

Physique et Mathématiques

Marc ATTEIA

2 juillet 2015

Préface

1. Physique et Mathématiques.

Entre Physique et Mathématiques est inscrit dans les cursus scolaires et universitaires un clivage marqué qui est justifié par le fait que Physique et Mathématiques opèrent dans des domaines de recherche distincts et font appel à des dispositions intellectuelles différentes.

Le physicien s'intéresse aux lois qui gouvernent la matière inerte. Pour "découvrir" ces lois, il utilise des appareillages expérimentaux qu'il a conçus et construits. Comme il use de la symbolique mathématique dans ses calculs, il ne considère, le plus souvent, les mathématiques que comme une "boîte à outils" performante.

De son côté, le mathématicien développe ses recherches dans un univers abstrait, sans relation *a priori* avec l'univers concret du physicien. Ainsi, certains mathématiciens enveloppent-ils leur discipline d'une aura de "pureté" et la placent au-dessus de toutes les autres disciplines scientifiques.

Le clivage entre Physique et Mathématiques est accentué par le fait que les intuitions du physicien ne sont validées que par le recours à l'expérience tandis que celles du mathématicien ne le sont que par des preuves théoriques rigoureuses. Pourtant, comme l'attestent les travaux de plusieurs chercheurs éminents en Physique et Mathématiques, ces deux disciplines ont entre elles un lien étroit. Einstein, dans son livre *La théorie de la Relativité générale et généralisée, la Relativité et le problème de l'espace*, (Gauthiers-Villars, 1954) écrivait : "Comment se fait-il que la mathématique, qui est un produit de la pensée humaine et indépendante de toute expérience, s'adapte de si admirable manière aux objets de la réalité ? La raison humaine serait-elle donc capable, sans avoir recours à l'expérience, de découvrir par son activité seule, les propriétés des objets réels ?"

Dans la Préface à son livre intitulé *À la découverte des lois de l'Univers* (Odile Jacob, 2004), Roger Penrose écrit : "[...] Dans beaucoup de progrès récents, l'un des éléments essentiels en est l'esthétisme mathématique, sa beauté, sa pertinence et son raffinement. De toute évidence, ces influences mathématiques peuvent se révéler d'une importance capitale, comme ce fut le cas pour la majorité des exploits extraordinaires de la Physique du XX^e siècle, l'équation de Dirac pour l'électron, la mécanique quantique et la relativité générale d'Einstein. Mais dans tous les cas, ce

sont des considérations physiques - émanant en définitives de nos observations - qui définissent les principaux critères pour l'acceptation de ces théories."

C'est ainsi que j'ai rédigé mon livre avec les deux objectifs que j'explicité ci-dessous.

2. Premier objectif.

Mettre en évidence les liens entre Physique et Mathématiques dans l'enseignement universitaire a été mon premier objectif. Pour cela,

- (i) Dans la première partie de mon livre, je présente un panorama de la Physique générale - classique, relativiste, quantique (Cf. le sommaire ci-dessus) - telle qu'on l'enseigne aujourd'hui. (On pourra discerner, dans cet exposé, en filigrane, la volonté du physicien d'unifier les principaux champs de la Physique à partir de quelques concepts peu nombreux).
- (ii) Dans la seconde partie de mon livre, je développe le discours mathématique qui, je l'espère, devrait permettre au physicien de fonder son étude sur un socle ferme, de déterminer avec précision et rigueur les domaines de validité des formalisme qu'il utilise. Je voudrai convaincre aussi mon lecteur que l'abstraction mathématique, en relation avec la Physique, ne relève pas d'une pathologie propre au mathématicien mais que, plus la Physique s'enfoncé dans les profondeurs de la matière, plus, nécessairement les mathématiques qui la fondent sont abstraites.
- (iii) J'insiste plus particulièrement, sur le rôle majeur joué en Physique par les notions (concepts) d'espaces fonctionnels, de dualité, d'espace de Hilbert, de noyau d'espace de Hilbert.

3. Second objectif.

Mon second objectif est de mettre en exergue la notion de *modélisation mathématique*, qui joue un rôle si important aujourd'hui, dans notre société technoscientiste. Galilée, dans un passage (bien connu) de l'*Essayeur*, écrivait, en 1623 : " La philosophie est écrite dans cet immense livre qui se tient toujours devant nos yeux, je veux dire l'Univers, mais on ne peut le comprendre si l'on ne s'applique d'abord à en comprendre la langue et à en connaître les caractères avec lesquels il est écrit. Il est écrit avec la langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques sans le moyen desquels il est humainement impossible d'en comprendre un mot. Sans eux, c'est une errance vaine dans un labyrinthe inconnu.

Aujourd'hui, la modélisation mathématique du réel qui a débuté par la Physique est l'outil essentiel de l'innovation technique. Mais je voudrai, cependant, avant de terminer, faire remarquer que :

- (i) La modélisation mathématique des activités humaines, utilisées par les praticiens des sciences humaines est loin d'être aussi fiable que celle qui est mise en œuvre en Physique, car les activités humaines, au contraire de la Physique, dépendent d'un très grand nombre de paramètres essentiels.
- (ii) Un même phénomène physique, suivant le niveau d'exploitation du Réel où l'on se situe, peut être modélisé par différents modèles mathématiques efficaces. Il en résulte que le discours mathématique ne recèle aucune Vérité transcendante en soi, qui sacrifierai le discours de la Physique.

1	Notions fondamentales.	1
1.1	Généalogie de l'espace.	1
1.2	L'espace.	1
1.2.1	La notion de temps en Physique.	3
1.2.2	Le réglage des horloges.	3
1.2.3	L'évolution de la notion de temps.	4
1.2.4	Modèle mathématique du temps.	4
1.3	Vitesse et accélération.	4
1.3.1	La notion physique de vitesse.	4
1.3.2	Définition mathématique de la vitesse.	5
1.3.3	Définition mathématique de l'accélération.	6
1.4	Force, masse et énergie mécanique.	6
1.4.1	Notions de force et de masse.	6
1.4.2	L'énergie mécanique.	7
1.4.3	Energie potentielle et énergie cinétique.	7
1.4.4	Mécanique rationnelle et Géométrie.	8
1.5	La notion de champ.	8
1.6	L'énergie calorifique.	9
1.6.1	Les premiers pas de la thermodynamique.	9
1.6.2	La thermodynamique statistique. L'introduction du hasard en Physique.	9
1.7	L'atome.	9
1.7.1	Le plus petit "grain" de matière insécable	9
1.7.2	L'atome, une boîte "noire".	9
1.7.3	Bombarder pour voir. La balistique quantique.	10
1.8	La représentation du monde subatomique par la Physique quantique.	10
1.8.1	Physique classique et physique quantique.	10
1.8.2	Physique et Mathématiques.	11
1.8.3	Déterminisme et Hasard.	11
1.9	Vers la Cosmologie quantique.	12
1.10	La Physique, les Mathématiques et nous.	12

2	Modèle mathématique de l'espace-temps.	13
2.1	Un modèle de l'espace à trois dimensions	13
2.2	Courbes et surfaces dans \mathbb{R}^3	14
2.2.1	Courbes dans \mathbb{R}^3	14
2.2.2	Surfaces dans \mathbb{R}^3	14
2.3	Tangentes. Plans tangents. Normales.	14
2.3.1	Tangente et plan normal à une courbe dans \mathbb{R}^3	14
2.3.2	Plan tangent et normale à une surface dans \mathbb{R}^3	15
2.4	Orientation des courbes et surfaces dans \mathbb{R}^3	15
2.4.1	Orientation des courbes paramétrées dans \mathbb{R}^3	15
2.4.2	Orientation des surfaces paramétrées dans \mathbb{R}^3	16
2.5	Intégration sur des courbes et des surfaces contenues dans \mathbb{R}^3	17
2.5.1	Intégration sur une courbe paramétrée contenue dans \mathbb{R}^3	17
2.5.2	Circulation d'un champ vectoriel sur une courbe paramétrée contenue dans \mathbb{R}^3	18
2.5.3	Intégration sur une surface paramétrée contenue dans \mathbb{R}^3	19
2.5.4	Flux d'un champ vectoriel à travers une surface paramétrée dans \mathbb{R}^3	19
3	P3 Électromagnétisme.	21
3.1	Généalogie de l'électromagnétisme.	21
3.2	Les fondements de l'électrostatique.	21
3.2.1	La charge électrique.	21
3.2.2	La charge électrique ponctuelle.	22
3.2.3	La loi de Coulomb.	22
3.2.4	Quantification de la charge électrique.	23
3.2.5	Distribution électriques linéiques, surfaciques, volumiques.	23
3.3	Champ de forces électrostatiques.	23
3.3.1	Définition.	23
3.3.2	Champ électrostatique créé par une distribution de charges électriques.	24
3.4	Potentiel électrostatique.	24
3.4.1	Définition.	24
3.4.2	Potentiel électrostatique créé par une distribution de charges électriques.	25
3.4.3	Equipotentielles électrostatiques.	25
3.4.4	Champ et potentiel électrostatiques créés par un dipôle électrique.	25
3.5	Le théorème de Gauss.	26
3.6	Equilibre électrostatique.	27
3.6.1	Capacité d'un conducteur.	27
3.6.2	Système de n conducteurs en équilibre électrostatique.	28
3.6.3	Condensateurs chargés électriquement	28
3.7	Le courant électrique.	28
3.8	Charge électrique moyenne. Densité de charge électrique.	28
3.8.1	Définitions.	29
3.8.2	Densité de charge électrique.	30
3.9	Densité et intensité du courant électrique.	30
3.10	Bilan de charge.	32
3.11	Puissance électrique.	33
3.12	Puissance reçue par un dipôle électrocinétique.	33

