Physique 1 : Mécanique / Cinématique

El Hadi Khali

Cinématique

December 23, 2010

Étude du mouvement d'un corps en fonction du temps, indépendamment de toute cause pouvant le provoquer ou le modifier.

- Le mouvement séffectue le long d'une trajectoire, la trajectoire se trouve sur une courbe (droite, arc, ...)
- Mouvement : modification de la position d'un corps pendant un intervalle de temps. On attribue à la position du corps une ou plusieurs valeurs numériques (coordonnés) qui situent le corps en fonction du temps dans un référentiel.
- Trajectoire : l'ensemble des positions successives du corps dans l'espace.

On distingue :

- Mouvement rectiligne uniforme : la trajectoire se trouve sur une droite, la vitesse est constante en direction et en norme. Le vecteur vitesse $\vec{V}$ est constant, en direction et en norme.
- Mouvement rectiligne uniformément accéléré : la trajectoire se trouve sur une droite la direction du déplacement est constante mais la norme de la vitesse varie au cours du temps (augmente ou diminue). L'accélération (ou la décélération) est constante. Le vecteur vitesse $\vec{V}$ est constant en direction, mais sa norme varie.
- Mouvement rectiligne varié : l'accélération n'est pas constante dans le temps.
- Mouvement circulaire uniforme : la trajectoire se trouve sur un cercle ou un arc de courbe. La norme du vecteur vitesse $\vec{V}$ est constante, mais sa direction change.
- Mouvement curviligne : la trajectoire se trouve sur une courbe. La norme du vecteur vitesse et kinematic.texsa direction changent au cours du temps.

La description du mouvement d'unkinematic.tex point matériel exige de connaître sa position dans l'espace à tout instant. Pour cela, nous devons définir :

- Un repère d'espace
- Une horloge

L'ensemble repère-horloge constitue un référentiel. Tout observateur est muni d un temps t associé à une horloge et d'un espace affine E (ou vectoriel) orienté à 3 dimensions. À tout instant t, il existe un point $M(t)$ de l'espace E avec lequel coïncide le point matŕiel à l'instant t (point coĭncidant). Dans l'espace à 3 dimensions il faut trois données (coordonnées) pour définir la position d'un point M.

Vitesse :

Vitesse moyenne :

$$\bar{v}_x \text{ ou } < v_x > = \frac{deplacement}{duree \;\; du \;\; deplacement} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La vitesse moyenne peut être positive ou négative selon le signe du vecteur déplacement.

Vitesse instantanée

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}$$

La vitesse instantanée peut être positive, négative ou nulle, lorsque la pente du graphique position-temps est positive, négative ou nulle.

Accélération :

accélération moyenne :

$$\bar{a}_x \text{ ou } < a_x >= \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$$

La vitesse d'un mobile est susceptible de varier, elle peut :
Augmenter (accélération > 0)
Diminuer (accélération < 0)
si la vitesse est constante, l'accélération est nulle
L'accélération rend compte de la rapidité avec laquelle la vitesse change.

accélération instantannée :

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \equiv \dot{v}_x \equiv \ddot{x}$$

si la vitesse et l'accélération ont même signe, l'accélération est positive, si leurs signes diffèrent, l'acclération est négative.

Exple 1 : Relations graphiques entre x, v_x et a_x: Diagrammes de $m^v t$

La position d'un mobile le long de l'axe des x varie en fonction du temps comme indiquer sur la figure 1a. Trouver le graphique de la vitesse et de l'accélération en fonction du temps.

Réponse : La vitesse à un instant donné ètant la pente de la tangente du graphique $x - t$ à cette instant. Entre $t = 0$ et $t = t_a$, la pente de la courbe $x - t$ croit linéairement comme montré dans la figure 1b. Entre t_a et t_b, la pente de la courbe $x - t$ est constante, la vitesse devient donc constante. A t_d, la pente dans le graphique $x - t$ est nulle, donc la vitesse est nulle à cette istant. Entre t_d et t_e, la pente de la courbe $x - t$ est négative et décroit linéairement, la vitesse est donc négative (du point de vue sens) dans cette intervalle. Dans l'intervalle t_e et t_f, la pente du graphique $x - t$ reste négative et devient nulle à linstant t_f. Finalement, après t_f, la pente de la courbe $x - t$ est nulle, ce qui veut dir que le mobile est au repos pour $t > f_f$.

L'accélération à chaque instant étant la pente de la tangente à la courbe $v_x - t$ à cette instant. Le graphique de l'accélération est montré dans la figure 1c. L'accélération est constante et positive entre 0 et t_a, où la pente du graphique $v_x - t$ est positive. Elle est nulle dans l'intervalle t_a , t_b et poru $t > t_f$ paeceque la pente du graphique $v_x - t$ est nulle à ces instants. L'accélération est négative entre t_b et t_e parceque la pente dans le graphique $v_x - t$ est négative dans cette intervalle.

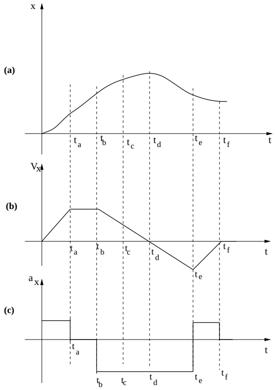


Figure: 1-Diagrammes de mouvement

Exple 2 : Accélération moyenne et instantannée

La vitesse d'une particule en $m^v t$ le long de l'axe x varie en fonction du temps avec l'expression suivante : $v_x = (40 - 5t^2) m/s$ où t est en second.

1. Déterminer l'accélération moyenne dans l'intervalle $t = 0$ et $t = 2.0\ s$

Solution: La courbe dans la figure 2 est construite à partir de l'expression de v_x en fct de t donnée dans l'énoncé. La pente de la courbe dans cette intervalle du temps est négative, on attend donc à ce que l'accélération est négative. On a à $t_i = t_A = 0 \quad v_{xA} = +40\ m/s$ et à $t_f = t_B = 2 \quad v_B = +20\ m/s \ \Rightarrow \ \bar{a_x} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} = \frac{v_{xB} - v_{xA}}{t_B - t_A} = \frac{(20-40)\ m/s}{(2-0)\ s} = -10\ m/s^2$ Le signe moins était prévisible comme dit précédement, puisque la pente de la ligne joignant les oints A et B dans la figure 2 est négative alors que cette ligne elle n'est d'autre que l'accélération moyenne

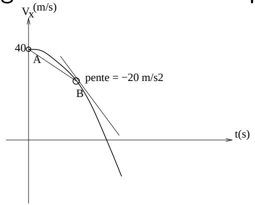


Figure: 2-Graphique de la vitesse en fonction du temps.

2. Déterminer l'accélération à $t = 2.0\ s$

On a par définition

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_{xf} - v_{xi}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} =$$
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{[40 - 5(t+\Delta t)^2] - [40 - 5t^2]}{\Delta t} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{[40 - 5t^2 - 40 - 5t^2 - 10t\Delta t - 5(\Delta t)^2]}{\Delta t} =$$
$$\lim_{\Delta t \to 0} (-10t - 5\Delta t) = -10t\ m/s^2$$

Soit donc à $t = 2.0\ s$, $a_x = -20\ m/s^2$

La particule est donc en mouvement décélérée parceque sa vitesse est positive et son accélération est négative.

Remarquer que dans la première question que l'accélération moyenne est représent́e par la pente de la droite joignant les points A et B. Par contre dans la question 2, l'accélération instantannée représente la pente de la tangente à la courbe au point B où $t = 2.0\ s$. Finalement, noter aussi que dans cette exemple, l'accélération n'est pas constante.

