# 2.x

# L'écoulement des liquides

**Après l'étude de cette section, le lecteur pourra calculer le débit d'un liquide dans une canalisation ainsi que la diminution graduelle de la pression causée par la résistance hydraulique (loi de Poiseuille).**

## Aperçu

Considérons un liquide qui s'écoule dans une « canalisation » (par exemple, un tuyau ou une rivière). Un observateur est placé à côté de la canalisation : un volume de liquide $V$ passe devant lui pendant un intervalle de temps $\Delta t$. Par définition, le **débit** (symbole : $D$) est

$$\boxed{D = \frac{V}{\Delta t}}$$ **Définition du débit**

Dans le SI, $D$ s'exprime en mètres cubes par seconde ($m^3/s$). Le débit est proportionnel au module $v$ de la vitesse du liquide et à l'aire $A$ de la section (coupe transversale) de la canalisation :

$$\boxed{D = Av}$$ **Relation débit-aire-vitesse**

Dans une canalisation sans fuites et sans embranchements, le débit est partout le même. Par conséquent, lorsque l'aire de la section augmente, la vitesse d'écoulement du liquide diminue.

Lorsqu'un liquide s'écoule dans un tuyau, la pression diminue lorsqu'on se déplace dans le même sens que l'écoulement : cela crée une force dans le sens de l'écoulement qui contrebalance la force de frottement causée par la viscosité du liquide. La diminution de pression à travers une portion de tuyau est

$$\boxed{\Delta P = RD}$$ **Diminution de pression dans une portion de tuyau**

où $D$ est le débit du liquide $R$ est la **résistance hydraulique** de la portion de tuyau. Dans le SI, $R$ s'exprime en $Pa{\cdot}s/m^3$.

Comme la pression manométrique $\tilde{P}$ correspond à la pression absolue $P$ moins une constante (pression atmosphérique), les *variations* de pression sont égales :

$$\Delta\tilde{P} = \Delta P$$

Ainsi, le terme de gauche dans l'équation $\Delta P = RD$ peut aussi bien correspondre à une diminution de pression absolue qu'à une diminution de pression manométrique.

Lorsque le liquide se déplace relativement lentement, l'écoulement est *laminaire* (sans remous) et la résistance hydraulique est

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$$

où $L$ est la longueur de la portion de tuyau, $r$ est son rayon et $\eta$ (la lettre grecque êta) est la **viscosité** du liquide. Dans le SI, $\eta$ s'exprime en pascals *multipliés* par des secondes : Pa·s. En combinant cette équation et l'équation $\Delta P = RD$, on obtient la **loi de Poiseuille** :

$$\boxed{\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi r^4}D}$$ **Loi de Poiseuille**

Lorsque le liquide circule trop rapidement, son écoulement devient *turbulent* (il se forme des remous) et la loi de Poiseuille ne s'applique plus.

## Exposé

Dans cette section, nous allons nous intéresser à l'écoulement d'un liquide dans une « canalisation », par exemple, un tuyau ou une rivière. Cela nous permettra, entre autres, de décrire la circulation du sang dans le corps humain.

## Le débit

Afin de décrire l'écoulement d'un liquide dans une canalisation, il est pratique d'utiliser la notion de **débit** (symbole : $D$). Dans le SI, le débit se mesure en mètres cubes par seconde ($m^3/s$). À titre d'illustration, le tableau ci-contre indique le débit à l'embouchure de quelques-uns des plus grands fleuves du monde.

| Fleuve | $D$ ($m^3/s$) |
|---|---|
| Amazone | 219 000 |
| Congo | 41 800 |
| Mississippi | 16 200 |
| Saint-Laurent | 10 100 |

Afin de définir le débit de manière précise, il est pratique de considérer un observateur placé à un endroit le long de canalisation : pendant un intervalle de temps $\Delta t$, un volume de liquide $V$ passe devant lui. Par définition, le débit est

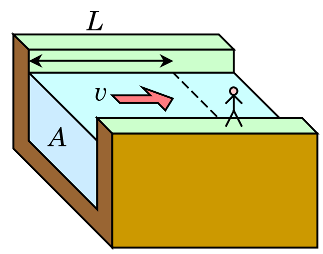
$$\boxed{D = \frac{V}{\Delta t}}$$ **Définition du débit**