3.13	Loi d'Ohm.	34
3.13.1	Loi d'Ohm locale et conductivité.	34
3.13.2	Loi d'Ohm intégrale. Résistance en régime stationnaire.	34
3.14	Effet Joule.	35
3.15	Champ magnétique créé par une charge électrique en mouvement.	36
3.16	Champ magnétique créé par un courant stationnaire.	36
3.16.1	La loi de Biot et Savart.	36
3.16.2	Le flux magnétique est conservatif.	36
3.16.3	Le potentiel vecteur.	37
3.17	Les lois de Faraday et de Lenz.	37
3.18	La force de Lorentz.	39
3.19	Les équations de Maxwell dans le vide.	40
3.20	Ondes électromagnétiques dans le vide.	41
3.20.1	Equations de propagation des champs électriques et magnétiques dans le vide.	41
3.20.2	Equations de propagation du potentiel électromagnétique.	42
3.21	Energie d'un champ électromagnétique dans le vide.	42
3.22	Equations de Maxwell dans un milieu matériel.	43
4	P4 Mécanique.	45
4.1	Introduction.	45
4.2	La loi de la gravitation universelle (Newton 1687)	45
4.2.1	Enoncé.	45
4.2.2	Champ et potentiel gravitationnels.	46
4.3	La loi fondamentale de la Dynamique.	47
4.3.1	Notions de base.	47
4.3.2	Enoncé de la loi fondamentale de la Dynamique (deuxième loi de Newton).	47
4.4	Mouvement à une dimension.	48
4.4.1	Chute libre sans frottement.	48
4.4.2	Fusée lancée verticalement. Problème avec conditions initiales.	48
4.4.3	Fusée lancée verticalement. Problème avec conditions aux limites.	48
4.5	Mouvement à deux dimensions. Lancement d'un projectile dans un plan vertical.	49
4.5.1	Problème avec conditions initiales.	49
4.5.2	Problème avec conditions aux limites.	49
4.6	Sur le calcul du noyau de Green.	50
4.7	Mouvements pendulaires périodiques.	51
4.7.1	Mouvement d'un pendule élastique sur une droite horizontale.	51
4.7.2	Mouvement d'un pendule sur un cercle.	53
4.7.3	Noyaux de Green.	54
4.8	Formulation variationnelle de la loi fondamentale de la Dynamique dans le cas d'une dimension.	55
4.9	Méthodes de résolution approchées de Π_1 et Π_2	55
4.9.1	Résolution approchée de Π_1 par la méthode des différences finies.	55
4.9.2	Résolution approchée de Π_2 par la méthode des éléments finis.	55
4.10	Mécanique du solide. Système d'équations de l'élasticité linéarisée.	56
4.11	Mécanique des fluides. Système de Stokes.	59

5	P5 Optique.	61
5.1	Principes fondamentaux.	61
5.1.1	Premier principe.	61
5.1.2	Chemin optique.	61
5.1.3	Deuxième principe (Principe de Fermat).	61
5.2	Réflexion d'un rayon lumineux.	62
5.2.1	Réflexion sur un miroir plan.	62
5.2.2	Réflexion sur un miroir sphérique concave.	62
5.2.3	Enveloppe du rayon réfléchi dans la réflexion sur un miroir sphérique concave	63
5.3	Réfraction.	65
5.3.1	Réfraction sur une surface plane. Loi de Snell-Descartes.	65
5.3.2	Réfraction sur une surface régulière.	65
5.4	L'équation fondamentale de l'Optique géométrique. Analogie avec la Mécanique.	67
5.4.1	Premier cas.	67
5.4.2	Deuxième cas.	69
5.5	Franges de diffraction ou d'interférences.	70
5.6	Le principe de Huyghens.	70
5.6.1	Enoncé du principe de Huyghens.	70
6	P6 Thermodynamique.	71
6.1	Généalogie de la thermodynamique.	71
6.2	Systèmes thermodynamiques.	72
6.3	Variables d'état d'un système thermodynamique.	72
6.4	Etat d'équilibre d'un système thermodynamique. Principe zéro.	72
6.5	Variables extensives et intensives.	73
6.6	Température Celsius et température absolue.	73
6.7	Vers l'équation d'état d'un gaz parfait.	74
6.8	L'équation d'état d'un gaz parfait.	74
6.9	Les trois premiers principes de la Thermodynamique.	75
6.9.1	Enoncé du premier principe	75
6.9.2	Enoncé du deuxième principe	75
6.9.3	Enoncés équivalents au deuxième principe	76
6.9.4	Enoncé du troisième principe.	76
6.10	La transformation de Legendre.	76
6.10.1	La transformée de Legendre d'une fonction d'une variable réelle.	76
6.10.2	Un cas particulier important : le cas convexe.	77
6.10.3	La transformée de Legendre d'une fonction de plusieurs variables réelles. .	77
6.10.4	Transformée de Legendre partielle.	77
6.11	Potentiels thermodynamiques.	78
6.11.1	Applications.	78
6.11.2	La relation de Gibbs-Duhem.	79
6.12	La théorie cinétique des gaz parfaits de Maxwell.	82
6.13	La Thermodynamique statistique de Boltzmann.	83
6.13.1	Sur la Physique statistique.	83
6.13.2	La loi de Boltzmann. Application.	83

7	P7 La Relativité.	87
7.1	Généalogie de la Relativité	87
7.2	L'espace-temps.	88
7.3	Retour sur la loi fondamentale de la dynamique. Un mouvement comme nul.	88
7.4	L'expérience de Michelson et Morley (M.M) et ses conséquences.	90
7.5	Le principe de relativité d'Einstein.	90
7.6	La transformation de Lorentz et la théorie de la Relativité restreinte.	91
7.6.1	Le cadre de la Relativité restreinte.	91
7.6.2	La transformation de Lorentz.	92
7.6.3	La transformation de Lorentz réduite.	93
7.6.4	Propriétés de $\mathbf{A}(\lambda)$ et $\mathbf{B}(\lambda)$ lorsque $ \lambda < 1$	94
7.7	Premières conséquences de la Relativité resreinte.	95
7.7.1	Relativité de la simultanéité de deux événements.	95
7.7.2	Relativité de la localisation de deux événements.	95
7.7.3	Relativité de la longueur d'une règle.	96
7.7.4	Temps propre	96
7.7.5	Transformation de la vitesse.	96
7.8	Détermination de la transformation de Lorentz réduite abstraite.	97
7.8.1	Un semi-groupe multiplicatif d'applications linéaires.	97
7.8.2	Conditions pour que $\{\mathbf{G}(\rho); \rho < \mathbf{a}\}$ soit un semi-groupe multiplicatif	97
7.8.3	Conditions déduites de la relation de symétrie.	98
7.8.4	Explicitation de $\tilde{\gamma}(\rho)$ et de $\mathbf{B}(\rho)$	99
7.9	La géométrie de Minkowski.	101
7.9.1	La transformation $\mathbb{T}(\rho, K)$	101
7.9.2	Géométrie de Minkowski.	101
7.10	Le cône de lumière.	102
7.11	Dynamique relativiste du point dans l'espace-temps de Minkowski	102
7.11.1	Rappels.	102
7.11.2	Temps propre élémentaire d'une particule.	103
7.11.3	Quadrivecteurs	104
7.12	Equations de Maxwell et Relativité	106
7.12.1	Rappels sur les équations de Maxwell.	106
7.12.2	Transformation du d'alembertien.	107
7.12.3	Transformation de ρ et J	108
7.12.4	Transformation des équations de Maxwell.	109
7.13	Equivalence entre la masse grave et la masse inerte.	111
7.14	Equivalence locale entre champ de gravitation et champ d'accélération.	111
7.15	Champ de gravitation et Géométrie	112
7.15.1	Métrique associée localement à un champ de gravitation.	112
7.15.2	L'espace-temps de la Relativité générale est une variété à quatre dimensions.	113
7.16	La métrique (statique) de Schwarzschild.	114
7.17	Généalogie du progrès.	114
7.18	Retour sur la notion de mesure en physique.	116
7.19	Ensembles S-invariants et dimension de Minkowski.	116
7.19.1	Ensembles S-invariants.	116
7.19.2	Dimension de Minkowski	118

