Bernard PARZYSZ

MUSIQUE & MATHÉMATIQUE

SUIVI DE :

GAMMES NATURELLES

par yves Hellegouarch

"Nonobstant toute l'expérience que je pouvais m'être acquise dans la musique pour l'avoir pratiquée pendant une assez longue suite de temps, ce n'est cependant que par le secours des mathématiques que mes idées se sont débrouillées, et que la lumière y a succédé à une certaine obscurité dont je ne m'apercevais pas auparavant."

Jean-Philippe RAMEAU

AVANT-PROPOS

Cette brochure est une synthèse de plusieurs brochures et articles antérieurs (publiés principalement par l'APMEP, l'IREM de Paris-Sud et les Cahiers pédagogiques), remaniés et complétés.

Elle comporte néanmoins plusieurs parties inédites, ainsi qu'une étude d'Yves Hellegouarch (*) sur les gammes naturelles, qui complète en quelque sorte la première partie, en se plaçant du point de vue le plus général.

On y trouvera également un certain nombre d'"encadrés", destinés (pour la satisfaction des curieux, ou du moins je l'espère) à donner des précisions sur tel point précis, sans nuire à la continuité du développement.

J'ai essayé de présenter les choses de la façon la plus élémentaire possible, en pensant au lecteur qui n'est pas familiarisé avec la théorie musicale (mais celui qui le voudra pourra bien sûr "sauter" les encadrés correspondants).

Bonne lecture !

B.P.

(*) Que je remercie ici pour ses précieux avis.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Les mathématiques sont, la plupart du temps, enseignées hors de toute "réalité", comme si elles se suffisaient à elles-mêmes. On a même l'impression qu'elles sont à peu près sans objet ailleurs qu'en cours de mathématiques (sauf — parfois — en physique). Dans le meilleur des cas, on les considère comme destinées à former un esprit "logique" (rôle autrefois dévolu au latin), et dans le pire, comme un instrument de sélection scolaire (rôle également dévolu autrefois au latin). C'est pourquoi il serait bon de faire ressortir, chaque fois que cela est possible, les applications des mathématiques dans le monde qui nous entoure. En quelque sorte, de les mettre "en situation".

Une telle démarche nous amène alors à aborder d'autres domaines que celui des mathématiques "pures", c'est-à-dire à faire de l'interdisciplinarité. Voilà, le mot est lâché. Il est vrai que l'interdisciplinarité est devenue une des "tartes à la crème" de la pédagogie actuelle. Tout le monde en parle... mais peu la pratiquent, en fin de compte. Je voudrais ici donner un exemple d'une possibilité de coordination entre deux disciplines que l'on a peu l'occasion de faire se rencontrer : les mathématiques et la musique.

Les élèves qui arrivent dans le Second cycle ont eu, de la sixième à la troisième, une heure hebdomadaire de musique (tout au moins théoriquement). Certains sont élèves d'une école de musique, certains possèdent une guitare... Quant aux autres, rares sont ceux qui ne se sentent concernés par aucune espèce de musique (ne vivons-nous pas à l'"ère de l'audio-visuel" ?). Il y a donc là un terrain que l'on peut exploiter du point de vue qui nous occupe ici.

En effet, la musique, en tant qu'art, possède son propre langage, avec ses règles (son vocabulaire, sa syntaxe), et ceci même chez les peuples dits "primitifs" (contrairement à une opinion répandue). Parmi ceux qui se sont frottés de près ou de loin au domaine de la musique, un certain nombre se sont certainement posé des questions du genre :

— Pourquoi y a-t-il sept noms de notes ?

— Pourquoi y a-t-il douze touches par octave sur le clavier du piano, et douze cases par octave sur le manche de la guitare ?

— Pourquoi les dièses se succèdent-ils dans l'ordre FA, DO, SOL, etc., et les bémols dans l'ordre inverse ?

— Pourquoi, en solfège, apprend-on que Sol dièse et La bémol sont deux notes différentes, alors qu'elles correspondent à une même touche du piano, une même case de la guitare, un même doigté de la flûte, ... ? Pourquoi les cases de la guitare sont-elles de plus en plus petites à mesure que l'on "descend" sur le manche ?

— Est-ce la même gamme qui est utilisée dans tous les pays du monde ?

— Etc., etc.

Ces questions, et d'autres encore, peuvent faire l'objet d'une concertation entre le "matheux" et le "musicien",... à condition que l'un et l'autre en aient envie. Car c'est bien là qu'est le problème : la tendance naturelle serait au contraire de se replier sur soi-même, de vivre en autarcie au sein de son établissement. A la rigueur discute-t-on "boulot" avec les collègues de la même discipline, ou de disciplines voisines (maths/physique, géographie/sciences économiques,...) ; mais cela ne va guère plus loin. Et qui pourrait s'en offusquer ? Tout ce qui sort de la "routine" demande un tel effort, une telle somme de travail que beaucoup hésitent, pensant que le jeu n'en vaut pas la chandelle.

Et pourtant... l'expérience montre que ce sont justement ces heures passées dans un climat autre que celui de la classe habituelle, alors que tout le monde, *même les professeurs*, est en situation de recherche et que les maths montrent qu'elles peuvent servir à autre chose qu'à faire des maths, qui marquent durablement les élèves.

Admettons donc que l'on veuille se lancer dans une collaboration maths/musique. Il n'est pas du tout nécessaire que l'enseignant de musique soit bon matheux (quoique les musiciens soient en général des gens qui, sous des dehors parfois "artistes", ont la tête bien faite). Au contraire même : il pourra alors tempérer les "excès" de son collègue. Par contre, il est souhaitable que le professeur de mathématiques ait des notions sur le sujet qu'il veut aborder avec son collègue, sans pour cela être nécessairement musicien lui-même (voir Bibliographie). De toute façon, la concertation entre les deux enseignants permettra de cerner le problème, et de mettre en œuvre une stratégie.

Le tableau de la page 10 indique des possibilités de collaboration entre la musique et les mathématiques (ainsi que la physique : la musique est fondée sur le son, ne l'oublions pas). Il ne prétend pas épuiser le sujet, mais montrer comment chaque discipline peut s'enrichir grâce à l'autre. En l'occurrence, la musique fournit ici le "terrain", et les mathématiques l'"outil".

La musique n'apparaît plus alors comme un édifice tout construit, immuable ("C'est comme ça, et pas autrement"). Au contraire, les phénomènes musicaux deviennent "compréhensibles" : on voit par exemple se succéder, dans cette approche historico-mathématique, les lentes métamorphoses de la gamme, qui n'a que depuis peu atteint cette (ultime ?) "perfection" (meilleur rapport qualité/complexité). On aborde ici la musique par la base : en recommençant les expériences des Grecs sur la division d'une corde vibrante, celles des Chinois sur les tuyaux sonores, en mesurant les longueurs successives des cases sur le manche d'une guitare pour chercher à en tirer des conclusions quant à la nature de la gamme sur laquelle est fondée la musique que peut jouer l'instrument... A partir de ces travaux pratiques, les mathématiques pourront entrer en jeu pour mettre un peu d'ordre et permettre d'aller plus loin. De plus, elles permettront de relier certains phénomènes d'ordre musical à d'autres, rencontrés ailleurs : les quatre formes fondamentales du thème d'une fugue à certaines transformations géométriques, la structure de l'échelle tempérée à celle du cercle trigonométrique, la transposition à l'addition,... D'autre part le fait que la *somme* des intervalles correspond au *produit* des fréquences pourra servir d'introduction aux logarithmes...

Pour la musique, un des intérêts d'une telle entreprise réside justement dans le fait que les problèmes musicaux y sont abordés sous un éclairage différent, ce qui peut permettre à des élèves qui auraient eu des difficultés dans une approche plus traditionnelle de (re)partir du bon pied, ou à d'autres qui regardaient la musique de haut, la considérant comme quelque chose de tout à fait irrationnel, de voir qu'elle aussi a "sa" logique, même si celle-ci n'est pas apparente dès l'abord. Il appartiendra alors au professeur de musique d'entraîner plus loin ces "nouveaux convertis", de les emmener vers le domaine de... l'art.

Nous avons déjà évoqué quelques-uns des intérêts que peut présenter, pour les maths, une telle coordination : application, à un nouveau domaine, de connaissances antérieures, mais aussi approche de notions nouvelles. Aspect qui peut se révéler motivant pour certains élèves non "scientifiques" qui répugnent à faire des maths pour les maths (pour le "plaisir"). Au professeur de mathématiques, alors, d'exploiter ces points de départ et d'en chercher de nouveaux, en sollicitant au besoin des concertations avec d'autres disciplines et en prenant garde, alors, à ménager les susceptibilités. Car, dès qu'ils voient intervenir les mathématiques dans d'autres disciplines, certains n'hésitent pas à parler d'"impérialisme des maths". Alors qu'en réalité, il faut au contraire y voir le fait que les maths constituent en l'occurrence un *outil au service* des autres disciplines, comme ce fut leur vocation dès le départ. D'ailleurs, parle-t-on d'impérialisme du français, alors que celui-ci constitue le support de pratiquement toutes les matières ?

Il faut donc que le professeur de mathématiques ne se présente pas en conquérant, décidé à tout régenter. Mais, avec un peu de bonne volonté de part et d'autre, on apprendra à mieux se connaître et, partant, à s'apprécier. Enfin, dans cette entreprise commune, les deux disciplines apporteront chacune leur spécificité propre, et l'ensemble en sera valorisé. N'est-ce pas ainsi qu'il doit en être de toute union, si l'on veut qu'elle soit heureuse ?

<table>
<tr><th colspan="2">THÈME</th><th>MUSIQUE</th><th>MATHÉMATIQUES</th></tr>
<tr><td rowspan="4">LES ÉCHELLES MUSICALES</td><td rowspan="2">Echelle de Pythagore</td><td colspan="2">PHYSIQUE
Corde vibrante. Tuyau sonore. Harmoniques</td></tr>
<tr><td>• Les harmoniques
• Exemples d'utilisation des harmoniques sur certains instruments.
• Les intervalles d'octave et de quinte.
• La gamme "chinoise" (Asie, Europe, Amérique)
• Les noms des notes
• Les modes grecs</td><td>• Les Pythagoriciens et la notion de nombre
• La fraction 3/2. Multiplication ; division et encadrement de fractions par des entiers
• Utilisation de calculatrices programmables (le "cycle" des quintes)</td></tr>
<tr><td>Échelle de Zarlino</td><td>• L'intervalle de tierce
• L'accord parfait : son origine (polyphonie)</td><td>• Fractions (suite)</td></tr>
<tr><td>Le tempérament égal</td><td>• La transposition : nécessité et difficultés dans les deux systèmes précédents
• Différents essais des 16ᵉ-17ᵉ siècles.
• Autres tempéraments égaux : la gamme "des solfèges", certaines échelles exotiques, la gamme par tons...</td><td>• "Géniale simplicité" de la solution de Werckmeister
• Les fréquences des notes
• Approximation des échelles antérieures</td></tr>
<tr><td colspan="2">LES TONALITÉS</td><td>• L'écriture de la hauteur du son en musique (portée, clefs, notes)
• Les tonalités majeures et mineures
• Les tonalités voisines
• L'ordre des dièses et des bémols</td><td>• La "structure" (tons, demi-tons) de la gamme majeure.
• La notation chiffrée (analogie avec une numération à base 12)
• Simplicité de la transposition (= addition)
• Le "disque transpositeur" analogie avec le cercle trigonométrique
• Recherche des tonalités voisines.</td></tr>
<tr><td colspan="2">L'ART DE LA FUGUE</td><td>• Le contrepoint, la fugue : origine, principes. Exemples de diverses époques</td><td>• Transposition et groupe de Klein</td></tr>
<tr><td colspan="2">LE DODÉCAPHONISME</td><td>• La "dissolution" de la tonalité : historique (chromatisme, polytonalité, ...)
• La musique sérielle : naissance, principes (analogie avec ceux de la fugue)
• Exemples de recherche de la série de base et de ses diverses formes à partir de la partition</td><td>• Etude statistique d'œuvres des 18ᵉ, 19ᵉ et 20ᵉ s. (fréquence de chacune des 12 notes)
• Les 48 formes de la série (toujours le groupe de Klein)
• Chiffrage d'une partition sérielle, et recherche de la série
• Chiffrage des différentes formes de la série, et recherche dans la partition chiffrée.</td></tr>
</table>

1
LES ÉCHELLES MUSICALES

"Qu'est-ce que nos principes naturels,
sinon nos principes accoutumés ?"
PASCAL

I LE SON

"La musique est l'art des sons", dit Adolphe Danhauser (1835-1896) au début de sa "Théorie de la musique". Mais, d'abord, qu'est-ce qu'un *son* ?

Ce mot désigne en fait tout mouvement vibratoire de l'air, lorsqu'il est perçu par l'oreille. En tant que phénomène vibratoire, on peut donc appliquer au son le *théorème de Fourier :*

Tout mouvement périodique de fréquence f peut être décomposé en la somme de mouvement sinusoïdaux de fréquences f, 2f, 3f, etc...

Or, dans le domaine qui nous occupe ici, un son déterminé par un mouvement sinusoïdal s'appelle un *son pur*. Le théorème devient alors : ***Un son de fréquence f peut être considéré comme résultant de la "superposition" de sons purs de fréquences f, 2f, 3f, etc...***

Un son musical est caractérisé par 3 éléments (outre sa *durée*) :

1) **hauteur :** elle est liée à la fréquence. Pour qu'un son soit un "vrai" son (c'est-à-dire audible), il faut que sa fréquence soit comprise entre 20 et 20000 herz environ (1 herz = 1 vibration par seconde) ; en dessous, on est dans le domaine des infra-sons et, au-dessus, dans celui des ultra-sons.

2) **intensité :** elle est liée à l'amplitude maximale du mouvement vibratoire. Le seuil d'audibilité d'un son dépend également de son intensité. Pour qu'un son soit perçu, il faut qu'il exerce sur l'oreille une pression d'au moins 2×10^{-5} Newton/m^2.

3) **timbre :** il est lié à la décomposition du son en "série de Fourier" de sons purs. Ces sons purs sont appelés les *harmoniques* du son considéré (le son de fréquence nf est le n^e harmonique ; le 1er harmonique s'appelle le *fondamental*).

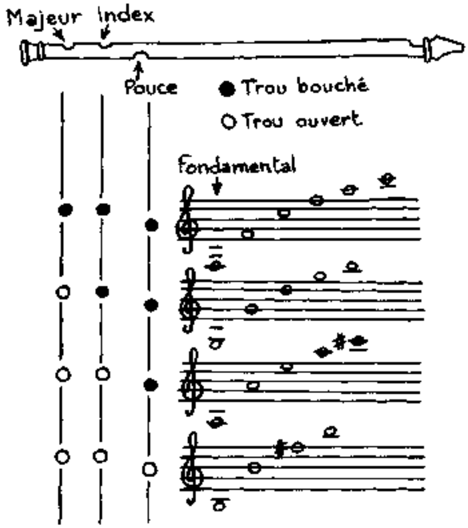
(Voir Encadré 1 : Avec trois trous).

Le timbre dépend des numéros et de l'amplitude relative des harmoniques perçus.

Dans ce qui suit, nous ne nous intéresserons qu'aux hauteurs des sons ; plus précisément, nous identifierons deux sons de même fréquence, c'est-à-dire qu'un son sera pour nous un réel strictement positif (nous ne distinguerons pas non plus, en théorie, les sons audibles de ceux qui ne le sont pas). Et, réciproquement, nous admettrons qu'à tout réel strictement positif f correspond un son.

Encadré 1

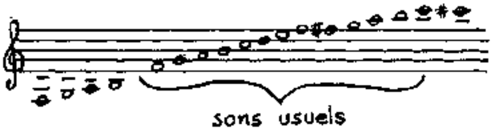
Avec trois trous



Le galoubet provençal (joué de la main gauche par le Tambourinaïre, en s'accompagnant du tambour) est une flûte à bec très ingénieuse, munie seulement de trois trous pour les doigts. Il y a 4 doigtés de base, obtenus en débouchant successivement les trous de bas en haut. Pour chacun de ces doigtés on obtient, en soufflant de plus en plus fort, la série des harmoniques jusqu'au n° 4, 5 ou 6.

Voyez ci-dessus, ce que l'on obtient avec un galoubet en Do (*).

L'ensemble des sons obtenus est donc :



Comme on le constate, on peut, sur un tel instrument, jouer dans deux tonalités : Do Majeur et Sol Majeur (**).

(*) Pour l'écriture des sons, voir Encadré 8

(**) Pour les tonalités, voir page 63

II LES INTERVALLES

L'appréciation des "écarts" entre deux sons est régie par la *loi de WEBER*, "loi" psycho-physiologique qui, appliquée au domaine auditif, dit que l'oreille est sensible, non aux différences, mais aux *rapports* de fréquences des sons. Ceci nous conduit à poser la relation suivante, dans l'ensemble $(\mathbf{R}_+^*)^2$ des couples de sons :

$$(f_1, f_2)\ \mathcal{R}\ (f_3, f_4) \Longleftrightarrow \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_4}{f_3}$$

Il est immédiat que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Les classes modulo $\mathcal{R}$ sont appelées *intervalles*.

Considérons l'une de ces classes ; pour tout couple (f_1, f_2) de la classe, le rapport $\frac{f_2}{f_1}$ de la fréquence du 2e son à celle du premier est le même ; c'est un réel (strictement positif) k. Il y a évidemment bijection entre l'ensemble des intervalles et $\mathbf{R}_+^*$. De plus, tout intervalle admet un représentant (unique) dont le premier élément est 1 ; ce représentant est $(1,k)$. Nous noterons I_k l'intervalle correspondant, et J l'ensemble des intervalles.

$$J = \{I_k\ ;\ k \in \mathbf{R}_+^*\}$$
$$I_k = \{(f, kf)\ ;\ f \in \mathbf{R}_+^*\}$$

Remarques :

a) I_1 est l'ensemble des couples (f, f) ; nous appellerons cet intervalle l'*unisson*, bien que des musiciens traditionnels refusent encore à l'unisson le statut d'intervalle.

b) Si $k > 1$, alors la fréquence du second son de chaque couple est supérieure à celle du premier son. On dit que l'intervalle I_k est *ascendant*.

De même, si $k < 1$, l'intervalle I_k est dit *descendant*.

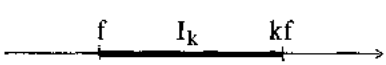
c) Les musiciens "additionnent" les intervalles, ce qui nous conduit à poser que la bijection canonique $k \longmapsto I_k$ de $\mathbf{R}_+^*$ sur J est en fait un isomorphisme de $(\mathbf{R}_+^*, \times)$ sur $(J, +)$. Ceci nous mène donc au *groupe additif des intervalles*. Nous avons alors : $I_k + I_{k'} = I_{kk'}$.

d) Nous pouvons également convenir de noter le son kf comme :

$$kf = f + I_k$$

e) Représentation linéaire (Isomorphisme avec la droite affine) :

Pour pouvoir comparer visuellement les intervalles, nous pouvons représenter, sur la droite réelle, l'égalité précédente par :



en convenant de représenter I_k par un bipoint dont la mesure algébrique est proportionnelle au logarithme de k (dans une base quelconque) pour que l'on ait :

$$\text{Mes alg}\,(I_k + I_{k'}) = \text{Mes alg}\,(I_k) + \text{Mes alg}\,(I_{k'})$$

(Voir Encadré 2 : Unités de mesure des intervalles)

Encadré 2

Les intervalles : unités de mesure

Le cent

C'est le *centième de demi-ton tempéré* (lui-même valant un douzième d'octave). L'octave vaut donc 1200 cents, et la mesure d'un intervalle en cents est donnée par :

$$\boxed{I_c = 1200 \log_2(f_2/f_1),}$$

où f_1 et f_2 sont les fréquences de deux sons définissant l'intervalle.

Le savart

Par définition, la mesure d'un intervalle en savarts est :

$$\boxed{I_s = 1000 \log_{10}(f_2/f_1)\ .}$$

L'octave mesure donc environ 301,03 savarts (puisque $\log_{10}(2) \simeq 0{,}30103$).

Mais les musiciens arrondissent à 300, pour la commodité des calculs. Ainsi, le demi-ton tempéré mesure $\frac{300}{12}$, soit 25 savarts.

III LES NOTES

On peut faire chanter en chœur la même mélodie par des hommes, des femmes et des enfants. Bien que toutes les voix ne soient pas à la même hauteur, le résultat ne sera pas choquant ; ce fait est dû à ce que certaines voix chantent (comme on dit) "à l'octave" des autres. Cette notion d'*octave* est commune à tous les systèmes musicaux ; c'est l'intervalle qui sépare les deux premiers harmoniques d'un son musical. Puisque nous avons vu plus haut que ces sons avaient pour fréquences f et 2f, l'octave n'est autre que I_2 (octave supérieure), ou $I_{1/2}$ (octave inférieure). Cette parenté très forte *(consonance)* entre sons, que l'on ressent intuitivement, a conduit partout à identifier (de proche en proche) les sons de fréquences f, 2f, 4f, 8f, ..., 2^n f, ... ($n \in N$) et aussi, bien sûr, $\frac{f}{2}, \frac{f}{4}, \ldots, \frac{f}{2^p}$ ($p \in N$).

D'où la relation G que nous définissons dans $\mathbf{R}_+^*$ par :

$$f_1 \, G \, f_2 \Longleftrightarrow (\exists \, n \in Z \;\; f_2 = 2^n . f_1)$$

On vérifie immédiatement que G est une relation d'équivalence ; les classes modulo G seront appelées *notes*, et "notées", pour $f \in \mathbf{R}_+^*$: $\overline{f} = \{2^n . f \, ; \, n \in \mathbf{Z}\}$.

Mais un douloureux problème surgit alors : peut-on faire de la musique avec une infinité de notes ? Ceci soulève une foule de difficultés de tous ordres (production du son, notation, etc..). Aussi la solution universellement adoptée a-t-elle consisté à ne prendre qu'un *nombre fini* de notes (c'est ce que l'on appelle une *échelle* musicale).

Une petite remarque au sujet des notes : Etant donné f($f \in \mathbf{R}_+^*$), toute note (dont une des fréquences est f') admet un représentant unique appartenant à l'intervalle [f ; 2f[. Ceci résulte du fait qu'on peut toujours "encadrer" un réel positif donné (ici $= \frac{f'}{f}$) par deux puissances consécutives de 2 ; si $2^p \leqslant \frac{f'}{f} < 2^{p+1}$, alors $2^{-p}. f'$ est le représentant cherché.

Construire une échelle se ramènera à déterminer n réels $f_0 (= f), f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ appartenant à l'intervalle [f ; 2f[. Nous allons voir ci-après quelques méthodes utilisées (à différentes époques et dans différentes régions du globe) pour construire des échelles musicales.

IV LES ÉCHELLES PYTHAGORICIENNES

GRÈCE ET CHINE ANCIENNES :

Les Chinois ont fondé leur système musical sur la flûte de bambou ; les Grecs ont construit le leur sur la lyre (Voir *encadrés 12 et 14*). Ni les uns, ni les autres n'avaient les moyens techniques de s'occuper de la fréquence des sons, phénomène vibratoire. Mais il se trouve que, dans le cas de la corde vibrante (lyre) comme dans celui du tuyau sonore cylindrique dont la longueur est "grande" par rapport à la section (flûte), la *fréquence* du son fondamental émis est *inversement proportionnelle à la longueur* (de la corde ou du tuyau). Ces gens ont donc fait des observations

Encadré 3

Vrai ou Faux ?

"La légende grecque nous rapporte que Pythagore, se promenant un jour en inspectant les étoiles — un Pythagore peut-il en effet se promener autrement qu'en inspectant les étoiles ? — fut frappé de la consonance de marteaux de forgerons qui rendaient la quinte, la quarte et l'octave. Il entra dans la forge, se fit confier les marteaux, les pesa et s'aperçut que les rapports de poids fournissaient les chiffres 1, 2, 3 et 4".

Jacques Chailley (Voir Bibliographie)

Ce texte appelle deux remarques :

1) La légende (comme le souligne plus loin Chailley) est manifestement erronée sur un point (au moins) : des marteaux de masses proportionnelles à 1, 2, 3, 4 ne donneront certainement pas la quarte, la quinte et l'octave *(voir Encadré 24 : D'autres corps sonores).*

2) Elle sous-entend que les intervalles de quarte, quinte et octave étaient déjà connus *avant* les travaux de Pythagore, ce qui, après tout, est normal : les Grecs n'avaient pas attendu Pythagore pour faire de la musique...

et des mesures sur les consonances entre sons émis, et se sont aperçus que les rapports de longueurs correspondant aux sons consonants étaient des rationnels "simples". En fait, ils ont découvert les premiers termes de la suite des harmoniques. Grecs comme Chinois s'en sont tenus aux rapports déterminés par les **4** premiers termes de cette série. Voyons quels sont les intervalles déterminés par ces **4** sons, qui ont (on l'a vu) respectivement pour fréquences f, 2f, 3f, 4f ; l'intervalle entre le fondamental et le deuxième harmonique est l'*octave* I_2 (rapport de fréquences : $\frac{2f}{f} = 2$) ; entre le 2ᵉ et le 3ᵉ harmonique nous trouvons $I_{3/2}$, appelé *quinte* (ascendante) ; enfin entre le 3ᵉ et le 4ᵉ nous avons $I_{4/3}$, appelé *quarte* (ascendante).

Ces 4 premiers harmoniques nous fournissent donc :

- l'*octave :* ascendante (I_2) ou descendante ($I_{1/2}$)
- la *quinte* : ascendante ($I_{3/2}$) ou descendante ($I_{2/3}$)
- la *quarte* : ascendante ($I_{4/3}$) ou descendante ($I_{3/4}$)

Ce qui peut être représenté par le schéma suivant :

← — — — — — — octave — — — — →

|————————————|—————————|

← — — quinte — — —×— — quarte — — →

(Voir Encadrés 3 et 4 : Vrai ou faux ? et Pythagore)

(Suite page 20)

Encadré 4

Pythagore

Gravure de 1492, extraite de la "Theorica Musicae" de Franchinus Gafurius. Elle représente Pythagore faisant des expériences sur les corps sonores. En fait, Pythagore (572 - 480 av. J.-C.) ne nous a laissé aucun écrit. Ce que nous en connaissons est rapporté par des auteurs postérieurs, comme Aristoxène de Tarente (v. 350 av. J.C.). Le "cycle des quintes", dont l'invention est attribuée à Pythagore, est en réalité antérieur à celui-ci ; il n'avait fait que le justifier théoriquement, à l'aide du monocorde *(voir encadré 14)*, et non à l'aide de cloches ou de verres plus ou moins remplis.

Les expériences de Pythagore :

Pythagore avait remarqué qu'en plaçant un chevalet au milieu d'une corde tendue, les deux parties de la corde (chacune de longueur moitié) donnaient, lorsqu'on les pinçait, le même son, "ressemblant" à celui que donnait la corde entière (l'*octave* supérieure).

Si l'on plaçait ce chevalet au tiers à partir d'une des extrémités, la partie la plus longue donnait un nouveau son (*quinte* supérieure du son initial), l'autre en donnant l'octave supérieure (puisque sa longueur était moitié).

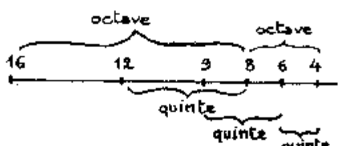
On peut également procéder en augmentant la longueur de corde vibrante, au lieu de la diminuer : ainsi, partant d'une corde mesurant 4 unités de longueur, des cordes identiques (matériau, section, tension) mais de longueurs 8 et 16 sonneront respectivement une et deux octaves en-dessous de la première.

Une corde de longueur 6 (une fois et demie 4) sonnera à la quinte inférieure de la corde de départ, et une corde de longueur 12 une octave en-dessous.

Les disciples de Pythagore (Philolaos, Archytas) poussèrent les choses plus loin, en introduisant la quinte de la quinte (dont la longueur sera donc :

$$4 \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = 9).$$

La gravure ci-dessus est une illustration (revue et corrigée) de ceci : les nombres placés sur les cloches représentent les longueurs de ces cloches (étant supposé qu'elles sont homothétiques). Dans ce cas, on sait depuis le Moyen-Age que ces longueurs se comportent comme celles des cordes vibrantes (en fait la fréquence du son émis est inversement proportionnelle à la racine cubique de la masse — *voir Encadré 25 : "La Reine des Cloches"* — c'est-à-dire, dans le cas présent, à la longueur). Les nombres indiqués représentent donc les intervalles suivants :



Remarquons que les 3 intervalles sont fournis par les 2e. 3e, 4e harmoniques ; le fondamental n'est, en somme, qu'un "doublet" du 2e harmonique.

Le procédé utilisé par les Pythagoriciens (et qui nous est connu par les écrits d'Aristoxène de Tarente) se base sur ces 3 harmoniques ; il consiste en une *succession alternée de quintes montantes et de quartes descendantes*. Plus précisément, on part d'un son $f_0 = f$, puis on prend le son f_1 situé une quinte au-dessus de $f (f_1 = \frac{3}{2} f)$, le son f_2 se trouvant une quarte en-dessous de $f_1 (f_2 = \frac{3}{4}.f_1 = \frac{9}{8}f)$, le son f_3 placé une quinte au-dessus de f_2, etc...

On voit immédiatement que l'on aura

$$f_{2n} = \left(\frac{9}{8}\right)^n \text{ et } f_{2n+1} = \frac{3}{2} \times \left(\frac{9}{8}\right)^n .$$

Ouvrons ici une parenthèse :

La méthode des Grecs est, pour les premiers termes de la suite (f_n), équivalente à la suivante, qui consiste en une *progression de quintes, ramenées dans l'octave*. Précisons :

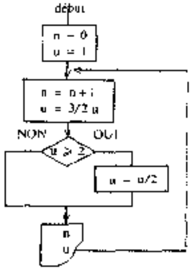
Partant toujours de $f_0 = f$, on construit la suite (f_n) définie par

- $f_{n+1} = \frac{3}{2} f_n$ si $\frac{3}{2} f_n < 2f$
- $f_{n+1} = \frac{3}{2} f_n : 2$ si $\frac{3}{2} f_n \geqslant 2f$

Les termes successifs de cette suite seront donc de la forme $f_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{1}{2^p} f$, p étant défini comme l'entier (unique) tel que $f_n \in [f, 2f[$

Le calcul montre que cette méthode, appelée *"cycle des quintes"* est équivalente à celle des Grecs jusqu'à n = 7.

Le "cycle des quintes" peut se programmer de la manière suivante (où $u_n = \frac{f_n}{f}$) :



Ce qui sera intéressant, du point de vue musical, ce sera d'obtenir une échelle de sons *finie*. Cela se produira si (et seulement si), par chance, la suite des f_n (ou des u_n) est périodique. On pourra alors véritablement parler de *cycle* des quintes, puisque le procédé permettra de "boucler la boucle".

Voyons donc si l'on peut trouver un entier p tel que $u_p = u_0$ (= 1).

Ceci revient à chercher deux entiers n et p tels que $\left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{1}{2^p} = 1$,

ou encore $3^n = 2^{n+p}$. Malheureusement, 2^{n+p} est pair, et 3^n est impair.

Il faut nous faire une raison, le "cycle" des quintes n'existe pas, du moins en tant que cycle (certains parlent, pour cette raison, de "spirale" des quintes).

Mais les musiciens de l'Antiquité, malgré tout, ont trouvé une solution au problème. Solution approchée, certes, imparfaite comme le sont nos sens, mais solution acceptable. En fait, ils ont arrêté leur progression lorsqu'ils sont revenus *dans le voisinage* du son dont ils étaient partis.

Le problème est donc finalement le suivant : trouver n et p entiers tels que $\frac{3^n}{2^{n+p}} = 1 + \varepsilon$, ou $1 - \varepsilon$ (ε étant un nombre "petit devant 1").

Quelle est la valeur de u_n correspondante ?

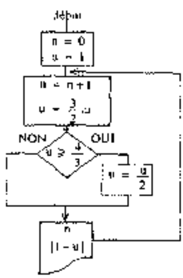
Distinguons les 2 cas :

1er cas $\frac{3^n}{2^{n+p}} = 1 + \varepsilon$ Alors nous aurons $u_n = 1 + \varepsilon$ ($(1+\varepsilon) \in [1, 2[$) et par conséquent, $\boxed{\varepsilon = u_n - 1}$

2e cas $\frac{3^n}{2^{n+p}} = 1 - \varepsilon$ Nous aurons, cette fois, $u_n = 2(1 - \varepsilon)$, puisque $(1-\varepsilon) \notin [1, 2[$. D'où $\boxed{\varepsilon = 1 - \frac{1}{2} u_n}$

Donc, dans tous les cas, ε sera le plus petit des deux nombres $u_n - 1$ et $1 - \frac{1}{2} u_n$. Lequel est-ce ? Un (léger) calcul montre que ce sera $u_n - 1$ si (et seulement si) u_n est inférieur à 4/3.

Nous pouvons donc transformer l'organigramme précédent pour obtenir :



Cet organigramme nous donnera ε, et la valeur de n correspondante.

Remarque : La comparaison de u_n à 2 a été rendue inutile par celle de u_n à 4/3. En effet :

- Si $u_n < 4/3$, alors $3/2.u_n < 2$, donc on n'a pas à diviser u_n.
- Si $u_n \geqslant 4/3$, on a $2/3 \leqslant \frac{u_n}{2} < 1$ et, puisque $u_{n+1} = \frac{3}{2} u_n$, $u_{n+1} \in [1,2[$

la calculatrice nous fournira alors les résultats suivants :

n	ε
5	0,05078125
7	0,06787109
12	0,01364326
41	0,01139745
53	0,00209031
306	0,00102172
359	0,00106645
665	0,00004366
15601	0,00001819

Une approche arithmétique du cycle des quintes :

Le problème, on vient de le voir, est de résoudre l'(impossible) équation $(3/2)^n = 2^p$, où les inconnues n et p sont des entiers naturels.

Cette équation équivaut à $\log_2(3/2) = \frac{p}{n}$. Bien entendu, cette équation n'a pas de solution dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Mais on peut cependant approcher $\log_2(3/2)$ par un rationnel, et on sait que la méthode des fractions continues nous fournira justement la réponse à ce problème. Utilisons-la donc pour écrire $\log_2(3/2)$ sous la forme :

$$r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{r_3 + \cfrac{1}{r_4 + \cfrac{1}{r_5 + \cdots\cdots}}}}$$

a) On a $2^0 < 3/2 < 2^1$, donc $0 < \log_2(3/2) < 1$, et $\boxed{r_1 = 0}$.

b) $\dfrac{1}{\log_2(3/2)} = \log_{3/2}(2)$, et on a $(3/2)^1 < 2 < (3/2)^2$, donc $1 < \log_{3/2}(2) < 2$,

et $\boxed{r_2 = 1}$.

c) $\log_{3/2}(2) - 1 = \log_{3/2}(4/3)$; et $\dfrac{1}{\log_{3/2}(4/3)} = \log_{4/3}(3/2)$.

De plus, $(4/3)^1 < 3/2 < (4/3)^2$, donc $1 < \log_{4/3}(3/2) < 2$, et $\boxed{r_3 = 1}$.

... En continuant, on trouve ainsi successivement :

$$\boxed{r_4 = 2}$$
$$\boxed{r_5 = 2}$$
$$\boxed{r_6 = 3}$$
$$\boxed{r_7 = 1} \quad \ldots$$

Nous avons donc :

$$\log_2(3/2) = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \ldots\ldots}}}}}}$$

Et nous obtenons successivement les réduites suivantes :

1/1 ; 1/2 ; 3/5 ; 7/12 ; 24/41 ; 31/53 ; ...

Dans l'équation $(3/2)^n = 2^p$, le nombre n représente le nombre de quintes qui "boucleraient" l'octave. Donc, dans les réduites, le dénominateur représente le nombre de quintes qui "bouclent à peu près" l'octave. On remarque que l'on retrouve les valeurs $n = 5, 12, 41, 53, \ldots$ mais pas 7 : la raison en est que l'approximation par 7 quintes est (un peu) *moins bonne* que par 5 *(voir le tableau de la page 22)*.

* *

Nous allons maintenant envisager successivement les cas $n = 5, 7, 12, 41, 53$.

$n = 5$: Au bout de 5 quintes, nous sommes donc revenus au voisinage de 1 : c'est-à-dire que $f_5/f_0 \simeq 1$.

En identifiant f_5 et f_0, nous aurons donc réparti 5 sons dans l'octave, qui sont :

n	0	1	2	3	4
f_n	f	$\frac{3}{2}f$	$\frac{9}{8}f$	$\frac{27}{16}f$	$\frac{81}{64}f$

En représentation linéaire, nous aurons alors :

f_0 — f_2 — f_4 — f_1 — f_3 — $(2f_0)$

Si nous calculons les intervalles entre deux sons consécutifs, nous constatons qu'ils sont de 2 types seulement :

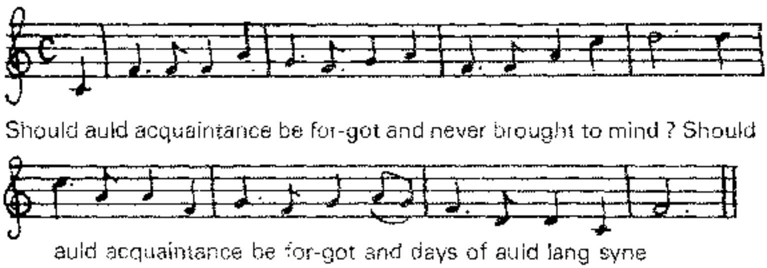
- $\frac{f_2}{f_0} = \frac{f_4}{f_2} = \frac{f_3}{f_1} = \frac{9}{8} = \frac{3^2}{2^3}$ (intervalle A)
- $\frac{f_1}{f_4} = \frac{2f_0}{f_3} = \frac{32}{27} = \frac{2^5}{3^3}$ (intervalle B)

Cette échelle à 5 notes (pentatonique), est la gamme "chinoise". Elle est et a été très répandue du Pérou à la Chine, en passant par l'Ecosse.
(Voir Encadré 5 : Sur cinq notes)

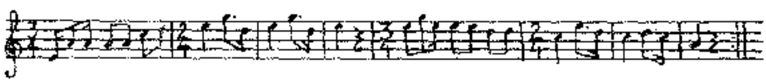
Encadré 5

Sur cinq notes

La gamme pentatonique (gamme "chinoise") est, et a été, très répandue dans le monde, du Pérou au Congo, en passant par les pays eskimos et l'Ecosse. Le fameux "Ce n'est qu'un au-revoir", air du folklore *écossais* en est un exemple typique :



KAYPIPAS



(Air du folklore péruvien)

T'EOU - YE - HOUANG

(Air instrumental chinois, recueilli au 18^e s. par le Père Amiot)

$\boxed{n = 7}$

Nous ajoutons, cette fois, deux sons nouveaux à l'échelle "chinoise" :

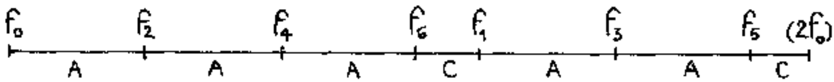
$$f_5 = \frac{243}{128}\,f, \text{ et } f_6 = \frac{729}{512}\,f$$

Ces deux sons viennent partager les deux intervalles B en un intervalle A et un nouvel intervalle, plus petit (C). Finalement, les intervalles entre deux sons consécutifs ne sont encore que de 2 types :

- $\frac{f_2}{f_0} = \frac{f_4}{f_2} = \frac{f_6}{f_4} = \frac{f_3}{f_1} = \frac{f_5}{f_3} = \frac{3^2}{2^3}$ (A)

- $\frac{f_1}{f_6} = \frac{2f_0}{f_5} = \frac{2^8}{3^5}$ (C)

La représentation est la suivante :



Cette échelle est connue sous le nom de "gamme de Pythagore" ; elle a été employée dans la Grèce antique, mais était également connue de la Chine ancienne, les deux notes supplémentaires ("pien") n'étant toutefois utilisées que comme notes de passage.

l'intervalle A est le *ton* pythagoricien (env. 204 cents)

l'intervalle C est le *limma* pythagoricien (env. 90 cents)

Remarquons que, dans le cycle des quintes, le son de départ, f, ne joue pas de rôle particulier. En effet, au lieu de procéder par quintes ascendantes, nous aurions pu procéder symétriquement (par quintes descendantes), ou même "panacher", en prenant p quintes ascendantes et 6-p quintes descendantes (avec p = 0, 1, 2, ..., 6). Ces 7 possibilités se ramènent simplement à un changement du son de départ, et déterminent donc 7 répartitions des intervalles successifs dans l'octave, se déduisant l'une de l'autre par permutation circulaire.