Quels sont les facteurs qui influencent le débit ? Prenons un fleuve comme exemple. Il est clair que le débit est proportionnel à la vitesse du courant. Pour un fleuve de taille donnée, si la vitesse du courant double, le débit double également. Le débit dépend également de la taille du fleuve : pour une vitesse du courant donnée, un fleuve plus large ou plus profond transportera davantage d'eau. Le débit est proportionnel à l'aire $A$ de la section du fleuve. (Pour un fleuve de profondeur uniforme, l'aire de la section correspond à la largeur du fleuve multipliée par sa profondeur.) En fait, le débit correspond tout simplement au produit de l'aire de la section et du module de la vitesse du liquide qui s'écoule :

Dans cette section, nous allons toujours supposer que le module $v$ de la vitesse du liquide est le même en tout point de la section $A$ de la canalisation.

$$\boxed{D = Av}$$ **Relation débit-aire-vitesse**

On peut facilement démontrer cette équation à partir de la définition du débit. Considérons une portion de fleuve de longueur $L$ (schéma ci-contre) : le volume de l'eau dans cette portion est




$$V = AL$$

Attention : il ne faut pas confondre le volume ($V$ majuscule) et le module de la vitesse du liquide ($v$ minuscule).

où $A$ est l'aire de la section du fleuve. Par la définition du débit,

$$D = \frac{V}{\Delta t} = \frac{AL}{\Delta t} = A\frac{L}{\Delta t} = Av$$

En effet, comme $\Delta t$ est le temps requis pour que l'eau qui se trouve dans la portion du fleuve de longueur $L$ passe devant un observateur immobile sur la rive du fleuve, le rapport $L / \Delta t$ correspond au module $v$ de la vitesse du courant.

Dans une canalisation sans fuites et sans embranchements, le débit est partout le même. Par conséquent, lorsque l'aire de la section augmente, la vitesse d'écoulement du liquide diminue.

**Situation 1 :** ***La vitesse du sang.*** Le cœur d'Albert bat 72 fois par minute. À chaque battement, 70 mℓ de sang est pompé par le cœur. À la sortie du cœur, le sang pénètre dans l'aorte, dont l'aire de la section est égale à 4 cm² ; plus loin dans le réseau sanguin, le sang voyage dans plusieurs artères « en parallèle », dont la section combinée possède une aire de 20 cm². On désire déterminer le module de la vitesse du sang dans **(a)** l'aorte et **(b)** les artères.

À chaque pulsation, le volume de sang pompé est égal à 70 mℓ. En

$$\Delta t = 1 \text{ minute} = 60 \text{ s}$$

le cœur d'Albert bat 72 fois et pompe un volume de sang

Par définition, 1 ℓ (litre) correspond à 0,001 $m^3$ ; 1 mℓ (millilitre) correspond à 1 $cm^3 = 10^{-6}$ $m^3$.

$$V = 72 \times 70 \text{ m}\ell = 72 \times (70 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 0{,}00504 \text{ m}^3$$

Le débit est

$$D = \frac{V}{\Delta t} = \frac{0{,}00504}{60} = 8{,}4 \times 10^{-5} \text{ m}^3\text{/s}$$

Comme il n'y a pas de fuites dans le corps d'Albert, le débit est le même à chaque « étape » du réseau sanguin : à chaque seconde, $8{,}4 \times 10^{-5}$ m$^3$ de sang quitte son cœur ; $8{,}4 \times 10^{-5}$ m$^3$ circule dans son aorte ; $8{,}4 \times 10^{-5}$ m$^3$ au total circule dans l'ensemble des voies parallèles offertes par ses artères ; $8{,}4 \times 10^{-5}$ m$^3$ reviennent à son cœur.

