

## Cours Ondes et Acoustique

Arnaud Tourin

Mathias Fink

Année 2016-2017

## AVANT-PROPOS

L'enseignement de la physique des ondes se décline dans des cours aux intitulés très variés : électromagnétisme, optique, acoustique, vibrations, sismologie, physique quantique, etc. Cette variété est le reflet de la diversité des grandeurs physiques, des mécanismes, des polarisations et des échelles associés aux différents types d'ondes. Elle traduit aussi des différences importantes dans la nature des sources et des récepteurs mis en jeu. Pourtant, par-delà la diversité des situations rencontrées, toutes les ondes partagent nombre de caractéristiques communes : toutes se définissent comme la propagation d'une perturbation produite par une rupture locale des conditions d'équilibre ; leur propagation s'analyse à partir de concepts très généraux tels que la cohérence et la dispersion ; surtout, elles obéissent à des équations différentielles qui présentent les mêmes symétries : invariance par translation dans le temps, réciprocity spatiale et invariance par renversement du temps. C'est l'idée que l'on retrouve exprimée dans la phrase choisie par le physicien français Léon Brillouin pour ouvrir son livre « Wave Propagation and Group Velocity » paru en 1960 : « All waves behave in a similar way ».

C'est dans cet esprit que Mathias Fink a créé au début des années 1990 à l'ESPCI un cours dont il a choisi l'intitulé à dessein : « Ondes et Acoustique ». L'objectif premier est en effet de présenter un cadre d'étude très général applicable à l'ensemble des ondes et qui s'appuie sur les symétries de l'équation de propagation. Il s'agit en particulier de présenter la théorie de la diffraction aussi bien pour des ondes planes monochromatiques, comme cela est généralement fait dans les cours d'optique, mais aussi pour des ondes brèves (large bande) produites par des sources ponctuelles. Sur un plan expérimental, les ondes acoustiques apparaissent alors comme particulièrement appropriées pour illustrer les différents concepts présentés. Leur faible vitesse (1500 m/s dans l'air, 330 m/s dans l'eau) comparée à celle de la lumière autorise en effet la possibilité de mesurer leur amplitude instantanée, là où les détecteurs utilisés en optique ne permettent de mesurer que l'intensité du champ. Dans le domaine des ultrasons, les détecteurs (transducteurs piézo-électriques) sont par ailleurs réversibles : ils peuvent aussi être utilisés comme émetteurs d'ondes brèves, c'est-à-dire d'une durée limitée à quelques arches de sinusoides.

C'est aussi cette vision de l'unité de la physique des ondes qui, en 2009, a conduit Mathias Fink et Claude Boccara à rapprocher leurs laboratoires pour créer l'Institut Langevin. Aux dires du Conseil scientifique international de l'ESPCI, ce laboratoire repose sur un modèle probablement unique au monde en cela qu'on s'y intéresse à toutes les ondes, de l'acoustique à l'optique en passant par les vagues, les ondes sismiques et les micro-ondes.

Bien sûr, ce cours est aussi l'occasion de présenter les bases de l'acoustique et ses applications, en particulier dans les domaines de l'imagerie médicale et du contrôle santé des matériaux. A cet égard, il faut souligner l'importance des apports à ce domaine des recherches menées depuis la création de l'ESPCI en 1882. C'est en effet Paul Langevin qui a domestiqué pour la première fois les ondes élastiques en inventant le SONAR (SOund Navigation And Ranging) dans le contexte de la première guerre mondiale : le premier brevet a été déposé en 1916. Cette invention a été rendue possible par la découverte, trente six ans plus tôt, de l'effet piézoélectrique par les frères Curie. Les techniques d'échographie et de contrôle non destructif, très répandues aujourd'hui dans les hôpitaux et l'industrie, reposent sur le même principe : émission d'un signal bref et écoute des échos produits par les cibles présentes dans le milieu.

C'est aussi à l'ESPCI que les premières expériences d'acousto-optique ont été menées en 1932 par R. Lucas et P. Biquard sur une idée de L. Brillouin émise onze ans plus tôt. Elles ont permis la réalisation de modulateurs acousto-optique que l'on retrouve par exemple dans les sondes optiques de petits déplacements mécaniques, en particulier la sonde interférométrique hétérodyne développée par E. Dieulesaint et D. Royer à l'ESPCI.

Le polycopié que vous avez entre les mains présente tous les concepts dont la maîtrise est exigée à la fin de l'enseignement « Ondes et Acoustique ». Toutes les démonstrations et formules importantes y sont détaillées. Pour aller plus loin, vous trouverez à la fin du document une courte bibliographie recensant quelques ouvrages de référence.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1.1	Comment fabrique-t-on une onde ? . . . . .	5
1.2	Comparaison des propriétés de l'équation d'ondes et de l'équation de diffusion . . . . .	6
1.2.1	Linéarité . . . . .	6
1.2.2	Invariance par translation . . . . .	7
1.2.3	Réciprocité spatiale . . . . .	8
1.2.4	Causalité . . . . .	8
1.2.5	Invariance par renversement du temps . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Acoustique des fluides</b>	<b>13</b>
2.1	Génération d'une onde acoustique dans un fluide . . . . .	13
2.2	Equations de conservation et équation d'état . . . . .	14
2.2.1	Conservation de la masse . . . . .	14
2.2.2	Equation d'état du fluide . . . . .	15
2.2.3	Equation d'Euler . . . . .	16
2.3	Acoustique linéaire . . . . .	17
2.3.1	Equation d'onde . . . . .	17
2.3.2	Absorption d'une onde acoustique dans un fluide . . . . .	19
2.3.3	Potentiel des vitesses . . . . .	20
2.3.4	Ondes planes monochromatiques . . . . .	20
2.3.5	Impédance acoustique . . . . .	21
2.3.6	Densité d'énergie acoustique . . . . .	22
2.3.7	Intensité acoustique . . . . .	23
2.3.8	Relations de passage à une interface . . . . .	24
2.3.9	Ondes sphériques . . . . .	27
2.3.10	Equation de propagation en milieu hétérogène . . . . .	30
2.4	Acoustique non linéaire . . . . .	30
2.4.1	L'équation de Kuznetsov . . . . .	30
2.4.2	L'équation de Westervelt . . . . .	32
2.4.3	L'équation de Burgers . . . . .	33

2.4.4	Calcul de la distance de choc . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Théorie de la diffraction</b>	<b>36</b>
3.1	Théorème d'unicité . . . . .	36
3.2	La fonction de Green spatio-temporelle . . . . .	39
3.3	La fonction de Green monochromatique . . . . .	40
3.4	Théorème de réciprocité . . . . .	42
3.5	Théorème intégral de la diffraction en régime monochromatique	44
3.5.1	Démonstration du théorème . . . . .	44
3.5.2	Intégration sur un plan et condition de Sommerfeld . .	47
3.5.3	Approximation de Kirchhoff . . . . .	48
3.5.4	Intégrales de Rayleigh et Rayleigh-Sommerfeld . . . . .	49
3.5.5	Zones de Fresnel . . . . .	51
3.6	Théorème intégral de la diffraction dans le domaine temporel .	54
3.7	Du principe d'Huygens au théorème de Fermat . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Propagation d'ondes et théorie du signal</b>	<b>56</b>
4.1	La diffraction vue comme un filtre spatial . . . . .	56
4.2	Transformée de Fresnel et transformée de Fourier . . . . .	58
4.3	La lentille vue comme un filtre adapté spatial . . . . .	59
4.4	Radar et sonar à compression d'impulsion . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Références bibliographiques</b>	<b>62</b>

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Comment fabrique-t-on une onde ?

Une onde naît lorsque la perturbation locale d'une grandeur physique  $\Psi$  (mesurée par sa dérivée temporelle d'ordre 1) induit la variation dans l'espace d'une autre grandeur  $\Phi$  (mesurée par sa dérivée spatiale d'ordre 1).

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = a \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = b \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

La combinaison de ces deux équations conduit à l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = ab \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

Ainsi, l'augmentation locale d'un champ magnétique (induite par exemple par l'établissement soudain d'un courant dans un fil) induit la circulation d'un champ électrique, ce qui s'exprime localement par l'équation de Maxwell suivante :

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} \vec{E}$$

A mesure que le champ électrique augmente, une circulation magnétique est créée, phénomène décrit par l'équation de Maxwell correspondante :

$$c^2 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière.

La combinaison de ces deux équations conduit, dans un milieu sans source et sans courant, à l'équation de propagation d'une onde électromagnétique :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

## 1.2 Comparaison des propriétés de l'équation d'ondes et de l'équation de diffusion

L'équation de propagation pour une onde scalaire dans un milieu homogène non dissipatif s'écrit :

$$\mathbf{L}\Psi(\vec{r}, t) = s(\vec{r}, t) \quad \text{avec} \quad \mathbf{L} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Il existe un deuxième type d'équations différentielles qui gouvernent les phénomènes de conduction de la chaleur et de diffusion de matière. Elles prennent la forme d'une équation dite de *diffusion*.

$$\mathbf{L}\Psi(\vec{r}, t) = s(\vec{r}, t) \quad \text{avec} \quad \mathbf{L} = \Delta - \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t}$$

où  $D$  est le coefficient de diffusion.

Comme nous allons le découvrir dans la suite, ces deux équations partagent plusieurs propriétés mais présentent une différence déterminante : la première est invariante par renversement du temps contrairement à la seconde.

### 1.2.1 Linéarité

L'opérateur  $\mathbf{L}$  qui apparaît dans ces équations relie linéairement les causes (le terme source) aux effets (le champ  $\Psi$ ). Cette propriété très importante est à l'origine du principe de superposition : le champ créé en un point est la somme des champs créés en ce point par toutes les sources actives du milieu.

De tels systèmes à réponse linéaire se rencontrent fréquemment en physique. Considérons un système qui transforme une excitation dépendant du temps  $x(t)$  en une fonction  $y(t) = \mathbf{T}[x(t)]$  où  $\mathbf{T}$  est un opérateur linéaire. En

décomposant l'excitation sur une base de Dirac et en exploitant la linéarité de l'opérateur  $\mathbf{T}$ , on peut écrire :

$$\mathbf{T}[x(t)] = \mathbf{T}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t')x(t')dt'\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{T}[\delta(t-t')]x(t')dt'$$

La connaissance de la réponse  $h(t, t') = \mathbf{T}[\delta(t-t')]$  consécutive à une excitation impulsionnelle détermine donc complètement la réponse du système.  $h$  est appelée *réponse impulsionnelle*.

Revenons au cas de l'équation d'ondes qui fait intervenir un terme source dépendant à la fois du temps et de l'espace. Si l'opérateur  $\mathbf{L}$  possède un opérateur inverse  $\mathbf{G} = \mathbf{L}^{-1}$ , alors le champ en tout point et à tout instant se déduit de la distribution de sources par :

$$\Psi(\vec{r}, t) = \mathbf{G}s(\vec{r}, t)$$

$\mathbf{G}$  définit l'opérateur de Green.

### 1.2.2 Invariance par translation

Dans la mesure où la vitesse  $c$  et la constante de diffusion  $D$  ne dépendent pas du temps, l'équation de propagation et l'équation de la diffusion sont invariantes par translation dans le temps.

Si l'on reprend l'exemple d'un système linéaire qui transforme une excitation dépendant du temps  $x(t)$  en une fonction  $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, t')x(t')dt'$ , l'invariance par translation du temps impose que  $h(t, t') = h(t-t')$ . La sortie du système peut alors s'écrire comme un produit de convolution sur le temps :

$$y(t) = h(t) \otimes x(t)$$

Pour une excitation monochromatique, c'est-à-dire de la forme  $x(t) = e^{i\omega t}$  en notation exponentielle, il est facile de montrer que la sortie s'écrit  $y(t) = H(\omega)x(t)$  où  $H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt$  représente la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.  $H(\omega)$  est appelée *fonction de transfert*. Sa connaissance pour toutes les fréquences permet de prédire la réponse du système à n'importe quelle forme d'excitation.

Si le volume dans lequel se produit la propagation ondulatoire (respectivement diffuse) est homogène infini, l'équation de propagation (respectivement l'équation de la diffusion) est également invariante par translation dans l'espace.



### 1.2.3 Réciprocité spatiale

La caractère autoadjoint de l'opérateur Laplacien entraîne une propriété importante de ces deux équations, la réciprocité spatiale : on peut intervertir le rôle de la source et du récepteur.

Nous démontrerons cette propriété lorsque nous aurons introduit le formalisme de Green.

### 1.2.4 Causalité

Une caractéristique essentielle d'un système physique est que les causes précèdent toujours les effets. Si l'on reprend l'exemple d'un système linéaire qui transforme une excitation dépendant du temps  $x(t)$  en une fonction  $y(t)$ , la propriété de causalité implique que  $y(t) = 0$  pour  $t < t_0$  si  $x(t) = 0$  pour  $t < t_0$ . La réponse impulsionnelle  $h(t)$  est donc nulle pour  $t < 0$ . Une conséquence mathématique importante est l'existence de deux relations, dites de KRAMERS-KRONIG, entre la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction de transfert.

### 1.2.5 Invariance par renversement du temps

Tout comme l'équation de Newton, l'équation d'ondes sans source est invariante par renversement du temps : si  $\Psi(\vec{r}, t)$  est solution,  $\Psi(\vec{r}, -t)$  est en effet également solution, la dérivée temporelle étant d'ordre 2. L'introduction dans l'équation d'une dérivée temporelle d'ordre 1, caractéristique de phénomènes dissipatifs, briserait l'invariance par renversement du temps.

Si  $\Psi(\vec{r}, t)$  représente une onde divergente depuis un point source,  $\Psi(\vec{r}, -t)$  représente l'onde qui converge vers la source (Fig. 1.1).

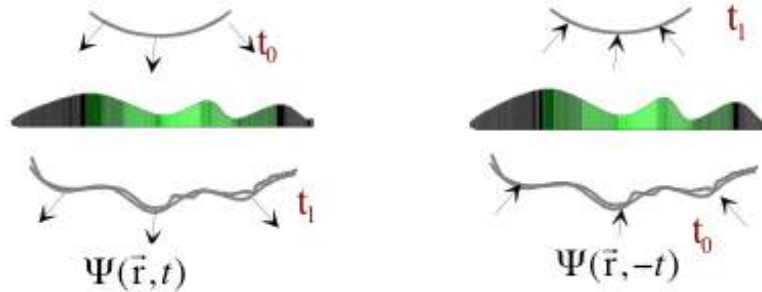


FIGURE 1.1 – Illustration de la propriété d’invariance par renversement du temps de l’équation d’ondes

Les propriétés d’invariance par renversement du temps de l’équation de Newton et de l’équation d’ondes posent la question de la flèche du temps. Lorsqu’on lâche une goutte d’encre dans un verre d’eau, ce dernier tend à se colorer uniformément. Faisons maintenant passer le film de la scène à l’envers : on voit les particules d’encre migrer à rebours vers la zone d’impact pour y reconstituer la goutte. Une personne qui visionnerait ce film réaliserait immédiatement qu’il est passé à l’envers et ne parierait pas sur la possibilité qu’un tel phénomène puisse réellement se produire. Le fait est que dans un tel processus l’évolution de la concentration locale des particules d’encre obéit à une équation de la diffusion, équation qui n’est pas invariante par renversement du temps. C’est dire qu’il existe une *flèche du temps*. Pourtant, la seconde loi de Newton qui régit le mouvement de chacune des particules d’encre est invariante par renversement du temps. Autrement dit, pour chaque solution des équations du mouvement, il existe bien une solution qui remonte le temps comme si le film était passé à l’envers ! C’est dire qu’au niveau microscopique rien ne distingue le passé du futur : il n’y a pas de flèche du temps. Cet exemple illustre le fameux paradoxe de « Loschmidt » : comment expliquer l’émergence d’une irréversibilité macroscopique (c’est-à-dire pour un système constitué d’un très grand nombre de particules) à partir de lois physiques microscopiques réversibles ?