Equation du mouvement : Équation horaire

L'équation horaire d'un mouvement rectiligne, uniformément accéléré s'écrit:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

Cette q́uation est obtenue par intǵration de la définition de l'accélération a:
$\frac{dv}{dt} = a = C^{ste}$ soit $dv = adt \Rightarrow v(t) = \int adt = a\int dt = at + K$
Puisque a est constante, on peut la sortir de l'intégrale, K est une constante d'intégration que l'on détermine à partir des conditions initiales (position et vitesse). En appelant v_0 la vitesse à l'instant $t = 0$ on a : $v(t) = at + v_0$
De même :
$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt \Rightarrow x = \int vdt = \int (at + v_0) = a\int tdt + v_0\int dt$
$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + K^{'}$, $K^{'}$ est déterminée à partir de la position initiale x_0 à $t = 0$:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

Vecteurs Position, Vitesse et Accélération
Vecteur Position

- Déssiné à partir de l'origine du système de coordonnées jusqu'à la position du point matériel (*ie, le mobile*), dans le plan $(x-y)$

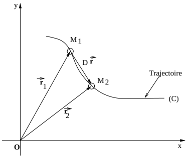


Figure: 1-Partiule en mouvement dans le plan $(x-y)$

- à $t=t_1$, la particule est au position M_1: son vecteur position est $\vec{r}_1 \equiv \vec{OM}_1$
- à $t=t_2$, la particule est au position M_2: son vecteur position est $\vec{r}_2 \equiv \vec{OM}_2$

Quand la particule se meut de la position M_1 à la position M_2 pendant l'intervalle du temps $\Delta t = t_2 - t_1$, son vecteur position change de $\vec{r}_1$ à $\vec{r}_2$.
Comme on a vue dans le cas du *mvt* à $1D$, le déplacement est une grandeur vectorielle, il est définie comme étant la différence entre la position finale et initiale de la particule. Dans le cas présent, on définit le vecteur déplacement $\Delta\vec{r}$ de la particule par la différence (vectorielle) entre ces vecteurs position final et initial (*cf figure 1*):

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, noter que $|\Delta\vec{r}| \neq |\overset{\frown}{M_1 M_2}|$

Vitesse moyenne

La vitesse moyenne de la prticule M dans l'intervalle du temps Δt est définie comme suit :

$$\vec{\bar{V}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (1)$$

Noter que cette vitesse moyenne est indépendante du parcours suivi pour aller de M_1 à M_2. Ceci est dûe au fait que la vitesse moyenne est proportionnelle au déplacement qui dépend seulement du vecteur position final et initial et pas du chemin suivi.

Vitesse instantannée

Considérons à nouveau le $m^v t$ de la particule entre deux points dans le plan $(x-y)$, comme montrer sur la figure 2

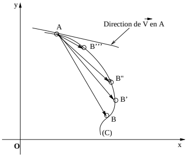


Figure: 2-La vitesse instantanée au point A est la tangente à en ce point.

Au fur et à mesure que l'intervalle du temps pour lequel on observe le $m^v t$ dimuné, la direction du vecteur déplacement approche celle de la ligne tangente à la *trajectoire* au point A. La vitesse instantanée $\vec{V}$ est définie comme étant la limite de la *vitesse moyenne* $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ qd Δt tend vers zéro:

$$\vec{V} \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (2)$$

La vitesse instantannée est donc *la dérivée par rapport au temps* du vecteur position.

L'Accélération moyenne

Quand la particule se déplace d'1 point à un autre suivant une trajectoire, sa vitesse instantannée change de $\vec{V}_1$ (à t_1) à $\vec{V}_2$ (à t_2). La connaissance de ces vitesses nous permet de dt́erminer l'accélération moyenne $\vec{\bar{a}}$ de la particule. C'est la variation du vecteur vitesse instantannée divisée par l'intervalle du temps pendant lequel cette variation se produise.

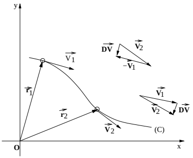


Figure: 3-Illustration du vecteur accélération instantannée

$$\vec{\bar{a}} \equiv \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} \quad (3)$$

Puisque $\vec{\bar{a}}$ est le rapport d'une quantité vectorielle $\Delta \vec{V}$ et une quantité saclaire positive (Δt), on conclut que l'accélération moyenne est une quantité vectorielle et est dirigée le long de $\Delta \vec{V}$.

L'Accélération instantannée

Quand l'accélération moyenne de la particule change au cours de plusieurs intervalles du temps, il est commode de définir son accélération instantannée.

L'accélération instantannée $\vec{a}$ est définie comme la limite du rapport $\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$ quand Δt se rapproche de zéro.

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} \qquad (4)$$

En d'autres mots, l'accélération instantannée est égale à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse.

VITESSE

En coordonnées polaires, le vecteur position de la particule M s'exprime: $\vec{OM} = \vec{r} = r\vec{u}_r$

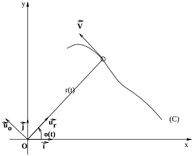


Figure: 4-Composantes de la vitesse en coordonnées polaires

$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{u}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$

On a : $\vec{u}_r = \vec{i}cos\theta + \vec{j}sin\theta$, or $\theta = \theta(t) \Rightarrow$ (dérivée d'une foction composée) $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(-\vec{i}sin\theta + \vec{j}cos\theta) = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$, soit donc:

$$\vec{V} = \underbrace{\frac{dr}{dt}\vec{u}_r}_{composante\ \ radiale} + \underbrace{r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta}_{composante\ \ transversale} \tag{5}$$

$\Rightarrow |\vec{V}| = \sqrt{(\frac{dr}{dt})^2 + (r\frac{d\theta}{dt})^2}$

ACCÉLÉRATION

On dérive l'éqt (5) par rapport au temps $\rightarrow$

$\vec{a} = \frac{d}{dt}[\frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta] = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$

$= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$

$= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta - r(\frac{d\theta}{dt})^2\vec{u}_r$

Finalement on a :

$$\vec{a} = \underbrace{[\frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2]\vec{u}_r}_{acceleration\ \ radiale} + \underbrace{[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}]\vec{u}_\theta}_{acceleration\ \ transversalle} \qquad (6)$$

$\Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{[\frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2]^2 + [r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}]^2}$

Base de Frenet

- M mobile sur la courbe (C)
- On va lier à M un repère locale $(\vec{T}, \vec{N})$ se déplaçant avec M
- $\begin{cases} |\vec{T}| = |\vec{N}| = 1 \\ \vec{T} \perp \vec{N} \end{cases}$
- $\vec{T}$ tangent à (C) au point M
- $\vec{N}$ est dirigé au centre de courbure de la corbe (C) en ce point M.
- $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{N}}{\rho}$, $\rho \equiv$ rayon de courbure au point d'intérêt $(i,e: \quad M)$

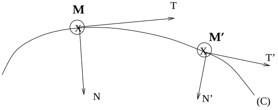


Figure: 5-Base de Frenet

Vitesse

A présent l'origine du $m^v t$ est choisi sur la courbe $(C) \rightarrow$ la position du mobile est repérée par son abscisse curviligne s / à $t = 0 \Rightarrow s = 0$ le mobile est au point M_1 (*cf figure 5*). On a par déf:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{OM}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{M_1 M_2}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{M_1 M_2}}{\overset{\frown}{M_1 M_2}} \frac{\overset{\frown}{M_1 M_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{M_1 M_2}}{\overset{\frown}{M_1 M_2}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overset{\frown}{M_1 M_2}}{\Delta t}$$

or $\overset{\frown}{M_1 M_2} = \Delta s$ & $\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{M_1 M_2}}{\overset{\frown}{M_1 M_2}} = \vec{1}_t \equiv \vec{T}$

donc $\displaystyle\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \vec{T}$

On a finalement

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt} \vec{T} \tag{7}$$

ACCÉLÉRATION

$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{ds}{dt}\vec{T}) = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{T}}{dt}$

