

MP n°01 : DYNAMIQUE DU POINT ET DU SOLIDE

Kevin Nuckhir

21/10/2016

Introduction

Dans ce montage, on va s'intéresser principalement à l'étude du mouvement (dynamique) de deux types de systèmes :

- Etude du mouvement d'un point matériel
- Etude du mouvement d'un solide indéformable

La présentation de ce montage se fera en présentant les axes suivants : l'étude des lois de Newton ainsi que l'étude d'un solide en rotation. Un des objectifs sera de constater de quelle manière l'étude mécanique d'un mouvement peut nous renseigner sur certaines dispositions à prendre dans un contexte particulier.

I - Les lois de Newton

1) 1^e loi de Newton : principe d'inertie

La première expérience que l'on peut réaliser pour étudier la 1^e loi de Newton est celle consistant à lancer un mobile sur coussin d'air sur une table horizontale à digitaliser. En étudiant le mouvement du mobile (assimilé ici à un point matériel), nous pourrons porter des conclusions sur la nature du référentiel terrestre.

Matériel nécessaire :

- Mobile autoporteur + table
- Feuille pour la prise des points,
- Règle,
- (ou bien, le cas échéant) : table à digitaliser numérique.

Déroulement de l'expérience :

- Vérifier l'horizontalité de la table, avec un niveau à bulles, puis en mettant le mobile en marche et en s'assurant qu'il reste le plus immobile possible (le réglage est assez délicat),
- Préparer une bande de feuille constituant la piste sur laquelle va glisser le mobile,
- Positionner le mobile à une extrémité de la feuille,
- Enclencher le souffle d'air,
- Donner une impulsion au mobile,
- Enclencher l'enregistrement des points, l'arrêter avant que le mobile ne sorte de la piste ou heurte la table,
- Repérer le début de la trajectoire.

Un type de trajectoire obtenu est représenté sur la figure ci-après :

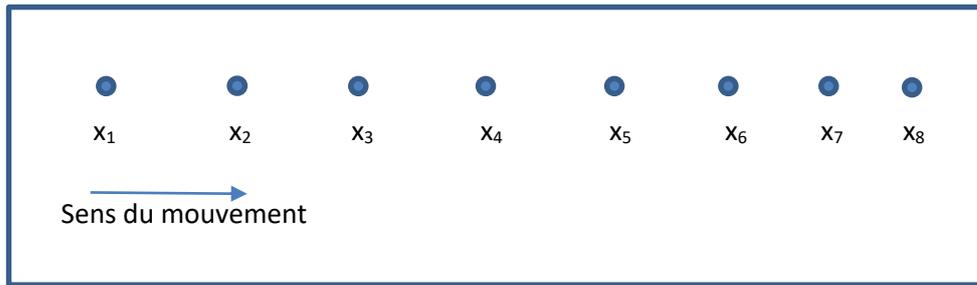


Figure 1 : trajectoire enregistrées lors du déplacement d'un solide pseudo-isolé

On constate rapidement que la trajectoire est rectiligne (les points sont alignés).
On procède ensuite à la mesure rapide des vitesses en quelques points :

$$v_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2 \Delta t}$$

On détermine les incertitudes sur la mesure :

$$\Delta v = \frac{v \Delta d}{d} + \frac{v \Delta t}{t} \approx \frac{v \Delta d}{d}$$

On émet l'hypothèse qu'on néglige l'incertitude sur le temps devant l'incertitude liée à la lecture de la distance entre deux points.

Il est alors possible d'obtenir les résultats suivants :

$$\begin{aligned} v_2 &= 0,23 \pm 0,01 \text{ m/s} \\ v_5 &= 0,21 \pm 0,01 \text{ m/s} \\ v_6 &= 0,20 \pm 0,01 \text{ m/s} \end{aligned}$$

La première constatation que l'on peut faire est que les ordres de grandeur sont les mêmes. Toutefois, les valeurs ne sont pas égales entre elles. Ici, on constate que le mobile est freiné au cours de sa trajectoire, notamment en raison des frottements solides sur la table, le mobile n'est pas parfaitement pseudo-isolé (si on trouve l'inverse : c'est que soit la table était inclinée, soit on a pris la trajectoire à l'envers, les frottements ne pouvant que freiner le mouvement).

