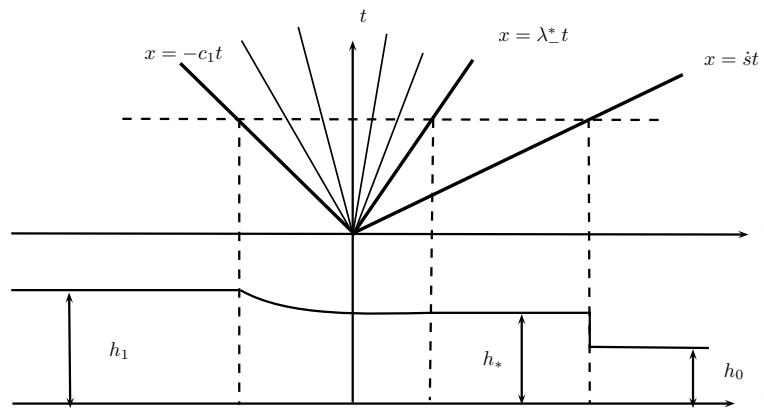


Figure 3.32 : schéma de la solution.

Pour déterminer la solution du problème de Riemann (3.39)–(3.41), il suffit de déterminer l'état intermédiaire $\mathbf{u}_* = (h_*, u_*)$ et la vitesse du ressaut \dot{s} en résolvant le

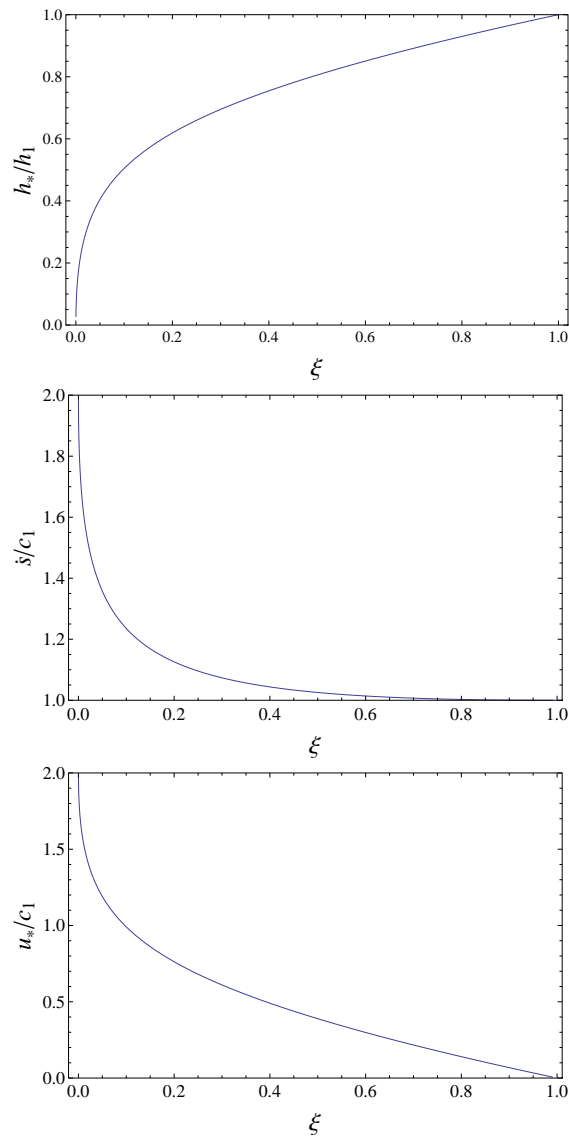


Figure 3.33 : variation de h_*/h_1 , s/c_1 , et u_*/c_1 en fonction du rapport initial $\xi = h_0/h_1$ dans le cas d'un lit aval mouillé.

système d'équations algébriques (3.42)–(3.44). Comme le montre la figure 3.33, la solution comporte :

- une onde de détente pour $-c_1 t \leq x \leq \lambda_*^- t$ où la hauteur varie progressivement de h_1 à h_* (la vitesse croît de 0 à u_*);
- une onde de choc pour $\lambda_*^- t \leq x \leq s(t)$ où la hauteur est constante et vaut h_* (la vitesse reste également égale u_*).

La figure 3.33 montre comment varie h_*/h_1 , \dot{s}/c_1 , et u_*/c_1 en fonction du rapport initial $\xi = h_0/h_1$ (on a $0 \leq \xi \leq 1$). On note que lorsque $\xi \rightarrow 0$ (le lit aval devient alors sec), on trouve que $h_* \rightarrow 0$, $\dot{s} \rightarrow 0$, et $u_* \rightarrow 2c_1$ comme cela est prédit par la solution de Ritter.

3.7 Effet du frottement

Nous considérons le cas plus réaliste d'un fond horizontal résistant. La résistance provoque :

- l'apparition d'une contrainte pariétale de la forme :

$$\tau_b = c_d u^2$$

pour un régime turbulent, avec c_d un coefficient de type Chézy (ce n'est pas rigoureusement la loi de Chézy), ou bien

$$\mu c \left(\frac{u}{h} \right)^n,$$

pour un régime laminaire, avec c un facteur de proportionnalité, μ la viscosité, n un paramètre pris le plus souvent à $n = 1$ pour un fluide newtonien.

- un cisaillement au sein de l'écoulement. On introduit donc un facteur γ dit *facteur de Boussinesq* tel que

$$\overline{u^2} = \gamma \bar{u}^2.$$

Les équations du mouvement sont écrites sous la forme (Hogg & Pritchard, 2004):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma u \frac{\partial u}{\partial x} + g' \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\tau_b}{\rho h}. \quad (3.46)$$

Le plus souvent, les mesures donnent $1 < \gamma < 1,1$ et on fait donc l'approximation : $\gamma = 1$. Cette approximation ne pose problème que dans de rares cas (Hogg & Pritchard, 2004; Ancy *et al.*, 2006, 2007).

3.7.1 Méthode de Whitham: rupture de barrage sur fond plat

Whitham (1954) a proposé une méthode approchée pour calculer l'effet du frottement sur le front. Loin du front, la solution de Ritter est valable. Les champs de vitesse et de hauteur donnés par

$$u = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} + \sqrt{gh_0} \right) \text{ et } h = \frac{1}{9g} \left(-\frac{x}{t} + 2\sqrt{gh_0} \right)^2$$

sont donc valables jusqu'au point B, d'abscisse $x = x_b(t)$. Pour la région frontale située entre x_b et x_a (position du front), Whitham suggère de ne pas résoudre les équations mais d'intégrer les équations pour obtenir des équations globales du front (méthode de

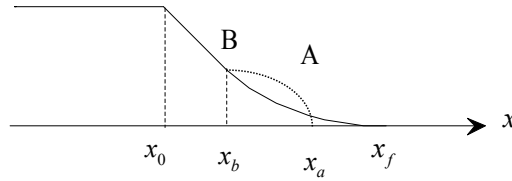


Figure 3.34 : modification de la forme du front.

Pohlhausen). Il considère notamment que dans la région frontale, la variation de vitesse selon x est faible de telle sorte que l'on peut écrire $u(x, t) = u(t)$.

Notons que cette méthode intégrale ne permet pas de déterminer exactement la forme de la surface libre, mais il est possible d'en avoir une idée en faisant un simple bilan de quantité mouvement près du front. En effet, en négligeant l'inertie du fluide au niveau du front, on tire que le gradient de pression doit contrebalancer le frottement

$$gh \frac{\partial h}{\partial x} = -c_d u^2(t),$$

ou $u(t) \approx dx_a/dt$ et $c_d = 1/C^2$ un coefficient relié au coefficient de Chézy C . D'où l'on déduit l'approximation :

$$h(x) = \frac{dx_a}{dt} \sqrt{\frac{2c_d}{g}} \sqrt{x_a(t) - x}.$$

Pour obtenir les équations globales du fluide au niveau du front, on note que :

- la vitesse du fluide au point de transition x_b est $u_b - dx_b/dt$, où (u_b, h_b) sont les solutions de Ritter à gauche du point de transition B ;
- le flux de masse M s'écrit $\rho h_b (u_b - dx_b/dt)$;
- le flux de quantité de mouvement est $\rho h_b u_b (u_b - dx_b/dt)$.

L'équation globale du mouvement s'écrit donc

$$\frac{dP}{dt} = \rho h_b u_b \left(u_b - \frac{dx_b}{dt} \right) + F + \frac{1}{2} \rho g h_b^2,$$

où P est la quantité de mouvement et F la force de frottement :

$$F = \int_{x_0}^{x_a} \rho c_d u^2 dx \approx \rho c_d u^2 (x_a - x_b).$$

Par ailleurs, puisque la vitesse est supposée constante dans la zone frontale, on a $P = M u_b$, or

$$\frac{dM}{dt} = \rho h_b \left(u_b - \frac{dx_b}{dt} \right),$$

avec $x_b = c_0(3u_b/(2c_0) - 1)t$ et $h_b = h_0(1 - u_b/(2c_0))^2$ d'après la solution de Ritter. L'intégration donne

$$M = \rho h_0 c_0 \left(1 - \frac{u_b}{2c_0}\right)^3 t.$$

Notons que l'on peut trouver ce résultat directement en faisant remarquer que, dans la solution de Ritter $M = \int_{x_b}^{x_f} \rho h dx$ (il n'y a pas de variation de masse, juste un changement de la surface libre et une vitesse front moins grande). On déduit la vitesse :

$$M \frac{du_b}{dt} = \frac{1}{2} \rho g h_b^2 - \rho c_d u_b^2 (x_a - x_b).$$

Introduisant les variables sans dimension $\eta = c_d/h_0(x_f - x_a)$ et $\tau = \sqrt{g/c_0} c_d t$, on tire :

$$4\tau \dot{\eta} \ddot{\eta} + \dot{\eta}^4 = 16(2 - \dot{\eta})^2(3\dot{\eta}\tau - 2\eta).$$

On s'est servi du fait que dans le front la vitesse est constante et égale à \dot{x}_a : $u_b = \dot{x}_a$; de plus on peut aussi interpréter la vitesse du front en termes de vitesse relative $\dot{\eta}$ en posant : $\dot{x}_a = c_0(2 - \dot{\eta})$. On ne peut pas résoudre directement cette équation numériquement car en $\tau = 0$ le terme $\ddot{\eta}$ tend vers une limite impropre. Il faut déterminer cette limite. Pour cela on va considérer ce qui se passe au premier ordre en $\tau = 0$. On pose $\eta = K(\tau) = A\tau^n$ et on cherche n et A . En reportant cela dans l'équation on trouve au premier ordre $n = 4/3$ et $A = 3 \times 3^{2/3}/14^{1/3} \approx 2,58916$. On trouve donc que $\ddot{\eta} \rightarrow \infty$ quand $\tau \rightarrow 0$. On peut de là résoudre numériquement l'équation avec comme condition initiale $\eta(\varepsilon) = K(\varepsilon)$ et $\dot{\eta}(\varepsilon) = K'(\varepsilon)$ où l'on choisit ε très proche de 0 (typiquement $\varepsilon = 10^{-6}$). On obtient la courbe reportée sur la figure 3.35.

On pourrait chercher le développement asymptotique plus loin en écrivant $\eta = A\tau^n + B\tau^m + \dots$, mais cela ne marche pas. On ne peut pas faire de développement de Taylor en 0 car les dérivées d'ordre 2 ou supérieures divergent. En fait, comme le montre la solution numérique, très rapidement η devient linéaire ; il ne sert donc à rien de chercher un développement polynômial vu que l'ordre 1 ($\tau^{4/3}$) a une pente plus forte que 1.

Il faut plutôt rechercher la solution sous la forme d'une fonction rationnelle (approximation de Padé). Recherchons donc une solution sous la forme :

$$\eta = \frac{A\tau^{4/3}}{1 + B\tau^n}.$$

$B = 4 \times 42^{2/3}/59 \approx 0,81917$ et $n = 1/3$. On obtient la courbe à tiret mi-long de la figure 3.36. Si on pousse à un ordre supérieur, on obtient :

$$\eta = \frac{A\tau^{4/3}}{1 + B\tau^{1/3} + C\tau^{2/3}},$$

avec $C \approx 0,204158$. On obtient la courbe à tiret long de la figure 3.36, donnant un accord encore meilleur avec la courbe numérique.

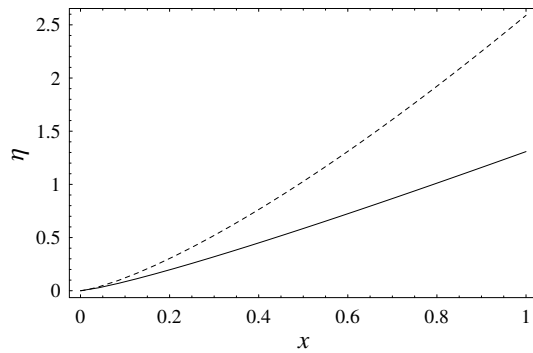


Figure 3.35 : comparaison de la solution numérique (courbe continue) et de l'approximation asymptotique en $\tau = 0$.

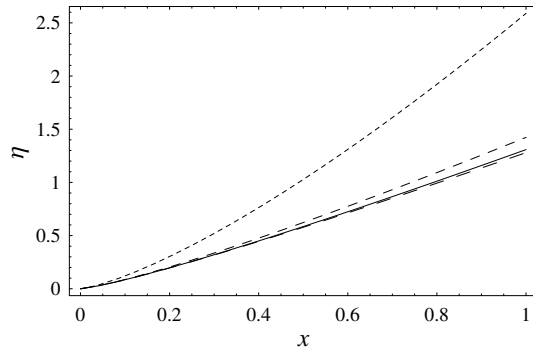


Figure 3.36 : approximations successives de la solution.

On obtient ainsi l'approximation au premier ordre quand t est petit :

$$u_a = \frac{dx_a}{dt} = \sqrt{gh_0} \left(2 - 3.452 \sqrt[3]{c_d t \sqrt{\frac{g}{h_0}}} \right).$$

Aux temps très longs, on peut rechercher un nouveau développement asymptotique. La solution numérique nous pousse à rechercher une solution sous la forme $\eta = \alpha\tau + \beta$. Injectant cette forme dans l'équation différentielle, puis prenant $\tau \rightarrow \infty$, on trouve que $\beta = 2$. Donc, on aboutit à l'expression asymptotique :

$$u_a = \frac{dx_a}{dt} = \sqrt{gh_0} \sqrt{\frac{h_0}{2c_d t}}.$$



CHAPITRE 4

Vagues



CE CHAPITRE traite des vagues et des mouvements à la surface d'une étendue d'eau :

- vagues à la surface d'un plan d'eau (mer, lac) dues au vent ou à des courants ;
- vagues d'impulsion consécutives à l'entrée d'un écoulement (écroulement rocheux, avalanche, etc.) dans une retenue d'eau ;
- vagues géantes telles que les tsunamis ;
- vagues dues à l'instabilité de la surface libre.

Tous ces phénomènes peuvent être calculés, à des degrés divers de précision, par les équations de Saint-Venant ou des équations approchées tirées des équations de Saint-Venant. Nous commençons par décrire les phénomènes physiques de façon qualitative avant d'aborder chacun d'eux à travers des équations.

4.1 Phénomènes physiques

Le mot « vague » (*wave* en anglais, *Welle* en allemand, *onda* en italien, *ola* en espagnol) désigne une multitude de phénomènes, où une onde se propage à la surface d'une étendue d'eau (océan, lac, cours d'eau).

Les vagues sont souvent associées au milieu marin. En haute mer, l'amplitude des vagues reste à peu près constante même si elles fluctuent considérablement autour d'une hauteur moyenne, dite *hauteur significative* (on est en pratique assez loin du schéma d'Airy où les vagues sont des oscillations sinusoïdales de la surface). À l'approche des côtes, la conservation de l'énergie entraîne un accroissement de l'amplitude des vagues selon un schéma qui est décrit plus loin pour décrire les tsunamis (voir § 4.5). Il existe également des cas où des vagues peuvent atteindre de très grande amplitude en haute mer de façon quasi-surnaturelle. Appelées « vagues scélérates » en

française, ces vagues ont longtemps été considérées comme des inventions de marins, mais les observations fiables se sont multipliées au xx^e siècle : en janvier 1995, la plateforme pétrolière Draupner en Mer du Nord fut impactée par une vague scélérate dont la hauteur a été évaluée à environ 27 m lors d'une tempête (alors que la hauteur significative était de 10 m), soit un rapport de 2,7 ! En février de la même année, le paquebot Queen Elisabeth II essuya une violente tempête dans l'Atlantique nord et l'équipage a mentionné avoir observé fondre sur eux un mur d'eau de 30 m de haut ; le bateau quoiqu'endommagé put regagner le rivage. Bien qu'il soit toujours difficile d'expliquer la physique du phénomène, il est apparu que plusieurs processus ondulatoires bruités et non linéaires peuvent donner naissance à des oscillations d'amplitude exceptionnelle. La théorie des ondes de Korteweg et de Vries (description à l'ordre 3 des ondes à la surface d'une étendue d'eau) permet de justifier, au moins dans le cas unidimensionnel, l'existence de ces vagues exceptionnelles ; des expériences en laboratoire ont également montré que l'on pouvait générer artificiellement de tels phénomènes dans des canaux. La photographie 4.1 montre l'impact d'une vague scélérate contre la proue d'un navire dans le Pacifique sud.



Figure 4.1 : Source : proue d'un navire impacté par une vague de 12 m au large du cap Horn (détroit de Drake). Source : Lorraine Turci.

Des vagues peuvent également s'observer dans les rivières et les lacs. Ce sont le plus souvent de petites intumescences :

- amplifiées à l'approche d'une berge ou d'un côté (voir Fig. 4.2) ;
- liées à un obstacle (ou un objet mobile) ;
- induites par une variation du niveau de l'eau ;
- provoquées par le vent.

La forme d'une vague peut changer, notamment lorsqu'elle parcourt de longues distances, rencontre un obstacle, ou bien déferle (voir Fig. 4.3 à Fig. 4.5).



Figure 4.2 : vagues sur le lac Tahoe (Nevada, États-Unis, a) et en Méditerranée (Málaga, Espagne, b) [C. Ancey].

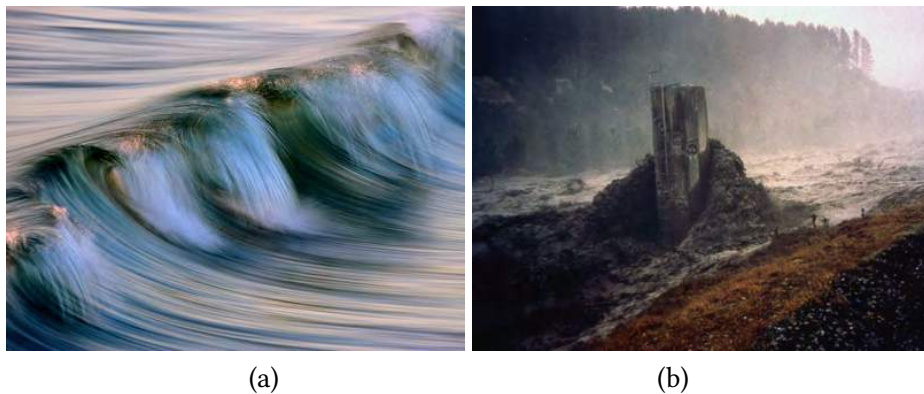


Figure 4.3 : (a) déferlement d'une vague (la vitesse en crête étant supérieure à la vitesse en pied de vague, la vague finit par se recroqueviller sur elle-même, provoquant un « déferlement »). (b) Impact d'une vague sur une pile de pont (détruit lors de la crue) sur la rivière Whanguehu en Nouvelle-Zélande [DR].

Plus exceptionnellement, des vagues plus importantes peuvent se former dans les lacs et les rivières (voir figures 4.7 et 4.8). Notamment, les ondes d'impulsion (*impulse wave* en anglais, *Impulswelle* en allemand) sont des vagues créées par l'entrée d'une masse solide (comme un glissement de terrain) dans un volume d'eau. Le transfert de quantité de mouvement entre la masse glissante et l'eau provoque la formation d'une vague qui peut être dévastatrice. Les effets sont assimilables à ceux d'un tsunami. Ainsi, en 1958, un mouvement de terrain se produisit à la suite d'un tremblement de terre en



Figure 4.4 : (a) déferlement d'une vague à l'approche d'une plage. (b) Déferlement de vagues dues au vent sur le lac Erié [Dave Sandford].

Alaska ; la masse de rocher pénétra dans l'eau d'une vaste baie bordant l'océan Pacifique et provoqua la formation d'une vague gigantesque. Celle-ci ravage tout le pourtour de la baie ; elle a notamment remonté le versant d'une colline sur 524 m de hauteur (par rapport au niveau) de la mer (voir fig. 4.6) (Weiss *et al.*, 2009). Les grands lacs suisses ont subi au cours des derniers siècles des dommages conséquents dus à des ondes d'impulsion comme le récapitule le tableau 4.1.



Figure 4.5 : vague just avant le déferlement. Source : Danny Sepkowski pour National Geographic Travel Photographer of the Year Contest. « Que se passe-t-il avant qu'une vague ne se brise ? Cette question a été ma mission l'année dernière. Ce jour-là, j'ai décidé de filmer le coucher de soleil sur la côte est d'Oahu, à Hawaïi. Une centaine de photographes étaient sortis le matin, mais j'avais la soirée pour moi tout seul. Les textures des vents alizés créaient des couleurs subtiles de l'ouest et se mélangeaient bien avec mon objectif 100 mm. J'ai dû regarder dans mon viseur pendant que cette vague se brisait. Ce n'est pas une tâche facile quand une vague est sur le point de vous écraser. »

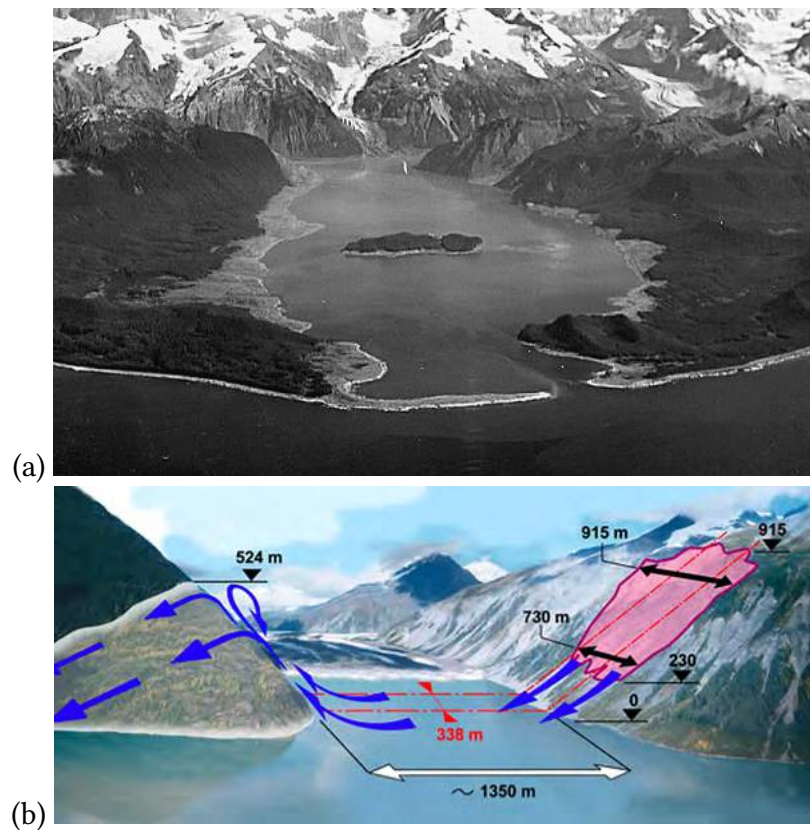


Figure 4.6 : (a) vue aérienne de Lituya Bay en 1958 après la vague catastrophique ; le passage de la vague dans la forêt permet d'évaluer la remontée de la vague sur les berges [D.J. Miller, USGS] ; source : geology.com. (b) Schéma du glissement avec représentation des grandeurs géométriques ; source : (Weiss *et al.*, 2009) et www.drgeorgepc.com.

