Chapitre 10

Cinématique du point

L'étude du mouvement d'un système constitue le domaine de la physique appelé la **mécanique**. Ce type d'étude s'effectue toujours sur le choix d'un **système** dont on souhaite étudier le mouvement, ainsi que d'un **référentiel** et d'un **repère** dans lequel on se place pour l'étudier.

Deux approches majeures existent pour décrire le mouvement d'un système : la **cinématique** et la **dynamique**. La première citée est fondée sur une étude observatrice, qui ne prend pas en compte les causes du mouvement, à savoir les forces. C'est elle qui fait l'objet de ce chapitre. La dynamique, quant à elle, est une approche théorique, qui met en équation les problèmes mécaniques en tenant compte des forces à l'origine des mouvements. Cet aspect sera traité dans les chapitres 11, 12, 13 et **??**.

Ce chapitre s'articule autour du plan suivant :

- Vecteurs position, vitesse et accélération
- Détermination graphique à partir d'une chronophotographie (Vidéo)
- Mouvements rectilignes et circulaires

10.1 Vecteurs position, vitesse et accélération

Ce chapitre s'intitule « Cinématique du point » car on s'intéresse ici aux mouvements de systèmes qui seront assimilés à des **points matériels**. En effet, si l'on veut tenir compte de la taille réelle, de la forme et de l'état physique d'un système, l'étude est plus compliquée et fait appel à des notions hors programme. Par souci de simplification, on considère ici des systèmes ponctuels, qui permettent d'introduire toutes les grandeurs et les lois d'intérêt de la mécanique dans des situations plus faciles à comprendre et à résoudre.

10.1.1 Vecteur position

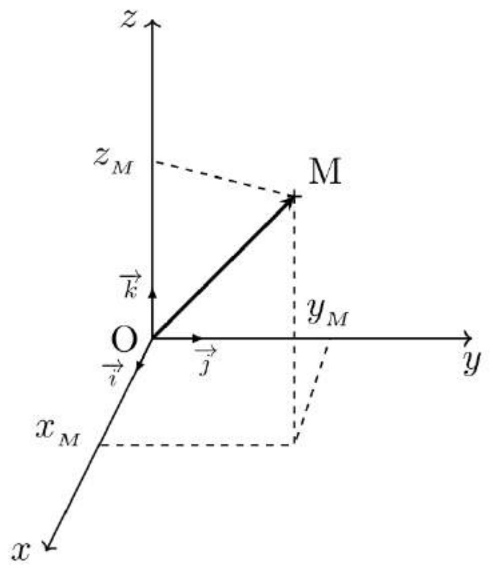

Figure 10.1 – Vecteur position d'un point M dans un repère orthonormé

Vecteur position

Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, le **vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$** d'un point M évoluant dans l'espace en fonction du temps t, est donné en coordonnées cartésiennes par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Remarque : Les expressions de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont appelées les **équations horaires du mouvement**.

10.1.2 Vecteur vitesse

Vecteur vitesse

Le **vecteur vitesse $\vec{v}(t)$** est défini mathématiquement par la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ par rapport au temps.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \\ v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} \\ v_z(t) = \dfrac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

- Direction : Tangent à la trajectoire au point M
- Sens : Dans le sens du mouvement
- Norme : $v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{{v_x}^2(t) + {v_y}^2(t) + {v_z}^2(t)}$

Remarque : Les expressions de $v_x(t)$, $v_y(t)$ et $v_z(t)$ sont appelées les **équations horaires de la vitesse**.

10.1.3 Vecteur accélération

Vecteur accélération

Le **vecteur accélération $\vec{a}(t)$** est défini mathématiquement par la dérivée du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ et donc par la dérivée seconde du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ par rapport au temps.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2} = \begin{pmatrix} a_x(t) = \dfrac{dv_x(t)}{dt} \\ v_y(t) = \dfrac{dv_y(t)}{dt} \\ v_z(t) = \dfrac{dv_z(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} \\ \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} \\ \dfrac{d^2z(t)}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}$$