Cependant, en faisant fi de ces faibles fluctuations, et au vu de la faible durée de l'expérience devant la période sidérale de la Terre par exemple (1s devant 86400 s), on peut avancer le fait que notre point matériel pseudo-isolé est animé d'un mouvement rectiligne uniforme et ainsi, nous pouvons dire, dans une bonne approximation, que le référentiel du laboratoire peut être considéré pour cette expérience comme galiléen.

2) Choc élastique entre deux solides indéformables

Sur la table à coussin d'air, on réalise l'enregistrement des positions de deux mobiles avant et après un choc élastique.

Rappel :

« On dit qu'un choc entre deux systèmes, formant un ensemble isolé ou pseudo-isolé, est élastique lorsque l'énergie cinétique totale du système est conservée » (Mécanique, fondements et applications - Pérez - Dunod - p.343)

Entre autre, lors d'un tel choc, on peut vérifier la conservation de la quantité de mouvement. L'étude doit être faite en avance en raison de l'aspect chronophage du traitement. Toutefois, en sélectionnant une échelle de vecteurs vitesse arbitraire et en traçant quelques vecteurs, on peut visualiser l'aspect suivant traduisant la conservation de la quantité de mouvement :

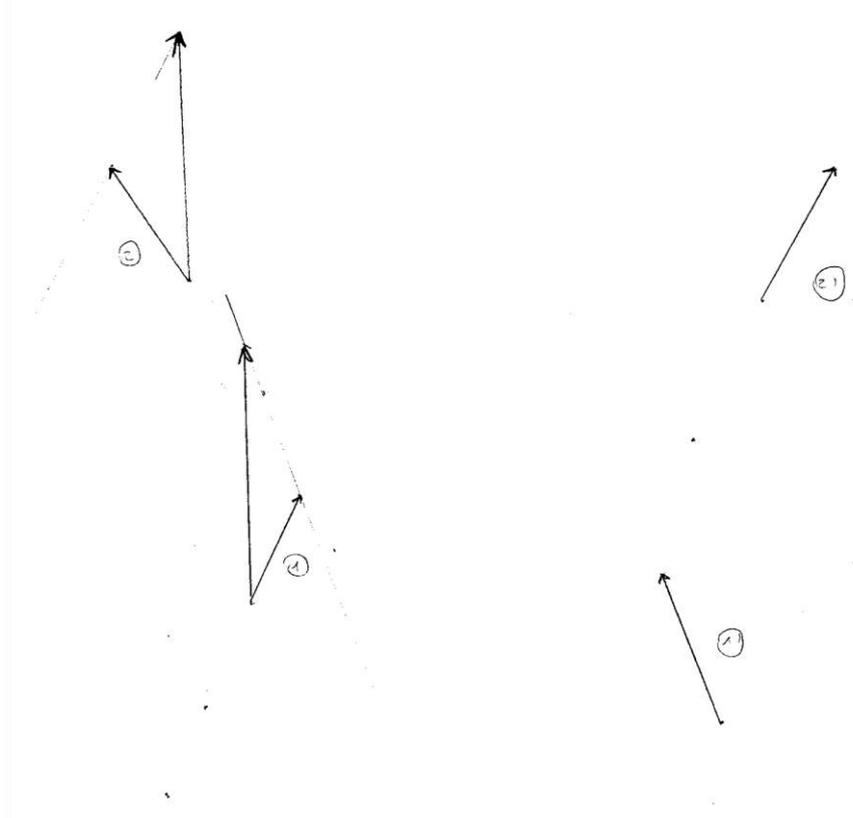
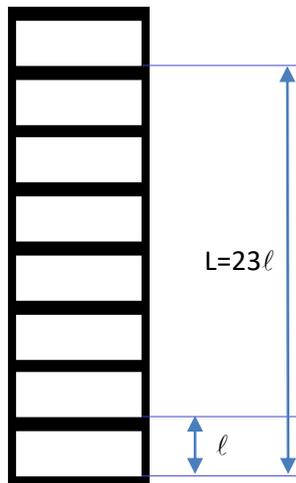


Figure 2 : trajectoires enregistrées lors d'un choc élastique entre deux solides indéformables

Afin d'exploiter au maximum cette manipulation, il est possible de faire le choc entre des mobiles de masse différente.