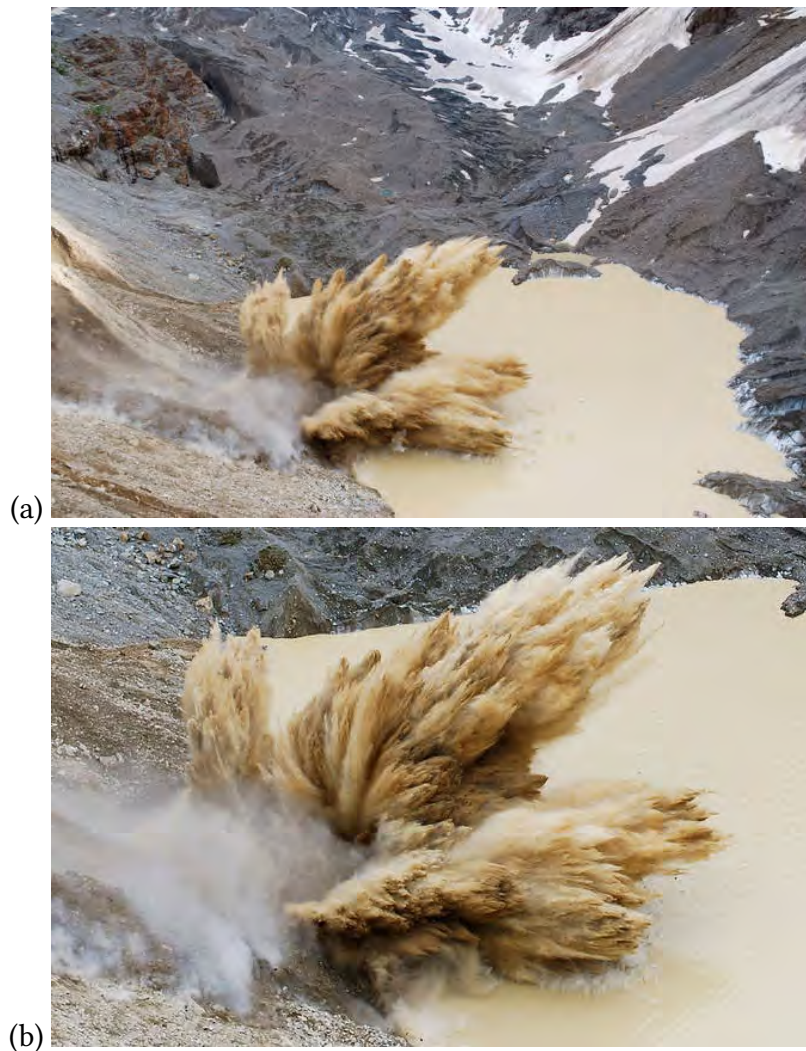


Figure 4.7 : vague d'impulsion créée par un éboulement rocheux de 300 000 m³ dans un lac morainique sous le glacier de Grindelwald (BE) le 22 mai 2009 ; source: [Tages Anzeiger](#).



Figure 4.8 : avalanche en aérosol déclenchée artificiellement atteignant le lac de Linth-Limmeren (Linthal, GL). Avec une revanche de 40 m, le barrage est protégé contre les vagues d'impulsion. Source : R. Stüssi.

Tableau 4.1 : formation de vagues d'impulsion sur les grands lacs suisses. D'après (Huber, 1982).

Date	Lieu	Cause	Dommages
563	lac Léman	rupture d'une embâcle sur le Rhône	tsunami sur le lac Léman
1435	lac de Zoug	rupture d'une berge	60 morts, 26 maisons détruites
1795	lac des 4 Cantons (Weggis)	glissement de terrain	400 sans-abris, 33 bâtiments détruits
1801	lac des 4 Cantons (Sisikon)	éboulement rocheux	10 morts, plusieurs bâtiments détruits
1806	lac de Lauerz (Goldau)	éboulement rocheux	457 morts
1862	lac de Lugano (Morcote)	glissement de terrain	1 mort
1887	lac de Zoug (Zoug)	rupture des quais	650 sans-abris, 20 habitations détruites
1891	lac Léman (Montreux)	rupture des quais	72 m de quai détruits
1923	lac de Davos	rupture d'une berge entraînant la vidange partielle du lac	1 mort
1946	lac de Walenstadt	éboulement rocheux	1 mort
1963	lac des 4 Cantons (Obermatt)	éboulement rocheux	2 morts

Tableau 4.2 : liste des principales catastrophes dues à des vagues d'impulsion dans le monde. On indique la date de l'événement, le lieu et le pays, le volume du mouvement de terrain responsable de la vague, la hauteur de runup, et le nombre de victimes. D'après (Heller, 2007).

Date	Lieu	Pays	Volume [Mm ³]	Runup [m]	Victimes
22/02/1756	Tjelle	Norvège	15	46	38
21/05/1792	Shimabara	Japon	500	10	~ 15000
27/08/1883	Krakatau	Indonésie		35	~ 36000
13/03/1888	Ritter Island	Papouasie	5000	20	~ 100
04/07/1905	Disenchantment Bay	EUA	29	35	0
07/04/1934	Tajford	Norvège	2	62	41
13/09/1936	Ravnefjell	Norvège	1	74	73
09/07/1958	Lituya Bay	EUA	31	524	2
22/03/1959	Pontesei	Italie	5		1
09/10/1963	Vajont	Italie	240	270	~ 2000
18/03/1971	lac Yanahuin	Pérou	0,1	30	~ 500
18/05/1980	Mount St. Helens	EUA	430	200	0

Tableau 4.3 : liste des principales catastrophes dues à des tsunamis. Source : [Wikipedia](#).

<i>Date</i>	<i>Zone concernée</i>	<i>nombre de victimes</i>	<i>hauteur de vague</i>
28 sep. 2018	Indonésie, Anak Krakatoa	2256	6 m
11 mars 2011	Japon, Tohoku	18 457	30 m
26 déc. 2004	sud-est Asie	>250 000	30 m
17 août 1999	Turquie, Izmit	17 480	3 m
17 jui. 1998	Papouasie	2000	15 m
12 déc. 1992	Indonésie	2200	26 m
17 août 1976	Indonésie	5000	5 m
22 mai 1960	Chili, Valdivia	5700	25 m
28 déc. 1908	Italie, Messine	98 000	13 m
27 août 1883	Océan indien, Krakatoa	36 000	40 m
21 mai 1792	Japon	15 000	55 m
24 avr. 1771	Japon, Ryukyu	13 486	85 m
1 nov. 1755	Portugal	90 000	18 m

4.2 Équations de Saint-Venant et ondes dynamiques



- Qu'appelle-t-on « équation des ondes » ?
- ↪ Voir la définition au §1.5.4.

Les ondes dues à la gravité (gradient de pression) provoquent des ondes dynamiques à la surface des écoulements. On parle d'*onde de gravité* ou *onde de surface*. Leurs caractéristiques générales peuvent se déduire en considérant en première approximation que les effets visqueux sont d'influence négligeable sur la propagation de ces ondes.

Une des caractéristiques souvent rencontrées pour les ondes est qu'elles transmettent une information, une énergie, etc., mais ne sont pas associées à un mouvement des particules. Ce phénomène est bien visible à la surface d'un lac ou d'une mer : les vagues ne sont pas associées à un transport de particule. Ainsi, une bouée à la surface de l'eau est soulevée, puis abaissée, mais reste *grosso modo* à la même place.

Considérons donc une intumescence d'épaisseur η se déplaçant à la surface d'une nappe d'eau peu épaisse (profondeur h_0) et au repos. Si on suppose que cette onde n'induit pas de transport de fluide durant son mouvement, alors le débit doit être nul $d(\eta u) = 0$. Considérons l'équation (1.16) de continuité des équations de Saint Venant

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0,$$

avec $h = h_0 + \eta$, soit encore

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0,$$

(compte tenu de $d(\eta u) = 0$). L'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.17) s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_p}{\rho h}.$$

En linéarisant l'équation (c'est-à-dire en supprimant le terme convectif $\bar{u}\partial\bar{u}/\partial x$ en supposant que la vitesse induite par la vague est faible) et en considérant un fluide non visqueux ($\tau_p = 0$), on tire :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

En combinant équation de la masse et équation linéarisée de quantité de mouvement, on tire que :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

ce qui montre que la vitesse de l'intumescence satisfait l'équation typique des ondes dynamiques (1.65), vue précédemment avec $c = \sqrt{gh_0}$.

On peut aboutir au même résultat sans passer par l'approximation de Saint Venant, ce qui permet de calculer la vitesse des ondes lorsque la profondeur d'eau est quelconque. C'est ce que l'on va voir maintenant en considérant les équations locales du fluide parfait au lieu des équations moyennées.

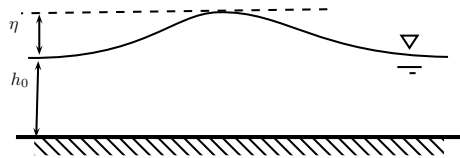


Figure 4.9 : déplacement d'une intumescence à la surface de l'eau (au repos).

4.3 Modèle d'Airy

4.3.1 Équations d'Airy

Une des premières assez complètes pour décrire le mouvement d'une onde de gravité est due à Airy¹. Si l'on considère un mouvement d'une onde provoquant une variation de la surface libre d'un fluide parfait initialement au repos (pas de mouvement hormis celui induit par l'onde), les équations du mouvement sont les équations d'Euler :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p.\end{aligned}$$

On introduit le potentiel des vitesses ϕ : $\mathbf{u} = \nabla\phi$; en termes de composantes des vitesses on a donc :

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \text{ et } v = \frac{\partial\phi}{\partial y}.$$

On suppose également l'écoulement irrotationnel. Mathématiquement cela implique que le rotationnel du champ de vitesse est nul, soit $\nabla \times \mathbf{u} = 0$; physiquement cela veut dire qu'il n'y a pas de vorticité dans l'écoulement (déplacement de tourbillon dans l'écoulement). L'équation de conservation de la masse devient alors :

$$\nabla^2\phi = 0, \tag{4.1}$$

1. Sir George Biddell Airy était un mathématicien et physicien britannique (1801–1892). Il s' st illustré dans ses jeunes années pour ses travaux d'observation en astronomie, ce qui lui a valu d'être nommé « astronome royal », poste qu'il continuera d'exercer jusqu'à ses 80 ans. Il s' st également beaucoup intéressé aux phénomènes ondulatoires, notamment les arcs-en-ciel, le mouvement pendulaire, les ondes de gravité. Il a aussi contribué à la géodésie, en particulier en développant la notion d'isostasie (en bref, les variations du champ de gravitation terrestre dues au relief).

(appelée équation de Laplace) tandis que l'équation de quantité de mouvement²

$$\frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p,$$

soit encore en intervertissant les opérateurs de différentiation spatiales et temporelle :

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) = \nabla \left(-\psi - \frac{1}{\rho} p \right), \quad (4.2)$$

avec ψ le potentiel gravitaire ($\mathbf{g} = -\nabla \psi$); on reconnaît une variante de l'équation de Bernoulli, où la vitesse est remplacée par le potentiel $\nabla \phi$. Cette équation peut encore s'écrire (après intégration)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\psi - \frac{1}{\rho} p. \quad (4.3)$$

Il faut tenir compte des conditions aux limites. Au fond, on a non-pénétration, donc

$$v = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ en } y = 0. \quad (4.4)$$

À la surface libre $y = h(x, t)$, le terme de pression est supposé nul ($p = 0$). De plus, si on ne retient que les termes de premier ordre (c'est-à-dire on néglige $\nabla \phi \cdot \nabla \phi$, ce qui est possible lorsque l'amplitude de la vague est petite devant sa longueur d'onde), on tire que la condition dynamique à la surface libre s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -gh \text{ en } y = h. \quad (4.5)$$

De plus, à la surface libre, on a aussi la condition cinématique (voir au chap. 1, § 1.2):

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{dh}{dt}$$

or $v = \partial \phi / \partial y$ et $u = \partial \phi / \partial x$, d'où l'on tire :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \approx \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (4.6)$$

Pour trouver une solution à (4.1), on va employer la méthode de séparation des variables. Physiquement, cette méthode est utile lorsqu'on considère que ce qui se passe dans une direction est découplé (ou indépendant) de ce qui se passe dans l'autre direction. Recherchons des solutions sous forme d'onde progressive :

$$\phi(x, y, t) = F(x - ct)G(y). \quad (4.7)$$

² On s'est servi de $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$. Or comme $\nabla \times \mathbf{u} = 0$, on obtient l'égalité $\nabla(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$.

Le report dans l'équation $\nabla^2\phi = 0$ donne :

$$\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = -k^2,$$

avec k une constante (k est interprétée par la suite comme le nombre d'onde). La solution générale est :

$$F = A \cos[k(x - ct)] + B \sin(x - ct) \text{ et } G = Ce^{ky} + De^{-ky}. \quad (4.8)$$

Pour déterminer la relation de dispersion et les constantes d'intégration A , B , C , et D , il faut prendre en compte les conditions aux limites. Une condition est donnée par 4.4 au fond, et une autre est donnée par la surface libre (4.6). Le détail de la dérivation n'est pas reporté, mais on peut consulter [Stoker \(1957\)](#) par exemple pour un développement plus complet.

En différenciant (4.5) par rapport à t , puis en reportant l'expression de $\partial h/\partial t$ déterminée dans la condition (4.6) sur v à la surface libre, on tire qu'à la surface libre (pour $y = h$) on a :

$$\boxed{\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial\phi}{\partial y}}.$$

C'est l'équation des ondes de surface d'un courant d'eau.

4.3.2 Relation de dispersion

La relation de dispersion est obtenue en reportant les expressions de F et G dans chacune des conditions aux limites pour éliminer les constantes d'intégration. Après calcul, on obtient :

$$\boxed{c^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh)}. \quad (4.9)$$

On peut faire les remarques suivantes (voir figure 4.10) :

- la vitesse apparaît au carré, donc on peut déterminer deux vitesses (une négative, l'autre positive) avec des sens de propagation opposés (voir figures 4.11 et 4.12);
- en eau peu profonde (c'est-à-dire $h \ll \lambda$), on $\tanh kh \approx kh$, d'où l'on tire : $c = \pm\sqrt{gh}$. C'est la vitesse critique (correspondant à $Fr = 1$). Toutes les ondes de surface ont la même vitesse de propagation quelle que soit leur longueur d'onde λ ;
- en eau profonde (c'est-à-dire $h \gg \lambda$), on $\tanh kh \approx 1$, d'où l'on tire : $c = \pm\sqrt{g\lambda/(2\pi)}$. La vitesse des ondes de surface dépend de la longueur d'onde λ . Ces ondes sont désignées sous le terme général de *houle*.

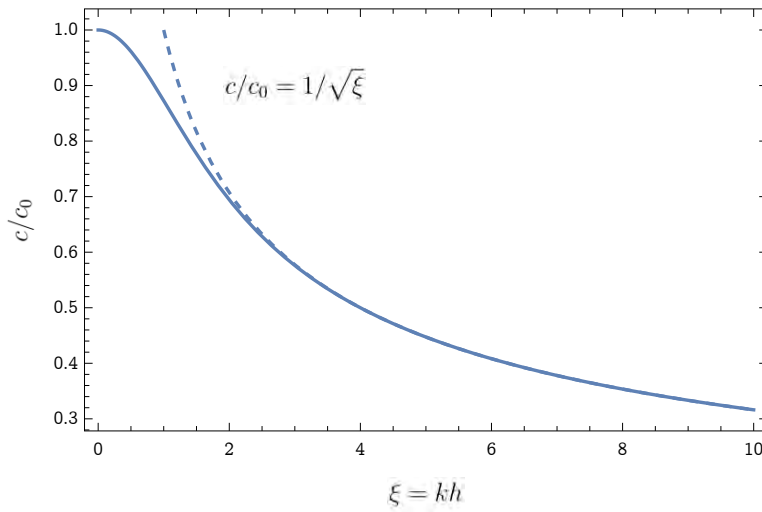


Figure 4.10 : vitesse de propagation c donnée par l'équation de dispersion (4.9). On a posé $\xi = kh$ et $c_0 = \sqrt{gh}$. La relation $c = c_0/\sqrt{\xi}$ correspond à l'approximation en eau profonde lorsque $\xi = kh \gg 1$.

Dans le cas des cours d'eau, on est dans le premier cas de figure (eaux peu profondes). Si on réitère le raisonnement précédent pour un fluide en écoulement à la vitesse moyenne \bar{u} , la célérité des ondes est calculée par rapport à la vitesse moyenne \bar{u} : les ondes de gravité se propagent donc à la vitesse $c = \bar{u} \pm \sqrt{gh}$, soit encore :

$$c = \sqrt{gh}(\text{Fr} \pm 1),$$

avec $\text{Fr} = \bar{u}/\sqrt{gh}$ le nombre de Froude. On tire le résultat important :

- en régime subcritique (fluvial) $\text{Fr} < 1$, les ondes se propagent d'amont vers l'aval et d'aval vers l'amont. L'information se propage dans les deux sens. Une modification de l'écoulement se produit à l'amont est répercutée à l'aval et, de même, la modification des conditions d'écoulement entraîne une modification de ce qui se passe à l'amont une fois que l'onde a remonté l'information ;
- en régime supercritique (torrentiel) $\text{Fr} > 1$, les ondes se propagent d'amont vers l'aval uniquement. L'information ne se propage que dans le sens de l'écoulement. Il n'y a pas de « contrôle » aval, c'est l'amont qui dicte ce qui se passe dans le bief.

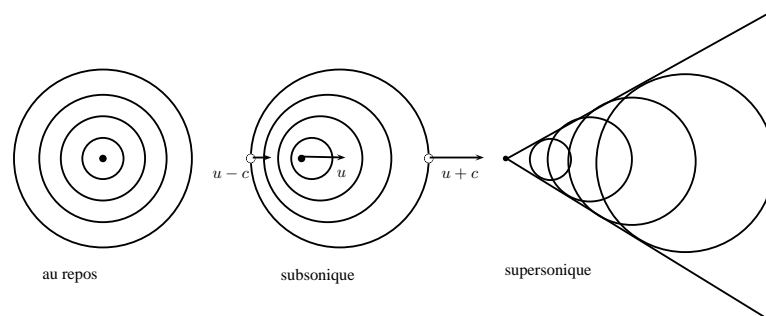


Figure 4.11 : propagation d'une onde circulaire se déplaçant à la vitesse $c = \sqrt{gh}$ dans de l'eau au repos (au centre), dans un écoulement lent d'eau (au centre) tel que $v < \sqrt{gh}$, et dans un écoulement rapide d'eau.

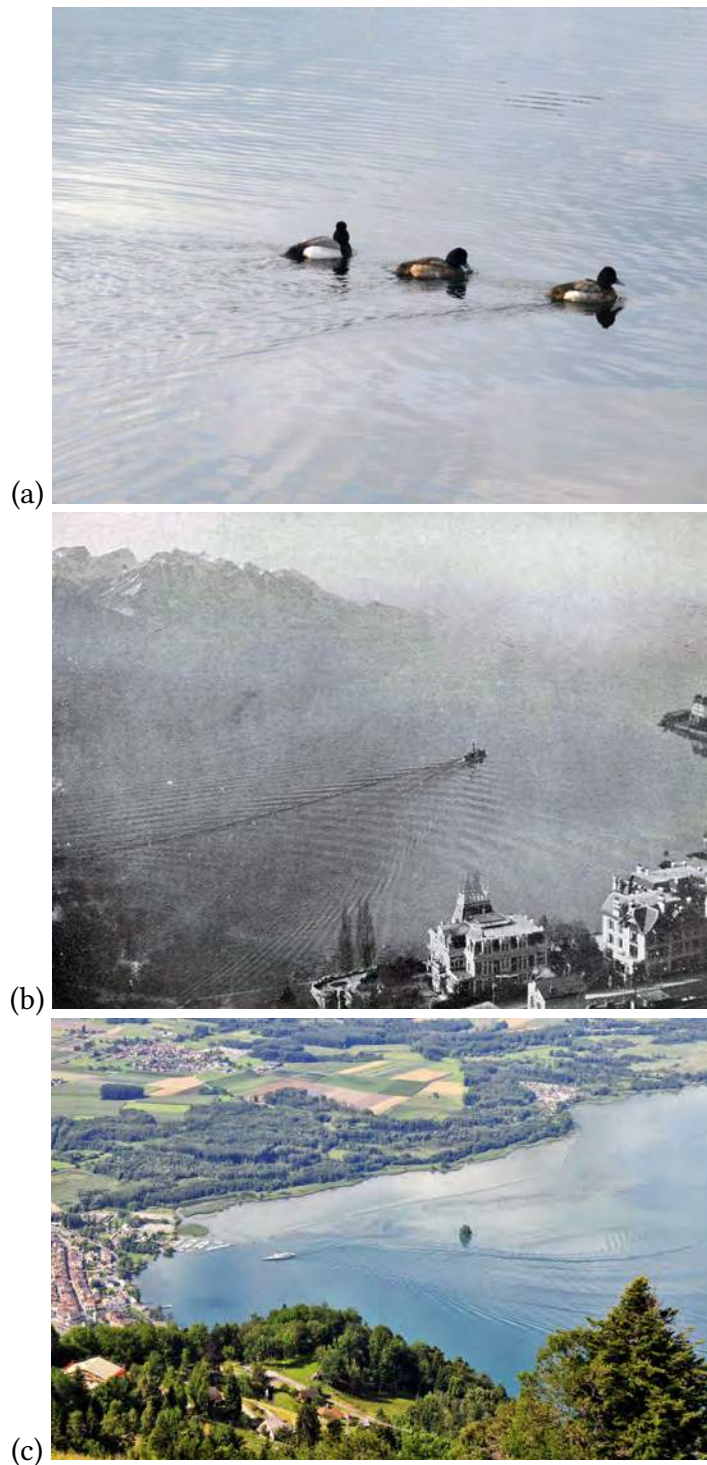


Figure 4.12 : (a) le canard crée un sillage et il n'y a pas d'intumescence. Le canal est-il en nage supersonique? (b) sillage d'un bateau sur le lac Léman. Source: Vaughan Cornish (1910), fonds [Digital collection, University of Washington](#). Quel que soit l'objet en mouvement, l'angle du sillage est à peu près le même (angle de Kelvin). (c) bateau à l'approche de Villeneuve.