Une première réponse nous est donnée par la thermodynamique, science née des travaux fondateurs de l’ingénieur et physicien français Sadi Carnot. Cette histoire est un bel exemple de la contribution des sciences de l’Ingénieur à la théorie physique. Sadi Carnot s’interrogeait sur les limites théoriques du rendement des machines à vapeur. C’est ainsi qu’en 1824 il publie « Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette

puissance ». L'analyse de Carnot s'appuie sur le postulat du caractère irréversible des deux processus suivants : la conversion d'énergie mécanique en chaleur à une température donnée et le transfert de chaleur d'une source chaude à une source froide. Si on mélange un litre d'eau chaude et un litre d'eau froide, on obtient deux litres d'eau tiède mais le processus inverse est impossible : on ne peut pas « démélanger » deux litres d'eau tiède pour faire un litre d'eau chaude et un litre d'eau froide. La seconde loi de la thermodynamique, énoncée en 1865 par le physicien Rudolf Clausius, formalise cette impossibilité. Elle introduit pour un système physique à la température  $T$  et qui échange avec l'extérieur une quantité de chaleur  $dQ$  une grandeur appelée entropie (du grec « entropia » qui signifie « retour en arrière ») dont la variation est donnée par le rapport  $dQ/T$ . L'entropie ainsi définie est fonction des variables caractérisant l'état macroscopique du système physique considéré (sa température, son volume et le nombre de particules qui le constituent). Le litre d'eau chaude et le litre d'eau froide ont chacun une valeur différente de l'entropie. Si on les mélange, l'eau froide gagne plus d'entropie que l'eau chaude n'en perd, si bien que l'opération de mélange a augmenté l'entropie globale du système. La seconde loi de la thermodynamique se présente donc comme un principe d'interdiction : un système isolé ne peut voir son entropie décroître, ce qui définit effectivement une flèche du temps pour un système macroscopique.

Le physicien autrichien Ludwig Boltzmann fut le premier à donner une explication microscopique au concept d'entropie. Son explication, formulée dans le contexte de la théorie cinétique des gaz, peut se transposer à notre exemple de la goutte d'encre. L'idée est que la complexité joue un rôle fondamental dans l'émergence de l'irréversibilité au niveau macroscopique. Après chaque collision, entre elles et avec les molécules d'eau, les molécules d'encre perdent ainsi la mémoire de leur état précédent : c'est l'hypothèse du *chaos moléculaire*.

Johann Josef Loschmidt, un collègue de Boltzmann, souleva toutefois l'objection suivante : on peut imaginer, à un instant donné, une situation où chaque particule conserve sa position mais acquiert une vitesse opposée : on devrait voir la goutte d'encre se reconstituer, ce qui recréerait un état d'entropie plus basse. A quoi Boltzmann répondit : « it is you who would invert the velocities », lui signifiant par là même l'impossibilité pratique de réaliser une telle expérience. Cette objection poussa toutefois Boltzmann à affiner son argumentation et à proposer une nouvelle définition de l'entropie qui posa les bases de la thermodynamique statistique : l'entropie d'un système constitué d'un grand nombre de particules est reliée au logarithme du nombre d'états microscopiques qui lui sont accessibles pour un état macroscopique donné, chacun des états microscopiques étant définis par la position et la vitesse de

chacune des particules. C'est ce qui fait dire généralement que l'entropie est une mesure du degré de désordre d'un système physique. Il est aussi une mesure de son uniformité comme l'atteste l'exemple de la coloration uniforme de l'eau dans laquelle on a jeté une goutte d'encre. Un système physique isolé évolue de telle sorte que le nombre d'états microscopiques accessibles soit maximisé, l'occupation de chacun de ces états étant équiprobable.

A ce stade, on reste un peu sur sa faim, l'objection de Loschmidt n'étant pas totalement levée. On pourrait en effet concevoir, au moins par la pensée, une expérience où une multitude de petits capteurs, qu'il est de coutume de baptiser « démons de Loschmidt », pourraient enregistrer la vitesse de chaque particule et l'inverser. On aboutirait ainsi à un état d'entropie plus basse (la goutte d'encre reconstituée). Cela étant, il faudrait alors tenir compte de la présence des démons pour faire le bilan d'entropie et, en l'occurrence, on montrerait que celui-ci reste bien conforme au second principe. Comme le physicien français Léon Brillouin l'a montré, l'entropie peut en effet aussi s'interpréter comme la mesure d'un manque d'information. Les mesures opérées par les démons de Loschmidt permettent d'acquérir de l'information sur le système et de réduire ainsi son entropie. Mais ces mesures se font au prix d'une dépense d'énergie et d'une transformation d'une partie de celle-ci en chaleur si bien qu'elles augmentent l'entropie d'une quantité exactement égale à la quantité d'information obtenue. L'entropie du système pris dans son ensemble reste ainsi constante.

Mais, quoi qu'il en soit, la réalisation pratique d'une telle expérience se heurterait à un autre phénomène : le *chaos déterministe* dont la théorie s'est imposée dans les années 1970 mais dont les bases avaient été posées par Henri Poincaré dès la fin du 19<sup>e</sup> siècle. Si les démons de Loschmidt commettent une erreur, si infime soit-elle, dans la définition de la vitesse avec laquelle ils renvoient chaque particule, cette erreur va croître exponentiellement avec le temps si bien que les trajectoires des particules vont rapidement différer de leurs trajectoires passées et la goutte d'encre ne sera finalement jamais reconstituée.

Ce qui s'avère impossible avec des particules devient réalisable avec des ondes car celles-ci présentent une moindre sensibilité aux erreurs commises dans la définition de l'onde retournée temporellement. C'est ce qu'a montré Mathias Fink à partir du début des années 90 grâce à son invention des Miroirs à Retournement Temporel, instruments capables de renvoyer un champ d'onde dans une chronologie inverse pour l'obliger à revivre sa vie passée et à venir reconverger vers la source qui lui a donné naissance. Un tel Miroir permet de fabriquer, non pas exactement la solution retournée temporellement,  $p(-t)$ , mais plutôt  $p(T-t)$ , où  $T$  est le temps nécessaire à enregistrer le signal issu de la source.  $p(T-t)$  respecte bien le principe fondamental de causalité :

l'onde retournée temporellement n'est renvoyée qu'une fois terminée la réception de l'onde produite par la source initiale. L'onde  $p(T-t)$  revit bien les étapes antérieures de sa vie passée mais dans le futur. Il faut bien distinguer flèche du temps et écoulement du temps. Les équations sont réversibles au niveau microscopique ; c'est en ce sens que l'on dit qu'il n'y a pas de flèche du temps. Mais le temps s'écoule : les causes précèdent toujours les effets.

Les Miroirs à Retournement Temporel ont trouvé de nombreuses applications que nous aurons l'occasion d'évoquer en cours.

Sur un plan fondamental, l'invariance par renversement du temps de l'équation d'onde explique pourquoi la nature a sélectionné les ondes pour faire des images : à toute onde divergente, on peut associer une onde convergente que l'on peut fabriquer au moyen d'une lentille.

# Chapitre 2

## Acoustique des fluides

### 2.1 Génération d'une onde acoustique dans un fluide

Si un objet est déplacé lentement dans un fluide, ce dernier va s'écouler autour de lui. Si l'objet est déplacé rapidement,

- il produit un *déplacement* local du fluide, ce qui conduit à une variation locale de *densité* ;
- Le changement de densité correspond aussi à un changement de *pression*.

Prenons l'exemple d'une membrane de haut-parleur dont le déplacement produit une compression de la couche d'air adjacente. Cette situation est instable : les forces de pression jouent le rôle d'une force de rappel qui tendent à détendre le fluide. Autrement dit,

- l'inégalité de *pression* provoque le déplacement de la tranche d'air voisine qui est alors comprimée à son tour.

L'onde se propage ainsi de proche en proche par une suite de compressions et dilatations successives. A ce stade, la description n'est pas complète.

En effet, on peut s'attendre à ce qu'une différence de densité des molécules soit comblée par un déplacement de ces dernières des zones où elles sont plus concentrées vers des zones où elles le sont moins. Afin qu'un son puisse

se propager, il faut que les régions où pression et densité sont modifiées soient beaucoup plus grandes que le libre parcours moyen des molécules. Ceci conduit à définir une particule fluide comme un volume suffisamment grand pour contenir un très grand nombre de molécules mais suffisamment petit pour que les variables acoustiques (déplacement, vitesse, excès de pression, excès de densité) y soient constantes.

Il nous faut à présent écrire les équations qui décrivent chacune de ces trois étapes :

- l'équation de conservation de la masse
- l'équation d'état du fluide
- l'équation de conservation de la quantité de mouvement ou « équation d'Euler »

## 2.2 Equations de conservation et équation d'état

### 2.2.1 Conservation de la masse

On considère un volume de fluide dont la position dans l'espace est fixée. Le flux de masse à travers la surface englobant ce volume est donné par  $\int \int \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \vec{n} dS$  où  $\vec{n}$  désigne le vecteur normal à la surface au point  $\vec{r}$ . En l'absence de source, la conservation de la masse impose que ce flux soit égal à la variation de masse dans ce même volume, soit  $-\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_V \rho(\vec{r}, t) d\tau$ .

On a donc :

$$\int \int \int_V \left( \text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau = 0$$

Ce qui conduit à l'expression locale de la conservation de la masse :

$$\text{div}[\rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)] + \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

En présence d'une source, un terme  $K(\vec{r}, t)$  doit être ajouté dans le membre de droite. Homogène à une masse volumique par unité de temps, il représente la variation de volume d'une surface fermée telle que celle produite dans une pièce fermée par un haut-parleur monté sur baffle.

## 2.2.2 Equation d'état du fluide

L'équation d'état relie les fluctuations de densité aux fluctuations de pression. Si, lors de la propagation d'une onde acoustique, le travail réalisé sur une particule fluide ne sert qu'à augmenter son énergie interne, la variation de la pression en fonction de la densité est adiabatique (isentropique) : aucun flux de chaleur n'est généré d'une particule fluide à l'autre.

Dans le cas d'un gaz parfait, l'équation d'état s'écrit alors  $P(1/\rho)^\gamma = cste$  où  $P$  désigne la pression,  $\rho$  la masse volumique et  $\gamma$  le coefficient de Laplace défini comme le rapport des chaleurs spécifiques à respectivement pression et volume constants.

Pour un fluide quelconque, on peut écrire :

$$P = P_0 + (\rho - \rho_0) \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{s, \rho_0} + \frac{(\rho - \rho_0)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right|_{s, \rho_0} + \dots$$

ou encore

$$p = A \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) + \frac{B}{2} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)^2 + \dots \quad (2.2)$$

avec :

$p = P - P_0$  la surpression, appelée *pression acoustique*.

$$A = \rho_0 \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{s, \rho_0}$$

$$B = \rho_0^2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{s, \rho_0}$$

Les indices  $s$  et  $\rho_0$  indiquent que les dérivées partielles sont calculées à entropie constante en  $\rho_0$ .

En notant que  $\left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{s, \rho_0}$  est homogène au carré d'une vitesse, on écrira

$$\left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{s, \rho_0} = c^2 .$$

Pour des dilatations suffisamment faibles, on a alors  $p = A \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)$  où  $A = \rho_0 c^2 = 1/\chi_s$  est le module de compressibilité adiabatique, inverse du coefficient de compressibilité adiabatique.



Pour un gaz parfait adiabatique, on vérifie aisément que  $B/A = \gamma - 1$ . On a donc  $B/A \approx 0.7$  pour un gaz monoatomique et  $B/A \approx 0.4$  pour un gaz diatomique.

Pour l'eau, on a  $B/A \approx 5$ .

### 2.2.3 Equation d'Euler

Dans le cas général, une partie de l'énergie acoustique va être dissipée au cours de la propagation. Pour écrire l'équation d'état, nous avons négligé un premier phénomène qui concourt à cette dissipation : la conduction thermique. Nous allons aussi négliger les pertes visqueuses associées au mouvement relatif de deux portions adjacentes de fluide. Pour cela, il faut supposer que les temps de relaxation caractéristiques de ces deux phénomènes sont bien plus petits que la période acoustique.

On va appliquer la relation fondamentale de la dynamique à une particule fluide que l'on suit dans son mouvement. Son volume  $dV = dxdydz$  contient une masse  $dm = \rho dV$ .

La composante suivant l'axe des  $x$  des forces de pression s'exerçant sur la particule fluide s'écrit :

$$df_x = dydz \left[ P - \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} dV$$

On peut écrire des expressions analogues pour les deux autres axes, si bien que la force s'exerçant sur la particule fluide s'écrit :

$$\vec{df} = -\overrightarrow{grad}P dV$$

Pour déterminer l'accélération de la particule, il faut tenir compte du fait que sa vitesse, dite *particulaire*, dépend à la fois du temps et de la position dans le fluide.

Ainsi, l'accélération se calcule comme la dérivée particulaire  $\frac{D\vec{v}}{Dt}$  de la vitesse par rapport au temps :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\vec{v}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) - \vec{v}(x, y, z, t)}{dt}$$

$$\text{Or, } \vec{v}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) - \vec{v}(x, y, z, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt$$

avec :

$$\begin{aligned} dx &= v_x dt \\ dy &= v_y dt \\ dz &= v_z dt \end{aligned}$$

On a donc

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial x}v_x + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}v_y + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}v_z$$

Ce que l'on peut encore écrire sous la forme :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

où  $\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  est l'opérateur nabla.

Le terme  $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$  définit l'accélération locale et  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$  l'accélération convective.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit donc finalement :

$$\rho \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}P} \quad (2.3)$$

Si des forces volumiques sont à l'oeuvre, il faut ajouter un terme source,  $F(\vec{r}, t)$ , homogène à une force par unité de volume. C'est ce type de force qui est créé par un objet oscillant, tel qu'une membrane de haut-parleur sans baffle.

## 2.3 Acoustique linéaire

### 2.3.1 Equation d'onde

Dans un premier temps, on va considérer que le passage de l'onde acoustique crée de faibles écarts de pression, densité et vitesse par rapport aux valeurs d'équilibre : on ne va alors conserver que les termes d'ordre 1 dans les trois équations précédentes. Il s'agit de l'approximation de l'acoustique linéaire, approximation dont l'essence sera discutée lorsque nous aborderons la description des effets non linéaires.

En notant  $\rho_a = \rho - \rho_0$  l'excès de densité, l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}(\vec{r}, t)) + \frac{\partial \rho_a(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0$$

L'équation d'état s'écrit au premier ordre  $p = c^2 \rho_a$ . L'équation de conservation de la masse peut ainsi se réécrire :

$$\rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}(\vec{r}, t)) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0$$

Enfin, l'équation d'Euler linéarisée s'écrit :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} p = 0$$

On soustrait alors la dérivée temporelle de l'équation de conservation de la masse à la divergence de l'équation d'Euler pour aboutir à l'équation de propagation :

$$\square p(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{avec} \quad \square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

$\square$  est l'opérateur d'Alembertien.

Il est facile de vérifier que  $\rho_a$  et  $\vec{v}$  sont également solutions de cette équation.

$c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{s, \rho_0}}$  apparaît bien comme la vitesse de phase de l'onde. Pour un gaz adiabatique parfait, la différentiation logarithmique de l'équation d'état conduit à  $c = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}}$ .