3) 2^e loi de Newton : principe fondamental de la dynamique

On choisit d'étudier la chute libre d'un solide troué afin de pouvoir remonter à l'aide de la seconde loi de Newton à un paramètre qui pourra nous aider à la réalisation des prochaines manipulations : la valeur de $g \equiv$ accélération de la pesanteur.



Système : solide troué

Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Bilan des forces :

- Poids
- Poussée d'Archimède (négligeable)
- Frottements fluides (négligeables)

Application du PFD au système :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$m\vec{a} = m\vec{g}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

Conditions initiales :

$$v_0 = 0 \text{ m/s}$$

$$x_0 = 0 \text{ m}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

On peut utiliser un dispositif muni d'une fourche optique pour l'acquisition du mouvement. On détermine ainsi les passages successifs des barreaux métalliques du solide à travers le faisceau optique. Le traitement des données permet de déterminer la vitesse moyenne d'un trou en fonction du temps écoulé. En traçant $v=f(t)$, on aboutit à une relation linéaire permettant de remonter à la valeur de l'accélération et donc à la valeur de g .

Un traitement informatisé sous Python permet de définir les incertitudes sur notre mesure à l'aide de la loi du χ^2 . Ces incertitudes ont porté sur la détermination du pas et des instants où le faisceau a été coupé.

Ainsi, j'ai choisi :

$$\Delta l = \Delta L/23 = 0,002/23 = 1.10^{-4} \text{ m}$$

$\Delta t \equiv$ temps de montée du signal : visualisable sur l'oscilloscope = 25.10^{-6} s.

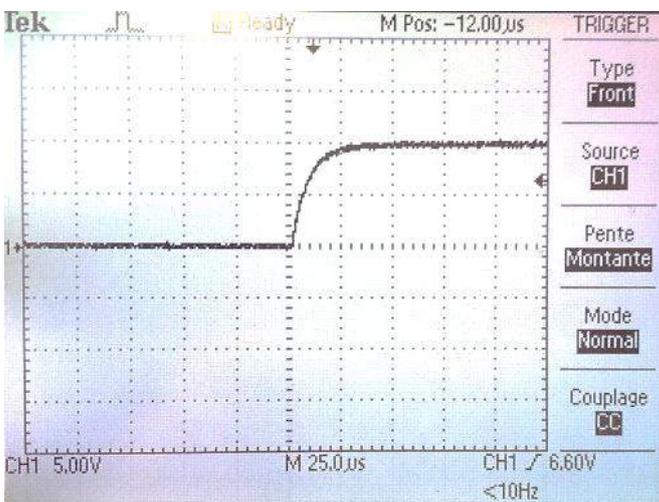


Figure 3 : visualisation du temps de montée du signal

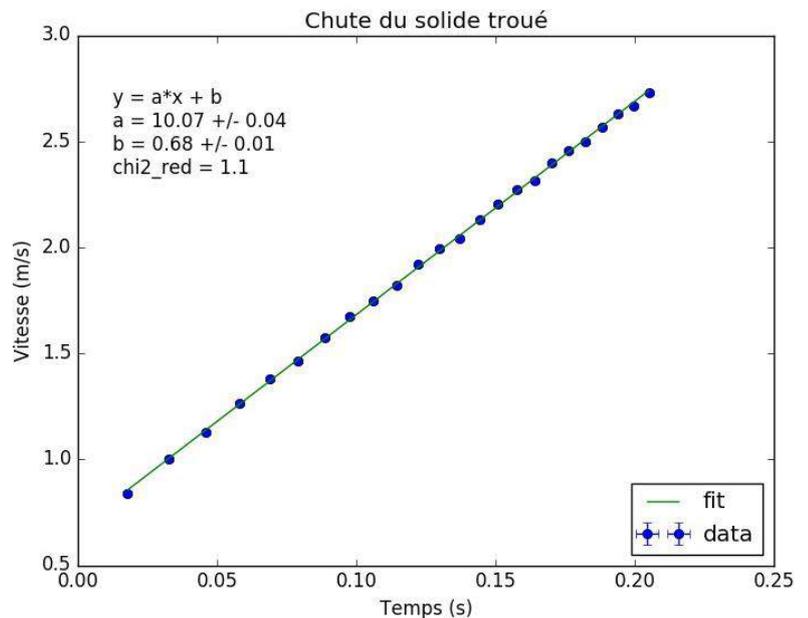


Figure 4 : détermination de l'accélération du solide troué

On détermine ainsi :

$$g = (10,07 \pm 0,04) \text{ m.s}^{-2}$$

Là encore, l'ordre de grandeur est tout à fait correct, en revanche, on s'écarte légèrement de la valeur tabulée (> 3%). On pourrait refaire des séries de mesure afin de conclure sur une erreur statistique mais les hypothèses faites sont globalement satisfaisantes au vu des conditions expérimentales et du faible écart constaté.