4.3.3 Vitesse de groupe et propagation d'énergie

Le champ de vitesse dans la théorie d'Airy s'obtient à partir du potentiel de vitesse (4.7) (on ne reporte pas ici tout le détail de la dérivation des constantes d'intégration, voir l'ouvrage de [Stoker \(1957\)](#), chap. 3, par exemple):

$$\phi = \frac{\omega}{k} a \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \sin(kx - \omega t) \quad (4.10)$$

d'où:

$$u(x, y, t) = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\omega}{2} H \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh[kh]} \cos(kx - \omega t), \quad (4.11)$$

$$v(x, y, t) = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\omega}{2} H \frac{\sinh[k(z+h)]}{\sinh[kh]} \sin(kx - \omega t), \quad (4.12)$$

avec H la hauteur de la vague, $T = \lambda/c$ la période, λ la longueur d'onde, z la cote par rapport au plan moyen ($z = y - h$, donc $z = 0$ correspond à la position de la surface libre). La figure 4.13 montre le champ de vitesse en fonction de la profondeur: une vague est un train de déformation sinusoïdale de la surface libre d'une étendue d'eau. Les particules de fluide décrivent des ellipses fixes, dont la taille décroît avec la profondeur; en eau profonde (lorsque la profondeur dépasse la moitié de la longueur d'onde), ces ellipses sont des cercles.

L'énergie potentielle de la vague, moyennée au cours du temps (sur une période T) et sur longueur d'onde λ , est par unité de surface:

$$E_p = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx \left[\frac{1}{T} \int_0^T dt \left(\int_0^{\eta(x,t)} \rho g y dy \right) \right] = \rho g \frac{H^2}{16}, \quad (4.13)$$

avec $\eta(x, t) = H \cos(kx - \omega t)/2$ la position de la surface libre. De même l'énergie cinétique de la colonne d'eau (moyennée sur λ et T et par unité de largeur, donc énergie cinétique moyenne par unité de surface) est

$$E_c = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx \left[\frac{1}{T} \int_0^T dt \left(\int_{-h}^{\eta(x,t)} \rho \frac{u^2 + v^2}{2} dy \right) \right].$$

L'intégration est un peu plus délicate, mais comme η est petit, on peut écrire au premier ordre en η

$$E_c \approx \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx \left[\frac{1}{T} \int_0^T dt \left(\int_{-h}^0 \rho \frac{u^2 + v^2}{2} dy \right) \right].$$

soit encore

$$E_c = \rho \frac{\omega^2}{32k} H^2 \frac{\sinh(2kh)}{\sinh(kh)^2} + O(\eta) = \rho \frac{\omega^2 H^2}{16k} \frac{1}{\tanh(kh)}$$

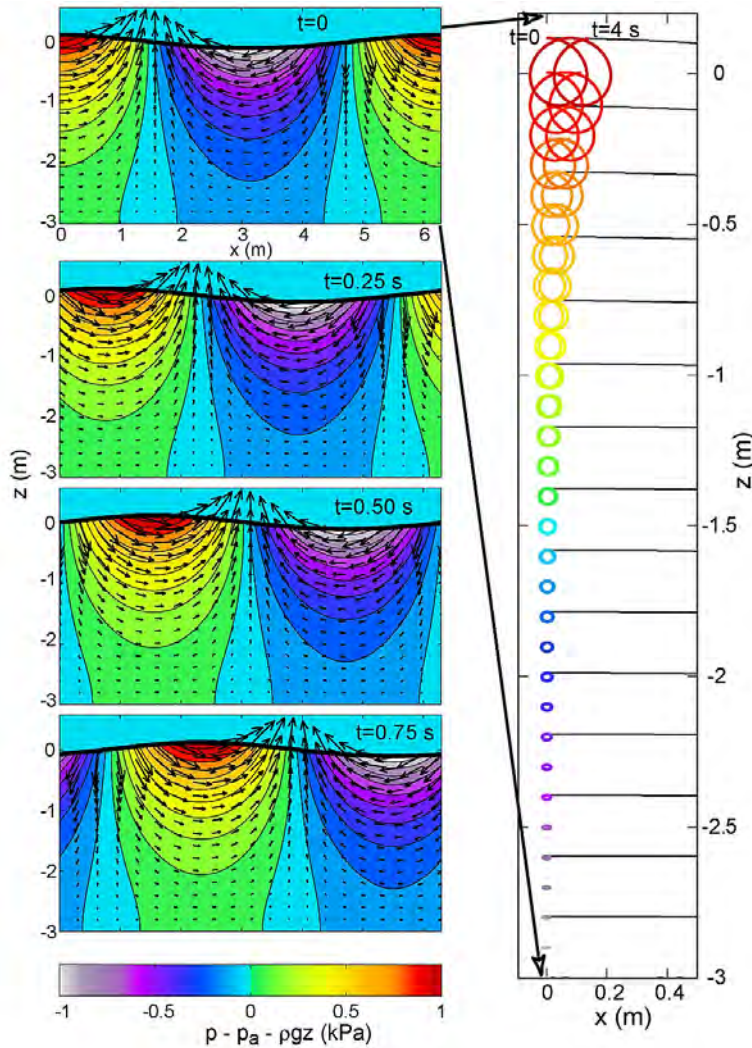


Figure 4.13 : mouvement d’oscillation [Fabrice Ardhuin, SHOM]. Le diagramme à droite montre la trajectoire presque circulaire de particules fluides selon leur profondeur. À gauche, les champs de vitesse et de pression sont reportés. Le calcul a été réalisé pour une vague d’Airy de période $T = 2$ s de période.

car $\sinh(2kh) = 2 \sinh(kh) \cosh(kh)$. En se servant de la relation de dispersion (4.9), on aboutit à

$$E_c = \rho g \frac{H^2}{16} \frac{\omega^2}{c^2 k^2} = \rho g \frac{H^2}{16}. \quad (4.14)$$

Pour les ondes d’Airy, les énergies potentielles et cinétiques sont égales et l’énergie

totale est

$$E = E_c + E_p = \rho g \frac{H^2}{8}. \quad (4.15)$$

C'est une force conséquente. Ainsi, un fort vent (vent de force Beaulieu 8, environ 70 km/h, soufflant pendant plusieurs heures) peut produire des hauteurs de vague $H \geq 5$ m, soit des énergies $E \geq 30$ kJ/m² de surface maritime. Cette énergie se propage à la vitesse de groupe

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \left(k \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} \right) = \frac{1}{2} c \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) \quad (4.16)$$

En eau profonde, dès que $kh > 2$, la vitesse de groupe vaut à peu près la moitié de la célérité des ondes tandis qu'en eau peu profonde, quand $kh \ll 1$, alors onde et énergie se déplacent à la même vitesse.

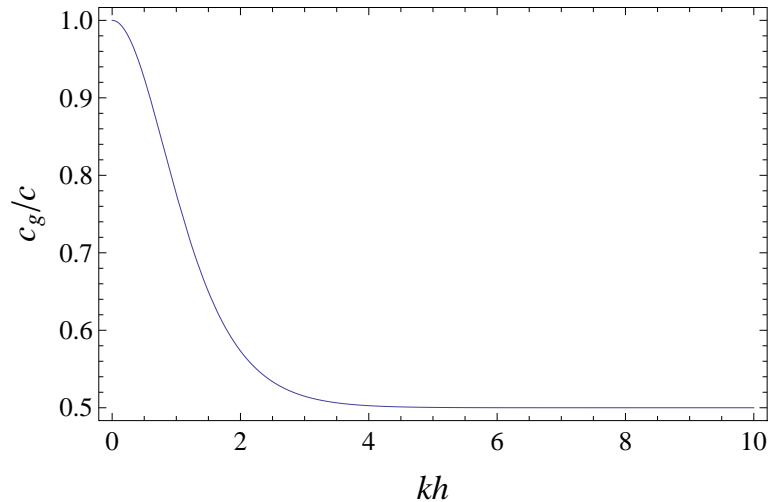


Figure 4.14 : variation de la vitesse relative c_g/c (vitesse de propagation de l'énergie par rapport à celle de l'onde) en fonction de la profondeur relative d'eau kh .

4.4 Vague

4.4.1 Classification

Les vagues sont des ondes à la surface de l'eau. Il en existe plusieurs classifications selon le ou les critère(s) considéré(s). Si on prend l'origine des ondes, on distingue

- vague causée par le vent (forçage météorologique): houle;
- vague causée par les mouvements de la lune (forçage astronomique): marées;
- vague causée par les tremblements de terre: tsunamis.

Selon le mécanisme physique qui est impliqué dans la propagation des ondes, on distingue:

- force motrice due à la gravité: onde gravitaire;
- vague due aux forces de tension à la surface de l'eau: onde capillaire.

Si on prend le rapport λ/h (avec λ la longueur d'onde et h la hauteur d'eau), on a:

- $\lambda/h \leq 2$, les ondes en eau profonde ou bien des ondes courtes;
- $2 < \lambda/h \leq 20$, les ondes intermédiaires (on ondes de transition);
- $\lambda/h > 20$, les ondes en eau peu profonde ou bien des ondes longues;

La notion d'eau profonde se fait toujours à travers le rapport λ/h ; elle n'est pas liée à la profondeur totale d'eau.

Une dernière classification propose en fait des tableaux des théories et des équations utilisées pour décrire le mouvement des ondes. La figure 4.15 dresse un tel tableau en fonction des valeurs adimensionnelles de la profondeur d'eau et de la hauteur de vague.

Quelques mots d'explication supplémentaires. On introduit le nombre d'Ursell³

$$U = \frac{H\lambda^2}{h^3} \quad (4.17)$$

pour distinguer les ondes linéaires des ondes non linéaires. Ici, « onde linéaire » veut dire que l'équation du mouvement est une équation différentielle linéaire, et que sa solution se présente sous la forme d'harmoniques (voir § 1.5.4).

- La théorie des ondes linéaires s'applique pour des ondes longues ($\lambda/h > 20$) caractérisées par un petit nombre d'Ursell (typiquement $U \ll 100$). C'est la théorie d'Airy (vue au § 4.3 et 4.4.2) qui est utilisée pour décrire le mouvement des

3. Ce nombre est obtenu à partir d'un développement en série avec un petit paramètre $\epsilon = kA$ (k nombre d'onde, A amplitude de la vague) de l'équation (4.2). Pour des ondes longues ($kh \ll 1$), le nombre d'Ursell correspond – à une constante multiplicative près – au rapport des amplitudes de la solution d'ordre 2 sur la solution du premier ordre en ϵ .

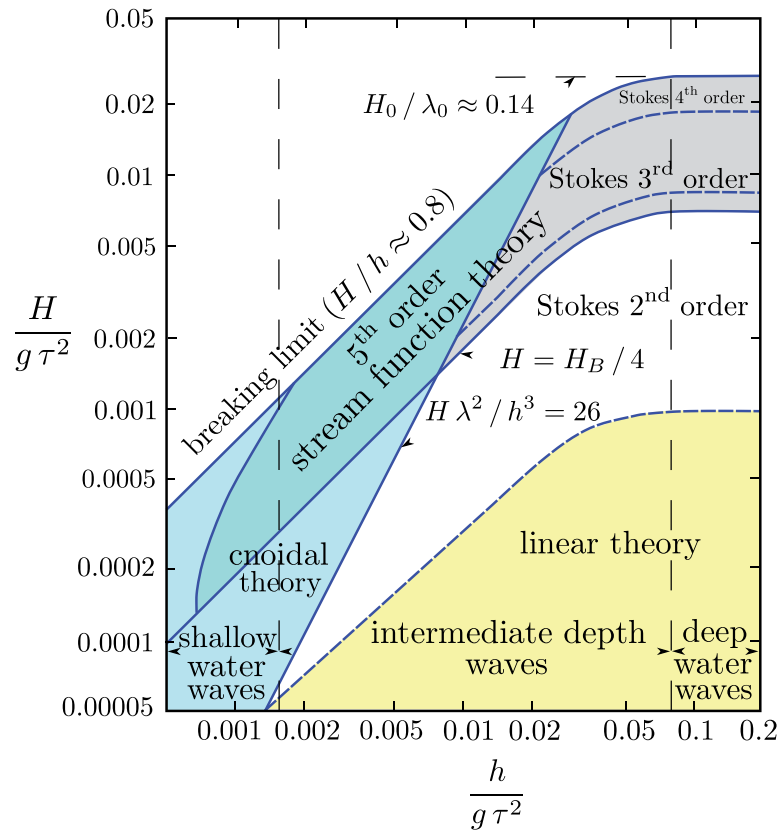


Figure 4.15 : domaine de validité des différentes théories en fonction de la hauteur de la vague H , de la hauteur d'eau h , de la période $\tau = \lambda/c$. La zone bleu-clair est le domaine des ondes cnoïdales. La zone jaune correspond à la théorie d'Airy. La zone bleue correspond à la théorie des ondes de Stokes. D'après une [classification proposée par Le Méhauté \(1976\)](#).

vagues. Rappelons que les vagues sont alors des combinaisons d'harmoniques, c'est-à-dire des fonctions périodiques sinusoidales.

- La théorie des ondes non linéaires s'applique dès lors que le cadre d'approximation des ondes linéaires n'est plus valable. Parmi les ondes non linéaires, on distingue :
 - les *ondes cnoïdales*: ce sont des solutions de l'équation de Korteweg-de-Vries⁴ (KdV). À noter que l'équation date de 1895; cette équation décrit le mouvement unidimensionnel d'une onde dispersive, incluant une dispersion à la fois en amplitude et en fréquence. Son domaine d'application

4. Diederik Johannes Korteweg (1848–1941) est un mathématicien appliqué hollandais. Son nom est principalement associé à ses travaux sur les ondes solitaires (solitons) avec son docteur Gustav de Vries (1866–1934).

est celui des ondes longues $\lambda > 5h$ et de période $\tau > 7\sqrt{h/g}$. L'équation de Benjamin-Bona-Mahony (1972) est maintenant préférée car elle est plus précise quand on tend vers le domaine des ondes courtes. Lorsque l'on doit étudier des propagations d'ondes dans les deux directions de la surface de l'eau, on emploie les équations de Boussinesq (1872) ou ses variantes. Ces ondes servent souvent à décrire des vagues formées par le vent sur des eaux peu profondes.

- les *ondes courtes* sont généralement étudiées à l'aide de la théorie de Stokes, qui consiste à rechercher des solutions sous la forme de série tronquée. Plus l'ordre du développement est important, meilleure est en principe la précision, mais il faut que la longueur d'onde soit relativement courte pour qu'une convergence rapide soit assurée.
- les *ondes solitaires* ou *solitons*: ce sont des cas particuliers d'ondes cnoïdales (forme asymptotique). Elles ont des propriétés remarquables qui les distinguent des autres ondes :
 - la forme est stable (pas de dispersion) et ne présente qu'une seule crête ;
 - l'onde peut se propager sur de très grandes distances sans atténuation apparente (pas de dispersion, pas de déferlement) ;
 - la vitesse dépend de la taille de la vague et sa largeur dépend de la profondeur d'eau ;
 - deux solitons qui se croisent ou se dépassent ne coalescent pas ;
 - si la profondeur d'eau vient à diminuer, le soliton peut se scinder en deux solitons, de taille différente.

Les ondes solitaires ont été décrites pour la première fois par John Scott Russell⁵ dans un canal reliant Édimbourg à Forth-Clyde en Écosse en 1834.

5. John Scott Russell (1808–1882) était un ingénieur naval et un mathématicien britannique. Il est principalement connu pour sa découverte de l'onde solitaire et l'étude qu'il en a faite en laboratoire. En 1834, Russell observa la formation d'une onde de forte amplitude générée par l'arrêt brusque d'une barge qu'il venait d'emprunter. Il suivit à cheval cette vague sur plusieurs kilomètres. Il observa que la forme et la vitesse de la vague restaient inchangées tout le long de son parcours : « Je ne puis donner une idée plus nette du phénomène qu'en décrivant les circonstances dans lesquelles il m'apparut pour la première fois. J'observais le mouvement d'un bateau que deux chevaux tiraient rapidement dans un canal étroit, lorsque ce bateau vint à s'arrêter tout à coup : mais il n'en fut pas de même de la masse d'eau qu'il avait mise en mouvement dans le canal ; elle s'accumula autour de la proue dans un état de violente agitation, puis, laissant tout à coup le bateau en arrière, se mit à cheminer en avant avec une grande vitesse sous la forme d'une seule grande ondulation, dont la surface était arrondie, lisse et parfaitement déterminée. Cette onde continua sa marche dans le canal sans que sa forme et sa vitesse parussent s'altérer en rien. Je la suivis à cheval et la retrouvai cheminant encore avec une vitesse de 8 à 9 milles à l'heure et conservant sa figure initiale (environ 30 pieds de longueur sur 1 pied à 1,5 pieds de hauteur). La hauteur de l'onde diminuait graduellement, et après l'avoir suivie pendant un mille ou deux, je la perdis dans les sinuosités du canal » (traduction par M. H. Darcy et M. H.



Figure 4.16 : reproduction en 1995 de l'observation d'une onde solitaire faite par Russell dans le canal de l'Union. D'après un document du [Département de mathématiques de l'université de Heriot-Watt](#).

4.4.2 Ondes linéaires

On appelle *ondes linéaires* des ondes de faible amplitude telles que le nombre d'Ur-
sell $U \ll 100$. Ces ondes sont décrites dans le cadre de la théorie d'Airy (voir § 4.3);
on les appelle donc également ondes d'Airy. Rappelons que les ondes linéaires sont
composées d'harmoniques de la forme

$$\eta = A \cos[k(x - ct)], \quad (4.18)$$

avec A l'amplitude de l'onde, $k = 2\pi/\lambda$ le nombre d'onde (λ la longueur d'onde), et c
la célérité, dont l'expression est fournie par la relation de dispersion

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh) = c_0^2 \frac{\tanh(kh)}{kh} = c_0^2 \frac{\lambda}{2\pi h} \tanh(2\pi h/\lambda) \quad (4.19)$$

avec $c_0 = \sqrt{gh}$ la vitesse de propagation des ondes en eau peu profonde.

Bazin). Il faudra attendre les travaux du français Boussinesq (1871), de l'anglais Rayleigh (1876),
et des hollandais Korteweg et de Vries (1895), pour disposer d'un modèle théorique décrivant
le mouvement d'une telle onde.

Tableau 4.4 : classification et principales caractéristiques des ondes.

<i>Onde :</i>	<i>linéaire</i>	<i>Stokes</i>	<i>cnôïdale</i>	<i>solitaire</i>	<i>mascaret</i>
<i>Valeurs de U</i>	$U \rightarrow 0$	$U < 10$	$U > 25$	$U \sim 1$	$U \gg 1$
<i>Périodicité</i>	périodique	périodique	périodique	période in- finie	période in- finie
<i>Creux</i>	creux et crêtes identiques	creux plats, crêtes poin- tues	creux plats, crêtes poin- tues	pas de creux	pas de creux
<i>Transport de masse</i>	nul	faible	faible	fort	fort
<i>Incorporation d'air</i>	nulle	faible	faible	fort	fort
<i>Rapport λ/H</i>	$\lambda/H > 150$	$2 < \frac{\lambda}{H} < 20$	$\lambda/H > 10$	infini	infini

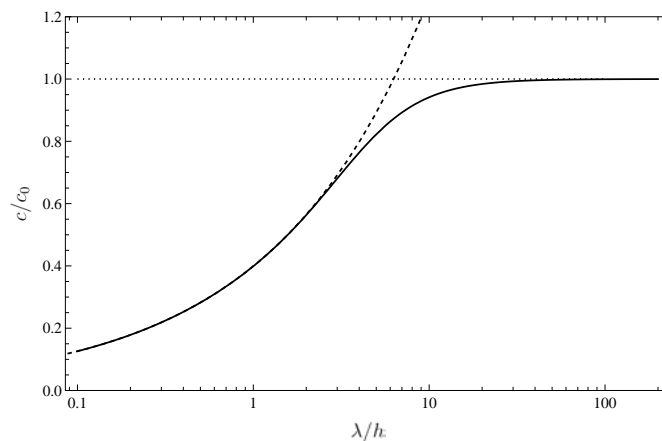


Figure 4.17 : variation de la célérité c/c_0 (courbe continue) en fonction du rapport λ/h pour des ondes d'Airy. La courbe pointillée correspond à l'approximation des ondes en eau peu profonde : $c \rightarrow c_0$. La courbe tiretée représente la propagation de la houle, c'est-à-dire une onde linéaire en eau profonde : $c/c_0 \rightarrow \sqrt{\lambda/(2\pi h)}$.

4.4.3 Ondes de Stokes

Les ondes de Stokes sont des ondes assez proches des ondes linéaires : ce sont des ondes périodiques, dont le profil de hauteur comporte une harmonique (partie linéaire) et une contribution non linéaire représentant les effets d'ordre supérieur quand λ/h

croît

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2} \cos(t\omega - kx) + \frac{1}{16} kH^2 \frac{\cosh(kh)}{\sinh^3(kh)} (\cosh(2hk) + 2) \cos(2(kx - t\omega)), \quad (4.20)$$

avec H la hauteur de la vague. Comme le montre la figure 4.18, une onde de Stokes présente des crêtes plus pointues et des creux plus plats qu'une onde linéaire (sinusoïdale).