En **(a)**, nous voulons déterminer le module de la vitesse du sang dans l'aorte, dont l'aire de la section est

$$A = 4 \text{ cm}^2 = 4 \times (0{,}01 \text{ m})^2 = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Par l'équation $D = Av$, nous obtenons

$$v = \frac{D}{A} = \frac{8{,}4 \times 10^{-5}}{4 \times 10^{-4}} = 0{,}21 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 21 \text{ cm/s}}$$

En **(b)**, nous voulons déterminer le module de la vitesse du sang dans les artères, dont l'aire combinée de la section est 5 fois plus grande que celle de l'aorte :

$$A = 20 \text{ cm}^2 = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Nous obtenons

$$v = \frac{D}{A} = \frac{8{,}4 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-3}} = 0{,}042 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 4{,}2 \text{ cm/s}}$$

Le sang se déplace 5 fois moins vite dans les artères que dans l'aorte.

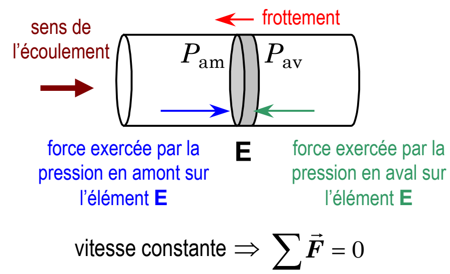
**Exercice 2.X.1** ***La vitesse du sang dans les capillaires.*** Au niveau des organes, le sang voyage dans un très grand nombre de vaisseaux capillaires dont la section combinée a une aire de 0,5 m$^2$. À la **situation 1**, quel est le module de la vitesse du sang dans les capillaires ?

## La résistance hydraulique

À la **section 2.11 : La pression**, nous avons vu que la pression dans un liquide immobile est partout la même à une profondeur donnée. Ce *n'est pas* le cas quand le liquide est en mouvement : dans un liquide qui s'écoule dans un tuyau horizontal, la pression diminue lorsqu'on se déplace dans le même sens que l'écoulement.

Cette diminution est une conséquence du frottement entre le liquide et les parois du tuyau. Considérons un élément de liquide **E** qui s'écoule à vitesse constante dans un tuyau horizontal (schéma de la page suivante). Il subit une force de frottement dans le sens contraire de son mouvement. Comme il se déplace à vitesse constante, la force résultante qui agit sur lui doit être égale à 0. Par conséquent, la pression doit exercer une force *dans le sens du mouvement* qui contrebalance la force de frottement.

La pression dans le liquide de part et d'autre de l'élément **E** pousse sur lui de chaque côté ; pour que cela résulte en une force dans le sens du mouvement, il faut que la pression en amont soit plus grande que la pression en aval ($P_{am} > P_{av}$). Par conséquent, la pression doit *diminuer* lorsqu'on se déplace dans le sens de l'écoulement.




Pour une portion de tuyau donné, on observe que la diminution de la pression est proportionnelle au débit $D$ du liquide qui traverse le tuyau. Ainsi, il est utile de décrire la diminution de pression à l'aide de l'équation

$$\boxed{\Delta P = RD}$$ **Diminution de pression dans une portion de tuyau**

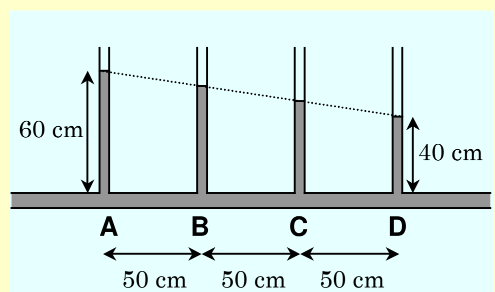
Il est intéressant de noter le parallèle entre l'équation $\Delta P = RD$ et la *loi d'Ohm* qui décrit la diminution du potentiel électrique dans une portion de circuit : $\Delta V = RI$, où $R$ est la résistance *électrique* de la portion de circuit et $I$ est le courant électrique (l'analogue en électricité du débit). Nous étudierons la loi d'Ohm au **tome B, chapitre 3 : Les circuits électriques.**

Le paramètre $R$ est la **résistance hydraulique** de la portion de tuyau : sa valeur dépend de la taille du tuyau (longueur et rayon) ainsi que des propriétés du liquide qui circule dans le tuyau. Dans le SI, $\Delta P$ est en Pa et $D$ est en m$^3$/s ; par conséquent, $R$ est en Pa·s/m$^3$.