7.20	Dimension fractale et relativité d'échelle	119
7.21	Relativité d'échelle	120
7.21.1	Composition des vitesses.	120
7.21.2	Formules de type lorentzien	121
8	P8. La radioactivité.	123
8.1	La découverte de la radioactivité.	123
8.2	La nature du rayonnement radioactif.	123
8.3	La composition du rayonnement radioactif.	124
8.4	Les premiers modèles de l'atome.	124
8.5	Étrangeté du monde subatomique.	125
8.6	Le monde des particules.	127
8.7	Les forces / interactions nucléaires. Un pas de plus dans un monde étrange. . . .	129
9	De la Mécanique classique à la Mécanique quantique.	133
9.1	L'équation eïkonale en optique géométrique.	133
9.2	L'équation de Hamilton-Jacobi en mécanique analytique.	134
9.3	Passage de la Mécanique classique à la Mécanique ondulatoire.	136
9.4	La fonction d'onde en Mécanique quantique.	137
9.4.1	137
9.4.2	Analogie entre la phase et l'action.	138
10	Modélisation mathématique de la théorie atomique.	141
10.1	Introduction.	141
10.2	La fonction d'onde.	141
10.3	Systèmes et états quantiques.	142
10.4	Grandeurs physiques et observables.	143
10.4.1	L'observable A	143
10.4.2	Représentation de l'observable A	144
10.5	Les observables Q et P	145
10.5.1	L'observable Q	145
10.5.2	L'observable P	145
10.5.3	La relation d'incertitude de Heisenberg.	147
10.5.4	Relations de commutation.	147
10.5.5	Représentations de Q et P	147
10.6	Evolution d'un système quantique en Mécanique quantique non relativiste en l'absence de spin.148	
10.6.1	Postulat 4 (Equation de Schrödinger non relativiste) :	148
10.6.2	La relation d'Ehrenfest :	148
10.7	L'observable associée au moment cinétique.	149
10.7.1	L'observable L	149
10.7.2	Relations entre L_1, L_2, L_3	149
10.7.3	Valeurs propres de \mathcal{L}^2 et L_3	150
10.8	Spin et spineur.	150
10.8.1	L'expérience de Stern et Gerlach (1922).	150
10.9	Algèbre de Clifford. Matrices de Dirac.	150
10.9.1	Application de Clifford.	150

10.9.2	Algèbre de Clifford	152
10.10	Spineurs	154
10.11	L'interprétation de L. Schwartz.	155
10.12	n - systèmes quantiques. Bosons et fermions. Espaces de Fock.	156
10.12.1	Produit tensoriels d'espaces (pré-)hilbertiens.	156
10.12.2	n -systèmes quantiques.	156
10.12.3	Produits tensoriels symétriques et antisymétriques.	156
10.12.4	Bosons et fermions.	157
10.12.5	Opérateurs de création et d'annihilation.	158
10.12.6	Espaces de Fock.	158
10.12.7	Retour sur l'Optique ondulatoire.	160
10.12.8	Les postulats de Feynman.	160
10.12.9	Approximation de $G_\gamma(A', A)$	161
10.13	De Schrödinger à Feynman. Définition et propriétés du propagateur d'un système quantique. 16	160
11	P11 Invariants	165
11.1	Premier cas : espace homogène.	165
11.2	Deuxième cas : temps homogène.	166
11.3	Troisième cas : espace isotrope.	166
11.4	Cas général : Le théorème d'Emily Nöther.	166
11.5	Opérateur unitaire.	167
11.5.1	Définition et premières propriétés.	167
11.5.2	Extension.	167
11.6	Générateurs.	167
11.6.1	Un résultat préliminaire.	167
11.6.2	Générateur d'une translation spatiale.	168
11.6.3	Générateur d'une translation temporelle.	169
11.6.4	Générateur d'une rotation spatiale.	169
11.7	Opérateurs anti-unitaires.	170
11.7.1	Définition et premières propriétés.	170
11.7.2	L'opérateur de renversement du temps.	170
12	P 12 Principe de "moins action".	173
12.1	Le principe de moins action en Mécanique.	173
12.1.1	Notations.	173
12.1.2	Enoncé du Principe de moins action (P.M.A.) en Mécanique.	173
12.1.3	Calcul du gradient de S	173
12.1.4	Equation (s) d'Euler-Lagrange.	174
12.2	Dualité. Lagrangien et hamiltonien.	175
12.2.1	La duale de S	175
12.2.2	Lagrangien et hamiltonien.	175
12.2.3	Explicitation de S^* relativement à une trajectoire réelle x_0	175
12.2.4	Equations de Hamilton.	176
12.2.5	Equation de Hamilton-Jacobi.	177
12.2.6	Equivalence entre les équations de Hamilton et l'équation de Hamilton-Jacobi. 178	178
12.2.7	Etude d'un système mécanique fermé. Lois de conservation.	180

12.3	Un exemple élémentaire. Mouvement d'un point matériel dans \mathbb{R}^3	182
12.4	Mécanique et Optique. De l'action à la phase.	185
12.4.1	Mécanique newtonnienne et optique géométrique.	185
13 M 1	Notions élémentaires.	189
13.1	Groupes. Anneaux. Corps.	189
13.2	(Rappels) sur les espaces vectoriels.	190
13.2.1	Espaces normés. Espaces préhilbertiens.	191
13.2.2	Complétion d'un espace normé.	192
13.2.3	Continuité.	192
13.2.4	Dualité	193
13.2.5	Bases.	194
13.3	Complément. Espace vectoriel topologique (localement convexe).	195
13.4	Algèbre. Notions élémentaires.	196
14 M 2	Éléments de calcul différentiel.	199
14.1	A. Point de vue analytique.	199
14.1.1	1. Formule de Taylor d'ordre n	199
14.1.2	2. Différentielles.	202
14.1.3	3. Champs.	205
14.1.4	4. Produit de deux formes différentielles.	206
14.1.5	5. Effet d'une application différentiable.	207
14.1.6	6. Intégration des formes différentielles.	207
14.1.7	Formule de Stokes.	208
14.1.8	Chaîne, bord ; formule de Stokes pour une chaîne.	210
15 M 3	Géométrie hilbertienne élémentaire.	213
15.1	A. Préliminaires. Mesure. Intégration. Probabilités.	213
15.1.1	Clan. Tribu.	213
15.1.2	Mesure positive.	214
15.1.3	Intégration.	215
15.1.4	Terminologie des probabilités.	217
15.2	B. Structure hilbertienne.	218
15.2.1	Espace de Hilbert.	218
15.2.2	Orthogonalité. Théorème de projection.	220
15.2.3	Topologies et dualité hilbertienne.	221
15.2.4	Opérateurs linéaires.	222
15.3	C. Théorie spectrale.	225
15.3.1	9. Théorie spectrale élémentaire.	225
15.3.2	10. Décomposition spectrale d'un opérateur auto-adjoint.	227
15.3.3	Décomposition spectrale d'une transformation unitaire.	231
15.3.4	14. Produits tensoriels d'espaces de Hilbert.	232
15.3.5	15. Noyaux hilbertiens.	234