3) 3^e loi de Newton : principe des actions réciproques

Cette partie se consacre à la vérification de la 3^e loi de Newton, pour cela, on utilise le dispositif suivant :

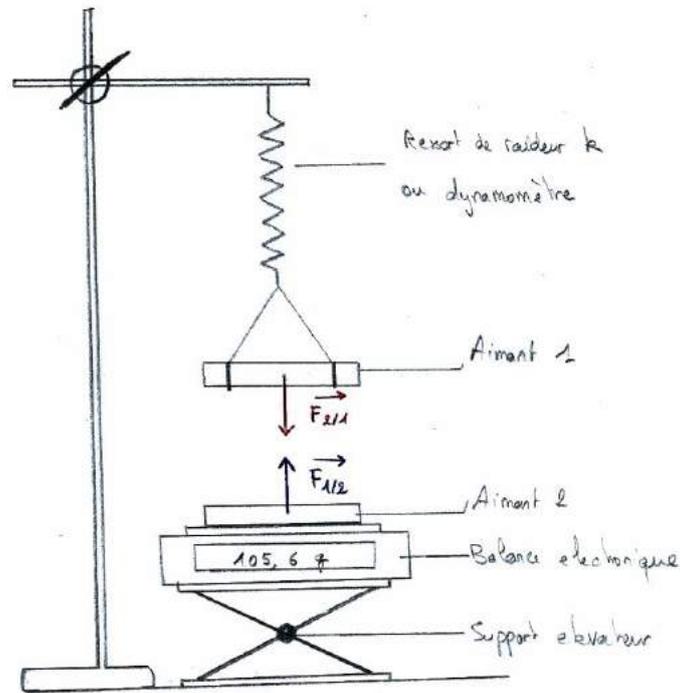


Figure 5 : dispositif expérimental pour la vérification de la 3^e loi de Newton

Faute d'avoir un dynamomètre suffisamment précis, il est possible d'utiliser un simple ressort dont on aura préalablement déterminé la raideur. Cela étant fait, on dispose les deux aimants en vis-à-vis, l'un suspendu au ressort, l'autre posé sur la balance. En déployant progressivement le support élévateur, on constate un allongement progressif du ressort et une diminution du poids apparent lu sur la balance.

On détermine ainsi :

$$F_{1/2} = \Delta m \cdot g$$

$$F_{2/1} = k \cdot \Delta l$$

On détermine les incertitudes sur la lecture de la masse ainsi que sur l'allongement relatif du ressort. On doit vérifier :

$$\overrightarrow{F_{1/2}} = -\overrightarrow{F_{2/1}}$$

II – Etude d'un solide en rotation

On réalise l'étude du dispositif composé de 3 poulies entraînées par une masse en chute, de deux bras équipés de 2 masselottes. une fourche optique permet de faire l'acquisition de la position angulaire du dispositif au cours du temps.

La mesure est faite ici en utilisant le système de forche optique. Le déclenchement se fait à avec un seuil descendant (on positionne initialement un des bras du tourniquet dans le faisceau de la fourche ($U=10V$) et on démarre la rotation à partir d'une vitesse angulaire nulle. L'instant de départ est donc calé sur le déclenchement. De cette façon : à $t=0$: $\theta(0)=0$ et $\theta'(0)=0$). Tous les zéros seront les mêmes sur chacune des expériences.)