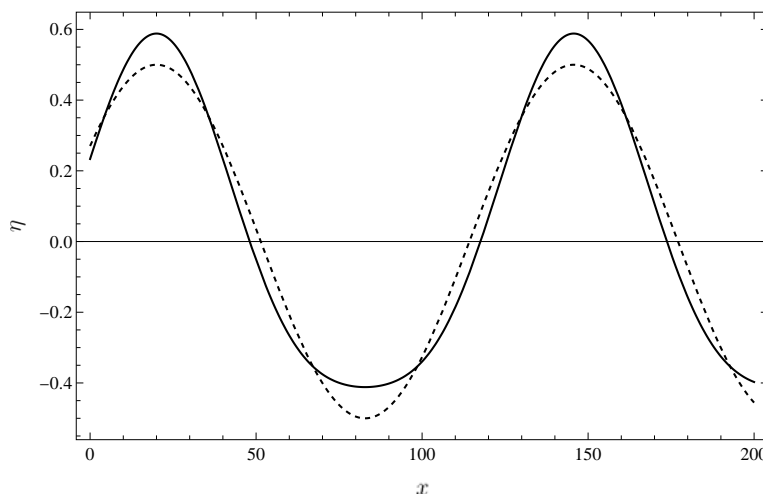


Figure 4.18 : profil de hauteur d'une onde de Stokes (trait continu) comparé au profil de hauteur d'une onde linéaire (courbe tiretée). Calcul avec $H = 1$ m, $\omega = 1$ s⁻¹, $t = 1$ s, et $h = 10$ m.

4.4.4 Ondes cnoïdales

Les *ondes cnoïdales* sont des solutions périodiques de l'équation de Korteweg-de-Vries (KdV), une équation aux dérivées partielles non linéaire d'ordre 3 :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{gh} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6} h^3 \sqrt{gh} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (4.21)$$

Une solution de cette équation est

$$\eta(x, t) = \eta_2 + H \operatorname{cn} \left(\frac{x - ct}{\Delta} \right),$$

avec pour altitude des creux :

$$\eta_2(m) = \frac{H}{m} \left(1 - m - \frac{E(m)}{K(m)} \right) \text{ et } \Delta = \frac{\lambda}{2K(m)} = h \sqrt{\frac{4mh}{3H}},$$

où H est la hauteur de la vague, m est un paramètre dit paramètre elliptique, $K(m)$ l'intégrale elliptique complète du premier type, cn la fonction elliptique cn ⁶ de Jacobi et $E(m)$ l'intégrale elliptique complète du second type (Abramowitz & Stegun, 1964). Les longueur d'onde λ et célérité c sont données par :

$$\lambda = h\sqrt{\frac{16mh}{3H}}K(m) \text{ et } c = \sqrt{gh} \left[1 + \frac{H}{mh} \left(1 - \frac{1}{2}m - \frac{3E(m)}{2K(m)} \right) \right],$$

On a reporté sur la figure 4.19 trois profils de vagues cnoïdales pour trois valeurs différentes de m . Pour $m = 0,05$, on a un profil proche d'une onde linéaire (sinusoïdale). Pour $m = 0,5$, la déformation est relativement faible par rapport au cas précédent. Pour $m = 0,95$, on observe que les crêtes de la vague sont séparées par des creux de plus en plus aplatis. La figure 4.20 montre la vitesse relative d'une onde cnoïdale, définie comme $(c/c_0 - 1)h/H$, en fonction du paramètre elliptique m . Pour $m \rightarrow 0$, cette vitesse relative tend vers $-\infty$ alors que pour $m \rightarrow 1$, on a :

$$\left(\frac{c}{c_0} - 1 \right) \frac{h}{H} \rightarrow \frac{1}{2}. \quad (4.22)$$

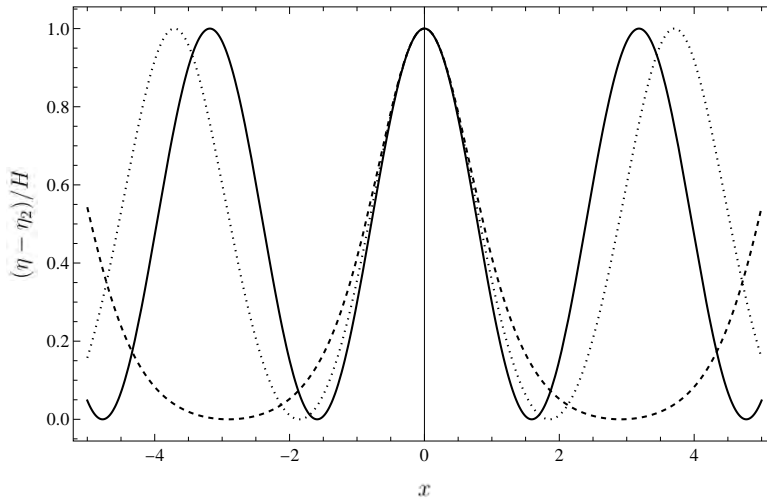


Figure 4.19 : profil d'une onde cnoïdale pour différentes valeurs du paramètre elliptique m : $m = 0,05$ (courbe continue), $m = 0,5$ (courbe pointillée), $m = 0,95$ (courbe tiretée).

6. C'est de là d'où vient le nom d'onde cnoïdale.

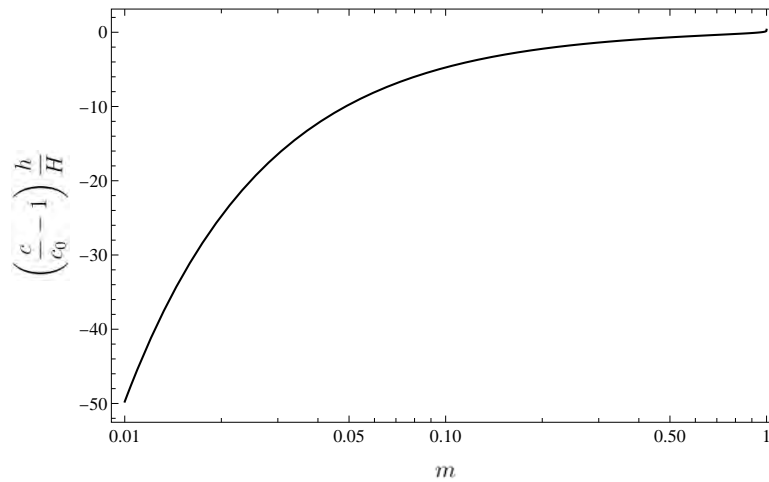


Figure 4.20 : célérité relative d'une onde cnoïdale en fonction de m .

4.4.5 Ondes solitaires

Une *onde solitaire* est un cas particulier d'onde cnoïdale qui correspond au cas asymptotique $m \rightarrow 1$ (c'est-à-dire une longueur d'onde infiniment grande). On l'appelle également *soliton* car contrairement aux autres ondes non linéaires qui se dispersent et s'amortissent, elle garde une certaine individualité (comme on note en physique « photon », « proton », etc., des entités qui se comportent comme des particules élémentaires). Sa vitesse est obtenue à partir de l'équation (4.22), dont le plus souvent on prend un développement limité à l'ordre 1 en H/h :

$$c^2 = c_0^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{H}{h}\right)^2 \approx g(h + H).$$

C'est donc une vitesse peu différente de la vitesse en eau peu profonde. Le profil d'un soliton est

$$\eta(x, t) = H \operatorname{sech}^2(\beta(x - ct)),$$

avec $\beta^{-2} = 4h^2(h + H)/3a \approx 4h^3/(3a)$ (Drazin & Johnson, 1996) et sech la sécante hyperbolique ($\operatorname{sech} = 1/\cosh$). La figure 4.21 montre un profil type d'une solitaire. On note que contrairement aux cas précédents

- l'onde n'est pas périodique (période de retour infiniment longue);
- il n'y a pas de creux ($\eta_2 = 0$);
- le profil est constant au cours du temps (pas de dispersion).

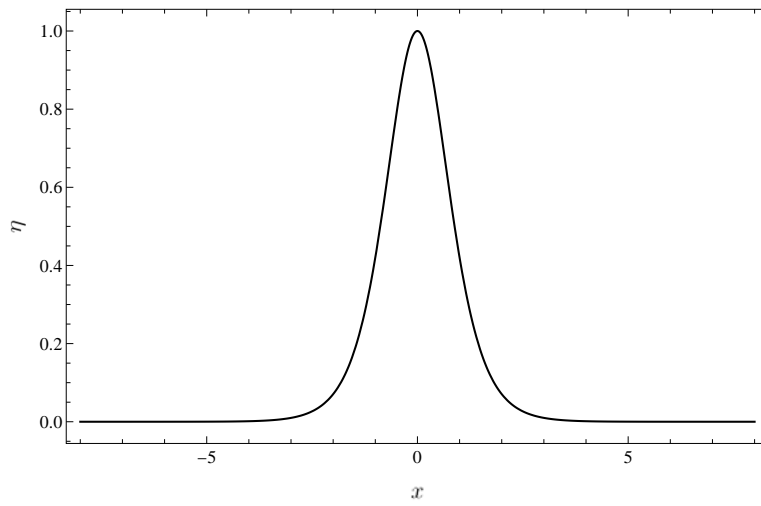


Figure 4.21 : profil de hauteur d'une onde solitaire avec $H = 1$.

4.5 Tsunami

4.5.1 Introduction

Un tsunami est une onde liée au mouvement rapide d'un grand volume d'eau en haute mer à d'un séisme (destruction de Lisbonne en 1755, tsunami de décembre 2004 en Asie), d'une éruption volcanique sous-marine (éruption du Krakatoa en 1883), d'un glissement de terrain sous-marin de grande ampleur (baie de Lituya, Alaska en 1958). Les tsunamis se déplacent à très grande vitesse (plusieurs centaines de km/h), mais tant qu'ils se propagent en haute mer (en eau profonde), la hauteur de l'intumescence est faible, voire imperceptible. C'est à l'approche des côtes que l'onde gagne en amplitude et déferler sur le littoral, en provoquant d'énormes dommages.



Figure 4.22 : tsunami arrivant sur les cotes du Srilanka à Kalutara en décembre 2004. Source : DigitalGlobe.

Contrairement à la houle (vagues formées par le vent à la surface des océans), qui ne met en mouvement qu'une faible épaisseur d'eau près de la surface, le tsunami provoque un déplacement d'eau sur une grande épaisseur. La longueur d'onde est généralement très grande (quelques dizaines à centaines de km). L'énergie associée au mouvement de l'eau est donc considérable.



Figure 4.23 : tsunami provoqué par le tremblement de terre de Fukushima (Japon) le 11 mars 2011. La vague est prise au moment elle touche les quais du port de Miyako (préfecture d'Iwate). Source: Toru Yamanaka / AFP/ Getty Images.

4.5.2 *Modèle approximatif de tsunami arrivant de haute mer*

Les équations de Saint-Venant (1.16–1.17) s'écrivent pour un écoulement non frottant le long d'un fond horizontal

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (4.24)$$

avec $\bar{u}(x, t)$ la vitesse moyenne de l'eau, $h(x, t)$ la profondeur d'eau, g la gravité. On part d'un état à l'équilibre où $h = h_0(x)$ et $u = u_0(x) = 0$. L'eau initialement au repos est perturbée par une secousse en haute mer. Il se produit un train d'ondes dans l'océan ($x \rightarrow \infty$), c'est-à-dire une succession de vagues qui se dirigent vers la côte.

On cherche la solution sous la forme d'un développement asymptotique

$$\begin{aligned} h(x, t) &= h_0(x) + \epsilon h_1(x, t) + \dots, \\ u(x, t) &= u_0(x) + \epsilon u_1(x, t) + \dots, \end{aligned}$$

où ϵ est petit (on prendra $\epsilon = \beta$; voir figure 4.24) et $u_0(x) = 0$. Les équations de

Saint-Venant (4.23–4.24) à l'ordre ϵ^0 s'écrivent donc

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial h_0 \bar{u}_0}{\partial x} = 0, \quad (4.25)$$

$$0 = -g \frac{\partial h_0}{\partial x}, \quad (4.26)$$

qui sont trivialement vérifiées. À l'ordre ϵ^1 , ces équations deviennent

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial h_0 \bar{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial h_1 \bar{u}_0}{\partial x} = 0, \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} = -g \frac{\partial h_1}{\partial x}, \quad (4.28)$$

où l'on note que le terme convectif, qui est non linéaire, disparaît dans (4.28) et le troisième terme dans (4.27) est en fait nul car $u_0 = 0$. Il s'ensuit que les équations (4.28) et (4.27) peuvent se combiner pour donner une seule équation régissant h_1

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(g h_0 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right), \quad (4.29)$$

où l'on reconnaît les équations des ondes (1.65) dans le cas où h_0 est constant (indépendant de x), avec ici la célérité des ondes égale à $c = \sqrt{g h_0}$.

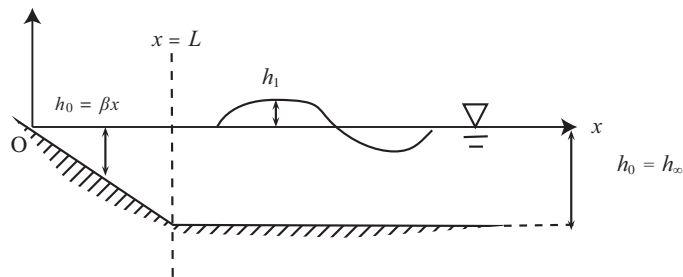


Figure 4.24 : modèle simplifié de tsunami.

Considérons le cas où le fond marin est constituée d'un haut fond et d'une plage faiblement inclinée (voir figure 4.24)

$$h_0(x) = \begin{cases} \beta x & \text{pour } 0 \leq x \leq L, \\ h_\infty & \text{pour } x \geq L. \end{cases}$$

On suppose que $h_\infty \ll L$ de telle sorte que β soit petit. Dans ce cas, l'équation (4.29) devient

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} = g \beta x \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + g \beta \frac{\partial h_1}{\partial x}, \quad (4.30)$$

sur le domaine $0 \leq x \leq L$. Pour la haute mer, c'est-à-dire pour le domaine $x > L$, la hauteur d'eau initiale est constante et l'équation à résoudre est l'équation des ondes linéaires

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} = gh_\infty \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}, \quad (4.31)$$

dont la solution est de la forme $h_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \psi)$, avec A et ψ deux constantes, $c = \omega/k = \sqrt{gh_\infty}$ la célérité de l'onde, k le nombre d'onde (voir § 1.5.4). Les deux solutions doivent se raccorder en $x = L$ et avoir la valeur :

$$h_1(L, t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (4.32)$$

avec $\phi = \psi - kL$. Pour résoudre ce qui se passe à l'approche de la côte ($0 \leq x \leq L$), on recherche une solution avec des variables séparables, c'est-à-dire sous la forme

$$h_1(x, t) = \cos(\omega t + \phi)H(x).$$

On substitue cette forme dans (4.30). L'équation différentielle régissant H est trouvée être

$$x \frac{d^2 H}{dx^2} + \frac{dH}{dx} + \frac{\omega^2}{g\beta} = 0,$$

avec $H(L) = A$ comme condition à la limite. Cette équation peut être résolue en faisant le changement de variable : $x = 2\alpha s^2$ avec $\alpha = \sqrt{g\beta}/(8\omega^2)$ de telle sorte que

$$\frac{dH}{dx} = \frac{1}{4\alpha s} \frac{dH}{ds}, \quad (4.33)$$

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = \frac{1}{16\alpha^2 s^2} \frac{d^2 H}{ds^2} - \frac{1}{16\alpha^2 s^3} \frac{dH}{ds}. \quad (4.34)$$

On aboutit alors à l'équation de Bessel d'ordre 0 : $y'' + y'/x + y = 0$, dont les solutions sont de la forme $y = aJ_0(x) + bY_0(x)$ avec a et b deux constantes d'intégration et J_0 la fonction de Bessel d'ordre 0 du premier type, Y_0 la fonction de Bessel d'ordre 0 du second type qui n'est pas bornée en $x = 0$; on a donc nécessairement $b = 0$. La solution s'écrit donc $H(s) = aJ_0(s)$, ce qui donne compte tenu de la condition aux limites

$$H(x) = A \frac{J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g\beta}}\sqrt{x}\right)}{J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g\beta}}\sqrt{L}\right)}.$$

Comme le montre la figure 4.25, l'amplitude de l'onde augmente tandis que sa longueur d'onde diminue quand elle approche la plage située en $x = 0$. Quoique très simplifié (notamment on ignore les effets non linéaires, qui deviennent de plus en plus importants à l'approche de la plage), ce modèle permet de démontrer l'amplification d'une vague venant de haute mer à l'approche d'une cote.

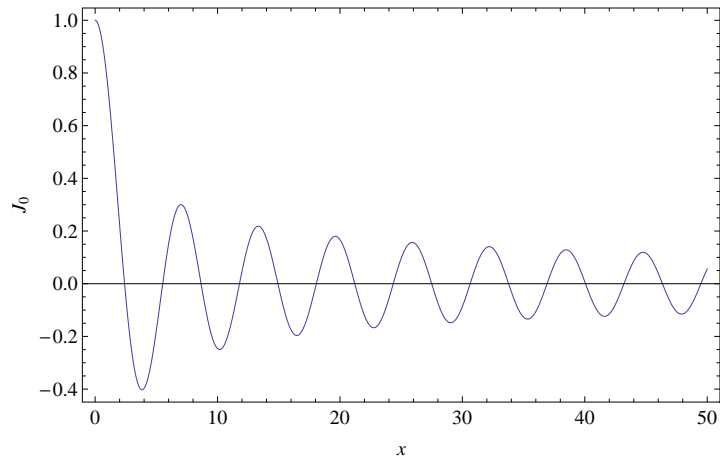


Figure 4.25 : fonction de Bessel J_0 .

4.6 Vague d'impulsion

L'entrée d'un écoulement gravitaire (tel qu'une avalanche ou un écroulement rocheux) produit une *onde d'impulsion*. Ces ondes ont principalement été étudiées en laboratoire à l'aide de modèles réduits. En général, l'expérience consiste à lâcher une masse dans une retenue d'eau. La masse était constituée

- soit d'un bloc solide. C'est le type d'expériences le plus commun (Noda, 1970; Heinrich, 1992; Watts, 2000; Walder *et al.*, 2003; Panizzo *et al.*, 2005b);
- soit d'une masse granulaire (Huber, 1980; Fritz *et al.*, 2003a,b; Zweifel *et al.*, 2006; Heller *et al.*, 2008b).

La consistance de la masse entrant dans la retenue a un rôle assez important car elle conditionne l'amplitude des vagues générées. Sur la base d'essais en laboratoire, Heller *et al.* (2008a) montrent ainsi que le rapport entre l'amplitude maximale a_{mg} d'une vague générée par l'entrée d'une masse granulaire et l'amplitude maximale a_{bs} d'une vague induite par un bloc solide varie à peu près linéairement avec le nombre de Froude

$$\frac{a_{mg} - a_{bs}}{a_{mg}} = 1 - 0,25Fr, \quad (4.35)$$

avec $Fr = u_s/\sqrt{gh}$ et u_s la vitesse d'impact à l'entrée dans le lac d'une profondeur h . À petit nombre de Froude, un écoulement granulaire produit une vague dont l'amplitude est double par rapport à celle générée par un bloc solide. Cette différence s'estompe avec le nombre de Froude

En général, en ingénierie on a besoin d'étudier la possibilité qu'une onde d'impulsion soit générée (par une avalanche ou un mouvement de terrain) et se propage jusqu'à la digue; le principal problème est alors d'évaluer la force d'impact de la vague, la hauteur de remontée (*run-up*), et les effets de l'onde de submersion sur la digue 4.26.

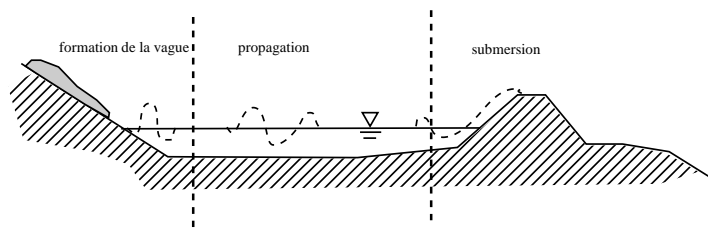


Figure 4.26 : l'étude d'une vague d'impulsion nécessite de s'intéresser à la formation de la vague, sa propagation, et les effets sur un obstacle.

Un paramètre important du problème est la géométrie de propagation de l'onde: dans la plupart des cas, en particulier, dans les expériences en laboratoire, on considère la propagation d'ondes planes (voir fig. 4.27). Ce scénario peut se justifier soit par la

topographie des lieux et les caractéristiques de l'écoulement entrant dans le lac, soit par le pouvoir directeur de l'onde. Dans la réalité, des formes plus complexes peuvent être observées, avec des front d'onde à symétrie circulaire ou présentant des motifs plus complexes (notamment en cas de diffraction de l'onde).

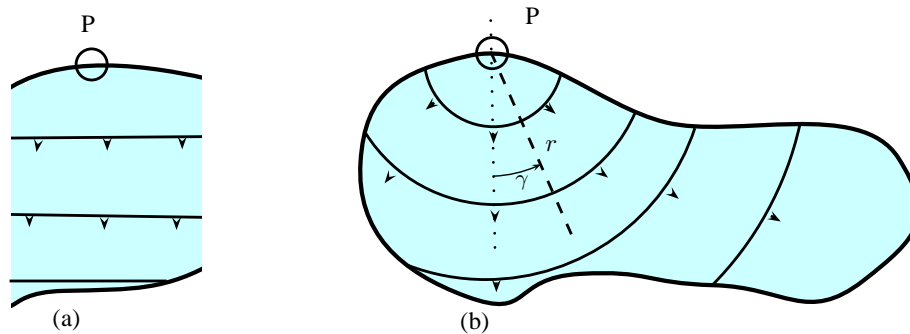


Figure 4.27 : géométrie de propagation d'une onde d'impulsion. (a) Onde plane. (b) Onde circulaire. P Désigne le point d'impact. D'après (Vischer & Hager, 1998).

Les vagues d'impulsion sont étudiées soit à l'aide de modèles numériques⁷, soit à l'aide de formules empiriques. On va ici, après avoir mentionné le cadre général de la similitude au § 4.6.1, présenter des formules empiriques. On attire l'attention sur les écarts conséquents d'une formule à l'autre. Des écarts d'un facteur 10 sont fréquents quand on compare les différentes formules entre elles ou bien avec les rares événements bien documentés comme Lituya Bay (Heller & Hager, 2010; Watt *et al.*, 2012). Parmi les sources d'erreur, on peut citer (Heller & Spinneken, 2013):

- la nature de l'écoulement : granulaire ou très cohésif (voir § 4.6.2 et 4.6.3);
- le rapport d'aspect entre largeur d'écoulement à l'impact et largeur de l'étendue d'eau;
- la forme du front de l'écoulement à son entrée dans l'eau;
- la transition de pente en pied de pente, dans la retenue d'eau.