16 M 4	Sur la résolution des problèmes aux dérivées partielles (PDP) linéaires.	239
16.1	0. Sur les fonctions et distributions.	239
16.2	1. Introduction. Problèmes aux dérivées partielles du deuxième ordre.	240
16.3	2. Classification des principaux problèmes aux dérivées partielles du deuxième ordre.	240
16.4	Le problème $\mathbf{\Pi}_1$	242
16.4.1	Solutions de l'équation homogène $\Delta u = 0$	242
16.4.2	3.2 Deux propriétés importantes des fonctions harmoniques.	243
16.4.3	3.3 Solutions générales de $\mathbf{\Pi}_1$	243
16.5	4. Méthode variationnelle.	243
16.6	Le problème $\mathbf{\Pi}_2$	246
16.6.1	Sur les solutions de l'edp homogène	246
17 M 5	Analyse de Fourier	271
17.1	1. Séries de Fourier trigonométriques.	271
17.1.1	1.1 Définitions.	271
17.1.2	1.2 L'espace de Hilbert \mathcal{P}_m	272
17.1.3	Séries de Fourier trigonométriques.	273
17.2	Transformée de Fourier.	274
17.2.1	Remarques préliminaires.	274
17.2.2	La transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$	275
17.2.3	Le principe d'incertitude.	277
17.2.4	Les espaces vectoriels $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$	277
17.3	Ondelettes.	277
17.3.1	La transformée de Fourier "à fenêtre glissante".	278
17.3.2	3.2 La transformée en ondelette.	278
17.3.3	Ondelette continue.	279
17.3.4	Ondelette discrète.	279
17.3.5	La méthode d'orthonormalisation de Poincaré et son application dans le théorie des on	

CHAPITRE 1

NOTIONS FONDAMENTALES.

1.1 Généalogie de l'espace.

Espace / Géométrie *physique*
↓
Espace / Géométrie *mathématique*
↓
Géométrie *euclidienne*
Euclide 323-283 avant J.C.
↓
Géométrie *cartésienne*
Descartes 1595-1650
↓
Géométries *non-euclidiennes*
Gauss 1777-1855
Lobatchevski 1793-1856
Bolyai 1802-1860
Riemann 1826-1866
↓
Géométrie des *groupes de transformations*
Klein 1849-1925
Poincaré 1854-1912

1.2 L'espace.

L'espace dont nous parlerons est celui de la **Géométrie**. On distingue deux géométries :
la *géométrie physique ou expérimentale* qui opère sur des sujets *réels* et la *géométrie mathématique* qui étudie les relations entre objets *conceptuels*. Ces deux géométries évoluent dans un rapport étroit.

La **géométrie physique** est née, semble-t-il, du désir de mesurer des longueurs, des aires ou des volumes. Elle a élaboré des règles empiriques, qui pendant longtemps ont suffi aux artisans de divers corps de métier pour mener à bien leurs travaux. Aujourd'hui, elle est utilisée encore dans des laboratoires de Physique classique. Dans l'enseignement élémentaire, elle sert à "illustrer" les énoncés abstraits de la géométrie mathématique (cas d'égalité des triangles par superposition, détermination du centre de gravité d'une figure, de son aire, etc.) Une notion essentielle en géométrie physique est celle *d'étalon*. En effet, toute grandeur physique ne peut se mesurer que par comparaison avec une autre grandeur physique prise comme étalon. Le choix d'un étalon détermine : la *précision* des mesures que l'on peut effectuer et corrélativement, l'*échelle* des objets que l'on peut étudier.

La **géométrie mathématique** est une *construction de l'esprit humain* pour certains, une *découverte* (au sens platonicien de ce mot) pour d'autres. On peut distinguer quatre stades significatifs dans le développement de la géométrie mathématique.

Premier stade : la géométrie d'Euclide(13 livres). Elle est une idéalisation de la géométrie physique. Elle étudie les propriétés (géométriques) de figures idéelles qui dérivent des figures concrètes de la géométrie physique, en faisant abstraction de leurs fluctuations morphologiques et de l'imprécision relative de leur dessin (liée à la nature des instruments utilisés). Ainsi, pour la géométrie euclidienne, le point n'a pas d'épaisseur, la droite a une longueur infinie et une largeur nulle, etc. D'après les sources historiques dont nous disposons, Euclide aurait été un des derniers élèves de l'Académie de Platon à Athènes, puis professeur à Alexandrie. *Euclide, probablement, pensait que la réalité incarnait des Idées suprasensibles.*

Deuxième stade : la géométrie analytique de Descartes. En repérant un point de l'espace au moyen de trois nombres - ses coordonnées- et en identifiant une figure géométrique à un système d'équations, Descartes dépouilla les figures de tout attribut sensible et fit de la géométrie d'Euclide un chapitre de l'Algèbre et de l'Analyse. Il fit faire au géomètre un grand pas dans l'abstraction mathématique. Il rendit possible le développement ultérieur d'une géométrie à un nombre quelconque de dimensions - fini ou non - et de la Topologie.

Troisième stade : les géométries non-euclidiennes. A la fin du dix-neuvième siècle, plusieurs grands mathématiciens avaient acquis la conviction que le *cinquième postulat d'Euclide* - à savoir : " par un point extérieur à une droite passe une et une seule parallèle à cette droite" ou bien ce qui est équivalent " la somme des angles d'un triangle est égale à 180 degrés "- *ne peut être démontré.* Bolyai, Lobatchevski, Gauss, Riemann entreprirent alors, avec succès, de bâtir des géométries qui contredisent le cinquième postulat d'Euclide, sans nier les autres. *Bolyai et Lobatchevski* firent l'hypothèse suivante : " Par un point extérieur à une "droite" D passe au moins deux parallèles à D." Gauss et Riemann firent l'hypothèse suivante : " Par un point extérieur à une "droite" D ne passe aucune parallèle à D". Ils inventèrent ainsi, les géométries non euclidiennes. Dès lors, la géométrie euclidienne qui avait exercé pendant plus de deux mille ans une domination exclusive sur la pensée scientifique, qui avait été considérée comme le mode de connaissance rationnelle par excellence et qui avait imposé sa vision de l'espace à la Physique pour décrire les lois de la Nature, perdait son statut de Vérité. Les mathématiciens se voyaient contraints de remettre en cause complètement des certitudes très anciennes et d'opérer une révolution épistémologique.

Quatrième stade : la géométrie riemannienne et le programme d'Erlangen. Dans le

même temps où s'élaborait les géométries non-euclidiennes, Riemann inventait le concept de *variété différentiable* (métrique), qui, ultérieurement, devait être à l'origine de la géométrie différentielle moderne. Les géomètres étaient ainsi conduits à faire un *nouveau pas dans l'abstraction*, dans leur conception de l'espace.

Un peu plus tard, Félix Klein établissait que chacune des géométries euclidiennes ou non euclidiennes étaient caractérisée par une métrique qui était un cas particulier de la métrique générale de Cayley et que ces trois géométries pouvaient être définies par des considérations autres que celles qui étaient à l'origine de leur construction. Dans le programme d'Erlangen qu'il avait élaboré, Felix Klein opérait un reversement de perspective en caractérisant les géométries, non plus à partir des propriétés des figures de l'espace, mais des propriétés de *groupes de transformations* laissant ces figures invariantes.

Ainsi, la géométrie renonçait à l'évidence d'une description de l'espace en accord avec notre intuition sensible immédiate.

De ce fait elle allait jouer un nouveau rôle majeur dans la modélisation de réel et géométriser des domaines des mathématiques et des sciences expérimentales qui, a priori, semblaient lui être totalement étrangers.

3. Le Temps.

1.2.1 La notion de temps en Physique.

La notion de temps est plus difficile à appréhender que celle de longueur car *on ne mesure jamais directement un temps*. L'*étalon de temps* est la durée d'un phénomène qui se reproduit - ou bien que l'on sait reproduire à l'identique, par exemple, l'écoulement de la poudre d'un compartiment à l'autre d'un sablier, la rotation de la Terre sur elle même, etc. Il existe une *échelle des temps*. On ne peut mesurer avec le même étalon, donc avec la même précision, par exemple, le temps qui s'écoule entre l'apparition et la disparition d'une anti-particule et celui qu'il faut à un signal émis par une lointaine galaxie pour nous parvenir.

On donne le nom générique d'*horloge* à tout appareil(lage) qui permet de mesurer le temps (clepsydre, chronomètre, etc.) Si en un point du globe terrestre se trouve une horloge **H** qui mesure le temps, on dira qu'un évènement **E** se produit à l'instant **t** en **A** si cet évènement se produit lorsque l'horloge **H** marque le temps **t**.