Ce sont ces 7 répartitions qui constituent les 7 "modes grecs" primitifs :

p = 6 quintes montantes : mode hypolydien
5 " " " lydien
4 " " " hypophrygien
3 " " " phrygien
2 " " " hypodorien
1 " " " dorien
0 " " " mixolydien

(Suite page 31)

Encadré 6

Les modes du plain-chant

Les modes du plain-chant sont issus des huit modes byzantins, eux-mêmes héritiers des modes grecs. Leur théorie a été établie au IXᵉ siècle par le moine bénédictin AURÉLIEN de Réomé (près de Langres), dans son traité MUSICA DISCIPLINA.

Ces modes sont caractérisés par :

— leur *ambitus*, octave dans laquelle se développe la mélodie
— leur *teneur*, son autour duquel s'organise la mélodie.
— leur *finale* (ou *tonique*), son conclusif des différentes parties de la mélodie.

a) Il y a 4 finales possibles : RÉ, MI, FA, SOL *(voir encadré suivant)*.

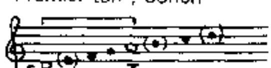
b) Entre la finale et sa quinte supérieure, on construit un *tétracorde,* grâce à 3 sons intermédiaires.

c) On complète alors l'octave par un second tétracorde, soit vers l'aigu (le mode est alors dit *authente*), soit vers le grave (le mode est dit *plagal*).

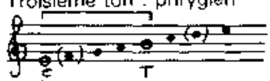
D'où 8 modes (4 × 2), dont les noms, en principe repris de ceux des modes grecs, sont en fait incorrects par suite d'une confusion faite au Xᵉ siècle (par un anonyme, bien sûr !) (Comparer avec la page 26).

MODES AUTHENTES

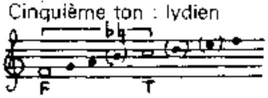
Premier ton ; dorien



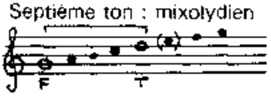
Troisième ton : phrygien



Cinquième ton : lydien

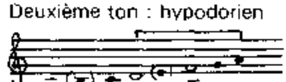


Septième ton : mixolydien

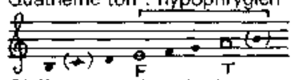


MODE PLAGAUX

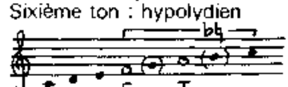
Deuxième ton : hypodorien



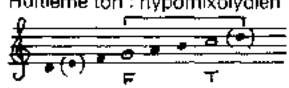
Quatrième ton : hypophrygien



Sixième ton : hypolydien



Huitième ton : hypomixolydien



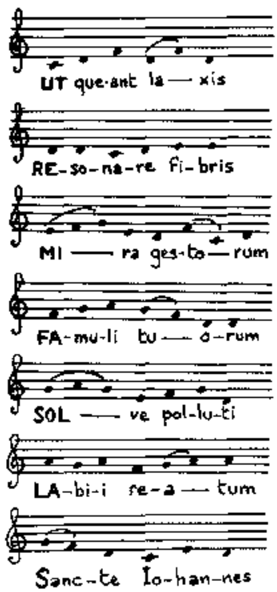
N.B. : T = teneur ; F = finale ; ——— = tétracorde de base.
Les notes entre (   ) ne servent que de notes d'ornement ou de passage.

Encadré 7

Le nom des notes

C'est Guido d'Arezzo (v. 1000 - v. 1050) qui est à l'origine du nom que nous donnons aux notes de la gamme.

Ayant remarqué que, dans l'hymne "Ut queant laxis" (dédié à St Jean), les notes initiales de la mélodie de chaque vers (sauf le dernier) étaient dans l'ordre naturel de la gamme, il songea à donner comme nom, à chacune de ces notes, la syllabe sur laquelle elle se chantait. Et, pour la dernière, on forgea plus tard le mot formé des initiales des deux mots du dernier vers.



(DO a remplacé UT au 17e siècle).
Dans les pays germaniques, ainsi que dans les pays anglo-saxons, on utilise un codage alphabétique, correspondant au nôtre selon le tableau suivant :

France	DO	RÉ	MI	FA	SOL	LA	SI♭	SI♮
Allemagne	C	D	E	F	G	A	B	H
Gde Bretagne	C	D	E	F	G	A		B

Ceci a permis à nombre de compositeurs d'écrire des œuvres "sur un nom". Voir par exemple le nom de BACH (Si ♭/La/Do/Si ♮), dans les Variations op. 31 de SCHOENBERG, page 91).

Encadré 8

La notation classique : hauteurs

Commençons par *numéroter les octaves :*

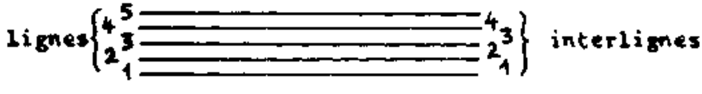
Soit le son de fréquence f (par convention, appelons-le DO, et prenons f = 32,7 Hz)(*). Considérons les octaves : (f,2f), (2f,4f), (4f,8f),..., ainsi que $(\frac{1}{2}f,f),(\frac{1}{4}f,\frac{1}{2}f),\ldots$ Dans chaque octave, le son le plus grave (qui est un DO) a pour fréquence un nombre de la forme $2^n f$, avec $n \in \mathbf{Z}$.

Nous conviendrons de dire que n est le numéro de l'octave $(2^n f, 2^{n+1} f)$, et d'affecter ce numéro à tout son de l'échelle situé dans l'intervalle $[2^n f, 2^{n+1} f[$.

Que l'on se place dans le système pythagoricien, zarlinien ou tempéré égal, les sons de l'échelle correspondant aux 7 notes "naturelles" (c'est-à-dire non "altérées" par un dièse ou un bémol) pourront donc être codés par un couple (p,n) où $p \in \{$Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si$\}$ et $n \in \mathbf{Z}$ (n est le numéro de l'octave).

La notation musicale classique est basée sur la relation d'ordre canonique définie à partir des fréquences sur cet ensemble de sons (appelons-le Σ) : un son A est plus haut (plus aigu) qu'un son B si la fréquence de A est plus grande que celle de B.

La *portée* est censée représenter une partie d'une échelle verticale dont chaque barreau est occupé par un son de Σ, de façon qu'un son plus aigu qu'un autre soit situé plus haut sur l'échelle. Elle est constituée par cinq parallèles horizontales, implicitement numérotées de bas en haut et appelées *lignes* ; ces cinq lignes délimitent quatre *interlignes,* également numérotés de bas en haut :



Ceci définit une échelle de 9 barreaux.

Pour pouvoir placer un son quelconque de Σ, il nous suffira donc que soit repéré l'un d'entre eux (le son "origine", en quelque sorte).

(*) Ceci se justifiera dans la 2e partie (p. 58).

Exemple :

(N.B. 1 : On note Sol 3 au lieu de (Sol, 3), etc.

N.B.2 : Les *signes* représentant les *sons* sont également appelés *notes*).

Le repérage du son-origine se fait grâce à une *clé* (signe placé au début de chaque portée). Il y a 7 clés différentes :

— la clé de *Sol 2ᵉ ligne,* qui fixe la position du Sol 3 sur la 2ᵉ ligne de la portée (Notation : 𝄞)

— les clés de Fa 3ᵉ ligne et 4ᵉ ligne (𝄢), qui fixent la position du Fa 2

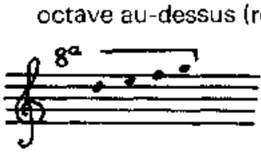
— les clés d'Ut 1ᵉ, 2ᵉ, 3ᵉ et 4ᵉ ligne (𝄡), qui fixent la position du Do 3 :

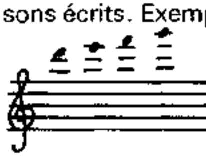
Deux remarques :

1) La portée ne permet, à première vue, de coder que 11 sons. En fait, on peut en coder bien plus grâce à trois procédés principaux :

a) l'utilisation de petites lignes supplémentaires, destinées à ajouter des barreaux à l'échelle. Exemple :

b) l'utilisation du signe 8ª ——┐ (resp. 8ª bassa ——┐), qui indique que les sons réels sont en fait ceux qui sont situés une octave au-dessus (resp. en dessous) des sons écrits. Exemple :

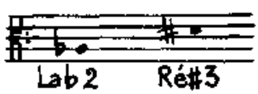


est un codage de


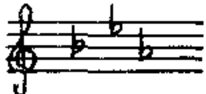
c) le changement de clé en cours de morceau.

2) Les sons correspondant aux notes altérées sont codés comme ceux qui correspondent aux notes non altérées, mais *précédés* du signe d'altération.

Exemple :



Pour simplifier l'écriture, on indique l'*armure* de la tonalité de l'œuvre au début de chaque portée : les notes diésées (resp. bémolisées) sont représentées par un # (resp. un ♭) placé sur la ligne — ou dans l'interligne — d'un son représentant cette note. Ceci dispensera, dans le cours de l'œuvre, d'écrire le signe d'altération devant chaque note (il sera sous-entendu). Exemple :



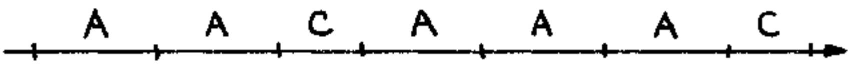
signifie que le morceau est écrit en Mi ♭ majeur ou en Do mineur.

On annulera l'effet de cette armure (pour un son donné et pour la durée d'une mesure *(voir Encadré 10)* en plaçant un *bécarre* (♮) devant ce son, l'effet de ce bécarre étant lui-même annulé par le rétablissement de l'altération d'origine.

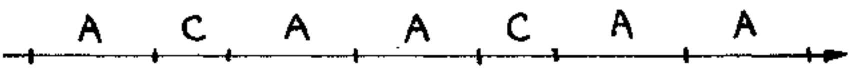
(Suite de la page 26)

Au fil des siècles et à travers de multiples transformations, dont les modes liturgiques du Moyen-Âge *(Voir Encadré 6 : Les modes du plain-chant)*, ces différents modes ont fini par n'en plus former que deux :

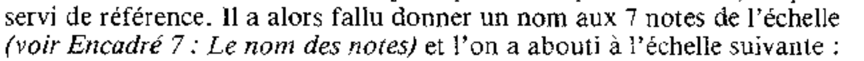
le ***mode majeur*** (5 quintes montantes) :



le ***mode mineur*** (ancien) (2 quintes montantes) :



C'est finalement le mode majeur qui a eu le plus de succès, et qui a servi de référence. Il a alors fallu donner un nom aux 7 notes de l'échelle *(voir Encadré 7 : Le nom des notes)* et l'on a abouti à l'échelle suivante :



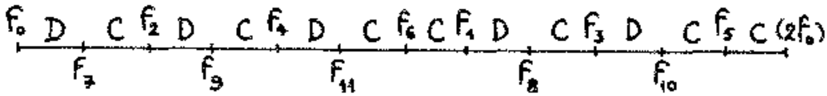
Les rapports des fréquences à Do des différents sons de l'octave sont :

Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si
1	9/8	$\frac{81}{64}$	4/3	3/2	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$

C'est à cette succession que l'on a donné le nom de *tonalité de Do majeur.*

$\boxed{n = 12}$

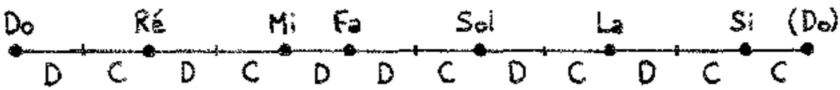
Par rapport à l'échelle de Pythagore initiale, nous obtenons ici 5 nouveaux sons, qui viennent "amputer" chaque intervalle A d'un intervalle C, de la façon suivante (avec D = A − C) :



Une fois encore, on ne trouve que deux types d'intervalles successifs :

- $\dfrac{f_2}{f_7} = \dfrac{f_4}{f_9} = \dfrac{f_6}{f_{11}} = \dfrac{f_1}{f_6} = \dfrac{f_3}{f_8} = \dfrac{f_5}{f_{10}} = \dfrac{2f_0}{f_5} = \dfrac{2^8}{3^5}$ (C)
- $\dfrac{f_7}{f_0} = \dfrac{f_9}{f_2} = \dfrac{f_{11}}{f_4} = \dfrac{f_8}{f_1} = \dfrac{f_{10}}{f_3} = \dfrac{3^7}{2^{11}}$ (D)

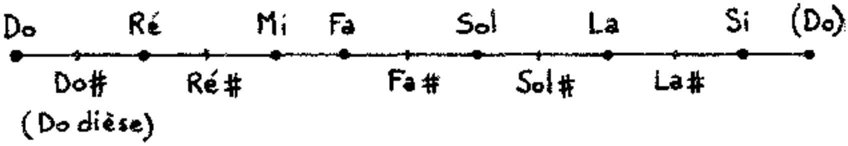
Enfin, lorsqu'on se ramène à la tonalité de Do majeur, ces intervalles se répartissent de la façon suivante :



Quelques remarques :

1) Cette échelle n'a jamais été qu'une échelle théorique, mais elle a été découverte aussi bien par les Chinois *(voir Encadré 12 : la légende des lyus)* que par les Pythagoriciens, qui avaient appelé "comma" la différence entre 12 quintes et 7 octaves (*comma pythagoricien*, dont on reparlera sous peu).

2) Les 5 dernières notes obtenues sont les *notes diésées* (théoriques) :



(Suite page 38)

Encadré 9

La notation classique : durées

La *forme* du signe ("note") qui représente un son indique la *durée relative* de ce son. A chaque durée de son correspond une durée de silence, également représentée par un signe (le "silence").

Le tableau suivant indique les durées des principales figures de notes, relativement à la *noire* (𝅘𝅥), ainsi que les figures de silences correspondants :

NOTE			SILENCE	
NOM (ou VALEUR)	SIGNE	VALEUR EN 𝅘𝅥	SIGNE	N O M
ronde	𝅝	4	𝄻	pause
blanche	𝅗𝅥	2	𝄼	demi-pause
noire	𝅘𝅥	1	𝄽 (ou 𝄾)	soupir
croche	𝅘𝅥𝅮	1/2	𝄾	demi-soupir
double croche	𝅘𝅥𝅯	1/4	𝄿	quart de soupir
triple croche	𝅘𝅥𝅰	1/8	𝅀	huitième de soupir
quadruple croche	𝅘𝅥𝅱	1/16	𝅁	seizième de soupir

N.B. 1 : Attention aux appellations trompeuses ("double", "triple", "quadruple" croche) !
N.B. 2 : La "queue" des notes peut être dirigée indifféremment vers le haut (𝅗𝅥) ou vers le bas (𝅗𝅥) : la figure est donc définie "à une symétrie centrale près" !

Une note (resp. un silence) peut être *pointée* (Ex. : 𝅘𝅥.) : sa durée est alors *multipliée* par 3/2.

Deux notes (correspondant au même son) peuvent être *liées* (𝅗𝅥‿𝅘𝅥𝅮) : l'ensemble équivaut alors à un seul son, ayant pour durée la *somme* des durées (N.B. : il est inutile de lier des silences).

Les *durées absolues* sont indiquées :

— par des *indications métronomiques,* indiquant, pour une valeur de note donnée, le nombre de telles valeurs que l'on doit entendre en une minute. Exemple : 𝅘𝅥𝅮 = 116 signifie que chaque croche doit avoir une durée de $\frac{1}{116}$ de minute.

— par des *indications de tempo,* plus "floues" que les précédentes. En voici quelques-unes, du mouvement le plus lent au plus rapide :

Largo . Larghetto . Lento . Adagio . Andante . Andantino . Moderato . Allegretto . Allegro . Vivace . Presto.

Encadré 10

La notation classique : mesure

L'*indication de mesure,* placée au début d'un morceau, découpe celui-ci en périodes de même durée (les *mesures*), qui sont séparées, sur la partition, par des barres verticales. Cette indication se présente sous la forme d'une fraction (sans barre), dont :

— le dénominateur est un codage de la durée : 1 = 𝅝, 2 = 𝅗𝅥, 4 = ♩, 8 = ♪, etc.
— le numérateur indique le nombre de ces durées qui constituent une mesure.

Exemple : $\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{2}$ signifie qu'une mesure correspond à une durée de 3 blanches. (N.B. : $\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{4}$ est codé C, et $\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{2}$ est codé ¢)

L'indication de mesure signale également de quelle façon se fait le découpage de chaque mesure. On distingue les *mesures ternaires* (numérateur : 6, 9 ou 12) et les *mesures binaires* (2,3 ou 4 en général).

Dans une mesure binaire, le numérateur indique le nombre de *temps* (subdivisions) que comporte chaque mesure.

Exemple : $\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{4}$ signifie : 3 temps, avec une noire par temps.

Dans une mesure ternaire, le numérateur indique le nombre de "tiers de temps" que comporte chaque mesure.

Exemple : $\genfrac{}{}{0pt}{}{12}{8}$ indique une mesure à 4 temps, où chaque temps est subdivisé en trois, avec une noire pointée (3 croches) par temps.

Encadré 11

Deux exemples de codages musicaux alphanumériques

(utilisés dans la composition avec ordinateur)

		Code SCRIPTU	Code MUSICA
Tonalité		Peut être indiquée au début (notes altérées)	Non indiquée
HAUTEURS	Octave	N° d'octave placé derrière la note (0,1,2,3...)	Virgules ou apostrophes placées devant la note „=1 ‚=2 ʼ=3 ″=4
	Note naturelle	DO RE MI FA SOL LA SI	C D E F G A B
	Note altérée	D# R# M# etc... DB RB MB Bécarre : ND NR etc...	+C +D +E etc... &C &D &E
Durée (de notes)		TO suivi d'un chiffre (indiquant la durée en doubles croches)	1 = 𝅝, 2 = 𝅗𝅥, 4 = ♩, 8 = ♪, 7 = 𝅘𝅥𝅯 Note pointée : chiffre ci-dessus suivi d'un point
Durée (de silence)		PO suivi d'un chiffre (cf ci-dessus)	— précédé de la durée (cf ci-dessus)
Intensité		AO suivi d'un chiffre (1=pp, 2=p, ...)	PP, P, ... S (forte)
Fin de description d'une note		Virgule	Le nom de la note
Fin de description d'une mesure		Point	/
Accord		Notes séparées par ;	Notes entre parenthèses

Lorsqu'une action est indiquée (durée, intensité,...), son effet ne cesse que lorsqu'une autre vient le remplacer.

Exemple :

SCRIPTU : TO4 SO3 ; RE4, TO2 SO3 ; LA 3, PO1 TO1 SB3. TO4 SO3,

MUSICA : (4 ʼG″ D) (8GA) 7 — &B/4ʼG

(on ne répète pas l'octave) —

(on ne répète, ni l'octave, ni la durée) —

Encadré 12

La légende des "lyus"

Voici une légende chinoise :
l'histoire se passe en ... 2697 avant notre ère

"A cette époque, l'empereur Hoang-Ti venait de se rendre maître de la Chine, après avoir vaincu les armées de son ennemi Tché-Yeou. Soucieux du bonheur de son peuple, il promulga de sages lois, et s'efforça de lui procurer tous les plaisirs possibles.

En particulier il ordonna à son maître de musique, Ling Luen, de mettre sur pied un système de notes invariables auquel tout le monde, ensuite, pourrait se référer.

Ling-Luen se rendit au pays de Si-Joung, vers le Nord-Ouest, et là il découvrit, au Nord d'une haute montagne, une magnifique forêt de bambous dont les tiges, très droites, avaient toutes la même grosseur.

Ayant coupé l'une de ces tiges entre deux nœuds, Ling-Luen y souffla et le son qui sortit du bambou était exactement le même que le gazouillis du ruisseau qui serpentait là, et qui n'était autre que le Fleuve Jaune, près de sa source. Aussi Ling-Luen nomma-t-il ce tuyau "Cloche Jaune".

A ce moment un couple de phénix vint se poser dans le voisinage, et se mit à chanter. Le mâle siffla six notes allant du grave à l'aigu, et dont la première — ô surprise ! — était justement celle de la "Cloche Jaune" ; la femelle, elle, siffla six autres notes, qui venaient s'intercaler entre celles de son compagnon. Subjugué par ces sons merveilleux, Ling-Luen écouta de toutes ses oreilles et, quand les oiseaux fabuleux eurent cessé leur chant, s'empressa de couper onze nouvelles tiges de bambou, reproduisant chacune des notes qu'il venait d'entendre.

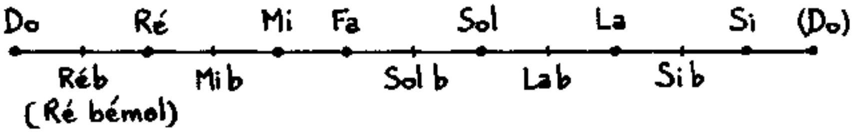
Il constata que le tuyau qui donnait la note la plus grave chantée par la femelle mesurait les deux-tiers de la longueur de la "Cloche Jaune". Et, comme il savait que le nombre deux représente la Terre et le nombre trois le Ciel, cette harmonie le plongea dans le ravissement, ravissement qui s'accrut encore lorsqu'il s'aperçut que ceci se poursuivait jusqu'au bout de la série et que chacune des notes (alternativement mâle ou femelle) correspondait, du grave à l'aigu, à un tuyau dont la longueur était les deux-tiers de celle du précédent, éventuellement doublée (aucun des tuyaux n'était plus long que la "Cloche Jaune", ni plus petit que la moitié de celle-ci).

Mais pour que ces tuyaux ("lyus") puissent servir d'étalons, il fallait les mesurer de façon précise. Pour ce faire, Ling-Luen décida d'utiliser des graines de "chou" (sorte de gros millet). Il s'en fit apporter de toutes les espèces : des gris, des jaunes, des rouges, des noirs... Finalement, il choisit de se servir des noirs, car ils étaient plus durs, plus résistants, et surtout d'une taille plus régulière. Il plaça, contre la "Cloche Jaune", des graines alignées suivant leur plus grande dimension ; il lui en fallut 81 pour obtenir la longueur du tuyau. Puis il fit de même avec les autres lyus..."

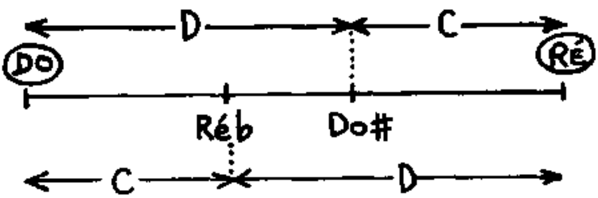
D'après vous, quelles étaient, en graines, les longueurs des onze autres lyus ? (Vous arrondirez, s'il y a lieu) (Réponse page 121)

(Suite de la page 32)

3) Si, au lieu de procéder par quintes ascendantes, on avait effectué une progression de quintes descendantes on aurait (après s'être ramené à Do Majeur) obtenu 5 notes nouvelles, différentes des notes diésées : les *notes bémolisées :*



4) Entre deux sons consécutifs, on intercale donc deux sons, l'un diésé, l'autre bémolisé, selon la répartition suivante (nous avons pris Do-Ré comme exemple, mais, dans les quatre autres cas, le résultat est similaire) :



L'intervalle D – C entre Ré $\flat$ et Do # correspond au rapport de fréquences

$$\frac{2187}{2048} : \frac{256}{243} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} : 2^7 \text{ (environ 23,5 cents)}$$

Cet intervalle est donc égal à la différence entre 12 quintes et 7 octaves : c'est le *comma pythagoricien* précédemment nommé.

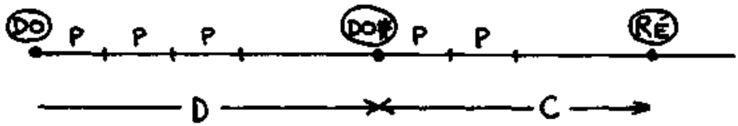
5) Les notes diésées ou bémolisées sont appelées notes *altérées*. Mais, répétons-le, ces notes ne sont pas venues, historiquement, du prolongement du "cycle des quintes". Elles ont leur origine dans un déplacement de *degré* (= note de la tonalité), sous l'influence de ce que l'on appelle, en musique, "l'attraction" d'un autre degré. Par exemple, Marchetto de Padoue, en 1317, divise le ton pythagoricien en 5 "diésis" et n'attribue à l'intervalle Do-Do # qu'un seul diésis, soit un cinquième de ton. Nous sommes loin du cycle des quintes !....

(Pour l'écriture de la musique, *voir Encadrés 8, 9, 10 et 11*).

$\boxed{n = 41}$

La douzième quinte, on l'a vu, donne (après réduction à l'octave) un son situé un comma (pythagoricien) au-dessus du son initial. Les 12 quintes suivantes vont donner alors un découpage qui sera translaté du premier d'un comma, et ainsi de suite...

Nous obtiendrons finalement entre Do et Ré le partage suivant (en notant P le comma pythagoricien) :



Quels sont les deux intervalles résiduels ?

Nous souvenant (voir plus haut) que P = D − C, on a :

a) D − 3 P = 3 C − 2 D

b) C − 2 P = 3 C − 2 D

Ces deux intervalles sont donc égaux.

Dans cette nouvelle échelle, il n'y a encore une fois que deux types d'intervalles :

- le comma pythagoricien, (P) (rapport de fréquences : $\frac{3^{12}}{2^{19}}$)
- un intervalle Q (rapport de fréquences : $\frac{2^{46}}{3^{29}}$).

Cet intervalle Q est plus grand que P.

Remarquons que cette échelle ne semble pas avoir eu beaucoup de succès, même théorique (peut-être parce que l'approximation de l'octave n'est guère meilleure que celle que l'on obtient pour n = 12 ?...).

$\boxed{n = 53}$

On refait une nouvelle série de 12 quintes ascendantes.

Cette fois, chacun des 12 intervalles Q va être amputé d'un intervalle P :

Nous n'aurons, cette fois encore, que 2 types d'intervalles successifs :

- le comma pythagoricien P (rapport de fréquences : $\frac{3^{12}}{2^{19}}$)
- un intervalle R = Q − P (rapport de fréquences : $\frac{2^{65}}{3^{41}}$)

Cette échelle, obtenue à partir de 52 quintes, était connue des Chinois dès le 5e siècle av. J.C. Ils avaient d'ailleurs même poussé leurs investigations plus loin, mais le peu de chiffres significatifs dont ils disposaient leur a fourni, pour les plus grands nombres, des résultats erronés (ex. : 666 au lieu de 665).

V LA TRANSPOSITION

Un problème s'est posé très tôt aux musiciens, dès qu'il a été question de chanter une mélodie entendue, ou de la (re)jouer sur un instrument : il est souvent nécessaire, alors, d'"adapter" cette mélodie au registre de la voix ou de l'instrument, et de la "déplacer" vers l'aigu ou le grave. Il faut malgré tout ne pas dénaturer la matière musicale, et donc conserver leur valeur aux intervalles successifs (seul le son initial ayant varié). C'est ce que l'on appelle *transposer*. Donc :

Transposer une mélodie, c'est multiplier toutes les fréquences par un même nombre k ($k \in \mathbb{R}_+^*$).

Nous appellerons *transposition associée à l'intervalle I_k* l'application :

$$\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

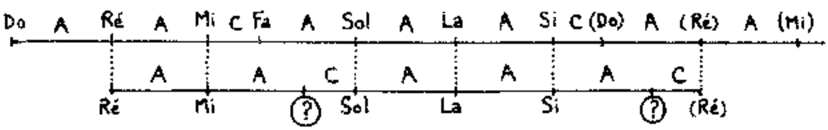
$$f \longmapsto kf = f + I_k$$

Du point de vue de la transposition, une échelle musicale sera parfaite si l'on peut y transposer toute mélodie en partant d'un son quelconque.

Ceci sera réalisé si (et seulement si) l'échelle $\mathcal{E} = \{f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ est invariante par toute transposition associée à un intervalle quelconque de l'échelle.

Prenons le cas de l'échelle pythagoricienne à 7 notes, échelle pratiquée par les musiciens occidentaux au Moyen-Âge. Comment se comporte-t-elle vis-à-vis de la transposition ?

Soit par exemple la transposition faisant passer de Do à Ré (et donc associée à $I_{9/8}$). Visualisons-la, grâce à la représentation linéaire :



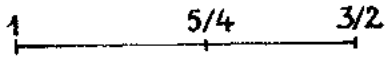
Nous voyons qu'il nous faudra changer deux notes de l'échelle, si l'on veut obtenir le même effet musical. Plus précisément, il faudra hausser le Fa et le Do d'un intervalle A − C, soit D (Fa sera donc remplacé par Fa #, et Do par Do #). Et si même on ajoute les cinq notes diésées ou les cinq notes bémolisées qui apparaissent en poursuivant le "cycle des quintes" vers le haut ou vers le bas (échelle "chromatique"), le problème n'en sera pas résolu pour autant, puisque ces nouvelles notes en introduiront à leur tour de nouvelles, et ainsi de suite...

VI L'ACCORD PARFAIT MAJEUR

La musique antique était essentiellement monodique ; à partir du Moyen-Âge, on commence à faire entendre simultanément plusieurs mélodies (cas du ***contrepoint***, par exemple). Outre l'aspect "horizontal" (déroulement des sons dans le temps), l'oreille perçoit de plus en plus un aspect "vertical" (simultanéité des sons). Cette conscience de la verticalité de la musique s'est lentement développée, et a fini par engendrer une branche spéciale de la théorie : l'harmonie.

Pour les musiciens, il y a *accord* dès que 3 sons, au moins, (correspondant à des notes différentes) sont entendus simultanément. Les accords les plus "naturels" font intervenir les premiers harmoniques de la série. Pour obtenir 3 notes différentes, il faut aller jusqu'à l'harmonique 5 ; ces notes correspondent aux harmoniques 1 (ou 2, ou 4), 3 et 5. Ramenées à l'intervalle $[f, 2f[$, les fréquences sont respectivement f, $\frac{3}{2}f$ et $\frac{5}{4}f$ ou dans l'ordre croissant : f, $\frac{5}{4}f$, $\frac{3}{2}f$.

C'est l'ensemble $\{f, \frac{5}{4}f, \frac{3}{2}f\}$ que les musiciens ont appelé *accord parfait majeur* (APM)(*) :



Remarques :

1) On trouve l'APM à l'état "natif" (si l'on peut dire) en considérant les harmoniques 4, 5 et 6.

2) Si f et $\frac{3}{2}f$ font partie de l'échelle pythagoricienne, il n'en est hélas pas de même de $\frac{5}{4}f$. C'est un problème qui a tourmenté les musiciens de la Renaissance, prenant conscience du fait, et souhaitant trouver une échelle qui tînt compte des exigences nouvelles, c'est-à-dire qui contînt l'APM.

On peut quand même remarquer que cette note intruse est voisine du Mi de Pythagore. En effet, $\frac{8}{64} : \frac{5}{4} = \frac{81}{80}$. L'intervalle $I_{81/80}$ est le *comma syntonique* (environ 21,5 cents).

(*) ou même : APMEP (Accord Parfait Majeur Engendré par la Polyphonie) !

VII L'ECHELLE DE ZARLINO

Pour incorporer l'APM à l'échelle musicale, divers musiciens, et en particulier le vénitien Gioseffo Zarlino (1558), imaginèrent de construire une nouvelle échelle, *approximation de celle de Pythagore*, qui serait basée sur cet accord.

Posons donc à notre tour le problème : est-il possible d'obtenir une approximation de l'échelle pythagoricienne, à partir d'une succession d'accords parfaits majeurs ?

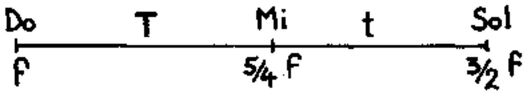
Remarquons que, s'il y a une solution, elle comportera *au moins trois accords* :

— 1 accord de base (3 notes)

— 1 accord obtenu à partir d'une des 3 notes précédentes (d'où 2 notes nouvelles)

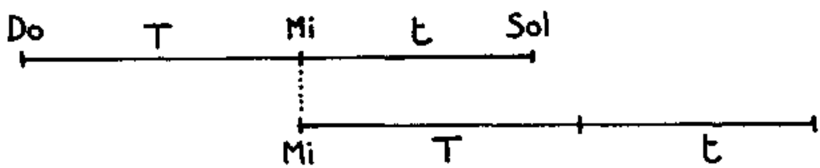
— 1 accord qui fournira, de même, les deux dernières notes.

L'accord de base, rappelons-le, est le suivant :



(Remarque : l'intervalle $I_{5/4}$ est la *tierce majeure zarlinienne* T, et la différence avec la quinte, soit $I_{6/5}$, est la *tierce mineure zarlinienne* t).

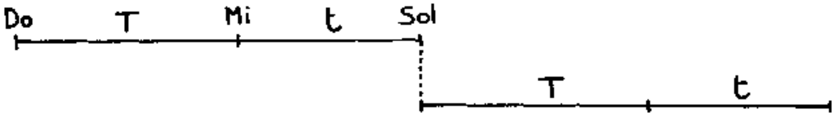
Si nous fondons maintenant un APM sur le Mi précédent, nous obtenons les notes de fréquences $\left(\frac{5}{4}\right)^2 \times f$ et $\frac{3}{2} \times \frac{5}{4} f$:



La note la plus haute est voisine du Si Pythagoricien ($\frac{243}{128} : \frac{15}{8} = \frac{81}{80}$); elle est donc située un comma syntonique en-dessous).

Par contre, la note moyenne est située entre le Sol ($\frac{3}{2}f$) et le La ($\frac{27}{16}f$) de l'échelle de Pythagore, et assez loin des deux (en fait, elle est voisine du La ♭ obtenu par le cycle des quintes). L'APM fondé sur Mi est donc à rejeter. Aurons-nous plus de chance avec celui qui est fondé sur Sol ?

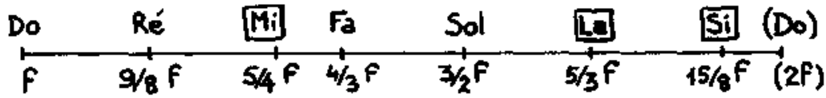
Nous obtiendrons alors les fréquences $(\frac{3}{2} \times \frac{5}{4})$f et $(\frac{3}{2})^2$f (ou $\frac{9}{8}$f, en se ramenant dans l'octave).



Nous retrouvons le Si (un peu bas) de l'essai précédent, et le Ré de Pythagore.

Voilà déjà 5 notes convenables ; il ne nous manque plus qu'un Fa et un La. Or, il suffit de faire les essais pour constater (avec dépit), que partir de Si ou de Ré pour bâtir un APM introduit des notes "parasites" (comme lorsqu'on est parti de Mi). Faut-il donc "ici laisser toute espérance" ? Que non pas, car les musiciens, décidés à tout pour réussir, ont astucieusement tourné la difficulté en prenant comme dernier APM un accord dont la note *la plus haute* est une des cinq notes précédentes (en fait, le Do initial, solution unique). On obtient en effet les fréquences $\frac{5}{6}$f et $\frac{2}{3}$f ou, en se ramenant dans l'octave : $\frac{5}{3}$f et $\frac{4}{3}$f. Cette dernière correspond au Fa de Pythagore ; quant à l'autre, elle est située un comma syntonique plus bas que le La de Pythagore ($\frac{27}{16} : \frac{5}{3} = \frac{81}{80}$).

Le résultat final est donc :



(les notes encadrées sont plus basses d'un comma syntonique que les notes correspondantes de l'échelle de Pythagore).

(Voir Encadrés 13 et 14 : Plus grave ? Plus aigu ? et *Le Monocorde).*

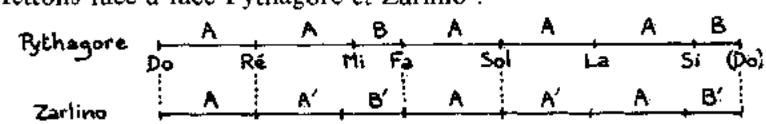
Les fréquences des différentes notes s'expriment ici par des fractions plus "simples" que dans le cas de Pythagore, mais il y a cette fois *trois types d'intervalles successifs :*

a) $I_{9/8}$: c'est le ton pythagoricien A, appelé ici *ton majeur* zarlinien (env. 204 cents)

b) $I_{10/9}$: *ton mineur* zarlinien A' (env. 182 cents)

c) $I_{16/15}$: *demi-ton majeur* zarlinien B' (env. 112 cents) ("demi" n'est pas à prendre au sens mathématique !)

Mettons face à face Pythagore et Zarlino :



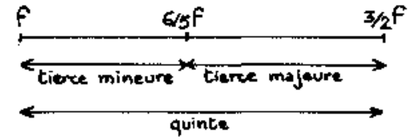
On voit immédiatement que, puisque le ton mineur zarlinien est plus petit que le ton pythagoricien d'un comma syntonique, le demi-ton majeur zarlinien sera plus grand que le limma pythagoricien d'un comma syntonique.

Sans trop entrer dans les détails, il est clair que la présence de ces 3 types d'écarts rendra le problème de la transposition, déjà impossible avec Pythagore, tout aussi insoluble.

VIII L'ACCORD PARFAIT MINEUR

L'APM résulte, on l'a vu, de la "superposition" d'une tierce majeure et d'une tierce mineure.

Si maintenant on superpose ces deux intervalles dans l'ordre inverse, on obtient l'*accord parfait mineur* qui, lui, ne se trouve pas dans la série des harmoniques :



(Exemple d'accord parfait mineur dans la gamme de Zarlino : Mi-Sol-Si).

IX LE TEMPÉRAMENT ÉGAL

Le problème de la transposition continuait donc à tourmenter (de plus en plus) les musiciens des 16ᵉ et 17ᵉ siècles *(Voir Encadrés 15 et 16 : Le tempérament mésotonique* et *Les touches brisées du clavecin)*. Tombés de Charybde en Scylla puisque, ce qu'ils avaient gagné du côté de l'harmonie, ils l'avaient reperdu du côté de la simplicité de l'échelle. C'est alors que l'idée (géniale dans sa simplicité) se fit jour, d'un partage de l'octave en intervalles *égaux (tempérament égal)*.

L'échelle obtenue (pour rester dans la continuité) constitue une approximation de l'échelle (de Pythagore ou de Zarlino).

Par les transpositions, on restera alors à l'intérieur de l'échelle (les intervalles étant égaux). Divers tempéraments égaux ont été imaginés aux 16ᵉ et 17ᵉ siècles, notamment par Guillaume Costeley (division en 19), Christiaan Huygens, en 1691 (division en 31), et Andreas Werckmeister, la même année (*). C'est ce dernier tempérament qui a eu, de loin, le plus de succès. L'idée de base en est la suivante :

On part de l'échelle pythagoricienne *à 12 notes*, dans laquelle on a remarqué que les intervalles successifs (C et D) sont à peu près égaux et on *décide* de les *rendre* égaux ; d'où une division de l'octave en 12 intervalles égaux I_k. On doit avoir $12\ I_k = I_2$, d'où $k^{12} = 2$, et $k = 2^{1/12}$. I_k est le *demi-ton tempéré*, et I_{k^2} est le *ton tempéré ;* cette fois, le demi-ton vaut bien la moitié du ton !

(*) Quoique la paternité du tempérament égal par 12 lui soit contestée. Mais enfin, l'idée était dans l'air !

Encadré 13

Plus grave ? Plus aigu ?

A) Dans la tonalité **pythagoricienne** de Do Majeur, les fréquences des sons de [f,2f[sont :

Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si	(Do)
f	$\frac{9}{8}f$	$\frac{81}{64}f$	$\frac{4}{3}f$	$\frac{3}{2}f$	$\frac{27}{16}f$	$\frac{243}{128}f$	(2f)

Dans la tonalité pythagoricienne de *Si Majeur*, cherchez quelle est la fréquence du son *La dièse* de l'intervalle [f,2f[.

Cherchez de même quelle est, dans la tonalité de *Fa Majeur*, la fréquence du *Si bémol* de [f,2f[.

Lequel de ces deux sons est le plus aigu ? (fréquence la plus élevée).