Lorsqu'on utilise l'équation $\Delta P = RD$, on s'intéresse à la diminution de pression entre deux endroits. Il peut tout aussi bien s'agir de la diminution de $P$ (pression absolue) que de la diminution de $\tilde{P}$ (pression manométrique). En effet, comme la pression manométrique $\tilde{P}$ correspond à la pression absolue $P$ moins une constante (pression atmosphérique), la *variation* est la même :

$$\Delta\tilde{P} = \Delta P$$

**Situation 2 : *La diminution de la pression.*** Du mercure (densité = 13,6) circule de gauche à droite dans un tuyau horizontal (schéma ci-contre) avec un débit de 3 cm$^3$/s. À intervalles de 50 cm le long du tuyau horizontal se trouvent quatre tubes verticaux (**A**, **B**, **C** et **D**) ouverts dans le haut. Dans le tube **A**, le mercure s'élève à 60 cm ; dans le tube **D**, situé 1,5 m plus loin, le mercure s'élève à 40 cm. On désire déterminer la résistance hydraulique de la portion de tuyau située entre le tube **A** et le tube **D**.




Dans cette situation, les tubes verticaux jouent le rôle de manomètres. Considérons, pour commencer, le tube **A**. La pression au sommet de la colonne de liquide est égale à la pression atmosphérique ; autrement dit, la pression manométrique est égale à 0. À la base de la colonne de liquide, à une profondeur $h_{\mathrm{A}} = 60\,\mathrm{cm} = 0{,}6\,\mathrm{m}$, la pression manométrique est

$$\tilde{P}_{\mathrm{A}} = \rho g h_{\mathrm{A}} = (1{,}36\times10^4)\times9{,}8\times0{,}6 = 7{,}997\times10^4\ \mathrm{Pa}$$

Il s'agit de la pression manométrique dans le tuyau horizontal vis-à-vis le tube **A**. Par un raisonnement similaire, la pression manométrique vis-à-vis le tube **D** ($h_{\mathrm{D}} = 40\,\mathrm{cm} = 0{,}4\,\mathrm{m}$) est

$$\tilde{P}_{\mathrm{D}} = \rho g h_{\mathrm{D}} = (1{,}36\times10^4)\times9{,}8\times0{,}4 = 5{,}331\times10^4\ \mathrm{Pa}$$

La diminution de pression manométrique dans la portion de tuyau entre **A** et **D** est

$$\Delta\widetilde{P} = (7{,}997 - 5{,}331)\times 10^4\ \text{Pa} = 2{,}666\times 10^4\ \text{Pa}$$

Il s'agit également de la diminution de la pression absolue :

$$\Delta P = \Delta\widetilde{P} = 2{,}666\times 10^4\ \text{Pa}$$

D'après l'énoncé de la situation, le débit est

$$\underline{D = 3\ \text{cm}^3/\text{s}} = 3\times(0{,}01\ \text{m})^3/\text{s} = 3\times 10^{-6}\ \text{m}^3/\text{s}$$

Par l'équation

$$\Delta P = RD$$

nous obtenons

$$R = \frac{\Delta P}{D} = \frac{2{,}666\times 10^4}{3\times 10^{-6}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{R = 8{,}89\times 10^9\ \text{Pa}\cdot\text{s/m}^3}$$

Il s'agit de la résistance hydraulique de la portion de tuyau de 1,5 m de longueur située entre le tube **A** et le tube **D**.

> **Exercice 2.X.2** ***La diminution de la pression, prise 2.*** À la **situation 2**, déterminez **(a)** la pression manométrique dans le tuyau vis-à-vis le tube **C** et **(b)** la résistance hydraulique de la portion de tuyau entre les tubes **A** et **B**.

## La loi de Poiseuille

En 1840, le physicien français Jean Louis Marie Poiseuille a appliqué les principes de de la mécanique afin de décrire l'écoulement du sang. Il a démontré que la résistance hydraulique peut être calculée par l'équation

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$$

où $L$ est la longueur de la portion de tuyau, $r$ est son rayon et $\eta$ (la lettre grecque êta) est la **viscosité** du liquide, une mesure de sa résistance à l'écoulement. (La démonstration de cette équation dépasse le niveau de cet exposé.)