Concentrant nous à présent au dernier terme $(\frac{d\vec{T}}{dt})$

$d\vec{T} = \vec{T}_2 - \vec{T}_1 \qquad |\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = 1$

De la figure 6 on voit que $d\vec{T}$ est dans la direction de $\vec{N}$ $(d\phi << 1)$, on a donc : $d\vec{T} = d\phi\vec{N}$ d'ou:

$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\phi}{dt}\vec{N}$ on voit que :$\phi = \phi(s)$ & $s = s(t)$

$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = |\vec{V}|\frac{d\phi}{ds}$ $\frac{d\phi}{ds}$ est par définition la courbure de la courbe (C) au point M considérée, c'est l'inverse du rayon de courbure ρ en ce point:

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

On finalement:

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{d^2s}{dt^2}\vec{T}}_{acc\ \ tangentielle} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}\vec{N}}_{acc\ \ normale} \tag{8}$$

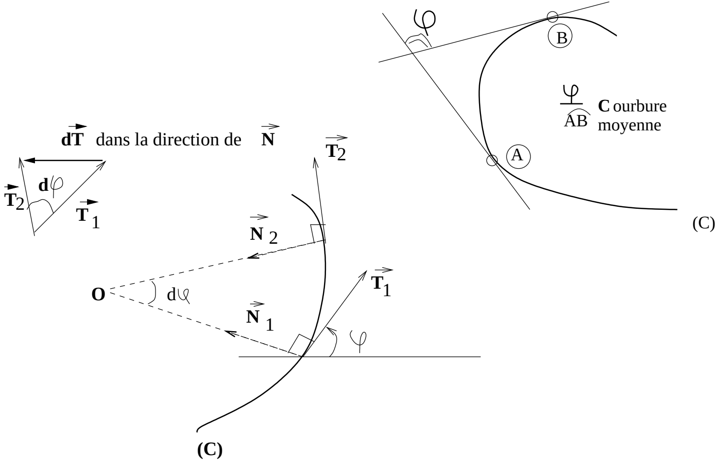


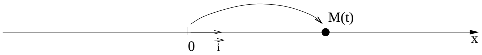
Figure: 6-Courbure et rayon de courbure d'une courbe

ETUDE DE QUELQUES $m^v t$ SIMPLES

$M^v t$ RECTILIGNE :

- $\vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{T}$, $s \equiv x$ & $\vec{T} \equiv \vec{i} \Rightarrow \vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} = \dot{x}\vec{i}$
- $\begin{cases} \vec{a}_T = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} \\ \vec{a}_N = \frac{v^2}{\rho}\vec{N} = \frac{1}{\rho}(\frac{ds}{dt})^2\vec{N} \end{cases}$ $\longrightarrow$ droite $\Rightarrow \rho \to \infty$ $\vec{N} = \vec{0}$, il reste

  $\vec{a}_T = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} = \ddot{x}\vec{i}$



$M^v t$ RECTILIGNE UNIFORME :

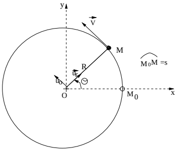
$a = 0 \to V = Ct^e \to \frac{dx}{dt} = V \Rightarrow dx = Vdt \to \int dx = \int Vdt + K = V\int dt + K \Rightarrow x(t) = Vt + x_0$

$M^v t$ Rectiligne uniformement varié

$a = Cte \to \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = a = Ct^e \Rightarrow$

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0 \qquad (9)$$

$M^v t$ Circulaire : $(r = R = Ct^e)$



Vitesse :

- Dans $(\vec{T}, \vec{N}) \longrightarrow Eqt(7) \Rightarrow \vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{T}$ avec $ds = Rd\theta$ ce qui donne : $\vec{V} = R\frac{d\theta}{dt}\vec{T} = R\omega\vec{T}$
- Dans $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta) \longrightarrow$ Eqt (5) $\Rightarrow \vec{V} = \frac{dR}{dt}\vec{u}_r + R\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta = R\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta = R\omega\vec{u}_\theta$

Accélération :

- Dans $(\vec{T}, \vec{N}) \longrightarrow Eqt(8) \Rightarrow \vec{a} = R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{T} + R(\frac{d\theta}{dt})^2\vec{N}$
- Dans $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$
  $Eqt(6) \Rightarrow \vec{a} = [\frac{d^2R}{dt^2} - R(\frac{d\theta}{dt})^2]\vec{u}_r + [R\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dR}{dt}\frac{d\theta}{dt}]\vec{u}_\theta$
  Ce qui donne : $\vec{a} = -R(\frac{d\theta}{dt})^2\vec{u}_r + R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta$

$M^v t$ Circulaire uniforme : Elle se caractérise par $|\vec{V}| = Ct^e$

Vitesse : De ce qui précède on a :

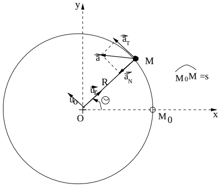
$(\vec{T}, \vec{N})$ *ou* $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$: $|\vec{V}| = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega = Ct^e \Rightarrow \omega = Ct^e$ pour 1 $m^v t$ circulaire uniforme

Accélération

- $(\vec{T}, \vec{N})$ $\begin{cases} |\vec{a}_T| = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\frac{d\omega}{dt} = 0 \\ |\vec{a}_N| = R\omega^2 = Ct^e = \frac{v^2}{R} \end{cases}$
- $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ $\begin{cases} a_r = -R\omega^2 = -\frac{v^2}{R} \\ a_\theta = R\frac{d\omega}{dt} = 0 \end{cases}$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = Ct^e \Rightarrow \int d\theta = \int \omega dt \text{ , } t = t_0 \text{ , } \theta = \theta_0 \Rightarrow \theta(t) = \omega t + \theta_0$$

$$v = R\omega = Ct^e \begin{cases} a_T = a_\theta = 0 \\ a_N = -a_r = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \end{cases}$$



$M^v t$ Circulaire uniformément varié : C'est un $m^v t$ pour lequel $|\vec{a}_T| = Ct^e$

- $\begin{cases} a_T = R\frac{d\omega}{dt} = R\theta^{''} = a_\theta \\ a_N = R\theta^{'2} = R\omega^2 = -a_r \end{cases}$

$a_T = R\frac{d\omega}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\theta^{''} = Ct^e \rightarrow \theta^{''} = Ct^e$
$\frac{d\omega}{dt} = \theta^{''} = Ct^e \Rightarrow \int d\omega = \int \theta^{''} dt + k = \theta^{''} \int dt + k \rightarrow \omega(t) = \theta^{''} t + \omega_0$

Les CI à $t = t_0$ $\begin{cases} \omega = \omega_0 \\ \theta = \theta_0 \end{cases}$

$\rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \omega(t) \Rightarrow \theta(t) = \frac{1}{2}\theta^{''} t^2 + \omega_0 t + \theta_0$ C'est l'éqt du temps angulaire

DÉFINITIONS :

- La chute libre d'un objet, ne se réfère pas nécessairement à un objet lâché à partir du repos;
- Un objet en chute libre est un objet se déplaçant librement sous l'influence de la gravité seule, indépendamment de son déplacement initial;
- Les objets projetés vers le haut ou vers le bas et ceux qui sont libérés à partir du repos, sont en chute libre une fois qu'ils sont libérés;
- Tout objets en chute libre expérience une accélération dirig ées vers le bas qui n'est d'autre que celle de la pesanteur, indépendamment de sont déplacement initial.