A  $0^\circ\text{C}$  et sous une atmosphère, la vitesse du son dans l'air vaut  $c = \sqrt{\frac{1.402 \times 1.013 \times 10^5}{1.293}} \approx 332 \text{ m/s}$ .

Si l'on tient compte des deux types de sources précédemment rencontrées, l'équation de propagation devient :

$$\square p(\vec{r}, t) = s(\vec{r}, t) \quad \text{avec} \quad s(\vec{r}, t) = \operatorname{div}(\vec{F}(\vec{r}, t)) - \frac{\partial K(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (2.5)$$

### 2.3.2 Absorption d'une onde acoustique dans un fluide

Jusqu'à présent, nous n'avons pas pris en compte les mécanismes de dissipation qui peuvent intervenir au cours de la propagation. En particulier, nous avons négligé tout phénomène de conduction thermique, ce qui a conduit à la relation d'état  $p = c^2 \rho_a$  montrant que pression et densité acoustiques sont en phase.

Une approche phénoménologique de l'absorption peut alors consister à introduire un délai entre le changement de pression et le changement de densité, en écrivant pour cela une équation d'état modifiée :

$$p = c^2 \left( \rho_a + \tau \frac{\partial \rho_a}{\partial t} \right)$$

où  $\tau$  est un temps de relaxation.

En partant d'un milieu à l'équilibre, l'augmentation soudaine de la pression à l'instant  $t = 0$  conduit ainsi à une évolution de la densité selon la loi  $\rho_a = \frac{p}{c^2} (1 - e^{-t/\tau})$ .

La combinaison de l'équation d'état modifiée avec les deux équations de conservation conduit à la nouvelle équation de propagation :

$$\left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \rho_a = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho_a}{\partial t^2}$$

La dérivée temporelle d'ordre 1 conduit à la brisure de symétrie par renversement du temps de l'équation d'onde.

Si on considère à présent les propriétés de viscosité du fluide, l'équation d'Euler doit être remplacée par l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = - \overrightarrow{grad} p + \left( \frac{4}{3} \eta + \eta_B \right) \overrightarrow{grad} (\text{div} \vec{v}) - \overrightarrow{\eta rot rot} \vec{v}$$

La viscosité de volume,  $\eta_B$ , est une mesure de la perte d'énergie d'un fluide soumis à des compressions et des dilatations. Elle n'est non nulle que pour des fluides dans lesquels l'énergie cinétique de translation des molécules n'est pas la seule responsable des transferts d'énergie. Dans les gammes de fréquences considérées, la viscosité de cisaillement,  $\eta$ , est indépendante de la fréquence et ne dépend que de la température.

Le terme en rotationnel est important en hydrodynamique ainsi qu'en acoustique non-linéaire. Il représente les pertes d'énergie liées aux phénomènes de turbulence et de vorticité. Il peut généralement être négligé dans le cas de l'acoustique linéaire.

Dans l'approximation de l'acoustique linéaire, une forme simplifiée de l'équation précédente peut donc s'écrire :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad} p + \frac{4}{3} \eta \overrightarrow{grad}(\operatorname{div} \vec{v})$$

La combinaison de cette équation avec l'équation de conservation de la masse et l'équation d'état isentropique conduit finalement à l'équation :

$$(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}) \Delta \rho_a = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho_a}{\partial t^2}$$

où le temps de relaxation est donné par  $\tau = \frac{4}{3} \frac{\eta}{\rho_0 c^2}$ .

Dans la suite, nous négligerons les différents mécanismes de dissipation.

### 2.3.3 Potentiel des vitesses

Le rotationnel d'un gradient étant nul, on peut déduire de l'équation d'Euler linéarisée que  $\overrightarrow{rot} \vec{v} = 0$ . On retrouve là un résultat important : l'excitation acoustique d'un fluide sans perte n'induit aucun mouvement rotationnel. C'est une conséquence du théorème de Kelvin. Autrement dit, la vitesse peut s'exprimer comme un gradient, soit  $\vec{v} = \overrightarrow{grad} \phi$  où  $\phi(\vec{r}, t)$  définit le potentiel des vitesses.

Il est facile de vérifier que le potentiel des vitesses obéit aussi à l'équation de propagation.

### 2.3.4 Ondes planes monochromatiques

L'opérateur d'alembertien  $L = \square$  est linéaire et invariant par translation dans le temps. En supposant que l'opérateur inverse existe, on le note  $G = L^{-1}$ . On peut alors écrire  $G[s(\vec{r}, t)] = \phi(\vec{r}, t)$ .

Les ondes monochromatiques, c'est-à-dire dépendant sinusoïdalement du temps, sont fonctions propres de l'opérateur  $G$  comme cela a été rappelé dans le chapitre introductif. Autrement dit, si la source est monochromatique, soit de la forme  $s(\vec{r}, t) = \Re [S(\vec{r}) \exp i\omega t]$ , le champ d'onde qu'elle produit est également monochromatique, c'est-à-dire de la forme  $\phi(\vec{r}, t) = \Re [\Phi(\vec{r}) \exp i\omega t]$  et  $\Phi(\vec{r})$  obéit à l'équation d'Helmholtz :

$$\Delta\Phi(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2}\Phi(\vec{r}) = S(\vec{r}) \quad (2.6)$$

En dehors des sources, l'équation de propagation s'écrit :

$$\Delta\Phi(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2}\Phi(\vec{r}) = 0$$

Les ondes planes, c'est-à-dire du type  $\Phi(\vec{r}) = \Phi_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$ , où  $\Phi_0$  est une amplitude complexe, sont solutions cette équation ;  $k$  vérifie la *relation de dispersion* :

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

La phase d'une telle onde est constante dans les plans définis par  $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{cste}$ . Le vecteur  $\vec{k} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{k} \cdot \vec{r})$  est un vecteur perpendiculaire aux plans équiphases et définit *le vecteur d'onde*.

La vitesse se déduit du potentiel des vitesses :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = i\Phi_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{k}$$

La direction de propagation est donc parallèle aux vibrations élémentaires des particules fluides autour de leur position d'équilibre : l'onde est dite *longitudinale*.

Si on prend l'axe des  $z$  comme direction de propagation, la solution générale de l'équation d'ondes sans source s'écrit donc finalement  $\phi(z, t) = A \exp i(\omega t - kz) + B \exp i(\omega t + kz)$  qui représente la somme d'une onde se propageant de la gauche vers la droite et d'une onde se propageant de la droite vers la gauche.

### 2.3.5 Impédance acoustique

Considérons la propagation d'une onde plane progressive selon l'axe des  $z$  dans le sens des  $z$  positifs, soit  $\phi(z, t) = A \exp i(\omega t - kz)$ .

Le module de la vitesse peut alors se déduire du potentiel des vitesses par

$$v(z, t) = \frac{\partial\phi(z, t)}{\partial z} = -ik\phi(z, t)$$

De même, la pression acoustique peut se déduire du potentiel des vitesses à partir de l'équation d'Euler

$$\rho_0 \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p(z, t)}{\partial z}$$

On a donc

$$p(z, t) = -\rho_0 \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial t} = -i\omega \rho_0 \phi(z, t)$$

De façon générale, le rapport entre pression et vitesse particulière définit *l'impédance spécifique*.

Dans le cas présent, c'est-à-dire pour une onde plane monochromatique progressive, elle vaut donc :

$$Z = \rho_0 c \tag{2.7}$$

Il s'agit ici d'une quantité réelle indépendante de la fréquence. Elle définit *l'impédance caractéristique du milieu*. Elle est l'analogue de l'impédance d'un milieu diélectrique  $\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ .

Dans le cas général, l'impédance spécifique est un complexe. C'est vrai en particulier pour une onde sphérique comme nous le verrons ultérieurement.

Voici quelques valeurs usuelles de l'impédance caractéristique à une température de 20°C et sous pression atmosphérique. L'unité est le rayleigh :  $1 \text{ rayl} = 1 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$

Milieu	Impédance caractéristique
eau	$Z_{\text{eau}} = 1.4810^6 \text{ rayl}$
air	$Z_{\text{air}} = 415 \text{ rayl}$
solide	$Z_{\text{solide}} \approx 30.10^6 \text{ rayl}$

### 2.3.6 Densité d'énergie acoustique

L'énergie transportée par une onde acoustique prend deux formes : l'énergie cinétique des particules en mouvement et l'énergie potentielle du fluide compressé.

Le terme  $\rho_a v^2/2$  est une quantité du troisième ordre. Si on se limite aux termes du second ordre, l'énergie cinétique par unité de volume s'écrit donc :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho_0 v^2$$

Lorsque l'onde acoustique se propage, une particule fluide acquiert une énergie potentielle égale au travail des forces de pression qui la font passer d'un volume d'équilibre  $V_0$  à un volume  $V$  :

$$W = - \int_{V_0}^V p dV$$

La conservation de la masse impose  $\rho V = \rho_0 V_0$ , d'où l'on tire au même ordre d'approximation que pour le calcul de l'énergie cinétique :

$$dV = -\frac{\rho_0 V_0}{\rho^2 c^2} dp \approx -\frac{V_0}{\rho_0 c^2} dp$$

Ainsi, l'énergie potentielle par unité de volume s'écrit :

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{p^2}{\rho_0 c^2}$$

La densité d'énergie acoustique par unité de volume s'écrit donc finalement :

$$E_{ac} = \frac{1}{2} \frac{p^2}{\rho_0 c^2} + \frac{1}{2} \rho_0 v^2 \quad (2.8)$$

Pour une onde monochromatique de période  $T$ , on définit la densité d'énergie moyenne :

$$\langle E_{ac} \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E_{ac} dt.$$

Pour une onde plane de la forme  $p = \bar{p} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ , en tenant compte de la relation  $p = \rho_0 c v$ , on obtient donc :

$$\langle E_{ac} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\bar{p}^2}{\rho_0 c^2}$$

### 2.3.7 Intensité acoustique

La densité d'énergie acoustique obéit à une loi de conservation du type

$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial E_{ac}}{\partial t}$$

où  $\vec{j}$  est le vecteur de Poynting acoustique ou vecteur *intensité acoustique instantanée*. Il représente la puissance acoustique transportée par l'onde dans sa direction par unité de surface ( $W/m^2$ ).



Cette équation est l'expression locale du fait que le taux de variation d'énergie dans un volume  $V$  est égal au flux de puissance à travers la surface  $S$  englobant ce volume.

On peut calculer :

$$\frac{\partial E_{ac}}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0 c^2} p \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -p \nabla \vec{v} - \vec{v} \nabla p = -div(p\vec{v})$$

On a donc :

$$\vec{j} = p\vec{v} \quad (2.9)$$

Pour une onde plane monochromatique de la forme  $p = \bar{p} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ , l'intensité acoustique dans la direction de propagation de l'onde se définit comme la moyenne sur une période du module du vecteur de Poynting :

$$I_{ac} = \frac{\bar{p}^2}{2\rho_0 c} = c \langle E_{ac} \rangle \quad (2.10)$$

L'énergie acoustique est donc transportée à la vitesse du son.

A 1000Hz, la densité de puissance au seuil de l'audition est de  $10^{-12} W/m^2$ , ce qui correspond à un déplacement acoustique de l'ordre du dixième d'angströms.

### 2.3.8 Relations de passage à une interface

Une onde acoustique plane monochromatique tombe sur une interface coïncidant avec le plan  $(O, x, y)$  séparant deux milieux d'impédance respectives  $Z_1 = \rho_1 c_1$  et  $Z_2 = \rho_2 c_2$ . Elle est de la forme  $p_1(x, y, z, t) = A \exp i(\omega_1 t - k_{1x}x - k_{1y}y - k_{1z}z)$  où  $A$  est l'amplitude,  $\omega_1$  la pulsation et  $\vec{k} (k_{1x}, k_{1y}, k_{1z})$  le vecteur d'onde qui fait un angle  $\theta_1$  par rapport à la normale (Fig. 2.1). Les pressions acoustiques associées aux ondes réfléchies et transmises s'écrivent respectivement  $p'_1(x, y, z, t) = B \exp i(\omega'_1 t - k'_{1x}x - k'_{1y}y + k'_{1z}z)$  et  $p_2(x, y, z, t) = C \exp i(\omega_2 t - k_{2x}x - k_{2y}y - k_{2z}z)$ .

Comment les propriétés des ondes réfléchiées et transmises sont-elles reliées à celle de l'onde incidente ? On peut répondre à cette question en utilisant le principe de Fermat. On peut aussi exploiter les propriétés des systèmes linéaires rappelées dans le chapitre introductif.

L'opérateur d'alembertien est linéaire. De plus, le système étudié est invariant par translation selon le temps, d'une part, et selon l'axe des  $x$  et l'axe

des  $y$ , d'autre part. Par conséquent, le facteur de phase  $\exp i(\omega_1 t - k_{1x}x - k_{1y}y)$  est fonction propre de ce système. La fréquence et la projection du vecteur d'onde dans le plan de l'interface sont donc conservées, soit :

$$\begin{aligned}\omega'_1 &= \omega_1 \\ k'_{1x} &= k_{1x} \\ k'_{1y} &= k_{1y}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \omega_1 \\ k_{2x} &= k_{1x} \\ k_{2y} &= k_{1y}\end{aligned}$$

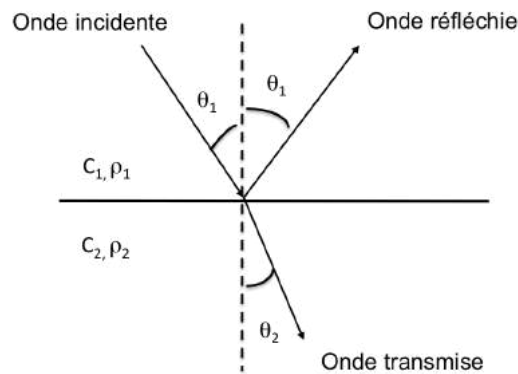


FIGURE 2.1 – Transmission et réflexion d'une onde plane à l'interface entre deux milieux homogènes.

On a donc pour l'onde réfléchie :

$$\sqrt{k_{1x}^2 + k_{1y}^2} = k_1 \cdot \sin\theta_1 = \frac{\omega_1}{c_1} \cdot \sin\theta_1 = \sqrt{k_{1x}'^2 + k_{1y}'^2} = \frac{\omega_1}{c_1} \cdot \sin\theta_1'$$

soit

$$\theta_1 = \theta_1'$$

et pour l'onde transmise :

$$\sqrt{k_{1x}^2 + k_{1y}^2} = k_1 \cdot \sin\theta_1 = \frac{\omega_1}{c_1} \cdot \sin\theta_1 = \sqrt{k_{2x}^2 + k_{2y}^2} = \frac{\omega_2}{c_2} \cdot \sin\theta_2$$

soit

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2} \quad (2.11)$$

On retrouve ainsi les expressions de la loi de Snell-Descartes.

L'équilibre mécanique de l'interface impose l'égalité des pressions de part et d'autre de l'interface en  $z = 0$ , condition qui conduit à la relation :

$$1 + r_{1 \rightarrow 2} = t_{1 \rightarrow 2}$$

où  $r_{1 \rightarrow 2} = B/A$  définit le coefficient de réflexion en pression et  $t_{1 \rightarrow 2} = C/A$  le coefficient de transmission.