7. Outre les aspects numériques ardues liés à la modélisation de l'écoulement entrant dans l'eau et le mouvement de l'eau qui en résulte, il faut disposer de la bathymétrie des fonds et de la topographie des pentes, ce qui présente un coût assez conséquent. Dans la pratique, de telles modélisations restent du domaine de la recherche (Kelfoun & Druitt, 2005; Kelfoun *et al.*, 2010; Giachetti *et al.*, 2011; Watt *et al.*, 2012).

4.6.1 Similitude du problème

Les équations de Saint-Venant s'écrivent

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g, \quad (4.38)$$

avec $h(x, t)$ la hauteur d'eau totale ($h = h_0 + \eta$), (u, v) les composantes de la vitesse dans un repère cartésien (x, y) rattaché à la retenue (x : horizontale, y : verticale), p la pression.

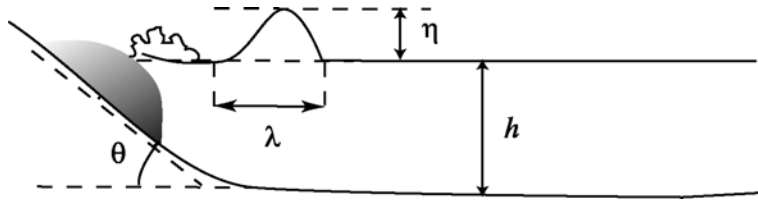


Figure 4.28 : vague générée par une avalanche ou un mouvement de terrain dans une retenue d'eau.

On introduit les échelles suivantes : t_s temps caractéristique de submersion de l'avalanche, V_ℓ le volume par unité de largeur, u_0 la vitesse de l'avalanche à l'impact, et h_0 la hauteur d'eau initiale dans la retenue. Suivant Hammack (1973) et Walder (2003), on peut montrer que la propagation de l'intumescence peut s'écrire en fonction de trois variables sans dimension :

$$\eta = \eta^* f(V_\ell^*, t^*, \text{Fr} \sin \theta),$$

avec

$$\eta^* = \frac{2V_\ell}{t_s^* \sqrt{gh_0}}, V_\ell^* = \frac{V_\ell}{h_0^2}, t_s^* = t_s \sqrt{\frac{g}{h_0}}, \text{ et } \text{Fr} = \frac{u_0}{\sqrt{gh_0}},$$

respectivement sous forme adimensionnelle : l'amplitude de l'intumescence, le volume par unité de largeur, le temps, et le nombre de Froude. Par analyse dimensionnelle, le problème à résoudre se réduit à déterminer la fonction $f(V_\ell^*, t^*, \text{Fr} \sin \theta)$ donnant l'amplitude sous forme adimensionnelle en fonction du temps, du nombre de Froude, et du volume par unité de largeur. Cette fonction peut être déterminée numériquement ou bien à l'aide d'expériences à échelle réduite. Dans ce cas-là, on peut utiliser les données obtenues par Bowering, Huber (1980), ou bien Walder & Watts (2003).

4.6.2 Résultat des expériences pour des blocs solides

Les expériences ont été réalisées en plaçant un bloc solide sur une rampe inclinée, puis en le laissant glisser gravitairement jusqu'à ce qu'il impacte la retenue. Les blocs ont le plus souvent un front pointu pour simuler l'effet d'un front progressif (peu raide). La masse du bloc, la hauteur d'eau, l'inclinaison de la rampe, la longueur de la zone de glissement étaient autant de paramètres qui permettaient d'explorer un assez large spectre de conditions initiales ou d'écoulement. La plupart des expériences ont été réalisées avec des nombres de Froude à l'impact de l'ordre de 1 à 4.

Nous reportons les données de Huber (1980) et Walder *et al.* (2003). On note une certaine correspondance entre données même si elle n'est pas parfaite. Notamment, Huber conclut à un effet du nombre de Froude à l'impact alors que les expériences plus récentes (et à nombre de Froude moins élevé) ne permettent pas de mettre en évidence une telle dépendance.

Ces données permettent d'arriver à calculer de façon empirique l'amplitude de l'onde comme suit

$$\frac{\eta}{h_0} = 1,32 \left(\frac{t_s^*}{V_\ell^*} \right)^{-0,68},$$

si l'on cherche une dépendance en fonction de t_s^* et V_ℓ^* , ou bien sous la forme

$$\frac{\eta}{h_0} = AV_\ell^{*m} (\text{Fr} \sin \theta)^n,$$

si on cherche plutôt à exprimer cette dépendance en fonction du nombre de Froude et de la largeur, avec $A \sim 0,4$ (0,35 – 0,5), $n \sim 0,35$ (0,25 – 0,5), et $m \sim 0,35$ (0,3 – 0,4).

Concernant la demie longueur d'onde, on a $\lambda \approx 0,27t_s\sqrt{gh}$.

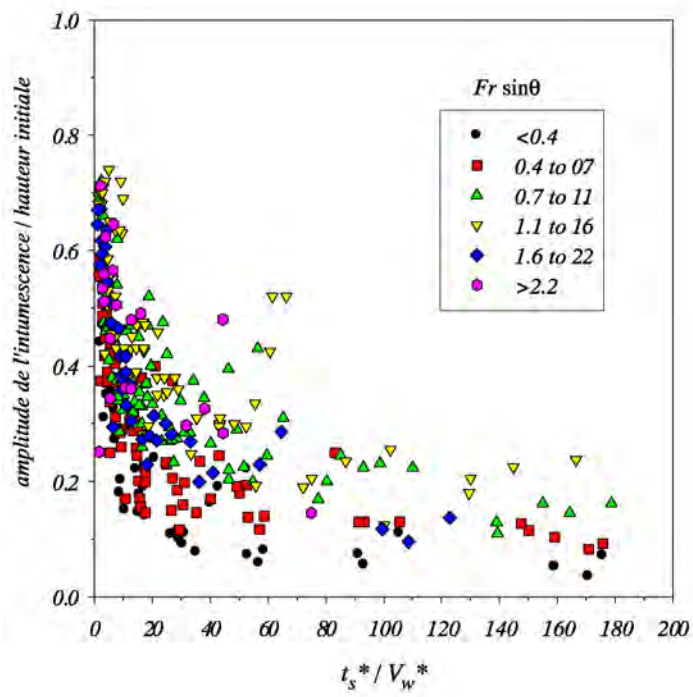


Figure 4.29 : données obtenues par Huber (1980).

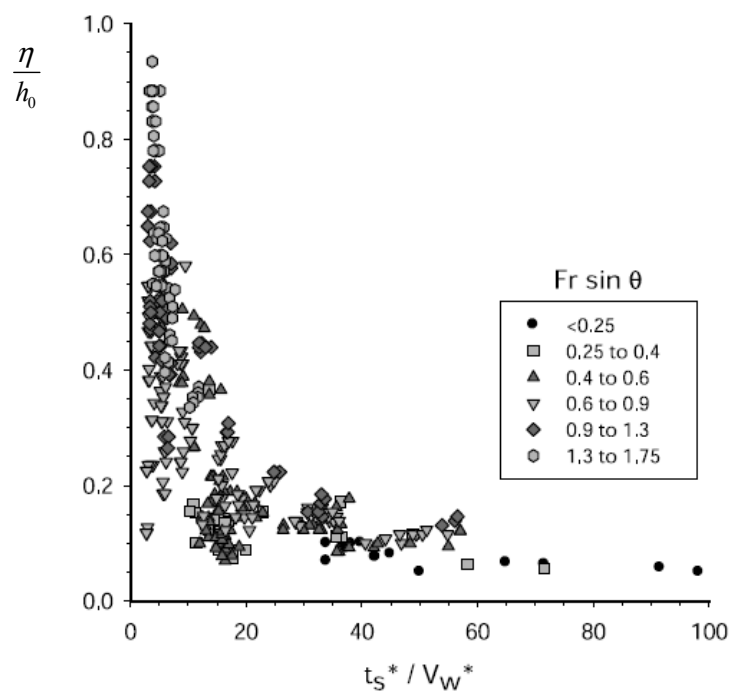


Figure 4.30 : données obtenues par (Walder *et al.*, 2003).

4.6.3 Résultat des expériences pour des écoulements granulaires

Ondes planes

Heller (2007) a mené une étude détaillée des vagues d'impulsion générées par l'entrée d'une masse granulaire dans un canal. Selon lui, la plupart des résultats peuvent être commodément synthétisés à travers des relations les liant à un nombre sans dimension P , qu'il a appelé « paramètre d'impulsion » plutôt que le nombre de Froude. Par exemple, si on prend l'amplitude de la vague, la dispersion des résultats expérimentaux est moindre avec le nombre sans dimension P , comme le montre la figure 4.31.

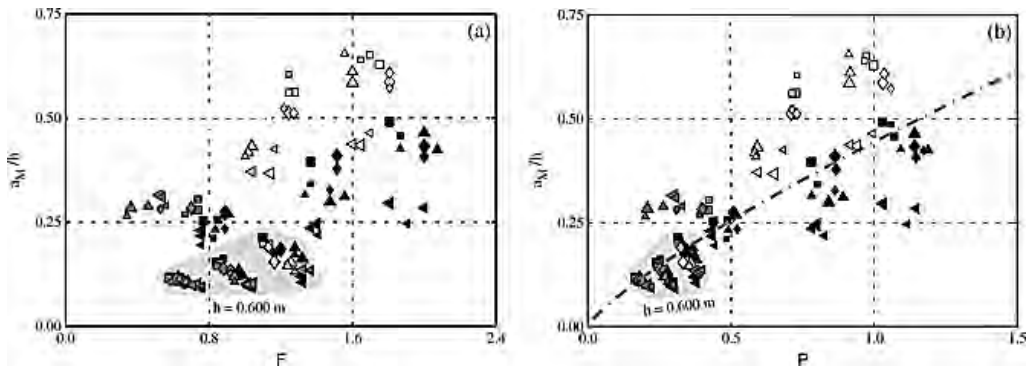


Figure 4.31 : variation de l'amplitude relative a_M/h en fonction du nombre de Froude Fr (a) et du nombre d'impulsion P (b) pour 144 tests en laboratoire. D'après (Heller & Spinneken, 2013).

Le paramètre d'impulsion est défini de la façon suivante

$$P = Fr \left(\frac{s}{h} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho_s V_s}{\rho_f h^2} \right)^{1/4} \cos^{1/2} \left(\frac{6}{7} \alpha \right), \quad (4.39)$$

avec s l'épaisseur de l'écoulement, h la hauteur d'eau, ρ_s la masse volumique solide, ρ_f la masse volumique du fluide (eau), V_s le volume de l'écoulement granulaire par unité de largeur (de canal), $Fr = u_s/\sqrt{gh}$ le nombre de Froude avec u_s la vitesse de l'écoulement solide à l'entrée dans la retenue (voir fig. 4.32).

Nous reportons ici les résultats de la thèse de Valentin Heller; ces résultats ont été actualisés récemment Heller & Spinneken (2013); Evers *et al.* (2019a), mais cela ne change pas sensiblement la nature des résultats compte tenu de l'incertitude et la dispersion des données. Heller (2007) a montré que les paramètres suivants se calculaient

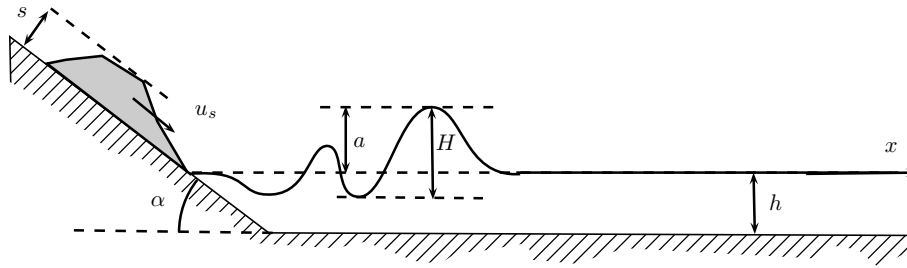


Figure 4.32 : vague générée par une avalanche ou un mouvement de terrain dans une retenue d'eau. D'après (Heller, 2007).

à l'aide de P :

- l'amplitude maximale de la plus grosse vague d'impulsion est donnée par

$$a_{max} = \frac{4}{9}hP^{4/5}, \quad (4.40)$$

avec un écart relatif maximum de $\pm 30\%$. La position à laquelle ce maximum est atteint est estimée par la formule: $x_{max} = \frac{11}{2}hP^{1/2}$ avec une incertitude de l'ordre de $\pm 50\%$. Huber & Hager (1997) avaient obtenu une relation un peu différente

$$a_{max}(x) = 0,88h \sin \alpha \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right)^{1/4} \left(\frac{V_s}{h^2} \right)^{1/2} \left(\frac{h}{x} \right)^{1/4}. \quad (4.41)$$

La hauteur maximale est proportionnelle à l'amplitude de la vague :

$$H_{max}(x) = \frac{5}{4}a_{max} = \frac{5}{9}hP^{4/5}; \quad (4.42)$$

- le volume maximal de la plus grosse vague (par unité de largeur) est

$$V_{max} = h^2P^{6/5}, \quad (4.43)$$

avec un écart relatif maximum de $\pm 50\%$;

- l'amplitude des vagues décroît au cours de leur propagation selon une loi

$$a(x) = \frac{3}{5}hP^{4/5} \left(\frac{x}{h} \right)^{-4/15}, \quad (4.44)$$

avec un écart relatif maximum de $\pm 30\%$;

- les vagues se déplacent à une vitesse (en crête) proche de celle d'un soliton

$$c = c_0 \left(1 + 2 \frac{a^2}{h^2} \right)^{1/2}, \quad (4.45)$$

avec un écart relatif maximum de $\pm 15\%$;

- la période de la plus grande vague d'impulsion vérifie à peu près la relation

$$\tau = 9\sqrt{\frac{h}{g}}P^{1/2}, \quad (4.46)$$

tandis que la longueur d'onde de cette vague est

$$\lambda = c\tau = 9hP^{1/2} \left(1 + 2\frac{a^2}{h^2}\right)^{1/2}; \quad (4.47)$$

- la nature de la vague d'impulsion générée dépend d'une multitude de paramètres. En première approximation, on peut différencier les cas possibles à l'aide du nombre de Froude et du nombre adimensionnel Q :

$$Q = \left(\frac{s}{h}\right)^{1/3} \left(\frac{\rho_s V_s}{\rho_f h^2}\right) \cos \alpha, \quad (4.48)$$

- une onde de Stokes quand $Q < \frac{4}{5}\text{Fr}^{-7/5}$,
- une onde cnoïdale quand $\frac{4}{5}\text{Fr}^{-7/5} \leq Q \leq 11\text{Fr}^{-5/2}$,
- un mascaret quand $Q > 11\text{Fr}^{-5/2}$.

La hauteur des vagues dépend de la distance depuis le point d'impact. [Evers et al. \(2019b\)](#) proposent des relations empiriques permettent de calculer hauteur et amplitude en fonction de la distance.

Pour les vagues d'impulsion dues aux avalanches, [Zitti et al. \(2016\)](#) faisaient remarquer que la masse volumique et le nombre de Froude étaient bien plus petits que ceux considérés par [Heller & Hager \(2010\)](#). Sur la base de leurs expériences, ils ont suggéré que l'amplitude des vagues était comprise entre deux bornes (voir tableau 4.5).

Tableau 4.5 : bornes inférieure et supérieure d'amplitude et de hauteur des vagues. Le coefficient de détermination R^2 est indiqué. D'après [Zitti et al. \(2016\)](#).

	amplitude A/h	hauteur H/h
borne inférieure	$A' = 0,143P$ ($R^2 = 0,685$)	$H' = 0,19P$ ($R^2 = 0,526$)
borne supérieure	$A' = 0,427P^{4/5}$ ($R^2 = 0,814$)	$H' = 0,48P^{4/5}$ ($R^2 = 0,483$)

Ondes circulaires

Sur la base d'essais en laboratoire, [Huber & Hager \(1997\)](#) ont proposé la formule suivante pour calculer l'amplitude maximale d'une onde d'impulsion en fonction de l'angle γ et de la distance r (voir fig. 4.27 pour la notation):

$$a_{max}(r) = 1,66h \sin \alpha \cos^2 \left(\frac{2\delta}{3}\right) \left(\frac{\rho_s}{\rho_f}\right)^{1/4} \left(\frac{V_s}{h^2}\right)^{1/2} \left(\frac{h}{r}\right)^{2/3}, \quad (4.49)$$

avec h la hauteur d'eau, ρ_s la masse volumique solide, ρ_f la masse volumique du fluide (eau), et V_s le volume de l'écoulement granulaire par unité de largeur (de l'écoulement entrant dans le lac). L'amortissement de l'onde est plus marqué que pour une onde plane. Comme précédemment, la vitesse maximale (en crête) est proche de celle d'une onde solitaire :

$$c^2 = g(h + a_{max}).$$

L'incertitude sur les résultats est évaluée à $\pm 15\%$. Ces résultats sont valables pour des distances dans la fourchette $5 < r/h < 30$.

4.6.4 Remontée (run-up)

Sur la base de 200 expériences en laboratoire, Müller a calculé la hauteur de remontée (run-up) R d'une onde d'impulsion le long d'un obstacle (tel que le parement d'un barrage) (Vischer & Hager, 1998)

$$R = 1,25h \left(\frac{\pi}{2\delta}\right)^{1/5} \left(\frac{H}{h}\right)^{4/5} \left(\frac{H}{\lambda}\right)^{-3/20}, \quad (4.50)$$

avec δ l'angle du parement par rapport à l'horizontale ($18^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$ dans les expériences de Müller), H la hauteur maximale de la vague donnée par (4.42), et λ la longueur d'onde, dont une estimation est fournie par (4.47).

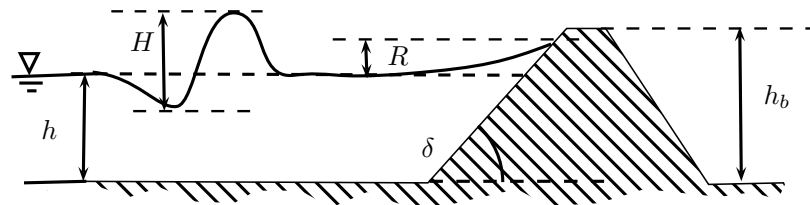


Figure 4.33 : remontée (runup) d'une vague contre un barrage.

Evers *et al.* (2019b) proposent une formule différente (avec des écarts significatifs avec la formule de Müller) :

$$R = 2a \exp\left(0,4\frac{a}{h}\right) \left(\frac{90}{\delta}\right)^{1/5} \quad (4.51)$$

avec δ l'angle du parement par rapport à l'horizontale exprimé en degré, a l'amplitude de la vague à l'approche de la digue/barrage, et h la hauteur d'eau au niveau de la digue. Evers *et al.* (2019b) distinguent le cas d'un barrage rigide et celui d'un barrage en remblai. Ils proposent notamment une estimation du débit de surverse, du volume surversé, de la hauteur d'écoulement, et des forces d'impact de la vague d'impulsion sur un ouvrage.

4.7 Mascaret



- Qu'est-ce qu'un ressaut hydraulique ?
- ↪ Voir la définition mathématique dans l'annexe 2.1 et revoir l'interprétation hydraulique d'un choc au § 1.2.7 ainsi que dans l'annexe 2, § 2.1.

4.7.1 Phénomène physique

Un *mascaret* désigne la vague créée par la marée montante dans un estuaire. À la suite de l'élévation du niveau d'eau dans l'océan, de l'eau remonte à contre courant dans le fleuve. La vague peut dépasser 1 m de hauteur et se déplacer à plus de 10 km/h lors des grandes marées d'équinoxe. Tous les fleuves ne connaissent pas des mascarets; il faut en effet des conditions assez particulières pour que ces vagues se forment :

- amplitude suffisante de la marée ;
- estuaire en entonnoir pour amplifier l'effet de la marée ;
- faible hauteur d'eau dans le fleuve et pente douce du lit ;
- pas de vent contraire.

En France, c'est principalement l'estuaire de la Dordogne et celui de la Gironde dans la région bordelaise, où le phénomène est fréquent et attire les surfeurs en nombre. Jusqu'à la construction du chenal de Rouen dans les années 1960, l'estuaire de la Seine était également réputé pour ses mascarets. En Chine, le spectacle attire chaque année beaucoup de monde sur la rivière Qiantang.

Un mascaret est une forme particulière de ressaut hydraulique mobile. De tels ressauts peuvent se former sur tout type de cours d'eau lorsqu'une grande quantité d'eau arrive brutalement, par exemple lors d'un lâcher de barrage ou bien lors d'une crue rapide sur un cours d'eau à pente suffisamment forte. La figure 4.37 montre un ressaut mobile (front de crue) dans la rivière Zavràgia au Tessin lors de la grosse crue de juillet 1987. Le débit instantané a été estimé à 600 m³/s et le front devait se propager à une vitesse d'environ 8 m/s.

Le mascaret est une onde avec un front raide qui se propage dans les cours d'eau : c'est typiquement ce qu'on appelle une discontinuité ou un choc ; c'est une caractéristique essentielle des équations non linéaires aux dérivées partielles hyperboliques. La forme de la surface libre près d'une discontinuité ne peut plus être étudiée par les équations de Saint-Venant à cause de la courbure de la surface libre (qui devient trop importante) et de la dissipation d'énergie (qui est également bien plus significative que la simple dissipation par frottement modélisée avec des formules empiriques de type Manning-Strickler) ; toutefois, la dynamique des discontinuités reste entièrement dictée par ces équations. On montre ci-après qu'on peut dériver un jeu d'équations, dites



Figure 4.34 : mascaret sur la Dordogne près de Libourne (Vayres, Gironde, France). Les surfeurs donnent une échelle de la taille du phénomène. Source [archaero](#).



Figure 4.35 : mascaret sur la rivière Qiantang en Chine [theatlantic](#).

relations de Rankine⁸-Hugoniot⁹, qui décrivent la variation brutale de masse et de

8. William John Macquorn Rankine (1820–1872) était un physicien écossais. Avec le physicien allemand Rudolf Clausius et son compatriote William Thomson (lord Kelvin), il est à l'origine de la thermodynamique moderne. Rankine s'intéressa plus particulièrement aux applications de cette théorie pour concevoir des machines à vapeur. Homme curieux, il s'intéressa également à des domaines aussi variés que la botanique, la théorie de la musique, les mathématiques, la fatigue des métaux, et la mécanique des sols. Sa publication scientifique a été extrêmement importante.