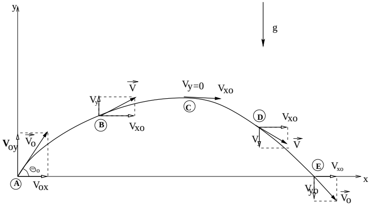
ETUDE DU $m^v t$ D'UN PROJECTILE :

On considère le $m^v t$ d'un mobile en chute libre dans le champ de la pesanteur de la terre,

Hypothèses :

1. L'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ est Ct^e sur toute la plage du m^vt et est dirigée vers le bas (*centre de la terre*): Ceci est équivalent de supposer que la terre est plane en comparaison de la plage du m^vt considéré;
2. La résistance de l'air est négligeable : Cette hypothèse est non justifiée, spécialement dans le cas de trés grandes vitesses. de plus, si une rotation est impartie au projectile, ceci peut engendré d'autre éffets associés aux forces aérodynamiques (portance par exple).

De l'hypothèse 2, on connait : $\begin{cases} a_y = -g \\ a_x = 0 \end{cases}$



Le projectile quitte l'origine ($x_0 = y_0 = 0$) avec une vitesse $\vec{V}_0$ comme montré sur la figure précédante,

$\vec{V}_0 \begin{cases} V_{0x} = V_0 cos\theta \\ V_{0y} = V_0 sin\theta \end{cases}$

Les éqts du $m^v t$ d'un mobile avec ne accélération constante dans le cas $1D$ sont réecrite à présent pour le cas $2D$ comme suit pour les deux directions :

$$x(t) = V_{0x} t + x_0 = V_0 cos\theta\ t \quad (10)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} a_y t^2 + V_{0y} t + y_0 = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 sin\theta\ t \quad (11)$$

Analyse du $m^v t$ du projectile

Le vecteur position du mobile (*le projectile*) est $\vec{r(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

$\rightarrow$ (10)&(11) $\Rightarrow$

$\vec{r(t)} = V_0 cos\theta\ t\ \vec{i} + (-\frac{1}{2} g t^2 + V_0 sin\theta\ t)\vec{j}\ = (V_0 cos\theta\ \vec{i} + V_0 sin\theta\ \vec{j})t - \frac{1}{2} g t^2 \vec{j}$

d'ou $\vec{r(t)} = \vec{V}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g} t^2$

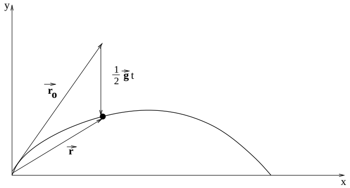
Donc la position finale du projectile peut être considérée comme étant la superposition du :

- Vecteur position initial $\vec{r}_0$ représenté par le terme $\vec{V}_0 t$ qui est le déplacement du projectile si aucune accélération de pesanteur n'est présente, et
- Le terme $\frac{1}{2}\vec{g} t^2$ qui découle de l'accélération de la pesanteur.

En d'autres termes, s'il n'y a pas d'accélération gravitationnelle, le projectile continue son $m^v t$ le long d'une ligne droite dans le direction de $\vec{V}_0$. Par coséquent, la distance verticale à travert laquelle la particule "chute" de cette ligne droite est la même distance qu'un objet en chute libre tomberait au cours de la même intervalle du temps.

Ainsi, le $m^v t$ d'un projectile peut être analysé ou considéré comme étant la superpostion de deux $m^v ts$

$$\begin{cases} - \ m^v t \ avec \ une \ vitesse \ ct^e \ dans \ la \ direction \ horizentale \\ - \ m^v t \ de \ chute \ libre \ dans \ le \ sens \ vertical \end{cases}$$



Equation de la trajectoire

Cette éqt est obtenue en éliminant le temps de l'éqt (10) et nous substituons dans (11), on trouve :

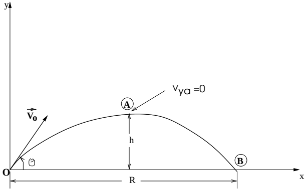
$$y = -\left(\frac{g}{2V_0^2 cos^2\theta}\right) x^2 + tg\theta \ x \qquad (12)$$

qui est l'éqt d'une parabole dans le plan (x-y). Equation valable pour des angles de lancement $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Portée et Hauteur maximale

Supposons que le projectile est lancé à partir de l'origine du système de coordonnées à $t_0 = 0$ avec une vitesse $\vec{V}_0$ ayant une composante > 0 selon l'axe vertical comme montré dans la figure ci-dessous. Deux points sont intéréssant à analysés : Le pic A ayant pour coordonnées cartisiènnes $(R/2, h)$, et le point B $(R, 0)$, parcouru par le projectile avant de toucher le sol

- La distance R parcoru par le projectile avant de toucher le sol s'appelle *la portée*;
- La distance h est la hauteur maximale atteinte par le projectile.



Portée

La distance OB parcouru par le projectile avant de toucher le sol s'appelle *la portée*. On peut calculer OB en tilisant l'éqt de la parabole (12), en posant $y = 0$. Ce qui donne les deux solutions en x :

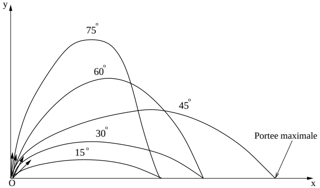
$$\begin{cases} x = 0 \\ x_B = \frac{2V_0^2}{g} tg\theta \ cos^2\theta \quad \rightarrow \quad x_B = \frac{(2sin\theta \ \ cos\theta)V_0^2}{g} \Rightarrow \boxed{x_B = \frac{sin2\theta \ \ V_0^2}{g}} \end{cases}$$

Le temps mis par le mobile de O à B peut s'obtenir en remarquant que la vitesse selon x est Ct^e : $\dot{x} = V_0 cos\theta$, $t_B = \frac{x_B}{V_0 cos\theta} \Rightarrow \boxed{t_B = \frac{2sin\theta \ \ V_0}{g}}$

La portée x_B est maximale lorsque $sin2\theta \ = 1$, c-a-d: $\theta = \frac{\pi}{4} = 45^o$, (à $V_0 \ \ Ct^e$): $\boxed{x_{max} = \frac{V_0^2}{g}}$

On remarque que x_B garde la même valeur (à V_0 constante) lorsq'on remplace θ par $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ car $sin\left(\pi - 2\theta\right) = sin2\theta$

On trouve ainsi le même portée lorsque m est envoyé à $t = 0$ avec ne vitesse initiale $\vec{V}_0$ faisant un angle θ ou $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ avec l'axe OX (angles complémentaires):



Hauteur maximal

Pour calculer la hauteur maximale atteinte par le mobile M avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$, on peut utiliser la symétrie de la trajectoire (parabole) : $x_h = \frac{OB}{2}$, comme la vitesse $\dot{x}$ est Ct^e on aura aussi $t_A = \frac{t_B}{2} = \boxed{\frac{sin\theta \ V_0}{g}}$

Pour calculer h, on utilise (11) $\Rightarrow \boxed{h = \frac{V_0^2 sin^2\theta}{2g}} \rightarrow \boxed{h_{max} = \frac{V_0^2}{2g}}$

Vitesse instantanée

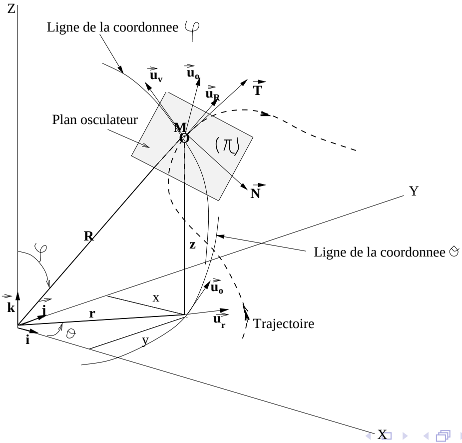
Le vecteur vitesse de M s'écrit: $\vec{V}(t) = V_0 cos\theta \ \vec{i} + (-gt + V_0 sin\theta)\vec{j}$, calculons

$V(t)^2 = \vec{V}(t).\vec{V}(t) = V_0^2 + g^2t^2 - 2gtV_0 sin\theta =$

$V_0^2 - 2g\left(-\frac{1}{2}gt^2 + V_0 sin\theta \ t\right) \Rightarrow \boxed{V(t)^2 - V_0^2 = -2gy}$ Le module de la vitesse ne dépend que de $y \rightarrow$ à la même hauteur y, on aura le même module pour la vitesse