1.2.2 Le réglage des horloges.

Pour que deux observateurs situés en deux points fixes **A** et **B** du globe terrestre et éloignés l'un de l'autre, puissent comparer les résultats d'une même mesure d'un même phénomène évoluant dans le temps, il est nécessaire qu'ils disposent de deux horloges identiques **H** en **A** et **K** en **B** qui donnent le même temps. Pour cela, il faut, par exemple, transporter l'horloge **K** en **A**, régler **K** sur **H** de façon que **K** donne exactement le même temps que **H** - modulo une erreur considérée comme négligeable - puis transporter **K** en **B**.

Supposons que l'on dispose en un point fixe **A** du globe terrestre d'une horloge **H** et en un point fixe **B** du globe terrestre d'une horloge **K**, identique à **H**, préalablement réglée sur **H**. On dira, alors, qu'un évènement **E**₁ se produisant à l'instant **t**₁ en **A** et un évènement **E**₂ se produisant à l'instant **t**₂ en **B** sont simultanés si **t**₁ = **t**₂.

1.2.3 L'évolution de la notion de temps.

La notion de temps a évolué au cours des siècles, en suivant l'évolution des connaissances scientifiques. *Newton* pensait que le temps, comme l'espace, était absolu. Pour lui, deux personnes munies de deux horloges identiques, réglées exactement sur une même troisième, qui mesureraient le temps qui sépare deux évènements quelconques, trouveraient le même résultat. Aujourd'hui, encore, cette croyance est confirmée par l'expérience quotidienne, dans une même ville où le temps est rythmé de façon identique pour tous les habitants, par les horloges visibles dans plusieurs lieux publics. *Einstein*, comme nous le verrons plus loin, montra que la notion de temps absolu de Newton était erronée. Il prouva que le temps et l'espace étaient liés, qu'ils formaient un continuum à quatre dimensions. Il faut noter, cependant, que le temps d'Einstein comme celui de Newton, est *réversible*, ce qui contredit notre expérience quotidienne la plus banale. Ainsi, à partir des lois de la mécanique newtonienne ou einsteinienne peut-on déterminer les dates des éclipses passées ou futures. Dans le domaine de la Physique des particules, le temps de l'antimatière est symétrique du nôtre.

Pour chacun de nous le temps s'écoule de façon irréversible, de notre naissance à notre mort. Notre temps biologique est *fléché*.

Pour le cosmologiste, la flèche du temps indique dans quelle direction l'Univers se dilate. Le sens d'orientation de cette flèche coïncide avec celui de la flèche thermodynamique qui est déterminé par la seconde loi de la Thermodynamique.

1.2.4 Modèle mathématique du temps.

Pour le physicien, un modèle mathématique du temps doit répondre à trois exigences :

- (i) Il doit lui permettre d'ordonner les évènements qu'il considère et de mesurer la durée qui sépare leurs occurrences.
- (ii) Il doit lui permettre d'effectuer des expériences avec des étalons différents.
- (iii) Il doit lui permettre de conduire des calculs avec toute la précision souhaitée.

Il existe un modèle mathématique du temps qui satisfait aux exigences énumérées ci-dessus, c'est la droite réelle orientée sur laquelle on a fixé une *origine* et choisi un *vecteur unitaire*. L'origine de cette droite (orientée) représente l'origine des temps et le vecteur unitaire l'étalon de temps. L'origine sépare la droite en deux sous ensembles orientés, l'un à droite de l'origine, est appelé le *futur*, l'autre à gauche de l'origine, est appelé le *passé*. L'origine représente alors l'instant *présent*.

1.3 Vitesse et accélération.

1.3.1 La notion physique de vitesse.

Supposons qu'un train relie sans arrêt deux gares **A** et **B**. Supposons qu'en **A** se trouve une horloge **H** et qu'en **B** se trouve une horloge **K**. que **H** et **K** soient identiques et réglées exactement sur une même troisième. Soient **C**₁ et **C**₂ deux points identifiés sur la ligne de chemin de fer qui relie **A** et **B**, **C**₁ étant plus proche de **A** que **C**₂, (**C**₁ pouvant éventuellement être confondu avec **A** et **C**₂ avec **B**). Notons $d(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)$ la distance du trajet entre **C**₁ et **C**₂. Si le train passe en **C**₁ (resp. **C**₂) au temps $t(\mathbf{C}_1)$ (resp. $t(\mathbf{C}_2)$), alors on dira que sa *vitesse*

moyenne entre C_1 et C_2 est égale à :

$$u(C_1, C_2) = \frac{d(C_1, C_2)}{t(C_2) - t(C_1)}$$

On dira que la vitesse du train entre C_1 et C_2 est *uniforme* si, quelque soient les points C'_1 et C'_2 situés sur le trajet C_1C_2 (C'_1 étant plus proche de C_1 que C'_2), on a : $u(C'_1, C'_2) = u(C_1, C_2)$. Alors, pendant une unité de temps τ inférieure à $t(C_2) - t(C_1)$, le train parcourt une distance d telle que : $d = \tau u(C_1, C_2)$. Quand on dit que la vitesse d'un véhicule est égale à α unités de longueur par unité de temps, on fait implicitement l'hypothèse que pendant l'unité de temps considérée, la vitesse du véhicule est uniforme. Il faut noter que les unités de longueur et de temps utilisées pour exprimer une vitesse dépendent évidemment de l'échelle des phénomènes étudiés (On n'utilise pas les mêmes unités pour calculer la vitesse d'un escargot et celle d'une fusée!).

1.3.2 Définition mathématique de la vitesse.

Pour définir mathématiquement la vitesse, nous étudierons le mouvement d'un mobile sur une droite (orientée).

Nous supposons que M est un mobile reliant sans arrêt deux points P et Q d'un axe orienté.

Nous représenterons le mouvement de M par un graphe (le graphe du mouvement) dans le plan euclidien (repéré par deux axes orthogonaux), en portant en abscisse le temps t , mesuré à partir d'une origine arbitraire et en ordonnées la distance $x(t)$ parcourue par le mobile au temps t mesurée aussi à partir d'une origine arbitraire. On notera $t(P)$ (resp. $t(Q)$) le temps où le mobile part de P (resp. arrive en Q). Le mathématicien appelle *vitesse instantanée* du mobile M , à l'instant t , la vitesse moyenne de M sur un intervalle de "longueur infiniment petite" entourant le point t . Cette vitesse est notée indifféremment :

$$x'(t) \text{ ou } \frac{dx(t)}{dt}$$

Il nous faut évidemment préciser, ci-dessus, le sens de l'expression "longueur infiniment petite". Pour le mathématicien, il y a deux façons (au moins) de concevoir "l'infiniment petit" : l'une relève de l'Analyse classique, c'est *l'infiniment petit actuel*, l'autre de l'Analyse non standard, c'est *l'infiniment petit potentiel*.

C'est sur la première que Newton a fondé son calcul différentiel et c'est sur la seconde que Leibnitz a fondé le sien.

(i) a) **Définition de la vitesse instantanée en Analyse classique.** Avec les conventions adoptées ci-dessus, on appellera vitesse instantanée du mobile à l'instant t , la *dérivée* de $x(\cdot)$ au temps t . On sait que cette dérivée est la pente de la tangente au point $(t, x(t))$ du graphe du mouvement.

(ii) b) **Définition de la vitesse instantanée en Analyse non standard.** Avant d'explicitier cette définition, quelques préliminaires sont nécessaires.

Soit \mathbb{N} (resp \mathbb{R}) l'ensemble des nombres entiers (resp ; réels) défini axiomatiquement (par exemple, dans le cadre de l'axiomatique $Z-F-C$ de la théorie des ensembles) On montre que \mathbb{N} (resp. \mathbb{R}) contient deux classes de nombres que nous noterons $s(\mathbb{N})$ et $s'(\mathbb{N})$ (resp $s(\mathbb{R})$ et $s'(\mathbb{R})$) appelés respectivement nombres entiers (resp. réels) *standards* et *non standards*

dont nous allons préciser les propriétés. Nommons *entiers naïfs* les nombres entiers qui sont caractérisés par les deux propriétés suivantes :

(i) 0 est naïf.

(ii) si $n \in \mathbb{N}$ et si n est naïf, alors $(n + 1)$ est naïf.

Ainsi, $0, 1, 2, 3, \dots, 1000, \dots, 2^{1000}, \dots$ sont des entiers naïfs.