9. Pierre-Henri Hugoniot (1851–1887) était un autodidacte féru de mathématiques et de



Figure 4.36 : mascaret sur la Seine (Caudebec-en-Caux, France) [R. Huon].

quantité de mouvement au passage de la discontinuité.

4.7.2 Ressaut mobile

Au § 1.2.6, on a évoqué la formation d'un ressaut mobile, d'un point de vue mathématique, comme l'apparition d'une discontinuité. On redéveloppe ici cet argument mathématique général en se focalisant sur aux équations de Saint-Venant (en prenant soin de les mettre sous une forme conservative). On intègre le système d'équations (1.18)–(1.19)– le long d'un segment $[x_1, x_2]$ comprenant le point $x = s(t)$ où se produit un choc (ressaut hydraulique mobile). L'équation de conservation de la masse s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h dx + [uh]_{x_1}^{x_2} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h u dx + [u^2 h + \frac{1}{2} g \cos \theta h^2]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \left(gh \sin \theta - \frac{\tau_p}{\rho} \right) dx.$$

Quand on fait la décomposition de l'intervalle $[x_1, x_2]$ en deux parties ($[x_1, x_2] = [x_1, s(t)] + [s(t), x_2]$), puis en faisant le passage à la limite $x_1 \rightarrow s$ et $x_2 \rightarrow s$, on obtient pour la conservation de la masse :

$$\dot{s}[[h]] = [[uh]], \quad (4.52)$$

mécanique des fluides. Il s'est spécialement intéressé aux problèmes d'onde de choc dans les gaz.



Figure 4.37 : arrivée du front d'une crue sur la rivière Zavragia (Tessin) en 1987 ; les deux clichés sont pris à 15 mn d'intervalle [T. Venzin].

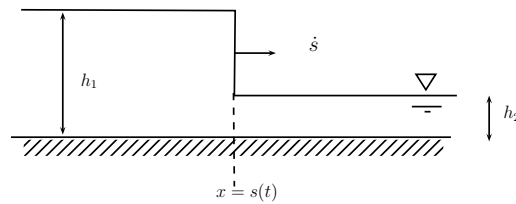


Figure 4.38 : déplacement d'un mascaret (« onde de choc »).

ainsi que pour la quantité de mouvement :

$$\dot{s} \llbracket hu \rrbracket = \llbracket u^2 h + \frac{1}{2} g \cos \theta h^2 \rrbracket, \quad (4.53)$$

où les crochets indiquent la variation brutale de part et d'autre de la discontinuité. Par exemple, on note

$$[[h]] = h_+ - h_-, \text{ avec } h_+ = \lim_{x \rightarrow s, x > s(t)} h(x,t) \text{ et } h_- = \lim_{x \rightarrow s, x < s(t)} h(x,t).$$

Rappelons que le terme source $\rho g \sin \theta - \tau_p / \rho$ n'a aucune influence sur les conditions de Rankine-Hugniot. On trouve donc que la quantité (flux de masse) uh se conserve à travers le choc quand on exprime cette quantité dans un repère mobile rattaché au choc. La vitesse s'écrit alors de manière relative comme : $u' = u - \dot{s}$: $[[u'h]] = 0$. De même, le flux de quantité de mouvement $u'^2 h + g \cos \theta h^2 / 2$ se conserve : $[[u'^2 h + g \cos \theta h^2 / 2]] = 0$ (pour montrer cette dernière relation, il faut également se servir de la conservation de la masse dans le référentiel mobile).

♣ **Exemple.** – Mascaret induit par une vanne en translation.

Considérons une vanne qui à l'instant $t = 0$ se met en mouvement de translation le long d'un canal plat où l'eau est initialement au repos. La vitesse de cette vanne est V . On peut calculer la vitesse de l'intumescence créée par le mouvement de l'eau.

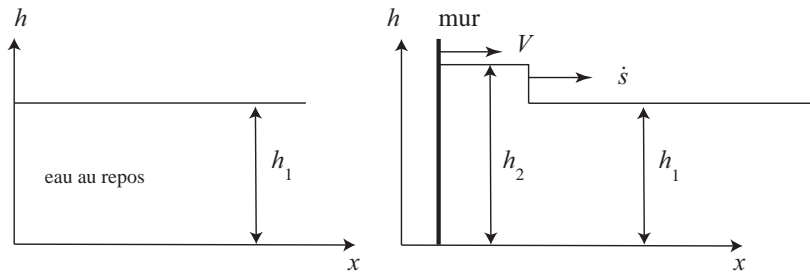


Figure 4.39 : ressaut mobile créé par le déplacement d'un mur mobile.

Si on se replace dans le repère fixe, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \dot{s}(h_2 - h_1) &= -Vh_1, \\ \dot{s}(-Vh_1) &= gh_2^2/2 - (h_1V^2 + gh_1^2/2). \end{aligned}$$

En éliminant \dot{s} , on tire la relation :

$$(1 - \eta)^2(1 + \eta) = 2Fr^2\eta,$$

où $Fr = V/\sqrt{gh_2}$ est le nombre de Froude et $\eta = h_1/h_2$. Il y a deux solutions à cette équation mais une seule¹⁰ permet d'avoir $\eta > 1$ (dans le cas plus général, c'est une condition de dissipation d'énergie qui permet de choisir la bonne solution). On

10. En effet, il faut que $\dot{s} > 0$ or $\dot{s} = V\eta(\eta - 1)^{-1}$, d'où il faut que $\eta > 1$.

reporte sur la figure 4.40 les deux courbes $2Fr^2\eta$ et $(1 - \eta)^2(1 + \eta) = 2Fr^2\eta$, dont l'intersection nous fournit la valeur η voulue et donc nous permet de calculer la vitesse de propagation du mascaret. Notons sur ce même graphique que si l'on se place dans le cas $Fr > 1$, on trouverait une valeur de $\eta < 1$, donc une vitesse $\dot{s} < 0$, ce qui n'a pas de sens; en fait, dans ce cas-là, la solution est plus complexe: elle comprend une onde simple de détente précédée d'un mascaret.

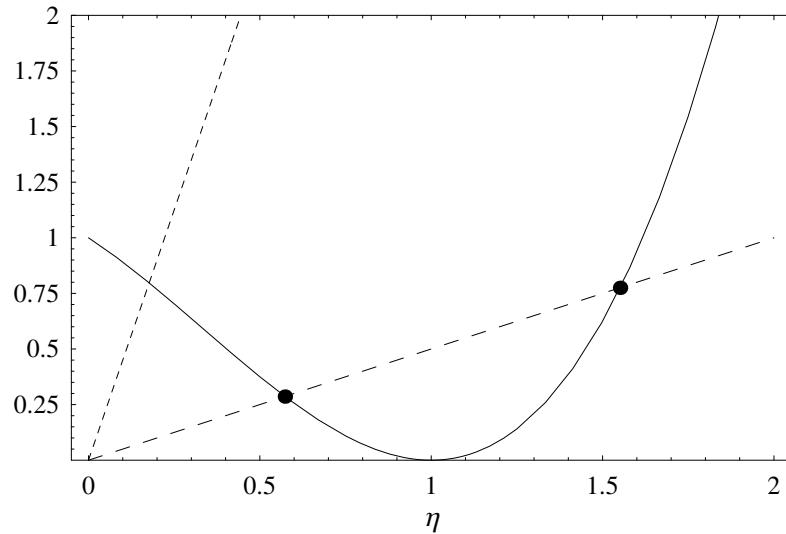


Figure 4.40 : tracé des courbes $2Fr^2\eta$ (trait discontinu) et $(1 - \eta)^2(1 + \eta) = 2Fr^2\eta$ (trait continu). On a tracé $2Fr^2\eta$ pour deux valeurs de Fr : $Fr = 0,5$ (tiret long) et $Fr = 1,5$ (tiret court).

4.8 Houle et vagues dues au vent

Sur les grandes étendues d'eau, le vent peut former des successions de vagues à leur surface, dont l'amplitude croît généralement avec la force du vent. Une fois générées par le vent, ces vagues peuvent se propager jusqu'à des secteurs sans vent. On observe alors des vagues alors qu'il n'y a pas vent ; on parle de *houle*.



Figure 4.41 : par mer calme, les vagues créées par le vent sont de hauteur très faible, mais à l'approche du littoral, cette hauteur croît et la vague peut devenir déferlante, ce qui produit l'écume si caractéristique (à gauche). Lors des tempêtes, les vagues peuvent atteindre des hauteurs de plusieurs mètres et interagir fortement avec des obstacles, comme ici le phare de Kéréon dans le Finistère (à droite). Source : photographie de droite, Jean Guichard, [Le Huffington Post](#).



Figure 4.42 : côte britannique dans le Somerset touchée par des vagues lors de la tempête de février 2014 [Daily Mail](#).

Parmi les nombreuses méthodes de calcul des effets du vent sur les vagues, les techniques empiriques par corrélation de données ont connu un certain succès. L'idée de base est que si l'on emploie les bons nombres sans dimension (tels que le nombre de Froude), alors il est possible de faire émerger des lois à partir des mesures accumulées

en différents endroits en mer. On définit ainsi une *hauteur caractéristique* qui serait la hauteur vers laquelle tendraient toutes les hauteurs de vague au bout d'une certaine distance. Comme il y a toujours une forte composante aléatoire dans les vagues, il convient de définir la hauteur caractéristique sur un plan statistique. On introduit ainsi la hauteur significative de la façon suivante¹¹ :

- on détermine la probabilité d'observer une certaine hauteur de vague. Les hauteurs de vague sont souvent décrites à l'aide de la loi de probabilité de Rayleigh¹² ;
- on considère la population de vague qui constitue le tiers supérieur (voir figure 4.43);
- la hauteur spécifique H_s est la moyenne de cette population.

La seconde notion importante est celle de *fetch* F , qui est défini comme étant la plus grande distance sur une étendue d'eau, sur laquelle souffle le vent sans rencontrer d'obstacle d'une côte/berge à l'autre (ou bien d'une côte à un point donné). La direction du vent n'est pas nécessairement celle des vagues ni celle du fetch. Cela est particulier vrai aux abords des côtes avec un vent de terre.

La dernière notion-clé est naturellement la vitesse caractéristique du vent. Il est aujourd'hui courant d'introduire la *vitesse de frottement* u_* comme grandeur caractéristique. Cette vitesse est simplement la vitesse fictive de glissement du vent à la surface de l'étendue d'eau. Elle se définit à partir de la contrainte τ exercée par le vent sur la surface d'eau : $u_* = \sqrt{\tau/\rho}$ (ρ étant ici la masse volumique de l'air). Il faut ensuite relier cette vitesse de surface avec la vitesse du vent loin du sol (ou de l'eau).

On introduit de la façon suivante les hauteurs significatives, fetchs, et fréquence (des pics du spectre) sous forme adimensionnelle :

$$\hat{H} = \frac{gH}{u_*^2}, \hat{F} = \frac{gF}{u_*^2}, \hat{U} = \frac{U}{u_*}, \text{ et } \hat{f} = \frac{u_* f}{g}.$$

Parmi les premières lois proposées, il y a le modèle SMB, du nom de ses auteurs Sverdrup, Munk and Bretschneider (1947, 1952, 1973), qui a été calé sur des données de l'Atlantique nord durant la seconde guerre mondiale :

$$\hat{H}_s = 0,283 \tanh \left(0,0125 \hat{F} \right).$$

Par la suite, les lois d'échelle ont été recherchées sous la forme de produits de monômes :

$$\hat{H}_s = a \hat{F}^p \hat{U}^q, \text{ et } \hat{f}_p = b \hat{F}^r \hat{U}^s,$$

11. La définition a changé au cours du temps, mais du temps des premiers manuels de l'USACE, cette hauteur correspond à la moyenne des hauteurs de vague les plus importantes. De nos jours on définit cette hauteur plutôt à partir de l'énergie des vagues.

12. La distribution de Rayleigh est en fait souvent utilisée pour le vent : si on suppose que les deux composantes u et v (dans un référentiel cartésien) sont des variables indépendantes, non corrélées entre elles, et suivant une loi de Gauss avec la même variance, alors la norme de la vitesse $(u^2 + v^2)^{1/2}$ suit une loi de Rayleigh.

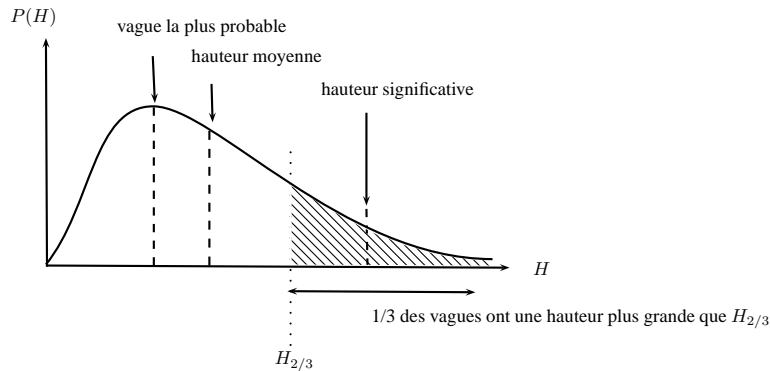


Figure 4.43 : définition de la hauteur significative à partir de la densité de probabilité des hauteurs de vague.

avec a , b , p , q , r , et s des paramètres calés sur des mesures. La formule dite JONSWAP¹³ (1973) donne la hauteur significative des vagues à partir d'une analyse de tempêtes sur la mer du Nord :

$$\hat{H}_s = 1,6 \times 10^{-3} \hat{U} \sqrt{\hat{F}}, \quad (4.54)$$

tandis que la fréquence du pic est donnée par

$$\hat{f}_p = \frac{3,5 \times 10^{-3}}{\hat{F}^{1/3} \hat{U}^{1/3}}, \quad (4.55)$$

avec $\hat{U} = 1$ pour cette méthode (profil de vitesse plat). Si la mesure du fetch ne pose pas de problème insurmontable, la détermination du vent est beaucoup plus épineuse. En Suisse (et ailleurs), il existe un réseau de capteurs météorologiques : ANETZ (72 stations automatiques mesurant en continu de nombreux paramètres), ENET (44 stations mesurant les vents et certains paramètres relatifs à la neige). Il est déjà possible de déduire des courbes intensité-durée-fréquence. Le problème de l'extrapolation de cette mesure ponctuelle pour en déduire ce qui se passe plus loin (à quelques kilomètres) ou plus haut (dans la couche limite) est très ardu. Il existe de nombreuses formulations empiriques (voir par exemple (Demirbilek *et al.*, 1993)).

Le tableau 4.6 fournit l'ordre de grandeur la hauteur significative H_s des vagues à l'aide de formules empiriques, la plupart d'entre elles étant résumées dans le manuel « Coastal Engineering Manual » de l'USACE¹⁴.

Le spectre de fréquence des vagues doit fortement s'atténuer car le vent ne peut pas créer des vagues indéfiniment hautes. Au-delà d'une certaine hauteur, des phénomènes (effondrement de la crête de vague, dissipation turbulente) doivent contrebalancer cette

13. Acronyme pour JOint North Sea WAve Project, un projet collectif entrepris au début des années 1970.

14. US Army Corps of Engineers, Coastal Engineering Manual, Washington, 2008

Tableau 4.6 : détermination de la hauteur significative pour un vent U (en m/s, à 10 m du sol) et un fetch F (en m). Pour chaque méthode, on a aussi reporté le coefficient de corrélation r_p quand il est connu. Donelan propose une formulation différente calée sur des mesures sur les Grands Lacs américains ; ϕ est l'angle entre la direction du vent et celle des vagues. Demirbilek *et col.* modulent la vitesse à la surface de la retenue en se servant de la relation empirique de Garratt entre vitesses du vent à 10 m et à 3 m. Smith s'intéresse aux vagues dans un contexte de fjord et d'embouchures. Toutes ces formules ont été calées sur des étendues d'eau dont le fetch dépasse 2 km.

Auteur	H_s (m)	r_p
Jonswap (1973) ^a	$H_s = 1,6 \times 10^{-3} g^{-0,5} F^{0,5} U$	–
Donelan (1982) ^b	$H_s = 3,66 \times 10^{-3} g^{-0,62} U^{1,24} F^{0,38} \phi^{1,24}$	0,83
Walsh (1985) ^c	$H_s = 1,7 \times 10^{-3} g^{-0,5} U F^{0,5} \phi^{1,63}$	0,85
Smith (1991) ^b	$H_s = 1,5 \times 10^{-3} g^{-0,5} F^{0,5} U \cos \phi$	0,87
Molitor (1935) ^d	$F \leq 32 \text{ km}, H_s = 0,76 - 4,62 \times 10^{-2} F^{0,25} + 5,3 \times 10^{-4} F^{0,5} U^{0,5}$	–
	$F > 32 \text{ km}, H_s = 5,3 \times 10^{-4} F^{0,5} U^{0,5}$	–

^aUS Army Corps of Engineers, Coastal Engineering Manual, Washington, 2008.

^bSmith, J., Wind-wave generation on restricted fetches, USACE Waterways Experiment Station, Vicksburg, Mississippi, 1991.

^cWalsh, E. *et col.*, Directional wave spectra measured with the surface contour radar, *Journal of Physical Oceanography*, 15, 566-592, 1985.

^dA. Schleiss et H. Pougatsch, Les barrages: du projet à la mise en service, *Presses Polytechniques et Universitaires Romandes*, Lausanne, 2011.

croissance. Sur la base de considérations sur la conservation de l'énergie, Phillips émit l'idée que le spectre de fréquence devait tendre vers la fonction limite quand $f \rightarrow 0$

$$S(f) = \frac{\alpha}{(2\pi)^4} g^2 f^{-5} [\text{m}^2\text{s}], \quad (4.56)$$

avec $\alpha = 8,1 \times 10^{-3}$ un nombre sans dimension. Les données de la mer du Nord (projet Jonswap) ont modulé ce spectre :

$$S(f) = \frac{\alpha}{(2\pi)^4} g^2 f^{-5} [\text{m}^2\text{s}] \quad (4.57)$$

avec la fonction de modulation

$$E(f) = \exp\left(-1,25 \left(\frac{f_p}{f}\right)^4\right) \gamma^\Gamma \text{ avec } \Gamma = \exp\left(-\frac{(f - f_p)^2}{2\beta^2 f_p^2}\right)$$

et où f_p est la fréquence de pic donnée par exemple par la loi (4.55), $\beta = 0,07$ pour $f < f_p$ et $\beta = 0,09$ pour $f > f_p$ et $\gamma = 3,3$.

4.9 Trains d'onde

4.9.2

4.9.1 Problématique

Un écoulement à surface libre devient instable lorsque sa vitesse augmente. Cette instabilité se manifeste par l'apparition d'ondulations de la surface libre. En français on désigne ces ondulations sous le terme générique de train d'ondes (car il s'agit d'une succession d'ondes balayant la surface libre); en anglais, on parle de vagues de roulement (*roll waves*) car ces ondulations sont en fait de petites vagues déferlantes.



Figure 4.44 : train d'ondes dans un évacuateur de crue et sur la chaussée après une chute de pluie. Source <http://people.seas.harvard.edu/shreyas/Research.html>

Ces instabilités se manifestent fréquemment, notamment sur les coursiers raides tels que des évacuateurs de crue ou bien sur des chaussées et trottoirs en pente lorsque l'eau de pluie ruisselle jusqu'à former une lame d'eau. Ces ondulations sont des perturbations de l'écoulement. Elles ne sont en général pas considérées dans les calculs en hydraulique car elles ne modifient pas le comportement général de l'écoulement tant que leur amplitude est modérée. Elles peuvent néanmoins poser problème pour certains problèmes en ingénierie lorsqu'on doit connaître la hauteur maximale de l'écoulement et/ou imposer une certaine continuité à cet écoulement. Par exemple, un écoulement à



Figure 4.45 : train d'ondes dans la rivière (canalisée) Grünnbach (près du village de Merlingen, lac de Thoune, BE, Suisse); à gauche, vue vers l'aval et à droite, vue vers l'amont. Cliché de Vaughan Cornish (1910). Source [Digital collection of the university of Washington](#)

surface libre peut emprunter des passages busés, pour lesquels il est essentiel de s'assurer qu'il n'y a pas de mise en pression de l'écoulement; un écoulement en charge exerce en effet des contraintes bien plus importantes sur les parois. L'apparition de train d'ondes sur un écoulement à surface libre dans une conduite peut générer un écoulement pulsé, avec une mise en charge locale de l'écoulement, suivie d'un retour à la pression hydrostatique. Un autre problème lié à l'apparition de ces instabilités est la formation d'eau blanche similaire à l'écume des vagues : en déferlant, les vagues emprisonnent de l'air et il se forme alors de petites bulles; le mélange eau + air forme une émulsion qui peut être dangereuse pour des installations à cause de la cavitation (explosion des bulles contre les parois, avec usure prématurée des parements en béton) et de l'accentuation du caractère pulsé. Pour ces raisons, il convient en général de limiter voire d'empêcher de telles instabilités de se produire.

