Mécanique des fluides

David Fabre

IMFT / UPS
Département de Mécanique

2. Forces de pression dans un fluide – Hydrostatique

Sommaire

Pression : définition(s)

Définitions :

- Définition Thermodynamique : (pour un système simple)
  Pression = variable intensive reliée aux *variations d'énergie* engendrée par des *variations de volume* au cours de *transformations réversibles*

$$p = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S = \rho\left(\frac{\partial e}{\partial \rho}\right)_s$$

  Corollaire : à l'équilibre thermodynamique p est uniforme ; cf. cours thermo.
  (Définition théorique rigoureuse mais inutilisable avec les modèles de fluides les plus courants, pour lesquels $e = e(T, P) \dots$)

- Définition mécanique
  Pression = force surfacique normale exercée par un fluide au repos sur une surface matérielle (frontière avec une paroi solide) ou fictive (séparant avec un autre domaine fluide).
  En considérant une *surface élémentaire* (au sens de la MMC) dS de normale $\vec{n}_{\mathcal{F}\to\mathcal{S}}$, la force élémentaire exercée par le fluide sur la surface vaut

$$d\vec{f}_{\mathcal{F}\to\mathcal{S}} = p\vec{n}_{\mathcal{F}\to\mathcal{S}}dS$$

  Lien entre les 2 définitions :
  En supposant que la surface $\mathcal{S}$ subit un déplacement *élémentaire* (au sens de la thermo) $\delta\vec{X}$, le travail reçu par le fluide vaut :

$$\delta W = \iint_{\mathcal{S}} \delta\vec{X}\cdot(p\vec{n}_{\mathcal{S}\to\mathcal{F}}dS)$$

  En supposant la pression uniforme il vient $\delta W = -pdV$ avec $dV = \iint_{\mathcal{S}} \delta\vec{X}\cdot\vec{n}_{\mathcal{F}\to\mathcal{S}}dS$.

- Définition cinétique :
  La pression est un *flux surfacique de quantité de mouvement microscopique normale* transféré par les particules à une paroi ou à un domaine fluide adjacent.

Notions de théorie cinétique

Considérons un VER de volume V occupé par N particules
(de même masse m_p et vitesse individuelle$\vec{v}_i(t)$).

Sous l'hypothèse du milieu continu $Kn \ll 1$ (cf. chap. 1), on peut faire des moyennes sur le VER et définir successivement :

- La masse volumique

$$\rho = \frac{N m_p}{V},$$

- La vitesse moyenne

$$\vec{u} = \frac{1}{N} \sum_{i \in V} \vec{v}_i,$$

- La vitesse quadratique moyenne

$$v_q^2 = \frac{1}{N} \sum_{i \in V} |\vec{v_i} - \vec{u}|^2$$

En invoquant le *théorème d'équipartition de l'énergie*,
cette dernière quantité permet de définir la **Température cinétique** :

$$\frac{m_p v_q^2}{2} = 3\frac{k_b T}{2}, \quad \text{soit} \quad T = \frac{m_p v_q^2}{3k_b} \qquad (k_B = 1.38{\cdot}10^{-23} m^2 kg s^{-2} K^{-1} \text{constante de Boltzmann})$$

Remarque : on peut aussi écrire cette relation sous une forme plus pratique à l'échelle macroscopique :

$$T = \frac{M v_q^2}{3R} = \frac{v_q^2}{3r}$$

Origine physique de la pression : cas des gaz

Dans un gaz *parfait* les particules n'interagissent que par des collisions (sur une paroi ou entre elles).

Illustrations avec le programme kinetics.m

La théorie cinétique permet de calculer p en fonction des propriétés microscopiques (cf. Guyon, Hulin, Petit ; cours Thermo L2).

Calcul simplifié de la force de pression exercé sur une paroi (identifée à la variation de qdm due aux impacts sur celle-ci) :

$$p = \underbrace{\frac{n}{6} v_q}_{\text{flux de particules impactant la paroi}} \times \underbrace{2 m_p v_q}_{\text{variation de qdm au cours d'un impact}}$$

où $n = N/V = \rho/m_p$ est la densité volumique de particules.
Ce qui aboutit à l'équation d'état mécanique :

$$p = \rho r T$$

Origine physique de la pression : cas des liquides

Dans un liquide la pression est due aux *liaisons* entre les molécules adjacentes, qui sont par définition des interactions répulsives à courte distances ($f_{ij} > 0$ lorsque $d_{ij} < r_0$) et attractives à plus grande distance ($f_{ij} < 0$ lorsque $d_{ij} > r_0$) .