A présent nous considérons le cas du $m^v t$ d'une particule M le long d'une trajectoire décrivant une courbe quelconque dans l'espace, en générale cette courbe est *gauche*. La figure ci-dessous montre les trois systèmes de coordonnées: rectangulaires (x, y, z), cylindriques (r, θ, z) et sphériques (R, θ, ϕ) avec leurs bases respectives. Ces trois types de coordonnées sont couramment utilisés pour décrire le $m^v t$.
Comme dans le cas du $m^v t$ plan, le repère de Frénet peut être utilisé pour étudier le $m^v t$ avec dans ce cas, les vecteurs unitaires $\vec{T}$ et $\vec{N}$ sont contenus dans le plan tangent à la courbe (trajectoire) à la position considérée du mobile. Ce plan contient une partie de la trajectoire à cette position. Il est montré dans la figure et est noté (π). En générale ce plan est appelé *le plan osculateur*. Le troisième vecteur du trièdre de Frénet est la binormale $\vec{B}$, c-a-d $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$. Le trièdre $\left(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\right)$ est donc **directe**.
L'accélération est également définie dans ce plan osculateur de la même maière que dans le cas plan. Elle a dans ce plan une composante tangentielle $a_T = \frac{d\left|\vec{V}\right|}{dt}$, due à la variation du module du vecteur vitesse, et une composante normale $a_N = \frac{V^2}{\rho}$ due au changement de direction du

vecteur vitesse. ρ est le rayon de courbre de la trajectoire au point d'intérêt et il est mesuré dans ce plan osculateur.
Bienque cette déscription du $m^v t$ est naturelle et directe dans beaucoup de problèmes de $m^v ts$ plans, elle trouve peut d'utilité pour le cas du $m^v t$ dans l'espace parceque le plan osculateur change son orientation.
Dans ce qui suit uniquement les trois systèmes: rectangulaire, cylindriques et sphériques pour étudier le $m^v t$.



Etude du $m^v t$ en coordonnées cartisiènnes (x, y, z)

L'extension de deux à trois dimensions n'offre aucune difficulté particulière. Nous ajoutons simplement la coordonnée z et ses deux dérivées par rapport au temps. De sorte que le vecteur position $\vec{R}$, la vitesse $\vec{V}$ et l'accélération $\vec{a}$ deviennent:

$$
\begin{aligned}
\vec{R} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\
\vec{V} &= \dot{\vec{R}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \\
\vec{a} &= \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{R}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}
\end{aligned}
$$

Noter que dans le cas $3D$ nous utilisons le symbole $\vec{R}$ à la place $\vec{r}$ pour le vecteur position.

Etude du $m^v t$ en coordonnées cylindriques (r, θ, z)

Là aussi il s'agit d'une extension directe du cas plan en coordonnées polaires, tout ce qui est nécessaire est l'ajout de la coordonnée z et ses deux dérivées par rapport au temps.

Le vecteur position $\vec{R}$ du mobile en coordonnées cylindriques est d'après la figure précédente: $\vec{R} = r\vec{u}_r + z\vec{k}$

La vitesse est obtenue en dérivant $\vec{R}$ par rapport au temps, on obtient une expression qui généralise (5):

$$\vec{V} = \underbrace{\frac{dr}{dt}\vec{u}_r}_{composante\ \ radiale} + \underbrace{r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta}_{composante\ \ transversale} + \underbrace{\frac{dz}{dt}\vec{k}}_{composante\ \ azimutale} \qquad (13)$$

$$\text{avec} \begin{cases} V_r = \frac{dr}{dt} \equiv \dot{r} \\ V_\theta = r\frac{d\theta}{dt} \equiv r\dot{\theta} \\ V_z = \frac{dz}{dt} \equiv \dot{z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2 + V_z^2}$$

De même, l'accélération est obtenue en ajoutant la composante z à l'éqt (6), ce qui nous donne :

$$\vec{a} = \underbrace{\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2\right]\vec{u}_r}_{commposante\ \ radiale} + \underbrace{\left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\vec{u}_\theta}_{composante\ \ transversalle} + \underbrace{\frac{d^2z}{dt^2}}_{composante\ \ azimutale} \qquad (14)$$

$$\text{avec} \begin{cases} a_r = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2\right] \equiv \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \\ a_\theta = \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right] \equiv \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) \\ a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \equiv \ddot{z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |a| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_z^2}$$

Alors que les vecteurs unitaires $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ possèdent des dérivées par rapport au temps non nulles du fait que leur directions changent, nous notons que le vecteur $\vec{k}$ qui est dans la direction z est fixe, n'a donc pas une dérivée par

Etude du $m^v t$ en coordonnées sphériques (R, θ, ϕ)

Lorsque la distance radiale et deux angles sont utilisés pour spécifier la position d'un mobile, les coordonnées sphériques sont utilisées. Dans ce système, le vecteur position s'écrit :

$$\vec{OM} \equiv \vec{R} = R\vec{u}_R$$

Rappelons tout d'abord les relations entre les vecteurs de la base $(\vec{u}_R, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ et ceux de la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On a d'après la figure précédente

$$\vec{u}_R = sin\phi cos\theta\ \vec{i} + sin\phi sin\theta\ \vec{j} + cos\phi\ \vec{k} \quad (15)$$

$$\vec{u}_\theta = -sin\theta\ \vec{i} + cos\theta\ \vec{j} \quad (16)$$

$$\vec{u}_\phi = cos\phi cos\theta\ \vec{i} + cos\phi sin\theta\ \vec{j} - sin\phi\ \vec{k} \quad (17)$$

Vitesse du mobile : On dérive $\vec{R}$ par rapport au temps, soit alors

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\vec{u}_R) = \frac{dR}{dt}\vec{u}_R + R\frac{d\vec{u}_R}{dt}$$

$\frac{d\vec{u}_R}{dt}$ est obtenue en dérivant (15) par rapport au temps. On trouve:

$$\frac{d\vec{u}_R}{dt} = \frac{d\theta}{dt} sin\phi \underbrace{\left[-sin\theta\ \vec{i} + cos\theta\ \vec{j}\right]}_{\vec{u}_\theta} + \frac{d\phi}{dt}\underbrace{\left[cos\phi cos\theta\ \vec{i} + cos\phi sin\theta\ \vec{j} - sin\phi\ \vec{k}\right]}_{\vec{u}_\phi}$$

Donc

$$\frac{\vec{u}_R}{dt} = \frac{d\theta}{dt} sin\phi \; \vec{u}_\theta + \frac{d\phi}{dt} \; \vec{u}_\phi$$

D'ou l'expression finale de la vitesse en coordonnées sphériques:

$$\vec{V} = \frac{dR}{dt}\vec{u}_R + Rsin\phi\frac{d\theta}{dt} + R\frac{d\phi}{dt}\vec{u}_\phi \qquad (18)$$

Les trois composantes sphériques du vecteur vitesse apparaissent comme suit :

$$\begin{aligned} V_R &= \frac{dR}{dt} \equiv \dot{R} \\ V_\theta &= Rsin\phi\frac{d\theta}{dt} \equiv R\dot{\theta}sin\phi \\ V_\phi &= R\frac{d\phi}{dt} \equiv R\dot{\phi} \end{aligned}$$

Et son module est donné par

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_R^2 + V_\theta^2 + V_\phi^2}$$