On montre que tout entier naïf est un entier standard et qu'il existe un entier non standard ω strictement supérieur à tout entier naïf. On dit alors que ω est *illimité*. Posons : $\varepsilon = (\omega)^{-1}$. ε est un nombre réel non standard, différent de zéro, qui est strictement inférieur à l'inverse de tout entier naïf positif. On dit que ε est un nombre *réel infinitésimal*. Soit x et y deux nombres réels. On dira que : $x \simeq y \Leftrightarrow |x - y| < \varepsilon$.

On dira que $u(t)$ est la vitesse instantanée du mobile M, considéré ci-dessus si : quel que soit le nombre réel δ , tel que $\delta \simeq 0$, on a : $u(t) = (\delta)^{-1} [x(t + \delta) - x(t)]$. On montre que la définition ci-dessus de la vitesse instantanée coïncide avec celle que nous avons donnée plus haut dans le cadre de l'Analyse classique.

Notons que la notion de *nombre infinitésimal* définie ci-dessus est une formalisation de la notion d'*infinitement petit* utilisée par les physiciens. L'idée sous-jacente à la notion de nombre infinitésimal rejoint le point de vue de Galilée et de Cavalieri qui concevaient la droite réelle comme un agrégat d'une infinité de points atomiques.

1.3.3 Définition mathématique de l'accélération.

On appellera accélération instantanée du mobile M, à l'instant t (le nombre réel qui est) la vitesse instantanée de la vitesse instantanée de $u(t)$ à l'instant t .

On notera l'accélération de M indifféremment :

$$x''(t) \text{ ou bien } \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

1.4 Force, masse et énergie mécanique.

1.4.1 Notions de force et de masse.

On donne couramment le nom de *force* à "ce" qui entraîne un mouvement ou bien s'oppose à lui. Ainsi, parle-t-on de la force de la pesanteur qui attire tous les corps vers le centre de la Terre ou encore de la force qu'il nous faut déployer pour mouvoir, déplacer un objet.

La notion de *masse* est liée à celle de force.

Il a fallu un long travail expérimental et un longue réflexion théorique conjugués, menés avec rigueur, avant que ne soient formulées, par Newton, les deux lois qui ont fondé la Mécanique rationnelle, à savoir :

$$\text{La loi de la gravitation universelle : } f = -G \frac{m.m'}{r^2}$$

où f est la force d'attraction des deux masses m et m' , distantes de r et G une constante universelle et

$$\text{La loi fondamentale de la dynamique : } f = m.a$$

où a est l'accélération imprimée à une masse ponctuelle m par une force f .

Il est naturel de se demander si l'on peut induire, de ces deux lois, que force et masse peuvent être considérées comme des entités objectives.

Henri Poincaré, dans un article intitulé "*les idées de Hertz sur la Mécanique*" s'interroge : "Qu'est-ce que la masse ? c'est répond Newton, le produit du volume par la densité - il vaudrait mieux dire, répondent Thomson et Tait, que la densité c'est le quotient de la masse par le volume. Qu'est-ce que la force ? c'est répond Lagrange, une cause qui produit le mouvement ou tend à le produire. c'est dira Kirchoff le produit de la masse par l'accélération. Mais, alors, pourquoi ne pas dire que la masse est le quotient de la force par l'accélération ? " et Poincaré conclue : "Ces difficultés sont inextricables...Il est impossible de donner de la force et de la masse une idée satisfaisante." Jean Ullmo, dans un article intitulé "*les concepts physiques*" (in Logique et Connaissance scientifique sous la direction de Jean Piaget) écrit : "Ces forces, ces masses, ne sont rien d'autres que des noms donnés à des paramètres qui apparaissent dans ces relations [loi de Newton]. Ce sont des supports que nous introduisons pour rendre compte des rapports que la relation répétable nous révèle, rapport d'un même fil tendu avec différents corps, rapport d'un même corps avec différents fils. Ces supports nous les avons appelés êtres objectifs mais nous les avons définis si strictement qu'aucune querelle ne pourra être soulevée sur leur statut métaphysique d'être : être parce que permanents, objectifs parce que définis par des relations répétables qui se sont imposées à nous. Ce n'est qu'ensuite, avec le support de ces êtres objectifs, forces, masses, ainsi reconnus, que nous pouvons formuler la loi, sans pétition de principe et sans recours à quelque intuition vague de la masse ou de la force ; nous franchissons la première étape dans la mathématisation de la Nature." (in Epistémologie des sciences physiques de Serge Le Strat, chez Nathan).

Il faut noter que les deux lois de Newton n'ont, a priori, aucun lien entre elles. En effet, les masses que l'on considère dans la première loi sont des *masses pesantes*, alors que celle que l'on considère dans la deuxième loi est une *masse inerte*, c'est-à-dire une masse qui s'oppose au mouvement. Comme nous le verrons plus loin, c'est en posant comme principe, l'équivalence de la masse pesante et de la masse inerte qu'Einstein a élaboré la théorie de la Relativité générale.

Les deux lois de Newton sont, pour une part, à l'origine de théories mathématiques importantes, à savoir : pour la masse, la théorie de l'intégration pour la force, la théorie des vecteurs pour la vitesse et l'accélération, le calcul différentiel.

1.4.2 L'énergie mécanique.

La notion d'énergie nous est familière aujourd'hui. On parle couramment, dans les media, du prix de l'énergie, de la maîtrise de l'énergie, de la crise énergétique, d'indépendance énergétique, etc. ; on confond, d'ailleurs, souvent, *énergie* et *ressources énergétiques* : ainsi parle-t-on d'énergies fossiles, d'énergies renouvelables, d'énergie nucléaire, etc.

L'énergie est une déité moderne. Mais cette énergie dont on parle tant, qui est au centre du discours des économistes, aujourd'hui, est une notion floue au contraire du concept d'énergie en Physique, comme nous le verrons dans la suite de cet ouvrage.

1.4.3 Énergie potentielle et énergie cinétique.

Bien qu'elles soient identiques, la masse pesante et la masse inerte induisent deux notions distinctes d'énergie (travail) : pour la masse pesante, *l'énergie potentielle*, qui ne dépend que de

la position de la masse dans l'espace et pour la masse inerte, l'énergie cinétique, qui ne dépend que de la vitesse de la masse à un instant donné.

Plus précisément,

- (i) considérons une masse pesante m effectuant une chute libre sur une distance h . Le travail de (ou l'énergie développée par) cette masse dans sa chute est alors : $T_0 = mgh$, où g est l'accélération de la pesanteur.
- (ii) considérons une masse inerte m soumise au temps $t \in [t_1, t_2]$ à une accélération $a(t)$; On suppose que l'accélération $a(t)$ et le déplacement $x(t)$ de la masse m restent colinéaires à un même vecteur u lorsque t décrit l'intervalle $[t_1, t_2]$. Soit T_1 le travail de (ou l'énergie développée par) la masse m dans son mouvement. Alors :

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{t_1}^{t_2} m \cdot a(t) \cdot x(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} m \cdot x(t) \cdot x''(t) dt \\ &= m \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left((x'(t))^2 \right) dt &= \frac{m}{2} \left[(x'(t))^2 \right]_{t=t_1}^{t=t_2} \end{aligned}$$

Les physiciens ont établi que la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique de la masse m qu'ils ont appelé son *énergie mécanique totale* restait constante, à tout instant. Ils ont en induit un **principe, celui de la conservation de l'énergie mécanique d'un système isolé**. Au fur et à mesure du développement des connaissances en Physique, ce principe s'est étendu et il est devenu un principe unificateur.

1.4.4 Mécanique rationnelle et Géométrie.

Les concepts de force, masse et énergie sont à la base de l'édifice de la Mécanique rationnelle qui fut érigée en corpus théorique par le mathématicien Lagrange. La relation entre la Mécanique rationnelle et la Mécanique physique est de même nature que celle de la Géométrie euclidienne et de la Géométrie physique.