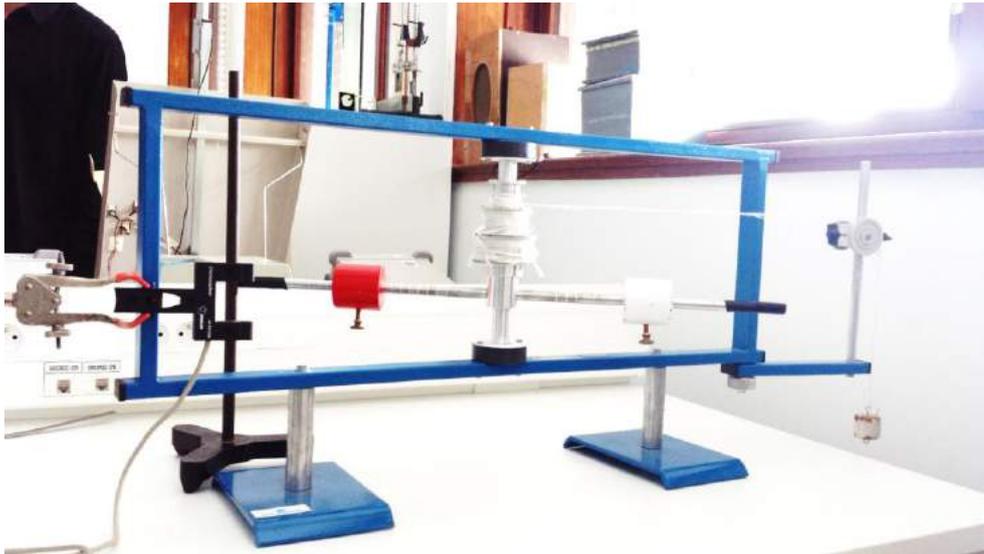


Figure 6 : dispositif utilisé : le tourniquet

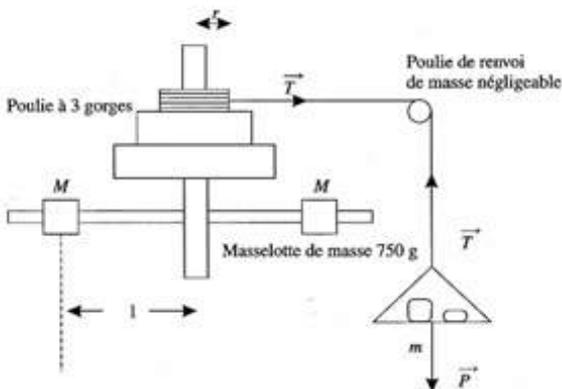


Figure 14.14

Remarque

Dans cette étude, on néglige les frottements du mobile sur son axe (ce qui n'est pas exact, surtout lorsque la vitesse de rotation est faible). On néglige aussi les frottements sur l'air (ce qui n'est pas justifié, surtout lorsque la vitesse de rotation est élevée). On néglige encore le moment d'inertie des masses M par rapport à leur centre. Enfin on néglige le moment d'inertie de la poulie en considérant sa masse nulle. Toutes ses approximations font qu'il nous paraît illusoire de présenter un calcul d'incertitude sur les mesures effectuées.

14.4.1.2. Étude théorique : Calcul de l'accélération angulaire

La force \vec{T} (tension du fil) appliquée au système en rotation a un moment par rapport à l'axe de rotation égal à : $M = T \cdot r$.

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique du solide en rotation :

$$M = J\ddot{\theta} = T \cdot r$$

Considérons la charge constituée de la masse m . Cette charge est animée d'un mouvement de translation. La vitesse linéaire v de la charge est égale à $\dot{\theta}r$ (le fil s'enroulant circulairement sur la poulie de rayon r). L'accélération a de la charge est :

$$a = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\dot{\theta}}{dt} = r\ddot{\theta}$$

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique pour la masse m :

$$mg - T = ma \quad \text{d'où} \quad T = mg - ma = mg - mr\ddot{\theta}$$

$$J\ddot{\theta} = T \cdot r = mgr - mr^2\ddot{\theta} \quad \text{d'où} \quad \ddot{\theta}(J + mr^2) = mgr \quad \text{soit :}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{mgr}{J + mr^2} \quad \text{et} \quad T = \frac{mg}{1 + \frac{mr^2}{J}}$$

reste à préciser la valeur du moment d'inertie J de l'ensemble en rotation :

$$J = J_0 + 2Ml^2$$

J_0 étant le moment d'inertie de l'équipage mobile sans les deux masselottes par rapport à l'axe de rotation Δ , Ml^2 étant le moment d'inertie d'une masselotte par rapport au même axe (on néglige le moment d'inertie des masses M par rapport à un axe parallèle à Δ et passant par leur centre).