Accélération du mobile : En dérivant le vecteur vitesse (éqt 18) par rapport au temps, soit :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dR}{dt}\vec{u}_R + Rsin\phi\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + R\frac{d\phi}{dt}\vec{u}_\phi\right]$$

et après calculs et réarangements, on arrive à l'expression du vecteur accélération son :(devoire pour les étudiants)

$$\begin{aligned}\vec{a} = & \left[\frac{d^2R}{dt^2} - R\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 sin^2\phi\right]\vec{u}_R + \\ & \left[R\frac{d^2}{dt^2}sin\phi + 2\frac{dR}{dt}\frac{d\theta}{dt}sin\phi + 2R\frac{d\theta}{dt}\frac{d\phi}{dt}cos\phi\right]\vec{u}_\theta + \\ & \left[R\frac{d^2\phi}{dt^2} + 2\frac{dR}{dt}\frac{d\phi}{dt} - R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 sin\phi cos\phi\right]\vec{u}_\phi \qquad (19)\end{aligned}$$

Les trois composantes sphériques de l'accélération sont alors :

$$a_R = \frac{d^2R}{dt^2} - R\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 sin^2\phi \equiv \ddot{R} - R\dot{\phi}^2 - \dot{R}\dot{\theta}^2 sin^2\phi$$

$$a_\theta = R\frac{d^2}{dt^2}sin\phi + 2\frac{dR}{dt}\frac{d\theta}{dt}sin\phi + 2R\frac{d\theta}{dt}\frac{d\phi}{dt}cos\phi \equiv R\ddot{\theta}sin\phi + 2\dot{R}\dot{\theta}sin\phi + 2R\dot{\theta}$$

$$a_\phi = R\frac{d^2\phi}{dt^2} + 2\frac{dR}{dt}\frac{d\phi}{dt} - R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 sin\phi cos\phi \equiv R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi} - R\dot{\theta}^2 sin\phi cos\phi$$

Le module du vecteur accélération est

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_R^2 + a_\theta^2 + a_\phi^2}$$

Exple

Le $m^v t$ d'un pt matériel est défini en coordonnées cylindriques par son vecteur position $\vec{OM}$ et l'angle polaire θ comme suit:

$\vec{OM} = a\vec{u}_r + bt\vec{k}$, $\theta = ct^2$ *sachant que* a, b , c *sont des* $Ct^{es} > 0$

1. Calculer la vitesse et l'accélération en fonction du temps,
2. Calculer le rayon de courbure après un tour complet autour de l'axe OZ

Réponse

1. $\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a\vec{u}_r + bt\vec{k}\right) = a\frac{d\vec{u}_r}{dt} + b\vec{k} = a\dot{\theta}\vec{u}_\theta + b\vec{k}$ / $\dot{\theta} = 2ct$

   $\Rightarrow \vec{V} = 2act\vec{u}_\theta + b\vec{k} \quad \rightarrow \left|\vec{V}\right| = \sqrt{4a^2c^2t^2 + b^2}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2act\vec{u}_\theta + b\vec{k}\right) = 2ac\vec{u}_\theta + 2act\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = 2ac\vec{u}_\theta - 2act\dot{\theta}\vec{u}_r$
$\Rightarrow \vec{a} = 2ac\left(\vec{u}_\theta - 2ct^2\vec{u}_r\right) \quad \rightarrow |\vec{a}| = 2ac\sqrt{1+4c^2t^4}$
2. Le temps nécessaire pour que le mobile effectu un tour complet, *i,e.* $\theta = 2\pi$ est $t = \sqrt{\frac{2\pi}{c}}$. Sachant que $\rho = \frac{V^2}{a_N}$, il faut tout d'abord calculer a_N.
On a
$a_N^2 = a^2 - a_T^2 \;/\; a_T = \frac{d\left|\vec{V}\right|}{dt} = \frac{4a^2c^2t}{\sqrt{4a^2c^2t^2+b^2}}$
L'expression finale du rayon de corbure, après avoir remplace la valeur du temps t pour ce tour complet, est :

$$\rho = \frac{\left(8\pi a^2c^2 + b^2\right)^{3/2}}{2ac\sqrt{128a^2c\pi^3 + b^2(1+16\pi^2)}}$$

Préambule

- La notion de $m^v t$ dans l'espace physique est tjrs une *notion relative* : qd on parle de $m^v t$, on pense tjrs à "$m^v t$ pa rapport à un milieu ambiant, $m^v t$ par rapport à un repère donné (c-a-d par rapport à un solide donné)";
- Dans ce qui précède de ce cours, nous avons décrit le $m^v t$ d'une particule par rapport à un référentiel fixe. Les déplacements, vitesses et accélérations ainsi déterminées sont qualifiés d'absolus;
- Mais il n'est pas tjrs pratique d'étudier le $m^v t$ par rapport à un référentiel fixe, de nombreux problèmes pour lesquels l'ananlyse du $m^v t$ est simplifée en utilisant des calculs effectués par rapport à un repère en $m^v t$. Ces calculs, combinés avec le $m^v t$ absolu de ce repère (c-a-d par rapport au repère fixe), nous permettent de déterminer le $m^v t$ absolu en question. *Cette approche est connue sous le nom, analyse par $m^v t$ relatif.*

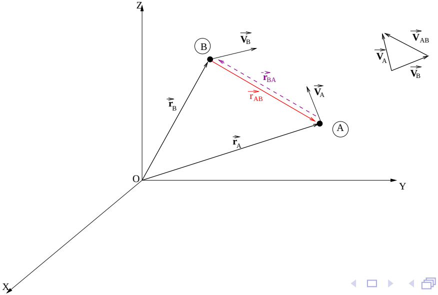
Exple1 : Soit une particule M qui décrit un $m^v t$ circulaire sur une porte d'une pièce donnée alors que quelqu'un ouvre la porte, désignant par :

- $R \equiv$ repère attaché à la pièce (R est donc fixe);
- $R' \equiv$ repère lié à la porte (R' est en $m^v t$ par rapport à R.

Le $m^v t$ de M dans R' est trés simple, le $m^v t$ de R' dans R est simple, alors que le $m^v t$ de M dans R est plus compliqué.

Exple2 : Un autre exple de ce concept est le $m^v t$ d'un paquet laché d'un avion volant à une certaine altitude avec une vitesse constante. Un observateur dans l'avion voit le $m^v t$ du paquet comme une ligne droite: le paquet touchera le sol directement au dessous de l'avion, alors qu'un autre observateur au sol, cependant, voit la trajectoire du paquet comme une parabole exactement comme le $m^v t$ d'un projectile (si l'on suppose que la resistance de l'aire est négligée)

VITESSES RELATIVES DE DEUX MOBILES : Soient A et B deux pts matériels dans le repère R $(OXYZ)$. On suppose la présence d'un observateur au pt O.



On a : $\vec{V}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt}$ et nous définissons la vitesse de A par rapport à B comme étant : $\vec{V}_{AB} = \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}$ tel que : $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$, d'ou
$\vec{V}_{AB} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} - \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$

De même pour B, on a : $\vec{V}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt}$ et comme
$\vec{r}_{BA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \Rightarrow \vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$

Remarquer que $\vec{V}_{AB} = -\vec{V}_{BA} \Rightarrow \vec{V}_{AB}$ *et* $\vec{V}_{BA}$ ont le même module mais de sens opposés.

On obtient les deux accélérations relatives des deux pts matériels en dérivant les expressions des vitesses:
$\vec{a}_{AB} = \frac{d\vec{V}_{AB}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_A - \vec{V}_B\right) = \frac{d\vec{V}_A}{dt} - \frac{d\vec{V}_B}{dt} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$ similairement on trouve : $\vec{a}_{BA} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$

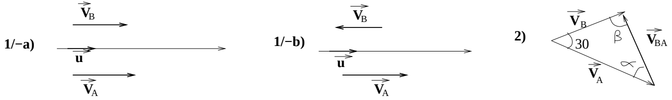
Exple : **1.** Deux voitures A et B roulent dans deux voies d'une autoroute rectiligne avec les vitesse respectives de 110 km/h et 90 km/h. Calculer la vitesse relative de A par rapport à B dans les deux cas suivants:

a/ les deux voitures roulent dans la même direction;

b/ les deux voiture roulent en sens inverses.