4.9.2 Stabilité linéaire des équations de Saint-Venant

Nous suivons la méthode employée par [Trowbridge \(1987\)](#) pour calculer le domaine de stabilité des équations de Saint-Venant. Les équations de Saint-Venant (1.16–1.17)

s'écrivent sous la forme tensorielle

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U} = \mathbf{S}, \quad (4.58)$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \bar{u} & h \\ g \cos \theta & \bar{u} \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ \bar{u} \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \sin \theta - \frac{\tau_p}{\partial h} \end{pmatrix}.$$

Considérons maintenant que l'on a une solution $\mathbf{U}_0 = (H, U)$ à ces équations et qu'on perturbe cette solution pour savoir si elle stable

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}', \quad (4.59)$$

où le vecteur $\mathbf{U}' = (\eta, \kappa)$ est la perturbation, avec κ et η la perturbation de la hauteur et celle de la vitesse, respectivement. En substituant cette décomposition dans l'équation (4.58) et en gardant uniquement les termes du premier ordre, on obtient une équation linéarisée gouvernant les perturbations \mathbf{U}'

$$\frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}_0) \cdot \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}'). \quad (4.60)$$

Nous supposons que la solution peut s'écrire sous la forme

$$\eta = \text{Re}(\Delta e^{i(nx-ct)}), \quad \kappa = \text{Re}(X e^{i(nx-ct)}), \quad (4.61)$$

où Δ et X sont les amplitudes complexes respectivement de la hauteur et de la vitesse, n est le nombre d'onde (qui est un réel positif), et c une constante complexe qui reste à déterminer. Le symbol i est le nombre imaginaire. La partie réelle de c peut être interprétée comme la vitesse de propagation des perturbations tandis que sa partie imaginaire reflète le taux de croissance (ou de décroissance) de l'amplitude. Dans le cadre de la théorie de la stabilité linéaire, l'écoulement est supposé devenir instable dès qu'une solution au système (4.60) est caractérisée par une partie imaginaire de c positive. En substituant la forme complexe (4.61) dans (4.60) fournit le système suivant

$$\begin{bmatrix} nA_{11} - c & nA_{12} \\ nA_{21} - i \frac{\partial(\tau_p/\bar{\rho}H)}{\partial H} & nA_{22} - c - i \frac{\partial(\tau_p/\bar{\rho}H)}{\partial U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ X \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (4.62)$$

où A_{ij} est la composante (i, j) de la matrice \mathbf{A} . Ce système admet aucune solution triviale pourvu que son déterminant soit nul. L'équation de dispersion est obtenue en calculant le déterminant du système et en l'exprimant en fonction de c

$$c^2 - 2\alpha c - \beta = 0, \quad (4.63)$$

avec

$$\alpha = \alpha_r + i\alpha_i = n \frac{A_{22} + A_{11}}{2} - i \frac{1}{2} \frac{\partial(\tau_p/\bar{\rho}H)}{\partial U},$$

$$\beta = \beta_r + i\beta_i = n \left[n (A_{12}A_{21} - A_{22}A_{11}) + i \left(A_{11} \frac{\partial(\tau_p/\bar{\rho}H)}{\partial U} - A_{12} \frac{\partial(\tau_p/\bar{\rho}H)}{\partial H} \right) \right].$$

Nous cherchons maintenant une solution à l'équation (4.63) mise sous la forme

$$(c - \alpha)^2 = r e^{i\Theta}. \quad (4.64)$$

La partie imaginaire de la solution à l'équation (4.64) peut être écrite

$$c = \alpha \pm \sqrt{r} e^{i\Theta/2} \Rightarrow c_i = \text{Im}(c) = \alpha_i \pm \sqrt{r} \sin \frac{\Theta}{2}. \quad (4.65)$$

La plus grande partie imaginaire est

$$c_i = \alpha_i + \sqrt{r} \left| \sin \frac{\Theta}{2} \right|. \quad (4.66)$$

Nous cherchons maintenant quel domaine cette expression est positive: $c_i > 0$. En prenant la racine carrée de chaque des membres de cette équation, puis considérant que $2\alpha_i^2 + r \cos \Theta$ est toujours positive, on obtient après réarrangement:

$$r > 2\alpha_i^2 + r \cos \Theta \Leftrightarrow \beta_i^2 > 4\alpha_i(\beta_r\alpha_i - \beta_i\alpha_r). \quad (4.67)$$

Le critère d'instabilité est le suivant:

$$\left(H \frac{\partial \tau_p}{\partial H} - \tau_p \right) \left(H \frac{\partial \tau_p}{\partial H} - \tau_p \right) > gH \cos \theta \left(\frac{\partial \tau_p}{\partial U} \right)^2 \quad (4.68)$$

On peut montrer que la source d'énergie pour que l'instabilité se développe est fournie par le travail de la gravité; l'écoulement est linéairement instable si la puissance des forces gravitaires excède l'énergie dissipée aux frontières par τ_p . En prenant par exemple une contrainte de frottement à la Chézy ($\tau_p = \rho g \bar{u}^2 / C^2$), on trouve que le critère d'instabilité est

$$\boxed{\text{Fr} > 2}, \quad (4.69)$$

avec $\text{Fr} = \bar{u} / \sqrt{gh \cos \theta}$ le nombre de Froude.

Bibliographie

- ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. A. 1964 *Handbook of Mathematical Functions*. Washington: National Bureau of Standards.
- ACKERS, P. & WHITE, M. M. 1973 Sediment transport: new approach and analysis. *J. Hydraul. Div. ASCE* **99**, 2041–2060.
- ANCEY, C., COCHARD, S., WIEDERSEINER, S. & RENTSCHLER, M. 2006 Front dynamics of supercritical non-Boussinesq gravity currents. *Water Resour. Res.* **42**, W08424.
- ANCEY, C., COCHARD, S., WIEDERSEINER, S. & RENTSCHLER, M. 2007 Existence and features of similarity solutions for supercritical non-Boussinesq gravity currents. *Physica D* **226**, 32–54.
- BACCHUS, F., CHAMPIRÉ, F., DEROO, L., LEMPERRIÈRE, F. & POUPART, M. 2019 Lessons learned from dam failures and incidents due to spillway malfunctions. In *Sustainable and Safe Dams around the World* (ed. J.-P. Tournier, T. Bennett & J. Bibeau), , vol. 2, pp. 2238–2251. Ottawa: Canadian Dam Association CRC Press.
- BALMFORTH, N. J., VON HARDENBERG, J., PROVENZALE, A. & ZAMMETT, R. 2008 Dam breaking by wave-induced erosional incision. *J. Geophys. Res.* **113**, F01020.
- BATES, P. D. 2022 Flood Inundation Prediction. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **54**, 287–315.
- BEGAM, S., SEN, D. & DEY, S. 2018 Moraine dam breach and glacial lake outburst flood generation by physical and numerical models. *J. Hydrol.* **563**, 694–710.
- BÉROD, D. 1994 Contribution à l'estimation des crues rares à l'aide de méthodes déterministes : apport de la description géomorphologique pour la simulation des processus d'écoulement. PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- BISCHOF, R., HAUENSTEIN, W., KALT, L., MÜLLER, R. W., POUGATSCH, H., RABOUD, P. B. & VETTERLI, W. 2002a Sécurité des barrages d'accumulation. *Tech. Rep.*. Bundesamt für Wasser und Geologie.
- BISCHOF, R., HAUENSTEIN, W., KALT, L., MÜLLER, R. W., POUGATSCH, H., RABOUD, P. B. & VETTERLI, W. 2002b Sécurité des barrages d'accumulation – Documentation de base relative aux critères d'assujettissement. *Tech. Rep.*. Bundesamt für Wasser und Geologie.
- BOHORQUEZ, P. & DARBY, S. E. 2008 The use of one- and two-dimensional hydraulic modelling to reconstruct a glacial outburst flood in a steep Alpine valley. *J. Hydrol.* **361**, 240–261.

- BREWITT, P. K. & COLWYN, C. L. 2020 Little dams, big problems: The legal and policy issues of nonjurisdictional dams. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Water* **7** (1), e1393.
- BRUTSAERT, W. 2005 *Hydrology: An Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.
- CAO, Z., YUE, Z. & PENDER, G. 2011 Landslide dam failure and flood hydraulics. Part II: coupled mathematical modelling. *Nat. Hazards* **59**, 1003–1019.
- CAPART, H. 2013 Analytical solutions for gradual dam breaching and downstream river flooding. *Water Resour. Res.* **49**, 1968–1987.
- CARRIVICK, J. L. & TWEED, F. S. 2016 A global assessment of the societal impacts of glacier outburst floods. *Glob. Planet. Change* **144**, 1–16.
- CASTRO-ORGAZ, O. & HAGER, W. H. 2013 Unsteady Boussinesq-type flow equations for gradually-eroded beds: application to dike breaches. *J. Hydraul. Res.* **51**, 203–208.
- CASTRO-ORGAZ, O. & HAGER, W. H. 2017 *Non-Hydrostatic Free Surface Flows*. Berlin: Springer.
- CASTRO-ORGAZ, O. & HAGER, W. H. 2019 *Shallow Water Hydraulics*. Cham, Switzerland: Springer.
- CHANSON, H. 2004 *The Hydraulics of Open Channel Flow: An Introduction*, 2nd edn. Amsterdam: Elsevier Butterworth Heinemann.
- CHINNARASRI, C., JIRAKITLERD, S. & SOMCHAI, W. 2004 Embankment dam breach and its outflow characteristics. *Civil Engineering and Environmental Systems* **21**, 247–264.
- CLAGUE, J. J. & EVANS, S. G. 2000 A review of catastrophic drainage of moraine-dammed lakes in British Columbia. *Quaternary Science Reviews* **19**, 1763–1783.
- CLAGUE, J. J. & MATHEWS, W. H. 1973 The magnitude of jökulhlaups. *J. Glaciol.* **12**, 501–504.
- COLES, S. G. 2001 *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. London: Springer.
- CORON, L., THIREL, G., DELAIGUE, O., PERRIN, C. & ANDRÉASSIAN, V. 2017 The suite of lumped GR hydrological models in an R package. *Environmental modelling & software* **94**, 166–171.
- COSTA, J. E. 1988 Floods from dam failure. In *Flood Geomorphology* (ed. V. Baker, R. Kochel & P. Patton), pp. 439–461. New York: Wiley.
- COSTA, J. E. & SCHUSTER, R. L. 1988 The formation and failure of natural dams. *Geol. Soc. Amer. Bull.* **100**, 1054–1068.
- DE LORENZO, G. & MACCHIONE, F. 2013 Formulas for the peak discharge from breached earthfill dams. *J. Hydraul. Eng.* **140**, 56–67.
- DELAIGUE, O., THIREL, G., CORON, L. & BRIGODE, P. 2018 airGR and airGRteaching: Two Open-Source Tools for Rainfall-Runoff Modeling and Teaching Hydrology. *EPiC Series in Engineering* **3**, 541–548.
- DEMIRBILEK, Z., BRATOS, S. M. & THOMPSON, E. F. 1993 Wind Products for the Use in Coastal Wave and Surge Models. *Tech. Rep.* AD-A269 753. US Army Corps of Engineers, Waterways Experiment Station.

- DENT, J. D. & LANG, T. E. 1983 A biviscous modified Bingham model of snow avalanche motion. *Ann. Glaciol.* **4**, 42–46.
- DJERBOUA, A., DUBAND, D. & BOIS, P. 2004 Estimation des lois des précipitations extrêmes à partir des données journalières complètes. *Houille Blanche* **3**, 65–74.
- DOOGE, J. 1973 Linear theory of hydrologic systems. *Tech. Rep.*. Agricultural Research Service, US Department of Agriculture.
- DRAZIN, P. G. & JOHNSON, R. S. 1996 *Solitons: an introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.
- DRESSLER, R. F. 1978 New nonlinear shallow-flow equations with curvature. *J. Hydraul. Res.* **16**, 205–222.
- DRESSLER, R. F. & YEVJEVICH, V. 1984 Hydraulic-resistance terms modified for the Dressler curved-flow equations. *J. Hydraul. Res.* **22** (3), 145–156.
- EMMER, A. 2017 Glacier Retreat and Glacial Lake Outburst Floods (GLOFs). In *Natural Hazard Science* (ed. S. Cutter), p. doi: 10.1093/acrefore/9780199389407.013.275. Oxford: Oxford University Press.
- EMMER, A., KLIMEŠ, J., MERGILI, M., VILÍMEK, V. & COCHACHIN, A. 2016 882 lakes of the Cordillera Blanca: an inventory, classification, evolution and assessment of susceptibility to outburst floods. *Catena* **147**, 269–279.
- EVERS, F. M., HAGER, W. H. & BOES, R. M. 2019a Spatial impulse wave generation and propagation. *J. Waterw. Port Coast. Ocean Eng.* **145**, 04019011.
- EVERS, F. M., HELLER, V., FUCHS, H., HAGER, W. H. & BOES, R. M. 2019b Landslide-generated Impulse Waves in Reservoirs – Basics and Computation. *Tech. Rep.*. VAW-Mitteilungen 254, Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie (ETHZ/VAW).
- EVETTE, A., PEYRAS, L., FRANÇOIS, H. & MÉRIAUX, P. 2011 Environmental risks and impacts of mountain reservoirs for artificial snow production in a context of climate change. *J. Alpine Res.* **99**, doi: 10.4000/rga.1481.
- EVETTE, A., PEYRAS, L. & LAIGLE, D. 2009 *Risques et impacts des retenues d'altitude*. Versailles: Éditions Quæ.
- FAEH, R. 2007 Numerical modeling of breach erosion of river embankments. *J. Hydraul. Eng.* **133**, 1000–1009.
- FERGUSON, R. I. 2007 Flow resistance equations for gravel- and boulder-bed streams. *Water Resour. Res.* **43**, W05427.
- FERGUSON, R. I. 2021 Roughness calibration to improve flow predictions in coarse-bed streams. *Water Resour. Res.* **57**, e2021WR029979.
- FOLMAR, N. D., MILLER, A. C. & WOODWARD, D. E. 2007 History and development of the NRCS lag time equation. *J. Am. Water Resour. Assoc.* **43**, 829–838.
- FRANCOU, B. & RODIER, J. A. 1967 Essai de classification des crues maximales observée dans le monde. *Cahiers de l'ORSTOM, série Hydrologie* **4** (3), 19–46.
- FRITZ, H. M., HAGER, W. H. & MINOR, H. E. 2003a Landslide generated impulse waves. 1. Instantaneous flow fields. *Exper. Fluids* **35**, 505–519.

- FRITZ, H. M., HAGER, W. H. & MINOR, H. E. 2003b Landslide generated impulse waves. 2. Hydrodynamic impact crater. *Exper. Fluids* **35**, 520–532.
- FROELICH, D. C. 2008 Embankment dam breach parameters and their uncertainties. *J. Hydraul. Eng.* **134**, 1708–1720.
- FROELICH, D. C. 2016 Predicting peak discharge from gradually breached embankment dam. *J. Hydrol. Eng.* **21**, 04016041.
- GALÉA, G. & RAMEZ, P. 1995 *Maîtrise du ruissellement et de l'érosion en vignoble de coteau – Guide à l'usage des aménageurs*. Antony: Cemagref Éditions.
- GAUME, E., BAIN, V., BERNARDARA, P., NEWINGER, O., BARBUC, M., BATEMAN, A., BLAŠKOVICOVÁ, L., BLÖSCHL, G., BORGA, M., DUMITRESCU, A., DALIAKOPOULOS, I., GARCIA, J., IRIMESCU, A., KOHNOVA, S., KOUTROULIS, A., MARCHI, L., MATREATA, S., MEDINA, V., PRECISO, E., SEMPERE-TORRES, D., STANCALIE, G., SZOLGAY, J., TSANIS, I., VELASCOM, D. & VIGLIONE, A. 2009 A compilation of data on European flash floods. *J. Hydrol.* **367**, 70–78.
- GERTSCH, E. 2009 *Geschiebelieferung alpiner Wildbachsysteme bei Grossereignissen – Ereignisanalysen und Entwicklung eines Abschätzverfahrens*. PhD thesis, Universität Bern.
- GIACHETTI, T., PARIS, R., KELFOUN, K. & PÉREZ-TORRADO, F. 2011 Numerical modelling of the tsunami triggered by the Güimar debris avalanche, tenerife (canary islands): Comparison with field-based data. *Mar. Geol.* **284**, 189–202.
- GILARD, O. 1998 *Les bases techniques de la méthode inondabilité*. Antony: Cemagref éditions.
- GRAFF, B. 2004 *Prédétermination des débits de crue des petits bassins versants torrentiels*. PhD thesis, Université de Montpellier II.
- GRAY, J. M. N. T. 2001 Granular flow in partially filled slowly rotating drums. *J. Fluid Mech.* **441**, 1–29.
- GUILLOT, P. & DUBAND, D. 1967 La méthode du GRADEX pour le calcul de la probabilité des crues rares à partir des pluies. In *Colloque International sur les crues et leur évaluation*, vol. 84, pp. 560–569. Leningrad: International Association for Hydrological Sciences.
- GUINOT, V. 2010 *Wave Propagation in Fluids—Models and Numerical Techniques*. Hoboken: John Wiley & Sons.
- HAEBERLI, W. 1983 Frequency and characteristics of glacier floods in the Swiss Alps. *Ann. Glaciol.* **4**, 85–90.
- HAGER, W. H. 2010 *Wastewater Hydraulics: Theory and Practice*. Berlin: Springer.
- HAGER, W. H. & SCHLEISS, A. 2009 *Constructions hydrauliques: écoulements stationnaires*, vol. Traité de génie civil 15. Lausanne: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- HARRISON, S., KARGEL, J. S., HUGGEL, C., REYNOLDS, J. M., SHUGAR, D. H., BETTS, R. A., EMMER, A., GLASSER, N. F., HARITASHYA, U. K., KLIMES, J., REINHARDT, L., YVONNE SCHAUB, Y., WILTSHIRE, A., DHANANJAY REGMI, D. & VILÍMEK, V. 2018

- Climate change and the global pattern of moraine-dammed glacial lake outburst-floods. *Cryosphere* **12**, 1195–1209.
- HEINRICH, P. 1992 Nonlinear water waves generated by submarine and aerial landslides. *J. Waterw. Port Coast. Ocean Eng.* **118**, 249–266.
- HELLER, V. 2007 Landslide generated impulse waves: prediction of near-field characteristics. PhD Thesis, ETHZ.
- HELLER, V. & HAGER, W. H. 2010 Impulse product parameter in landslide generated impulse waves. *J. Waterw. Port Coast. Ocean Eng.* **136**, 145–155.
- HELLER, V., HAGER, W. H. & MINOR, H. E. 2008a Rutscherzeugte Impulswellen in Stauseen – Grundlagen und Berechnung. *Tech. Rep.* VAW 4257. Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie VAW, ETH Zürich – Bundesamt für Energie.
- HELLER, V., HAGER, W. H. & MINOR, H. E. 2008b Scale effects in subaerial landslide generated impulse waves. *Exper. Fluids* **44**, 691–703.
- HELLER, V. & SPINNEKEN, J. 2013 Improved landslide-tsunami prediction: Effects of block model parameters and slide model. *J. Geophys. Res.* **118**, 1489–1507.
- HINGRAY, B., PICOUE, B. & MUSY, A. 2009 *Hydrologie 2: une science pour l'ingénieur*. Lausanne: Presses Polytechniques et Universitaires Romands.
- HOGG, A. J. & PRITCHARD, D. 2004 The effects of hydraulic resistance on dam-break and other shallow inertial flows. *J. Fluid Mech.* **501**, 179–212.
- HUBBARD, B. P., HEALD, A., REYNOLDS, J. M., QUINCEY, D., RICHARDSON, S. D., ZAPATA LUYO, M., PORTILLA, N. S. & HAMBREY, M. J. 2005 Impact of a rock avalanche on a moraine-dammed proglacial lake: Laguna Safuna Alta, Cordillera Blanca, Peru. *Earth Surf. Process. Landforms* **30**, 1251–1264.
- HUBER, A. 1980 Schwallwellen in Seen aus Folge von Felsstürzen. *Tech. Rep.* Mitteilung 47. VAW, Eidg. Tech. Hochsch.
- HUBER, A. 1982 Felsbewegungen und Uferabbrüche an Schweizer Seen, ihre Ursachen und Auswirkungen. *Eclogae Geol. Helv.* **75**, 563–578.
- HUBER, A. & HAGER, W. H. 1997 Forecasting impulse waves in reservoirs. In *19ème Congrès des Grands Barrages*, pp. C.31 : 993–1005. Florence: ICOLD, Paris.
- HUNT, B. 1994 Newtonian fluid mechanics treatment of debris flows and avalanches. *J. Hydraul. Eng.* **120**, 1350–1363.
- HUPPERT, H. E. 1982 Flow and instability of a viscous current down a slope. *Nature* **300**, 427–429.
- ICOLD 1998 Étude d'onde de submersion de barrage, synthèse et recommandations. *Tech. Rep.* 111. International Commission on Large Dams.
- ICOLD 2005 Évaluation du risque dans la gestion de la sécurité du barrage. *Tech. Rep.* 130. International Commission on Large Dams.
- JÄGGI, M. 1984 Der Geschiebetransport in Flüssen nach der VAW-Formel 1983. *SLA* **102**, 940–943.
- JORDAN, F. 2007 Modèle de prévision et de gestion des crues: optimisation des opérations des aménagements hydroélectriques à accumulation pour la réduction des débits de crue. PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.

- KATUL, G., WIBERG, P., ALBERTSON, J. & HORNBERGER, G. 2002 A mixing layer theory for flow resistance in shallow streams. *Water Resour. Res.* **38**, 1250.
- KELFOUN, K. & DRUITT, T. H. 2005 Numerical modeling of the emplacement of Socompa rock avalanche, Chile. *J. Geophys. Res.* **110**, B12202.
- KELFOUN, K., GIACHETTI, T. & LABAZUY, P. 2010 Landslide-generated tsunamis at Réunion Island. *J. Geophys. Res.* **115**, F04012.
- KERT, C. 2008 Amélioration de la sécurité des barrages et ouvrages hydrauliques. *Tech. Rep.* 454. Office parlementaire d'évaluation des choix scientifiques et technologiques.
- KETCHESON, D. I., LEVEQUE, R. J. & DEL RAZO, M. 2020 *Riemann Problems and Jupyter Solutions*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- KEULEGAN, G. H. 1938 Laws of turbulent flows in open channels. *J. Res. Natl Bur. Stand.* **21**, 707–741.
- KEYLOCK, C. J., CONSTANTINESCU, G. S. & HARDY, R. J. 2012 The application of computational fluid dynamics to natural river channels: Eddy resolving versus mean flow approaches. *Geomorphology* **179**, 1–20.
- KORUP, O. & TWEED, F. 2006 Ice, moraine, and landslide dams in mountainous terrain. *Quaternary Science Reviews* **26**, 3406–3422.
- KREMER, K., SIMPSON, G. & GIRARD-CLOS, S. 2012 Giant Lake Geneva tsunami in AD 563. *Nat. Geosci.* **5** (11), 756–757.
- LANG, M. & LAVABRE, J., ed. 2007 *Estimation de la crue centennale pour les plans de prévention des risques d'inondation*. Versailles: Editions Quae.
- LAPOINTE, M. F., SECRETAN, Y., DRISCOLL, S. N., BERGERON, N. & LECLERC, M. 1998 Response of the Ha! Ha! River to the flood of July 1996 in the Saguenay Region of Quebec: Large-scale avulsion in a glaciated valley. *Water Resour. Res.* **34**, 2383–2392.
- LAROCQUE, L. A., IMRAN, J. & CHAUDHRY, M. H. 2013 3D numerical simulation of partial breach dam-break flow using the LES and $k - \epsilon$ turbulence models. *J. Hydraul. Res.* **51**, 145–157.
- LEVEQUE, R. J. 1992 *Numerical Methods for Conservation Laws*. Basel: Birkhäuser.
- LEVEQUE, R. J. 2002 *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge: Cambridge University Press.
- LOAT, R. & PETRASCHECK, A. 1997 Prise en compte des dangers dus aux crues dans le cadre des activités de l'aménagement du territoire. Recommandations. *Tech. Rep.*. Office fédéral de l'économie des eaux, Office fédéral de l'aménagement du territoire, Office fédéral de l'environnement, des forêts et du paysage.
- MACDONALD, T. C. & LANGRIDGE-MONOPOLIS, J. 1984 Breaching characteristics of dam failures. *J. Hydraul. Eng.* **110**, 567–584.
- MARCHE, C. 2008 *Barrages, crues de rupture et protection civile*. Montréal: Presses internationales polytechniques.
- MARCHE, C. & ORIAC, A. 2005 Évaluation des conséquences de rupture d'un barrage: calculs détaillés ou méthode simplifiée? *Can. J. Civil Eng.* **32**, 543–552.