B) Dans la tonalité **zarlinienne** de Do Majeur, les fréquences des sons de [f,2f[sont :

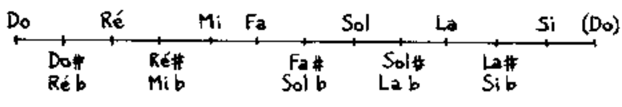
Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si	(Do)
f	$\frac{9}{8}f$	$\frac{5}{4}f$	$\frac{4}{3}f$	$\frac{3}{2}f$	$\frac{5}{3}f$	$\frac{15}{8}f$	(2f)

Mêmes questions que ci-dessus pour le *La dièse de Si Majeur* et le *Si bémol de Fa Majeur* qui se trouvent dans [f,2f[.

Lequel de ces deux sons est le plus aigu ?

(Réponses page 121).

D'autre part, cette identification des intervalles C et D conduit à identifier les notes diésées et bémolisées *enharmoniques* (Do # = Ré ♭ ; etc...). Finalement, l'échelle de Werckmeister aura l'allure suivante :



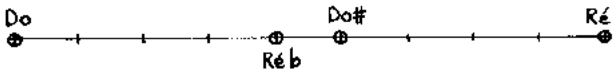
Aucune des notes (autres que Do) ne coïncide avec son homologue de l'échelle de Pythagore ou de celle de Zarlino (le procédé d'obtention est purement théorique, et non basé sur le phénomène des harmoniques) ; mais, malgré tout, cette échelle fournit une bonne approximation de l'une comme de l'autre.

(Voir Encadrés 17 et 18 : Les échelles des instruments et *Quelques mesures sur la guitare).*

Tableau comparatif de la gamme diatonique dans les systèmes de Pythagore et de Zarlino, par rapport à l'échelle tempérée (écarts en cents) :

Note	Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si
Pythagore	0	+4	+8	+2	+2	+6	+10
Zarlino	0	+4	−14	+2	+2	−16	−12

Nous reviendrons plus loin sur cette échelle de Werckmeister qui est notre échelle actuelle (du moins théorique). Mais, auparavant, il nous faut dire un mot d'un autre tempérament égal, bien plus précis vis-à-vis de Pythagore, et qui, inventé par Mercator en 1675, a été repris par Holder en 1694. Ce tempérament est, lui, basé sur l'échelle pythagoricienne à *53 notes ;* il consiste à identifier les intervalles P et Q, et donc à partager l'octave en 53 intervalles égaux *(degrés-commas) (Voir Encadré 19 : Quelques commas).* L'intervalle Do-Ré se décompose de la façon suivante :



Le ton pythagoricien correspond donc ici à 9 degrés, et le limma à 4 degrés.

Cette échelle est, en fait, l'"échelle des solfèges", qui possède l'intérêt théorique d'être une *très bonne* approximation du cycle des quintes.

Pour terminer ce survol rapide des tempéraments égaux, signalons que l'Occident n'en a pas l'exclusivité, loin de là ! En effet, la paternité du tempérament par 12 revient en fait au prince chinois Tchou Tsai You, qui le proposa en 1596 (un siècle avant Werckmeister !).

Le tempérament par 5 se retrouve en Indonésie (c'est le mode *Slendro*) aussi bien qu'en Afrique Occidentale (Haute Volta, Mali).

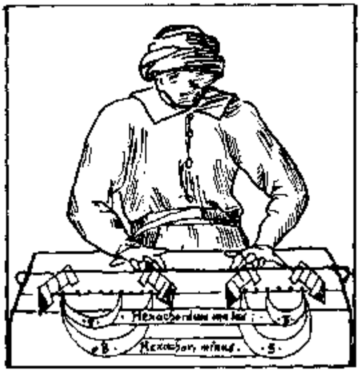
Le tempérament par 7 est également répandu au Cambodge, en Thaïlande (où il constitue l'échelle officielle) en Afrique Occidentale (Guinée) et aux Iles Salomon (*voir Encadré 20 : Are Are*).

Nous avons également relevé, chez les Arabes, un tempérament "presque" égal (voir *Encadré 21 : Une échelle arabe*).

(Suite page 49)

Encadré 14

Le Monocorde



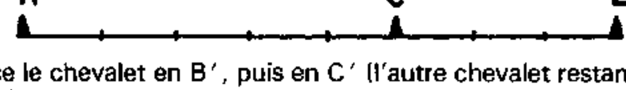
Cette gravure de 1529 (Ludovico Fogliano : "Musica Theorica") montre un musicien utilisant le monocorde.
Au Moyen-Age, la division du monocorde avait été poussée plus loin que par Pythagore et ses disciples : la gravure ci-dessus fait intervenir le 8e harmonique, alors que les pythagoriciens n'avaient pas dépassé le 4e.

Explication :

Partie droite :

Si on place le chevalet en B, puis en C (l'autre chevalet restant fixe en A), on obtient, la deuxième fois, un son situé à la sixte majeure (*) supérieure du premier (rapport de fréquence : 5/3).

Partie gauche :



Si on place le chevalet en B', puis en C' (l'autre chevalet restant fixe en A') on obtient, la deuxième fois, un son situé à la sixte mineure supérieure du premier (rapport des fréquences : 8/5).

(*) "Zarlinienne" avant l'heure !

Encadré 15

Le tempérament mésotonique

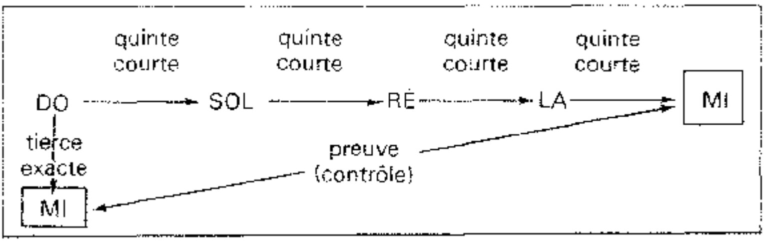
Il s'agit du *système d'accordage* des clavecins qui a été le plus utilisé au 17e siècle.

L'idée de base en était de donner la *priorité à la tierce sur la quinte,* de façon à améliorer l'harmonie. La base de cet accordage est la suivante :

On commence par former la tierce exacte DO-MI (rapport de fréquences : 5/4). Puis, à partir du DO, on accorde un "cycle" de 4 quintes : DO-SOL-RÉ-LA-MI. Ce MI final devant être le même que le premier obtenu, il est nécessaire de "raccourcir" les quintes : en effet, si on appelle x le rapport de fréquences d'une telle quinte, on doit avoir $x^4 = (5/4).2^2$.

tierce Do-Mi — on a monté de 2 octaves

D'où $x = \sqrt[4]{5}$, c'est-à-dire environ 1,495 (au lieu de 1,5)



Cette base étant établie, il reste à accorder les 7 notes restantes de l'échelle, ce que l'on fait grâce à des tierces (exactes) :

Mi♭ ← SOL → Si | Fa ← LA → Do #
Si♭ ← RÉ → Fa # | MI → Sol #

On a donc ainsi *8 tierces exactes.*

Remarquons également que les touches "noires" (c'est-à-dire correspondant aux notes altérées, bien que sur les clavecins les couleurs des touches eussent fréquemment été inversées, par rapport au piano moderne) correspondent aux trois premiers dièses et aux deux premiers bémols. Ce qui fait que les tonalités comportant beaucoup d'altérations sonneront moins bien.

Considérons en particulier la quinte constituée par les notes extrêmes de la série : Sol #-Mi ♭. Pour cette quinte, le rapport des fréquences est égal à ...? Faites le calcul *(réponse et précisions page 121, pour ceux qui veulent voir le loup).*

(Suite de la page 46)

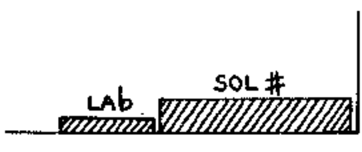
Citons également en Europe la "gamme par tons" chère à Debussy, obtenue en prenant un degré sur deux de l'échelle de Werckmeister (voir *Encadré 22*), ainsi que, plus récemment, le TEQJ de Serge Cordier (voir *Encadré 23*). Et, pour terminer, un tempérament "rationnel" (qui a été effectivement utilisé), et qui est basé sur le fait que $\sqrt[12]{2}$ (irrationnel, bien sûr) est très voisin du rationnel 196/185. En effet, en prenant cette valeur rationnelle pour le demi-ton, on obtient une octave presque exacte ($(196/185)^{12} \simeq 1,99992$), juste un tout petit peu trop courte (l'écart n'est que de 0,07 cent !).

Encadré 16

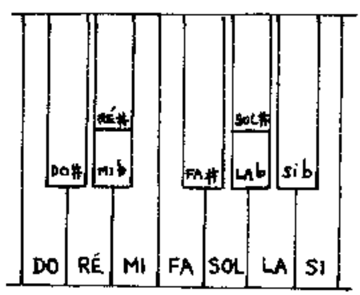
Les touches "brisées" du clavecin

Au début du 17e siècle, avant l'avènement du tempérament égal, il était difficile de faire entendre un Sol # (par exemple) pour un La ♭, ou l'inverse. Or, le clavecin étant accordé d'une façon donnée, on ne pouvait faire entendre que l'une de ces deux notes, à l'exclusion de l'autre. Pour tourner la difficulté, et accroître ainsi les possibilités de l'instrument, des facteurs (dont Giovanni Battista BONI) imaginèrent de "briser" certaines touches "noires" *(voir Encadré 15)* : il s'agissait en fait de couper la touche en deux dans le sens de la largeur, chacune des deux parties de ladite touche faisant vibrer une corde accordée différemment.

Exemple :



PROFIL



Le revers de cette innovation étant, bien sûr, la difficulté accrue de jouer d'un tel instrument, ce système intéressant ne connut pas une très grande vogue. (Signalons que, pour l'orgue, Gottfried FRITSCHE arriva indépendamment à la même solution que BONI, dix ans plus tard).

Encadré 17

Les échelles des instruments

* *Les instruments à vent* sont basés sur la série des harmoniques (voir l'exemple du galoubet, *Encadré 1*).

Le cor peut donner jusqu'au 16e harmonique (en rectifiant au besoin, par le souffle, ceux qui s'écartent trop de l'échelle usuelle). La trompette ne va que jusqu'au 12e, et le trombone que jusqu'au 8e (exceptionnellement jusqu'au 10e). De plus, les instruments ci-dessus ne donnent pas le son fondamental, au contraire de la flûte (harmoniques de 1 à 5).

* *Les instruments à cordes de la famille du violon* ont 4 cordes, accordées de quinte en quinte (*). L'accord est donc en principe celui de l'échelle pythagoricienne. Mais seuls les quatre sons donnés par les cordes à vide et les harmoniques naturels sont fixés ; les autres sont laissés au choix (ou aux possibilités) de l'exécutant.

* *La guitare, la mandoline, la viole,* sont des instruments à sons fixes *(voir encadré 18).* Ils sont basés sur l'échelle tempérée.

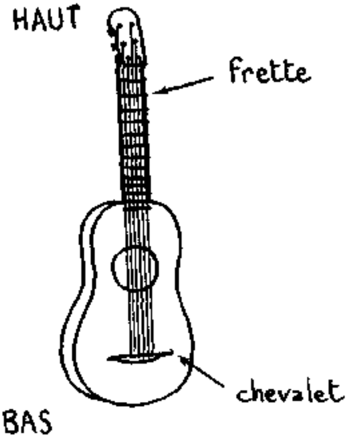
* *Le piano, la harpe* sont (théoriquement) accordés suivant l'échelle tempérée.

* Pour *l'orgue*, on a essayé à peu près toutes les échelles....

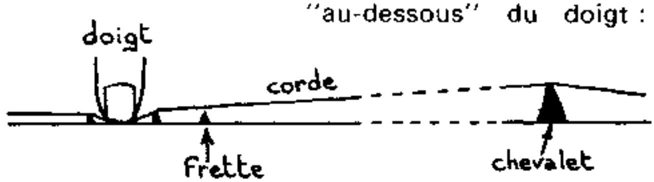
(*) N.B. : la contrebasse, accordée de quarte en quarte, appartient à la famille de la viole.

Encadré 18

Quelques mesures sur la guitare



Le manche d'une guitare comporte de petites barres métalliques transversales en saillie (les *sillets*, ou *frettes*). Ces frettes sont destinées à modifier, de façon discontinue, la longueur de la corde qui vibre : si l'on pose le doigt sur une corde, dans une des cases délimitées par les frettes, la longueur de la corde qui pourra vibrer sera celle qui sera comprise entre le chevalet et la frette située juste "au-dessous" du doigt :



De haut en bas, appuyer le doigt sur les cases successives monte à chaque fois le son d'un "chouïa".
Sur une guitare, on a mesuré les distances successives d_n entre les frettes et le chevalet. Les résultats (en mm) sont consignés ci-dessous :

660. 623. 588. 555. 524. 495. 467. 441. 416. 393. 371. 350. 330. 311. 293. 277. 262. 247. 233. 220.

(Rappel : la fréquence du son émis par une corde vibrante est inversement proportionnelle à la longueur de cette corde).

Calculez les valeurs successives de $\dfrac{d_n}{d_{n+1}}$. On constate que ce rapport est sensiblement constant (de l'ordre de 1,06). On peut donc raisonnablement faire l'hypothèse que tous les chouïas sont égaux (*). De plus, on arrive au milieu de la corde au bout de 12 cases. Il y a donc 12 chouïas dans une octave (en fait les musiciens disent plutôt "demi-ton tempéré" que "chouïa").

(*) La suite (d_n) est donc géométrique.

Calculez les longueurs successives x_n des cases délimitées par les frettes. On constate que, au début tout au moins, les x_n décroissent à peu près linéairement. Cela s'explique par le fait que le rapport $\frac{d_n}{d_{n+1}}$ (constant) est du type $1 + \varepsilon$ (avec ε "petit" par rapport à 1).

On a $x_{n-1} = d_{n-1} - d_n$, et $d_n = \frac{d_0}{(1+\varepsilon)^n}$ ($n = 1,2,\ldots, 19$)

D'où $x_{n-1} = \frac{d_0}{(1+\varepsilon)^{n-1}} - \frac{d_0}{(1+\varepsilon)^n} = \frac{d_0\varepsilon}{(1+\varepsilon)^n} = d_0\varepsilon\,(1+\varepsilon)^{-n}$

Pour n "pas trop grand", nous aurons donc $x_{n-1} \simeq d_0\,\varepsilon\,(1 - n\varepsilon)$.

Encadré 19

Quelques commas

Le mot de "comma", en musique, désigne des tas de choses différentes. En fait, c'est un véritable fourre-tout, car les musiciens ont tendance à appeler comma tout intervalle inférieur au demi-ton. En voici quelques exemples, parmi d'autres :

— Nous connaissons déjà le *comma pythagoricien*, différence entre 12 quintes et 7 octaves. Rapport de fréquences : $(3/2)^{12} : 2^7$ ($\simeq 1{,}0136$), soit environ 23,4 cents.

— le *comma syntonique* (ou *didymique*), différence entre la tierce pythagoricienne et la tierce "naturelle" (harmonique). Rapport de fréquences : $(3^4/2^6) : (5/4)$, soit 81/80 ($\simeq$ 1,0125), ou environ 21,5 cents.

— le *comma schisma* de Zarlino, différence entre le ton majeur et le ton mineur de l'échelle de Zarlino. Rapport de fréquences : (9/8) : (10/9), c'est-à-dire 81/80. Le comma schisma n'est autre que le comma syntonique.

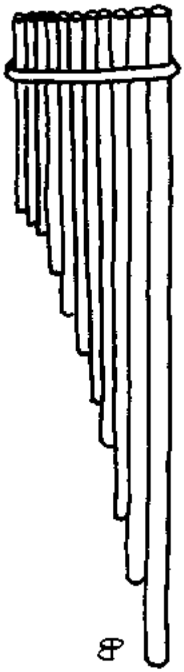
— le *comma de Holder*. Nous avons vu qu'il s'agit du $\frac{1}{53}$ d'octave. Rapport de fréquences : $\sqrt[53]{2}$ ($\simeq$ 1,0132), soit environ 22,6 cents.

— le *comma tempéré*, différence entre la quinte "naturelle" et la quinte tempérée. Rapport de fréquences : $(3/2) : 2^{7/12}$ ($\simeq$ 1,0011), soit environ 2 cents.

Encadré 20

'Are 'Are

Au sujet des indigènes 'Are'Are de Malaita (Iles Salomon) :



"L'échelle musicale de base des flûtes de Pan jouées en formation est équiheptatonique, c'est-à-dire que l'octave est divisée en 7 intervalles équidistants... Chez les 'Are'Are, l'échelle équiheptatonique apparaît sous deux formes : ou bien tous les instruments d'un ensemble possèdent l'échelle complète des sept intervalles équidistants (ensemble 'au tahana), ou bien l'échelle équiheptatonique est répartie sur deux instruments formant paire, l'un ayant les tuyaux 1, 3, 5, 7, etc... l'autre les tuyaux 2, 4, 6, 8, etc... (ensembles 'au keto et 'au taka'iori).

Le quatrième ensemble de flûtes de Pan (ensemble 'au paina) est composé d'instruments dont l'échelle pentaphonique est considérée, par les 'Are'Are, comme étant extraite de l'échelle équiheptaphonique. En effet, quand ils fabriquent de nouveaux instruments du type 'au paina et qu'il n'y a pas de vieux instruments pouvant servir de modèle pour l'accord, les 'Are'Are prennent un instrument du 'au tahana et mesurent la longueur des tuyaux 1,2,3,5,6,8, etc..."

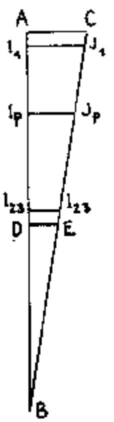
Hugo Zemp (notice d'accompagnement des disques "Flûtes de Pan mélanésiennes 'Are'Are - Disques Vogue 1971. Coll. Musée de l'Homme).

Encadré 21

Une échelle arabe

Le système tonal arabe est lié à la position des frettes *(voir Encadré 18)* sur le manche du "Oud" (luth), et ce depuis le 9e siècle(*). Vers cette époque, le théoricien Al-Farabi (mort en 950) procède à une division théorique de l'octave en 25 intervalles (inégaux), certaines subdivisions s'obtenant à partir des quintes pythagoriciennes, d'autres non ; et, sur cette échelle, il choisit des modes de 7 sons.

Au 19e siècle, le Libanais Michael Meshaqa (1800-1889) fait paraître un traité : "Limmas et commas", dans lequel il préconise la division de l'octave en 24 parties. Pour ce faire, il indique un procédé qui permet de trouver la longueur des cases successives sur le manche du "Oud", et qui est le suivant :



Soit AB la longueur de la corde à vide. On construit le triangle ABC rectangle en A, tel que AC = $\frac{1}{36}$ AB.

On place le milieu D de [AB], puis on divise [AD] en 24 parties égales. Par chacun des points de subdivision I_p, on mène la parallèle à (AC) qui coupe (BC) en J_p.

Les distances I_pJ_p sont les longueurs successives des cases à reporter sur le manche du "Oud" (en partant du haut). Pour l'octave supérieure, on réitère le procédé à partir de DE (E milieu de [BC]). Les modes sont alors construits en prenant certains éléments de cette échelle à 24 notes.

Cette façon tout empirique de procéder appelle, bien sûr, deux questions :

1) Arrive-t-on bien, au bout de 24 frettes, à "boucler" l'octave ?

2) Les intervalles successifs ainsi déterminés sont-ils égaux ?

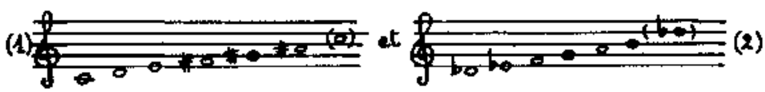
(Réponses page 121).

(*) Le "oud" actuel ne comporte plus de frettes (sauf parfois en Tunisie).

Encadré 22

La gamme par tons

Elle s'obtient en prenant une note sur deux de l'échelle tempérée ; il en existe donc deux formes (et deux seulement), transposées l'une de l'autre :



Soit, en notation chiffrée :

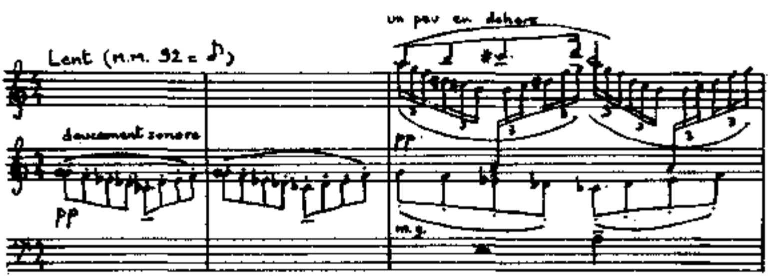
00. 02. 04. 06. 08. 10 et 01. 03. 05. 07. 09. 11

(Ces deux formes sont d'ailleurs disjointes).

La gamme par tons a tous ses intervalles successifs égaux, donc aucune note ne peut jouer le rôle de tonique.

Olivier Messiaen (né en 1908) l'a rangée parmi ses "modes à transpositions limitées" (c'est le premier mode). Auparavant, on la trouve chez Debussy (voir ci-dessous), mais aussi chez Dukas, Liszt, Schubert... et Mozart (Une plaisanterie musicale, 1787).

Voici le début de "Cloches à travers les feuilles", une des "Images pour piano" de Debussy (1905) (C'est la forme 2 qui est utilisée).



(Ed. Durand, 1908)

Encadré 23

Un autre tempérament égal : le TEQJ

Une étude expérimentale "fine" des harmoniques montre que les harmoniques successifs d'une corde de fréquence f n'ont pas exactement pour fréquences 2f, 3f, 4f, etc., mais des fréquences légèrement plus élevées (surtout dans le cas du piano). Ce phénomène est *l'inharmonicité.*

En accord avec cette constatation Serge CORDIER a eu l'idée d'un nouveau tempérament égal (conduisant à une nouvelle technique d'accordage) : il s'agit cette fois de diviser, non plus l'octave en 12 intervalles égaux, mais la quinte en 7 intervalles égaux. D'où un "tempérament égal à quintes justes" (TEQJ). Le demi-ton du TEQJ correspond donc au rapport de fréquences $\sqrt[7]{3/2}$ (contre $\sqrt[12]{2}$ pour le tempérament usuel), et l'octave du TEQJ au rapport $(3/2)^{12/7}$ (contre 2 pour le tempérament usuel).

Or $(3/2)^{12/7}$ est sensiblement égal à 2,0039. L'octave du TEQJ est donc légèrement plus grande que l'octave "classique" (écart : environ 3,3 cents), ce qui est plutôt en accord avec le phénomène d'inharmonicité signalé plus haut.

(Pour plus de détails, voir le livre de S. Cordier, cité en Bibliographie).

2
NOTRE ÉCHELLE TEMPÉRÉE

"Vous savez que les inventions humaines marchent du composé au simple, et que le simple est toujours la perfection".

A. DUMAS

L'échelle tempérée est, on l'a vu, basée sur un seul intervalle, le *demi-ton tempéré* (nous le noterons I), et l'octave (que nous noterons Ω) comporte 12 demi-tons : $\Omega = 12\ \mathrm{I}$.

I NOTATION

Tout intervalle de l'échelle sera de la forme p.I ($p \in Z$) ; les musiciens l'appellent "intervalle de p demi-tons" (ascendant si $p > 0$, descendant si $p < 0$).

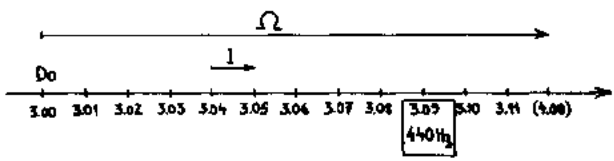
Les sons de l'échelle situés dans l'intervalle [f, 2f[ont pour fréquences $f_n = 2^{n/12} f$, avec $n \in \{0, 1, ..., 11\}$. On peut se contenter de les noter par leur indice (f_n s'écrira nI) ; alors, tout son du système pourra s'écrire $nI + p\Omega$ ($p \in Z$), ou encore $(n + 12\,p)I$.

En fait, il s'agit là d'une notation numérique de Z *dans la base 12,* où p est le chiffre des douzaines (positif ou négatif), et n celui des unités ; c'est cette notation qu'utilisent certains compositeurs actuels (P. Barbaud) qui utilisent l'informatique, en écrivant ainsi les douze chiffres unités :

00, 01, 02, ..., 09, 10, 11

Avec cette écriture en base 12, le chiffre des douzaines sera le *numéro d'octave* ; celui des unités pourra servir à qualifier les notes, puisque tous les sons d'une même note s'écriront avec le même chiffre des unités (Par exemple, Do correspondra à 00). Mais l'échelle n'est encore que relative, puisque les fréquences de tous les sons dépendent de l'une d'elles. Il suffit, pour que toutes les fréquences soient déterminées, d'en fixer une. Par une convention de 1939, il a été décrété que la fréquence du son 3.09 serait de 440 herz(*).

Pour résumer ce qui précède, voyez ci-dessous la représentation d'une partie de l'échelle, la "troisième octave" :



On donne également des "noms" aux sons de l'échelle : le nom d'un son sera celui de la note à laquelle il appartient, accompagné du numéro d'octave.

Exemples : 3.09 s'appellera "La 3"
4.03 s'appellera "Mi bémol 4" (ou "Ré dièse 4", puisque l'on a identifié les deux notes).

(Pour vous détendre, vous pouvez vous amuser avec les *Encadrés 24* et *25 : D'autres corps sonores* et *La Reine des Cloches*)

(*) *Il n'y a pas contradiction avec l'Encadré 8, car, si le La 3 (3.09) a pour fréquence 440 Hz, alors le Do 0 (0.00) a bien pour fréquence 32,7 Hz (environ).*

D'autres corps sonores

Encadré 24

Mes enfants ont un petit métallophone, dont les lames sont des morceaux coupés dans une même barre plate, de section constante. Curieux de nature, j'ai mesuré les longueurs des barres, et j'ai obtenu les résultats suvants (du grave à l'aigu) :

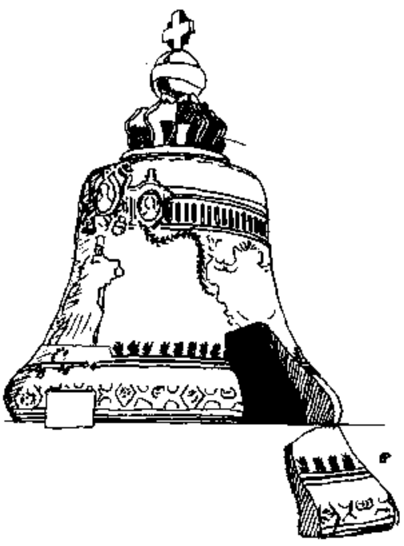
Note tempérée	DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO
Longueur en mm	124	117	110	107	101	95	90	88	83	78	76	72	68	64	62

Est-il possible de tirer de ce tableau une relation liant la fréquence du son émis et la longueur de la barre ?

(Réponse page 122).

La reine des cloches

Encadré 25



Au Kremlin, à Moscou, se trouve le clocher d'Ivan le Grand (terminé en 1600, sous le règne de Boris Goudounov). Ce clocher contient 31 cloches, ou plutôt 30 seulement, car la plus grosse d'entre elles, la Reine des Cloches (Tsar Kolokol) construite en 1733-35, est tombée en 1737, et a, depuis, été installée au pied de la tour, sur un socle de granit. "Elle pèse 12 000 pouds, mesure 6,14 m de haut, commente le guide, et 6,60 m de diamètre". Un visiteur curieux lui demande alors : "Quel son donnait donc Tsar kolokol ?" Et le guide, pas embarrassé du tout, de répondre : "C'est bien simple : admettons que la fréquence de vibration d'une cloche est inversement proportionnelle à la racine cubique de sa masse (ce qui est à peu près vrai). D'autre part, le gros bourdon de Notre-Dame, à Paris, qui donne le Ré 2, pèse 16 tonnes. Alors, faites-le calcul." Et vous, saurez-vous satisfaire la curiosité du touriste ? (1 poud ≃ 16,381 kg).

(Réponse page 122).

II UNE APPROCHE POSSIBLE DE LA STRUCTURE DE L'ÉCHELLE TEMPÉRÉE DANS LE PREMIER CYCLE :

On peut ici utiliser un carillon (improprement appelé "xylophone"), et ceci de deux façons différentes, suivant les élèves auxquels on a affaire et les possibilités matérielles.

a) *Carillon diatonique (1) à lames interchangeables :*

A l'état normal le carillon comporte les lames DO, RÉ, MI, FA, etc.. (non altérées) : on demande aux enfants d'essayer de jouer "Frère Jacques" (jusqu'à "Dormez-vous ?" inclus) sur le carillon. Ils s'apercevront alors qu'ils ne peuvent y arriver qu'en choisissant DO ou SOL comme note de départ (les lames sont marquées).

On se propose alors de *classer* expérimentalement les "écarts" entre deux lames consécutives du carillon, du point de vue de l'impression qu'en reçoit l'oreille (2). En effet, que l'on commence par DO ou par SOL, on a la même impression auditive : on "reconnaît" l'air ; or, dans chacun des cas, on a eu les correspondances suivantes entre "paroles" et "musique" (c'est-à-dire lames du carillon) :

Paroles	Frè	re	Ja	cques	(bis)	Dor	mez	vous ?	(bis)
1ère lame : DO	DO	RÉ	MI	DO	"	MI	FA	SOL	"
1ère lame : SOL	SOL	LA	SI	SOL	"	SI	DO	RÉ	"

On classera donc ensemble les écarts (DO, RÉ) et (SOL, LA) (correspondant à "Frè-re")

(RÉ, MI) et (LA, SI)
(MI, FA) et (SI, DO)
(FA, SOL) et (DO, RÉ)

Si maintenant on part de RÉ, on constate que la lame FA (correspondant au "Ja-" de "Jacques") n'est pas "bonne", car trop grave : il faudrait donc la remplacer par une lame "FA +", au son un peu plus aigu. Une telle lame existe dans le stock des lames inutilisées (la rechercher) et s'appelle "FA #".

Si on effectue le remplacement de FA par FA #, tout rentre dans l'ordre, ce qui fait qu'on a cette fois la correspondance :

Paroles	Frè	re	Ja	cques	Dor	mez	vous ?
1ere lame : RÉ	RÉ	MI	FA #	RÉ	FA #	SOL	LA

(1) *Diatonique :* ne comporte que les notes non altérées, par opposition à *chromatique,* qui comporte toutes les notes de l'échelle.

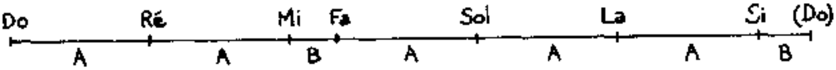
(2) Grâce à la relation d'équivalence sur les écarts : a $\mathcal{R}$ b $\Leftrightarrow$ l'écart entre les deux sons de a est analogue à l'écart entre les deux sons de b.

Première conséquence : L'écart (MI, FA) est plus faible que l'écart (MI, FA #), puisqu'on a été obligé de "monter" le FA.

Deuxième conséquence : On peut ranger les écarts en deux classes d'équivalence seulement (par comparaisons de proche en proche) :

Ecarts "de type A" : (DO, RÉ), (RÉ, MI) (FA, SOL), (SOL, LA), (LA, SI)
Ecarts "de type B" : (MI, FA) et (SI, DO)

L'octave peut donc se schématiser de la manière suivante :



Nous avons donc mis en évidence l'existence de 2 types d'écarts dans la gamme usuelle (majeure) : les "grands" (type A) sont les *tons*, et les autres (type B) les *demi-tons* (1).

Dans un second stade on peut envisager l'approche de la gamme chromatique, toujours sur l'air de "Frère Jacques", en changeant à chaque fois la note de départ :

- Si on commence par MI on est obligé de monter, outre le FA (→ FA #), le SOL (→SOL #)
- Si on commence par FA, on est cette fois obligé de baisser le SI (→ SI♭)(2)
- Si on commence par LA, il faut monter le DO (→ DO #).
- Enfin, si on commence par SI, il sera nécessaire de monter le DO (→ DO #), le RÉ (→ RÉ #) (3) et le FA (→ FA #).

Nous sommes alors en possession du tableau général suivant :

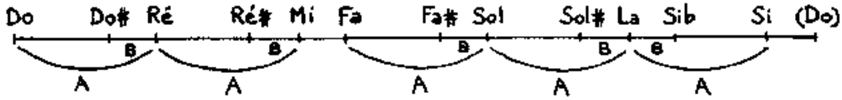
Paroles	Frè	re	Ja	cques	Dor	mez	vous ?
1ere lame : DO	DO	RÉ	MI	DO	MI	FA	SOL
1ere lame : RÉ	RÉ	MI	FA #	RÉ	FA #	SOL	LA
1ere lame : MI	MI	FA #	SOL #	MI	SOL #	LA	SI
1ere lame : FA	FA	SOL	LA	FA	LA	SI ♭	DO
1ere lame : SOL	SOL	LA	SI	SOL	SI	DO	RÉ
1ere lame : LA	LA	SI	DO #	LA	DO #	RÉ	MI
1ere lame : SI	SI	DO #	RÉ #	SI	RÉ #	MI	FA #

(1) Nous justifierons plus loin pourquoi on les appelle justement "demi-tons".

(2) Qui n'existe peut-être pas ; quelques tâtonnements permettront alors de voir que la lame marquée "LA #" fait très bien l'affaire.

(3) Voir note précédente. Ici, c'est peut-être "MI♭ " qu'on trouvera.

Le classement des écarts nous permet de répartir les 12 notes obtenues au total de la manière suivante :



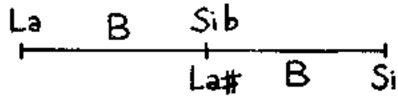
Sur ce schéma, nous voyons que les écarts de type A ont été "amputés" d'un écart de type B, ce qui fait que, si l'on considère maintenant la gamme de 12 notes, les écarts entre deux lames consécutives sont, ou bien de type B, ou bien d'un type C obtenu en "retranchant" un écart de type B d'un écart de type A.

Nous nous proposons donc maintenant de comparer les écarts de type B et les écarts de type C ; deux éventualités sont à envisager :

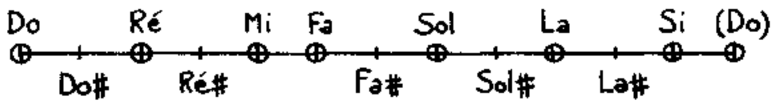
α) Nous avons déjà rencontré la lame "LA #" en commençant "Frère Jacques" par la lame FA, et nous l'avons identifiée avec SI ♭ ;

β) Sinon, on demande aux enfants de prendre comme note de départ FA # ; ils peuvent alors constater qu'ils doivent monter le SOL (→ SOL #), ainsi que le LA (→ LA #) et le DO (→ DO #). Par malchance, il n'y a pas de lame marquée "LA #". Une petite recherche montrera alors que la lame marquée "SI ♭ " joue le même rôle.

La conclusion à en tirer résultera d'une simple constatation : puisque LA # et SI ♭ donnent le même son, et que les écarts (LA, SI ♭) et (LA # , SI) sont tous deux de type B, nous avons forcément la configuration suivante :



... c'est-à-dire que les écarts de type B et de type C sont équivalents. Autrement dit, *un ton vaut bien deux demi-tons, et la division chromatique de l'octave se fait en douze parties équivalentes (demi-tons) :*



N.B. : Remarquant que les lames diésées sont un demi-ton plus haut, on peut alors faire admettre la généralisation de cette propriété (donc MI # = FA et SI # = DO), ainsi que la propriété du bémol d'abaisser le son d'un demi-ton (propriété rencontrée dans le cas de SI ♭).

Voilà donc les enfants en possession des 12 notes de la gamme chromatique (et, en plus, des 7 notes de la gamme majeure).

b) *Carillon chromatique à deux rangées de lames :*

Ce cas est analogue au précédent, à cette différence près qu'ici les lames correspondant aux notes altérées se trouvent sur une seconde rangée, au lieu d'être en réserve.

III LES TONALITES MAJEURES

Comme nous l'avons vu plus haut, la tonalité de Do majeur est (toujours dans la troisième octave) définie par :

Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si	(Do)
3.00	3.02	3.04	3.05	3.07	3.09	3.11	(4.00)

La tonalité de Do majeur est donc constituée des 7 notes : 00, 02, 04, 05, 07, 09, 11.

Elle apparaît comme extraite d'une échelle plus vaste, ce qui n'est pas un cas unique *(voir Encadrés 12, 21, 26 et 27)*. Une tonalité majeure sera définie, de façon générale, par la succession (ascendante) des intervalles successifs : 2I, 2I, I, 2I, 2I, 2I, I

Mais une tonalité n'est pas seulement un ensemble de notes, puisque la construction de Zarlino, comme celle de Pythagore, leur fait jouer des rôles différents. Une tonalité est en fait un *septuplet* de notes (ce qui justifie le nom de *degrés* donné à ces notes). Cependant, par abus de langage, nous appellerons également "tonalité" l'*ensemble* des notes.

Traditionnellement, on donne un nom à chaque élément de ce septuplet ; ce sont, dans l'ordre :

tonique/sus-tonique/médiante/sous-dominante/dominante/sus-dominante/sensible. Nous aurons par exemple, pour la tonalité de Mi bémol majeur :

Note	Mi b	Fa	Sol	La b	Si b	Do	Ré
Codage	03	05	07	08	10	00	02
Nom	tonique	sus-ton.	médiante	sous-dom.	domin.	sus-dom.	sensible

IV LES TRANSPOSITIONS

Dans le cas présent, la transposition associée à l'intervalle nI sera l'"addition" (algébrique) de n demi-tons (nous la noterons t_n).

Comme le système tempéré a été inventé dans ce but, c'est bien la moindre des choses que les transpositions n'en fassent pas sortir... Cependant, comme une tonalité ne comprend que 7 notes sur les 12, il n'est pas sûr que les transpositions la laissent (globalement) invariante. Voyons sur un exemple : la transposition de 4 demi-tons de Do majeur :

Note de Do majeur	00	02	04	05	07	09	11
Note transposée	04	06	08	09	11	01	03

4 des notes obtenues n'appartiennent pas à Do majeur :

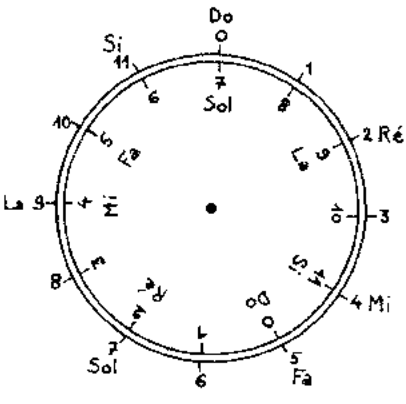
06, 08, 01 et 03

Quelle que soit la transposition envisagée, on obtient d'ailleurs des notes "étrangères". Le tableau ci-dessous rassemble les résultats, suivant le nombre (positif) de demi-tons de la transposition :

Nombre de demi-tons	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nombre de notes nouvelles	5	2	3	4	1	5	1	4	3	2	5

Remarque : La recherche qui conduit à ce tableau peut être facilitée par l'utilisation d'un "disque transpositeur", construit de la façon suivante :

Réalisons un "cadran d'horloge" en carton (cercle partagé en 12 arcs égaux), numéroté de 00 à 11 (le 12 de l'horloge est remplacé par 00). Chaque "chiffre" désigne, bien sûr, une note de l'échelle. Au centre de ce cadran fixons-en un autre, semblable mais de diamètre légèrement inférieur (grâce à une attache parisienne). Transposer de n demi-tons reviendra à faire correspondre au 00 du cadran fixe le n du cadran mobile. Ainsi, pour transposer de 7 demi-tons, nous placerons le 07 du cadran mobile en face du 00 du cadran fixe. Il ne restera plus alors qu'à lire la correspondance cadran fixe ⟶ cadran mobile :



(On peut même, sur chacun des cadrans, signaler les notes de Do majeur, pour faire apparaître plus clairement les notes communes).

V TONALITÉS MAJEURES VOISINES

Le tableau précédent fait apparaître deux transposées de Do majeur qui n'en diffèrent que par une seule note ; ce sont celles qui ont pour toniques 05 et 07. Ces deux tonalités (Fa majeur et Sol majeur) sont appelées tonalités majeures *voisines* de Do majeur (plus généralement, les tonalités voisines d'une tonalité majeure donnée seront ses transposées par t_5 et t_7, c'est-à-dire une quinte en dessous ou au-dessus).