Remarques :

1. Les liaisons sont très "raides" et il est difficile de faire varier la distance inter-molécule ($d_{ij} \approx r_0$).

   Ceci justifie que les liquides sont très peu compressibles.
2. Cas idéalisé : Modèle "liquide incompressible, indilatable" : $\rho = \rho_0 = C_{te}$.

   $\partial\rho/\partial p \approx 0 \rightarrow \rho$ et p sont découplés.

   Dans ce modèle p devient une variable mécanique qui n'est plus reliée à la thermodynamique.
3. La pression dans un liquide peut ainsi être négative (liaisons majoritairement attractives).

   Cet état est métastable du point de vue thermo mais peut tout de même être observé dans la nature (sève dans les arbres de plus de 10m...)

Statique des fluides

Loi de l'hydrostatique

Pour un fluide au repos dans un référentiel galiléen, soumis à un champ de force massique $\vec{g}$ constant (en général la gravité) :

$$\vec{\mathrm{grad}}p = \rho\vec{g}$$

Démonstration :
Equilibre des forces sur un volume élémentaire de fluide dV, de masse $dm = \rho\, dV$:

$$\sum d\vec{F}_{ext\to dV} = \vec{0}$$

Application *(exercices)* :

1/ Liquide incompressible de masse volumique uniforme ρ (océan)

$$p = p_0 - \rho g z$$

(Modèle plus précis incluant la thermocline, cf exercice 2.3)

2/ Gaz parfait (atmosphère d'une planète ou d'une étoile)
Modèle d'atmosphère isotherme :

$$p = p_0 e^{-\frac{gz}{rT_0}}$$

(Modèle d'atmosphère standard, cf. exercice 2.2).

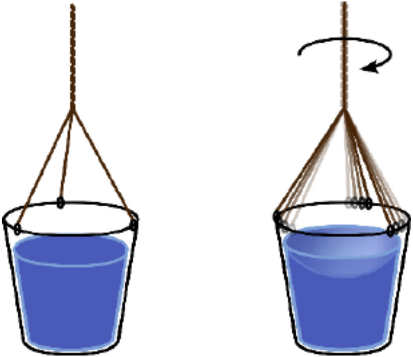
Statique des fluides en repère non galliléen

Cas d'un référentiel non galliléen

Pour un fluide "au repos" dans un référentiel non galliléen il faut ajouter les pseudo-forces d'inertie (accélération d'entrainement $\vec{a}_e$).

$$\vec{\text{grad}}p = \rho\left(\vec{g} + \vec{a}_e\right)$$

Exemple d'un liquide dans un récipient cylindrique en rotation ("Seau de Newton") :



(Exercice classique)
Les surfaces de même pression (surfaces isobares) sont des paraboles
(y compris la surface libre en négligeant la tension superficielle).

Efforts de pression sur une surface

Soit une surface $\mathcal{S}$ (matérielle ou non) délimitant (partiellement ou totalement) un fluide F à l'équilibre. Soit M un point courant de $\mathcal{S}$ et $\vec{n}_{\mathcal{F}\to\mathcal{S}}$ un vecteur normal orienté du fluide vers la surface ("entrant"). Les efforts exercés par F sur $\mathcal{S}$ (efforts hydrostatiques) sont données par le torseur suivant :

$$\{\mathcal{F}\to\mathcal{S}\} = {}_A\left\{\begin{array}{l}\vec{F}\\ \vec{\mathcal{M}}_A\end{array}\right. == {}_A\left\{\begin{array}{l}\iint_{\mathcal{S}} p(M)\vec{n}_{\mathcal{F}\to\mathcal{S}}dS\\ \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{AM}\times p(M)\vec{n}_{\mathcal{F}\to\mathcal{S}}dS\end{array}\right.$$

Remarques :
- Dans le cas d'une surface fermée délimitant un objet Ω plongé dans le fluide, la convention habituelle est de noter $\vec{n}$ la normale sortante (par rapport à l'objet). Dans ce cas on peut utiliser les formules précédentes en écrivant $\vec{n}_{\mathcal{F}\to\Omega} = -\vec{n}$.
- On appelle *point d'application* "le" point C tel que $\vec{M}_C = 0$
(définition non rigoureuse car ce point n'est pas unique ; on peut choisir n"importe quel point situé sur la "droite d'action" du torseur).