- MARCHI, L., BORGA, M., PRECISO, E. & GAUME, E. 2010 Characterisation of selected extreme flash floods in Europe and implications for flood risk management. *J. Hydrol.* **394**, 118–133.
- MÉRIAUX, P., PEYRAS, L. & GIRARD, H. 2005 Sécurité et durabilité des barrages d'altitude pour la production de neige de culture : état des lieux du parc existant et élaboration d'outils visant à améliorer la conception, la réalisation et l'entretien des ouvrages. *Tech. Rep.*. Cemagref.
- MEYER-PETER, E. & MÜLLER, R. 1948 Formulas for bed load transport. In *2nd meeting* (ed. IAHR), pp. 39–64. Stockholm, Sweden.
- MEYLAN, P., FAVRE, A. C. & MUSY, A. 2008 *Hydrologie fréquentielle*. Lausanne: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- MIQUEL, J. 1984 *Guide pratique d'estimation des probabilités de crues*. Paris: Eyrolles.
- MONTANDON, F. 1925 Les éboulements de la Dent du Midi et du Grammont. *Le Globe* **64**, 35–91.
- NG, F. & BJÖRNSSON, H. 2003 On the Clague-Mathews relation for jökulhlaups. *J. Glaciol.* **49**, 161–172.
- NIE, Y., LIU, Q., WANG, J., ZHANG, Y., SHENG, Y. & LIU, S. 2018 An inventory of historical glacial lake outburst floods in the Himalayas based on remote sensing observations and geomorphological analysis. *Geomorphology* **308**, 91–106.
- NODA, E. 1970 Water waves generated by landslides. *J. Waterw. Harb. Coast. Eng. Div. ASCE* **96**, 835–855.
- O'CONNOR, J. E. & BEEBEE, R. A. 2009 Floods from natural rock-material dams. In *Megaflooding on Earth and Mars* (ed. D. M. Burr, P. A. Carling & V. R. Baker), pp. 128–171. Cambridge: Cambridge University Press.
- O'CONNOR, J. E. & COSTA, J. E. 2004 The world's largest floods, past and present: their causes and magnitudes. *Tech. Rep.* 0607973781. US Geological Survey.
- UDIN, L., ANDRÉASSIAN, V., PERRIN, C., MICHEL, C. & LE MOINE, N. 2008 Spatial proximity, physical similarity, regression and ungaged catchments: a comparison of regionalization approaches based on 913 French catchments. *Water Resour. Res.* **44**, W03413.
- PANIZZO, A., DE GIROLAMO, P., DI RISIO, M., MAISTRI, A. & PETACCIA, A. 2005a Great landslide events in Italian reservoirs. *Nat. Hazard Earth. Sys. Sci.* **5**, 733–740.
- PANIZZO, A., DE GIROLAMO, P. & PETACCIA, A. 2005b Forecasting impulse wave generated by subaerial landslides. *J. Geophys. Res.* **110**, C12025.
- PAQUET, E., GAILHARD, J. & GARÇON, R. 2006 Évolution de la méthode du gradex : approche par type de temps et modélisation hydrologique. *Houille Blanche* **5**, 80–90.
- PARKER, G. 1991 Selective sorting and abrasion of river gravel: II. Applications. *J. Hydraul. Eng.* **117**, 150–171.
- PERRIN, C., MICHEL, C. & ANDRÉASSIAN, V. 2001 Does a large number of parameters enhance model performance? comparative assessment of common catchment model structures on 429 catchments. *J. Hydrol.* **242**, 275–301.

- PERRIN, C., MICHEL, C. & ANDRÉASSIAN, V. 2003 Improvement of a parsimonious model for streamflow simulation. *J. Hydrol.* **279**, 275–289.
- PETER, S. J., SIVIGLIA, A., NAGEL, J. B., MARELLI, S., BOES, R. M., VETSCH, D. F. & SUDRET, B. 2018 Development of probabilistic dam breach model using Bayesian inference. *Water Resour. Res.* **54**, 4376–4400.
- PEYRAS, L. & MÉRIAUX, P., ed. 2009 *Retenues d'altitude*. Versailles: Quæ éditions.
- PIERCE, M. W., THORNTON, C. I. & ABT, S. R. 2010 Predicting peak outflow from breached embankment dams. *J. Hydrol. Eng.* **15**, 338–349.
- PONCE, V. M. 1994 *Engineering Hydrology: Principles and Practices*. Upper Saddle River: Prentice Hall.
- RAJARATNAM, N. & MURALIDHAR, D. 1969 Flow below deeply submerged rectangular weirs. *J. Hydraul. Res.* **7**, 355–374.
- RAYMOND, M., WEGMANN, M. & FUNK, M. 2003 Inventar gefährlicher Gletscher in der Schweiz. *Tech. Rep. Mitteilung 182*. ETH Zürich, Versuchsanstalt für Wasserbau.
- RECKING, A. 2013 Simple method for calculating reach-averaged bed-load transport. *J. Hydraul. Eng.* **139**, 70–75.
- RICKENMANN, D. 1990 Bedload transport capacity of slurry flows at steep slopes. *Tech. Rep. 103*. Mitteilungen 103 der Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie.
- RICKENMANN, D. & RECKING, A. 2011 Evaluation of flow resistance in gravel-bed rivers through a large field data set. *Water Resour. Res.* **47**, W07538.
- RITTER, A. 1892 Die Fortpflanzung der Wasserwellen. *Zeit. Vereines Deutsch. Ing.* **36** (33), 947–954.
- ROBERTS, M. J. 2005 Jökulhlaups: a reassessment of floodwater flow through glaciers. *Rev. Geophys.* **43**, 2003RG000147.
- ROJAS-SERNA, C. 2005 Quelle connaissance hydrométrique minimale pour définir les paramètres d'un modèle pluie-débit. PhD thesis, ENGREF.
- SCHUSTER, R. L. & ALFORD, D. 2004 Usoi landslide dam and lake Sarez, Pamir mountains, Tajikistan. *Environmental & Engineering Geoscience* **10** (2), 151–168.
- SINGH, V. P. 1996 *Dam Breach Modeling Technology*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- SIVAKUMARAN, N. S., TINGSANCHALI, T. & HOSKING, R. J. 1983 Steady shallow flow over curved beds. *J. Fluid Mech.* **128**, 469–487.
- SMART, G. M. & JAEGGI, M. N. R. 1983 Sedimenttransport in steilen Gerinnen. *Tech. Rep. 64*. Mitteilungen 64 der Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie.
- SPREAFICO, M., WEINGARTNER, R., BARBEN, M. & RYSER, A. 2003 Evaluation des crues dans les bassins versants de Suisse. *Tech. Rep.* OFEG.
- STOKER, J. J. 1957 *Water Waves*. New York: Interscience Publishers.
- STRICKLER, A. 1924 Beiträge zur Frage der Geschwindigkeitsformel und der Rauigkeitszahlen für Ströme, Kanäle und geschlossene Leitungen. *Schweizerische Bauzeitung* **83-84** (23), 265–268.

- THORNTON, C. I., PIERCE, M. W. & ABT, S. R. 2011 Enhanced predictions for peak outflow from breached embankment dams. *J. Hydrol. Eng.* **16**, 81–88.
- TORO, E. F. 2001 *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*. Chichester: Wiley.
- TROWBRIDGE, J. H. 1987 Instability of concentrated free surface flows. *J. Geophys. Res.* **C 92**, 9523–9530.
- VISCHER, D. L. & HAGER, W. H. 1998 *Dam Hydraulics*. Chichester: John Wiley & Sons.
- VISENTINI, M. 1936 Ecoulement d'un barrage sur l'Orba, en Italie, le 13 août 1935. *Rev. Geog. Alpine* **24**, 381–393.
- WAHL, T. L. 1998 Prediction of embankment dam breach parameters. *Tech. Rep. Dam Safety Research Report DSO-98-004*. U.S. Department of the Interior – Bureau of Reclamation –.
- WALDER, J. S. & COSTA, J. E. 1996 Outburst floods from glacier-dammed lakes: The effect of mode of lake drainage on flood magnitude. *Earth Surf. Process. Landforms* **21**, 701–723.
- WALDER, J. S. & O'CONNOR, J. E. 1997 Methods for predicting peak discharge of floods caused by failure of natural and constructed earthen dams. *Water Resour. Res.* **33**, 2337–2348.
- WALDER, J. S., WATTS, P., SORENSEN, O. E. & JANSSE, K. 2003 Tsunamis generated by subaerial mass flows. *J. Geophys. Res.* **108**, B2563.
- WALDER, J. S., WATTS, P. & WAYTHOMAS, C. F. 2006 Case study: mapping tsunami hazards associated with debris flow into a reservoir. *J. Hydraul. Eng.* **132**, 1–11.
- WATT, S. F. L., TALLING, P. J., VARDY, M. E., HELLER, V., HÜHNERBACH, V., URLAUB, M., SARKAR, S., MASSON, D. G., HENSTOCK, T. J. & MINSHULL, T. A. 2012 Combinations of volcanic-flank and seafloor-sediment failure offshore Montserrat, and their implications for tsunami generation. *Earth Planet. Sci. Lett.* **319** (320), 228–240.
- WATTS, P. 2000 Tsunami features of solid block underwater landslides. *J. Waterw. Port Coast. Ocean Eng.* **126**, 144–152.
- WEISS, R., FRITZ, H. M. & WÜNNEMANN, K. 2009 Hybrid modeling of the mega-tsunami runup in Lituya Bay after half a century. *Geophys. Res. Lett.* **36**, L09602.
- WESTOBY, M. J., GLASSER, N. F., BRASINGTON, J., HAMBREY, M. J., QUINCEY, D. J. & REYNOLDS, J. M. 2014 Modelling outburst floods from moraine-dammed glacial lakes. *Earth-Sci. Rev.* **134**, 137–159.
- WHITHAM, G. B. 1954 The effects of hydraulic resistance in the dam-break problem. *Proc. R. Soc. London ser. A* **227**, 399–407.
- WIBERG, P. L. & SMITH, A. F. M. 1991 Velocity distribution and bed roughness in high-gradient streams. *Water Resour. Res.* **27**, 825–838.
- WONG, M. & PARKER, G. 2006 Reanalysis and correction of bed-load relation of Meyer-Peter and Müller using their own database. *J. Hydraul. Eng.* **132**, 1159–1168.
- WORNI, R., HUGGEL, C., CLAGUE, J. J., SCHAUB, Y. & STOFFEL, M. 2014 Coupling glacial lake impact, dam breach, and flood processes: A modeling perspective. *Geomorphology* **224**, 161–176.

- WU, W. 2007 *Computational River Dynamics*. London: Taylor & Francis.
- WU, W. 2011 Earthen embankment breaching. *J. Hydraul. Eng.* **137**, 1549–1564.
- WU, W. 2013 Simplified physically based model of earthen embankment breaching. *J. Hydraul. Eng.* **139**, 837–851.
- WU, W., MARSOOLI, R. & HE, Z. 2012 Depth-averaged two-dimensional model of unsteady flow and sediment transport due to noncohesive embankment break/breaching. *J. Hydraul. Eng.* **138**, 503–516.
- YAGER, E. M., KIRCHNER, J. W. & DIETRICH, W. E. 2007 Calculating bed load transport in steep boulder bed channels. *Water Resour. Res.* **43**, W07418.
- YEN, B. C. 2002 Open channel flow resistance. *J. Hydraul. Eng.* **128**, 20–39.
- YU, B. 1998 Theoretical justification of SCS method for runoff estimation. *Journal of Irrigation and drainage engineering* **124** (306-310).
- ZITTI, G., ANCEY, C., POSTACCHINI, M. & BROCCINI, M. 2016 Impulse waves generated by snow avalanches: Momentum and energy transfer to the water body. *J. Geophys. Res. Earth Surf.* **121**, 2399–2423.
- ZWEIFEL, A., HAGER, W. H. & MINOR, H. E. 2006 Plane impulse waves in reservoirs. *J. Waterw. Port Coast. Ocean Eng.* **132**, 358–368.



Index

- aggradation, 18
- Airy, 186
- algue, 36
- angle
 - de Kelvin, 189
- approximation de Padé, 173
- assurance, 59
- autocorrélation, 51
- banc
 - alterné, 29, 31
 - de gravier, 31
 - de sable, 31
- barrage, 16, 56, 61, 116
 - classification, 138
 - petit, 123
- bedrock, 36
- bifurcation, 28
- Boussinesq, 24
- brèche, 144, 146
- caractéristique, 19
- cascade, 9
- catastrophe
 - naturelle, 59
- cellule convective, 56
- Chamoli, 126
- charge, 10, 141
 - hydraulique, 2
 - pertes de, 2
- charriage, 61
- choc, 111, 219
- chute, 3, 9
- Chézy, 38, 41
- coefficient
 - de Boussinesq, 14
 - de Chézy, 38
 - de Darcy-Weisbach, 38
 - de débit, 10
 - de Manning, 39
 - de Strickler, 39
- condition
 - aux limites, 20, 189
 - de Lax, 157
 - de Rankine-Hugoniot, 21
- confluence, 28
- conjugaison, 7
- contrainte pariétale, 171
- contrôle, 189
- convection, 45, 49
- courbe
 - caractéristique, 19
 - de remous, 3, 7, 23
 - enveloppe, 79
- courbure, 24
- crue, 31, 55, 62
 - méga, 62
 - torrentielle, 61
 - éclair, 56, 79
- célérité, 17
- dalot, 28
- Darcy, 38
- delta, 31
- densité
 - spectrale, 51
- diffusion, 46, 49
- digue, 128
- discontinuité, 219

- Dressler, 24
- durée
 - spécifique, 95
- débâcle, 126
 - glaciaire, 126
- décomposition
 - de Reynolds, 42
- déposition, 18
- dépression, 62
- déversoir, 25
- eau blanche, 229
- écosystème, 29
- elliptique, 19
- embranchent, 28
- energie
 - énergie, 36
- énergie
 - totale, 1
- épacentrage, 95
- équation
 - caractéristique, 20, 45
 - courbe de remous, 3
 - d'Airy, 186
 - d'Exner, 18
 - de Benjamin-Bona-Mahony, 195
 - de Bernoulli, 187
 - de Boussinesq, 24, 195
 - de Buckley-Leverett, 157
 - de Clague-Mathews, 150
 - de conjugaison, 6
 - de continuité, 12
 - de convection, 45
 - de diffusion, 46
 - de diffusion non linéaire, 46
 - de fermeture, 42
 - de Froehlich, 144
 - de Huppert, 153
 - de Korteweg-de-Vries, 195
 - de la chaleur, 46, 52
 - de la quantité de mouvement, 13, 16
 - de Laplace, 52, 186, 187
 - de Meyer-Peter, 39
 - de Navier-Stokes, 11, 13, 42
 - de Rankine-Hugoniot, 21, 111, 155
 - de Saint-Venant, 11, 12, 16, 18, 104, 161, 204, 230
 - des ondes, 50, 186
 - hyperbolique, 19
- estuaire, 29
- évacuateur, 116
- Exner, 18
- facteur
 - intégrant, 19
- facteur de Boussinesq, 171
- Ferguson, 42
- fermeture
 - algébrique, 42
- fetch, 225
- flottant, 29
- flux, 18
- fonction
 - de transfert, 99
- forme
 - caractéristique, 15
 - conservative, 15
 - non conservative, 15
 - tensorielle, 18, 21
- formulation conservative, 17
- formule
 - de Kleitz-Seddon, 107
 - de Turraza, 82
- formule de Kirpich, 82
- frottement
 - de forme, 36, 37
 - de peau, 36, 37
 - loi, 37
- Froude, 3
- fréquence, 50
- gradex, 81
- Green, 47
- harmonique, 50
- hauteur
 - critique, 3

- normale, 3
- significative, 225
- houle, 189, 195, 204, 225
- Hugoniot, 21
- hydrogramme, 86
 - unitaire instantané, 99
- hyperbolique, 19
- hypothèse
 - de Boussinesq, 42
- hyétogramme, 95
- impact, 175, 218
- infiltration, 81
- inondation, 55, 56
- instabilité, 11, 229
- invariant
 - de Riemann, 164, 166
- jacobien, 18
- jöjülhaup, 126
- Keulegan, 40
- lac, 58, 61, 124
 - glaciaire, 126, 150
 - Léman, 126
 - morainique, 124–126, 149
- lahar, 61
- lave torrentielle, 61
- lit, 31, 36
 - alluvial, 36
 - composé, 36
 - en tresse, 31
 - majeur, 36
 - mineur, 36
 - mobile, 36
 - mouillé, 167
 - végétalisé, 36
 - vététalisé, 36
- loi
 - de Chézy, 38, 41, 107, 232
 - de Darcy, 52
 - de Darcy-Weisbach, 38
 - de Ferguson, 42
 - de frottement, 37
 - de Fréchet, 72
 - de Gumbel, 72
 - de Keulegan, 40, 42
 - de Manning-Strickler, 39, 41, 42, 107
 - de Parker, 41
 - de Prandtl, 40
 - de Rayleigh, 225
 - de Recking, 42
 - de valeurs extrêmes, 72
 - de Weibull, 72
 - parabolique, 42
- loi de probabilité
 - de Gumbel, 85
- longueur
 - d'onde, 50
 - de mélange, 40
- Malpasset, 144
- Manning, 39
- marée, 195
- mascaret, 105, 215, 219
- Meyer-Peter, 39
- modèle
 - GR4, 98
 - LES, 24, 28
 - réservoir GR, 97
- morphodynamique, 29
- mouille, 31
- mouvement de terrain, 61
- moyenne, 11, 42
- méandre, 31
- méga-crue, 62
- méthode
 - Crupédix, 78
 - de Pohlhausen, 172
 - de séparation des variables, 187
 - des caractéristiques, 20, 108, 164
 - des volumes finis, 20
 - du gradex, 81
 - QdF, 83
 - rationnelle, 90, 108
 - SCS, 92
 - Socose, 89, 95

- transformation pluie-débit, 89
- nappe, 57
- nombre
 - d'onde, 50
 - d'Ursell, 195
 - de Chézy, 42
 - de Froude, 3, 13, 17, 38, 232
 - de Froude critique, 189
 - de Reynolds, 13, 38
 - nombre de Froude, 223
- obstacle, 9
- OFEN, 148
- onde, 50
 - aléatoire, 51
 - capillaire, 195
 - cinématique, 104, 107, 108, 164
 - cnoïdale, 195, 200, 215
 - courte, 195
 - d'impulsion, 177, 209
 - de choc, 21, 105, 155
 - de crue, 107
 - de détente, 155
 - de gravité, 185
 - de Stokes, 199, 215
 - de surface, 185
 - dynamique, 50, 104
 - gravitaire, 195
 - linéaire, 198
 - longue, 195
 - mixte, 157
 - plane, 209, 215
 - progressive, 50, 51
 - régressive, 51
 - simple, 155, 164
 - simple centrée, 164
 - solitaire, 195, 202
 - soliton, 195
- orage, 62
- parabolique, 19
- Parker, 41
- pelle, 9
- pente
 - critique, 3
 - frottement, 2
- perte
 - de charge, 2, 6, 10
- poche glaciaire, 61
- ponceau, 28
- pont, 28
- Prandtl, 40
- probabilité
 - de dépassement, 70
- problème
 - de Green, 47
 - de Riemann, 154
- période, 50
 - de retour, 70, 75
- R (langage), 102
- Rankine, 21
- rapport
 - d'échelle, 11
- Recking, 42
- relation
 - de dispersion, 50, 188
 - de Rankine-Hugoniot, 155, 219
- remontée, 218
- remontée de nappe, 57
- renard, 116
- ressaut, 3, 4, 6, 7, 17, 19, 24, 105, 219
 - mobile, 21, 221
- Riemann, 18
- roll wave, 229
- routage, 89
- ruissellement, 58
- run-up, 218
- rupture
 - barrage, 115
 - bassin de décantation, 129
 - cause, 116
 - digue, 128
 - graduelle, 144
 - instantanée, 143
 - soudaine, 144
 - terril, 129

- rupture de barrage, 61
- réchauffement climatique, 126
- régime
 - fluvial, 189
 - graduellement varié, 2
 - rapidement varié, 2
 - subcritique, 16, 21, 189
 - supercritique, 16, 21, 189
 - torrentiel, 189
 - varié, 25
- résistance, 36
- Saint-Venant, 11
- Sarez
 - lac, 62
- section, 17
- seiche, 58, 59, 124
- seuil, 7, 9, 25, 31, 90
 - dénoyé, 10, 25
 - mince, 9
 - noyé, 10, 25
 - épais, 9
- similitude, 211
- singularité, 7
- solitaire, 202
- soliton, 195, 215
- solution
 - auto-similaire, 162
 - d'Alembert, 51
 - de Ritter, 161
- source, 18
- spectre, 51
- stabilité, 230
- Strickler, 39
- surverse, 116
- Tauredunum, 126
- temps
 - de concentration, 81
- théorie
 - d'Airy, 186, 195, 198
 - de Korteweg-de-Vries, 195
 - de la stabilité linéaire, 230
 - de Stokes, 195, 199
 - des ondes linéaires, 185, 198
 - des ondes non linéaires, 195
 - des valeurs extrêmes, 72, 75
- théorème
 - de Wiener-Khinchin, 51
- train d'onde, 229
- transport
 - solide, 18, 29
- tsunami, 58, 59, 195, 204
- vague, 104, 175
 - d'impulsion, 209
 - scélérate, 175
- valeur
 - propre, 18
- vanne, 27
- variable
 - de Riemann, 19, 164
- vecteur
 - propre, 18
- vitesse
 - de cisaillement, 40
 - de frottement, 40
 - de groupe, 50, 192
 - de l'onde, 50
 - de phase, 50
 - des ondes, 18
 - moyenne, 2
- vorticité, 36
- Vésubie, 31, 56