En combinant cette équation et l'équation $\Delta P = RD$, on obtient la **loi de Poiseuille** :

$$\boxed{\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi r^4} D}$$ **Loi de Poiseuille**

Isolons la viscosité $\eta$ dans la loi de Poiseuille :

$$\eta = \frac{\pi r^4 \Delta P}{8LD}$$

Pour que cette équation soit cohérente du point de vue des unités, la viscosité doit s'exprimer, dans le SI, en pascals *multipliés* par des secondes :

$$\frac{\mathrm{m}^4 \times \mathrm{Pa}}{\mathrm{m} \times (\mathrm{m}^3/\mathrm{s})} = \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$$

| Liquide | $\eta$ (Pa·s) |
|---|---|
| eau à 0°C | 0,00179 |
| eau à 25°C | 0,00089 |
| eau à 100°C | 0,00028 |
| mercure à 25°C | 0,0015 |
| sang à 37°C | 0,004 |
| huile d'olive à 25°C | 0,081 |

La viscosité varie de manière importante avec la température. Le tableau ci-contre indique la viscosité de certains liquides à des températures particulières.

La loi de Poiseuille décrit très bien l'écoulement du sang dans le corps des animaux. Toutefois, lorsqu'un liquide se déplace trop rapidement, son écoulement devient *turbulent* (il se forme des remous) et la loi de Poiseuille ne s'applique plus. L'étude de l'équivalent de la loi de Poiseuille pour un écoulement turbulent dépasse le niveau de cet exposé.

**Situation 3 : *La loi de Poiseuille.*** À la **situation 2**, on suppose que le mercure est à 25°C ($\eta$ = 0,0015 Pa·s) et que la loi de Poiseuille s'applique (le liquide s'écoule sans remous). On désire déterminer **(a)** le rayon du tuyau horizontal et **(b)** le module de la vitesse du mercure dans le tuyau.

En **(a)**, nous voulons déterminer le rayon $\underline{r}$ du tuyau horizontal. Isolons $r$ dans la loi de Poiseuille :

$$\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi r^4} D \qquad \Rightarrow \qquad r^4 = \frac{8\eta LD}{\pi \Delta P} \qquad \Rightarrow \qquad r = \left(\frac{8\eta LD}{\pi \Delta P}\right)^{1/4}$$

Pour la portion de tuyau entre **A** et **D**, nous avons $\underline{L = 1{,}5\ \mathrm{m}}$ et $\underline{\Delta P = 2{,}666 \times 10^4\ \mathrm{Pa}}$. De plus, $\underline{\eta = 0{,}0015\ \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}}$ et $\underline{D = 3 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}}$. Ainsi,

$$r = \left(\frac{8 \times 0{,}0015 \times 1{,}5 \times (3 \times 10^{-6})}{3{,}1416 \times (2{,}666 \times 10^{-4})}\right)^{1/4} = 0{,}008961\ \mathrm{m}$$

ou encore

$$\boxed{r = 8{,}96\ \mathrm{mm}}$$

En **(b)**, nous voulons déterminer le module $\underline{v}$ de la vitesse du mercure dans le tuyau. Nous allons nous servir de la relation débit-aire-vitesse,

$$D = Av$$

L'aire de la section du tuyau est

$$A = \pi r^2 = 3{,}1416 \times 0{,}008961^2 = 2{,}523 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$$

d'où

$$v = \frac{D}{A} = \frac{3 \times 10^{-6}}{2{,}523 \times 10^{-4}} = 0{,}01189\ \mathrm{m/s}$$

ou encore

$$\boxed{v = 1{,}19\ \mathrm{cm/s}}$$

## Glossaire

**débit :** (symbole : $D$) le volume de liquide qui passe devant un point donné d'une canalisation divisé par le temps requis ; unité SI : $m^3/s$.

**résistance hydraulique :** (symbole : $R$) la résistance hydraulique d'une portion de tuyau correspond au rapport entre la différence de pression entre ses extrémités et le débit du liquide qui le traverse ; unité SI : $Pa{\cdot}s/m^3$.

**loi de Poiseuille :** loi qui met en relation la différence de pression entre les extrémités d'une portion de tuyau et le débit du liquide qui le traverse, pour un écoulement *laminaire* (sans remous).

**viscosité :** (symbole : $\eta$, la lettre grecque êta) propriété d'un liquide qui exprime sa résistance à l'écoulement ; unité SI : Pa·s.