Norme : $a(t) = \|\vec{a}(t)\| = \sqrt{{a_x}^2(t) + {a_y}^2(t) + {a_z}^2(t)}$

10.2 Détermination graphique à partir d'une chronophotographie

Voici un rappel du programme de première pour déterminer graphiquement, à partir d'une chronophotographie, une **valeur approchée** des vecteurs vitesse $\overrightarrow{v}(t)$ et accélération $\overrightarrow{a}(t)$. Δt correspond à l'intervalle de temps entre deux points sur la chronophotographie :

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{\overrightarrow{M_{n-1}M_{n+1}}}{2\Delta t} = \frac{\overrightarrow{M(t-\Delta t)\,M(t+\Delta t)}}{2\Delta t}$$
$$\Delta\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{v}(t+\Delta t) - \overrightarrow{v}(t-\Delta t)$$
$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{\Delta\overrightarrow{v}(t)}{2\Delta t}$$

10.2.1 Vecteur vitesse

La vitesse instantanée en un point $M_n = M(t)$ est déterminée comme la moyenne entre les deux points plus proches voisins $M_{n-1} = M(t-\Delta t)$ et $M_{n+1} = M(t+\Delta t)$ comme le montre la figure 10.2.

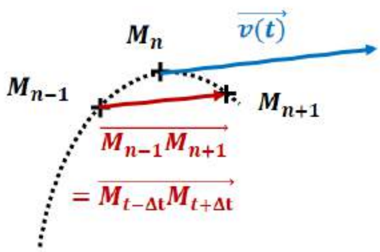

Figure 10.2 – Schéma représentant le vecteur vitesse instantanée moyen entre ses deux plus proches voisins

Il faut ainsi tracer le vecteur $\overrightarrow{M_{n-1}M_{n+1}}$ qui relie les deux points entourant le point M_n. Ce vecteur fixe la direction et le sens du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$. Il faut ensuite diviser par $2 \times \Delta t$ pour obtenir la vitesse.

10.2.2 Vecteur accélération

Étudions d'après la figure 10.3 la variation de vitesse du point M_8 : $\Delta\overrightarrow{v_8} = \overrightarrow{v_9} - \overrightarrow{v_7}$

- Représenter les vecteurs vitesse $\overrightarrow{v_7}$, $\overrightarrow{v_8}$ et $\overrightarrow{v_9}$ pour les points M_7, M_8 et M_9
- Construire le vecteur $\overrightarrow{v_9}$ en partant de M_8
- Construire $-\overrightarrow{v_7}$ en partant de l'extrémité de $\overrightarrow{v_9}$
- On obtient alors le vecteur $\Delta\overrightarrow{v_8}$ au point M_8
- Le vecteur accélération est $\overrightarrow{a_8} = \dfrac{\Delta\overrightarrow{v_8}}{2\Delta t}$

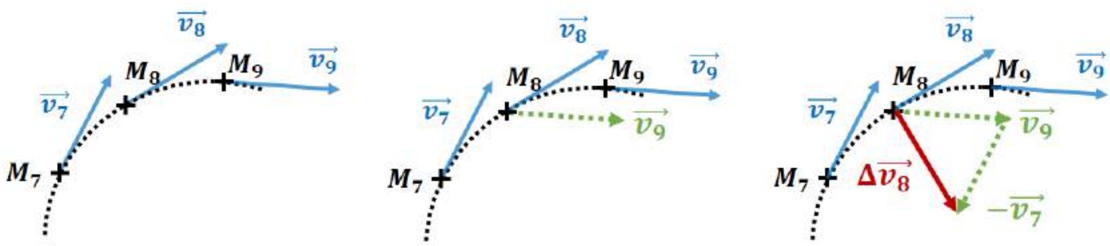

Figure 10.3

10.3 Mouvements rectiligne et circulaire

10.3.1 Mouvement rectiligne

Un mouvement est dit **rectiligne** lorsque sa trajectoire est une **droite**.
On parle de mouvement **rectiligne uniforme** si en plus le **vecteur vitesse est constant**. Le **vecteur accélération** est donc un **vecteur nul**.
Enfin on parle de mouvement **rectiligne uniformément accéléré** si le vecteur **accélération est constant et non nul**.