Exercices classiques :
- Calculez la résultante des forces de pression sur un barrage rectangulaire vertical de hauteur H. Montrez que le point d'application est situé à une altitude $H/3$ par rapport au fond.
- Barrage triangulaire (exercice a préparer avant le TD, corrigé sur moodle).

Théorème d'Archimède

Tout corps plongé entièrement dans un ou plusieurs fluides au repos, subit de la part du (des) fluide(s) une force verticale, dirigée vers le haut, égale en intensité au poids du volume de fluide déplacé, et qui s'applique au centre de gravité G_f du(des) fluide(s) déplacé(s).

En termes plus précis, la poussée d'Archimède correspond au torseur suivant :

$$\{\mathcal{A}\} = {}_{G_f}\left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathcal{F}}_{\mathcal{A}} = -M_f\vec{g} \\ \\ \vec{\mathcal{M}}_{\mathcal{A},G_f} = \vec{0} \end{array} \right.$$

Démonstrations : (i) physique ; (ii) mathématique.

Remarques :

- en général $G_f \neq G$ (G est le centre de gravité du corps considéré, et dépend de la répartition de masse à l'intérieur de celui-ci).
- Si le fluide déplacé a une masse volumique constante ρ_f, alors $M_f = \rho_f V$, et le point G_f correspond au centre géométrique C de l'objet.
- La somme de la force de gravité $M\vec{g}$ et de la poussée d'Archimède est parfois appelée "poids relatif" ou "flottabilité" (buoyancy) : $\vec{F} = (M - M_f)\vec{g}$.

Equilibre des corps flottants (1)

Cas d'un corps de masse m et volume V entièrement immergé dans un fluide homogène de masse volumique ρ_f (sous-marin ou montgolfière).

Recherchons les conditions d'équilibre sous l'effet de son poids $\{\mathcal{G}\}$ et de la poussée d'Archimède $\{\mathcal{A}\}$.

$$\sum \vec{\mathcal{F}} = m\vec{g} - \rho_f V \vec{g}$$

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_C = \overrightarrow{CG} \wedge m\vec{g} - \overrightarrow{CC} \wedge \rho_f V \vec{g}.$$

Equilibre des résultantes : $m = \rho_f V$.
→ Conséquence : le véhicule doit pouvoir contrôler sa masse en fonction du milieu environnant !

Equilibre des moments : $\overrightarrow{CG} \wedge m\vec{g} = \vec{0}$.
→ Conséquence : C et G doivent être alignés verticalement

Remarque : cette condition définit deux états d'équilibre possibles.
Seul l'état ou G est situé au dessous de C est stable !

Equilibre des corps flottants (2)

Cas d'un corps de masse m partiellement immergé dans un liquide homogène de masse volumique ρ_f (bateau)

Equilibre des résultantes : $m = \rho_f V_0$ où V_0 est le "volume de carène" (volume de la partie immergée)

$\rightarrow$ Conséquence : l'équilibre reste possible si m varie.

Equilibre des moments : (Notons C_0 le centre de carène *dans la position d'équilibre*)

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_{C_0} = \overrightarrow{C_0 G} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{C_0 C_\phi} \wedge \vec{\mathcal{F}}_{\vec{A}} = \overrightarrow{C_\phi G} \wedge m\vec{g}$$

Subtilité : lorsque l'inclinaison (gîte) ϕ varie, le centre de carène C_ϕ se déplace !

Si la carène est suffisamment large, il est possible que la position d'équilibre soit stable même si G est au dessus de C_0 !

On peut montrer qu'il existe un point M appelé *Métacentre de roulis* qui se situe sur la droite d'application de la poussée d'Archimède $\forall \phi$ (dans la limite $\phi \ll 1$).

On peut donc écrire :

$$\overrightarrow{C_0 C_\phi} \wedge \vec{\mathcal{F}}_{\vec{A}} = \overrightarrow{C_0 M} \vec{\mathcal{F}}_{\vec{A}}$$

et donc

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_{C_0} = \overrightarrow{MG} \wedge m\vec{g}$$

Le critère de stabilité est donc : G **doit être en dessous de** M .

La position de M est donné par la formule de Bouguier

$C_0 M = \frac{L b^3}{12 V_0}$ (cas particulier pour une carène prismatique, de longueur L et largeur à la flottaison b).