Encadré 26

Musique à Bali

A Bali, chaque ensemble instrumental (principalement composé de métallophones) possède sa propre échelle (et un même village peut posséder jusqu'à dix ensembles, voire plus). Autant dire qu'il n'y a pas de véritable échelle musicale balinaise (du fait qu'il y en a trop !).

On en distingue cependant deux grands types, comme à Java :

— l'un, pentatonique, est pratiquement un tempérament égal ("slendro" javanais).

— l'autre, heptaphonique ("pelog" javanais), est plus variable, et comporte de grands et de petits intervalles.

Au sujet de cette dernière échelle, Urs RAMSEYER (voir Bibliographie) note :

"De même que notre musique est basée sur une gamme chromatique comprenant douze notes, formant le réservoir dont on tire les notes nécessaires pour former différentes gammes diatoniques majeures ou mineures, auxquelles on peut ajouter l'une ou l'autre note auxiliaire, les sept notes de la gamme (...) sont le réservoir dont on tire des compositions pentatoniques complétées par une ou deux notes auxiliaires".

RAMSEYER signale également une curiosité balinaise, qui se situe à l'opposé de nos conceptions occidentales :

"A l'intérieur des gammes comportant en tout sept notes disponibles, nous trouvons certaines notes se répétant deux fois. Dans ces cas-là, les deux notes identiques sont accordées de manière à produire une légère dissonance, causée par le nombre de vibrations que l'on fera diverger consciemment le plus possible d'une note à l'autre. (...) Selon l'ensemble des Balinais, seules les ondulations de ce genre permettront à une note de résonner, de "vivre"."

Un accordage qui recherche les battements ! Etonnant, n'est-ce pas ?

Dans Fa majeur (par rapport à Do majeur) le Si a été baissé d'un demi-ton ; c'est pourquoi on l'appelle Si ♭ de préférence à La#. De même, parmi les deux tonalités majeures voisines de Fa majeur, l'une (qui aura justement pour tonique le Si♭ précédent) n'en différera que par le Mi plus bas d'un demi-ton, qu'on appellera donc Mi ♭ ... Ainsi, de quinte descendante en quinte descendante, vont "apparaître" successivement les notes bémolisées Si ♭ , Mi ♭ , La ♭ , etc.. : c'est ce que l'on appelle l'*ordre des bémols,* les tonalités correspondantes étant les "tonalités à bémols". On arrêtera la progression au moment où l'on obtiendrait des notes doublement bémolisées, c'est-à-dire au bout de 7 quintes.

Sol majeur diffère de Do majeur par le Fa, qui est plus haut d'un demi-ton (et donc appelé Fa#). De quinte ascendante en quinte ascendante, on obtiendra successivement les notes diésées Fa#, Do#, Sol#... (*ordre des dièses*), les tonalités correspondantes étant les *tonalités à dièses.* On arrêtera également la progression au bout de 7 quintes. On peut remarquer que l'ordre d'"apparition" des dièses est inverse de celui des bémols, ce que l'on peut représenter par le schéma suivant :

$$\xrightarrow{\#}\qquad\qquad\qquad\qquad\xleftarrow{\flat}$$
$$\text{Fa}\quad\text{Do}\quad\text{Sol}\quad\text{Ré}\quad\text{La}\quad\text{Mi}\quad\text{Si}$$

PORTRAIT DE FAMILLE :

A) *Tonalités à dièses :*

Tonalités	Sol M.	Ré M.	La M.	Mi M.	Si M.	Fa#M.	Do#M.
Altérations	1 #	2 #	3 #	4 #	5 #	6 #	7 #

B) *Tonalités à bémols*

Tonalite	Fa M.	Si♭M.	Mi♭M.	La♭M.	Ré♭M.	Sol ♭M.	Do♭M.
Altérations	1	2	3	4	5	6	7

Remarque : Considérons les paires de tonalités suivantes :

{Si M., Do♭ M.} , {Fa#M., Sol♭ M.} , {Do#M., Ré ♭M.} .

Dans chaque paire, les deux tonalités sont formées des mêmes notes (mais une note donnée a deux *noms* différents, suivant la tonalité dans laquelle elle figure). Les éléments d'une même paire sont dits *enharmoniques* l'un de l'autre.

VI LES TONALITÉS MINEURES

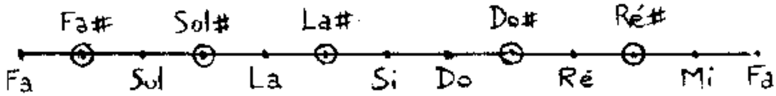
Nous avons vu, lors de l'étude du cycle des quintes, qu'il existait un autre mode que le mode majeur, le mode mineur "ancien", qui est obtenu par un simple changement de la note de base du mode majeur (dans le cas de Do majeur, on part de La au lieu de Do). Dans l'échelle

Encadré 27

Les touches noires du piano

On a coutume de dire que, si l'on joue uniquement sur les touches noires du piano, on obtient de la musique "genre chinois". C'est (presque) vrai.

Considérons en effet les notes FA #, SOL #, LA # DO #, RÉ # de l'échelle tempérée :



Prenons comme référence la fréquence f d'un FA #, et cherchons les représentants des autres notes qui se trouvent dans [f;2f[. Nous avons :

Note	Fa #	Sol #	La #	Do #	Ré #
Rapport de fréquences	1	$2^{2/12}$	$2^{4/12}$	$2^{7/12}$	$2^{9/12}$
Valeur approchée	1	1,122	1,259	1,498	1,682

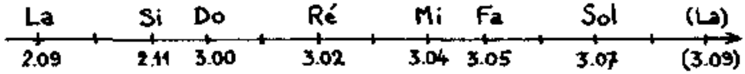
Dans l'échelle pentatonique "chinoise" nous aurions, nous l'avons vu :

Note	Fa #	Sol #	La #	Do #	Ré #
Rapport de fréquences	1	9/8	81/64	3/2	27/16
Valeur approchée	1	1,125	1,266	1,500	1,687

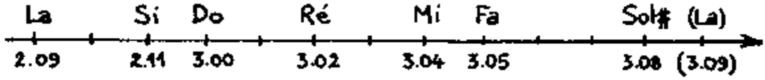
L'approximation est donc tout à fait acceptable (l'écart maximum, sur les La #, est inférieur à 8 cents). Ceci s'explique d'ailleurs par le fait que les notes diésées s'obtiennent, elles aussi, par des quintes ascendantes successives.

Les compositeurs occidentaux ne se sont pas privés d'utiliser la musique sur les touches noires pour composer des "chinoiseries". Voici, à titre d'exemple, un passage de "Laideronnette, impératrice des pagodes" (extrait de "Ma Mère l'Oye", de RAVEL) :

tempérée, la tonalité de La mineur ancien est donc le septuplet (09, 11, 00 , 02, 04, 05, 07) :



Mais, par suite de l'"attraction de la tonique", le Sol s'est trouvé haussé d'un demi-ton (→ Sol #) :



La tonalité de La mineur est donc finalement constituée du septuplet (09, 11, 00, 02, 04, 05, 08) et, plus généralement, une tonalité mineure "harmonique" est définie par la succession (ascendante) d'intervalles : 2I, I, 2I, 2I, I, 3I, I. C'est cet intervalle de 3I qui donne à la tonalité mineure son allure vaguement "orientale".

N.B. : On donne aux degrés de la tonalité mineure le même nom qu'aux degrés de la tonalité majeure.

VII NOTES MODALES, NOTES TONALES

1) On a remarqué que, dans les tonalités de X... majeur et de X... mineur (appelées tonalités *homonymes*), 5 degrés sont les mêmes, tandis que les deux autres sont plus bas d'un demi-ton en X...mineur. Ce sont :

— la médiante (3e degré)
— la sus-dominante (6e degré)

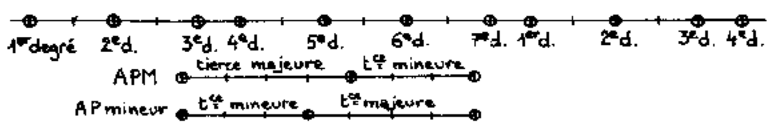
Ces deux degrés, qui différencient les deux modes, sont appelés *"notes" modales.*

2) D'autre part, nous avons vu dans la Première partie que la tonalité majeure (zarlinienne) pouvait être engendrée par trois APM, placés sur :

— la tonique (1er degré)
— la sous-dominante (4e degré)
— la dominante (5e degré)

Regardons plus précisément la nature des "accords" de 3 notes obtenus en prenant un degré sur deux de la tonalité majeure (il s'agit, bien sûr, des *approximations* tempérées des accords de l'échelle zarlinienne, mais nous leur donnerons le même nom, ainsi qu'aux intervalles).

Petits schémas pour soutenir le raisonnement :



Nous avons : 3 APM, placés sur les 1er, 4e et 5e degrés
3 AP mineurs, placés sur les 2e, 3e et 6e degrés
un accord non identifié, placé sur le 7e degré. Cet accord (constitué de deux tierces mineures "superposées") a reçu le nom de *quinte diminuée.*

Etant donné que, si on se limite au point de vue ensembliste, la tonalité mineure "ancienne" (sans sensible) n'est qu'une transposée de la tonalité majeure, on trouvera dans ce cas :

3 APM, placés sur les 3e, 6e et 7e degrés
3 AP mineurs, placés sur les 1er, 4e et 5e degrés
une quinte diminuée, placée sur le 2e degré.

Ceci nous permet de conclure :

Trois accords parfaits mineurs (resp. majeurs) placés sur les 1er, 4e et 5e degrés d'une tonalité mineure ancienne (resp. majeure) permettent d'engendrer toutes les notes de cette tonalité.

C'est pour cette raison que ces trois degrés sont appelés *"notes" tonales.*

Remarque : Si l'on considère, non plus la tonalité mineure ancienne, mais la tonalité mineure usuelle (ou "harmonique"), on trouve cette fois :

2 APM, placés sur les 5e et 6e degrés
2 AP mineurs, placés sur les 1er et 4e degrés
2 quintes diminuées, placées sur les 2e et 7e degrés
un accord non identifié, placé sur le 3e degré : c'est la *quinte augmentée,* constituée de deux tierces majeures superposées.

Nous disposons alors de la panoplie complète des accords de trois notes (en tant que couples de tierces, celles-ci pouvant être majeures ou mineures) :

tierce sup^re / tierce inf^re	mineure	majeure
mineure	quinte diminuée	AP mineur
majeure	APM	quinte augmentée

VIII RELATIVITÉ ET VOISINAGE

La tonalité de La mineur est appelée *tonalité mineure relative* de Do majeur (de par son origine), et, plus généralement, toute tonalité majeure a comme tonalité relative mineure celle qui a pour tonique son sixième degré.

Inversement, Do majeur est la *tonalité majeure relative* de La mineur.

Une tonalité majeure et sa relative mineure (harmonique) ne diffèrent que par une note, comme c'est le cas pour deux tonalités majeures "voisines".

On étend alors la notion de "voisinage" à l'ensemble des tonalités majeures *et* mineures, en décidant d'appeler tonalités voisines d'une tonalité majeure :

— *sa relative mineure*
— *ses tonalités majeures voisines*
— *les relatives mineures de celles-ci*

De même, on convient d'appeler tonalités voisines d'une tonalité mineure :

— *sa relative majeure*
— *les tonalités majeures voisines de celles-ci*
— *leurs relatives mineures*

(il s'agit bien d'une extension de la notion, puisque certaines des tonalités "voisines" diffèrent de la tonalité de départ de plus d'une note. En fait, si l'on avait conservé les tonalités mineures "anciennes", on n'aurait bien qu'une seule note étrangère dans tous les cas).

A quoi sert donc, en musique, cette notion de "voisinage" ? Voici :

Dans la musique "classique", une œuvre musicale se réfère à une *tonalité* (majeure ou mineure), c'est-à-dire qu'en *principe* on n'utilisera, dans le cours de l'œuvre, que les notes de ladite tonalité. En fait, un des aspects de l'art musical consiste justement à transgresser cette règle, mais de façon subtile : il s'agira de passer d'une tonalité à une autre (c'est ce que l'on appelle *moduler*), *sans choquer l'auditeur*. Le moyen d'y parvenir, c'est de n'introduire que le minimum de notes nouvelles, donc de ne moduler que dans une tonalité voisine.

IX LES NOMS DES INTERVALLES

a) Nous avons vu au I qu'un son quelconque de l'échelle tempérée pouvait être codé par un triplet formé :

1°) d'un des sept noms de note
2°) (éventuellement) d'une altération
3°) d'un numéro d'octave.

A ce nom de son on peut associer canoniquement le nom de son qui correspond aux :

— même nom de note
— même numéro d'octave

mais *sans altération*.

On définit ainsi une surjection (non injective) φ de l'ensemble des *noms de sons* de l'échelle tempérée sur le sous-ensemble Σ constitué des *noms de sons "non altérés"*.

Exemples : Fa # 2 $\longrightarrow$ Fa 2
Ré b 3 $\longrightarrow$ Ré 3
La 1 $\longrightarrow$ La 1

b) Pour déterminer le nom d'un intervalle défini par deux sons, codés α et α' :

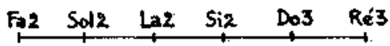
1°) on remplace α et α' par $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\alpha')$;
2°) on compte le nombre de sons "non altérés" séparant les sons codés $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\alpha')$, *ceux-ci inclus*. C'est ce nombre qui déterminera le nom que l'on donnera à l'intervalle :

Nombre de sons	2	3	4	5	6	7	8	9
Nom	seconde	tierce	quarte	quinte	sixte	septième	octave	neuvième

(Remarquons que les dénominations d'"octave", "quinte", "quarte" correspondent bien à ce que nous avons défini dans la Première partie (compte tenu de l'approximation du tempéré)).

Exemple : Comment nommerons-nous l'intervalle (Fa # 2, Ré b 3) ?

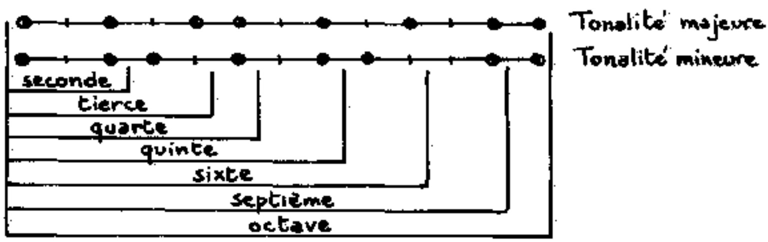
φ(Fa # 2) = Fa 2 et φ(Ré b 3) = Ré 3. De plus, entre Fa 2 et Ré 3, il y a 6 sons non altérés :



L'intervalle (Fa # 2, Ré b 3) est donc une *sixte*.

.... Mais on s'aperçoit tout de suite qu'on ne peut pas se contenter de ce seul nom : il est impossible d'identifier (Fa # 2, Ré b 3) et (Fa 2, Ré # 3) et qui sont pourtant toutes deux des sixtes ; la seconde est plus grande de 3 demi-tons que la première.

Le principe de discrimination consistera à se référer à deux étalons : la tonalité majeure et la tonalité mineure, en considérant les intervalles séparant la tonique des autres degrés :



Par convention, ces intervalles sont dits "majeurs" dans le cas de la tonalité majeure, *sauf* (traditionnellement) la quarte, la quinte et l'octave, qui sont dits "justes" (quoique certains musiciens contestent cette tradition).

Si nous regardons maintenant les intervalles dans le cas de la tonalité mineure, nous voyons que ce sont les mêmes que ci-dessus, sauf la tierce et la sixte (correspondant aux notes modales), qui sont plus petites d'un demi-ton. On les dit "mineures" et on généralise :

Définition : un intervalle *mineur* est plus petit d'un demi-ton que l'intervalle majeur de même nom (N.B. : Ceci ne vaut pas pour les intervalles justes).

Revenons maintenant à notre sixte (Fa # 2, Ré ♭ 3). Est-elle majeure, ou mineure ?

Dans la tonalité de Fa # majeur, la sixte (majeure) est (Fa # 2, Ré # 3). La sixte mineure est donc (Fa # 2, Ré 3). Notre sixte n'est donc ni majeure, ni même mineure. En fait, elle est plus petite d'un demi-ton que la sixte mineure. Un tel intervalle est dit "diminué".

Définition : Un intervalle plus petit d'un demi-ton que l'intervalle mineur ou juste de même nom est dit *diminué*.

Définition : Un intervalle plus grand d'un demi-ton que l'intervalle majeur ou juste de même nom est dit *augmenté*.

(N.B. : Remarquer que la quinte diminuée et la quinte augmentée sont également des noms d'accords (comportant d'ailleurs ces intervalles)).

X CONCLUSION

Malgré ses allures "modernes et affranchies", notre échelle tempérée continue à vivre avec son passé : Pythagore (structure des tonalités, ordre des dièses et des bémols,...) aussi bien que Zarlino (accords, notes tonales, ...).

Nous verrons plus loin (Quatrième partie) les efforts qui ont été faits depuis un siècle pour s'en débarrasser. Mais auparavant, nous allons revenir à des choses plus "classiques"....

3
QUELQUES PROCÉDÉS IMITATIFS DU CONTREPOINT

"Il n'existe point d'amour et de beauté dignes de ce nom sans loi et sans ordre".

J.S. BACH

Le contrepoint a pour objet l'étude de la musique dans son aspect "horizontal", c'est-à-dire mélodique. C'est lui qui régit la musique polyphonique, où des lignes mélodiques se superposent (les lois de l'harmonie venant ensuite régenter cette superposition). La forme la plus élaborée de la polyphonie est, sans conteste, la fugue, et nous allons ici en exposer quelques procédés.

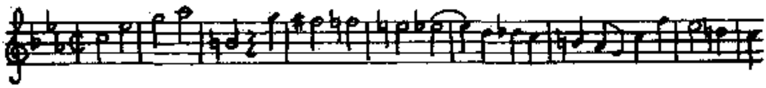
Une fugue est bâtie sur un *sujet*, thème *mélodique*, c'est-à-dire *succession* de sons de durées diverses (ces durées resteront en principe invariantes sauf dans *l'augmentation*, où elles seront doublées, et la *diminution*, où elles seront divisées par deux).

I DIAGRAMME MELODIQUE

Une mélodie peut être représentée graphiquement par une ligne brisée, dans un système d'axes où on porte :

— en abscisses, l'ordre d'apparition des sons (sans tenir compte des durées)
— en ordonnées, les nombres (en base 12) représentant ces sons.

Prenons l'exemple du thème de l'Offrande musicale de J.S. Bach *(Voir Encadré 28)* :



II TRANSPOSITION

Le sujet d'une œuvre contrapuntique est exposé plusieurs fois(*) mais, pour éviter la monotonie, le compositeur peut le transformer de plusieurs façons.

La manière la plus simple de transformer un thème musical est, bien sûr, de le transposer *(imitation directe)*. Mais, comme on l'a vu plus haut, la transposition fait moduler, donc introduit des notes étrangères à la tonalité ; pour en introduire le moins possible, les imitations se font, en général, à la quinte (inférieure ou supérieure) : on module ainsi dans une tonalité voisine.

C'est ainsi que nous trouvons, à la mesure 10 de l'Offrande :

dont le diagramme mélodique est :

(*) Notons au passage que la forme la plus simple de contrepoint imitatif est le *canon*, qui consiste à faire entendre simultanément un même thème sous la même forme dans plusieurs voix, avec un simple décalage dans le temps.

Encadré 28

L'Offrande musicale

Le Thème "royal" (sujet de l'Offrande musicale) est une énigme. Est-il de J.-S. Bach ? Est-il de Frédéric II ?

Quoi qu'il en soit, l'Offrande a vu le jour en 1747, à la suite d'une invitation du Cantor par le Roi de Prusse. Voici ce qu'en dit Bach lui-même dans la dédicace de l'œuvre :

"C'est avec un respectueux plaisir que je me souviens encore de la grâce toute royale que voulut bien me faire, il y a quelque temps, votre Majesté, en daignant me jouer, lors de ma présence à Potsdam, un sujet de fugue, et en daignant me demander de la traiter en son auguste présence."

Frédéric II était certes bon musicien (flûtiste talentueux et compositeur honorable), mais de là à composer un thème aussi brillant et aussi riche en possibilités !... En fait, il est plus vraisemblable de penser que ce thème doit un peu aux deux hommes. D'ailleurs, Bach n'a pas composé l'Offrande en une seule journée, comme il le dit lui-même :

"Je remarquai bientôt que, faute de la préparation nécessaire, il ne m'était pas possible de traiter un sujet aussi excellent de la façon qu'il méritait. Je me décidai alors à travailler ce sujet vraiment royal en toute perfection, et à le faire ensuite connaître au monde."

L'œuvre s'articule de la façon suivante :

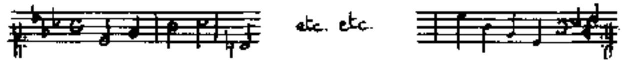
N° 1 : Ricercare à trois voix : (N.B. : le Ricercare est un style de musique "recherchée", comme son nom l'indique, sorte de fugue très élaborée).

N° 2 : Canon perpétuel : Le Thème royal sert de base à un canon à deux voix. Voici le début de la partition :

Que signifient ces deux clés sur la portée inférieure ? Eh bien, que cette portée en représente en fait *deux* : l'une à lire en clé de Sol, l'autre à lire en clé de Fa 4e ligne (avec en plus un décalage d'une mesure).

N° 3 : Cinq canons divers (accompagnant le Thème royal) :

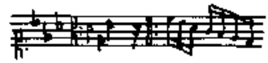
a) *Canon à deux :* En voici le début, et la fin :



Bach annonce un canon "à deux", et n'écrit qu'une seule ligne mélodique ! Il suffit de lire la partition en commençant par la fin (comme le suggère la clé écrite à l'envers) pour trouver la seconde voix (Krebscanon).

b) *Canon à deux. Violons à l'unisson.*

c) *Canon à trois, par mouvement contraire.* En voici le début :



Ceci correspond également à deux voix : une première lue normalement en clé d'Ut 1ère, et une seconde, lue en retournant la partition et en lisant de droite à gauche en clé d'Ut 3e (renversement sans modulation).

d) *Canon à deux, par augmentation et mouvement contraire :*

En exergue, Bach a écrit : "Notulis crescentibus crescat fortuna regis" (Avec les notes qui augmentent, que s'accroisse la fortune du roi). Cette fois on trouve :

Ici encore, deux voix ; la seconde est :

- décalée d'une demi-mesure
- renversée (clé à l'envers, comme dans le canon précédent)
- en augmentation (toutes les durées sont doublées).

En conséquence, il faudra jouer l'autre voix (ainsi que le thème) deux fois consécutivement, pour que tous terminent ensemble.

e) *Canon à deux. Par tons :*

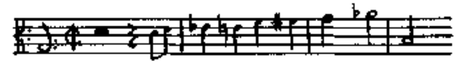
On trouve en exergue : "Ascendenteque modulatione ascendat gloria Regis" (Que la gloire du roi s'élève avec la modulation ascendante). La partition est reprise 6 fois consécutivement, mais en transposant d'un ton (au-dessus) à chaque fois. A la fin de la 6e fois, on sera donc ramené à la tonalité initiale, Do mineur (une octave = 6 tons).

N° 4 : Fugue canonique.

N° 5 : Ricercare à six.

N° 6 : Canon à deux. "Quaerendo invenietis" (Cherchez et vous trouverez).

Le début en est :



La clé à l'envers suggère (voir Nos 3 c et d) que la seconde voix doit être renversée. Mais cette fois, il s'agit d'un renversement exact.

N° 7. Canon à quatre.

N° 8. Sonate pour flûte traversière, violon et basse continue.

N° 9. Canon perpétuel, par mouvement contraire : Renversement exact, comme au n° 6.

Ce qui est le plus époustouflant, n'est-ce pas qu'avec autant d'ingéniosité (cf en particulier le N° 3d), l'on puisse arriver à composer d'aussi belle musique ?

Par rapport au sujet initial, il y a simplement eu translation verticale, à l'exception d'une note (*) en vertu de la *mutation* qui, dans une imitation à la quinte, transforme la dominante en la tonique (comme la tonique est transformée en la dominante).

III RENVERSEMENT

Une deuxième façon d'"imiter" un thème est le *renversement*. Le renversement est en fait une "symétrie affine" définie sur l'échelle tempérée par :

$$\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$$

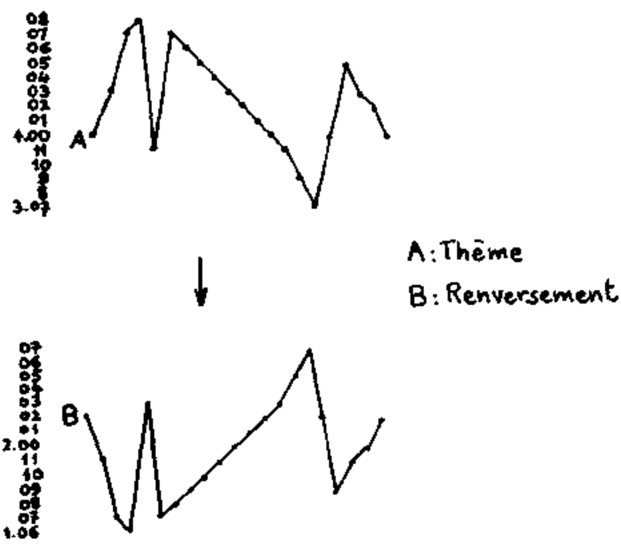
$$n \longmapsto k-n \quad \text{(k : entier relatif donné)}$$

Cette transformation inverse le sens des intervalles successifs du thème, tout en conservant leur amplitude.

Prenons, par exemple, k = 6.02 (toujours en notation duodécimale), et transformons le thème de l'Offrande :

4.00 ⟼ 2.02
4.03 ⟼ 1.11
4.07 ⟼ 1.07
4.08 ⟼ 1.06
3.11 ⟼ 2.03
etc...

D'où le diagramme mélodique :



Remarques :

a) le diagramme est symétrique de celui du thème par rapport à une horizontale.

b) cette forme est utilisée par Bach dans l'Offrande (dans les n° 6 (Canon à 2) et 9 (Canon perpétuel)), mais à partir d'une forme du thème légèrement modifiée.

IV RÉCURRENCE

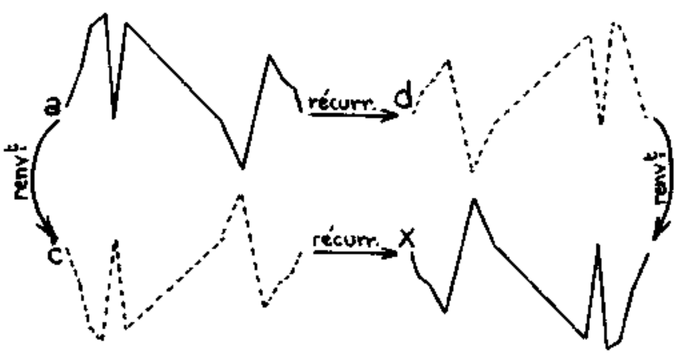
Autre procédé d'imitation : la *récurrence* (ou mouvement rétrograde). Il s'agit ici, tout simplement, de jouer le thème en commençant par la dernière note, et en remontant. D'où le nom allemand : Krebscanon (canon "à l'écrevisse").

La récurrence du thème de l'Offrande aura pour diagramme :

Le diagramme, bien sûr, est symétrique de celui du thème par rapport à la verticale. Le Krebscanon est utilisé par Bach dans l'Offrande au n° 3a (Canon à 2), à partir d'une légère variante du thème.

V UN GROUPE DE KLEIN

On peut également composer un renversement et une récurrence, ce qui donnera une quatrième forme du thème :



Remarques :

a) l'ordre dans lequel on utilise les deux procédés n'influe pas sur le résultat obtenu.

b) le diagramme obtenu est symétrique de celui du thème par rapport à un point.

Si maintenant nous notons $\mathcal{E}$ la transformation identique, A le renversement, B la récurrence et $C = A \circ B (= B \circ A)$ la composition des deux, nous obtenons, dans l'ensemble $\{\mathcal{E}, A, B, C\}$, le tableau suivant pour la loi de composition :

$\circ$	$\mathcal{E}$	A	B	C
$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}$	A	B	C
A	A	$\mathcal{E}$	C	B
B	B	C	$\mathcal{E}$	A
C	C	B	A	$\mathcal{E}$

Cette table est celle du groupe de Klein, ce qui n'est guère étonnant étant donné l'isomorphisme que nous avons remarqué avec le groupe des symétries planes par rapport à deux axes orthogonaux et leur intersection.

VI PROCÉDÉS VOISINS

Parmi les 3 procédés que nous venons de voir pour transformer un thème mélodique, deux sont "modulants" (font changer de tonalité) : la transposition et le renversement. Si l'on s'impose maintenant de rester à l'intérieur d'une même tonalité, on ne pourra plus, ni transposer, ni renverser *exactement* ; il faudra *adapter*, c'est-à-dire avoir recours à une approximation.

Restant à l'intérieur d'une tonalité, on pourra considérer la "sous-échelle" (au sens de "sous-ensemble") constituée des sons correspondant aux notes de la tonalité, et numéroter les sons de cette sous-échelle grâce à une numération à base 7, du même type que la numération à base 12 indiquée plus haut :

— *chiffre des unités* : On affecte le chiffre 0 à la tonique
1 à la sus-tonique
2 à la médiante
....
6 à la sensible.

— *chiffre des "septaines"* : On peut convenir (par exemple) d'affecter à chaque son qui correspond à la tonique son numéro d'octave, et le même chiffre aux 6 sons de la sous-échelle situés au-dessus de lui.
Exemple : tonalité de Sol dièse mineur :

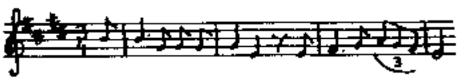
Son	Mi 3	Fax3	Sol # 3	La # 3	Si 3	Do # 4	Ré # 4	Mi 4	Fax4	Sol # 4
Codage	25	26	30	31	32	33	34	35	36	40

(N.B. : le signe x représente le "double dièse")

Dans la sous-échelle ainsi numérotée, l'addition d'une constante sera une imitation sans modulation (approximation de la transposition), et la "symétrie" sera un renversement sans modulation (approximation du renversement "exact").

Un procédé du même genre, mais modulant, est l'*imitation à l'unisson dans la tonalité homonyme,* c'est-à-dire la reprise d'un thème "majeur" en mineur, ou inversement.

Soit par exemple un thème écrit en X... majeur que l'on veut imiter à l'unisson en X... mineur. Il suffira pour cela de coder les sous-échelles correspondant aux sons de X... majeur et à ceux de X... mineur de la façon indiquée ci-dessus, puis de remplacer chaque son du thème par le son de la sous-échelle X... mineur portant le même numéro (bijection canonique). *Exemple* (extrait du "Voyage d'Hiver", de Schubert ; *Le Tilleul*) :



Ce passage est écrit en Mi majeur. La tonalité de Mi majeur donnera le codage suivant :

Son	Mi 3	Fa # 3	Sol # 3	La 3	Si 3
Codage	30	31	32	33	34

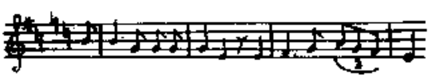
Le passage ci-dessus se transcrit alors :

34-34-32-32-32-32-30-30-31-32-33-32-31-30.

Le codage de Mi mineur qui correspond au passage précédent est :

Son	Mi 3	Fa # 3	Sol 3	La 3	Si 3
Codage	30	31	32	33	34

L'imitation du passage considéré sera alors :



On la trouve effectivement dans la suite de l'œuvre. Du point de vue de l'écriture, *seule l'armure a changé.*

Notons pour terminer que les différents types d'imitation peuvent bien entendu se composer (au sens de la composition des applications).

(A titre d'illustrations, *voir les Encadrés 28 et 29 : Made in U.S.A.*). On pourra également rechercher les imitations à l'audition des œuvres, tant classiques (du Moyen-Âge à nos jours) que "de variétés" (par exemple le thème des "Feuilles Mortes", de Joseph Kosma, ou celui des "Demoiselles de Rochefort", de Michel Legrand).

Encadré 29

Made in U.S.A.

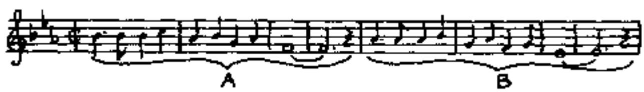
Les procédés imitatifs sont de toutes les époques, car ils permettent, comme nous l'avons vu, de faire réentendre un thème sous une forme qui ne soit pas toujours la même (pour éviter la monotonie), et de façon qu'il soit cependant reconnaissable.

En voici quelques exemples (parmi bien d'autres), puisés chez George GERSHWIN (1898-1937) :

1) *Dans "A Foggy Day"* (tiré de "A damsel in distress", 1937) nous trouvons :

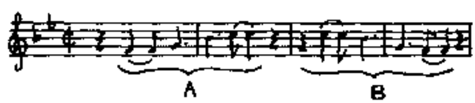
La phrase B est la *transposée* de la phrase A à la quarte supérieure (vous pourrez vérifier en "chiffrant" les deux phrases).

2) *Dans "Love walked in"* (tiré de "The Goldwyn Follies", 1937), nous trouvons :



La phrase B est l'*imitation sans modulation* de la phrase A, au degré inférieur. (Un chiffrage en base 7 dans la tonalité du morceau (Mi ♭ majeur) permet de s'en rendre compte).

3) *Dans le fameux "I got Rhythm"* (tiré de "Girl Crazy", 1930), le début du thème se décompose en deux fragments :



On voit dès l'abord que B est la *récurrence* de A... Mais c'est aussi un *renversement* de A. En effet, A se chiffre : 3.05/3.07/3.10/4.00

Considérons le renversement r défini par : $3.05 \longmapsto 4.00$
On aura alors : $3.07 \longmapsto 3.10$
et par conséquent (involutivité du renversement) : $3.10 \longmapsto 3.07$
$4.00 \longmapsto 3.05$

Ce qui montre que r(A) = B.

Présence d'Evariste Galois

R. TATON, J. DIEUDONNÉ
A. DAHAN, D. GUY

56 pages - 21 × 29,5

OBJECTIFS

A l'occasion du cent cinquantenaire de la mort de Galois, présenter des textes de Galois qui peuvent être lus et commentés aux élèves du secondaire ; rappeler en même temps l'importance des grandes idées que Galois a introduites dans de nombreux domaines mathématiques. S'il n'a pu, faute de temps, les développer comme il l'aurait certainement fait, elles ont fécondé le progrès des mathématiques et, dans ce sens, il y a une présence de Galois dans la science d'aujourd'hui.

SOMMAIRE

4

APERÇUS SUR LE XXe SIÈCLE

"Qui peut dire, par exemple, qu'il prenne goût à la Trigonométrie ou à l'Algèbre, s'il n'en a jamais rien appris ?
C'est à la connaissance d'une chose que se joint l'estime et l'amour pour elle."

Johann Joachim QUANTZ

I LES ATTAQUES CONTRE LA TONALITÉ

Au cours du 19ᵉ siècle, la prépondérance du vertical (harmonie) sur l'horizontal (mélodie) ne cessa de croître, à un point tel que le cadre tonal finit par apparaître comme un véritable carcan aux yeux d'un nombre de plus en plus grand de compositeurs. Bien sûr, on modulait de plus en plus, pour essayer d'échapper à l'emprise de la tonalité (voir *Encadré 30 : Fréquences de fréquences*), mais on restait malgré tout à l'intérieur d'un même système. Parmi les premiers qui tentèrent de s'en affranchir, il faut citer Liszt (1811-1886), avec en particulier la *Bagatelle sans tonalité*, au titre sans équivoque.

Trois moyens principaux furent envisagés à la fin du 19ᵉ siècle pour se libérer de la tonalité : le chromatisme, la modalité et la polytonalité.

Le *chromatisme* (avec Wagner (1813-1883) et Richard Strauss (1864-1949)) a surtout été un phénomène germanique. S'agissant d'un procédé consistant à "compléter" les 7 notes de la tonalité par tout ou partie des 5 autres notes de l'échelle, il était utilisé depuis la Renaissance comme procédé expressif (le Thème royal de l'Offrande musicale est chromatique). Mais avec Wagner il prend une dimension essentielle dans le discours musical (en particulier dans *Tristan et Isolde*, 1859).

La *modalité* et la *polytonalité* ont au départ plutôt été "franco-russes". Certains compositeurs (Moussorgsky (1839-1881), Rimsky-Korsakov (1844-1908), Ravel (1875-1937)) réutilisent les modes anciens, dont le fonctionnement était quelque peu différent de celui des tonalités *(Voir Encadré 6)*, mais en y introduisant, de manière plus ou moins inconsciente, des pratiques tonales (ce sera en fait une "modalité harmonique"). Certains également utiliseront des échelles particulières, puisées parfois dans l'exotisme ou le folklore *(Voir Encadrés 2 : La gamme par tons, et 27 : Les touches noires du piano)*. Aujourd'hui, la modalité trouve son évolution ultime avec Messiaen (né en 1908) et ses "modes à transpositions limitées" (voir III).

Quant à la polytonalité — avec, en particulier, Stravinsky (1882-1971) et Milhaud (1892-1974) —, elle consiste, comme son nom l'indique, en une superposition de deux lignes mélodiques (ou plus), écrites chacune dans une tonalité particulière.

Tous ces systèmes existent encore aujourd'hui, mais ils ne sont plus considérés que comme des moyens occasionnels d'écriture. Cependant, le procédé le plus radical pour se libérer de la tonalité consistait bien sûr à la nier, et c'est ainsi que l'on vit, au début de ce siècle, naître l'*atonalité* (plus précisément en 1908, avec Schoenberg (1874-1951)), c'est-à-dire la "suspension des fonctions tonales", et en particulier l'abolition de toute hiérarchie entre les douze notes de l'échelle tempérée. Ceci avait pour conséquence de mettre le compositeur en face d'un matériau brut, qu'il aurait tout loisir de modeler à sa guise. Mais Schoenberg semble avoir été quelque peu effrayé de cette liberté nouvelle qu'il venait d'octroyer au compositeur, et qui "constituait un dangereux ferment d'anarchie, ainsi

Encadré 30

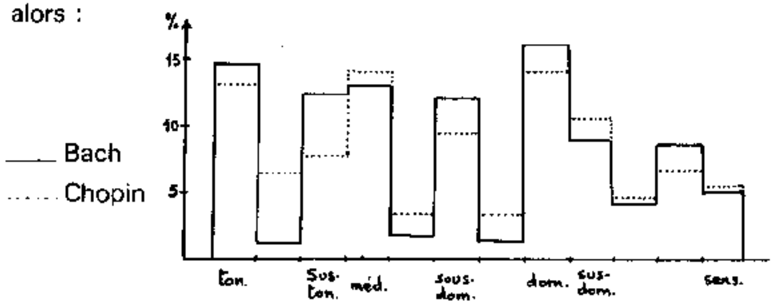
Fréquences de fréquences

On peut "s'amuser" (c'est fastidieux, mais pas totalement dénué d'intérêt) à dénombrer, sur une partition, les fréquences d'apparition des 12 notes de l'échelle (en convenant de ne compter que pour un les sons répétés, afin d'éviter d'avantager artificiellement certaines notes).

Voici, par exemple, les relevés de pourcentages effectués pour la *Partita pour flûte seule de J.-S. Bach* (BWV 1013) en La mineur (environ 2000 notes), et pour la *Première ballade de Chopin* (op. 23) en Sol mineur (env. 4000 notes) :

NOTE	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	Total
% B.	12,9	1,9	12,1	1,5	16,2	9,0	4,1	8,6	5,0	14,9	1,4	12,3	99,9
% Ch.	9,5	3,2	14,6	10,6	4,7	6,4	5,4	13,0	6,6	7,6	14,5	3,7	99,8

Ces tableaux seront, bien sûr, mieux visualisés par un histogramme (pourcentage en fonction de la note). Dans le cas de la musique tonale, et si l'on veut comparer deux histogrammes, on peut convenir de commencer par la tonique de la tonalité de l'œuvre. Pour les deux cas envisagés ci-dessus, nous obtiendrons alors :



Nous pouvons ici faire quelques constatations, du genre de celles qui suivent :

— Dans les deux cas, les trois degrés les plus fréquents sont : la tonique, la médiante et la dominante. Rien d'étonnant à cela, puisqu'il s'agit des trois notes de l'accord de base de la tonalité, celui qui affirme celle-ci au long de l'œuvre.