La non pénétration d'un des fluides dans l'autre impose l'égalité des vitesses normales de part et d'autre de l'interface en  $z = 0$ , condition qui s'écrit :

$$\frac{\cos\theta_1}{Z_1}(1 - r_{1 \rightarrow 2}) = \frac{\cos\theta_2}{Z_2}t_{1 \rightarrow 2}$$

La combinaison de ces deux conditions conduit aux formules donnant les coefficients de réflexion et de transmission de la pression en fonction des impédances des deux milieux.

$$r_{1 \rightarrow 2} = \frac{Z_2 \cos\theta_1 - Z_1 \cos\theta_2}{Z_2 \cos\theta_1 + Z_1 \cos\theta_2} \quad (2.12)$$

$$t_{1 \rightarrow 2} = \frac{2Z_2 \cos\theta_1}{Z_2 \cos\theta_1 + Z_1 \cos\theta_2} \quad (2.13)$$

L'invariance par renversement du temps peut être exploitée pour trouver des relations entre coefficients de réflexion et de transmission des deux côtés de l'interface. Si une onde plane d'amplitude unité arrive sur l'interface, une onde est réfléchie avec une amplitude  $r_{1 \rightarrow 2}$  et une onde est transmise avec un coefficient de transmission  $t_{1 \rightarrow 2}$ . Cela signifie que si on réemet une onde d'amplitude  $t_{1 \rightarrow 2}$  le long du chemin de l'onde transmise et une onde d'amplitude  $r_{1 \rightarrow 2}$  le long du chemin de l'onde réfléchie, on doit obtenir une onde d'amplitude unité le long du chemin de l'onde incidente et il ne doit pas exister d'onde réfléchie dans le milieu 2 (Fig. 2.2)

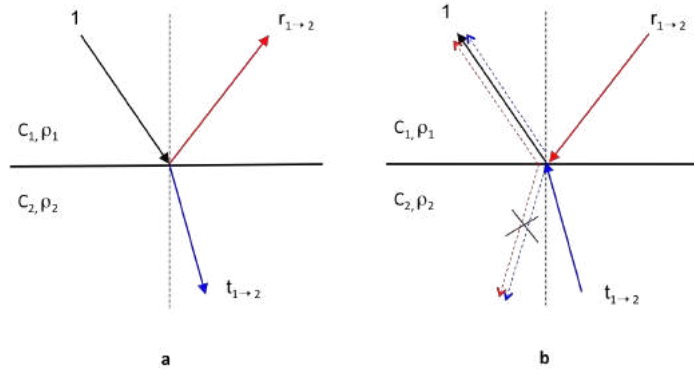


FIGURE 2.2 – (a) transmission et réflexion à l’interface entre deux milieux. (b) retournement temporel de la situation précédente : il n’y a pas d’onde réfléchie dans le milieu 2

Ces deux conditions conduisent aux *relations de Stokes* :

$$r_{1 \rightarrow 2}^2 + t_{1 \rightarrow 2} \cdot t_{2 \rightarrow 1} = 1 \quad (2.14)$$

et

$$t_{1 \rightarrow 2} \cdot (r_{1 \rightarrow 2} + r_{2 \rightarrow 1}) = 0$$

Comme  $t_{1 \rightarrow 2}$  n’est pas nul, alors l’équation ci-dessus donne :

$$r_{2 \rightarrow 1} = -r_{1 \rightarrow 2} \quad (2.15)$$

### 2.3.9 Ondes sphériques

Lorsqu’un émetteur a une taille inférieure à la longueur d’onde qu’il émet, il peut être modélisé comme une source ponctuelle productrice d’une onde sphérique. En outre, nous verrons au chapitre 3 que la connaissance de l’onde émise par une source ponctuelle permet de déterminer celle qui est produite par une source de géométrie quelconque au moyen d’un simple produit de convolution. Les solutions sphériques de l’équation d’Helmholtz revêtent donc une importance particulière.

Pour une onde sphérique, le potentiel des vitesses ne dépend que de la distance radiale à la source. L’équation de propagation peut donc s’écrire

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\phi(r, t))}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(r, t)}{\partial t^2} = 0$$

soit :

$$\frac{\partial(r\phi(r,t))}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(r\phi(r,t))}{\partial t^2} = 0$$

La solution générale s'écrit :

$$\phi(r,t) = \frac{1}{r} (\phi_1(t - r/c) + \phi_2(t + r/c))$$

Cette formule n'est valable qu'en dehors de l'origine. Le premier terme représente une onde divergente qui part de l'origine et rayonne dans toutes les directions de l'espace, le second une onde qui provient de toutes les directions de l'espace depuis l'infini et converge vers l'origine. En milieu homogène infini, on ne conserve que la première.

L'équation avec source s'écrit :

$$\square\phi(r,t) = \frac{K(\vec{r},t)}{\rho_0}$$

où  $K(\vec{r},t)$  représente la densité de masse injectée par unité de temps par une source ponctuelle placée à l'origine des coordonnées.

On peut écrire

$$s(\vec{r},t) = \frac{K(\vec{r},t)}{\rho_0} = \Omega\delta(\vec{r})a(t)$$

où  $a(t)$  est le taux d'injection de masse et où  $\Omega$  est homogène à un volume.

Nous cherchons maintenant à exprimer  $\phi(r,t)$  en fonction du terme source. A cette fin, on calcule le flux de masse à travers une sphère de rayon  $r$  entourant la source. La vitesse particulière a une symétrie radiale et est donc colinéaire au vecteur normal à la sphère. Donc :

$$\begin{aligned} \int \int \rho_0 \vec{v}(r,t) \vec{n} dS &= -\rho_0 \int \int r^2 \sin\theta d\theta d\phi \left[ \frac{1}{r^2} \phi_1(t - r/c) + \frac{1}{rc} \phi_1'(t - r/c) \right] \\ &= -4\pi\rho_0 \left[ \phi_1(t - r/c) + \frac{r}{c} \phi_1'(t - r/c) \right] \end{aligned}$$

Puis, on applique la conservation de la masse en faisant tendre le rayon de la sphère vers 0.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int \int \rho_0 \vec{v}(r,t) \vec{n} dS = -4\pi\rho_0 \phi_1(t) = \int \int \int K(\vec{r},t) d^3\vec{r}$$

On a donc :  $\phi_1(t) = -\Omega \frac{a(t)}{4\pi}$ , si bien que la solution cherchée s'écrit finalement :  $\phi(r, t) = -\Omega \frac{a(t-r/c)}{4\pi r}$ . Dans la suite, on prendra  $\Omega = 1$ .

Dans le cas où le taux d'injection est un Dirac, la solution recherchée est donc donnée par :

$$\phi(r, t) = -\frac{\delta(t - r/c)}{4\pi r}$$

La fonction  $G(r, t) = -\frac{\delta(t-r/c)}{4\pi r}$  est appelée *fonction de Green spatio-temporelle*.

Dans le cas où le taux d'injection est une fonction sinusoidale du temps, le potentiel des vitesses prend donc la forme :

$$\phi(r, t) = -\frac{\exp i\omega(t - r/c)}{4\pi r} = -\frac{\exp i(\omega t - kr)}{4\pi r}$$

La fonction  $G(r, \omega) = -\frac{\exp(-ikr)}{4\pi r}$  est appelée *fonction de Green monochromatique*.

La vitesse particulière est alors donnée par :

$$\vec{v}(r, t) = \overrightarrow{\text{grad}}\phi(\vec{r}, t) = \frac{\exp i\omega(t - r/c)}{4\pi r} \left( \frac{1}{r} + \frac{i\omega}{c} \right) \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \overline{v(r)} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \exp i\omega t$$

et la pression :

$$p(r, t) = -\rho_0 \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial t} = \rho_0 i\omega \frac{\exp i\omega(t - r/c)}{4\pi r} = \overline{p(r)} \exp i\omega t$$

On peut alors calculer l'impédance par :

$$Z = \frac{\overline{p(r)}}{\overline{v(r)}} = \rho_0 c \frac{ikr}{1 + ikr}$$

Lorsque  $kr \rightarrow \infty$ , on retrouve l'expression de l'impédance pour une onde plane.

Pour une source de taille caractéristique  $a \ll \lambda$ , la vitesse doit être très grande pour créer des pressions modérées : une source petite par rapport à la longueur d'onde ne peut pas émettre de fortes intensités.

### 2.3.10 Equation de propagation en milieu hétérogène

Jusqu'à présent, nous avons supposé le milieu de propagation homogène. Lorsque la célérité  $c(\vec{r})$  et la masse volumique  $\rho_0(\vec{r})$  ne sont plus indépendantes de la position, la combinaison des équations de conservation et de l'équation d'état conduit, pour un milieu sans source, à l'équation de propagation :

$$\rho_0(\vec{r}) \operatorname{div} \left( \frac{\overrightarrow{\operatorname{grad}}(p(\vec{r}, t))}{\rho_0(\vec{r})} \right) = \frac{1}{c(\vec{r})^2} \frac{\partial^2 p(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (2.16)$$

## 2.4 Acoustique non linéaire

### 2.4.1 L'équation de Kuznetsov

Au paragraphe 2.3.1, nous avons négligé les termes non linéaires des équations de conservation et de l'équation d'état pour établir l'équation de propagation. L'argument était que le passage de l'onde acoustique créait de faibles écarts de pression, densité et vitesse par rapport aux valeurs d'équilibre. Il nous faut maintenant préciser le domaine de validité de cette approximation.

Dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, le terme convectif peut se réécrire :

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\nabla}(v^2) - \vec{v} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$$

Comme nous l'avons déjà rappelé, le rotationnel de la vitesse est nul pour un fluide parfait. Faire l'approximation de l'acoustique linéaire dans cette équation revient donc à négliger le terme  $\frac{1}{2} \vec{\nabla}(v^2)$  devant le terme  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ . Pour une onde plane monochromatique, la vitesse est de la forme  $\vec{v} = \vec{v}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ . Le rapport de l'amplitude du terme d'ordre 2 sur celle du terme d'ordre 1 dans l'équation d'Euler vaut donc :

$$\frac{kv_0^2}{\omega v_0} = \frac{v_0}{c_0}$$

où  $c_0$  est la célérité de l'onde en régime linéaire.

Pour un milieu fluide sans perte, la condition s'écrit donc  $M_{ac} \ll 1$  où  $M_{ac} = \frac{v_0}{c_0}$  définit le nombre de Mach acoustique. Dans la suite, on va définir un infiniment petit  $\epsilon = \frac{v_0}{c_0}$  et on va écrire les variables acoustiques comme des développements en puissances de  $\epsilon$ , soit :

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \epsilon \rho_1 + \epsilon^2 \rho_2 + \dots \\ P &= P_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \dots \\ \vec{v} &= \vec{0} + \epsilon \vec{v}_1 + \epsilon^2 \vec{v}_2 + \dots\end{aligned}$$

A l'ordre 1 en nombre de Mach, les équations de base de l'acoustique s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}_1) = 0$$

$$p_1 = c_0^2 \rho_1$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}(p_1) = 0$$

A l'ordre 2, ces mêmes équations s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \vec{v}_1 + \rho_0 \vec{v}_2) = 0$$

$$\rho_1 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}(p_2) + \frac{\rho_0}{2} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(v_1^2) = \vec{0}$$

$$p_2 = c_0^2 \rho_2 + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{B}{2A} \rho_1^2$$

On réorganise alors les deux premières équations en plaçant les termes d'ordre 2 dans le premier membre et les termes d'ordre 1 dans le second.

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}_2) = -\operatorname{div}(\rho_1 \vec{v}_1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}(p_2) = -\rho_1 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} - \frac{\rho_0}{2} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(v_1^2)$$

On obtient donc pour les termes d'ordre 2 les mêmes équations que pour les termes d'ordre 1 mais avec des termes sources qui viennent des termes d'ordre 1. On peut alors utiliser la troisième équation pour exprimer  $p_2$  en fonction de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  dans la deuxième équation.

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} + c_0^2 \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\rho_2) = -\rho_1 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} - \frac{\rho_0}{2} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(v_1^2) - \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{B}{2A} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\rho_1^2)$$

Enfin, la combinaison des deux équations conduit à :



$$\square \vec{v}_2 = \frac{\partial}{\partial t} \left( \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{v_1^2}{c_0^2} + \frac{1}{\rho_0^2} \frac{B}{2A} \rho_1^2 \right) \right)$$

ou en introduisant le potentiel des vitesses :

$$\square \phi_2 = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \left( \overrightarrow{\text{grad}}(\phi_1) \right)^2 + \frac{1}{c_0^2} \frac{B}{2A} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right)^2 \right)$$

En écrivant :

$$\phi = \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2 + \dots$$

on aboutit finalement à l'équation :

$$\square \phi = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \left( \overrightarrow{\text{grad}}(\phi) \right)^2 + \frac{1}{c_0^2} \frac{B}{2A} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right)$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation de Kuznetsov. Le terme source met en évidence les deux origines de non-linéarité : la convection et la non-linéarité thermodynamique.

## 2.4.2 L'équation de Westervelt

Dans le cas d'une onde plane, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \phi_1 = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$$

En utilisant la relation  $p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$ , on aboutit alors à l'équation de Westervelt :

$$\square p = -\frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2}$$

avec  $\beta = 1 + B/2A$

On peut aussi l'écrire en distinguant les termes d'ordre 1 et d'ordre 2 :

$$\square p_2 = -\frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p_1^2}{\partial t^2}$$

Si la source oscille à la pulsation  $\omega$ , il en va de même pour le champ  $p_1$ . En revanche, le champ  $p_2$  oscille aussi à la fréquence  $2\omega$  et contient en outre une composante de fréquence nulle à l'origine de la pression de radiation acoustique.

### 2.4.3 L'équation de Burgers

Physiquement, la production d'harmoniques peut être comprise en analysant la propagation d'une onde plane. L'équation de Westervelt peut se factoriser sous la forme :

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\beta}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\beta}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial}{\partial t} \right) p = 0$$

Les deux opérateurs gouvernent la propagation dans les directions des  $z$  positifs et négatifs respectivement.

Considérons par exemple le cas d'une onde se propageant dans la direction des  $z$  positifs.

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\beta}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial}{\partial t} \right) p = 0$$

Ce qui peut encore s'écrire pour un nombre de Mach suffisamment petit :

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c_0 + \beta v} \frac{\partial}{\partial t} \right) p = 0$$

L'action de la non linéarité peut donc être simplement modélisée comme une variation continue de la célérité du milieu  $c(z, t) = c_0 + \beta v(z, t)$ . La célérité dépend de la vitesse particulaire (et donc de la surpression) : elle est supersonique dans la phase de compression et subsonique dans la phase de détente. La déformation d'une onde plane sinusoïdale (Fig. 2.3) se traduit dans le domaine spectral par la génération d'harmoniques aux fréquences multiples de la fréquence du signal primaire.

### 2.4.4 Calcul de la distance de choc

Les surpressions se propageant plus vite que les dépressions, des discontinuités apparaissent dans la forme d'onde pour une distance appelée *distance de choc*.