2. Les deux voitures divergent maintenant l'une de l'autre en roulant sur deux routes faisant entre elles un agnle de 30^o. Calculer la vitesse relative de B par rapport à A.

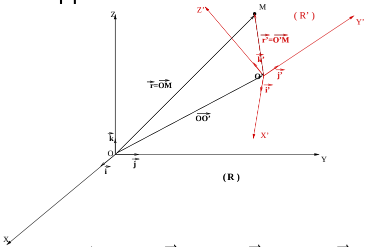
Réponse : **1.a/** on a $\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B = 110\ \vec{u} - 90\ \vec{u} = 20\ \vec{u}$
$\Rightarrow V_{AB} = 20\ m/s$
1.b/ on a $\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B = 110\ \vec{u} - (-90\ \vec{u}) = 200\ \vec{u}$
$\Rightarrow V_{AB} = 200\ m/s$
2. $\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A \Rightarrow |V_{BA}| = \sqrt{V_B^2 + V_A^2 - 2V_B V_A cos30} = 55.25\ km/h$
La loi des sinus nous permet de déterminer α (l'étudiant doit le retrouver), $\alpha = 54.5^o$ et par la suite $\beta = 95.4^o$. Cela veut dire que l'automobiliste A voit la voitue B rouler à sa gauche sous un angle de 54.5^o et à la vitesse de $55.25\ km/h$.Quant au l'automobiliste B, il voit la voiture A rouler à sa droite avec la vitesse de $55.25\ km/h$, mais sous un angle de 95.4^o



Nous venons de voir comment calculer la vitesse d'un mobile par rapport à un autre, les deux mobiles étant liés au même repère. Dans ce suit, nous considérons le cas où les deux observateurs son liés à deux repères différents, dont l'un est en $m^v t$ par rapport à l'autre.

CONVENTIONS ET SYMBOLES Soient R et R' deux repères (*cf figure ci-dessous*)et M un point matériel en $m^v t$:

- R c'est le repère *absolu* que nous considérons comme fixe;
- R' c'est le rpère *relatif* qui est en $m^v t$ par rapport à R;
- M est en $m^v t$ par rapport à R et R'



ÉTUDE DE LA VITESSE : $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M} = \vec{OO'} + x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}$

$$\vec{V} = \underbrace{\frac{d\vec{OM}}{dt}}_{\vec{V}_a} = \underbrace{\frac{d\vec{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}}_{\vec{V}_e} + \underbrace{\frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}}_{\vec{V}_r}$$

Soit

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \tag{20}$$

La relation (20) qui lie les trois vitesses, s'appelle : loi de composition des vitesses, avec :

- $\vec{V}_a$: La vitesse *absolue*, c'est la vitesse de M / à R;
- $\vec{V}_e$: La vitesse d'*entraînement*, c'est la vitesse de R' / à R;
- $\vec{V}_r$: La vitesse *relative*, c'est la vitesse de M / à R'.

Remarque :

- si R' est fixe / à $R \Rightarrow \vec{V}_e = \vec{0} \rightarrow \vec{V}_a = \vec{V}_r$
- si R' est en $m^v t$ de translation / à R, c-a-d $\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}$ changent pas leur directions $\rightarrow \frac{d\vec{i'}}{dt} = \frac{d\vec{j'}}{dt} = \frac{d\vec{k'}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_e = \frac{d\vec{OO'}}{dt}$

ÉTUDE DE L'ACCÉLÉRATION : Pour trouver $\vec{a}_a$ on va dériver $\vec{V}_a$, $\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$, en ordonnant après avoir dériver pour trouver :

$$\vec{a}_a = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \underbrace{\frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} + x^{'}\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + y^{'}\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + z^{'}\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}}_{\vec{a_e}}$$

$$+ \underbrace{\frac{d^2x^{'}}{dt^2}\vec{i'} + \frac{d^2y^{'}}{dt^2}\vec{j'} + \frac{d^2z^{'}}{dt}\vec{k'}}_{\vec{a_r}} + \underbrace{2\left[\frac{dx^{'}}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy^{'}}{dt}\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz^{'}}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt}\right]}_{\vec{a_c}} \qquad (20\ bis)$$

- $\vec{a}_a$: Accélération *absolue*, c'est l'accélération de M / à R ;
- $\vec{a}_e$: Accélération d'*entraînement*, c'est l'accélération de R' / à R ;
- $\vec{a}_r$: Accélération *relative*, c'est l'accélération de M / à R' ;
- $\vec{a}_c$: Accélération complémentaire ou de *Coriolis*.

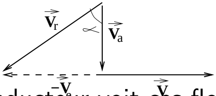
$\vec{a}_c$ s'annule lorsque : $\begin{cases} M \ est \ fixe \ / \ R' \ : \ \frac{dx'}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dz'}{dt} = 0 \\ R' \ est \ en \ translation \ / \ R \ : \frac{d\vec{i'}}{dt} = \frac{d\vec{j'}}{dt} = \frac{d\vec{k'}}{dt} = 0 \end{cases}$

EXPLE3 : Des flocons de neige tombent verticalement avec une vitesse de 8 m/s. Avec quelle vitesse frappent-ils le par-brise d'une voiture roulant avec une vitesse de 50 km/h

RÉPONSE Tout d'abord, identifiant les trois vitesses:

- $\vec{V}_a \equiv$ Vitesse absolue : la vitesse des flocons / au sol ;
- $\vec{V}_e \equiv$ Vitesse d'entraînement : la vitesse de la voiture / au sol;
- $\vec{V}_r \equiv$ Vitesse relative (*recherchée*) : la vitesse des flocons / au véhicule.

On a d'après (20) : $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \Rightarrow \vec{V}_r = \vec{V}_a - \vec{V}_e = \vec{V}_a + (-\vec{V}_e)$, ce qui nous donne (voire figure ci-après) : $\left|\vec{V}_r\right| = \sqrt{V_a^2 + V_e^2} = 16.02 \ m/s$



L'angle α sous lequel le conducteur voit ces flocons frappent le par-brise est, tel que $tg\alpha = \frac{V_e}{V_a} \rightarrow \alpha \approx 60^o$

EXPLE3 un bateau prend la mer en direction du nord $N60W$ à la vitesse de 4 Km/h par rapport à l'eau. La direction du courant d'eau est tel que le $m^v t$ résultant par rapport à la terre s'effectue dans la direction de l'ouest à la vitesse de 5 km/h. Calculer la vitesse et la direction du courant par rapport au sol.

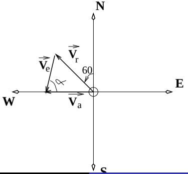
RÉPONSE D'après l'énoncé on demande $\vec{V}_e \equiv$ vitesse du courant / au sol.

- $\vec{V}_a \equiv$ vitesse du bateau /au sol, $V_a = 5\ km/h$;
- $\vec{V}_r \equiv$ vitesse du bateau / à l'eau, $V_r = 4\ km/h$.