— Puis viennent la sus-tonique, la sous-dominante et la sus-dominante.

— La (relativement) faible fréquence de la sensible se justifie par le fait que la tonalité mineure peut se présenter sous plusieurs formes, dont (grosso modo) une forme où le 6ᵉ degré est situé *un demi-ton* au-dessous de la tonique (forme *avec* sensible), et une forme où ce 6ᵉ degré est placé *un ton* au-dessous (forme *sans* sensible).

On peut remarquer chez Chopin une fréquence nettement plus grande des notes les moins fréquentes. C'est ainsi que, pour les trois notes les plus "rares", on trouve un total de 11,6 % chez Chopin, contre 4,8 % chez Bach : la tonalité commence à être ressentie comme de plus en plus contraignante au 19ᵉ siècle, et en particulier les modulations se font plus fréquentes, plus "hardies", au sein d'un même morceau ; on ne se limite plus aux tonalités voisines. Dans la *Première Ballade*, par exemple (en Sol mineur : deux bémols), on trouve en effet des modulations dans des tonalités aussi "éloignées" que La Majeur (3 dièses), Sol # mineur (5 dièses) ou Mi ♭ mineur (6 bémols)... Ces modulations, bien sûr magnifiquement "préparées", nous font évoluer dans des horizons extrêmement diversifiés.

qu'une menace de dissolution pour la rationalité de l'œuvre musicale" (*). Ainsi entreprit-il de constituer une nouvelle organisation de l'espace sonore, qui aboutit au "dodécaphonisme" (ou *musique sérielle*) en 1923.

II LE DODÉCAPHONISME

Le système de Schoenberg (et de ses disciples de l'Ecole de Vienne : Alban Berg (1885-1935) et Anton Webern (1883-1945)) est fondé, nous l'avons dit, sur la non-hiérarchisation des 12 notes de la gamme. Schoenberg, en effet, ne s'intéresse qu'aux notes, et non pas aux sons, et il impose à ces notes des règles d'utilisation draconiennes ; en particulier :

— aucune des douze notes ne devra être privilégiée, et donc la fréquence d'apparition sera la même pour toutes.

— une note ne pourra réapparaître avant que les onze autres aient été entendues (règle du *total chromatique*).

Pour arriver à ceci, Schoenberg base son système de composition sur la *série, arrangement des douze notes* (cet arrangement est *chronologique*). C'est sur la série que se fondera l'unité d'une œuvre musicale.

L'ensemble des notes de l'échelle tempérée pourra être identifié à $\mathbf{Z}/_{12\mathbf{Z}}$ additif ; une transposition de notes sera une translation dans cet ensemble, et un renversement sera une symétrie.

(*) Francis BAYER (voir Bibliographie)

(Suite page 90)

Encadré 31

Les variations Opus 31

Notations : Dans ce qui suit, comme dans l'Annexe, nous appellerons, pour tout n-uplet de notes X :

$s(X)$ la récurrence de X ;

$-X$ le renversement de X ;

$X+i$ le transposé de X par t_i : $X+i = t_i(X)$.

En ce qui concerne plus particulièrement les Variations, la série de l'œuvre est, nous l'avons vu, S = 10.4.6.3.5.9.2.1.7.8.11.0(*). Et nous avons également posé : $\Sigma = -S+5 =$ 7.1.11.2.0.8.3.4.10.9.6.5.

Nous appellerons aussi S_A la "demi-série" formée des 6 premières notes de S :

S_A = 10.4.6.3.5.9. ; et S_B la demi-série constituée des 6 dernières :

S_B = 2.1.7.8.11.0. De même nous noterons Σ_A la première demi-série de Σ, et Σ_B la seconde : Σ_A = 7.1.11.2.0.8. et Σ_B = 3.4.10.9.6.5.

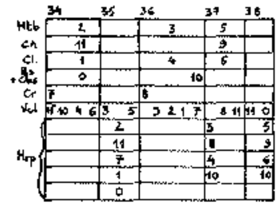
Nous avons remarqué que S_A et Σ_B sont constitués des mêmes notes (seul l'ordre diffère), de même (bien sûr !) que S_B et Σ_A (S est une série "renversable", *voir Annexe).* Par conséquent, si l'on fait entendre dans le même temps S et Σ, demi-série par demi-série, on aura la superposition suivante :

S_A	S_B
$\Sigma_A = S_B$	$\Sigma_B = S_A$

On pourra donc énoncer simultanément ces deux formes de la série sans faillir à la règle du "total chromatique", et il en sera de même pour leurs transposées par une même transposition. Schoenberg, on va le voir, ne s'en prive pas.

Codage de la partition : Pour qui voudrait étudier une œuvre sérielle, il peut être commode de coder la partition comme indiqué ci-après (il s'agit du début du Thème des Variations) :

(*) Nous simplifions le chiffrage des notes.



Les Variations (qui datent de 1927-28) se composent d'une Introduction (mesures 1 à 33), du Thème (mes. 34-57), de neuf Variations (més. 58-309) et d'un Final (mes. 310-520).

Dans l'Introduction, Schoenberg commence par "introduire goutte à goutte" les 12 notes de S, selon le schéma suivant :

Mesure	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_A	X		X		X		X	X	X	
Σ_A		X		X	X		X	X		X

Dès les mesures 9-10, le compositeur utilise la propriété particulière de S, de la façon suivante :

Mesure	9	10
Voix p^ale^	Σ_A	S_A
Accomp^t.^	S_A	Σ_A

Puis, il continue à superposer une voix principale (parfois deux) et un accompagnement, en "fragmentant" la série, c'est-à-dire en faisant entendre simultanément les deux demi-séries d'une même forme. Ainsi :

Mesure 19 : $\boxed{\begin{array}{c} S_B+6 \\ \hline S_A+6 \end{array}}$ Mesure 24 : $\boxed{\begin{array}{c} S_B \\ \hline S_A \end{array}}$ Mesure 25 : $\boxed{\begin{array}{c} \Sigma_B+4 \\ \hline \Sigma_A+4 \end{array}}$

Notons également l'utilisation, dans la mesure 21, du procédé "original-récurrence", consistant à superposer une demi-série sous la forme directe, et l'autre sous la forme récurrente (ce qui donnera, bien sûr, le total chromatique) ;

Ici : $S_A + 3$: 1.7.9.6.8.0.

$s(S_B) + 3$: 3.2.11.10.4.5.

(Aux mesures 24-25 apparaît, pour la première fois, le motif BACH (Si ♭ /La/Do/Si), énoncé en valeurs longues par les trombones).

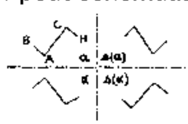
L'Introduction se termine par trois mesures où l'on réentend une dernière fois le total chromatique, sous la forme :

Mesure	31	32	33
S_A	xx	x x x	x
Σ_A	xxx	x x x	

Le Thème, lui, repose tout entier sur la propriété de S, et est bâti sur le schéma suivant (qui fait intervenir les 4 formes) :

Mesures	34-38	39-45	46-50	51-57
Voix p^ale^ 1	S	s(Σ)	s(S)	S + 3
Voix p^ale^ 2				Σ
Accomp^t^	Σ	s(S)	s(Σ)	s(S)

Revenons au motif BACH, qui réapparaît également dans la 2^e^ Variation, mais surtout dans le Finale, dont la première partie repose principalement sur lui. Ce motif apparaît à la fois sous la forme originale a (Alto + Violoncelle), et sous la forme renversée α, en valeurs plus longues (Cor). On peut d'ailleurs remarquer que $a + 3 = s(\alpha)$, ce que l'on peut schématiser de la façon suivante :



Le motif BACH ne présente donc que *deux formes*, au lieu des quatre habituelles.

Il y aurait certes beaucoup à dire encore sur cette œuvre maîtresse du dodécaphonisme que sont les Variations op. 31 de Schoenberg, mais cela nous entraînerait trop loin. Conseillons cependant au lecteur curieux d'*écouter* cette œuvre, s'il ne la connaît pas. Il ne sera pas "déçu du voyage", comme disent nos élèves...

(Suite de la page 86)

Car Schoenberg ne rejette pas tout ce qui l'a précédé, et en particulier il conserve les règles du contrepoint que nous avons évoquées plus haut. La série remplacera, d'une certaine façon, le thème tonal, et Schoenberg lui impose de n'apparaître (à une transposition près) que sous l'un des quatre avatars suivants :

— original
— renversement
— récurrence
— récurrence du renversement

La série pourra donc, dans l'œuvre musicale, se présenter sous 48 formes (puisqu'il y a 12 transpositions).

A titre d'exemple, prenons la série sur laquelle sont basées les *Variations pour orchestre (op. 31)* de Schoenberg ; il s'agit là de la première œuvre sérielle de grandes dimensions du maître viennois, et on a pu l'appeler "la Neuvième Symphonie de notre temps".

Voici la série, telle qu'elle est donnée au début du thème (mesures 34-38) par les violoncelles :

Cette série se transcrit : 10.04.06.03.05.09.02.01.07.08.11.00 = S (N.B. : l'avant-dernière note (Si) est répétée ; mais la répétition n'était, aux yeux de Schoenberg, qu'une façon particulière de jouer la note).

Une chose peut sembler ardue, au premier abord, dans la composition sérielle : la superposition de plusieurs lignes "mélodiques" ; en effet, si deux "voix" chantent simultanément deux formes *différentes* de la série, il y a peu de chances pour que la règle du "total chromatique" soit respectée. Par exemple, prenons la série S, et son transposé au demi-ton supérieur S + 1 : 11.05.07.04.06.10 etc. ; lorsque les 6 premières notes de chaque forme ont été émises, on a déjà entendu deux fois les notes 04, 05, 06 et 10, alors que 00, 01, 02 et 08 ne sont pas apparues. Schoenberg a résolu ce problème de façon élégante en n'utilisant presque uniquement, dans ses œuvres, que des séries possédant la propriété suivante : *les six premières notes de la série et les six premières de l'un de ses renversements donnent le "total chromatique" (Voir Annexe p. 108).*

(N.B. : Il n'y a guère plus d'une série sur trois qui jouit de cette propriété).

C'est ce qui se passe pour la série des Variations :

Considérons, dans $\mathbf{Z}/_{12\mathbf{Z}}$, le renversement (= symétrie) défini par $n \longmapsto 5-n$. Nous aurons alors : $10 \longmapsto 07$
$04 \longmapsto 01$, etc...

Le renversement correspondant de la série S sera donc :

$$\Sigma = 07.01.11.02.00.08.03.04.10.09.06.05$$

On constate que les six premières notes de Σ forment, avec les six premières notes de S, le total chromatique. En conséquence, si l'on énonce simultanément les formes S et Σ dans deux voix différentes, par demi-séries de six notes, on obtiendra successivement deux fois le total chromatique.

Nous remarquons que, si S est associé à Σ, à un transposé de S sera associé le transposé correspondant de Σ, à un renversement de S le renversement correspondant de Σ, etc.

Comme on peut en juger par ce qui précède, la musique de Schoenberg est donc aussi fortement structurée (sinon plus) que la musique de l'époque dite "classique", et en particulier que celle de Bach. Schoenberg reconnaissait d'ailleurs volontiers cette filiation, au point que, dans les Variations, apparaît (dans la 2e variation, et surtout au Finale) le thème suivant :

qui, transcrit dans la notation littérale des musiciens germaniques, donne : B.A.C.H.... (Pour plus de détails, *voir Encadré 31).*

III A LA RECHERCHE DES MODES A TRANSPOSITIONS LIMITÉES

Si l'on considère un sous-ensemble quelconque A (non vide) de l'ensemble E des notes de l'échelle chromatique (identifiée à $\mathbf{Z}/_{12\mathbf{Z}}$ additif) (*), ce sous-ensemble différera en général de chacun de ses 11 transposés possibles $t_i(A)$, où t_i est la transposition de i demi-tons, définie par

$$t_i : E \longrightarrow E.$$
$$x \longmapsto x+i$$

C'est le cas, nous l'avons vu, de toute tonalité, majeure ou mineure.

Par contre, il peut se faire que A coïncide avec l'un de ses transposés (cas de la "gamme par tons" T — *voir Encadré 21* — qui est égale à $t_2(T)$ et, plus généralement, à $t_i(T)$ pour tout i pair de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$).

C'est le problème que s'est posé Olivier Messiaen (né en 1908) dès 1929 (voir Bibliographie), dans le but de rechercher "un certain effet d'ubiquité tonale", et de susciter chez l'auditeur "le charme étrange des impossibilités". Nous formulerons ce problème de la façon suivante :

Déterminer les sous-ensembles propres de l'échelle chromatique E qui sont globalement invariants par une transposition différente de l'identité.

D'où la

Définition : On appelle "ensemble à transpositions limitées" tout sous-ensemble X de E tel que : $\exists i \in E - \{0\}\ t_i(X) = X$.

(*) N.B. : Pour simplifier l'écriture, nous noterons les éléments de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ sous la forme 0,1,2,...9,10,11,12 au lieu de 00,01,02,...,09,10,11,12.

Autrement dit : Soit $I_X = \{i \,;\, i \in E \,;\, t_i(X) = X\}$ (I_X est un sous-groupe de E : c'est le *groupe d'isotropie* (ou *stabilisateur*) de X pour les translations). Alors $I_X \neq \{0\}$.

(Remarquons que I_X est cyclique ; on pourra donc trouver j tel que $I_X = <j>$, sous-groupe de E engendré par j. (*)).

On a le théorème suivant :

Théorème 1 : Si X est un ensemble à transpositions limitées, il en est de même de tous ses transposés. (Autrement dit : tous les éléments de l'orbite de X sont également des ensembles à transpositions limitées).

Soit donc X un ensemble à transpositions limitées (vérifiant $t_i(X) = X$), et $X' = t_j(X)$ l'un quelconque de ses transposés. On a $t_i(X') = t_i(t_j(X)) = t_j(t_i(X)) = t_j(X) = X'$.

Conséquence : Parmi tous les transposés de X, il y en a au moins un qui contient la note 0.

Nous ne restreindrons donc pas le problème en ne cherchant que les ensembles à transpositions limitées *contenant 0*, les autres étant obtenus par transposition de ceux-ci. Nous noterons A ces ensembles à transpositions limitées contenant 0.

Théorème 2 : Soit X un ensemble à transpositions limitées, vérifiant $t_i(X) = X$. Si la note x appartient à X, il en est de même de $x+i$, $x+2i$, ..., $x+11i$.

(Autrement dit : X contient l'orbite x_i de x par action de $<i>$).

En effet : $x \in X \Rightarrow t_i(x) \in t_i(X) = X$, c'est-à-dire $x+i \in X$, etc.

(Remarque : Le cardinal de x_i est égal à l'indice de I_x dans E).

On en déduit immédiatement le

Théorème 3 : Soit X un ensemble à transpositions limitées, et I_X son groupe d'isotropie. Pour tout x de X et tout i de I_X, on a $x_i \in X$, et X est une réunion (disjointe) de tels ensembles.

(Remarque : Le cardinal de X est un multiple de l'indice de I_x dans E).

Voyons maintenant quels sont les ensembles A à transpositions limitées que nous pouvons obtenir. Puisque les groupes d'isotropie I_A de ces ensembles A sont des sous-groupes de E, $\mathrm{Card}(I_A)$ est un diviseur de 12.

Etudions les différents cas qui peuvent se présenter :

(*) Dans $\mathbb{Z}/_{12}\mathbb{Z}$, rappelons que l'on a $<1> = <5> = <7> = <11>$, $<2> = <10>$, $<3> = <9>$, $<4> = <8>$.

1) Si $Card(I_A) = 12$ *:* Alors $I_A = E$, et on a un seul ensemble A : $A_1 = E$ (trivial).

2) Si $Card(I_A) = 6$ *:* Alors $I_A = \{0,2,4,6,8,10\} = \langle 2\rangle$

A devant contenir 0, contiendra également les notes 2,4,6,8 et 10.

De plus, si A contient 1, il contiendra aussi 3,5,7,9,11.

Nous aurons donc ici un nouvel ensemble A : $A_2 = \{0,2,4,6,8,10\}$ (gamme par tons) (l'échelle chromatique E $(=A_1)$, déjà trouvée, est à rejeter).

3) Si $Card(I_A) = 4$ *:* Alors $I_A = \{0,3,6,9\} = \langle 3\rangle$

A contiendra 0,3,6,9.

Si A contient 1, il contiendra aussi 4,7,10.

Si A contient 2, il contiendra aussi 5,8,11.

Ceci nous permet de constituer 3 nouveaux ensembles A :

a) un ensemble à 4 notes : $A_3 = \{0,3,6,9\}$;

b) deux ensembles à 8 notes :
$A_4 = \{0,3,6,9\}\cup\{1,4,7,10\} = \{0,1,3,4,6,7,9,10\}$
et $\{0,3,6,9\}\cup\{2,5,8,11\} = \{0,2,3,5,6,8,9,11\}$,
qui n'est autre que le transposé de A_4 par t_2 ;

4) Si $Card(I_A) = 3$ *:* Alors $I_A = \{0,4,8\} = \langle 4\rangle$

A contiendra 0,4 et 8.

Si A contient 1, il contiendra aussi 5 et 9.

Si A contient 2, il contiendra aussi 6 et 10.

Si A contient 3, il contiendra aussi 7 et 11.

Nous pourrons alors former 6 nouveaux ensembles A, qui seront :

a) un ensemble à 3 notes : $A_5 = \{0,4,8\}$;

b) deux ensembles à 6 notes : $A_6 = \{0,1,4,5,8,9\}$et son transposé par t_3 : $\{0,3,4,7,8,11\}$; (la gamme par tons A_2 est à exclure)

c) trois ensembles à 9 notes : $A_7 = \{0,2,3,4,6,7,8,10,11\}$ et ses transposés — par t_1 : $\{0,1,3,4,5,7,8,9,11\}$,
— par t_2 : $\{0,1,2,4,5,6,8,9,10\}$

5) Si $Card(I_A)=2$ *:* Alors $I_A = \{0,6\} = \langle 6\rangle$

A contiendra 0 et 6.

Si A contient 1, il contiendra également 7 ;

Si A contient 2, il contiendra également 8.

......

Si A contient 5, il contiendra également 11.

Nous avons ici 32 ensembles A :

a) un ensemble à 2 notes : $A_8 = \{0,6\}$;

b) cinq ensembles à 4 notes : $A_9 = \{0,1,6,7\}$ et son transposé par t_3 : $\{0,5,6,11\}$; $A_{10} = \{0,2,6,8\}$ et son transposé par t_4 : $\{0,4,6,10\}$; et aussi A_3, déjà obtenu précédemment ;

c) C_5^2, soit 10 ensembles à 6 notes :

- $A_{11} = \{0,1,5,6,7,11\}$ et ses transposés
  — par t_1 : $\{0,1,2,6,7,8\}$
  — par t_{11} : $\{0,4,5,6,10,11\}$;
- $A_{12} = \{0,1,3,6,7,9\}$ et ses transposés
  — par t_3 : $\{0,3,4,6,9,10\}$
  — par t_5 : $\{0,2,5,6,8,11\}$;
- $A_{13} = \{0,1,4,6,7,10\}$ et ses transposés
  — par t_2 : $\{0,2,3,6,8,9\}$
  — par t_5 : $\{0,3,5,6,9,11\}$;
- La gamme par tons (à exclure).

d) C_5^3, soit 10 ensembles à 8 notes :

- $A_{14} = \{0,1,2,5,6,7,8,11\}$ et ses transposés
  — par t_1 : $\{0,1,2,3,6,7,8,9\}$
  — par t_4 : $\{0,3,4,5,6,9,10,11\}$
  — par t_5 : $\{0,1,4,5,6,7,10,11\}$;
- $A_{15} = \{0,2,4,5,6,8,10,11\}$ et ses transposés
  — par t_1 : $\{0,1,3,5,6,7,9,11\}$
  — par t_2 : $\{0,1,2,4,6,7,8,10\}$
  — par t_4 : $\{0,2,3,4,6,8,9,10\}$;
- A_4 et son transposé par t_2, déjà trouvés, donc à exclure.

e) Cinq ensembles à 10 notes : $A_{16} = \{0,1,2,3,5,6,7,8,9,11\}$ et ses transposés

— par t_1 : $\{0,1,2,3,4,6,7,8,9,10\}$
— par t_3 : $\{0,2,3,4,5,6,8,9,10,11\}$
— par t_4 : $\{0,1,3,4,5,6,7,9,10,11\}$
— par t_5 : $\{0,1,2,4,5,6,7,8,10,11\}$

f) L'ensemble E.

Remarque : Les ensembles à transpositions limitées qui comportent 6 notes ne sont — bien sûr — autres que les ensembles A correspondant aux séries "semi-transposables" (définies dans l'*Annexe*).

A partir des 16 ensembles A_i répertoriés ci-dessus, nous pourrons engendrer, par transposition, tous les ensembles à transpositions limitées.

Récapitulons maintenant les résultats obtenus dans un tableau, en fonction des I_A et du nombre de notes des A_i (nous ne considérerons plus, désormais, que les sous-ensembles *propres* ($\neq A_1$)) :

I_A	$\mathrm{Card}(A_i)$	A_i
<2>	6	$A_2 = \{0,2,4,6,8,10\}$
<3>	4	$A_3 = \{0,3,6,9\}$
	8	$A_4 = \{0,1,3,4,6,7,9,10\}$
<4>	3	$A_5 = \{0,4,8\}$
	6	$A_6 = \{0,1,4,5,8,9\}$
	9	$A_7 = \{0,1,2,4,5,6,8,9,10\}$
<6>	2	$A_8 = \{0,6\}$
	4	$A_9 = \{0,1,6,7\}$ $A_{10} = \{0,2,6,8\}$
	6	$A_{11} = \{0,1,5,6,7,11\}$ $A_{12} = \{0,1,3,6,7,9\}$ $A_{13} = \{0,1,4,6,7,10\}$
	8	$A_{14} = \{0,1,2,5,6,7,8,11\}$ $A_{15} = \{0,2,4,5,6,8,10,11\}$
	10	$A_{16} = \{0,1,2,3,5,6,7,8,9,11\}$

Voici ce qu'en dit MESSIAEN :

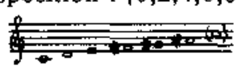
"Ces modes sont formés de plusieurs groupes symétriques (*), la dernière note de chaque groupe étant toujours "commune" avec la première du groupe suivant. Au bout d'un certain nombre de transpositions chromatiques qui varie avec chaque mode, ils ne sont plus transposables — la 4^e^ transposition donnant exactement les mêmes notes que la 1ère, par exemple, la 5^e^ donnant exactement les mêmes notes que la 2^e^, etc."

Messiaen dénombre 7 modes à transpositions limitées, et il précise : "Il est mathématiquement impossible d'en trouver d'autres, au moins dans notre système tempéré à 12 demi-tons."

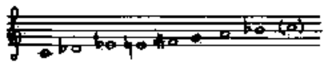
Ces 7 modes sont :

1^er^ mode : La gamme par tons, admettant deux "transpositions" :

- première transposition : $\{0,2,4,6,8,10\}$ (c'est notre A_2) :

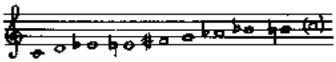


- deuxième transposition : $\{1,3,5,7,9,11\}$

2^e^ mode : $\{0,1,3,4,6,7,9,10\}$: 

Ce mode correspond à notre A_4 ; il admet 3 transpositions.

(*) *symétriques* est ici à prendre au sens de "semblables", c'est-à-dire identiques modulo une transposition.

3ᵉ mode : {0,2,3,4,6,7,8,10,11} : 

Il correspond à notre A_7 et admet, lui aussi, 4 transpositions.

4ᵉ mode : {0,1,2,5,6,7,8,11} : 

Correspond à notre A_{14}. 6 transpositions.

5ᵉ mode : {0,1,5,6,7,11} : 

Correspond à notre A_{11}. 6 transpositions.

6ᵉ mode : {0,2,4,5,6,8,10,11} : 

Correspond à notre A_{15}. 6 transpositions.

7ᵉ mode : {0,1,2,3,5,6,7,8,9,11} : 

Correspond à notre A_{16}. 6 transpositions.

Au sujet du 5ᵉ mode, Messiaen indique :

"Ce mode 5, étant un mode 4 tronqué, n'a droit de cité ici que parce qu'il engendre la formule mélodique (...) : 

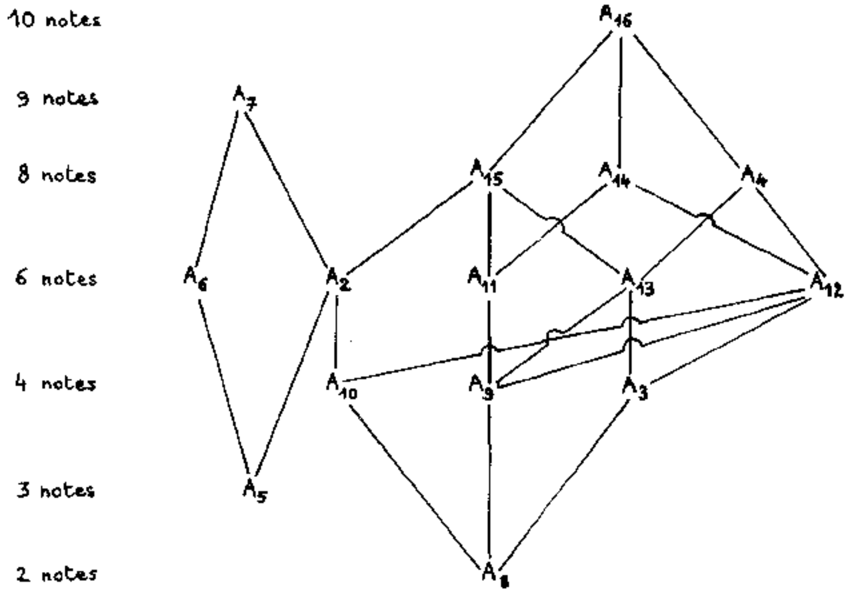
et l'accord en quartes (...) :  "

On pourrait alors penser qu'il a choisi, pour chaque I_A, les éléments maximaux. Le tableau de la page 95 nous montre que c'est le cas pour 4 des 7 modes (les 1ᵉʳ, 2ᵉ, 3ᵉ et 7ᵉ), mais pas pour les trois autres. Le cas du 5ᵉ mode vient d'être vu, mais qu'en est-il pour les deux autres ?

Pour visualiser l'ensemble T des ensembles propres à transpositions limitées, définissons la relation suivante dans T :

Définition : $A_i < A_j \iff A_i$ *est inclus dans* A_j*, ou un de ses transposés.*

On vérifie sans trop de peine qu'il s'agit d'une relation d'ordre dans l'ensemble-quotient de T par les transpositions. Le graphe correspondant à cette relation est le suivant :



L'hypothèse de la "maximalité" ne pouvant être retenue, cherchons autre chose. En fait l'explication repose certainement, malgré tout, sur le nombre de notes des ensembles : un mode musical doit contenir un nombre de notes "convenable", c'est-à-dire ni trop grand, ni trop petit. Or, on peut remarquer que tous les modes de Messiaen ont au moins 6 notes, et (sur le graphe) que, sur les 5 classes correspondant à des ensembles à 6 notes, deux sont des modes (A_2 et A_{11}) et trois n'en sont pas (A_6, A_{12} et A_{13}). Et ces deux "modes à 6 notes" ne sont admis par Messiaen que pour des raisons spéciales ("par protection", en quelque sorte) :

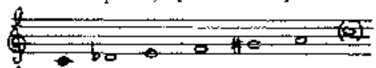
• *En ce qui concerne A_2 (mode 1)*, ce mode (gamme par tons) a déjà été utilisé avant Messiaen ; il a donc une existence attestée, et pour cette raison on ne saurait lui refuser une place (reconnaissance *de facto*) : "Claude Debussy (dans "Pelléas et Mélisande") et après lui Paul Dukas (dans "Ariane et Barbe-Bleue") en ont fait un usage si remarquable qu'il n'y a plus rien à ajouter. Nous éviterons donc soigneusement de nous en servir".

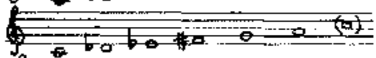
• *Pour ce qui est de A_{11} (mode 5)*, nous avons déjà vu ce qu'il en était : la "formule mélodique" qu'il cite est une cellule musicale (constituée d'une forme directe et de son renversement) que Messiaen prise particulièrement. C'est la seule raison qu'il invoque pour lui accorder "droit de cité" au sein de ses modes.

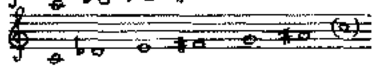
Finalement, les modes à transpositions limitées d'Olivier Messiaen correspondent aux ensembles à transpositions limitées propres qui ont plus de 6 notes, auxquels sont adjoints deux ensembles à 6 notes :

— la gamme par tons, pour des raisons historiques ;
— le mode défini par {0,1,5,6,7,11}, pour des raisons personnelles à Messiaen.

D'un point de vue strictement mathématique, nous avons cependant vu que, en imposant comme seul critère à un mode de contenir au moins 6 notes, on en obtient trois de plus, qui correspondent :

• à {0,1,4,5,8,9} : 

• à {0,1,3,6,7,9} : 

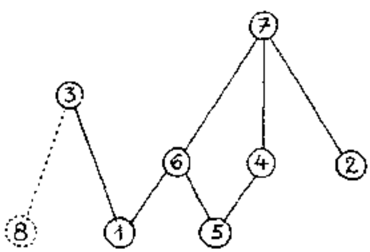
• à {0,1,4,6,7,10} : 

Parmi ces trois modes "apocryphes", le premier est un mode 3 "tronqué" (comme dit Messiaen), et les deux autres des modes 2 tronqués (comme la gamme par tons est un mode 3 tronqué, et le mode 5 un mode 4 tronqué). Les deux derniers sont d'ailleurs signalés — pour être rejetés — par Messiaen (*).

... Mais on ne trouve rien sur le premier, qui pourtant fournit un "accord en tierces" qui n'est pas vilain :

D'autre part, il joue un rôle tout à fait intéressant du point de vue sériel : en effet, associé à la gamme par tons et au 5ᵉ mode (c'est-à-dire justement aux deux modes acceptés "à la limite"), il permet d'engendrer les séries superstables (**). En conclusion, ne pourrait-on envisager d'accorder à {0,1,4,5,8,9} le statut de "mode à transpositions limitées" à part entière ?

La structure de l'ensemble des modes pour la relation définie plus haut serait alors (le mode "apocryphe" est noté 8) :



(*) Ainsi que deux "modes 5 tronqués", qui ne sont en fait que deux formes du même ensemble, A_9.
(**) Voir *Annexe*.

Encadré 32

Musique et algèbre de Boole

Dans *Herma,* pour piano seul (composé en 1961), Iannis XENAKIS (né en 1922) considère l'ensemble R des sons correspondant aux 88 touches du piano, et il en distingue trois sous-ensembles A,B et C, constitués chacun d'une trentaine d'éléments.

Dans l'œuvre, le compositeur expose tout d'abord les sons de R (ou plutôt un "nuage" (*) de sons obtenu aléatoirement à partir de R), puis ceux de A, ceux de $\bar{A}$ (complémentaire de A dans R), B,$\bar{B}$,C et $\bar{C}$. Ensuite, il fait de même pour les ensembles AB,BC,...,BC + AB,...,AB + $\bar{A}\bar{B}$,...,$\bar{A}\bar{B}$C,... en utilisant de façon de plus en plus complexe les opérations de réunion (addition) et d'intersection (multiplication). Pour finir, il expose ABC + A$\bar{B}\bar{C}$ + $\bar{A}$B$\bar{C}$ + $\bar{A}\bar{B}$C.

(Il faut cependant noter que, pour des raisons d'ordre musical, Xénakis est amené à commettre des entorses à la rigueur mathématique de son projet initial. C'est ainsi que, par exemple, les expositions de B et de $\bar{B}$ comportent 11 sons communs).

(*) "Nuage" est ici à prendre au sens statistique.

On peut d'ailleurs trouver un élément de justification de ce "8^e mode" chez Messiaen lui-même. En effet, lorsqu'il parle du 3^e mode (dont est extrait notre 8^e), il donne une formule de cadence (dans la 4^e transposition) qui est la suivante (Exemple 337) :

Considérons alors la partie supérieure (mélodique) de cette formule : 1.9.10.2. L'un de ses renversements est : 2.6.5.1. Juxtaposons les deux formes (comme le fait Messiaen pour la formule mélodique justifiant le 5^e mode), en commençant par la forme renversée. Nous obtenons :

Cette formule mélodique fournit toutes les notes du "mode 8" (2^e transposition), et elles seules.

IV PLUS PRÈS DE NOUS

Ce n'est pas ici le lieu de faire un panorama exhaustif de l'évolution de la musique occidentale au 20e siècle. Signalons toutefois l'utilisation de la "série généralisée", qui eut son heure de gloire dans les années cinquante. Il s'agissait en fait d'étendre le principe de la série schoenbergienne aux autres caractéristiques du son, c'est-à-dire de définir, à l'origine de l'œuvre, non seulement une série de notes, mais également une série de hauteurs (octaves), une série de durées, une série d'intensités, une série de timbres...

Certains musiciens composèrent des œuvres de type "ensembliste" (Voir *Encadré 32 : Musique et algèbre de Boole*). La combinatoire et l'aléatoire firent également leur apparition (ou plutôt leur réapparition : Voir *Encadré 33 : La valse des dés*), dans le but de substituer, aux formes musicales traditionnelles "fermées" (c'est-à-dire fixées une fois pour toutes), des formes "ouvertes". C'est le cas, en particulier, de la *Troisième sonate* (1957) de Pierre Boulez (né en 1925) et du *Klavierstück* (1956) de Karlheinz Stockhausen (né en 1928). Prenons l'exemple de cette dernière pièce, constituée de 19 séquences (ou groupes). Voici quelques-unes des indications que donne le compositeur au pianiste :

"L'interprète regarde la feuille sans aucune intention et commence par le groupe qu'il a remarqué tout d'abord ; il le joue dans n'importe quel tempo, (...) n'importe quelle intensité de départ, n'importe quel mode d'attaque. Lorsque ce premier groupe est terminé, il lit les indications de jeu qui suivent pour le tempo, l'intensité, le mode d'attaque, et les applique à n'importe lequel des autres groupes sur lequel s'est porté son regard, sans aucune intention."

De plus, lorsque l'on joue un groupe pour la seconde fois, il faut (suivant des indications données par le compositeur) jouer une (ou deux) octaves plus haut (ou plus bas) (avec de plus la possibilité d'ajouter ou de retrancher certains sons).

Enfin, la pièce se termine lorsque l'on rencontre un groupe pour la troisième fois.

En ayant recours à une représentantion classique (schéma d'urne), nous avons ici un sujet pour la rubrique des problèmes du Bulletin de l'A.P.M.E.P. :

"Dans une urne se trouvent 19 boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 19. On procède à des tirages successifs d'une boule, avec remise.

Si la boule tirée n'est pas la même que celle qui a été obtenue au tirage précédent (ou si c'est la première que l'on tire), on note son numéro. Sinon, on la remet dans l'urne. On arrête les tirages lorsqu'on tire une même boule pour la troisième fois. On a alors obtenu une suite de nombres.

Encadré 33

La valse des dés

L'introduction de l'aléatoire dans la composition musicale n'est pas aussi récente qu'on pourrait le croire, puisqu'elle remonte au moins à ... Mozart. Celui-ci s'était en effet amusé à créer un jeu permettant de "composer des Valses par le moyen de 2 Dès sans avoir la moindre connaissance de la Musique ou de la Composition".

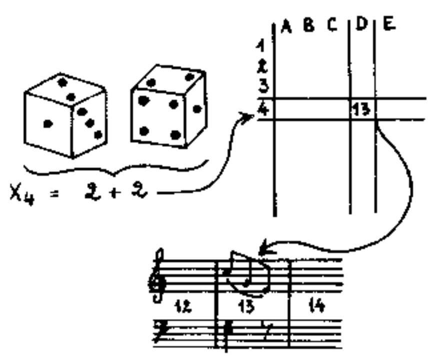
Le *matériel* se compose de :

- deux dés
- une "Table de Chiffres" (tableau à double entrée) formée de 8 colonnes notées A,B,C,...,H, et 12 lignes notées 1,2,3,...12. Dans chaque case se trouve un nombre.
- une "Table de Musique", constituée d'une suite de mesures (à trois temps et en Do Majeur) numérotées.

Mode d'emploi :

On lance les deux dés et on fait la somme X_1 des deux nombres obtenus ; on lit alors le nombre situé dans la case (X_1,A) du tableau à double entrée. Ce nombre correspond à celui d'une mesure de la "Table de Musique", qui sera la première mesure de la valse.

On lance de nouveau les dés (somme : X_2), et en (X_2,B) on trouvera le numéro de la deuxième mesure. On procède ainsi jusqu'à obtenir 8 mesures, qui constitueront la première partie de la valse. On recommence de la même façon pour obtenir la deuxième partie et, "veut-on avoir un Walzer plus long, on recommence de la même manière, et ainsi cela va à l'infini".



Combien peut-on obtenir de suites différentes ?"

Si le cœur vous en dit...

A ce "hasard dirigé" s'oppose l'indéterminisme d'un John Cage (né en 1912), qui considère l'acte musical "comme une manière de laisser une situation être et croître d'elle-même" (*). C'est ce qui l'amènera, en 1938, à inventer le piano "préparé", obtenu en posant des objets divers sur les cordes du piano, ou en les coinçant entre deux cordes.

L'ordinateur occupera naturellement, lui aussi, une place de plus en plus grande dans la composition musicale, comme en témoigne le projet LUDUS (Voir *Encadré 34*).

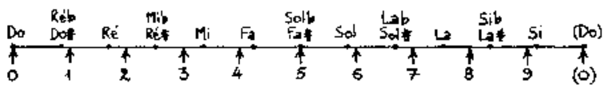
V RÊVONS UN PEU

Comme nous l'avons vu, notre échelle tempérée résulte d'une division de l'octave en douze intervalles égaux : les demi-tons. En se fondant sur le même principe, Luc Etienne a récemment imaginé (1972) de diviser l'octave en *dix* intervalles égaux : les *demi-quints*, créant ainsi un tempérament *décimal*.

Dans l'intervalle [f,2f[, les sons de l'échelle seront donc :

$$f_i = 2^{\frac{i}{10}} f \quad (i=0,1,\ldots,9)$$

La seule note intermédiaire qui coïncidera avec une note de l'échelle usuelle est f_5 (= Fa dièse, puisque 5/10 = 6/12). La répartition est la suivante :



Dans l'échelle décimale stéphanienne, les sons pourront être notés grâce à une écriture décimale, le chiffre des dizaines étant le numéro d'octave, et celui des unités représentant la note).

On a vu que les tonalités (majeures et mineures) classiques sont extraites de l'échelle tempérée duodécimale ; pourra-t-on, par analogie, imaginer des tonalités extraites de l'échelle décimale ? Le problème est donc de chercher un sous-ensemble de **Z**/10**Z** (qui sera ensuite ordonné suivant les numéros croissants) ; les tonalités étant définies à une transposition près, nous pouvons supposer que celle que nous cherchons à construire contiendra la note 0 (tonique).

Pour commencer, posons quelques jalons (arbitraires, il est vrai, mais en rapport avec les tonalités habituelles) :

(1) - Les intervalles entre sons consécutifs ne devront pas excéder 2 demi-quints (1 quint)

(2) - Les intervalles consécutifs ne seront pas tous égaux (il y aura donc des quints et des demi-quints).

(*) D. et J.-Y. Bosseur. Voir Bibliographie.

Encadré 34

Le programme "Ludus"

Il s'agit d'un programme de *composition tonale automatique*, dû à Pierre BARBAUD.

Barbaud considère une *tonalité* comme un *ensemble d'accords de trois sons* (majeurs ou mineurs). Par exemple, en notant A_p l'accord majeur fondé sur la note p ($A_p = \{p, p+4, p+7\}$) et B_p l'accord mineur fondé sur p ($B_p = \{p, p+3, p+7\}$), la tonalité de i majeur sera :

$$T_i = \{A_i, A_{i+5}, A_{i+7}, B_{i+2}, B_{i+4}, B_{i+9}\}.$$

On reconnaît là, bien sûr, les trois accords majeurs fondés sur les 1er, 4e et 5e degrés de la tonalité (notes modales), et les trois accords mineurs fondés sur les 2e, 3e et 6e degrés *(voir Troisième partie, VII)*.