Dans le cadre des approximations faites précédemment (masselottes ponctuelles et poulie de renvoi de masse nulle), on obtient pour expression de l'accélération angulaire :

$$\ddot{\theta} = \frac{mgr}{J_0 + 2Ml^2 + mr^2}$$

Remarque

Expérimentalement, on aura tout intérêt quand cela sera possible à se placer dans le cas où $J \gg mr^2$. On aura ainsi $T = mg$ et $\ddot{\theta} \approx \frac{mgr}{J}$. T et $\ddot{\theta}$ sont ainsi quasiment proportionnelles à m . Pour cela prendre J maximale et r minimal quand il n'y a aucune contrainte sur ces deux paramètres.

14.4.1.3. Étude expérimentale : Utilisation du logiciel GTI

Mesure de l'accélération angulaire

Lancer le logiciel GTI, connecter le capteur de passage fixé sur l'armature du système en rotation à l'interface Orphy GTI. La barre du dispositif en rotation va passer devant le capteur de passage pour chaque demi-tour effectué. Dans le menu « fourche optique » choisir le capteur angulaire et un pas de $\pi = 3.14$. Ne pas sélectionner l'arrêt automatique pour pouvoir stopper l'acquisition manuellement par la barre espace.

Acquisition et exploitation :

Positionner correctement les surcharges pour ne pas qu'elles « fracassent » le capteur au premier passage. Enregistrer l'évolution de $\theta = f(t)$ en stoppant l'acquisition juste avant que la masse accélératrice ne touche le sol et transférer les données sous Regressi.

Tracer $\theta = f(t)$ et modéliser par :

$$\theta = 0.5 * c * t + t + d * t + e$$

L'étude du mouvement uniformément accéléré permet de déterminer dans un premier temps l'influence de la masse accrochée sur la vitesse de rotation du tourniquet.

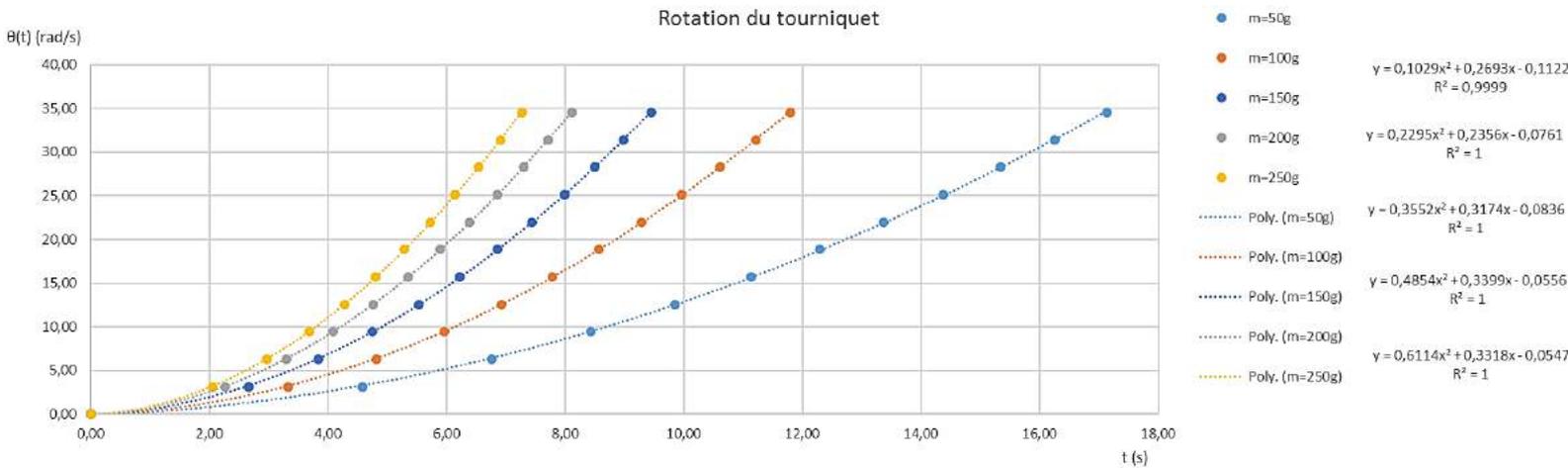


Figure 7 : évolution de la position angulaire du tourniquet au cours du temps en fonction de la masse

Dans un second temps il est possible d'étudier, pour une masse fixée la position des masselottes sur les bras. Ainsi, les résultats permettent de quantifier la variation de θ'' en fonction de la longueur L.