D'après l'éqt (20) on a :

$\vec{V}_e = \vec{V}_a - \vec{V}_r \rightarrow V_e = \sqrt{V_a^2 + V_r^2 - 2V_aV_r cos30} = 2.52\ m/s$ et

$\alpha = 23.6^o$



Cas où R' est en rotation uniforme par rapport à R

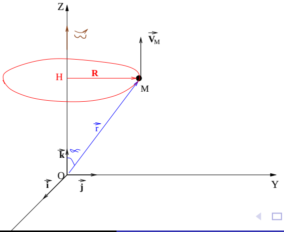
Relation entre la vitesse linéaire et angulaire $\left(\vec{V} \ et \ \vec{\omega}\right)$

Considérons le cas d'un $m^v t$ circulaire d'une particule M comme montré sur la figure ci-dessous.Dans cette figure, les paramètres de ce $m^v t$ sont:

- $\vec{r}$ est le vecteur position;
- $\vec{V}_M$ étant le vecteur vitesse du mobile, $\vec{V}_M = \frac{d\vec{r}}{dt}$;
- R est le rayon du cercle dont lequel s'effectu le $m^v t$;
- ω est la vitesse angulaire, $V_M = \omega R$

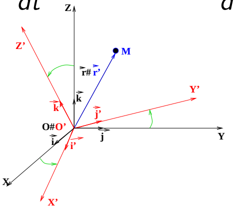
Dans le triagnle OMH on a : $R = rsin\alpha$, on peut écrire $V_M = \omega rsin\alpha \rightarrow$ $\vec{V}_M = \omega \times \vec{r}$, soit alors :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \omega \times \vec{r} \qquad (21)$$



D'autres part les extrimités des vecteurs $\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}$ effectuent un $m^v t$ circulaire uniforme / à O avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$. En d'autre terme le rapport $\frac{d\vec{i'}}{dt}$ représente la vitesse d'un pt situé à une distance ègale à l'unité de O et se déplace avec un $m^v t$ circulaire uniforme à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$, idem pour $\frac{d\vec{j'}}{dt}$ et $\frac{d\vec{k'}}{dt}$. On a donc par analogie avec l'éqt (21)

$$\frac{d\vec{i'}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i'} \quad \& \quad \frac{d\vec{j'}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j'} \quad \& \quad \frac{d\vec{k'}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k'} \tag{22}$$



Relation entre les vitesses

Considérons l'expression de la vitesse d'ntraînement figurant dans l'éqt (20), on a :

$\vec{V}_e = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + x' \frac{d\vec{i'}}{dt} + y' \frac{d\vec{j'}}{dt} + z' \frac{d\vec{k'}}{dt} = x' \frac{d\vec{i'}}{dt} + y' \frac{d\vec{j'}}{dt} + z' \frac{d\vec{k'}}{dt}$ (car $\frac{d\vec{OO'}}{dt} = \vec{0}$, O' est confondu avec $O \rightarrow \vec{r'} \equiv \vec{r}$).

Utilisant les relations (22) pour transformer $x^{'}\frac{d\vec{i^{'}}}{dt}+y^{'}\frac{d\vec{j^{'}}}{dt}+z^{'}\frac{d\vec{k^{'}}}{dt}$ en $x^{'}\vec{\omega}\times\vec{i^{'}}+y^{'}\vec{\omega}\times\vec{j^{'}}+z^{'}\vec{\omega}\times\vec{k^{'}}=\vec{\omega}\times\left(x^{'}\vec{i^{'}}+y^{'}d\vec{j^{'}}+z^{'}\vec{k^{'}}\right)=\vec{\omega}\times\vec{r'}$
Léqt (20) se transforme donc comme suit:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r+\vec{\omega}\times\vec{r'} \tag{23}$$

Qui exprime la relation entre les vitesses du pt M, mesurées par les deux observateurs qui sont en $m^{v}t$ relatif de rotation.

Relation entre les accélérations

A présent intéressant nous à l'éqt (20 *bis*) et commençant par transformation de l'expression de l'accélération de Coriolis, on a :
$\vec{a}_c=2\left[\frac{dx^{'}}{dt}\frac{d\vec{i^{'}}}{dt}+\frac{dy^{'}}{dt}\frac{d\vec{j^{'}}}{dt}+\frac{dz^{'}}{dt}\frac{d\vec{i^{'}}}{dt}\right]$, or $\frac{d\vec{i^{'}}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{i'}$, idem pour $\frac{d\vec{j^{'}}}{dt}$ et $\frac{d\vec{k^{'}}}{dt}$,
d'ou $\vec{a}_c=2\left[\frac{dx^{'}}{dt}\left(\vec{\omega}\times\vec{i'}\right)+\frac{dy^{'}}{dt}\left(\vec{\omega}\times\vec{j^{'}}\right)+\frac{dz^{'}}{dt}\left(\vec{\omega}\times\vec{k^{'}}\right)\right]=$
$2\vec{\omega}\times\left(\frac{dx^{'}}{dt}\vec{i^{'}}+\frac{dy^{'}}{dt}\vec{j^{'}}+\frac{dz^{'}}{dt}\vec{k^{'}}\right)$, et l'expresion finale de l'accéléation de Coriolis devient :

$$\vec{a}_c=2\,\vec{\omega}\times\vec{V}_r$$

Pour en ce qui concerne l'accélération d'entraînement, en applique les mêms opérations. De sorte que,

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2} = x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}$$

et comme $\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{i'}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{i'}\right)$, tenant compte aussi du fait que $\vec{\omega} = Ct^e$ (rotation uniforme) $\rightarrow \frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{i'}}{dt}$, à ce stade nous utilisons les résultats de l'éqt (22) pour ibtenir finalement :

$$\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{i'}\right)$$

De même, on aura des résultats pareils pour $\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2}$ *et* $\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}$, il suffit de remplacer $\vec{i'}$ respectivement par $\vec{j'}$ et $\vec{k'}$ dans l'expression précedente.

$$\Rightarrow x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2} =$$

$$x'\,\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{i'}\right) + y'\,\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{j'}\right) + z'\,\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{k'}\right)$$

$$= \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times x'\vec{i'}\right) + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times y'\vec{j'}\right) + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times z'\vec{k'}\right) = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r'}\right)$$

L'expression finale de l'accélération d'entrînement devient :

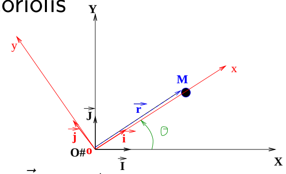
$$\vec{a}_e = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r'}\right)$$

d'ou l'expression finale de l'accélération absolue dans le cas où les deus repères sont en rotation uniforme l'un par rapport à l'autre,

$$\vec{a}_a = \underbrace{\vec{a}_r}_{acc\ relative} + \underbrace{\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r'}\right)}_{acc\ centripete} + \underbrace{2\left(\vec{\omega} \times \vec{V}_r\right)}_{acc\ de\ Coriolis} \qquad (24)$$

EXPLE 4: On considère dans le repère OXY le système de deux axes oxy en rotation unifome autour de l'axe Z. Un pt M se déplace sur l'axe ox, sa position est définie par $\vec{r} = \vec{OM}$. Déterminer :

1. La vitesse et l'accélération relatives du pt M;
2. La vitesse et l'accélération d'entraînement;
3. L'accéléraion de Coriolis



RÉPONSE

1. $\vec{V}_r = \frac{d\vec{oM}}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r'}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (car dans cet exple $o \equiv O \rightarrow \vec{oM} = \vec{OM} \Rightarrow \vec{r'} = \vec{r}$, soit alors $\vec{V}_r = \dot{r}\vec{i}$ et par suite $\vec{a}_r = \ddot{r}\vec{i}$

2. $\vec{V}_e = \vec{\omega} \times \vec{r'} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ avec $\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \dot{\theta}\vec{k} \rightarrow \vec{V}_e = \dot{\theta}\vec{k} \times r\vec{i}$

ce qui donne $\vec{V}_e = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = r\dot{\theta}\vec{j}$, et $\vec{a}_e = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \dot{\theta}\vec{k} \times r\dot{\theta}\vec{j}$

$$\Rightarrow \vec{a}_e = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ 0 & r\dot{\theta} & 0 \end{vmatrix} = -r\dot{\theta}^2\vec{i}$$

3. $\vec{a}_c = 2\left(\vec{\omega} \times \vec{V}_r\right) = 2\left(\dot{\theta}\vec{k} \times \dot{r}\vec{i}\right) = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ \dot{r} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{j}$