Le problème est d'enchaîner ces accords entre eux ; dans ce but, on définit, pour chaque couple d'accords, la probabilité de passer de l'un à l'autre (tableau à double entrée de 6×6). Ce tableau étant établi, on peut y effectuer des tirages (tirages effectués d'après des critères qui peuvent être très divers).

Remarquons que ce procédé ne fait pas moduler : on reste constamment dans la tonalité de départ. Si l'on veut pouvoir changer de tonalité, il faudra considérer tous les accords majeurs et mineurs possibles (il y en a donc 24). D'où un tableau à double entrée de 24×24.

Une fois l'enchaînement des accords obtenu, il s'agira d'écrire ces accords comme *triplets de sons,* en respectant les règles de l'harmonie. Puis on ajoutera les *agréments* (accords autres que majeurs ou mineurs, notes de passage, broderies, etc...). Enfin, on choisira les rythmes.

Conséquences :

D'après (1), il devra y avoir au moins 5 notes dans la tonalité.
D'après (2), il devra y en avoir au moins 6.

Etudions le cas d'une tonalité à 6 notes :

On peut baser la recherche sur le modèle pythagoricien (cycle de quintes) ou sur le modèle zarlinien (accord parfait).

a) *Type pythagoricien :*

Un seul ennui, il n'y a pas de quintes dans l'échelle décimale. L'intervalle qui s'en approche le plus (voir schéma précédent) est constitué de 3 quints ($f_6/f_0 = 2^{6/10} \simeq 1,516$). Convenons de l'appeler *"quinte stéphanienne"*, et n'en parlons plus (elle est un peu plus grande que la quinte pythagoricienne, mais guère). Une succession (ascendante) de quintes, à partir de la note 0 nous donnera successivement les notes 6,2,8,4,0... (restes de la division de 6n par 10) : on n'obtient finalement que les 5 notes 0,2,4,6,8. C'est la "gamme par quints" qui ne répond pas au critère (2). Cherchons donc autre chose...

b) *Type zarlinien :*

L'APM ne se retrouve pas non plus dans l'échelle décimale ; mais nous avons déjà la quinte stéphanienne (3 quints) ; il ne reste alors plus qu'à approximer la tierce zarlinienne (Do-Mi) ; la note la plus voisine du Mi zarlinien est f_3 ($f_3/f_0 = 2^{3/12} \simeq 1,231$) ; cet intervalle (d'un quint et demi) est intermédiaire entre la tierce majeure zarlinienne (rapport de fréquences : $5/4 = 1,25$) et la tierce mineure zarlinienne (rapport de fréquences : $6/5 = 1,2$), mais plus proche malgré tout de la tierce majeure. Appelons-le tierce stéphanienne (la quinte vaudra alors exactement deux tierces).

Convenons d'appeler APS (accord parfait stéphanien) l'accord constitué à partir de deux tierces stéphaniennes successives (Ex. : $\{0,3,6\}$) ; c'est lui qui constituera la meilleure approximation décimale de l'APM zarlinien.

A l'instar de Zarlino, il nous reste maintenant à engendrer une tonalité à 6 notes à partir de l'APS. L'accord fondé sur 0 nous fournit les notes 3 et 6 ; il nous manque alors 3 notes. Du fait de la condition (1), il faudra en placer une entre 0 et 3, une entre 3 et 6 (et donc une autre entre 6 et 0) ; cette dernière sera forcément la note 8, toujours en vertu de (1). Il ne nous reste donc plus qu'à trouver 2 notes :

- 1 ou 2 d'une part
- 4 ou 5 d'autre part.

D'où 4 possibilités de tonalités, formées avec les ensembles suivants :

$a = \{0,1,3,4,6,8\}$

$b = \{0,2,3,5,6,8\}$

$c = \{0,2,3,4,6,8\}$

$d = \{0,1,3,5,6,8\}$

Pour départager les candidats, nous allons devoir recourir à une "question subsidiaire". Examinons donc leur comportement vis-à-vis de la relativité (des tonalités).

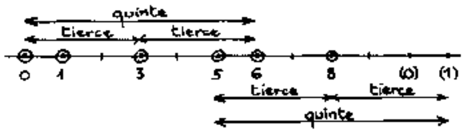
Dans l'échelle classique, nous avions vu que la tonalité relative mineure (ancienne) d'une tonalité majeure donnée n'en différait que par l'ordre des notes.

D'autre part, l'accord servant de base aux tonalités étant ici — on l'a dit — intermédiaire entre les accords majeur et mineur classiques, on peut envisager d'identifier les deux modes pour n'en plus constituer qu'un seul. Une tonalité relative sera alors (si elle existe) la tonalité (différente !) qui sera constituée des mêmes notes que la tonalité donnée.

Une petite recherche permettrait de constater que seul d coïncide avec l'un de ses transposés : d + 5

C'est donc ce type que nous choisirons comme base de la tonalité.

$T_0 = (0,1,3,5,6,8)$

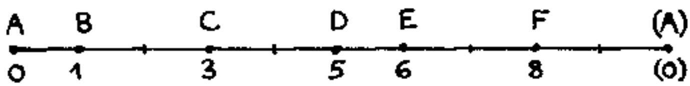


On voit que T_0 est formée à partir de deux APS, décalés d'une demi-octave.

De plus, on a $T_5 = (5,6,8,0,1,3)$; cette tonalité est donc formée des mêmes accords que T_0. On ne pourra décider si une mélodie est écrite en T_0 ou en T_5, puisque les notes sont les mêmes, ainsi que les fonctions tonales. T_5 n'est en fait qu'un doublet de T_0.

Le système que nous envisageons nous fournit donc finalement 5 *tonalités*, à *deux toniques* (distantes d'une demi-octave). Ce système est simple, puisqu'il ne comporte qu'*un seul mode* (tenant à la fois du majeur et du mineur) et présente des analogies certaines avec le système tonal classique.

Ne disposant pas d'"Hymne à St Jean", nous nous contenterons de désigner les notes de T_0 par les 6 premières lettres de l'alphabet :



Etudions maintenant le problème du voisinage, dans l'ensemble des 5 tonalités T_0, T_1, T_2, T_3, T_4. On constate que, par rapport à T_0, deux tonalités (T_1 et T_4) n'ont que deux notes communes avec elles, alors que les deux autres (T_2 et T_3) en ont quatre (ce seront les *tonalités voisines* de T_0). Pour moduler de T_0 en T_2, il suffira de hausser B et E d'un demi-quint (les "dièser" en somme) ; et, si l'on veut moduler de T_0 en T_3, on baissera A et D d'un demi-quint (on les "bémolisera").

De même, pour passer de T_2 à T_4, on dièsera C et F, et pour passer de T_3 à T_1, on bémolisera C et F. Les dièses (resp. les bémols) n'apparaissent plus ici l'un après l'autre, mais deux par deux ; de plus, on pourra se contenter de deux tonalités "à dièses", et de deux tonalités "à bémols". D'autre part, les modulations, dans ce système, seront plus "sauvages", puisqu'il faudra changer deux notes pour passer dans une tonalité voisine.

Quid du contrepoint ?

Nous avons vu que, dans le contrepoint classique, le renversement d'un thème introduisait des notes étrangères à la tonalité (imitation modulante).

Or, ici, on peut s'apercevoir que T_0 coïncide avec l'un de ses renversements (celui qui fait passer de n à 6 – n) : ce renversement ne sera donc pas modulant, et on n'aura pas à "adapter".

Pour terminer cette petite étude, on pourra vérifier que les accords de 3 sons fondés sur les différents degrés de T_0 (accords obtenus en "sautant" un degré de la tonalité sur deux) sont tous des APS, au contraire du système classique, où ils relèvent de plusieurs types. (Voir Deuxième partie, VII).

En conclusion, ce système tonal est *comparable au système classique* du point de vue de la *structure des tonalités* : deux types d'intervalles (quint et demi-quint) de même ordre de grandeur que dans les tonalités usuelles ; existence d'un *accord fondamental* de 3 sons. Il est par contre *plus simple* du point de vue : des tonalités relatives (*chaque tonalité est sa propre relative*), de l'harmonie (*un seul type d'accord*), de l'écriture contrapuntique (on pourra *renverser exactement sans moduler*).

... Mais le problème qui reste posé est le suivant : "Pourrait-on écrire de la (bonne) musique dans ce système ?". Là est la question...

Il ne s'agissait, somme toute, que d'un jeu, tout à fait gratuit, destiné à montrer que notre système musical, qui semble aller de soi, n'est peut-être pas tout à fait aussi "évident" qu'il le paraît, et que l'on pourrait très bien en envisager d'autres. Si notre échelle avait été le mode slendro javanais (tempérament égal par 5), il aurait suffi qu'un musicien eût l'idée "géniale" de penser à diviser chaque intervalle en deux (comme on a composé de la musique en quarts de ton), et l'on aurait obtenu l'échelle décimale. Et pourquoi, un jour, un 'Are'Are n'aurait-il pas la fantaisie de dédoubler les intervalles de son échelle usuelle ? Il inventerait ainsi le tempérament égal par 14.

CODA

Nous voilà au terme de ce petit voyage musical à travers l'espace et le temps. Nous n'avons bien souvent fait qu'effleurer des sujets par ailleurs bien plus riches que le bref aperçu qui en a été donné. Certains (je pense en particulier à l'harmonie) ont même été délibérément laissés de côté ; mais il faut savoir se limiter. J'espère néanmoins avoir pu réussir quelque peu à mettre en évidence quelques-uns des liens qui unissent, dans ce cas particulier qui nous intéresse au premier chef, un art et une science.

Car c'est bien, en effet, et *dès le départ*, d'une théorisation de l'univers sonore qu'il s'agit : l'échelle de Pythagore, pas plus que celle de Zarlino, ne sont des échelles "naturelles". En fait, *il n'y a pas d'échelle naturelle* ; il y a, dans chaque cas, élaboration d'un système — certes plus ou moins basé sur un phénomène physique — mais système *théorique* malgré tout. Et décider de découper l'octave en intervalles égaux n'est pas plus absurde que de progresser de quinte en quinte, ou de juxtaposer des accords.

L'histoire de la musique, comme celle des sciences, est jalonnée de remises en question, parfois déchirantes (l'avènement de l'échelle tempérée est peut-être responsable de la disparition de la viole de gambe). Plutôt que de s'en attrister, pourquoi ne pas y voir un signe de bonne santé ? L'élargissement de notre vision du monde au cours des siècles ne nous a-t-il pas appris que rien d'humain n'était définitif, dans quelque domaine que ce soit ? "Il n'existe rien de constant, si ce n'est le changement", a dit le Bouddha. Et, "progressivement, à l'exemple de leurs consœurs scientifiques, les théories musicales se sont vues déloger de l'état de dogme à celui plus précaire d'hypothèse de travail". (*)

Ceci étant posé, et quel que soit le substrat théorique qui sous-tend une œuvre musicale, l'essentiel ne tient-il pas à ce que cette œuvre *touche* en nous, c'est-à-dire à cette partie de la musique qui ne ressortit plus à la science, mais à l'art ? Il n'en reste pas moins qu'une connaissance de ces fondements théoriques peut permettre d'approcher de plus près les intentions du compositeur, et d'"entrer" davantage dans l'œuvre.

(*) Pierre BOULEZ, Conférence donnée le 14.2.1983 à l'IRCAM (Le Monde de la Musique, Mars 1983).

ANNEXE :
PETIT MECCANO SÉRIEL NUMÉRO 00

(Permettant de construire aisément des séries musicales jouissant de propriétés intéressantes du point de vue compositionnel, ainsi que de nombreuses illustrations, puisées aux meilleures sources).

N.B. : Nous utiliserons les notations définies au début de l'encadré 31.

Rappelons le problème : *superposer deux formes différentes d'une série S, en respectant la règle du total chromatique.*

Pour commencer, remarquons qu'il y a des formes que l'on peut toujours superposer, quelle que soit la série considérée : *une forme quelconque et sa récurrence.* Nous prendrons comme exemple la série du Concerto pour violon "à la mémoire d'un ange", d'Alban Berg :

original : S = 7.10.2.6.9.0.4.8.11.1.3.5.
récurrence : s(S) = 5.3.1.11.8.4.0.9.6.2.10.7.

Si on fait entendre, dans un premier temps, les six premières notes de chaque forme, et dans un second temps les six dernières, on émet deux fois, successivement, le total chromatique, et la règle est respectée.

Mais cette possibilité est malgré tout limitée, et le compositeur "sériel" aura davantage de liberté s'il utilise une série qui pourra également, par superposition avec une forme *autre que sa récurrence*, donner deux fois successivement le total chromatique. L'exemple précédent nous indique une direction de recherche : partager la série S en deux demi-séries de six notes chacune.

Soit donc A l'ensemble des notes de la première demi-série, et B l'ensemble des notes de la seconde : $B = \bar{A}$. Soit f l'une des 48 transformations "permises", autre que l'identité et la récurrence :

De deux choses l'une : ou bien f est une transformation *directe* (transposition, ou renversement), ou bien c'est une transformation *récurrente* (récurrence d'une transposition, ou d'un renversement).

Si f est une transformation directe, alors f(S) fait d'abord entendre les notes de f(A), puis celles de f(B).

Si f est une transformation récurrente, elle est la récurrence d'une transformation directe g. Alors f(S) fait d'abord entendre les notes de g(B), puis celles de g(A). La superposition, *par demi-séries,* des deux formes donnera donc :

• dans le premier cas :

A	B
f(A)	f(B)

• dans le second cas :

A	B
g(B)	g(A)

Pour que la règle du total chromatique soit respectée, il faudra (et il suffira) que l'on ait :

• dans le premier cas : f(A) = B (d'où, puisque f est bijective, f(B) = A) ;
• dans le second cas : g(B) = B (d'où g(A) = A).

Nous chercherons donc finalement des séries S telles que *f(A) = B ou A, où f(S) est une forme directe de S* (c'est-à-dire une transposition ou un renversement).

(N.B. : Convenons une fois pour toutes d'appeler A celui des deux ensembles qui contient 0, quitte à permuter ensuite les deux demi-séries, si bon nous semble).

PREMIER CAS : $t_i(A) = B$ (SÉRIE TRANSPOSABLE)

Intérêt des séries transposables : Si une série est transposable ($\exists i\ t_i(A) = B$), on peut en superposer une forme quelconque avec sa transposée par t_i.

Comme dans le § III de la 4e partie (page 92), nous noterons I_A le groupe d'isotropie de A dans le groupe des translations :
$I_A = \{i\ ;\ t_i(A) = A\}$. Nous aurons, bien sûr : $I_B = I_A$.

Nous appellerons de même $I_{A,B}$ le groupe d'isotropie de la paire {A,B} :

$$I_{A,B} = \{i\ ;\ \{t_i(A), t_i(B)\} = \{A,B\}\}.$$

I_A est un sous-groupe de $I_{A,B}$ et on a : $I_{A,B} = I_A \cup \{i\ ;\ t_i(A) = B\}$.

Par conséquent, une série est transposable si (et seulement si) l'indice de I_A dans $I_{A,B}$ est égal à 2.

Envisageons les divers cas pour $I_{A,B}$:

1) Si Card $I_{A,B} = 12$: Alors on a Card $I_A = 6$, d'où $I_A = <2>$: A est la gamme par tons.

2) Si Card $I_{A,B} = 6$: Alors on a Card $I_A = 3$, d'où $I_A = <4>$.

Alors A contient 0,4,8, ainsi que x,x+4,x+8 (avec x=1 ou 3, mais pas 2, car A serait alors la gamme par tons). Donc deux possibilités :

$$A = \{0,1,4,5,8,9\} \text{ ou } A = \{0,3,4,7,8,11\}.$$

3) Si Card $I_{A,B} = 4$: Alors on a Card $I_A = 2$, d'où $I_A = <6>$.

Alors A contient 0 et 6, ainsi que x,x+6,y,y+6 avec x et y éléments distincts de {1,2,3,4,5}. Mais la paire {x,y} = {2,4} est à exclure ; et d'autre part x et y ne peuvent prendre la valeur 3, ni différer de 3. Donc 3 possibilités :

$$A = \{0,1,2,6,7,8\} \text{ ou } A = \{0,1,5,6,7,11\} \text{ ou } A = \{0,4,5,6,10,11\}.$$

4) Si Card $I_{A,B} = 3$: impossible.

5) Si Card $I_{A,B} = 2$: Alors on a Card $I_A = 1$ et $I_A = <0>$.

Ici, on aura $B = t_6(A)$. Donc, pour former A, on prendra, outre 0, un élément et un seul dans chacune des classes {1,7} , {2,8} , {3,9} , {4,10} , {5,11} , en excluant les ensembles déjà obtenus précédemment (c'est-à-dire les deux ensembles du 2° ; ni la gamme par tons, ni ceux du 3° ne sont obtenus : ils contiennent tous 6). Nous aurons donc ici $2^5 - 2$, soit 30 ensembles.

Les ensembles A correspondant aux séries transposables sont finalement au nombre de 36 (sur $C_{11}^5 = 462$ ensembles au total). Le tableau ci-après indique, pour chaque ensemble A, les sous-groupes $I_{A,B}$ qui lui correspondent :

$I_{A,B}$	Card $I_{A,B}$	Ensembles A
$<8>$	3	aucun
$<2>$	6	{0,1,4,5,8,9} et {0,3,4,7,8,11}
$<1>$	12	"gamme par tons" : {0,2,4,6,8,10}
$<3>$	4	{0,1,2,6,7,8} , {0,1,5,6,7,11} et {0,4,5,6,10,11}
$<6>$	2	A s'obtient en prenant $\left\{ 0, \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \text{ou,} & \text{ou,} & \text{ou,} & \text{ou,} & \text{ou,} \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array} \right\}$ (Sont à exclure les ensembles précédents)

Exemples de séries transposables :

- chez Schoenberg :
  - Sérénade op. 24 : 4.2.3.11.0.1.8.6.9.5.7.10
  - Suite op. 29 : 3.7.6.10.2.11.0.9.8.4.5.1
  - Ode à Napoléon op. 41 : 4.5.1.0.8.9.11.10.2.3.7.6
  - Troisième lied op. 48 : 1.7.9.11.3.5.10.6.4.0.8.2
- chez Webern :
  - Symphonie de chambre op. 21 : 9.6.7.8.4.5.11.10.2.1.0.3
  - Concerto pour neuf instruments op. 24 : 11.10.2.3.7.6.8.4.5.0.1.9
- chez Berg :
  - Lulu : 10.2.3.0.5.7.4.6.9.8.1.11
  - Suite lyrique : 5.4.0.9.7.2.8.1.3.6.10.11

Remarques :

— toutes ces séries correspondent à $i = 6$ qui, nous l'avons vu, fournit 32 cas sur 36.

— la série de l'op. 48c de Schoenberg correspond à la "gamme par tons".

— les séries de l'op. 24 de Webern et celles des op. 29 et 41 de Schoenberg correspondent au même ensemble A : {0,1,4,5,8,9} ($i = 2,6$ ou 10).

— les séries de l'op. 21 de Webern et de la Suite lyrique de Berg sont des séries à formes limitées, puisqu'elles vérifient $t_6(S) = S$; ceci s'obtient en ordonnant $B = t_6(A)$ dans l'ordre inverse de A. Plus précisément, si $S_A = (n_1, n_2, \ldots, n_6)$, on prendra $S_B = (n_6+6, n_5+6, \ldots, n_1+6)$.

DEUXIÈME CAS : $t_i(A) = A$ (SÉRIE SEMI-TRANSPOSABLE)

Intérêt des séries semi-transposables : Si une série est semi-transposable ($\exists i \neq 0\ t_i(A) = A$), on peut en superposer une forme quelconque avec la récurrence de sa transposée par t_i.

Les séries semi-transposables sont tout simplement les ensembles à transpositions limitées qui comportent 6 éléments (voir 4ᵉ partie, §3).

Il y a donc au total 12 ensembles A distincts, dont la moitié correspond également à des séries transposables. Le tableau ci-dessous récapitule les résultats :

I_A	Card I_A	Ensembles A
<3>	4	aucun
<2>	6	"gamme par tons" : {0,2,4,6,8,10}
<4>	3	{0,1,4,5,8,9} et {0,3,4,7,8,11}
<8>	2	A s'obtient en adjoignant, à la paire {0,6}, deux des paires suivantes : {1,7} {2,8} {3,9} {4,10} {5,11} (à l'exclusion de la gamme par tons)

Exemples de séries semi-transposables :

- chez Schoenberg :
  - Suite op. 29
  - Ode à Napoléon op. 41
  - Troisième lied op. 48
- Chez Webern :
  - Concerto pour neuf instruments op. 24

(On remarque que tous ces exemples correspondent à des séries qui sont *également transposables*, ce qui permet davantage de variété dans la superposition des formes sérielles).

TROISIÈME CAS : $t_i(-A) = B$ (SÉRIE RENVERSABLE)

Intérêt des séries renversables : Si une série est renversable ($\exists i\ t_i(-A) = B$), on peut en superposer une forme quelconque avec la transposée par t_i de son renversement.

Considérons la "symétrie par rapport à 0", dans E : $s : x \longmapsto -x$. Alors tout renversement $s_i : x \longmapsto i - x$ peut s'écrire $s_i = t_i \circ s$. Une série renversable est donc une série vérifiant : $\exists i\ s_i(A) = B$.

Remarquons tout d'abord que *i ne peut pas être pair*. En effet, si $i = 2j$, j est invariant par s_i : $s_i(j) = 2j - j = j$. Or, d'après la condition posée, nul élément de E ne peut être invariant.

i étant alors un élément "impair" de E, on construira A en y plaçant d'abord 0, i $(= s_i(0))$ étant placé dans B. Pour compléter A, il suffira ensuite de prendre un élément et un seul de chacune des 5 autres paires $\{a, i-a\}$.

Un dénombrement (assez fastidieux, mais pas très difficile) montrerait qu'il y a 174 ensembles A qui répondent à la question, sur les 462 possibles.

Le tableau ci-dessous indique, pour chaque valeur de i, la façon de construire A :

Valeurs de i	L'ensemble A est constitué de :
"paires"	... (pas d'ensemble A)
1	0, 2 ou 11, 3 ou 10, 4 ou 9, 5 ou 8, 6 ou 7.
3	0, 1 ou 2, 4 ou 11, 5 ou 10, 6 ou 9, 7 ou 8.
5	0 , 1 ou 4, 2 ou 3, 6 ou 11, 7 ou 10, 8 ou 9,
7	0, 1 ou 6, 2 ou 5, 3 ou 4, 8 ou 11, 9 ou 10.
9	0, 1 ou 8, 2 ou 7, 3 ou 6, 4 ou 5, 10 ou 11.
11	0, 1 ou 10, 2 ou 9, 3 ou 8, 4 ou 7, 5 ou 6.

Exercice : (proposé par Yves Hellegouarch)
174 est égal à 6 fois 29 ; or 29 est le nombre de séries transposables dont le groupe $I_{A,B}$ a 2 éléments. Expliquer cette "coïncidence".

Exemples de séries renversables :

Tous les exemples de séries transposables ou semi-transposables donnés précédemment. On peut y ajouter (entre autres) :

- chez Schoenberg :
  - Valse op. 23 : 1.9.11.7.8.6.10.2.4.3.0.5

- Suite pour piano op. 25 : 4.5.7.1.6.3.8.2.11.0.9.10
- Quintette pour instruments à vent op. 26 : 3.7.9.11.1.0.10.2.4.6.8.5
- Variations pour orchestre op. 31 : 10.4.6.3.5.9.2.1.7.8.11.0
- Quatrième quatuor op. 37 : 2.1.9.10.5.3.4.0.8.7.6.11
- Fantaisie op. 47 : 10.9.1.11.5.7.4.0.8.3.6.2

• chez Webern :
- Quatuor op. 28 : 10.9.0.11.3.4.1.2.6.5.8.7

• chez Boulez :
- Structures pour deux pianos : 3.2.9.8.7.6.4.1.0.10.5.11

Remarques :

Il existe des séries transposables qui ne sont pas renversables. Exemple : celles qui sont associées à $A = \{0,3,4,5,7,8\}$. MAIS :

Théorème 1 : Toute série semi-transposable est renversable.

Il suffit de le vérifier pour chacun des 12 ensembles A correspondants.

La série de l'op. 28 de Webern est une série à formes limitées, qui vérifie $t_5(-S) = s(S)$.

QUATRIÈME CAS : $t_i(-A) = A$ **(SÉRIE SEMI-RENVERSABLE)**

Intérêt des séries semi-renversables : Si une série est semi-renversable ($\exists i\ t_i(-A) = A$), on peut en superposer une forme quelconque avec la récurrence de la transposée par t_i de son renversement.

Remarquons tout d'abord que, si $x \in A$, il en est de même de $i - x$.

Une série est donc semi-renversable si (et seulement si) : $\exists i\ s_i(A) = A$. On peut distinguer deux cas, suivant que le renversement s_i admet un point invariant (i pair) ou non (i impair).

[*Remarque:* Si A est associé à plusieurs valeurs de i, ces valeurs ont même parité :

En effet, si on a $s_i(A) = s_j(A) = A$ avec $i \neq j$, alors $t_i o\ s(A) = A$, d'où $s(A) = t_{-i}(A)$, et de même $s(A) = t_{-j}(A)$. On a donc $t_{-i}(A) = t_{-j}(A)$, d'où $t_{j-i}(A) = A$. A correspond donc à une série semi-transposable, et (voir tableau page 111) on a nécessairement $j - i$ pair, c'est-à-dire i et j de même parité.]

Premier cas : ensembles A associés à des indices i impairs :

i étant impair, les éléments de E peuvent être répartis en 6 paires distinctes $\{x, i-x\}$. A sera alors constitué de la réunion de $\{0,i\}$ avec deux des autres paires.

Second cas : ensembles A associés à des indices i pairs :

Si i est pair ($i = 2j$), alors j est son propre transformé, ainsi que $j + 6$. Les autres notes pourront être groupées en paires d'éléments distincts note/transformée.

Puisque A doit contenir les deux éléments d'une même paire et posséder 6 éléments, il s'ensuit que, s'il contient j, il devra également contenir j+6. Constituant donc une sixième paire avec j et j+6, nous pourrons dire que A sera constitué de la réunion de 3 de ces 6 paires, dont celle contenant 0.

Le tableau ci-dessous donne, pour les différentes valeurs de i, les 6 paires de notes :

i	I	II	III	IV	V	VI
0	0.6	1.11	2.10	3.9	4.8	5.7
1	0.1	2.11	3.10	4.9	5.8	6.7
2	0.2	1.7	3.11	4.10	5.9	6.8
3	0.3	1.2	4.11	5.10	6.9	7.8
4	0.4	2.8	1.3	5.11	6.10	7.9
5	0.5	1.4	2.3	6.11	7.10	8.9
6	0.6	3.9	1.5	2.4	7.11	8.10
7	0.7	1.6	2.5	3.4	8.11	9.10
8	0.8	4.10	1.7	2.6	3.5	9.11
9	0.9	1.8	2.7	3.6	4.5	10.11
10	0.10	5.11	1.9	2.8	3.7	4.6
11	0.11	1.10	2.9	3.8	4.7	5.6

Pour constituer un ensemble A, il suffira de prendre, dans une ligne donnée, le contenu de la première case, ainsi que celui de deux des cinq autres. *Combien pourrons-nous construire d'ensembles A différents ?*

Le problème est de déterminer si certains d'entre eux sont obtenus plusieurs fois et, si oui, combien.

Si A est obtenu à partir de deux lignes différentes du tableau ci-dessus, nous aurons :

$t_i(-A) = A$ et $t_j(-A) = A$ $(i \neq j)$; ou encore :

$-A = t_{-i}(A) = t_{-j}(A)$.

De $t_{-i}(A) = T_{-j}(A)$, nous déduisons $A = t_{i-j}(A)$ (déjà vu plus haut).

Un tel ensemble A sera donc nécessairement l'un des 12 qui correspondent aux séries semi-transposables. La comparaison de ces 12 ensembles au tableau ci-dessus montre que :

{0,1,5,6,7,11} se trouve deux fois (lignes 0 et 6)
{0,1,2,6,7,8} — (lignes 2 et 8)
{0,4,5,6,10,11} — (lignes 4 et 10)
{0,1,4,5,8,9,} se trouve trois fois (lignes 1,5 et 9)

{0,3,4,7,8,11} — (lignes 3,7 et 11)
{0,2,4,6,8,10} se trouve six fois (lignes 0,2,4,6,8,10)

Or, le tableau fournit au total $12 \mathrm{x} C_5^2 (= 120)$ ensembles A, distincts ou non ; d'après ce qui précède, il y a en fait $120 - 12$, soit 108 ensembles A différents.

Exemples de séries semi-renversables :

- Chez Schoenberg :
  - Sérénade op. 24
  - Suite op. 29
  - Ode à Napoléon op. 41
- Chez Webern :
  - Symphonie de chambre op. 21
- Chez Berg :
  - Lulu
  - Suite lyrique
- Chez Boulez :
  - Structures pour deux pianos.

LES SÉRIES STABLES

Démontrons la propriété suivante :

Théorème 2 : Dans l'ensemble des séries transposables : toute série renversable est semi-renversable, et inversement.

Soit S une série transposable, et A l'ensemble associé. On a alors : $\exists i \; t_i(A) = B$.

a) Si nous supposons S renversable, nous avons de plus : $\exists j \; t_j(-A) = B$, d'où $t_i(A) = t_j(-A)$, et $A = t_{j-i}(-A)$; ce qui montre que S est semi-renversable.

b) Si nous supposons S semi-renversable, nous aurons cette fois : $\exists k \; t_k(-A) = A$, d'où $t_{i+k}(-A) = B$; ce qui montre que S est renversable.

Appelons "stable" une série qui vérifie les conditions du théorème précédent :

Définition : On appelle série stable une série qui est à la fois transposable et renversable.

Le théorème nous permet de conclure :

Intérêt des séries stables : Si une série est stable ($\exists (i,j) \; t_i(A) = t_j(-A) = B$) on peut en superposer une forme quelconque avec l'une des trois formes suivantes, au choix :

— *sa transposée par t_i ;*
— *la transposée par t_j de son renversement ;*
— *la récurrence de la transposée par t_{i-j} de son renversement.*

Cherchons maintenant quelles sont les séries stables :

On peut constater directement que les séries transposables correspondant aux 6 ensembles A associés aux valeurs de i différentes de 6 sont également renversables (donc stables). Mais qu'en est-il des autres ? Les conditions à réaliser sont ici :

$$(C) \quad \begin{cases} t_6(A) = B \\ \exists j \in \{1,3,5,7,9,11\} \quad t_j(-A) = B \end{cases}$$

Ce système est équivalent à :

$$(C') \quad \begin{cases} t_6(A) = B \\ \exists j \in \{1,3,5,7,9,11\} \quad t_j(-A) = t_6(A) \end{cases}$$

Mais : $t_j(-A) = t_6(A)$ équivaut à : $A = t_{j+6}(-A)$. Posant $k = j+6$, les conditions précédentes deviennent finalement :

$$(C'') \quad \begin{cases} t_6(A) = B \\ \exists k \in \{1,3,5,7,9,11\} \; t_k(-A) = A \end{cases}$$

Ces conditions signifient que A est associé à des séries :

— transposables d'indice 6
— semi-renversables d'indice impair.

Voyons ce qui se passe pour l'indice $k = 1$:

Les 6 paires correspondant à cet indice sont (voir plus haut : séries semi-renversables) :

$$\{0,1\} \; \{2,11\} \; \{3,10\} \; \{4,9\} \; \{5,8\} \; \{6,7\} .$$

A devant contenir 0 et 1, ne pourra contenir ni 6, ni 7 (puisque la série est également transposable, d'indice 6). D'autre part, si A contient 3 et 10, elle ne pourra contenir ni 9, ni 4 (pour les mêmes raisons), et inversement. Enfin, de même, si A contient 2 et 11, elle ne pourra contenir ni 8, ni 5.

Ces conditions nous donneront finalement 4 ensembles A, réunions de la paire {0,1} avec deux des quatre paires ci-dessous, prises dans deux lignes différentes :

{2,11}	{5,8}
{3,10}	{4,9}

Nous trouverions des résultats analogues pour les 5 autres indices impairs. C'est-à-dire que nous recensons ainsi 6×4, soit 24 ensembles A, distincts ou non. Ceux qui sont obtenus plusieurs fois auront déjà été repérés comme tels lors de l'étude des séries semi-renversables. Il suffit donc de voir si ces ensembles semi-renversables "multiples" sont également transposables pour l'indice 6 :

{0,1,4,5,8,9} convient, et est trouvé 3 fois ($i = 1,5$ et 9)
{0,3,4,7,8,11} convient, et est trouvé 3 fois ($i = 3,7$ et 11).

Ce sont donc en fait $24-4$, soit 20 ensembles A distincts que nous trouvons ici. Parmi eux se trouvent deux des six ensembles associés aux séries transposables correspondant aux valeurs de i différentes de 6 : ceux qui correspondent à $i = 2$, c'est-à-dire les deux ensembles qui figurent ci-dessus.

Au total, il y a donc 24 ensembles A qui correspondent aux séries stables (sur les 36 qui correspondent aux séries transposables).

Le tableau ci-dessous indique les ensembles A correspondant à des séries stables, suivant les valeurs de i et de j :

Valeurs de i	Valeurs de j	Ensembles A
4 ou 8		aucun
"impaires"	"impaires"	"gamme par tons"
2,6 ou 10	1,5 ou 9	$\{0,3,4,7,8,11\}$
	3,7 ou 11	$\{0,1,4,5,8,9\}$
3 ou 9	1 ou 7	$\{0,4,5,6,10,11\}$
	3 ou 9	$\{0,1,5,6,7,11\}$
	5 ou 11	$\{0,1,2,6,7,8\}$
6	1	$\{0,7\} \cup \begin{matrix}\{2,5\}\\ \text{ou}\\ \{8,11\}\end{matrix} \cup \begin{matrix}\{3,4\}\\ \text{ou}\\ \{9,10\}\end{matrix}$
	3	$\{0,9\} \cup \begin{matrix}\{1,8\}\\ \text{ou}\\ \{2,7\}\end{matrix} \cup \begin{matrix}\{4,5\}\\ \text{ou}\\ \{10,11\}\end{matrix}$
	5	$\{0,11\} \cup \begin{matrix}\{1,10\}\\ \text{ou}\\ \{4,7\}\end{matrix} \cup \begin{matrix}\{2,9\}\\ \text{ou}\\ \{3,8\}\end{matrix}$
	7	$\{0,1\} \cup \begin{matrix}\{2,11\}\\ \text{ou}\\ \{5,8\}\end{matrix} \cup \begin{matrix}\{3,10\}\\ \text{ou}\\ \{4,9\}\end{matrix}$
	9	$\{0,3\} \cup \begin{matrix}\{1,2\}\\ \text{ou}\\ \{7,8\}\end{matrix} \cup \begin{matrix}\{4,11\}\\ \text{ou}\\ \{5,10\}\end{matrix}$
	11	$\{0,5\} \cup \begin{matrix}\{1,4\}\\ \text{ou}\\ \{7,10\}\end{matrix} \cup \begin{matrix}\{2,3\}\\ \text{ou}\\ \{8,9\}\end{matrix}$

Exemples de séries stables :

Les exemples de séries semi-renversables que nous avons donnés plus haut (sauf celui de Boulez) correspondant également à des séries transposables, fournissent par conséquent des exemples de séries stables.

PORTRAIT DE FAMILLE

Une dernière propriété pour terminer :

Théorème 3 : Toute série renversable et semi-renversable est transposable.

Supposons $\exists i\ t_i(-A) = B$, et $\exists j\ t_j(-A) = A$.

$t_j(-A) = A$ implique $t_{-j}(A) = -A$,

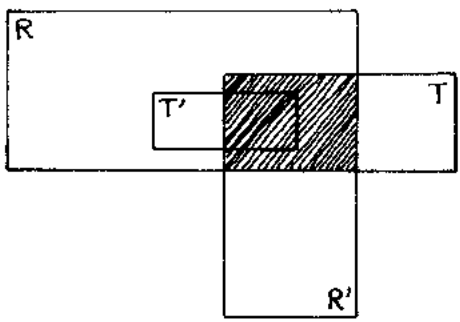
d'où : $B = t_i(-A) = t_i o t_{-j}(A) = t_{i-j}(A)$. CQFD.

Nous pouvons en déduire que l'intersection de l'ensemble des séries renversables et de l'ensemble des séries semi-renversables n'est autre que celui des séries stables.

Les divers résultats obtenus en cours d'étude nous permettent maintenant de donner une représentation ensembliste des divers types de séries envisagés ; dans le schéma ci-dessous :

T désigne l'ensemble des séries transposables
T′ — semi-transposables
R — renversables
R′ — semi-renversables.

L'ensemble des séries stables est représenté par la partie hachurée :



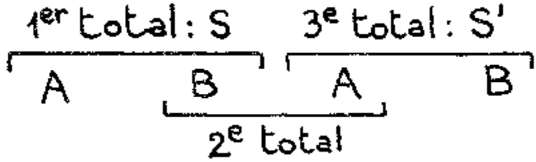
Notons l'existence de 6 ensembles A conduisant à des séries (appelons-les *superstables*) qui jouissent des quatre propriétés : elles sont transposables, semi-transposables, renversables et semi-renversables. Ces séries constituent l'ensemble $T \cap T' \cap R \cap R'$; les ensembles A correspondants sont :

{0,2,4,6,8,10} (gamme par tons)
{0,1,4,5,8,9}
{0,3,4,7,8,11}
{0,4,5,6,10,11}
{0,1,5,6,7,11}
{0,1,2,6,7,8}

… ET HORIZONTALEMENT ?

Signalons enfin que les propriétés étudiées, concernant la *superposition* des formes sérielles, ne sont pas non plus sans intérêt en ce qui concerne leur *succession,* donnant dans ce cas plus d'unité dodécaphonique au déroulement "horizontal" de l'œuvre.

En effet, soient S et S′ deux formes superposables d'une même série, telles que S fait entendre (pour fixer les idées) les notes de A, puis celles de B, alors que S′ fait entendre les notes de B, puis celles de A. L'enchaînement de S et de la récurrence de S′ énoncera alors les notes de A, puis celles de B, puis de nouveau les notes de A suivies de celles de B. Le fragment central (B suivi de A) est un total chromatique (quoique n'étant pas, en général, une forme de la série de l'œuvre) ; ce fragment permet en quelque sorte l'"accrochage" des formes S et S′. Ce qui fait que l'on a ainsi, non pas seulement deux totaux chromatiques juxtaposés, mais *trois totaux imbriqués les uns dans les autres :*



Pour illustrer ceci, reprenons l'exemple du début du Thème des Variations pour orchestre op. 31, de Schoenberg (mesures 1 à 12, ligne "mélodique" uniquement) :

La série de cette œuvre est, on l'a vu plus haut :

$$S = 10.4.6.3.5.9.2.1.7.8.11.0$$

C'est une série renversable, qui vérifie $t_5(-A) = B$. On a :

$$t_5(-S) = 7.1.11.2.0.8.3.4.10.9.6.5$$

Or, les mesures 1 à 12 écrites ci-dessus énoncent successivement S, puis la récurrence de $t_5(-S)$, faisant apparaître un total chromatique central qui est :

$$2.1.7.8.11.0.5.6.9.10.4.3$$

Ce "maillon" assure en quelque sorte la continuité du discours dodécaphonique.

POUR FINIR...

Exercice : On se propose d'engendrer la totalité des ensembles A correspondant à chacune des catégories envisagées ci-avant, à partir d'un nombre réduit d'entre eux, grâce aux opérations suivantes : renversement, complémentation dans E, transposition.

1) Démontrer le théorème suivant :

Si X est un ensemble A ou B correspondant à une série transposable (ou semi-transposable, ou renversable, ou semi-renversable), il en est de même de ses transposés, de ses renversements et de leurs complémentaires.

2) Montrer que 7 ensembles A suffisent à engendrer les séries transposables, 4 les séries semi-transposables, 19 les séries renversables et 13 les séries semi-renversables.