Pour calculer cette distance, considérons une onde plane sinusoïdale  $v(z, t) = v_0 \sin(kz - \omega t)$ . Le choc va commencer à apparaître à l'endroit de la pente la plus forte. Considérons donc deux points voisins A et B, distants de  $\Delta z$ , comme indiqué sur la Fig. 2.4. A  $t = 0$ , ils présentent une différence de célérité :

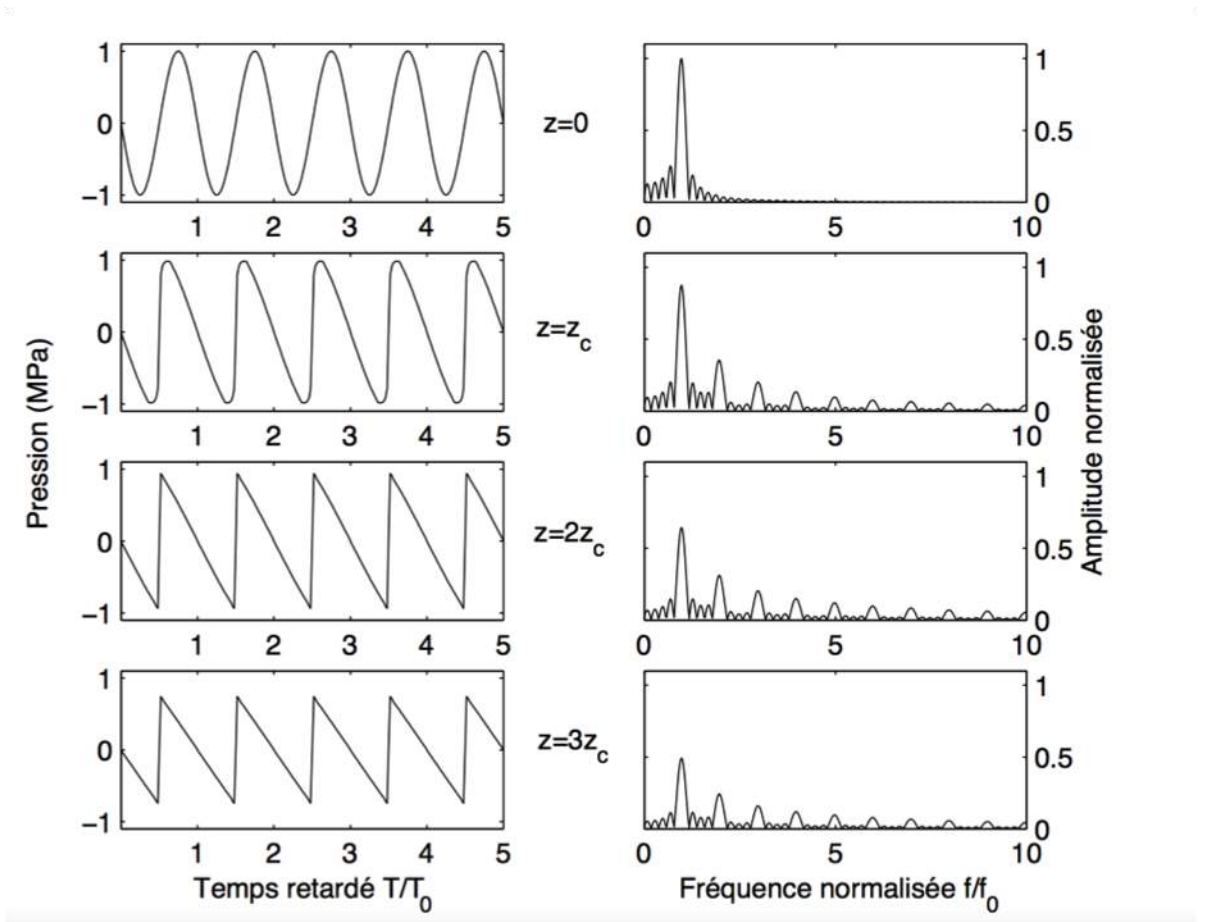


FIGURE 2.3 – Déformation d'une sinusoïde en un signal en dent de scie (D'après : X. Jacob, thèse de l'Université Paris Diderot, 2005)

$$\Delta c = \beta \Delta v \approx \beta v_0 k \Delta z$$

Le temps  $t_c$  nécessaire pour que le point A rattrape le point B est donné par :

$$t_c k \beta v_0 \Delta z = \Delta z$$

On en déduit la distance de choc  $L_c = c_0 t_c$  :

$$L_c = \frac{1}{k \beta M} \quad (2.17)$$

où  $M = \frac{v_0}{c_0}$  est le nombre de Mach acoustique.

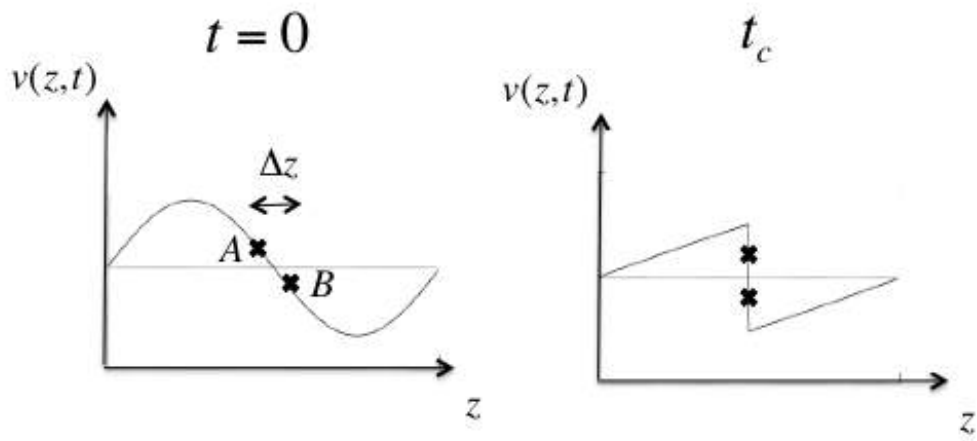


FIGURE 2.4 – *Calcul du temps de choc*

# Chapitre 3

## Théorie de la diffraction

### 3.1 Théorème d'unicité

Dans le chapitre précédent, nous avons établi l'équation d'ondes en régime linéaire pour un milieu non dissipatif :

$$\square\phi(\vec{r}, t) = s(\vec{r}, t)$$

Il s'agit d'une équation différentielle du deuxième ordre dont la solution  $\phi(\vec{r}, t)$  dépend de quatre dimensions (3 dimensions d'espace et une dimension temporelle).

Si on connaît une solution  $\phi_p$  particulière de cette équation et une solution  $\phi_0$  de l'équation homogène, alors  $\phi_p + \phi_0$  est aussi solution de cette équation. Nous nous posons alors la question suivante : quelles conditions faut-il ajouter pour assurer l'unicité de la solution ?

Comme dans tout problème physique décrit par une équation différentielle, il s'agit de définir des conditions aux limites et des conditions initiales appropriées.

On souhaite résoudre l'équation de propagation pour tout point d'un volume  $V$  englobé par une surface  $S$ . Le vecteur normal à  $S$  et orienté vers l'extérieur est noté  $\vec{n}$ .

#### 1. Conditions sur le temps

La dérivée seconde par rapport au temps impose de connaître deux valeurs du champ. Il suffit par exemple de connaître  $\phi(\vec{r}, t_{initial})$  et

$\phi(\vec{r}, t_{final})$  partout dans  $V$ . Mais on ne connaît généralement pas  $\phi(\vec{r}, t_{final})$ .  
 On préfère donc plutôt utiliser les conditions :  $\phi(\vec{r}, t_{initial})$  et  $\frac{\partial\phi(\vec{r}, t_{initial})}{\partial t}$ .

## 2. Conditions aux limites sur l'espace

- Conditions de Dirichlet

On appelle condition de Dirichlet une condition du type :

$$\forall \vec{r} \in S \text{ et } \forall t, \quad \phi(\vec{r}, t) = g(\vec{r}) \text{ où } g(\vec{r}) \text{ est connue.}$$

Si  $g(\vec{r}) = 0$ , on parle de condition de Dirichlet homogène. C'est la condition que l'on peut écrire pour la propagation d'une onde en espace libre car, dans cette situation, le potentiel est nul à l'infini.

- Conditions de Neumann

On appelle condition de Neuman une condition du type :

$$\forall \vec{r} \in S, \quad \frac{\partial\phi(\vec{r}, t)}{\partial n} = \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{n} = h(\vec{r}) \text{ où } h(\vec{r}) \text{ est connue.}$$

Si  $h(\vec{r}) = 0$ , on parle de condition de Neuman homogène. Par exemple, si le fluide est dans une cavité dont les parois sont constituées d'un matériau rigide, alors on peut considérer que la vitesse normale des particules constituant les parois est nulle : on est alors dans les conditions de Neumann homogènes.

Soient  $\phi_1$  et  $\phi_2$  deux solutions de l'équation d'onde :

$$\square\phi_1 = s \quad \text{et} \quad \square\phi_2 = s$$

Alors, la différence  $\phi = \phi_2 - \phi_1$  est solution de l'équation :

$$\square\phi = 0$$

Si  $\phi_1$  et  $\phi_2$  obéissent à des conditions de Dirichlet (respectivement Neumann), alors  $\phi$  obéit à une condition de Dirichlet homogène (respectivement de Neumann homogène).

Par ailleurs, les conditions temporelles s'écrivent :

$$\phi(\vec{r}, t_{initial}) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi(\vec{r}, t_{initial})}{\partial t} = 0$$

La densité d'énergie s'écrit :

$$E_{ac} = \frac{\rho_0}{2} v^2 + \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} p^2$$

et vérifie l'équation de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial E_{ac}}{\partial t} = -\text{div}(\vec{j})$$

Si on intègre sur le volume  $V$ , on trouve donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V E_{ac} d^3\vec{r} = - \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

La densité d'énergie s'exprime en fonction du potentiel  $\phi$  :

$$E_{ac} = \frac{\rho_0}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{\rho_0}{2c_0^2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2$$

et

$$\vec{j} = -\rho_0 \frac{\partial\phi}{\partial t} \vec{\nabla}\phi$$

L'équation de conservation de l'énergie se réécrit donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left( \frac{\rho_0}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{\rho_0}{2c_0^2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 \right) d^3\vec{r} = \iint_S \rho_0 \frac{\partial\phi}{\partial t} \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Si on est dans les conditions de Dirichlet, alors  $\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$  sur la surface car  $\phi = 0$  sur la surface. Si on est dans les conditions de Neuman, alors  $\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{n} = 0$  sur la surface. Dans les deux cas :

$$\iint_S \rho_0 \frac{\partial\phi}{\partial t} \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{n} \cdot dS = 0$$

On en déduit que :

$$\iiint_V \left( \frac{\rho_0}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{\rho_0}{2c_0^2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 \right) d^3\vec{r} = cste$$

En particulier,

$$\iiint_V \left( \frac{\rho_0}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{\rho_0}{2c_0^2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 \right) d^3\vec{r} = \iiint_V \left( \frac{\rho_0}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{\rho_0}{2c_0^2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 \right) d^3\vec{r} \Big|_{t=t_{initial}}$$

Or, à  $t = t_{initial}$ , on a vu précédemment que  $\phi(\vec{r}, t_{initial}) = 0$  et que  $\frac{\partial\phi(\vec{r}, t_{initial})}{\partial t} = 0$ , d'où l'on déduit :

$$\iiint_V \left( \frac{\rho_0}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{\rho_0}{2c_0^2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 \right) d^3\vec{r} = 0$$

Comme  $\frac{\rho_0}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 > 0$  et  $\frac{\rho_0}{2c_0^2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 > 0$ , alors

$$\frac{\rho_0}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\rho_0}{2c_0^2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 = 0$$

et ce  $\forall \vec{r}$  et  $\forall t$ .

On en déduit :  $\forall \vec{r}$  et  $\forall t$ ,  $\phi(\vec{r}, t) = 0$ ,

soit

$\forall \vec{r}$  et  $\forall t$ ,  $\phi_1(\vec{r}, t) = \phi_2(\vec{r}, t)$

On a ainsi démontré l'unicité de la solution.

## 3.2 La fonction de Green spatio-temporelle

Dans l'équation de propagation  $\square\phi(\vec{r}, t) = s(\vec{r}, t)$ , il est possible de décomposer la fonction source  $s(\vec{r}, t)$  sur la base des Dirac  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0)$  de telle sorte que :

$$\square\phi(\vec{r}, t) = s(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \iiint_V s(\vec{r}_0, t_0) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0) d^3\vec{r}_0 dt_0$$

Cette décomposition permet de représenter la source comme la superposition de sources ponctuelles élémentaires situées en  $\vec{r}_0$  et émettant un signal infiniment bref à l'instant  $t_0$ .

Le champ créé par une telle source définit l'opposée de la *fonction de Green spatio-temporelle* de l'équation d'ondes ; cette dernière satisfait l'équation :

$$\square G(\vec{r}, t | \vec{r}_0, t_0) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0)$$



Le principe de superposition permet alors d'écrire :

$$\phi(\vec{r}, t) = - \iiint G(\vec{r}, t | \vec{r}_0, t_0) s(\vec{r}_0, t_0) d^3 \vec{r}_0 dt_0$$

L'équation de propagation est invariante par translation dans le temps. Si le milieu de propagation est homogène, l'équation de propagation est aussi invariante par translation dans les trois directions d'espace. On a donc  $G(\vec{r}, t | \vec{r}_0, t_0) = G_0(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0)$  et l'intégrale précédente se transforme alors en un produit de convolution :

$$\phi(\vec{r}, t) = -G_0(\vec{r}, t) \otimes^{\vec{r}} \otimes^t s(\vec{r}, t)$$

Afin de retrouver les sources à partir de la connaissance du champ à trois dimensions, il faut inverser l'équation de convolution :

$$s(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}, t) \otimes^{\vec{r}} \otimes^t G_0^{-1}(\vec{r}, t)$$

$G_0^{-1}(\vec{r}, t)$  est l'inverse de convolution de la fonction de Green, i.e. vérifiant  $G_0^{-1}(\vec{r}, t) \otimes^{\vec{r}} \otimes^t G_0(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r}) \delta(t)$ .

En fait, nous verrons par la suite qu'il n'est pas nécessaire de connaître le champ à trois dimensions pour remonter à la source, mais uniquement en tout point d'une surface entourant la source : c'est le théorème intégral de la diffraction.

### 3.3 La fonction de Green monochromatique

La fonction de Green spatio-temporelle peut être décomposée sur ses fréquences temporelles :

$$G_0(\vec{r}, t) = \int G_0(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega$$

où  $G_0(\vec{r}, \omega)$  définit la fonction de Green monochromatique.

L'injection de cette formule dans l'équation de propagation conduit à l'équation d'Helmholtz :

$$\left[ \Delta + k^2 \right] G_0(\vec{r}, \omega) = -\delta(\vec{r}) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

Pour  $r > 0$ , l'équation devient :

$$[\Delta + k^2] G_0(\vec{r}, \omega) = 0$$

Dans le premier chapitre, nous avons montré que cette équation admet deux solutions à symétrie sphérique :

$$G_0(r, \omega) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad \text{ou} \quad G_0(r, \omega) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}$$

La solution convergente est non causale. On ne conserve que la solution dite *retardée* :

$$G_0(r, \omega) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}$$

Cette solution vérifie bien la condition de Dirichlet homogène à l'infini :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} G_0(r, \omega) = 0$$

Il s'agit maintenant de montrer que cette solution reste valable en  $r = 0$ . Pour cela, on intègre l'équation sur une sphère de rayon  $\epsilon$  que l'on fait tendre vers zéro et l'on teste l'égalité :

$$\iiint_{V(\epsilon)} [\Delta + k^2] \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} d^3\vec{r} \stackrel{?}{=} - \iiint_{V(\epsilon)} \delta(\vec{r}) d^3\vec{r} = -1$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iiint_{V(\epsilon)} [\Delta + k^2] \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} d^3\vec{r} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underbrace{\left( \iiint_{V(\epsilon)} \Delta \left( \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \right) d^3\vec{r} \right)}_{I(\epsilon)} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underbrace{\left( \iiint_{V(\epsilon)} k^2 \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} d^3\vec{r} \right)}_{J(\epsilon)}$$

Comme  $\Delta = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}})$ , on peut écrire :

$$I(\epsilon) = \iint_{S(\epsilon)} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \right) dS = 4\pi\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \right)_{\epsilon}$$

$$I(\epsilon) = -ik\epsilon e^{-ik\epsilon} - e^{-ik\epsilon}$$

Ainsi :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\epsilon) = -1$$

Le deuxième terme se calcule par :

$$J(\epsilon) = k^2 \int_0^\epsilon \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} 4\pi r^2 dr$$

$$J(\epsilon) = ike^{-ik\epsilon} \epsilon + [e^{-ik\epsilon} - 1]$$

Ainsi :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} J(\epsilon) = 0$$

On a donc bien

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \iiint_{V(\epsilon)} [\Delta + k^2] \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} d\vec{r} \right) = -1$$

ce qui signifie que :

$$\forall \vec{r} \quad G_0(r, \omega) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}$$

### 3.4 Théorème de réciprocité

Soit deux sources situées respectivement en  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  et créant les fonctions de Green  $G_0(\vec{r}|\vec{r}_1, \omega)$  et  $G_0(\vec{r}|\vec{r}_2, \omega)$ . En notant que

$$\operatorname{div}(A \overrightarrow{\operatorname{grad}} B - B \overrightarrow{\operatorname{grad}} A) = A \Delta B - B \Delta A$$

on peut écrire

$$\iiint_V [A(\vec{r}) \Delta B(\vec{r}) - B(\vec{r}) \Delta A(\vec{r})] d\tau = \iint_S [A(\vec{r}) \overrightarrow{\operatorname{grad}} B(\vec{r}) - B(\vec{r}) \overrightarrow{\operatorname{grad}} A(\vec{r})] d\vec{S}$$

ou encore

$$\iiint_V [A(\vec{r}) \Delta B(\vec{r}) - B(\vec{r}) \Delta A(\vec{r})] d\tau = \iint_S \left[ A(\vec{r}) \frac{\partial B(\vec{r})}{\partial n} - B(\vec{r}) \frac{\partial A(\vec{r})}{\partial n} \right] dS$$

C'est l'expression du théorème de Green.