1.5 La notion de champ.

La loi de gravitation universelle dit qu'un "grain" de matière de masse non nulle m situé en un point A de l'espace exerce sur un autre "grain" de matière m' situé en un point A' de l'espace *distinct* de A une force :

$$F(A, A') = -G m m' \frac{AA'}{\|AA'\|^3}$$

Les mécaniciens interprètent ce phénomène en disant que le "grain" de matière de masse m situé en A crée dans tout l'espace, privé du point A , *un champ de forces* E_A tel que :

$$\text{quel que soit } A' \neq A, \quad E_A(A') = -G m \frac{\mathbf{A}\mathbf{A}'}{\|\mathbf{A}\mathbf{A}'\|^3} \quad (1.1)$$

La notion de champ évite aux mécaniciens d'utiliser, dans l'étude de la gravitation, des considérations inutiles pour expliquer la façon dont la masse m située en A , agirait sur la masse m' , située en $A' \neq A$. La notion de champ est utilisée, avec succès, dans d'autres domaines de la Physique que la gravitation. On définit, ainsi, de même, le champ électromagnétique, le champ des vitesses des particules d'un fluide, etc.. On vérifie que l'interaction mécanique de contact peut être considérée, aussi, comme résultant de l'action d'un champ de forces.

1.6 L'énergie calorifique.

1.6.1 Les premiers pas de la thermodynamique.

Ce n'est qu'au dix-neuvième siècle que les physiciens ont commencé à étudier systématiquement les propriétés thermodynamiques des gaz. Ils ont, alors, obtenu des relations essentielles entre les trois variables fondamentales que sont la pression, le volume et la température d'un gaz - placé dans des conditions "normales". Ils ont, ensuite, déduit d'expériences qui n'exigeaient que de modestes investissements, des résultats d'une portée très générale, concernant de nouvelles variables, les **potentiels thermodynamiques**.

1.6.2 La thermodynamique statistique. L'introduction du hasard en Physique.

Les lois obtenues par les pionniers de la Thermodynamique ne fournissaient aucune information sur la nature de l'énergie calorifique. C'est **Maxwell** qui, en 1859, franchit un pas décisif dans l'interprétation des phénomènes thermodynamiques en proposant une théorie microscopique des gaz "parfaits". Selon cette théorie, l'*énergie calorifique* d'un gaz (parfait) est due à l'agitation permanente des molécules qui le composent et sa *pression* sur la paroi de l'enceinte qui le contient est la conséquence des chocs des molécules de ce gaz contre cette paroi. Mais un gaz ("parfait", dans des conditions "normales" de volume, de pression et de température) est composé d'une myriade de molécules. Il est donc impossible de déterminer, à tout instant, la position et la vitesse de chacune de ces molécules pour déduire, des lois de la Mécanique, les lois de la Thermodynamique. Pour contourner cette difficulté, Maxwell montra que *les carrés des vitesses* des molécules composant un gaz *sont distribuées suivant une loi de probabilité* que l'on peut expliciter exactement, à partir d'hypothèses convenables. En recourant à un *modèle microscopique probabiliste*, la Théorie de Maxwell des gaz parfaits nous donne une interprétation de *phénomènes thermodynamiques macroscopiques*.

1.7 L'atome.

1.7.1 Le plus petit "grain" de matière insécable

Cinq siècles avant notre ère, certains philosophes grecs pensaient que la matière était discontinue, qu'elle était constituée de grains indivisibles, les atomes. C'est, seulement au début du dix-neuvième siècle que la théorie atomique de la matière fut étayée par les travaux du chimiste Dalton - qui ouvrait ainsi la voie à la chimie moderne. La matière fut alors conçue comme un agrégat de molécules, elles-mêmes combinaisons, dans des proportions précises, d'un petit nombre d'atomes différenciés.

1.7.2 L'atome, une boîte "noire".

Un physicien qui explore l'atome est semblable à une personne qui serait entrée par effraction, lors d'une nuit sans lune, dans une maison inoccupée, dont les volets seraient hermétiquement clos. Pour voir les objets qui se trouvent dans cette maison, cette personne dispose d'une lampe-torche. Ainsi, dans telle direction, le faisceau lumineux de la lampe butera sur un meuble, un lustre, qui renverra partiellement la lumière qu'il a reçue ou bien trouera l'obscurité sans

rencontrer aucun obstacle. Plus la lampe-torche de notre "explorateur" sera puissante - c-à-d plus les photons qui en émanent posséderont d'énergie - plus le visiteur de la maison percevra de détails des objets éclairés par sa lampe. Notre métaphore s'arrête là car les éléments constitutifs d'un atome ne sont pas semblables à des meubles dans une maison ; ce sont des "grains infiniment petits" qui possèdent l'étrange propriété d'être, à la fois, ondes et corpuscules de matière. De plus, ils sont, en même temps, objets d'observation et agent des observations qui les concernent.

1.7.3 Bombarder pour voir. La balistique quantique.

Michel Crozon écrivait dans "l'univers des particules" (p.57) : "[...] Projetées les unes contre les autres, les particules ne se contentent pas de se scruter mutuellement. Leur énergie, loin de briser ou de détruire, est la source d'une alchimie singulière : les collisions les plus violentes font jaillir de nouvelles particules. Alors l'énergie devient matière selon des règles subtiles qu'il convient de découvrir. Ainsi, la physique des particules est-elle devenue l'enjeu d'une sorte de jeu de boules, d'échelle quantique. Dans ce jeu-là, plus on tape fort et plus on voit petit : le terrain de jeu est mobile ; la boule et le cochonnet ont des rôles symétriques et de leurs chocs jaillissent d'autres boules." Depuis l'invention de la **radioactivité artificielle** découverte par **F. Joliot(-Curie)** lors du bombardement d'une feuille d'aluminium par des particules provenant d'une source de polonium, le bombardement, dans l'univers subatomique, est devenue une méthode universelle :

- * bombardements d'atomes pour créer de nouveaux éléments radioactifs
- ** bombardements de particules constitutives des atomes dans des collisionneurs de plus en plus géants pour justifier l'existence présumée de certaines particules
- *** bombardements de tumeurs cancéreuses par des particules radioactives

mais aussi funestes bombardements d'Hiroshima et de Nagasaki en 1945. Précisons que la balistique quantique - utilisant comme projectiles des particules "infiniment petites" - est très différente de la balistique classique : en effet, quand on bombarde un atome (ou bien le noyau d'un atome) avec un faisceau de particules, on ne peut prédire avec certitude, ce qui se produira ; on peut seulement dire qu'il y a une certaine *probabilité* pour que le faisceau de particules rencontre l'atome (ou son noyau) soit absorbé ou dévié par lui.

1.8 La représentation du monde subatomique par la Physique quantique.

1.8.1 Physique classique et physique quantique.

Pour Descartes, les "idées claires et distinctes" qui fondaient la Physique étaient la position, la forme et le mouvement. Pour rendre intelligibles les phénomènes qui étaient inexplicables dans le cadre conceptuel de la physique cartésienne, Newton, Maxwell, Einstein introduisirent de nouvelles notions : l'action à distance, le champ, la relativité du temps. Ils ouvrirent ainsi les portes d'un monde extraordinaire. Certains grands physiciens pensèrent alors que la Physique était parvenue à son apogée. Mais au début du vingtième siècle, en explorant le monde subatomique, les physiciens découvrirent des phénomènes étranges, déroutants qui contredisaient les concepts fondamentaux qui leur étaient familiers ; Il leur fallut bâtir une nouvelle physique, ce fut la Physique quantique.

1.8.2 Physique et Mathématiques.

Depuis le dix-septième siècle, les Mathématiques ont joué un rôle de plus en plus important dans le développement de la Physique, au point qu'Einstein, dans son livre "La théorie de la Relativité restreinte et généralisée. La relativité et le problème de l'espace" a écrit : "Comment se fait-il que la mathématique, qui est un produit de la pensée humaine et indépendante de toute expérience, s'adapte de si admirable manière aux objets de la réalité ? La raison humaine serait-elle donc capable, sans avoir recours à l'expérience, de découvrir, par son activité seule les propriétés des objets réels ? "

Dans la symbiose progressive entre Mathématiques et Physique, on peut distinguer trois étapes :

- i Les Mathématiques ont d'abord été, pour la Physique, un outil lui permettant d'effectuer des calculs de plus en plus complexes, en connaissant, avec précision, les limites de validité de ces calculs.
- ii Les Mathématiques ont apporté, ensuite, au discours de la Physique le souci de rigueur qui les caractérisent.
- iii Aujourd'hui, les Mathématiques permettent au physicien, dans l'impossibilité de donner une description *ontologique* du réel, d'en élaborer une représentation *intelligible*.

Il semble d'ailleurs que cette représentation mathématique est d'autant plus *abstraite* que l'analyse du physicien est plus *pénétrante*.