COUP D'OEIL EN ARRIÈRE

Nous avons, dans cette Annexe, indiqué les ensembles A permettant de construire des séries intéressantes du point de vue de la superposition (et de la succession) des formes. Une fois choisi un tel ensemble, il reste à l'ordonner, à ordonner également son complémentaire B, puis à ordonner le couple (A,B) de façon à former une série normalement constituée. La façon d'ordonner B peut, on l'a vu au passage, être également digne d'intérêt (séries à formes limitées). La série étant alors obtenue, il faut encore choisir les formes que l'on utilisera, leur succession et/ou leur superposition, les valeurs des notes, leur octave, etc. Alors, il ne s'agira plus de mathématique ; nous serons de plain pied dans le domaine de la MUSIQUE. Mais... ceci est une autre histoire.

RÉPONSES AUX QUESTIONS POSÉES DANS LES ENCADRÉS

ENCADRÉ 12 : 54, 72, 48, 64. Puis, il faut arrondir : 43, 57, 76, 51, 67, 45, 60

ENCADRÉ 13 :

A) La # : $\frac{243}{128}f.\frac{243}{128}.\frac{1}{2} \simeq 1{,}802f$

Si ♭ : $\frac{4}{3}f.\frac{4}{3} \simeq 1{,}778f$

Le La dièse est plus aigu que le Si bémol.

B) La # : $\frac{15}{8}f.\frac{15}{8}.\frac{1}{2} \simeq 1{,}758f$

Si ♭ : $\frac{4}{3}f.\frac{4}{3} \simeq 1{,}778f$

Le Si bémol est plus aigu que le La dièse.

ENCADRÉ 15 :

Le Sol # (tierce de Mi) a pour fréquence $(5/4)^2f$ (où f est la fréquence de Do).

Le Mi ♭ (tierce inférieure de Sol) a pour fréquence $\sqrt[4]{5}.(4/5)f$.

Ce qui donne, pour la quinte Sol # - Mi ♭ , le rapport de fréquences :

$2.(\sqrt[4]{5}.(4/5)) : (5/4)^2$, soit $2.(4/5)^3.\sqrt[4]{5}$ (env. 1,531).
↑
il faut prendre le Mi
de l'octave supérieure

Cette quinte est trop grande (d'environ 35 cents, c'est-à-dire un tiers de ton), et sonne particulièrement faux : c'est la *quinte du loup* (ainsi nommée parce qu'elle "hurle").

C'est pour éviter ce "loup" que l'on a imaginé, à la fin du 17e siècle, d'autres tempéraments, dont le tempérament égal.

ENCADRÉ 22 :

• *Réponse à la première question :*

La longueur x_p de la pe case du manche est :

$$x_p = I_pJ_p = AC\,(1 - \frac{p}{48})$$

La position de la 24ᵉ frette sera donc (partant du haut du manche) :

$$X = \sum_{p=1}^{24} x_p = AC \sum_{p=1}^{24} \left(1 - \frac{p}{48}\right)$$

soit $X = AC\left(24 - \frac{1}{48} \sum_{p=1}^{24} p\right) = AC\left(24 - \frac{24.25}{2.48}\right)$;

ou enfin : $X = \frac{71.AC}{4}$

Puisque $AC = \frac{AB}{36}$ on a : $X = \frac{AB}{2} \times \frac{71}{72}$

Théoriquement, on devrait trouver $X = \frac{AB}{2}$. On n'a donc pas tout à fait bouclé l'octave, mais il s'en faut de peu $\left(\frac{1}{144}\right)$.

Le procédé est donc acceptable à moins de 1 % près (pour une corde à vide de 60 cm, l'écart serait de l'ordre de 4 mm).

Réponse à la seconde question :

Il s'agit ici de calculer le rapport entre deux longueurs de corde vibrante consécutives.

Position de la pᵉ frette : $X_p = \sum_{n=1}^{p} x_n = AC \sum_{n=1}^{p} \left(1 - \frac{n}{48}\right)$

$X_p = AC\left(p - \frac{p(p+1)}{2.48}\right)$, soit $X_p = \frac{AB}{36} \cdot \frac{p(95-p)}{96}$

La longueur de corde qui vibre est donc :

$$\ell_p = AB - X_p = \frac{AB}{3456}\left(p^2 - 95p + 3456\right)$$

Le rapport cherché est donc :

$$\frac{\ell_p}{\ell_{p+1}} = \frac{p^2 - 95p + 3456}{p^2 - 93p + 3362} = 1 + 2\,\frac{47 - p}{p^2 - 93p + 3362}$$

[Remarque : Ceci ne vaut que pour p au moins égal à 1.
Pour $p = 0$, le rapport sera $\frac{AB}{AB - x_1}$, soit $\frac{3456}{1 - 95 + 3456} \simeq 1{,}02796$]

On peut alors étudier, dans **R**, les variations de la fonction définie par :

$$y = f(x) = 1 + 2\,\frac{47 - x}{x^2 - 93x + 3362}$$

On s'aperçoit (après calcul) que, dans l'intervalle [1, 23], cette fonction passe par un maximum pour une valeur x_0 comprise entre 13 et 14, qu'elle est croissante sur $[1, x_0]$ et décroissante sur $[x_0, 23]$. On a, de plus :

$$\begin{aligned} f(1) &\simeq 1{,}02813 \\ f(23) &\simeq 1{,}02830 \\ f(13) &\simeq 1{,}02928 \\ f(14) &\simeq 1{,}02925 \end{aligned}$$

On peut donc ainsi constater que la valeur du rapport n'est pas constante, mais qu'elle varie peu (elle est comprise entre 1,0279 et 1,0293).

Conclusion : la réponse aux deux questions posées est :

NON, MAIS PRESQUE

ENCADRÉ 24 :

$f = \dfrac{k}{l^2}$. On s'en aperçoit en comparant les longueurs des deux Do extrêmes.
Les autres longueurs permettent de confirmer cette hypothèse.

ENCADRÉ 25 :

1200 pouds $\simeq$ 197 tonnes

D'autre part, on a $f = \dfrac{k}{\sqrt[3]{M}}$ d'où $f_2 = f_1\sqrt[3]{\dfrac{M_1}{M_2}}$

La fréquence de Ré 2 est d'environ 147 Herz, donc celle du son émis par Tsar Kolokol est : $147 \times \sqrt[3]{\dfrac{16}{197}}$. C'est-à-dire environ 63,7 herz.

Ceci est compris entre la fréquence du Si 0 (61,7 Herz) et celle du Do 1 (65,4 hz) actuels.

LISTE DES ENCADRÉS

PETITE BIBLIOGRAPHIE

BARBAUD Pierre : La musique, discipline scientifique (Dunod, 1968)

BARRAUD Henri : Pour comprendre les musiques d'aujourd'hui (Seuil, 1968)

BAYER Francis : De Schönberg à Cage (Klincksieck, 1981)

BOSSEUR Dominique & Jean-Yves : Révolutions musicales (Le Sycomore, 1979)

BRAGARD Roger & DE HEN Ferd. J. : Les instruments de musique dans l'art et l'histoire (De Visscher, Bruxelles, 1973).

BROWN Frank : La musique par ordinateur (PUF, 1982. Que sais-je ?)

CANDÉ Roland de : Histoire universelle de la musique (Seuil, 1978)

CHAILLEY Jacques : La résonance dans les échelles musicales (CNRS, 1963)

CORDIER Serge : Piano bien tempéré et justesse orchestrale (Buchet-Chastel, 1982)

DANHAUSER Adolphe : Théorie de la musique (Lemoine, 1929)

DOURSON Paul & PARZYSZ Bernard : Musiques, nombres et structures (L'Education musicale, nos 232-33-35-39, 1976-77)

ETIENNE Luc : Le tempérament décimal (Bull. du GAM n° 6 bis, Univ. Paris-VII, 1972)

GAL Hans : Préface à "L'Offrande musicale" (Boosey & Hawkes, 1952)

HONEGGER Marc : Science de la musique (Bordas, 1976)

LEIBOWITZ René : Introduction à la musique à douze sons (L'Arche, 1949)

LEIBOWITZ René : Schoenberg (Seuil, 1969)

MESSIAEN Olivier : Technique de mon langage musical (Leduc, 1944)

MOLES Abraham : Les musiques expérimentales (Cercle d'Art contemporain, 1960)

RAMSEYER Urs : L'art populaire à Bali (Office du Livre, 1977. Fribourg)

STUCKENSCHMITT H.H. : La musique du XXe siècle (Hachette, 1969)

TCHEN Ysia : La musique chinoise en France au 18e siècle (Publications orientalistes de France, 1974)

TOUMA H.H. : La musique arabe (Buchet-Chastel, 1977)

Fragments d'histoire des mathématiques

Adolf P. YOUSCHKEVITCH
Meddi ABDELJAOUAD
Paulo RIBENBOIM
Jean-Luc VERLEY
Bernard BRU
Dr Roger KNOTT

176 pages

OBJECTIFS

Aux auteurs des divers articles, il a été demandé de "retracer l'histoire d'un grand problème, d'une théorie, d'un secteur qui a joué un rôle important, soit par son propre développement, soit par ses interactions avec d'autres secteurs mathématiques ou de la science". Ceci dans une conception de l'histoire des mathématiques comme "analyse de la construction des concepts mathématiques et des problématiques qui ont motivé cette construction" ; analyse également de l'organisation des secteurs mathématiques et de leurs interactions avec d'autres domaines de la science.

SOMMAIRE

GAMMES NATURELLES

Yves HELLEGOUARCH, CAEN

"Si votre idée des gammes et de la justesse est basée sur l'accord du piano vous trafiquez dans la supercherie, pour dire les choses crûment ! Cette supercherie fut partiellement approuvée par J.S. Bach et reçut l'appui total de son fils C.P.E. Bach, mais je ne pense pas que la seule vertu de ce nom illustre la préserve de toute critique !".

[Bunting]

PRÉAMBULE

Le but de ce travail n'est pas de donner un fondement mathématique à une méthode d'accordage des instruments à clavier [Cordier] mais plutôt d'étudier certains faits qui appartiennent à la tradition et à l'intuition des instrumentistes à cordes.

Quant on déplace un doigt de la main gauche sur une corde de violon, *sans appuyer*, il se produit :

1°) des phénomènes acoustiques (formation d'harmoniques naturelles)
2°) que l'instrumentiste doit interpréter à l'aide de la culture musicale qu'il a reçue.

Ces faits appartiennent plus à l'arithmétique qu'à l'analyse réelle car la hauteur des harmoniques est une fonction arithmétique discontinue de la position du doigt sur la corde (quand on *appuie* le doigt, on retrouve une fonction $x \longmapsto \frac{k}{x}$ classique). Et, comme on le sait depuis longtemps [Brun], ils se rattachent à la théorie de l'approximation.

1. Introduction

Bien que le niveau des mathématiques utilisées ici ne dépasse pas celui des classes préparatoires aux grandes écoles, il est certain que cet article est plus accessible aux mathématiciens qu'aux musiciens.

Mais les motivations des définitions et des buts de ce travail peuvent paraître mystérieuses aux non-musiciens. Aussi présenterai-je un certain nombre de remarques, bien connues des musiciens, qui conduisent à un point de vue que les paragraphes suivants vont développer d'une manière abstraite (trop abstraite !).

1,1) Pour des raisons plus ou moins claires, on considère généralement que la base de la musique occidentale est la gamme chromatique tempérée [de Candé] qui est le sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$ engendré par $2^{\frac{1}{12}}$, sous-groupe que nous noterons S.

1,2) Il n'est pas question de répéter ici tout le mal qui en a été dit [Hindemith]. Bornons-nous à signaler qu'un piano accordé selon cette gamme sonne tout à fait faux ([Leipp] p. 134) et que cette gamme paraît inadéquate pour l'étude de l'harmonie.

1,3) En termes mathématiques les difficultés proviennent de ce que :

$$S \cap \mathbf{Q}_+^* = \langle 2 \rangle$$

or les oreilles des musiciens et les instruments de musique aiment les "fractions simples". Une expérience facile à réaliser permet de s'en rendre compte : si l'on pose légèrement un doigt sur une corde de violon en un endroit *approchant* $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ de sa longueur, la corde produit un son dont la fréquence fondamentale est *exactement* trois fois celle de la "corde à vide".

Nous appellerons cette remarque le "principe d'Euler" car L. Euler disait déjà en 1766 : "l'organe de l'ouïe est accoutumé de prendre pour proportion simple toutes les proportions qui n'en diffèrent que fort peu, de sorte que la différence soit quasi imperceptible".

1,4) Les fractions les plus simples sont $\frac{1}{1}$(unisson) $\frac{2}{1}$ (octave) $\frac{3}{2}$ (quinte juste) $\frac{4}{3}$ (quarte juste) etc... Si l'on appelle "hauteur" de la fraction irréductible $\frac{r}{s}$ le nombre $h(\frac{r}{s}) = \sup(r,s)$, les fractions précédentes se suivent dans l'ordre des hauteurs croissantes, d'où une classification des intervalles par ordre de "dissonance" croissante qui a un caractère d'objectivité qui a frappé les musiciens ([Hindemith] p. 55, expériences de C. Stumpf [de Candé] t. II, p. 187, etc...).

1,5) Pour utiliser cette notion de hauteur, on est conduit à chercher des gammes de nombres rationnels (h s'étend bien aux nombres algébriques, mais son extension ne correspond plus à l'intuition harmonique [Hellegouarch,1] et on ne peut appliquer raisonnablement cette notion de hauteur à S). Une "gamme naturelle" sera donc un **sous-ensemble** de $\mathbf{Q}_+^*$ muni d'une certaine structure de groupe par laquelle il sera isomorphe à $\mathbf{Z}$.

1,6) La méthode classique d'accord des pianos par quintes et octaves [Leipp] fournit l'idée de base, nous allons la préciser.

Supposons que l'on veuille accorder un piano dont le "la" est juste. Un procédé consiste à parcourir le "cycle" des quintes :

la, ré, sol, do, fa, si $\flat$, mi $\flat$

la $\flat$, ré $\flat$, sol $\flat$, do $\flat$, fa $\flat$, si $\flat\flat$

En fait, si les quintes sont "justes" (égales à $\frac{3}{2}$) et non "tempérées" (égales à $2^{\frac{7}{12}}$) on ne peut pas retomber sur un "la", car l'équation :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 2^x$$

n'admet pas de solution $x \in \mathbf{N}$.

Deryck Cooke [Cooke] exprime de ce fait de manière frappante en disant : "alors que l'équation désirée musicalement est $\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1$, l'équation mathématique correcte est $\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1{,}013642\ldots$".

Exprimé mathématiquement, ce que le musicien souhaite c'est imposer la *relation :*

$$r = \frac{3^{12}}{2^{19}} = 1$$

dans le *groupe abélien libre* $<2,3>$.

Si, finalement, on applique le principe d'Euler pour trouver un *système de représentants* des classes de $<2,3>$ modulo $<r>$ on trouve (miraculeusement !) la "gamme de Pythagore" telle qu'elle est décrite dans les livres d'Histoire de la Musique [de Candé].

2. Une propriété des sous-groupes de $\mathbf{Q}_+^*$

$\mathbf{Q}_+^*$ désigne le groupe multiplicatif des rationnels >0. Il est bien connu que $\mathbf{Q}_+^*$ est un groupe libre de rang infini dont l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est une base ; cela signifie que tout rationnel $r>0$ s'écrit d'une manière et d'une seule :

$$r = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{n(p)}$$

avec $n(p) \in \mathbf{Z}$ et $n(p) = 0$ sauf pour un nombre fini de p.

Théorème : Si G est un sous-groupe de $\mathbf{Q}_+^*$ de rang >1, alors G est dense dans $\mathbf{R}_+^*$.

Démonstration :

Puisque G est de rang >1, il existe deux éléments r et s dans G multiplicativement indépendants.

Ceci signifie que Log r et Log s sont linéairement indépendants sur **Q**. Le théorème de Kronecker [Hardy] affirme alors que l'ensemble des nombres de la forme m Log r + n Log s, pour $(m,n) \in \mathbf{Z}^2$, est dense dans **R**. Donc $<r,s> = \{r^m s^n \; ; \; (m,n) \in \mathbf{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbf{R}_+^*$.

Définitions : Nous dirons que p, q, r, etc... sont des nombres *multiplicativement indépendants* dans $\mathbf{Q}_+^*$ si Log p, Log q, Log r, etc... sont linéairement indépendants sur **Q**, et nous noterons par $<p,q>$, $<p,q,r>$, etc... les sous-groupes denses de $\mathbf{Q}_+^*$ engendrés par $\{p,q\}$, $\{p,q,r\}$, etc...

En fait notre but sera une étude de la suite $\mathcal{S}$:

$\mathcal{S}$ $\qquad <2,3> \qquad <2,3,5> \qquad <2,3,5,7> \qquad$ etc...

dont nous désignerons l'élément général par G. Et finalement, pour $r = \prod_{p\in\mathcal{T}} p^{n(p)} \in \mathbf{Q}_+^*$, nous poserons (1) :

$$\|r\| = \sum_{p\in\mathcal{T}} |n(p)| \operatorname{Log} p$$

3) Commas

Nous avons montré dans l'introduction l'intérêt des approximations de 1 dans les groupes $G\in\mathcal{S}$; nous appellerons "commas" de G les meilleures de ces approximations et nous en donnerons la définition suivante :

Définition : Soit $G\in\mathcal{S}$ et $a\in G$.

Nous dirons que a est un *comma* de G (ou *meilleure approximation* de 1 dans G) si et seulement si

1) $a\neq 1$

2) $b\in G \setminus \{1\}$ et $|\operatorname{Log} b| < |\operatorname{Log} a|$ entraîne $\|b\| > \|a\|$.

Remarques :

1) Si $a = p_1^{n_1} \ldots p_h^{n_h}$, alors on voit que p.g.c.d. $(n_1,\ldots,n_h) = 1$.

2) Un comma de G ne reste pas toujours une meilleure approximation de 1 dans un plus grand sous-groupe G′ de $\mathcal{S}$.

Par exemple $a = \dfrac{2^8}{3^5}$ est un comma de $<2,3>$ mais n'est pas un comma de $<2,3,5>$ car il existe $b = \dfrac{3^4}{2^4\times 5} \in <2,3,5>$ tel que $|\operatorname{Log} b| < |\operatorname{Log} a|$ et $\|b\| < \|a\|$.

Le critère élémentaire suivant donne une réponse partielle à cette question.

Critère : Si $G\in\mathcal{S}$ et si $x = \dfrac{a+1}{a} \in G$, avec $a\in\mathbf{N}$. Alors a est un comma de G.

Démonstration :

Soit une fraction irréductible $\dfrac{m}{n}\in\mathbf{Q}_+^*$ telle que $\dfrac{m}{n} > 1$. Montrons que si $\left|\operatorname{Log}\dfrac{m}{n}\right| < \left|\operatorname{Log}\dfrac{a+1}{a}\right|$ alors $\left\|\dfrac{m}{n}\right\| > \left\|\dfrac{a+1}{a}\right\|$.

(1) Si l'on considère $\mathbf{Q}_+^*$ comme un $\mathbf{Z}$-module, $\| \ \|$ est analogue à une norme puisque l'on a :

α) $\|r\|\geqslant 0$ et $\|r\| = 0$ ssi $r = 1$

β) $\|rr'\| \leqslant \|r\| + \|r'\|$

γ) $\|r^n\| = |n|\,\|r\|$ pour tout $n\in\mathbf{Z}$

1) Remarquons d'abord que $n > a$ (on suppose naturellement que n est positif). En effet $n \leqslant a$ entraîne que $\frac{n+1}{n} \leqslant \frac{a+1}{a}$, et comme $m > n$, on a :

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{n+1}{n} \leqslant \frac{a+1}{a}$$

ou encore :

$$\text{Log}\,\frac{m}{n} \leqslant \text{Log}\,\frac{a+1}{a}$$

2) Puisque $m > n$, on a $m \geqslant n+1 > a+1$, d'où :

$$\|m\| + \|n\| > \|a+1\| + \|a\|$$

et comme m et n (resp. $a+1$ et a) sont premiers entre eux, on a :

$$\left\|\frac{m}{n}\right\| = \|m\| + \|n\| \quad \left(\text{resp. } \left\|\frac{a+1}{a}\right\| = \|a+1\| + \|a\|\right)$$

ce qui nous donne l'inégalité cherchée.

4) Commas des groupes de rang 2

Nous allons généraliser légèrement la situation du paragraphe 2 en prenant un sous-groupe *quelconque* de rang 2 de $\mathbf{Q}_+^*$ que l'on notera encore G. Si $\{p,q\}$ est une base de G, p et q sont multiplicativement indépendants et la recherche des commas de G équivaut à la recherche des couples $(x,y) \in \mathbf{Z}^2$, tels que $(x,y) \neq (0,0)$ et tels que $x \,\text{Log}\, p + y \,\text{Log}\, q$ soit voisin de 1. Ainsi $-\frac{x}{y}$ doit être une "bonne approximation" de l'irrationnel $\alpha = \frac{\text{Log}\, q}{\text{Log}\, p}$.

La recherche des bonnes approximations de α se fait habituellement par l'algorithme des fractions continues [Stark] : on construit ainsi une suite de fractions $\frac{a_n}{b_n}$, les "convergentes" de α, convergeant vers α selon le schéma :

$$\frac{a_o}{b_o} < \frac{a_2}{b_2} \ldots < \alpha < \ldots < \frac{a_3}{b_3} < \frac{a_1}{b_1}\ .$$

En posant (un peu arbitrairement) :

$$(x_n, y_n) = ((-1)^{n-1}a_n, (-1)^n b_n)$$

on obtient le résultat suivant.

Théorème 1 : La suite des rationnels $r_n = p^{x_n} q^{y_n}$ est monotone décroissante et tend vers 1. De plus, on a :

$$p^{\frac{1}{2|y_{n+1}|}} < r_n < p^{\frac{1}{|y_{n+1}|}}\ .$$

Démonstration :

1) On sait que $a_n - b_n\alpha$ a le signe de $(-1)^{n-1}$, [Stark], donc :

$$x_n + y_n\alpha = (-1)^{n-1}[a_n - \alpha b_n] > 0$$

soit $r_n > 1$.

2) Maintenant :

$$\frac{\mathrm{Log}\, r_{n+1}}{\mathrm{Log}\, r_n} = \frac{x_{n+1} + \alpha y_{n-1}}{x_n + \alpha y_n} = -\frac{a_{n+1} - \alpha b_{n+1}}{a_n - \alpha b_n}.$$

Or on sait [Stark] que :

$$\left|\frac{a_{n+1} - \alpha b_{n+1}}{a_n - \alpha b_n}\right| < 1$$

d'où :

$$\frac{\mathrm{Log}\, r_{n+1}}{\mathrm{Log}\, r_n} < 1.$$

3) Les deux inégalités de l'énoncé équivalent à :

$$\frac{1}{2b_{n+1}} < x_n + \alpha y_n < \frac{1}{b_{n+1}}$$

soit encore à :

$$\frac{1}{2b_{n+1}} < |a_n - \alpha b_n| < \frac{1}{b_{n+1}}$$

ce qui est bien connu [Stark].

On peut se demander maintenant si l'on obtient bien ainsi des commas de G. Pour répondre à cette question nous utiliserons le résultat suivant [Dubois] : à partir d'un certain rang les convergentes de α correspondent aux meilleures approximations de α pour la norme :

$$N(x,y) = [x^2 + \alpha^2 y^2]^{1/2}.$$

Théorème 2 : A partir d'un certain rang les nombres r_n définis dans le théorème 1 sont les commas de G.

Démonstration :

1) Montrons qu'à partir d'un certain rang r_n est un comma.

Soit $\frac{a_n}{b_n}$ la convergente correspondante et $r = p^a q^{-b} \in G$, la condition :

$$\mathrm{Log}\, r_n > |\mathrm{Log}\, r|$$

entraîne à partir d'un certain rang :

$$2(\log p)^2[N(a_n,b_n)]^2 < 2(\mathrm{Log}\, p)^2[N(a,b)]^2.$$

Or :

$$2(\text{Log } p)^2[N(a,b)]^2 = (a \text{ Log } p - b \text{ Log } q)^2 + (a \text{ Log } p + b \text{ Log } q)^2$$
$$= |\text{Log } r|^2 + \|r\|^2$$

d'où :

$$|\text{Log } r_n|^2 + \|r_n\|^2 < |\text{Log } r|^2 + \|r\|^2$$

ce qui entraîne bien :

$$\|r_n\| < \|r\| .$$

2) Montrons qu'à partir d'un certain rang tout comma est un r_n. Soit un comma $r = p^a q^{-b} \in G$, assez proche de 1, nous allons montrer que r est une meilleure approximation de α au sens ordinaire du terme, c'est-à-dire que :

$$|a' - b'\alpha| < |a - b\alpha|$$

entraîne $|a'| > |a|$ et $|b'| > |b|$. Il en résultera que r est un r_n([Stark]).

Supposons que Log p < Log q et prenons ε positif tel que $\varepsilon < \frac{1}{2}$ Log p, supposons de plus que r est tel que :

$$|a \text{ Log } p - b \text{ Log } q| < \varepsilon.$$

Alors $\quad |a' \text{Log } p - b' \text{Log } q| < |a \text{ Log } p - b \text{ Log } q|$

entraîne :

$$b \text{ Log } q = a \text{ Log } p + \eta$$
$$b' \text{ Log } q = a' \text{ Log } p + \eta'$$

avec $\quad \sup(|\eta|, |\eta'|) < \varepsilon$.

On en déduit que :

$$\|r'\| = |a' \text{Log } p + b' \text{ Log } q| = |2a' \text{ Log } p + \eta'|$$
$$\|r\| = |a \text{ Log } + b \text{ Log } q| = |2a \text{ Log } p + \eta| .$$

Comme on sait que $\|r'\| > \|r\|$, il vient :

$$|a'| > |a| - \frac{|\eta| + |\eta'|}{2 \text{ Log } p} > |a| - \frac{\varepsilon}{\text{Log } p} > |a| - 1$$

Finalement $|a'| \geqslant |a|$ et, de même, $|b'| \geqslant |b|$.

Mais $|a'| = |a|$ (respectivement $|b'| = |b|$) et $|a' \text{ Log } p - b' \text{ Log } q| < |a \text{ Log } p - b \text{ Log } q| < \varepsilon$ entraînent $|b'| = |b|$ (respectivement $|a| = |a'|$) ce qui est absurde.

Ainsi $|a'| > |a|$ et $|b'| > |b|$.

5. Groupes quotients et gammes de Pythagore

Nous allons d'abord considérer un sous-groupe quelconque de rang 2 de $\mathbf{Q}_+^*$ (toujours noté G) et un comma r_n de G. Notre premier but est l'étude du groupe quotient $G/_{<r_n>}$.

Ensuite nous choisirons $G = <2,3>$ ce qui nous donnera des gammes que j'appellerai "gammes de Pythagore".

5,1) Soit $G = <p,q>$ et $r_n = p^{x_n} q^{y_n}$ comme dans le paragraphe 4. On introduira le nombre r_{n-1} et on utilisera la relation classique :

$$x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n = (-1)^{n-1}$$

Théorème :

Désignons par H le groupe $<r_n>$. Alors G/H est un groupe isomorphe à $\mathbf{Z}$ qui est engendré par la classe de r_{n-1}.

Remarque :

Rappelons que les signes de x_n et y_n sont choisis pour que l'on ait toujours $p^{x_n} q^{y_n} > 1$.

Démonstration :

Il est équivalent de démontrer, en notation additive, que $\mathbf{Z}^2/(x_n,y_n)\mathbf{Z}$ est un groupe sans torsion et que la classe de (x_{n-1},y_{n-1}) en est un générateur.

1) Groupe sans torsion

Montrons que si $h>0$:

$$h(x,y) \in (x_n,y_n)\mathbf{Z}$$

entraîne que $(x,y) = k(x_n,y_n)$, $k \in \mathbf{Z}$.

En effet, cette relation équivaut à :

$$\begin{cases} hx = \ell x_n \\ hy = \ell y_n \end{cases}$$

Comme x_n et y_n sont premiers entre eux, on voit que h divise p.g.c.d. $(\ell x_n, \ell y_n) = \ell$, donc si l'on pose :

$$\ell = hk$$

et si l'on simplifie par h, on a le résultat ci-dessus.

2) Générateur

Dire que la classe de (a,b) est un générateur de $\mathbf{Z}^2/(x_n,y_n)\mathbf{Z}$ revient à dire que tout $(x,y) \in \mathbf{Z}^2$ s'écrit sous la forme :

$$(x,y) = h(a,b) + k(x_n,y_n)$$

donc que (a,b) et (x_n,y_n) constituent une base de $\mathbf{Z}^2$, ce qui est le cas si $(a,b) = (x_{n-1},y_{n-1})$.

Théorème : Dans $\frac{G}{H}$ la classe de p(resp. q) est égale à $|y_n|$ fois (resp. $|x_n|$ fois) celle de r_{n-1}.

Ainsi l'indice du sous-groupe de $\frac{G}{H}$ engendré par la classe de p (resp. q) est égal à $|y_n|$ (resp. $|x_n|$).

Démonstration :

Il suffit de démontrer cette propriété pour la classe de p, ce qui équivaut à :

$$p \equiv (p^{x_{n-1}} q^{y_{n-1}})^{|y_n|}$$

ou bien (en notation additive) :

$$(1,0) \equiv |y_n|(x_{n-1},y_{n-1})$$

Si n est pair :

$y_n > 0$ et on doit avoir

$$(1,0) \equiv (y_n x_{n-1}, y_n y_{n-1}) \text{ modulo } (x_n,y_n)\mathbf{Z}$$

Or on a :

$$x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1} = (-1)^n$$

d'où :

$$y_n x_{n-1} = x_n y_{n-1} + 1$$

Si n est impair :

$y_n < 0$ et on doit avoir :

$$(1,0) \equiv (-y_n x_{n-1}, -y_n y_{n-1})$$

Or on a :

$$-y_n x_{n-1} = -x_n y_{n-1} - (-1)^n$$

Convention : Suivant le "principe d'Euler" nous représenterons une classe de G/H par un élément de plus petite hauteur (par "hauteur" d'une fraction irréductible $\frac{r}{s} \in \mathbf{Q}_+^*$ nous entendons sup(r,s)). En général, un tel représentant est unique, et il l'est nécessairement lorsque $x_n y_n$ est impair. S'il ne l'est pas, il y en a au plus deux dans certaines classes...

5,2) Examinons maintenant le cas particulier

$$F = \langle 2,3 \rangle .$$

Nous prendrons $p=2$ et $q=3$ et $|y_n|$ sera appelé le *nombre de degrés* du groupe $G/<r_n>$. Il n'est peut-être pas inutile de donner une définition générale du nombre de degrés d'un groupe G/H (resp. une gamme **T**).

Définition : Le nombre de degrés du groupe G/H (resp. de la gamme T) est l'indice du sous-groupe engendré par la classe de 2 (resp. par 2).

Le calcul des convergentes de $\frac{\text{Log } 3}{\text{Log } 2}$ donne les commas[1] de G (voir paragraphe 4) :

$$\boxed{1 < \ldots < \frac{3^{53}}{2^{84}} < \frac{2^{65}}{3^{41}} < \frac{3^{12}}{2^{19}} < \frac{2^8}{3^5} < \frac{3^2}{2^3} < \frac{2^2}{3} < \frac{3}{2} < \frac{2}{1}}$$

Dans le tableau ci-dessus, nous nous sommes bornés à écrire les commas $r>1$.

J'appellerai commas de Pythagore, Janko et Mercator les trois derniers commas, car Pythagore, Janko et Mercator ont étudié des gammes ayant (respectivement) 12, 41 et 53 degrés [Dautrevaux].

n = 1 :

Z	0	1
fréquence	1	2

$$\boxed{\text{relation } \frac{2^2}{3} \equiv 1}$$

n = 2 : tonique, quinte, octave (2 degrés)

Z	0	1	2
fréquence	1	$\frac{3}{2}$	2

$$\boxed{\frac{3^2}{2^3} \equiv 1}$$

n = 3 : gamme pentaphonique (5 degrés)

Z	0	1	2	3	4	5
fréquence	1	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2^4}{3^2}$	2

$$\boxed{\frac{2^8}{3^5} \equiv 1}$$

Remarque :

B. Parzysz donne les fréquences $\frac{3^4}{2^6}$ et $\frac{3^3}{2^4}$ pour les degrés 2 et 4, ces fréquences sont équivalentes aux nôtres [Parzysz].

(1) C'est une constatation.

$n = 4$: gamme à douze degrés

$$\boxed{\frac{3^{12}}{2^{19}} \equiv 1}$$

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
fréquence	1	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2^7}{3^4}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^7}$	2

Le tableau ci-après donne le prolongement de la gamme jusqu'au 60ième degré. On constate que les fréquences sont croissantes[(1)].

$n = 5$: gamme à 41 degrés (Janko)

$$\boxed{\frac{2^{65}}{3^{41}} \equiv 1}$$

Voir tableau ci-après : on constate que les fréquences sont croissantes[(1)].

$n = 6$: gamme à 53 degrés (Mercator)

$$\boxed{\frac{3^{53}}{2^{84}} \equiv 1}$$

Voir tableau ci-après : on constate que les fréquences sont croissantes[(1)].

au-delà, le nombre de degrés des gammes est : 306, 665, 15601, 31867, 79335, 111202, 190537, 10590737, 10781279, etc.

Remarque : Contrairement à ce que l'on pourrait croire en lisant le tableau des 60 premiers degrés de la gamme de Pythagore à 12 degrés, on ne passe pas d'une octave à celle immédiatement au-dessus en multipliant les fréquences par 2. Au-delà de l'audible des irrégularités apparaissent, par exemple :

$$h(2^{19} \cdot \frac{2^8}{3^5}) \leqslant h(2^{19} \cdot \frac{2^8}{3^5} \cdot \frac{3^{12}}{2^{19}})$$

est faux.

(1) Vérification de P. TOFFIN.

PYTHAGORE

$$\frac{2^8}{3^5} \equiv \sqrt[12]{2} \equiv \sqrt[19]{3} \qquad\qquad \frac{3^{12}}{2^{19}} \equiv 1$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2^7}{3^4}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^7}$	2	$\frac{2^9}{3^5}$	$\frac{3^2}{2^2}$	$\frac{2^6}{3^3}$	$\frac{3^4}{2^5}$	$\frac{2^3}{3}$	$\frac{3^6}{2^8}$	3

20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
$\frac{2^8}{3^4}$	$\frac{3^3}{2^3}$	$\frac{2^5}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^6}$	2^2	$\frac{2^{10}}{3^5}$	$\frac{3^2}{2}$	$\frac{2^7}{3^3}$	$\frac{3^4}{2^4}$	$\frac{2^4}{3}$	$\frac{3^6}{2^7}$	2.3	$\frac{2^9}{3^4}$	$\frac{3^3}{2^2}$	$\frac{2^6}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^5}$	2^3	$\frac{2^{11}}{3^5}$	3^2	$\frac{2^8}{3^3}$

40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$\frac{3^4}{2^3}$	$\frac{2^5}{3}$	$\frac{3^6}{2^6}$	$2^2.3$	$\frac{2^{10}}{3^4}$	$\frac{3^3}{2}$	$\frac{2^7}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^4}$	2^4	$\frac{2^{12}}{3^5}$	2.3^2	$\frac{2^9}{3^3}$	$\frac{3^4}{2^2}$	$\frac{2^6}{3}$	$\frac{3^6}{2^5}$	$2^3.3$	$\frac{2^{11}}{3^4}$	3^3	$\frac{2^8}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^3}$	2^5

GAMME DE PYTHAGORE À 41 DEGRÉS :

$\frac{3^{12}}{2^{19}} \equiv \sqrt[41]{2} \equiv \sqrt[65]{3}$ $\qquad$ $\frac{2^{65}}{3^{41}} \equiv 1$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.	11	11	13	14	15	16	17	18	19	20
1	$\frac{3^{12}}{2^{19}}$	$\frac{2^{27}}{3^{17}}$	$\frac{2^{8}}{3^{5}}$	$\frac{3^{7}}{2^{11}}$	$\frac{3^{19}}{2^{30}}$	$\frac{2^{16}}{3^{10}}$	$\frac{3^{2}}{2^{3}}$	$\frac{3^{14}}{2^{22}}$	$\frac{2^{24}}{3^{15}}$	$\frac{2^{5}}{3^{3}}$	$\frac{3^{9}}{2^{14}}$	$\frac{2^{32}}{3^{20}}$	$\frac{2^{13}}{3^{8}}$	$\frac{3^{4}}{2^{6}}$	$\frac{3^{16}}{2^{25}}$	$\frac{2^{21}}{3^{13}}$	$\frac{2^{2}}{3}$	$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	$\frac{2^{29}}{3^{18}}$	$\frac{2^{10}}{3^{6}}$
C *do*			D♭ *ré♭*				D *ré*			E♭ *mi♭*				E *mi*			F *fa*			

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
$\frac{3^{6}}{2^{9}}$	$\frac{3^{18}}{2^{28}}$	$\frac{2^{18}}{3^{11}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^{13}}{2^{20}}$	$\frac{2^{26}}{3^{16}}$	$\frac{2^{7}}{3^{4}}$	$\frac{3^{8}}{2^{12}}$	$\frac{3^{20}}{2^{31}}$	$\frac{2^{15}}{3^{9}}$	$\frac{3^{3}}{2^{4}}$	$\frac{3^{15}}{2^{23}}$	$\frac{2^{23}}{3^{14}}$	$\frac{2^{4}}{3^{2}}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{2^{31}}{3^{19}}$	$\frac{2^{12}}{3^{7}}$	$\frac{3^{5}}{2^{7}}$	$\frac{3^{17}}{2^{26}}$	$\frac{2^{20}}{3^{12}}$	2
F♯ *fa♯*			G *sol*			A♭ *la♭*				A *la*			B♭ *si♭*				B *si*			C *do*

GAMME DE PYTHAGORE À 53 DEGRÉS : $\frac{2^{65}}{3^{41}} \equiv \sqrt[53]{2} \equiv \sqrt[84]{3}$ $\qquad$ $\frac{2^{84}}{3^{53}} \equiv 1$

(Correspond au "Comma de Holder")

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	$\frac{2^{65}}{3^{41}}$	$\frac{2^{46}}{3^{29}}$	$\frac{2^{27}}{3^{17}}$	$\frac{2^{8}}{3^{5}}$	$\frac{3^{7}}{2^{11}}$	$\frac{3^{19}}{2^{30}}$	$\frac{2^{35}}{3^{22}}$	$\frac{2^{16}}{3^{10}}$	$\frac{3^{2}}{2^{3}}$	$\frac{2^{62}}{3^{39}}$	$\frac{2^{43}}{3^{27}}$	$\frac{2^{24}}{3^{15}}$	$\frac{2^{5}}{3^{3}}$	$\frac{3^{9}}{2^{14}}$	$\frac{2^{51}}{3^{32}}$	$\frac{2^{32}}{3^{20}}$	$\frac{2^{13}}{3^{8}}$
C *do*				D♭ *ré♭*					D *ré*				E♭ *mi♭*				

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
$\frac{3^{4}}{2^{6}}$	$\frac{2^{59}}{3^{37}}$	$\frac{2^{40}}{3^{25}}$	$\frac{2^{21}}{3^{13}}$	$\frac{2^{2}}{3}$	$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	$\frac{2^{48}}{3^{40}}$	$\frac{2^{29}}{3^{18}}$	$\frac{2^{10}}{3^{6}}$	$\frac{3^{6}}{2^{9}}$	$\frac{2^{56}}{3^{35}}$	$\frac{2^{37}}{3^{23}}$	$\frac{2^{18}}{3^{11}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^{13}}{2^{20}}$	$\frac{2^{45}}{3^{28}}$	$\frac{2^{26}}{3^{16}}$	$\frac{2^{7}}{3^{4}}$
E *mi*				F *fa*					F♯ *fa♯*				G *sol*				A♭ *la♭*

36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
$\frac{3^{8}}{2^{12}}$	$\frac{2^{53}}{3^{33}}$	$\frac{2^{34}}{3^{21}}$	$\frac{2^{15}}{3^{9}}$	$\frac{3^{3}}{2^{4}}$	$\frac{3^{15}}{2^{23}}$	$\frac{2^{42}}{3^{26}}$	$\frac{2^{23}}{3^{14}}$	$\frac{2^{4}}{3^{2}}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{3^{22}}{2^{34}}$	$\frac{2^{31}}{3^{19}}$	$\frac{2^{31}}{3^{7}}$	$\frac{3^{5}}{2^{7}}$	$\frac{3^{17}}{2^{26}}$	$\frac{2^{39}}{3^{24}}$	$\frac{2^{20}}{3^{12}}$	2
				A *la*				B♭ *si♭*					B *si*				C *do*

6. Gammes de Zarlino

Eugène DUBOIS a mis au point un algorithme qui donne les commas de $G = <2,3,5>$.