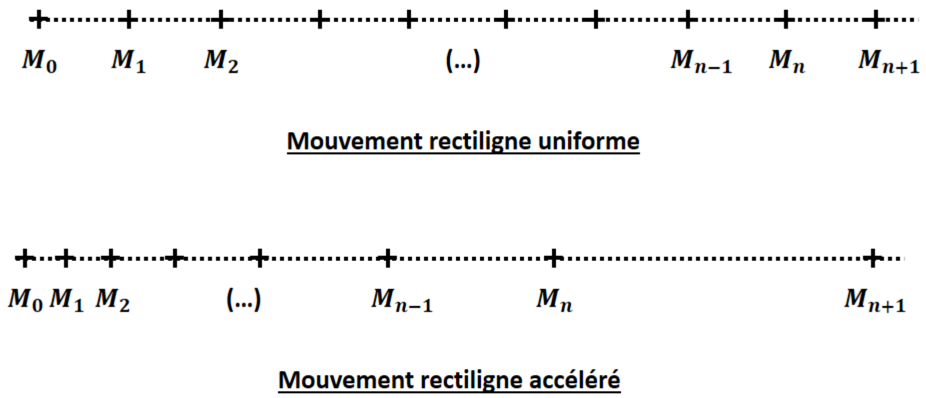

Figure 10.4 – Exemples de chronophotographies de mouvements rectilignes.

10.3.2 Mouvement circulaire : repère de Frenet

Pour étudier un mouvement circulaire (mouvement plan à deux dimensions), le repère orthonormé cartésien n'est pas forcément le plus adapté. On définit un nouveau repère appelé **repère de Frenet**, dont la particularité est que l'origine du repère est mobile : il s'agit de la position du point M. Ensuite on affecte deux vecteurs unitaires :

- Le **vecteur tangentiel (ou orthoradial)** $\vec{t}$, tangent à la trajectoire, dans le sens du mouvement.
- Le **vecteur normal (ou radial)** $\vec{n}$, orthogonal à la trajectoire, orienté vers le centre du cercle.

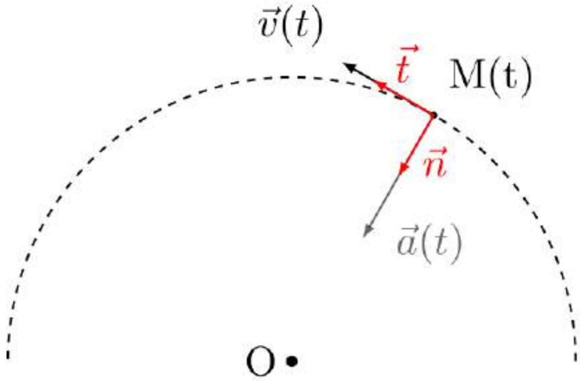

Figure 10.5 – Schéma représentant le repère de Frenet dans le cas d'une trajectoire circulaire

Rappel de mathématiques : Dans un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'expression d'un vecteur $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ peut se décomposer de la manière suivante :

$$\overrightarrow{OM} = x \times \vec{u} + y \times \vec{v} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

10.3.3 Expressions des vecteurs position, vitesse et accélération dans le repère de Frenet

Vecteurs dans le repère de Frenet

Dans le repère de Frenet, pour une trajectoire circulaire de centre O et de rayon R, les vecteurs position $\overrightarrow{OM}(t)$, vitesse $\overrightarrow{v}(t)$ et accélération $\overrightarrow{a}(t)$ sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM}(t) = 0 \times \vec{t} - R \times \vec{n} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -R \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{v}(t) = v(t)\vec{t} + 0 \times \vec{n} &= \begin{pmatrix} v(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\vec{t} + \frac{v^2(t)}{R}\vec{n} &= \begin{pmatrix} \dfrac{dv(t)}{dt} \\ \dfrac{v^2(t)}{R} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Remarque : Les expressions ci-dessus sont à apprendre par coeur mais les démonstrations ne sont pas au programme.

10.3.4 Mouvement circulaire uniforme

Mouvement circulaire uniforme

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, la norme de la vitesse est constante $v(t) = v$, donc sa dérivée est nulle : $\frac{dv(t)}{dt} = 0$. L'expression de l'accélération dans le repère de Frenet se simplifie alors comme suit :

$$\overrightarrow{a(t)} = \frac{v^2}{R}\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{v^2}{R} \end{pmatrix}$$

On dit que l'accélération est **centripète**, c'est-à-dire dirigée vers le centre du cercle.