On peut chercher à déterminer la valeur expérimentale des masselottes en faisant varier le paramètre L.

En effet, on a :

$$\ddot{\theta} = \frac{mgr}{J_0 + 2ML^2 + mr^2} \approx \frac{mgr}{J_0 + 2ML^2}$$

Soit :

$$\frac{1}{\ddot{\theta}} = \frac{2M}{mgr} L^2 + \frac{J_0}{mgr}$$

En traçant $1/\ddot{\theta}=f(L^2)$ on obtient les résultats suivants :

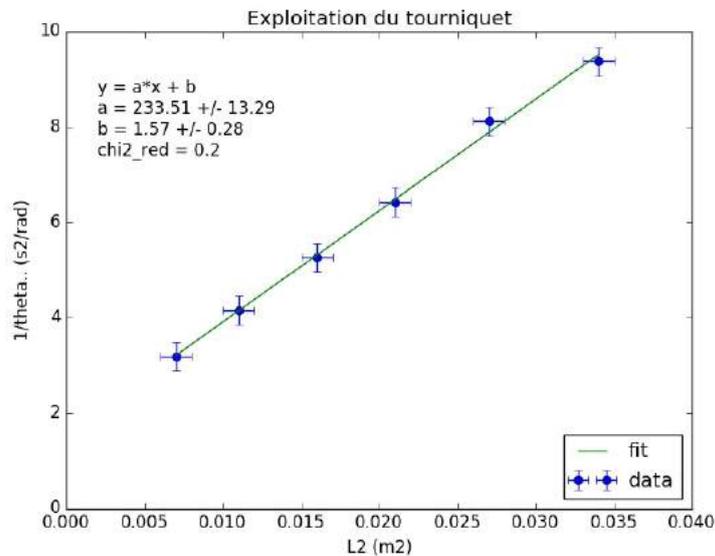


Figure 8 : influence de la position des masselottes sur l'étude du moment d'inertie d'un solide

On peut ainsi remonter à la valeur du moment d'inertie du solide sans les masselottes J_0 . Une approximation consisterait à dire que le moment d'inertie est principalement porté par le bras perpendiculaire à l'axe de rotation. En comparant la valeur calculée au moment d'inertie d'une tige en rotation autour d'un axe perpendiculaire passant par son centre de gravité, on obtient :

$$J_0 = \frac{mL^2}{12}$$

$$\text{avec } m = 0,2 \text{ kg} \quad L = 1,2 \text{ m}$$

$$J_0 = 0,024 \text{ kg.m}^2$$

Les résultats expérimentaux donnent :

$$J_0 = b.m.g.r = 1,57 \cdot 0,100 \cdot 9,81 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} = 0,023 \text{ kg.m}^2$$

En tenant compte du fait qu'on a négligé le moment d'inertie des autres parties du tourniquet, on peut estimer que les approximations faites sont justifiées.

Conclusion

La dernière partie de ce montage permet d'étudier l'influence de la position des masses autour d'un axe de rotation. En effet, une application concrète se visualise sur le patinage artistique : le patineur tourne, les bras écartés à une vitesse angulaire relativement faible. Afin d'accroître sa vitesse de rotation, il rapproche les bras de son corps.

« Les cuisiniers affirment distinguer un œuf dur d'un œuf cru en les faisant tourner, sur la table de travail, autour d'un axe vertical. Le premier garde pratiquement sa vitesse angulaire car son moment d'inertie ne change pas ; le second s'immobilise rapidement car, en tournant, les masses intérieures s'éloignent de l'axe de rotation et augmentent le moment d'inertie. »

(Mécanique, fondements et applications - Pérez - Dunod - p.303)

Bibliographie

- Mécanique, fondements et applications - Pérez – Dunod
- Expériences de physique - Optique, mécanique, fluides, transferts thermiques – Bellier - Dunod