En appliquant ce théorème avec  $A(\vec{r}) = G_0(\vec{r}|\vec{r}_1, \omega)$  et  $B(\vec{r}) = G_0(\vec{r}|\vec{r}_2, \omega)$ , on obtient la relation :

$$\begin{aligned} & \iiint_V [G_0(\vec{r}|\vec{r}_1, \omega) \Delta G_0(\vec{r}|\vec{r}_2, \omega) - G_0(\vec{r}|\vec{r}_2, \omega) \Delta G_0(\vec{r}|\vec{r}_1, \omega)] d\tau = \\ & \iint_S \left[ G_0(\vec{r}|\vec{r}_1, \omega) \frac{\partial G_0(\vec{r}|\vec{r}_2, \omega)}{\partial n} - G_0(\vec{r}|\vec{r}_2, \omega) \frac{\partial G_0(\vec{r}|\vec{r}_1, \omega)}{\partial n} \right] dS \end{aligned}$$

Que l'on considère des conditions de Dirichlet homogène sur la surface d'intégration, c'est-à-dire

$$\forall \vec{r} \in S, G_0(\vec{r}|\vec{r}_1, \omega) = G_0(\vec{r}|\vec{r}_2, \omega) = 0$$

ou bien des conditions de Neumann homogènes, c'est-à-dire :

$$\forall \vec{r} \in S, \frac{\partial G_0(\vec{r}|\vec{r}_1, \omega)}{\partial n} = \frac{\partial G_0(\vec{r}|\vec{r}_2, \omega)}{\partial n} = 0$$

l'intégrale de surface est toujours nulle.

On a donc :

$$\iiint_V [G_0(\vec{r}|\vec{r}_1, \omega) \Delta G_0(\vec{r}|\vec{r}_2, \omega) - G_0(\vec{r}|\vec{r}_2, \omega) \Delta G_0(\vec{r}|\vec{r}_1, \omega)] d\tau = 0$$

ce qui prouve que l'opérateur Laplacien est auto-adjoint.

On a donc :

$$\begin{aligned} & \iiint_V [G_0(\vec{r}|\vec{r}_1, \omega) k^2 G_0(\vec{r}|\vec{r}_2, \omega) - G_0(\vec{r}|\vec{r}_2, \omega) k^2 G_0(\vec{r}|\vec{r}_1, \omega)] d\tau \\ & + \iiint_V [G_0(\vec{r}|\vec{r}_1, \omega) \delta(\vec{r} - \vec{r}_2) - G_0(\vec{r}|\vec{r}_2, \omega) \delta(\vec{r} - \vec{r}_1)] d\tau = 0 \end{aligned}$$

soit finalement :

$$G_0(\vec{r}_2|\vec{r}_1, \omega) = G_0(\vec{r}_1|\vec{r}_2, \omega)$$

Nous avons ainsi démontré le théorème de réciprocité en milieu homogène.

Ce théorème reste en fait valable dans un milieu hétérogène quelconque. Pour le démontrer, il faut appliquer la relation :

$$\operatorname{div} \left( A \frac{\overrightarrow{\operatorname{grad}} B}{C} - B \frac{\overrightarrow{\operatorname{grad}} A}{C} \right) = A \operatorname{div} \left( \frac{\overrightarrow{\operatorname{grad}} B}{C} \right) - B \operatorname{div} \left( \frac{\overrightarrow{\operatorname{grad}} A}{C} \right)$$

avec  $A(\vec{r}) = G_0(\vec{r}|\vec{r}_1, \omega)$ ,  $B(\vec{r}) = G_0(\vec{r}|\vec{r}_2, \omega)$  et  $C(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$ .

## 3.5 Théorème intégral de la diffraction en régime monochromatique

### 3.5.1 Démonstration du théorème

On considère une source monochromatique, créant un potentiel monochromatique  $\phi(\vec{r}, t) = \operatorname{Re}[\Phi(\vec{r}) e^{-i\omega t}]$ , et un volume  $V$  homogène ne contenant pas cette source.

En un point  $\vec{r}$  de ce volume, l'équation de propagation nous donne donc

$$\Delta \Phi(\vec{r}) + k^2 \Phi(\vec{r}) = 0$$

d'où l'on tire que

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{\Delta \Phi(\vec{r})}{k^2}$$

Ainsi,  $\Phi(\vec{r})$  dépend de son Laplacien, c'est-à-dire du potentiel dans son voisinage, qui dépend lui-même de son voisinage, etc. Il semble donc que la valeur du potentiel en un point du volume dépende de la valeur de ce potentiel en tous les points du volume.

Cependant, Huygens, en observant les ondulations provoquées par des pierres jetées dans l'eau, a pressenti qu'il devait être possible de déterminer le champ en n'importe quel point d'un volume en imaginant que chaque point de sa surface émettait une petite onde sphérique dite *ondelette de Huygens*.

Le théorème intégral de la diffraction est l'expression rigoureuse de cette idée : la connaissance sur une surface  $S$  fermée du potentiel et de sa dérivée par rapport à la normale à cette même surface est suffisante pour déterminer le potentiel en tous les points du volume délimité par la surface  $S$ .

Nous allons d'abord établir ce théorème en régime monochromatique et montrer comment il permet de calculer le champ créé par n'importe quel type d'ouverture. A la fin du chapitre, nous en donnerons l'expression dans le domaine temporel.

Le théorème intégral de la diffraction que nous allons démontrer est valable aussi bien en milieu homogène qu'hétérogène.

Soit un point  $\vec{r}_0$  dans un volume  $V$  délimité par une surface  $S$  ne contenant pas de source (Fig. 3.1).

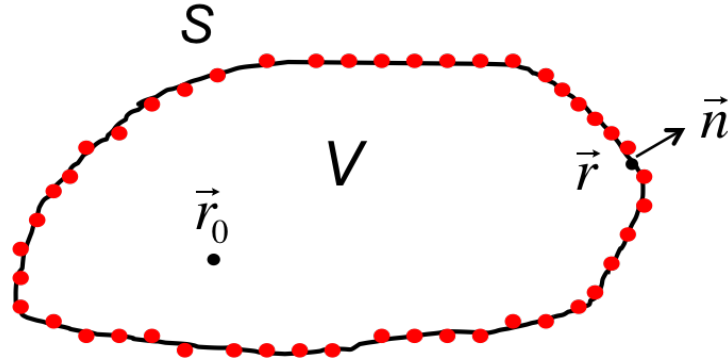


FIGURE 3.1 – Théorème intégral de la diffraction

On peut écrire que

$$\Phi(\vec{r}_0) = \iiint_V \Phi(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) d^3\vec{r}$$

On va alors chercher à écrire :  $\Phi(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$  comme une divergence. En multipliant l'équation décrivant la propagation d'un point  $\vec{r}$  de la surface au point  $\vec{r}_0$  par le potentiel  $\Phi(\vec{r})$ , on peut écrire :

$$\Phi(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = -\Phi(\vec{r}) \Delta G(\vec{r}|\vec{r}_0, \omega) - k^2 \Phi(\vec{r}) G(\vec{r}|\vec{r}_0, \omega)$$

où  $G(\vec{r}|\vec{r}_0, \omega)$  définit la fonction de Green monochromatique.

On peut réécrire l'équation précédente sous la forme :

$$\Phi(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = -\Phi(\vec{r}) \Delta G(\vec{r}|\vec{r}_0, \omega) + G(\vec{r}|\vec{r}_0, \omega) \Delta \Phi(\vec{r})$$

ou encore :

$$\Phi(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \text{div} \left( G(\vec{r}|\vec{r}_0, \omega) \overrightarrow{\text{grad}}(\Phi(\vec{r})) - \Phi(\vec{r}) \overrightarrow{\text{grad}}(G(\vec{r}|\vec{r}_0, \omega)) \right)$$

Ainsi, en intégrant sur le volume :

$$\Phi(\vec{r}_0) = \iint_S [G(\vec{r}|\vec{r}_0, \omega) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\Phi(\vec{r})) - \Phi(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(G(\vec{r}|\vec{r}_0, \omega))] d\vec{S}$$

$$\text{Or, } d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}, \text{ et } \overrightarrow{\text{grad}} \cdot \vec{n} = \frac{\partial}{\partial n}.$$

Nous obtenons donc finalement l'expression mathématique du *théorème intégral de la diffraction* :

$$\Phi(\vec{r}_0) = \iint_S \left[ \frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial n} G(\vec{r}|\vec{r}_0, \omega) - \Phi(\vec{r}) \frac{\partial G(\vec{r}|\vec{r}_0, \omega)}{\partial n} \right] dS \quad (3.1)$$

En espace libre, la formule devient :

$$\Phi(\vec{r}_0) = \iint_S \left[ \frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial n} G_0(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) - \Phi(\vec{r}) \frac{\partial G_0(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega)}{\partial n} \right] dS$$

Or,

$$\frac{\partial G_0(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega)}{\partial n} = \underbrace{|\vec{\nabla} G_0(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega)|}_{\frac{\partial G_0(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega)}{\partial |\vec{r} - \vec{r}_0|}} \cos(\theta)$$

où  $\theta$  est l'angle entre la normale à la surface et le vecteur  $\vec{r} - \vec{r}_0$  :

$$\frac{\partial G_0(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega)}{\partial n} = \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}_0|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_0|} \left[ ik - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right] \cos(\theta)$$

Dans le cas où  $k |\vec{r} - \vec{r}_0| \gg 1$ , le terme en  $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$  est négligeable. Cette situation est celle où la distance entre  $\vec{r}_0$  et la surface est très supérieure à la longueur d'onde.

Alors :

$$\frac{\partial G_0(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega)}{\partial n} \approx ik \cdot \cos(\theta) \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}_0|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_0|} = ik \cdot \cos(\theta) G_0(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega)$$

Le théorème de la diffraction s'écrit donc alors :

$$\Phi(\vec{r}_0) \approx \iint_S \left[ \underbrace{\frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial n} \cdot \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}_0|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_0|}}_{\text{ondelette de Huygens}} - \underbrace{ik \cdot \cos(\theta) \Phi(\vec{r}) \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}_0|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_0|}}_{\text{source dipolaire}} \right] dS \quad (3.2)$$

Ainsi, le potentiel en  $\vec{r}_0$  peut être vu comme la somme d'une infinité d'ondes issues de la surface. Chaque point émet deux types d'ondes :

- une onde sphérique pondérée par  $\frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial n}$  : il s'agit d'une *ondelette de Huygens* ;
- une *onde dipolaire* pondérée par  $\Phi(\vec{r})$  et déphasée de  $\frac{\pi}{2}$  par rapport à l'ondelette de Huygens.

L'intuition de Huygens n'était donc que partiellement juste car, si chaque point de la surface semble bien émettre une ondelette sphérique, elle émet aussi une onde dipolaire.

### 3.5.2 Intégration sur un plan et condition de Sommerfeld

En pratique, le champ et sa dérivée normale ne sont généralement pas connus sur une surface fermée entourant le point d'observation. Souvent, on ne connaît que le champ sur un plan  $\Pi$ . C'est par exemple la situation rencontrée en optique lorsqu'une onde plane monochromatique arrive sur un écran opaque percé d'une ouverture. Connaissant le champ incident sur le plan, on voudrait alors en déduire le champ derrière l'ouverture.

Afin d'appliquer le théorème de la diffraction, l'idée est alors de construire une surface fermée en ajoutant à l'ouverture diffractante une portion de sphère  $S_R$  de centre  $\vec{r}_0$  et de rayon  $R$  que l'on fait tendre vers l'infini.

Pour pouvoir limiter l'intégrale au plan  $\Pi$ , il suffit de prouver que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{S_R} \left[ \frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial n} G(\vec{r}|\vec{r}_0, \omega) - \Phi(\vec{r}) \frac{\partial G(\vec{r}|\vec{r}_0, \omega)}{\partial n} \right] dS = 0$$

En prenant pour  $G(\vec{r}|\vec{r}_0, \omega)$  la fonction de Green de l'espace libre et en faisant tendre le rayon  $R$  vers l'infini, on peut écrire la condition :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int \int_{S_R} G_0(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) \left[ \frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial n} - ik\Phi(\vec{r}) \right] R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = 0$$

Le module de  $G_0$  varie comme  $\frac{1}{R}$ . Le module de  $RG_0$  ne dépend pas de  $R$



L'équation précédente est donc vérifiée si

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial n} - ik\Phi(\vec{r}) \right) R \right] = 0 \quad (3.3)$$

C'est la *condition de Sommerfeld*.

Cette condition est très souvent vérifiée car tout champ  $\Phi(\vec{r})$  qui rayonne dans l'espace prend la structure d'une onde sphérique à longue distance avec une décroissance du champ en  $\frac{1}{R}$ .

### 3.5.3 Approximation de Kirchhoff

Dans la suite, on va utiliser le théorème intégral de la diffraction pour prévoir le champ rayonné par une ouverture diffractante ou par un émetteur de taille fini. Lorsqu'on considère la diffraction par une ouverture ménagée dans un plan opaque, ce dernier est un milieu physique différent du milieu de propagation. Afin de définir la transmittance de cette ouverture, on est donc conduit à définir les plans  $\Pi^+$  (en  $z = 0^+$ ) et  $\Pi^-$  (en  $z = 0^-$ ) de part et d'autre du plan  $\Pi$  (en  $z = 0$ ). Ces deux plans appartiennent au milieu de propagation : on peut donc y appliquer l'équation d'ondes en milieu homogène.

En supposant que le plan  $\Pi$  coïncide avec le plan  $oxy$ , on peut définir sa transmittance  $t(x, y)$  de la façon suivante :

$$\underbrace{\Phi(x, y, 0^+)}_{\text{sur le plan } \Pi^+} = t(x, y) \underbrace{\Phi(x, y, 0^-)}_{\text{sur le plan } \Pi^-}$$

Par exemple, dans le cas d'une ouverture circulaire centrée en  $(0,0)$  et de rayon  $a$ , la transmittance s'écrit :

$$t(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On appellera  $O$  l'ouverture et  $C$  la surface complémentaire opaque. Afin de simplifier le problème, Kirchhoff a proposé l'approximation suivante :

$$\Phi(\vec{r}) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } C, \text{ au niveau de } \Pi^+$$

Mais, comme l'a montré Poincaré, si ces conditions étaient respectées simultanément, alors le champ serait nul dans tout l'espace. L'approximation de Kirchhoff est inconsistante !