Le calcul, fait sur ordinateur, donne la suite suivante :

$2, \frac{3}{2}, \frac{2^2}{3}, \frac{5}{2^2}, \frac{3^2}{2^3}, \frac{2\times 5}{3^2}, \frac{2^4}{3\times 5}, \frac{5^2}{2^3\times 3}, \frac{3^4}{2^4\times 5}$ = Comma de Didyme, $\frac{2^{11}}{3^4\times 5^2}$,

$\frac{5^6}{2^6\times 3^5}, \frac{3^8\times 5}{2^{15}}, \frac{2^{38}}{3^2\times 5^{15}}, \frac{2\times 5^{18}}{3^{27}}, \frac{3^{10}\times 5^{16}}{2^{53}}, \frac{2^{54}\times 5^2}{3^{37}}, \frac{3^{62}}{2^{17}\times 5^{35}}$, etc...

Nous allons considérer le groupe quotient de $G = <2,3,5>$ par le sous-groupe $\mathbf{H}$ engendré par deux fractions $r = 2^\alpha\ 3^\beta\ 5^\gamma$ et $r' = 2^{\alpha'}\ 3^{\beta'}\ 5^{\gamma'}$.

Théorème.

1) Posons :

$$\begin{vmatrix} x & \alpha & \alpha' \\ y & \beta & \beta' \\ z & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha''x + \beta''y + \gamma''z$$

Si le p.g.c.d. $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ est égal à 1, alors $G/\mathbf{H}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$.

2) Dire que la classe de $s = 2^a 3^b 5^c$ est un générateur de $G/\mathbf{H}$ équivaut à dire que :

$$\begin{vmatrix} a & \alpha & \alpha' \\ b & \beta & \beta' \\ c & \gamma & \gamma'' \end{vmatrix} = \alpha''a + \beta''b + \gamma''c = \pm 1.$$

Démonstration :

1) Dire que p.g.c.d. $(\alpha'',\beta'',\gamma'') = 1$ équivaut à l'existence de $(a,b,c) \in \mathbf{Z}^3$ tel que

$$a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = \pm 1$$

en vertu du théorème de Bezout.

2) Mais cette dernière condition signifie que (a,b,c), (α,β,γ) et (α',β',γ') constituent une base de $\mathbf{Z}^3$.

Si nous posons $K = \mathbf{Z}(\alpha,\beta,\gamma) + \mathbf{Z}(\alpha',\beta',\gamma')$, nous voyons que $\mathbf{Z}^3/_K$ est un groupe isomorphe à $\mathbf{Z}$ et engendré par la classe de (a,b,c). Mais ceci est juste la forme additive du résultat que nous voulons obtenir.

Exemples :

Nous nous proposons d'"améliorer" les gammes de Pythagore, correspondant aux groupes $<2,3> / <r>$, que nous avons obtenues dans le paragraphe 5.

Pour chaque valeur de r ($r = \frac{2^2}{3}, \frac{3^2}{2^3}, \frac{2^8}{3^5}, \frac{3^{12}}{2^{19}}$, etc.) nous chercherons un comma r′ de <2,3,5> qui satisfasse au théorème précédent, on posera alors **H** = <r,r′>.

Soit φ la projection canonique G ⟶ G/H et soit P l'image $\varphi(<2,3>)$. Comme Ker $\varphi \cap <2,3> = <r>$ on voit que **P** est isomorphe à la gamme de Pythagore dont on était parti (mais certains représentants de cette gamme doivent être remplacés par des éléments de <2,3,5> de plus petite hauteur).

Finalement le nombre de degré de G/H est égal à celui de P multiplié par l'indice de P dans G/H.

Lorsque cet indice est égal à 1, on dira que la gamme obtenue *affine* notre gamme de Pythagore, sinon on dira que l'on a obtenu une *"nouvelle gamme"*.

1) $r = \frac{2^2}{3}$

r′	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2\times 5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3\times 5}$	$\frac{5^2}{2^3\times 3}$	$\frac{3^4}{2^4\times 5}$
s	2	2	2	$\frac{5}{2^2}$	2

2) $r = \frac{3^2}{2^3}$

r′	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2\times 5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3\times 5}$	$\frac{5^2}{2^3\times 3}$	$\frac{3^4}{2^4\times 5}$
s	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{3}{2}$

3) $r = \frac{2^8}{3^5}$

r′	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2\times 5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3\times 5}$	$\frac{5^2}{2^3\times 3}$	$\frac{3^4}{2^4\times 5}$
s	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2.5}{3^2}$	$\frac{3^2}{2^3}$

4) $r = \frac{3^{12}}{2^{19}}$

r'	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2\times5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3\times5}$	$\frac{5^2}{2^3\times3}$	$\frac{3^4}{2^4\times5}$	$\frac{5^6}{2^6\times3^5}$
s	$\frac{2^8}{2^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{3^4}{2^4\times5}$	$\frac{2^4}{3\times5}$	$\frac{3^4}{2^4\times5}$

On voit donc apparaître des phénomènes intéressants dans les troisièmes colonnes des trois premiers tableaux ainsi que dans les trois dernières colonnes du dernier tableau, nous allons étudier en détail les gammes correspondantes que nous désignerons sous le nom général de gammes de Zarlino (du nom de la quatrième du dernier tableau).

$(r,r') = (\frac{2^2}{3}, \frac{5^2}{2^3\times3})$: deux degrés (nouvelle gamme)

Z	0	1	2
fréquences	1	$\frac{5}{2^2}$	2

$(r,r') = (\frac{3^2}{2^3}, \frac{5^2}{2^3\times3})$: quatre degrés (nouvelle gamme)

Z	0	1	2	3	4
fréquences	1	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{5}$	2

$(r,r') = (\frac{2^8}{3^5}, \frac{5^2}{2^3\times3})$: dix degrés(1) (nouvelle gamme)

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
fréquences	1	$\frac{2.5}{3^2}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^3}{2^2\times5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^2}{5}$	2

$(r,r') = (\frac{3^{12}}{2^{19}}, \frac{5^2}{2^3\times3})$: vingt-quatre degrés (nouvelle gamme)

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
fréquences	1	$\frac{3^4}{2^4\times5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2\times5}{3^2}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^6}{2^7\times5}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^6\times5}{3^5}$

(1) L'existence de cette gamme peut donner un sens à la construction d'un tempérament égal à 10 degrés (Luc Etienne).

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^3}{2^2\times 5}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{2^3\times 5}{3^3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^5}{2^5\times 5}$	$\frac{2^7}{3^4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^8\times 5}{3^6}$

20	21	22	23	24
$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^2}{5}$	$\frac{3^5}{2^7}$	$\frac{2^5\times 5}{3^4}$	2

$(r,r') = (\frac{3^{12}}{2^{19}}, \frac{3^4}{2^4.5})$: douze degrés, gamme de Zarlino proprement dite.

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
fréquences	1	$\frac{2^4}{3.5}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2.3}{5}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{5^2}{2.3^2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2^3}{5}$	$\frac{5}{3}$

10	11	12
$\frac{3^2}{5}$	$\frac{3\times 5}{2^3}$	2

voir plus loin un tableau des fréquences des 60 premiers degrés (ces fréquences sont croissantes).

Dans le dernier cas s est plus proche de 1 que r et la gamme que l'on peut construire (elle a 72 degrés) n'est pas croissante.

Il est donc plus naturel de prendre r comme générateur et $r' \equiv 1$ et $s \equiv 1$ comme relations. Voici le résultat :

$(r',s) = \left(\frac{5^6}{2^6\times 3^5}, \frac{3^4}{2^4\times 5}\right)$ gamme à 19 degrés.(1)

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
fréquences	1	$\frac{2^7}{5^3}$	$\frac{2^4}{3\times 5}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{5^3}{2^2\times 3^3}$	$\frac{2\times 3}{5}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^5}{5^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^2\times 5}{2^5}$

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\frac{2^2\times 3^2}{5^2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5^2}{2^4}$	$\frac{2^3}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2^7}{3\times 5^2}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3\times 5}{2^3}$	$\frac{2^4\times 3}{5^2}$	2

(1) L'existence de cette gamme peut donner un sens à la construction d'un tempérament égal à 19 degrés.

ZARLINO

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} \equiv 1, \qquad \frac{3^4}{2^4.5} \equiv 1$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	$\frac{2^4}{3.5}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2.3}{5}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{5^2}{2.3^2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2^3}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3^2}{5}$	$\frac{3\times5}{2^3}$	2	$\frac{2^5}{3.5}$	$\frac{3^2}{2^2}$	$\frac{2^2.3}{5}$

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
$\frac{5}{2}$	$\frac{2^3}{3}$	$\frac{5\times3^2}{2^4}$	3	$\frac{2^4}{5}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{2.3^2}{5}$	$\frac{3.5}{2^2}$	2^2	$\frac{5^2}{2.3}$	$\frac{3^2}{2}$	$\frac{2^3.3}{5}$	5	$\frac{2^4}{3}$	$\frac{5.3^2}{2^3}$	2.3

32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
$\frac{5^2}{2^2}$	$\frac{2^2.5}{3}$	$\frac{2^2.3^2}{5}$	$\frac{3.5}{2}$	2^3	$\frac{5^2}{3}$	3^2	$\frac{2^4.3}{5}$	2.5	$\frac{2^5}{3}$	$\frac{5.3^2}{2^2}$	$2^2.3$	$\frac{5^2}{2}$	$\frac{3^3}{2}$	$\frac{2^3.3^2}{5}$	3.5

48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
2^4	$\frac{5^2.2}{3}$	2.3^2	$\frac{2^5.3}{5}$	$2^2.5$	$\frac{2^6}{3}$	$\frac{5.3^2}{2}$	$2^3.3$	5^2	3^3	$\frac{2^4.3^2}{5}$	2.3.5	2^5

7) Introduction de la septième harmonique

La seule difficulté pour traiter le cas G = $<2,3,5,7>$ consiste à en déterminer les commas.

Eugène DUBOIS a calculé les meilleures approximations de 1 dans le groupe G en remplaçant $\| 2^x \, 3^y \, 5^z \, 7^t \|$ par :

$$[x^2(\mathrm{Log}\ 2)^2 + y^2(\mathrm{Log}\ 3)^2 + z^2(\mathrm{Log}\ 5)^2 + t^2(\mathrm{Log}\ 7)^2]^{1/2}.$$

Il a obtenu la suite de fractions :

$$\frac{2}{1}, \frac{2^2}{3}, \frac{2.3}{5}, \frac{7}{2.3}, \frac{2.5}{3^2}, \frac{3.5}{2.7}, \frac{3.7}{2^2.5}, \frac{2^2.3^2}{5.7}, \frac{7^2}{2^4.3},$$

$$\frac{2^6}{3^2.7}, \frac{3^4}{2^4.5}, \frac{5^2.3^2}{2^5.7}, \frac{2^5.3.5^2}{7^4}, \text{etc...}$$

et le critère du paragraphe 2 montre que ce sont des commas[(1)].

Nous allons considérer le groupe quotient de G = $<2,3,5,7>$ par le sous-groupe H engendré par trois fractions :

$$r = 2^{\alpha}\, 3^{\beta}\, 5^{\gamma}\, 7^{\delta},\quad r' = 2^{\alpha'}\, 2^{\beta'}\, 5^{\gamma'}\, 7^{\delta'} \quad \text{et} \quad r'' = 2^{\alpha''}\, 3^{\beta''}\, 5^{\gamma''}\, 7^{\delta''}.$$

Le théorème suivant se démontre comme celui du paragraphe 6.

Théorème

1) Posons :

$$\begin{vmatrix} x & \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ y & \beta & \beta' & \beta'' \\ z & \gamma & \gamma' & \gamma'' \\ t & \delta & \delta' & \delta'' \end{vmatrix} = \alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \delta''' t$$

Si le p.g.c.d. $(\alpha''', \beta''', \gamma''', \delta''')$ est égal à 1, alors G/H est isomorphe $\mathbf{Z}$.

2) Dire que la classe de $s = 2^a\, 3^b\, 5^c\, 7^d$ est un générateur de G/H équivaut à dire que :

$$\begin{vmatrix} a & \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ b & \beta & \beta' & \beta'' \\ c & \gamma & \gamma' & \gamma'' \\ d & \delta & \delta' & \delta'' \end{vmatrix} = \alpha''' a + \beta''' b + \gamma''' c + \delta''' d = \pm 1.$$

(1) Tous les commas ne sont pas obtenus : $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$, par exemple, manquent.

Montrons, pour terminer ce paragraphe, comment nous pouvons "améliorer" les 60 premiers degrés de la gamme de Zarlino de la page 146.

Nous choisissons $r = \frac{3^{12}}{2^{19}}$, $r' = \frac{3^4}{2^4.5}$ et $r'' = \frac{3^2.5^2}{2^5.7}$.

Nous avons :

$$\begin{vmatrix} x & -19 & -4 & -5 \\ y & 12 & 4 & 2 \\ z & 0 & -1 & 2 \\ t & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 12x + 19y + 28z + 34t$$

et $(a,b,c,d) = (-1,1,1,-1)$ est une solution de l'équation de Bezout qui est de hauteur minimale dans sa classe.

On peut alors reprendre le tableau de la page 146 en remplaçant les éléments qui s'y prêtent par des éléments de hauteur minimale dans leurs classes et on obtient le tableau qui suit.

ZARLINO BIS

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} \equiv 1 \qquad \frac{3^4}{2^4 \cdot 5} \equiv 1 \qquad \frac{3^2 \cdot 5^2}{2^5 \cdot 7} \equiv 1$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	$\frac{3.5}{2.7}$	$\frac{2^3}{7}$	$\frac{2.3}{5}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2^3}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{2^2}$	$\frac{3\times 5}{2^3}$	2	$\frac{3.5}{7}$	$\frac{3^2}{2^2}$	$\frac{7}{3}$

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
$\frac{5}{2}$	$\frac{2^3}{3}$	$\frac{2.7}{5}$	3	$\frac{2^4}{5}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{3.5}{2^2}$	2^2	$\frac{3.7}{5}$	$\frac{3^2}{2}$	$\frac{2.7}{3}$	5	$\frac{2^4}{3}$	$\frac{2^2.7}{5}$	2.3

32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
$\frac{5^2}{2^2}$	$\frac{2^2.5}{3}$	7	$\frac{3.5}{2}$	2^3	$\frac{5^2}{3}$	3^2	$\frac{2^2.7}{3}$	2.5	$\frac{3.7}{2}$	$\frac{5.3^2}{2^2}$	$2^2.3$	$\frac{5^2}{2}$	$\frac{3^3}{2}$	2.7	3.5

48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
2^4	$\frac{7^2}{3}$	2.3^2	$\frac{2^3.7}{3}$	$2^2.5$	3.7	$\frac{5.3^2}{2}$	$2^3.3$	5^2	3^3	$2^2.7$	2.3.5	2^5

8) Crible

Une des difficultés pratiques que l'on rencontre dans la construction des gammes est de savoir reconnaître si un nombre connu comme élément du $n^{ième}$ degré est effectivement un élément de plus petite hauteur de sa classe (cette difficulté est la cause des inexactitudes que l'on peut trouver dans le tableau de "Scales" [Hellegouarch 2]).

On peut tourner cette difficulté en écrivant par ordre de hauteur croissante les éléments de G qui sont plus grands que 1. Pour la gamme de Zarlino par exemple, on construira le tableau suivant où x désigne un élément de G, h(x) sa hauteur, n_x le numéro de xH dans G/H et * signifie que le nombre n_x apparait pour la première fois dans le tableau. Pour déterminer n_x on pourra utiliser la relation heuristique

$$n_x \approx 12 \frac{\text{Log } x}{\text{Log } 2}$$

qui est à rapprocher de l'algorithme de Viggo Brun [Brun] et qui me paraît être mystérieusement efficace.

h(x)	(x, n_x)
1	$(1,0^*)$
2	$(2,12^*)$
3	$(\frac{3}{2},7^*)$ $(3,19^*)$
4	$(\frac{4}{2},5^*)$ $(4,24^*)$
5	$(\frac{5}{4},4^*)$ $(\frac{5}{3},9^*)$ $(\frac{5}{2},16^*)$ $(5,28^*)$
6	$(\frac{6}{5},3^*)$ $(6,31^*)$
8	$(\frac{8}{5},8^*)$ $(\frac{8}{3},17^*)$ $(8,36^*)$
9	$(\frac{9}{8},2^*)$ $(\frac{9}{5},10^*)$ $(\frac{9}{4},14^*)$ $(\frac{9}{2},26^*)$ $(9,38^*)$
10	$(\frac{10}{9},2)$ $(\frac{10}{3},21^*)$ $(10,40^*)$
12	$(\frac{12}{5},15^*)$ $(12,43^*)$
15	$(\frac{15}{8},11^*)$ $(\frac{15}{4},23^*)$ $(\frac{15}{2},35^*)$ $(15,47^*)$

16	$(\frac{16}{15},1^*)$ $(\frac{16}{9},10)$ $(\frac{16}{5},20^*)$ $(\frac{16}{3},29^*)$ $(16,48^*)$
18	$(\frac{18}{5},22^*)$ $(18,50^*)$
20	$(\frac{20}{9},14)$ $(\frac{20}{3},33^*)$ $(20,52^*)$
etc.	

9) Distance harmonique sur $\mathbf{Q}_+^*$

Pour des raisons de commodité, je donne ici une démonstration élémentaire d'un résultat plus général [Hellegouarch, 1].

Théorème

La fonction $(x,y) \longmapsto \operatorname{Log} h(\frac{x}{y})$ est une distance sur $\mathbf{Q}_+^*$.

Démonstration

Nous devons démontrer que :

1) $\operatorname{Log} h(\frac{x}{y}) \geqslant 0$ et que $\operatorname{Log} h(\frac{x}{y}) = 0$ entraîne $x = y$

2) $\operatorname{Log} h(\frac{x}{y}) = \operatorname{Log} h(\frac{y}{x})$

3) $\operatorname{Log} h(\frac{x}{z}) \leqslant \operatorname{Log} h(\frac{x}{y}) + \operatorname{Log} h(\frac{y}{z})$

Ces conditions équivalent à :

1') $h(\frac{x}{y}) \leqslant 1$ et $h(\frac{x}{y}) = 1$ entraîne $x = y$

2') $h(\frac{x}{y}) = h(\frac{y}{x})$

3') $h(\frac{x}{z}) \leqslant h(\frac{x}{y}) \cdot h(\frac{y}{z})$

et les deux premières assertions sont évidentes.

La troisième peut s'écrire aussi :

$$h(rr') \leqslant h(r)h(r')$$

avec r et $r' \in \mathbf{Q}_+^*$.

Si r (resp. r') est égal à la fraction irréductible $\frac{n}{d}$ (resp. $\frac{n'}{d'}$) et si rr'

est égal à la fraction irréductible $\frac{n''}{d''}$ on a $d'' \leqslant dd'$ et $n'' \leqslant nn'$. D'où :

$$\sup(d'', n'') \leqslant \sup(d,n) \,.\, \sup(d'n')$$

10) Dissonance des intervalles d'une gamme.

Soit une gamme T construite selon les principes précédents et représentant le groupe quotient G/H et soient x et $y \in T$.

Nous noterons par d la distance harmonique sur $\mathbf{Q}_+^*$ et par $\delta_T(x,y)$ le nombre $d(xH,yH)$.

$\delta_T(x,y)$ sera appelé la "dissonance" de l'intervalle $\frac{y}{x}$ dans la gamme T

Proposition : Si z désigne le représentant de la classe de $\frac{y}{x}$ dans la gamme T, on a :

$$\delta_T(x,y) = \text{Log } h(z).$$

Démonstration :

$d(xH,yH) = \inf\{d(xu,yv) \; ; \; u \text{ et } v \in H\} = \inf\{\text{Log } h(\frac{y}{x} w) \; ; \; w \in H\} = \text{Log } h(z).$

Nous allons montrer maintenant comment cette notion de dissonance permet de retrouver des notions musicales inexplicables à partir de la gamme tempérée S. Dans la suite, P désignera la gamme de Pythagore à 12 degrés, Z celle de Zarlino et Z^* celle de Zarlino-bis.

Hindemith remarque ([Hindemith] p. 55) que bien que le théoriciens de la musique ne soient d'accord sur rien, ils le sont cependant sur l'ordre de "parenté" décroissante des degrés de la gamme.

L'ordre que donne Hindemith est le suivant : unisson, octave, quinte, quarte, sixte majeure, tierce majeure, tierce mineure, etc.[(1)].

Il ajoute que la quarte augmentée (ou quinte diminuée) se trouve très loin.

Nous allons comparer ce qui se passe dans nos trois gammes :

	unisson	octave	quinte	quarte	sixte majeure	tierce majeure	tierce mineure	sixte mineure	quarte augment.
δ_P	0	Log 2	Log 3	Log 4	Log 27	Log 81	Log 32	Log 128	Log 729
δ_Z	0	Log 2	Log 3	Log 4	Log 5	Log 5	Log 6	Log 8	Log 25
δ_{Z^*}	0	Log 2	Log 3	Log 4	Log 5	Log 5	Log 6	Log 8	Log 7

(1) Voir aussi [de Candé] t. 2, p. 186.

On voit que la notion de dissonance dans la gamme de Zarlino reproduit assez bien l'ordre constaté par Hindemith ; nous choisirons donc cette gamme dans la suite :

Z	do	ré ♭	ré	mi ♭	mi	fa	sol ♭	sol	la ♭	la	la #	si	do
	1	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{25}{18}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{15}{8}$	2

10,1) *Justesse expressive*

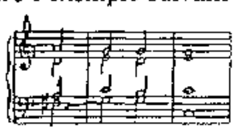
La plupart des instrumentistes à cordes et des chanteurs pratiquent la "justesse expressive" ([Blum] ch. V) c'est-à-dire qu'ils modifient la hauteur des sons qu'ils utilisent par de légers "commas" (ce qui ne change pas la classe modulo H) afin de jouer plus juste en fonction du contexte.

Nous allons illustrer cette pratique par un exemple utilisant la gamme de Zarlino.

Nous présenterons dans un tableau les fréquences des sons des gammes majeures de do, sol, fa et ré. Pour passer des fréquences de do majeur à celles des tonalités ci-dessus on multiplie par $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$ et $\frac{3^2}{2^3}$.

	do	do #	ré	mi	fa	fa #	sol	la	si ♭	si	do
do maj.	1		$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$		$\frac{15}{8}$	2
sol maj.	1		$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$		$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$		$\frac{15}{8}$	2
fa maj.	1		$\frac{10}{9}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{16}{9}$		2
ré maj.		$\frac{135}{64}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$		$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$		$\frac{15}{8}$	

Dans la théorie de la musique, sol maj. et fa maj. sont considérés comme des tonalités voisines de do maj., et ré maj. comme une tonalité voisine de sol maj. En dehors de l'introduction d'une altération supplémentaire (dièze) on constate que la "montée" de la tonalité de do maj. à la tonalité voisine de sol maj. affecte le "sixième degré" qui s'élève d'un comma de Didyme ($\frac{81}{80}$) pour devenir le "second degré" de la nouvelle gamme — je veux dire que le "la" de sol maj. est plus haut que le "la" de do maj., et ceci d'un comma. C'est un des éléments de la richesse et de la cohérence qui appartiennent au jeu des grands interprètes. Et c'est ce qui explique aussi que pour moduler d'une tonalité donnée dans une tonalité voisine l'harmonie recherchera l'ambiguïté et évitera les notes dont la hauteur change, comme le montre l'exemple suivant :



10,2) *Attraction harmonique*

Depuis des siècles ([Cooke] p. 49) les musiciens ont constaté que certaines notes étaient "attirées" vers une note voisine ; Deryck Cooke ([Cooke] p. 90) en donne un résumé (do est la *tonique*) :

attraction \ note	ré ♭	ré	fa	la ♭	la	si ♭	si
semi-tonale	↘ do		↘ mi	↘ sol		↘ la	↗ do′
tonale		↘ do			↘ sol		

Pour retrouver ces résultats mathématiquement, nous étudierons la dissonance des intervalles $\delta_Z(\text{do},x)$. Par exemple l'attirance *tonale* du "la" par le "sol" signifie-t-elle que :

$$\delta_Z(\text{do},\text{sol}) < \delta_Z(\text{do},\text{si}) \ ?$$

$$\begin{array}{llll}
\delta_Z(\text{do},\text{do}) = 0 & < \delta_Z(\text{do},\text{ré}) & = \text{Log } 9 \\
\delta_Z(\text{do},\text{do}) = 0 & < \delta_Z(\text{do},\text{mi}) & = \text{Log } 5 \\
\delta_Z(\text{do},\text{mi}) = \text{Log } 5 & < \delta_Z(\text{do},\text{sol}\flat) & = \text{Log } 25 \\
\delta_Z(\text{do},\text{sol}) = \text{Log } 3 & < \delta_Z(\text{do},\text{la}) & = \text{Log } 5 \\
\delta_Z(\text{do},\text{sol}) = \text{Log } 3 & < \delta_Z(\text{do},\text{si}) & = \text{Log } 15 \\
\delta_Z(\text{do},\text{do}') = \text{Log } 2 & < \delta_Z(\text{do},\text{la}\sharp) & = \text{Log } 9
\end{array}$$

on voit qu'il y a parfaite cohérence avec les résultats de Deryck Cooke.

11) Conclusion

S'il m'est permis de tirer une philosophie de l'étude précédente, je dirai que la théorie qu'on a faite est "pythagoricienne" par opposition à la théorie classique qui est "néopythagoricienne" (termes de [Shanks]).

La substitution du corps des rationnels **Q** au corps des réels **R**, nous donne une latitude plus large pour expliquer les différents aspects de la perception musicale : distance mélodique (dont la loi de Weber-Fechner donne une approximation grossière et qui correspond à peu près à la distance ordinaire), distance harmonique (pour laquelle la loi de Weber-Fechner ne s'applique absolument pas et qui correspond à peu près à la dissonance du paragraphe 10), justesse expressive (paragraphe 10), etc.

Finalement cette théorie permet de réconcilier divers points de vue et d'expliquer comment les musiciens qui pratiquent la justesse naturelle peuvent s'entendre avec ceux qui n'ont pas ce privilège : toutes(1) les gammes chromatiques à douze degrés sont isomorphes entre elles (resp. isomorphes à **Z**) dans un isomorphisme qui conserve 2 (resp. l'envoie sur 12).

(1) Sauf la gamme de Serge Cordier (encadré 23 de la première partie).

12) Exercices

Paragraphes 3 et 4

1) Utiliser le critère du paragraphe 3 et le développement en fraction continue de $\frac{\mathrm{Log}\, q}{\mathrm{Log}\, p}$ pour obtenir des commas de $<2,3,5>$, $<2,3,5,7>$, etc..
(on pourra prendre $(p,q) = (\frac{3}{2},5), (2, \frac{15}{7})$, etc...)

2) Montrer que $\| r \| = \mathrm{Log}\, h(r)$ est une "norme" sur $\mathbf{Q}_+^*$ au sens de la remarque du paragraphe 2.

Montrer que le critère du paragraphe 3 subsiste lorsque l'on remplace $\| \ \|$ par $||| \ |||$.

Paragraphe 6

1) Montrer que les intervalles suivants sont dans le groupe des commas de la gamme de Zarlino à douze degrés :

$$\frac{5^3}{2^7}, \frac{3^{28}}{5^{19}}, \frac{2.5^5}{3^8}.$$

Paragraphe 7

1) Montrer que les intervalles suivants sont dans le groupe des commas de la gamme de Zarlino bis :

$$\frac{21}{20}, \frac{28}{27}, \frac{36}{35}, \frac{49}{48}.$$

2) Hindemith (p. 80) considère diverses "secondes majeures" $\frac{10}{9}, \frac{9}{8}, \frac{8}{7}$.
Montrer qu'elles sont toutes dans le second degré de la gamme de Zarlino bis.

3) Hindemith (p. 71) considère les "tierces" suivantes :

$$\frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{9}{7}, \frac{2^5}{3^3}, \frac{3^4}{2^6}.$$

Trouver leurs degrés dans la gamme de Zarlino bis.

4) Prendre $\mathbf{H} = < \frac{2^8}{3^5}, \frac{3^4}{2^4.5}, \frac{3^2.5^2}{2^5.7} >$

Montrer que le groupe quotient de $<2,3,5,7>$ par $\mathbf{H}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$.

Montrer que la classe de $\frac{3^2}{2^3}$ est un générateur de $<2,3,5,7>/_{H}$.

En déduire que cette gamme a 5 degrés (gamme pentaphonique du type Zarlino-bis).

Trouver les représentants des 5 premières classes de cette gamme.

Montrer que parmi les "tierces" de Hindemith (exercice 3) $\frac{6}{5}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{2^5}{3^3}$ sont dans le premier degré et $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{3^4}{2^6}$ dans le second degré.

Paragraphe 9

1) J'appelle "suite de Farey $\mathcal{F}_n$" la suite croissante des fractions $\frac{h}{k}$ telles que $1 \leqslant h \leqslant k \leqslant n$ et $(h,k) = 1$ et je désigne par $\mathcal{F}_n^{-1}$ l'ensemble des inverses des $x \in \mathcal{F}_n$.

Montrer que, pour la distance harmonique, la boule fermée $B(1, \text{Log } n) = \mathcal{F}_n \cup \mathcal{F}_n^{-1}$.

Montrer que si $\frac{h}{k}$ et $\frac{h'}{k'}$ se suivent dans $B(1, \text{Log } n)$, on a : $k+k' > n$ et $k \neq k'$.

Montrer que si $\frac{h}{k}$, $\frac{h'}{k'}$ et $\frac{h''}{k''}$ se suivent dans $B(1, \text{Log } n)$, on a :

$$\frac{h'}{k'} = \frac{h+h''}{k+k''}$$

et que si $\frac{h'}{k'} \in B(1, \text{Log }(n-1))$, on a :

$$\begin{cases} h' = h+h'' \\ k' = k+k'' \end{cases}$$

Montrer que si $\frac{h}{k}$ et $\frac{h'}{k'}$ se suivent dans $B(1, \text{Log } n)$, on a :

$$kh' - hk' = 1$$

2) La hauteur h sur $\mathbf{Q}$ se prolonge naturellement au corps des nombres algébriques $\overline{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{C}$.

On désigne par A le corps des nombres algébriques réels : $A = \overline{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$.

Alors $(x,y) \longmapsto \text{Log } h(\frac{x}{y})$ est une distance sur A_+^* [Hellegouarch, 1].

(On pourra commencer par remarquer que $\|x\| = \text{Log } h(x)$ est une "norme" sur A_+^* au sens de la remarque du paragraphe 2).

Etudier la structure de groupe topologique de A_+^*. Généraliser la notion de suite de Farey.

Sujets d'étude

Paragraphe 3

1) Comparer les commas de $G \in \mathcal{S}$ pour la "norme" $\| \ \|$ et la norme $||| \ |||$ (voir exercice 2 des paragraphes 3 et 4).

Paragraphe 5

1) Démontrer que les convergentes de $\frac{\text{Log } 3}{\text{Log } 2}$ et les commas de $<2,3>$ sont les mêmes.

2) Dans le cas où $G = <p,q>$ peut-on préciser à partir de quel rang les convergentes de $\frac{\text{Log } q}{\text{Log } p}$ et les commas de $<p,q>$ sont les mêmes ?

3) Une classe de $^G/_H$ peut-elle avoir plusieurs représentants de hauteur minimale ?

4) Etudier la croissance supposée des différentes gammes de Pythagore.

5) Est-ce que la gamme de Pythagore à 12 degrés est un sous-ensemble de celle à 41 degrés ?

6) Est-ce que la gamme de Pythagore à 12 degrés est un sous-ensemble de celle à 53 degrés ?

Paragraphes 6 et 7

1) Construire un algorithme efficace donnant les commas des groupes $<2,3,5,7>$, $<2,3,5,7,11>$ etc...

2) Etudier la croissance supposée des gammes de Zarlino et Zarlino bis.

Paragraphe 8

1) Expliquer l'efficacité de la formule donnant n_x.

Paragraphe 10

1) Utiliser la notion de dissonance (et plus généralement de hauteur dans un espace projectif sur $\mathbf{Q}$) pour expliquer certaines règles de l'harmonie.

2) Est-ce que la notion de dissonance correspond à la perception harmonique d'une oreille éduquée, naïve ?

3) Comment les différentes gammes sont-elles perçues par une oreille éduquée, naïve ?

Paragraphe 11

1) Déterminer tous les sous-groupes H de $\mathbf{Q}_+^*$ tels que $\mathbf{Q}_+^*/H = \mathbf{Z}$ et la classe de 2 soit la puissance douzième de l'un des générateurs.

2) Soit un corps de nombres algébriques $k \subset \mathbf{R}$ et soit un sous-groupe de type fini $G = \langle x_1,\ldots,x_n \rangle \subset K_+^*$, G étant de rang n. On considère un sous-groupe $H = \langle y_1,\ldots,y_{n-1} \rangle$ de G dont le rang est égal à $n-1$. Trouver des conditions sur les x_i et les y_j pour que G/H soit isomorphe à $\mathbf{Z}$.

3) On reprend les notations ci-dessus avec $K = \mathbf{Q}(5^{1/4})$. Peut-on trouver G et H pour que les représentants de G/H contiennent la gamme mésotonique (encadré 15 de la première partie).

RÉFÉRENCES

[BLUM] D. BLUM : "Casals et l'art de l'interprétation", Buchet/Chastel.

[BRUN] V. BRUN : "Euclidien algorithms and musical theory", L'Enseignement Mathématique, t. X, Genève, pp. 125-137.

[BUNTING] C. BUNTING : "Essay on the Craft of Cello-Playing", t. 2. Cambridge University Press (1982), p. 154

[COOKE] D. COOKE : "The Language of Music", Oxford University Press.

[CORDIER] S. CORDIER : "Piano bien tempéré et justesse orchestrale" Buchet/Chastel.

[DAUTREVAUX] J. DAUTREVAUX : "A propos de : Approximation en Musique" Bulletin A.P.M. n° 299 (juin 1975).

[DE CANDÉ] R. DE CANDÉ : "Histoire universelle de la Musique", Seuil.

[DUBOIS] E. DUBOIS : Thèse-Université Pierre et Marie Curie (17 mars 1980).

[HARDY] HARDY and WRIGHT : "An Introduction to the theory of numbers", Oxford.

[HELLEGOUARCH, 1] Y. HELLEGOUARCH : "Un aspect de la théorie des hauteurs" Journées arithmétiques, Caen (1980).

[HELLEGOUARCH, 2] Y. HELLEGOUARCH : "Scales", Comptes Rendus, Mathématiques, La Société Royale du Canada, vol. IV, n° 5 (oct. 1982) et vol. V, n° 2 (avr. 1983).

[HINDEMITH] P. HINDEMITH : "The craft of musical composition" Schott.

[LEIPP] E. LEIPP : "Acoustique Musicale", Masson, 1971.

[B. PARZYSZ] : L'Approximation en musique, bulletin A.P.M. n° 296 XII - 1974.

[SHANKS] D. SHANKS : "Solved and unsolved problems in Number Theory", Chelsea.

[STARK] H.M. STARK : "An introduction to Number Theory", Markham.

INDEX DES TERMES MUSICAUX

INDEX DES NOMS DE PERSONNES

BROCHURES DE L'A.P.M.E.P.

Sont indiqués pour chaque brochure la date de parution et le nombre de pages.

0. *Pour apprendre à conjecturer : initiation au Calcul des Probabilités,* par L. Guerber et P.L. Hennequin, 1968, 232 p.

1. *Charte de Chambéry,* étapes et perspectives d'une réforme de l'enseignement des mathématiques, 1968, 32 p.

2. *Matériaux pour l'histoire des nombres complexes* par Jean Itard, 1969, 32 p.

5. *Eléments de logique pour servir à l'enseignement mathématique* par J. Adda et W. Faivre, 1971, 52 p.

6. *Charte de Caen,* étapes et perspectives d'une réforme de l'enseignement des mathématiques, 1972, 32 p.

8. *Mots I,* 1974, 100 p.

9. *Elem-Math I,* 1975, 56 p.

10. *Carrés magiques* par Belouze, Glaymann, Haug et Herz, 1975, 48 p.

11. *Mots II,* 1975, 108 p.

13. *Mathématique pour la formation d'adultes* (CUEEP) par P. Loosfelt et D. Poisson, 1976, 189 p.

14. *A la recherche du noyau des programmes de mathématiques du premier cycle. Savoir minimum en fin de troisième* (IREM de Toulouse - A.P.M.E.P.), 2e édition, 1976, 220 p.

15. *Mots III,* 1976, 136 p.

16. *Elem-Math II,* 1976, 56 p.

17. *Hasardons-nous,* 1976, 220 p.

19. *Elem-Math III, La division à l'école élémentaire,* 1977, 100 p.

20. *Quelques apports de l'Informatique à l'enseignement des mathématiques,* 1977, 280 p.

21. *Géométrie au premier cycle, tome I,* 1977, 208 p.

22. *Géométrie au premier cycle, tome 2,* 1978, 328 p.

23. *Pavés et bulles* par Françoise Pécaut, 1978, 288 p.

24. *Calculateurs programmables et algèbre de quatrième (une recherche inter-IREM),* 1978, 120 p.

25. *Mots IV,* 1978, 152 p.

26. *Elem-Math IV, Aides pédagogiques pour le Cours Préparatoire,* 1978, 64 p.

28. *Analyse des données, tome I,* 1980, 248 p.

29. *Elem-Math V, Aides pédagogiques pour le Cours Elémentaire,* 1979, 192 p.

30. *Les manuels scolaires de mathématiques,* 1979, 280 p.

32. *Texte d'orientation A.P.M.E.P. 1978* dans le prolongement des Chartes de Chambéry et de Caen. (Ce texte figure aussi dans le Bulletin n° 314).

33. *Activités mathématiques en Quatrième-Troisième, tome I,* 1979, 248 p.

35. *Du quotidien à la mathématique : une expérience en formation d'adultes,* 1979, 104 p.

36. *Elem-Math VI, Le triangle à l'Ecole Elémentaire,* 1980, 64 p.

37. *Mots V,* 1980, 114 p.

38. *Activités mathématiques en Quatrième-Troisième, tome 2,* 1981, 140 p.

40. *Analyse des données, tome 2,* 1980, 296 p.

41. *Fragments d'histoire des mathématiques,* 1981, 176 p.

42. *"Mini-grille" d'analyse des manuels scolaires de mathématiques,* 1981, 56 p.

43. *Mathématique active en Seconde,* 1981, 228 p.

44. *Jeu 1. Les jeux et les mathématiques,* 1982, 184 p. et 13 fiches.

45. *Mathématiques et Sciences Physiques en L.E.P., brochure U.d.P. — A.P.M.E.P.,* 1981, 48 p., gratuit.

46. *Mots VI : Grandeur — Mesure,* 1982, 134 p.

47. *Obstacles et déblocages en mathématiques, par M. Bruston et C. Rouxel,* 1982, 130 p.

48. *Evariste Galois (1811-1832), format 21×29,7,* 1982, 56 p.

49. *Elem-Math VII, Aides pédagogiques pour le cycle moyen,* 1983, 116 p.

50. *Du matériel pour les Mathématiques* (Journées de Poitiers 82), 1983, 100 p.

51. *Ciel, Passé, Présent,* par G. Walusinski, 1983, 222 p.

52. *Ludofiches 83* (19 fiches de Jeux), 1983.

53. *Musique et Mathématique,* par B. Parzysz et Y. Hellegouarch, 1983, 160 p.

54. *La Presse et les Mathématiques,* par M. Chouchan, 1983.

55. *Algèbre des Carrés magiques,* par J.-M. Groizard, 1983.

56. *Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane,* par G. Audibert, 830 p.

D1. *La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent, dictionnaire de l'A.P.M.E.P.,* 1962-1979, 113 notices, 211 fiches.

D2. *Dictionnaire A.P.M.E.P.,* millésime 1980, 20 fiches.

*
* *

Publications de la Régionale parisienne de l'A.P.M.E.P. :

- *Initiation à la mathématique de base,* 213 p.
- *Initiation au langage mathématique, analyse d'une expérience d'enseignement,* par J. Adda, 190 p.