Tension superficielle : mise en évidence expérimentale

Expériences avec un film de savon :

https://www.math.hmc.edu/ jacobsen/demolab/soapfilm.html

Origami capillaire :

https://www.youtube.com/watch?v=n51Vi3rv_kA
https ://www.google.com/imgres ?imgurl=http

Tension superficielle : modélisation physique

Forces linéiques : la tension de surface

Si le volume de fluide Ω est traversé par une interface entre deux fluides non miscibles (fluide 1 et fluide 2), le fluide contenu dans Ω est soumis à une force de tension le long de la ligne $\mathcal{L}$ intersection de la frontière de Ω avec l'interface :

$$d\vec{F}_{\mathcal{L}\to\Omega} = \gamma\, dl\; \vec{n}_{\mathcal{L}}$$

où dl : longueur élémentaire le long de $\mathcal{L}$

et $\vec{n}_{\mathcal{L}}$: vecteur unitaire tangent à l'interface, $\perp$ à $\mathcal{L}$, et sortant par rapport au domaine Ω

Le coefficient de tension de surface γ correspond à une force par unité de longueur (N/m) ou de manière équivalente à une énergie par unité de surface (J/m^2).

Sa valeur est une propriété physique de l'ensemble (fluide 1/ fluide 2) (ex. $\gamma = 0.07$ N/m pour une interface eau/air)

Application : pression dans une bulle

On montre que dans une bulle sphérique de rayon R, la pression vaut (démonstration :)

$$(p_i - p_o) = \frac{2\gamma}{R}$$

Généralisation : Loi de Laplace (programme L2)

On montre que la tension de surface conduit à un saut de pression :

$$p_1 - p_2 = \gamma \left(\frac{1}{\mathcal{R}'} + \frac{1}{\mathcal{R}''} \right)$$

$\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$: rayons de courbure principaux en 3D (cf. cours de géométrie différentielle)

Angle de contact (programme L2)

Au niveau de la ligne triple (fluide 1 / fluide 2 / paroi solide), on constate que l'angle de contact θ est fixé : $\theta = \theta_E$

θ_E est une propriété physique de l'ensemble (fluide 1 / fluide 2 / paroi solide).

Si $\theta_E < \pi/2$ on parle de surface hydrophile (exemple : eau/air/verre).

Si $\theta_E > \pi/2$ on parle de surface hydrophobe (exemple : eau/air/téflon).

Compétition entre capillarité et pesanteur

Le nombre sans dimension permettant de comparer gravité et capillarité est le nombre de **Bond** :

$$\mathrm{Bo} = \frac{\rho g L^2}{\gamma}$$

où L désigne l'échelle de longueur caractéristique du phénomène étudié (par ex. le diamètre du verre de whisky du Capitaine Haddock. . .)

ce nombre peut s'écrire également

$$\mathrm{Bo} = \left(\frac{L}{\ell_c}\right)^2$$

où $\ell_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$ est l'échelle de longueur capillaire.
($\ell_c = 2.7mm$ Pour l'interface air/eau en gravité terrestre.)

Interprétation :

- Si $\mathrm{Bo} \gg 1$: pesanteur dominante (surface libre plane, horizontale).
- Si $\mathrm{Bo} \ll 1$: capillarité dominante (surface libre sphérique).
- Si $\mathrm{Bo} = \mathcal{O}(1)$: forces de gravité et capillarité comparables (surface libre solution d'un problème difficile...).

Questions de cours sur le chapitre 2

Questions de cours :

1. Quelle est la signification microscopique de la pression et de la température dans un gaz ?
2. Justifiez "avec les mains" que la pression dans un gaz la pression est proportionnelle à la masse volumique et à la température (comme indiqué par la loi d'état $P = \rho r T$ d'un gaz parfait).
3. Enoncez le théorème d'Archimède et démontrez-le par la méthode de votre choix.
4. Discutez les conditions d'équilibre d'un sous-marin. Montrez en illustrant par des schémas que l'équilibre est stable si G est situé en dessous de C.
5. Cette conclusion est-elle la même dans le cas d'un bateau ? Pourquoi ? illustrez également par des schémas.
6. Qu'est-ce que la tension de surface ? Donnez un exemple de la vie courante où on peut observer ce phénomène.
7. Sous quelle hypothèse peut-on négliger ce phènomène ? Quelle est alors la seule forme possible de la surface libre d'un liquide au repos ?

Exercices de cours :

1. Donnez la loi de pression $p(z)$ dans une atmosphère isotherme.
2. Montrez que la résultante de pression exercée sur un barrage rectangulaire de hauteur H et largeur L vaut $\rho g L H^2/2$.