C'est Sommerfeld qui expliqua que  $G_0$  n'était pas la fonction de Green la plus appropriée pour l'application du théorème intégral puisqu'elle impose de connaître à la fois  $\Phi(\vec{r})$  et  $\frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial n}$  sur le plan  $\Pi$ . L'idée est de construire une nouvelle fonction de Green qui s'annule, ou dont la dérivée normale s'annule, sur  $C$ .

Cette nouvelle fonction de Green doit obéir à l'équation

$$\Delta G(\vec{r}|\vec{r}_0, \omega) + k^2 G(\vec{r}|\vec{r}_0, \omega) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

dont la solution générale s'écrit :

$$G(\vec{r}|\vec{r}_0, \omega) = G_0(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) + \chi(\vec{r})$$

où  $\chi(\vec{r})$  est solution de l'équation homogène.

On peut choisir pour  $\chi$  :

$$\chi(\vec{r}) = \pm G_0(\vec{r} - \vec{r}_0', \omega),$$

le point  $\vec{r}_0'$  étant défini comme le symétrique du point  $\vec{r}_0$  par rapport au plan  $\Pi$ . Il est donc hors du volume  $V$  et la fonction  $\chi$  vérifie bien l'équation d'Helmholtz homogène dans tout le volume  $V$ .

On peut alors définir deux nouvelles fonctions de Green :

- $G^+(\vec{r}|\vec{r}_0, \omega) = G_0(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) + G_0(\vec{r} - \vec{r}_0', \omega)$
- $G^-(\vec{r}|\vec{r}_0, \omega) = G_0(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) - G_0(\vec{r} - \vec{r}_0', \omega)$

### 3.5.4 Intégrales de Rayleigh et Rayleigh-Sommerfeld

Si l'on prend la fonction de Green :

$$G^+(\vec{r}|\vec{r}_0, \omega) = G_0(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) + G_0(\vec{r} - \vec{r}_0', \omega)$$

alors

$$\vec{\nabla} G^+(\vec{r}|\vec{r}_0, \omega) \cdot \vec{n} = \vec{\nabla} G_0(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) \cdot \vec{n} + \vec{\nabla} G_0(\vec{r} - \vec{r}_0', \omega) \cdot \vec{n}$$

soit,

$$\vec{\nabla} G^+ (\vec{r}|\vec{r}_0, \omega) \cdot \vec{n} = |\vec{\nabla} G_0 (\vec{r} - \vec{r}_0, \omega)| \cos(\theta) + |\vec{\nabla} G_0 (\vec{r} - \vec{r}_0', \omega)| \cos(\theta')$$

Or  $\theta = \pi - \theta'$  d'où  $\cos(\theta) = -\cos(\theta')$ , ce qui donne

$$\vec{\nabla} G^+ (\vec{r}|\vec{r}_0, \omega) \cdot \vec{n} = [|\vec{\nabla} G_0 (\vec{r} - \vec{r}_0, \omega)| - |\vec{\nabla} G_0 (\vec{r} - \vec{r}_0', \omega)|] \cos(\theta)$$

Enfin, en remarquant que  $|\vec{r} - \vec{r}_0| = |\vec{r} - \vec{r}_0'|$  sur le plan  $\Pi$ , on trouve que

$$\vec{\nabla} G^+ (\vec{r}|\vec{r}_0, \omega) \cdot \vec{n} = \frac{\partial G^+ (\vec{r}|\vec{r}_0, \omega)}{\partial n} = 0 \quad \forall \vec{r} \in \Pi$$

Le théorème intégral de la diffraction conduit alors à la *formule de Rayleigh*

$$\Phi (\vec{r}_0) = \iint_{\Pi} \frac{\partial \Phi (\vec{r})}{\partial n} \underbrace{\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{2\pi |\vec{r} - \vec{r}_0|}}_{\text{onde hémisphérique}} dS \quad (3.4)$$

Cette formule permet de calculer le champ rayonné par un transducteur piézo-électrique modélisé comme une source de vitesse (cf. TD n°2).

Si on choisit plutôt la fonction  $G^-$  définie par :

$$G^- (\vec{r}|\vec{r}_0, \omega) = G_0 (\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) - G_0 (\vec{r} - \vec{r}_0', \omega)$$

on a :

$$G^- (\vec{r}|\vec{r}_0, \omega) = 0 \quad \forall \vec{r} \in \Pi$$

et, pour  $|\vec{r} - \vec{r}_0| \gg \lambda$ , le théorème intégral de la diffraction conduit à la *formule de Rayleigh-Sommerfeld* :

$$\Phi (\vec{r}_0) = \iint_{\Pi} \Phi (\vec{r}) \left[ -ik \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{2\pi |\vec{r} - \vec{r}_0|} \right] \cos (\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) dS \quad (3.5)$$

Cette formule est utilisée en optique pour calculer le rayonnement d'une ouverture diffractante sur laquelle on connaît le champ.

### 3.5.5 Zones de Fresnel

L'approche que nous allons développer peut s'appliquer au cas d'un transducteur piézoélectrique circulaire plan vibrant dans un baffle rigide selon une loi de vitesse  $v_n(\vec{r}, t)$ .

On s'intéresse ici plutôt à une ouverture circulaire diffractante illuminée par un faisceau de lumière cohérente  $\Phi_0 \exp i\vec{k} \cdot \vec{r}$ . On cherche alors à déterminer le potentiel des vitesses sur l'axe  $z$  :  $\Phi(\vec{r}_0) = \Phi(0, 0, z_0)$ .

La formule de Rayleigh-Sommerfeld s'écrit :

$$\Phi(\vec{r}_0) = \iint_{\Pi^+} \Phi(\vec{r}) \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} \cos(\vec{n}, \vec{r}-\vec{r}_0) dS$$

où

$$\Phi(x, y, 0^+) = t(x, y) \Phi(x, y, 0^-) = t(x, y) \Phi_0$$

avec

$$t(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc :

$$\Phi(x, y, 0^+) = \begin{cases} \Phi_0 & \text{au niveau de l'ouverture circulaire } O \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

La formule précédente devient donc :

$$\Phi(\vec{r}_0) = \iint_O \Phi_0 \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} \cos(\vec{n}, \vec{r}-\vec{r}_0) dS$$

On pose  $R = |\vec{r}-\vec{r}_0|$  et  $r = |\vec{r}|$ . L'élément d'intégration s'écrit  $dS = 2\pi r dr$ . On remarque d'une part que  $R^2 = r^2 + z_0^2$  et d'autre part que  $\cos(\vec{n}, \vec{r}-\vec{r}_0) = \frac{z_0}{R}$ . Ainsi, la formule de Rayleigh-Sommerfeld devient

$$\Phi(0, 0, z_0) = \int_{z_0}^{\sqrt{z_0^2+a^2}} \Phi_0 \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikR}}{R} z_0 2\pi dR$$

$$\Phi(0, 0, z_0) = \frac{2\pi\Phi_0 z_0}{i\lambda} \int_{z_0}^{\sqrt{z_0^2+a^2}} \frac{e^{ikR}}{R} dR$$

En définitive, le potentiel est la somme d'une infinité d'ondelettes d'Huygens provenant de cercles de rayon  $r$  et dont la phase varie de  $kz_0$  à  $k\sqrt{z_0^2 + a^2}$  et l'amplitude entre  $\frac{1}{z_0}$  et  $\frac{1}{\sqrt{z_0^2 + a^2}}$ . Dans un diagramme de Fresnel, l'extrémité du vecteur  $\frac{e^{ikR}}{R}$  décrit donc une spirale qui débute en  $\frac{e^{ikz_0}}{z_0}$  et finit en  $\frac{e^{ik\sqrt{z_0^2 + a^2}}}{\sqrt{z_0^2 + a^2}}$ .

L'intégrale peut se calculer par partie :

$$\Phi(0, 0, z_0) = \frac{2\pi\Phi_0 z_0}{i\lambda} \left[ \frac{1}{ik} \left( \frac{e^{ik\sqrt{z_0^2 + a^2}}}{\sqrt{z_0^2 + a^2}} - \frac{e^{ikz_0}}{z_0} \right) + \int_{z_0}^{\sqrt{z_0^2 + a^2}} \frac{e^{ikR}}{ikR^2} dR \right]$$

On obtient une nouvelle intégrale que l'on peut à nouveau intégrer par partie. On obtiendrait alors, d'une part, des termes en  $\frac{1}{k^2 z_0^2}$  et, d'autre part, une intégrale qui pourrait elle-aussi être intégrée par partie et ainsi donner des termes en  $\frac{1}{k^3 z_0^3}$ .

On voit donc que des intégrations par partie successives nous donnent une suite de termes en  $\frac{1}{kz_0}$  de puissance croissante. Or, les conditions d'application de la formule de Rayleigh-Sommerfeld imposent que  $kz_0 \gg 1$ . Ainsi, on a  $\frac{1}{k^2 z_0^2} \ll \frac{1}{kz_0}$ .

En se limitant à l'ordre un, on trouve :

$$\Phi(0, 0, z_0) \approx \underbrace{\Phi_0 e^{ikz_0}}_{\text{onde plane}} - \underbrace{\Phi_0 z_0 \frac{e^{ik\sqrt{z_0^2 + a^2}}}{\sqrt{z_0^2 + a^2}}}_{\text{onde provenant du bord de l'obstacle}}$$

Autrement dit, le champ mesuré au point d'observation résulte de la superposition d'une onde plane et d'une onde provenant des bords de l'obstacle. Notons que lorsque  $a$  tend vers l'infini, on retrouve uniquement l'onde plane incidente.

En certains points de l'axe, le potentiel des vitesses s'annule ; en d'autres points, il est maximum. Pour expliquer ce phénomène, on peut définir une suite de cercles de rayons  $r_n$  tels que d'un rayon  $r_n$  au rayon suivant  $r_{n+1}$  les ondelettes arrivant au point d'observation soient déphasées de  $\pi$ . Le rayon du  $n$ -ième cercle vérifie :

$$k \left( \sqrt{z_0^2 + r_n^2} - z_0 \right) = n\pi$$

Ces cercles peuvent être définis comme l'intersection de la surface de l'ouverture et de sphères centrées en  $z_0$  et de rayons  $R_n = z_0 + n\lambda/2$ .

La couronne circulaire comprise entre les cercles voisins de rayon  $r_n$  et  $r_{n+1}$  est appelée zone de Fresnel. L'intégrale précédente peut alors se décomposer en une somme d'intégrales limitées à une zone de Fresnel :

$$\Phi(0, 0, z_0) = \frac{2\pi\Phi_0 z_0}{i\lambda} \sum_1^N I_n$$

avec

$$I_n = \int_{R_{n-1}}^{R_n} \frac{e^{ikR}}{R} dR$$

Le rayon  $R_n$  variant peu d'une zone de Fresnel à la suivante, on a :

$$I_n \approx \frac{2i}{kR_n} \exp ikz_0 \exp in\pi$$

Les contributions de deux zones de Fresnel consécutives s'annulent. Si le rayon  $a$  et la distance  $z_0$  sont tels que l'ouverture contienne un nombre pair de zones de Fresnel, le champ s'annule au point  $z_0$ . En optique, pour maximiser l'amplitude du champ en un point, on peut utiliser des diapositives sur lesquelles les zones de Fresnel sont alternativement absorbantes et transparentes. C'est ce que l'on appelle un réseau de Soret.

En acoustique, les formules ne sont pas strictement identiques mais le principe est le même : les contributions de deux zones de Fresnel successives s'annulent. Ainsi, avec un haut-parleur dont seule une zone de Fresnel sur deux est mobile, il est possible d'amplifier très fortement le signal émis en un point précis de l'espace.

Pour  $z_0 \gg r_n$ , un développement limité permet de calculer le rayon de la  $n$ -ième zone de Fresnel.

$$\frac{\pi r_n^2}{\lambda z_0} \approx n\pi \quad \text{d'où} \quad r_n \approx \sqrt{n\lambda z_0}$$

On dira que le point  $z_0$  est en champ lointain dès lors que la taille de l'ouverture est plus petite que la première zone de Fresnel, ce qui conduit à la condition  $z_0 > a^2/\lambda$ .

### 3.6 Théorème intégral de la diffraction dans le domaine temporel

L'expression du théorème intégral de la diffraction dans le domaine temporel se déduit de celle obtenue en régime monochromatique par simple transformée de Fourier.

$$\phi(\vec{r}_0, t) = \iint_S \left[ \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial n} \otimes G(\vec{r}|\vec{r}_0, t) - \phi(\vec{r}, t) \otimes \frac{\partial G(\vec{r}|\vec{r}_0, t)}{\partial n} \right] dS \quad (3.6)$$

Si une source est présente dans le volume considéré, l'application du théorème de superposition conduit à :

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}_0, t) = \iint_S \left[ \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial n} \otimes G(\vec{r}|\vec{r}_0, t) - \phi(\vec{r}, t) \otimes \frac{\partial G(\vec{r}|\vec{r}_0, t)}{\partial n} \right] dS \\ - \iiint_V s(\vec{r}, t) \otimes G(\vec{r}|\vec{r}_0, t) dV \end{aligned} \quad (3.7)$$

### 3.7 Du principe d'Huygens au théorème de Fermat

On considère une source ponctuelle située au point  $\vec{r}_s$  et un point d'observation en  $\vec{r}_0$ . Le champ  $\Phi(\vec{r})$  reçu en tout point  $\vec{r}$  dans un plan  $\Pi$  situé sur le trajet de l'onde s'écrit  $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_s|}}{|\vec{r}-\vec{r}_s|}$ . La formule de Rayleigh-Sommerfeld permet alors de calculer le champ reçu en  $\vec{r}_0$  :

$$\Phi(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi i \lambda} \iint_{\Pi} \chi \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_s|}}{|\vec{r}-\vec{r}_s|} \frac{e^{ik|\vec{r}_0-\vec{r}|}}{|\vec{r}_0-\vec{r}|} d^2\vec{r}$$

où  $\chi = \cos(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0)$  est le facteur d'obliquité.

Plus généralement, on peut évaluer le champ produit en  $\vec{r}_0$  par une source ponctuelle située en  $\vec{r}_s$  en appliquant le principe d'Huygens de proche en proche à l'aide d'une succession de plans  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_N$  répartis entre  $\vec{r}_s$  et  $\vec{r}_0$  :

$$\Phi(\vec{r}_0) = \left( \frac{1}{4\pi i \lambda} \right)^N \int_{\Pi_1} \dots \int_{\Pi_N} \chi_1 \dots \chi_N \frac{e^{ik|\vec{r}_1-\vec{r}_s|}}{|\vec{r}_1-\vec{r}_s|} \frac{e^{ik|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|} \dots \frac{e^{ik|\vec{r}_0-\vec{r}_N|}}{|\vec{r}_0-\vec{r}_N|} d^2\vec{r}_1 \dots d^2\vec{r}_N$$

Ce champ s'exprime donc comme une somme de contributions correspondant chacune à un chemin  $\vec{r}_s, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_0$ . La phase d'un tel chemin est  $kL$

où  $L = | \vec{r}_1 - \vec{r}_s | + | \vec{r}_2 - \vec{r}_1 | + \dots + | \vec{r}_0 - \vec{r}_N |$ . Le terme d'amplitude varie peu d'un chemin à l'autre alors que le terme de phase varie beaucoup dès que  $L$  varie de  $\lambda$ . Tous ces chemins interfèrent destructivement sauf au voisinage du chemin de phase stationnaire. Pour un milieu sans obstacle, ce dernier est le segment joignant  $\vec{r}_s$  à  $\vec{r}_0$ .