## Questions

**Q1.** Montrez comment obtenir la relation débit-aire-vitesse, $D = Av$, à partir de la définition du débit, $D = V/\Delta t$.

**Q2.** Dans un liquide qui s'écoule dans un tuyau horizontal, la pression ____________ lorsqu'on se déplace dans le même sens que l'écoulement.

**Q3.** Dans quelle situation la loi de Poiseuille *ne* s'applique *pas* ?

## Exercices

Les exercices **2.X.1** et **2.X.2** se trouvent dans le texte de l'exposé de la section.

Pour les exercices, on considère que la viscosité de l'eau est égale à 0,00089 Pa·s et que l'écoulement du liquide est laminaire (la loi de Poiseuille s'applique).

**2.X.3** ***Le débit et la vitesse.*** Une conduite d'eau est composée d'un tuyau **A** de 5 cm de rayon relié à un tuyau **B** de 10 cm de rayon. Il circule 10 litres par seconde dans le tuyau **A**. **(a)** Exprimez le débit dans le tuyau **A** en $m^3/s$. **(b)** Quel est le débit dans le tuyau **B** ? **(c)** Calculez le module des vitesses de l'eau dans chacun des tuyaux.

**2.X.4** ***Le pouls de Béatrice.*** À chaque battement du cœur de Béatrice, 70 ml de sang est pompé. À la sortie du cœur, le sang se déplace à 20 cm/s dans une artère dont la section est égale à 3,5 $cm^2$. Quel est le pouls de Béatrice, en battements par minute ?

**2.X.5** ***La résistance hydraulique de Claude.*** À la sortie du cœur, le sang de Claude est à une pression manométrique de 100 mmHg ; lorsque le sang revient au cœur, la pression manométrique est égale à 5 mmHg. Sachant que le cœur de Claude pompe 5 litres de sang à la minute, calculez la résistance hydraulique de son réseau sanguin.

**2.X.6** ***Le débit d'une seringue.*** De l'eau jaillit de l'aiguille d'une seringue avec un débit de 0,5 $cm^3/s$. L'extrémité de l'aiguille est dans l'air. L'aiguille a une longueur de 3 cm et un rayon de 0,25 mm. **(a)** Quelle est la résistance hydraulique de l'aiguille ? **(b)** Quelle est la pression manométrique de l'eau lorsqu'elle commence à circuler dans l'aiguille ?

**2.X.7** ***Le débit d'une seringue, prise 2.*** L'extrémité de l'aiguille de l'exercice précédent est placée dans une veine où la pression manométrique est égale à 10 mmHg. En supposant que la pression de l'eau lorsqu'elle commence à circuler dans l'aiguille demeure la même, calculez le débit.

**2.X.8** ***Un boyau d'arrosage.*** La pression le long d'un boyau d'arrosage diminue graduellement : 50 cm avant que l'eau ne sorte à l'air libre, la pression manométrique est égale à 100 Pa. Le rayon du tuyau est égal à 9 mm et il n'y a pas d'embout : l'eau se déverse directement au bout du tuyau. **(a)** Quel est le module de la vitesse de l'eau dans le tuyau ? **(b)** Combien de temps est nécessaire pour remplir un seau d'eau de 15 cm de rayon et de 25 cm de hauteur ?

**2.X.9** ***Le nombre de capillaires.*** Au niveau des organes, le sang se déplace dans un grand nombre de vaisseaux capillaires. On désire modéliser cette portion du réseau sanguin en considérant qu'elle est constituée de vaisseaux capillaires identiques placés en parallèle (les uns à côté des autres). Chaque capillaire a une longueur de 1 mm, un rayon de 1 µm (µ = micro = $10^{-6}$) ; la pression du sang passe de 30 mmHg à l'entrée du capillaire à 12 mmHg à la sortie. Si le cœur pompe 5 litres de sang à la minute, quel doit être le nombre de capillaires ? (La viscosité du sang est égale à 0,004 Pa·s.)

**2.X.10** ***Un élévateur hydraulique, prise 2.*** Considérez de nouveau la situation de l'exercice **2.X.4** (schéma ci-dessous). Lorsque le piston de gauche s'abaisse de 1 cm, de quelle distance monte le piston de droite ?