Ce théorème se généralise au cas d'un milieu inhomogène en introduisant l'indice de réfraction  $n(\vec{r}) = c_0/c(\vec{r})$ . Le facteur de phase relatif à un chemin  $\Gamma$  donné s'écrit alors :

$$\exp [ik(n_1 | \vec{r}_1 - \vec{r}_s | + n_2 | \vec{r}_2 - \vec{r}_1 | + \dots + n_N | \vec{r}_0 - \vec{r}_N |)] = \exp \left[ ik \int_{\Gamma} n(\vec{r}) dl \right]$$

Lorsque  $N \rightarrow \infty$ , seuls contribuent les chemins tels que  $\delta [\int n(\vec{r}) dl] = 0$ , c'est-à-dire les chemins qui sont au voisinage du chemin de phase stationnaire.

C'est l'expression du principe de Fermat.



# Chapitre 4

## Propagation d'ondes et théorie du signal

### 4.1 La diffraction vue comme un filtre spatial

La formule de Rayleigh - Sommerfeld permet de calculer le champ en un point  $x_0, y_0, z_0$  connaissant le champ  $\Phi(x, y, 0)$  en tout point du plan  $\Pi(z = 0)$ .

$$\Phi(\vec{r}_0) = \iint_{\Pi} \Phi(\vec{r}) \left[ \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} \right] \cos(\vec{n}, \vec{r}-\vec{r}_0) dS$$

Cette formule peut s'exprimer comme un produit de convolution :

$$\Phi_{z_0}(\vec{r}_0) = \Phi_{z=0}(\vec{r}) \otimes_x \otimes_y h_{z_0}(\vec{r})|_{x_0, y_0}$$

avec

$$h_z(\vec{r}) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikr}}{r} \cos(\vec{n}, \vec{r})$$

Autrement dit, la diffraction peut s'interpréter comme un filtre spatial linéaire et invariant par translation suivant  $x$  et  $y$ . Les vecteurs  $V(x, y) = e^{i2\pi(f_x x + f_y y)}$  sont donc des invariants de ce filtre, c'est-à-dire qu'ils vérifient :

$$h_{z_0}(x, y) \otimes_x \otimes_y V(x, y) = H_{z_0}(f_x, f_y) V(x, y)$$

où

$$H_{z_0}(f_x, f_y) = \iint h_{z_0}(x, y) e^{-2i\pi(f_x x + f_y y)} dx dy$$

est la fonction de transfert.

Décomposons  $\Phi_{z=0}(x, y)$  sur les invariants du filtre :

$$\Phi_{z=0}(x, y) = \iint \Phi_{z=0}(f_x, f_y) e^{2\pi i(f_x x + f_y y)} df_x df_y$$

On parle de *décomposition en ondes planes*. En effet, la trace d'une onde plane  $e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$  dans le plan  $z = 0$  est  $e^{i(k_x x + k_y y)}$ . Elle correspond donc à la composante de Fourier  $e^{2i\pi(f_x x + f_y y)}$  avec  $k_x = 2\pi f_x$ ,  $k_y = 2\pi f_y$  et  $k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}$ .  $f_x$  et  $f_y$  sont appelées *fréquences spatiales*.

Deux cas sont alors à distinguer :

- Lorsque  $k_x^2 + k_y^2 < \frac{\omega^2}{c^2}$ , soit  $f_x^2 + f_y^2 < \frac{1}{\lambda^2}$ , la composante  $k_z$  du vecteur d'onde est réelle : à ces fréquences spatiales correspondent des ondes  $e^{2\pi i(x f_x + y f_y + z \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - f_x^2 - f_y^2})}$  propagatives suivant  $z > 0$ .
- Lorsque  $f_x^2 + f_y^2 > \frac{1}{\lambda^2}$ , la composante  $k_z$  du vecteur d'onde est purement imaginaire. Les fréquences spatiales correspondantes sont portées par une onde évanescente qui s'écrit :

$$e^{2i\pi(f_x x + f_y y)} e^{-\frac{z}{\delta}} \text{ avec } \delta = \frac{1}{2\pi \sqrt{f_x^2 + f_y^2 - \frac{1}{\lambda^2}}}$$

Finalement,

$$|H_{z_0}(f_x, f_y)| = \begin{cases} 1 & \text{pour } f_x^2 + f_y^2 \leq \frac{1}{\lambda^2} \\ e^{-\frac{z_0}{\delta}} & \text{pour } f_x^2 + f_y^2 > \frac{1}{\lambda^2} \end{cases}$$

La diffraction agit donc comme un filtre spatial passe-bas de fréquence de coupure  $1/\lambda$ , c'est-à-dire un filtre qui élimine les détails plus petits que la longueur d'onde.

## 4.2 Transformée de Fresnel et transformée de Fourier

On considère une onde plane incidente  $\Phi_0 \exp i\vec{k}\vec{r}$  sur un plan  $\Pi$ , placé en  $z = 0$ , défini par sa transmittance  $t(x, y)$ . Si on observe le champ en un point  $\vec{r}_0$  de coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$

$$\Phi(x_0, y_0, z_0) = \left( \frac{\Phi_0}{i\lambda} \right) \iint_{\Pi} t(x, y) \frac{e^{ik\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}} \cos(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) dx dy$$

Si on s'intéresse à des distances d'observation grandes devant la taille de l'ouverture émettrice et à un point d'observation proche de l'axe, on peut écrire  $z_0 \gg (x-x_0)$ ,  $z_0 \gg (y-y_0)$  et  $\cos(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) \approx 1$ . C'est l'*approximation paraxiale*.

Le terme  $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}$  joue un rôle différent dans la phase et l'amplitude du signal.

Pour l'amplitude, on peut écrire :

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2} \approx z_0$$

et pour la phase :

$$\underbrace{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}}_R \approx \underbrace{z_0 + \frac{(x-x_0)^2}{2z_0} + \frac{(y-y_0)^2}{2z_0}}_{\tilde{R}}$$

Afin que l'erreur commise soit négligeable devant  $\pi$ , soit

$$k(R - \tilde{R}) \ll \pi$$

on doit avoir :

$$z_0^3 \gg \frac{1}{4\lambda} [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^2$$

On peut alors écrire :

$$\Phi(x_0, y_0, z_0) = \frac{\Phi_0 e^{ikz_0}}{i\lambda z_0} \iint_{\Pi} t(x, y) e^{i\alpha[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]} dx dy \quad (4.1)$$

en posant  $\alpha = \frac{k}{2z_0}$ .

Cette intégrale définit la *Transformée de Fresnel* de la transmittance.

On y reconnaît un double produit de convolution sur  $x$  et  $y$ .

$$\Phi(x_0, y_0, z_0) = \frac{\Phi_0 e^{ikz_0}}{i\lambda z_0} t(x_0, y_0) \otimes_{x_0} \otimes_{y_0} h(x_0, y_0) \quad (4.2)$$

avec  $h(x, y) = e^{i\alpha[x^2+y^2]}$ .

La Transformée de Fresnel peut donc se définir comme un filtre de réponse impulsionnelle  $h$ .

On peut aussi réécrire l'équation (4.1) sous la forme :

$$\Phi(x_0, y_0, z_0) = e^{i\alpha(x_0^2+y_0^2)} \frac{\Phi_0 e^{ikz_0}}{i\lambda z_0} \iint_{\Pi} t(x, y) e^{i\alpha(x^2+y^2)} e^{-2\pi i(f_x x + f_y y)} dx dy \quad (4.3)$$

avec  $f_x = \alpha x_0/\pi$  et  $f_y = \alpha y_0/\pi$ .

Si la transmittance est de la forme  $t(x, y) = O(x, y)e^{-i\alpha(x^2+y^2)}$ , le champ observé dans le plan situé à la distance  $z_0$  du plan  $\Pi$  est la transformée de Fourier de la fonction d'ouverture  $O(x, y)$ . Nous allons montrer dans le prochain paragraphe que cette transmittance est celle d'une lentille d'ouverture  $O(x, y)$  et de distance focale  $f = z_0$ .

Autre résultat très important : lorsque  $\alpha(x^2+y^2) \ll \pi$ , soit  $z_0 \gg \frac{x^2+y^2}{\lambda}$ , *approximation dite de Fraunhofer*,  $\Phi$  s'exprime comme la transformée de Fourier de la transmittance. C'est le résultat central de l'optique de Fourier : une onde plane en incidence normale sur un objet de transmittance  $t(x, y)$  forme à l'infini sa transformée de Fourier.

### 4.3 La lentille vue comme un filtre adapté spatial

Jusqu'à maintenant, nous avons toujours considéré que les plans  $\Pi^+$  et  $\Pi^-$  étaient très proches l'un de l'autre ; on a donc négligé le déphasage introduit par la propagation entre ces deux plans. Si on tient compte de la distance  $e_0$  qui les sépare, la transmittance doit contenir le terme de phase  $e^{ikne_0}$  où  $n$  est l'indice du milieu compris entre ces deux plans.

Si on déforme les plans de telle sorte que l'épaisseur varie en fonction de la position, la fonction transmittance prend la forme :

$$t(x, y) = e^{ik[e_0 - e(x, y)]} e^{ikne(x, y)} = e^{ike_0} e^{ik(n-1)e(x, y)}$$

Une lentille est un dispositif qui compense le déphasage  $\Delta\phi = kR - kz_0$ , c'est-à-dire qui vérifie la condition :

$$ik(n-1)e(x, y) = -\Delta\phi = -k(R - z_0)$$

Dans la limite où  $z_0 \gg a$ , on a donc :

$$R \approx z_0 + \frac{x^2 + y^2}{2z_0} \quad \text{d'où} \quad \Delta\phi = \frac{k(x^2 + y^2)}{2z_0}$$

L'épaisseur de la lentille doit donc être telle que :

$$e(x, y) = -\frac{x^2 + y^2}{2f(n-1)} \quad \text{où} \quad f = z_0 \quad \text{est la distance focale de la lentille}$$

Si l'on définit la transmittance de la lentille par

$$t_L(x, y) = e^{-i\alpha(x^2 + y^2)} \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{k}{2f}$$

le champ au point d'observation peut alors s'écrire

$$\Phi(x_0, y_0, z_0) = \frac{\Phi_0 e^{ikz_0}}{i\lambda z_0} e^{-i\alpha(x_0^2 + y_0^2)} \otimes \otimes e^{i\alpha(x_0^2 + y_0^2)}$$

Cette forme de la transmittance est aussi celle qui répond à la question suivante : quelle est la forme de  $t(x, y)$  pour obtenir un maximum d'amplitude en  $x_0, y_0, z_0$ . C'est la problématique du *filtrage adapté* en traitement du signal. Pour un filtre de réponse impulsionnelle complexe  $h_{z_0}(x, y) = e^{i\alpha(x^2 + y^2)}$ , la transmittance doit être de la forme  $t(x, y) = e^{-i\alpha(x^2 + y^2)}$ . La fonction  $e^{-i\alpha(x_0^2 + y_0^2)} \otimes \otimes e^{i\alpha(x_0^2 + y_0^2)}$  est en effet un Dirac spatial qui concentre l'énergie sur le point  $\vec{r}_0 : (0, 0, z_0)$ .

Une lentille de focale  $f = z_0$  est donc un filtre adapté spatial.

En réalité, l'ouverture finie de la lentille fait que l'énergie ne se concentre pas exactement en un point mais en une zone entourant ce point. Pour une

lentille d'ouverture  $O(x, y)$ ,  $t(x, y) = O(x, y)e^{-i\alpha(x^2+y^2)}$ . D'après l'équation (4.3), le champ observé dans le plan focal s'exprime alors comme la transformée de Fourier de l'ouverture de la lentille :

$$\Phi_{z=f}(x_0, y_0) = e^{i\alpha(x_0^2+y_0^2)} \frac{\Phi_0 e^{ikz_0}}{i\lambda z_0} TF\{O(x, y)\}_{f_x=\frac{\alpha x_0}{\pi}, f_y=\frac{\alpha y_0}{\pi}}$$

## 4.4 Radar et sonar à compression d'impulsion

La compression d'impulsion est une technique utilisée en radar et sonar pour augmenter le rapport signal sur bruit de la détection tout en conservant une bonne résolution spatiale, c'est-à-dire une bonne capacité à résoudre dans le temps les échos provenant de cibles voisines.

Le principe en est le suivant : on génère un signal dont le support temporel est relativement long afin de maximiser l'énergie émise. Cependant, on module ce signal de telle manière qu'après un filtrage adapté du signal reçu, il soit possible de résoudre les signaux provenant de plusieurs cibles séparées par des distances bien plus courtes que celles définies par la longueur de l'impulsion émise. Le signal émis est de type "chirp", c'est-à-dire que sa représentation analytique est de la forme :

$$e(t) = a(t) \exp i(\omega_0 t + \alpha t^2) \quad \text{avec} \quad a(t) = \text{rect}_T(t)$$

Il s'agit d'un signal de fréquence porteuse  $\omega_0$ , de durée  $T$  et pour lequel la fréquence instantanée  $\omega(t) = \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = \omega_0 + 2\alpha t$  varie linéairement avec le temps. La bande passante de ce signal vaut  $B = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\alpha T}{\pi}$ .

Une cible de coefficient de réflexion  $r$  et située à la distance  $z$  crée un écho :

$$s(t) = r e(t - \tau) = r a(t - \tau) \exp i(\omega_0(t - \tau) + \alpha(t - \tau)^2) \quad \text{avec} \quad \tau = 2z/c$$

Le signal reçu est alors démodulé à la fréquence  $\omega_0$  puis convolué par  $e^{-i\alpha t^2}$  pour créer le signal de durée caractéristique  $\frac{1}{T\alpha}$  :

$$e^{-i\alpha t^2} \otimes r e^{i\alpha(t-\tau)^2} \text{rect}_T(t - \tau) \propto \frac{\sin(\alpha T(t - \tau))}{\alpha(t - \tau)} = r \frac{\sin(\pi B(t - \tau))}{\alpha(t - \tau)}$$

Le taux de compression est alors donné par le rapport entre la durée du signal émis et celle du signal reconstruit, soit  $\frac{T^2\alpha}{\pi} = BT$

# Chapitre 5

## Références bibliographiques

### Ouvrages de référence en acoustique

1. L. E. Kinsler et al., *Fundamentals of acoustics*, John Wiley et Sons, 1982
2. M. F. Hamilton and D. T. Blackstock, *Nonlinear Acoustics*, Academic Press, 1998
3. D. Royer et E. Dieulesaint, *Ondes élastiques dans les solides*, Masson, 1996

### Ouvrages de référence en optique

1. J. W. Goodman, *Fourier Optics*, John Wiley et Sons, 1982
2. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, 2003

### Ouvrages de référence en physique des ondes

1. L. Brillouin, *Wave propagation and group velocity*, Academic Press, 1960
2. F. S. Crawford, *Cours de physique de Berkeley, tome 3 : Ondes*, Dunod, 1999
3. R. Feynman, *Cours de physique de Feynman en 5 tomes*, Dunod, 1999

### Outils mathématiques

1. Elie Belorizky, *Outils mathématiques à l'usage des scientifiques et ingénieurs*, Roberts and Company Publishers, 2004
2. G. Barton, *Elements of Green's Functions and Propagation*, Clarendon Press Oxford, 2005