1.8.3 Déterminisme et Hasard.

Dans son "Essai philosophique sur les probabilités", paru en 1814, Pierre-Simon Laplace écrivait : "Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respectivement des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome; rien ne serait incertain pour elle et, le présent, comme le passé, serait présent à ses yeux." Dans son livre "Une brève histoire du Temps", paru en 1989, Stephen Hawking écrivait (p.79) : "En général, la mécanique quantique ne prédit pas un état unique, bien défini pour une observation donnée. [...]. Cela veut dire que, si l'on effectuait la même mesure sur un grand nombre de systèmes similaires, déclenchés de la même façon, on trouverait un résultat de mesure A dans un certain nombre de cas, B dans un autre nombre de cas et ainsi de suite. On pourrait prédire le nombre approximatif de fois où le résultat pourrait être A ou B, mais on ne pourrait pas prédire le résultat spécifique d'une mesure individuelle. La mécanique quantique introduit donc *un élément inévitable d'imprécision et de hasard* dans la science." Plus précisément, à toute particule σ dans l'espace-temps, on peut associer une fonction ψ_σ de $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ (où x est la variable d'espace et t la variable de temps), à valeurs complexes, telle que :

- (i) quel que soit $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, $|\psi_\sigma(x, t)|^2$ soit la densité de probabilité de trouver σ au point x , à l'instant t .
- (ii) ψ_σ est solution d'un problème d'évolution du type suivant :

$$i\hbar \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial t} = H\psi_\sigma$$

(équation de Schrödinger)

où $\psi_\sigma(\cdot, t)$ est donné $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h étant la constante de Planck et H un opérateur.

Ainsi, se trouvent articulés dans une même formule, déterminisme et hasard.

1.9 Vers la Cosmologie quantique.

”Notre physique contemporaine se divise en deux corpus : la *relativité générale* s’applique essentiellement à l’astrophysique et à la cosmologie ; la *physique quantique* s’applique essentiellement au monde microscopique des particules. Entre les deux, le monde à notre échelle relève d’une physique dite classique (ni relativiste, ni quantique), qui constitue une approximation commune à chacune de ces deux approches. [...ces deux corpus] impliquent des visions du monde très différentes, et même parfois antagonistes à propos de l’espace, du temps, de la matière, du vide...) : elles ne peuvent être ”vraies” simultanément. Plutôt que de penser que l’une d’elles est meilleure que l’autre, de nombreux physiciens croient en l’existence d’une théorie plus globale, encore inconnue, qui harmoniserait les deux points de vue ” (Cf. ”Forme et Origine de l’Univers, Marc Lachièze-Rey p. 105-106).

1.10 La Physique, les Mathématiques et nous.

Les découvertes foisonnantes de la Physique et des Mathématiques depuis deux siècles, ont accru considérablement les potentialités des êtres humains dans tous les domaines et en particulier, hélas, dans le domaine de la guerre ; aujourd’hui, les militaires de plusieurs pays disposent d’un arsenal énorme d’armes de destruction massive et ont le pouvoir d’éradiquer l’espèce humaine de la surface de la Terre.

CHAPITRE 2

MODÈLE MATHÉMATIQUE DE L'ESPACE-TEMPS.

Les lois fondamentales de la mécanique et de l'électromagnétisme font appel à certaines propriétés géométriques fondamentales des courbes, surfaces et volumes dans l'espace à trois dimensions. Dans l'enseignement élémentaire de la Physique, on considère, habituellement que ces propriétés sont "intuitives". Pour le mathématicien, établir sur des bases "fermes" la théorie de la mécanique et de l'électromagnétisme exige le développement d'un formalisme "abstrait" dont la "lourdeur" rebute le praticien de la Physique. C'est pourquoi, nous allons présenter ci-dessous, une théorie élémentaire des propriétés des courbes et surfaces immédiatement "utilisable" dans la suite.

2.1 Un modèle de l'espace à trois dimensions

Dans la suite, on identifiera l'espace à trois dimensions \mathbf{E}_3 à l'ensemble $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, en associant à tout point M de \mathbf{E}_3 , l'élément $x(M) \in \mathbb{R}^3$, ayant pour composantes les coordonnées cartésiennes de M dans un repère fixé \mathbf{R}^3 de \mathbf{E}_3 . Alors, on pourra associer à tout $x \in \mathbb{R}^3$ le point $M(x) \in \mathbf{E}_3$ ayant pour coordonnées relativement à \mathbf{R}^3 les composantes de x dans \mathbb{R}^3 . Posons : $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. e_1, e_2, e_3 sont trois éléments de \mathbb{R}^3 et quel que soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $x = \sum_{j=1}^3 x_j e_j$. On peut aussi faire correspondre à la structure d'espace vectoriel de \mathbb{R}^3 une structure d'espace vectoriel de \mathbf{E}_3 . Posons d'autre part :

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \forall y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, \langle x | y \rangle = \sum_{j=1}^3 x_j \cdot y_j \in \mathbb{R}$$

L'application $(x, y) \rightarrow \langle x | y \rangle$ est une application bilinéaire symétrique telle que :

$$(\langle x | x \rangle \geq 0) \text{ et } (\langle x | x \rangle = 0 \Rightarrow x = (0, 0, 0) = 0).$$

Ainsi, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 et $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot | \cdot \rangle}$, la norme sur \mathbb{R}^3 associée à $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

On peut donc identifier l'espace $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ à l'espace (\mathbf{E}_3, d_3) , d_3 étant la distance canonique dans \mathbf{E}_3 de sorte que :

$$\forall M, N \in \mathbf{E}_3, d(M, N) = \|x(M) - x(N)\|.$$

2.2 Courbes et surfaces dans \mathbb{R}^3 .

2.2.1 Courbes dans \mathbb{R}^3 .

Soit $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ une application d'une partie Ω de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^3 telle que :

$$\forall t \in \Omega, \quad \psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t)) \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{Posons : } \quad C_\psi = \left\{ x \in \mathbb{R}^3; x = \psi(t), t \in \Omega \right\}$$

On dira que C_ψ est une *courbe* dans \mathbb{R}^3 .

2.2.2 Surfaces dans \mathbb{R}^3 .

Soit $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ une application d'une partie Ω de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 telle que :

$$\forall (s, t) \in \Omega, \quad \psi(s, t) = (\psi_1(s, t), \psi_2(s, t), \psi_3(s, t)) \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{Posons : } \quad S_\psi = \left\{ x \in \mathbb{R}^3; x = \psi(s, t), (s, t) \in \Omega \right\}$$

On dira que S_ψ est une *surface* dans \mathbb{R}^3 .

Remarques :

- (i) Avec les mêmes hypothèses et notations qu'au paragraphe 2.2.2 ci-dessus, supposons que l'on puisse éliminer (s, t) entre les équations $x_1 = \psi_1(s, t)$, $x_2 = \psi_2(s, t)$, $x_3 = \psi_3(s, t)$. On obtient, alors une relation du type $g(x_1, x_2, x_3) = 0$. Posons :

$$\widetilde{S}_\psi = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; g(x_1, x_2, x_3) = 0 \right\}$$

Alors, évidemment : $S_\psi \subset \widetilde{S}_\psi$. On vérifie qu'en général : $S_\psi \neq \widetilde{S}_\psi$.

- (ii) Éliminer t entre les équations $x_1 = \psi_1(t)$, $x_2 = \psi_2(t)$, $x_3 = \psi_3(t)$. Expliciter le résultat analogue à celui obtenu dans la remarque précédente.

2.3 Tangentes. Plans tangents. Normales.

2.3.1 Tangente et plan normal à une courbe dans \mathbb{R}^3 .

On supposera ci-dessous que Ω est un ouvert de \mathbb{R} et que ψ est continuellement dérivable sur Ω .

Définition : On dira qu'un point $x^0 = \psi(t^0)$, $t^0 \in \Omega$ est un point *régulier* de C_ψ si $\psi'(t^0) \neq 0$; sinon si $\psi'(t^0) = 0$ on dira que x^0 est un point *singulier* de C_ψ .

On appellera tangente à C_ψ en un point régulier $x^0 = \psi(t^0)$, $t^0 \in \Omega$, l'ensemble :

$$T(x^0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3; x = \psi(t^0) + (t - t^0) \psi'(t^0), t \in \mathbb{R} \right\}$$

On montre que $T(x^0)$ est une *droite* dans \mathbb{R}^3 qui est indépendante du paramétrage de C_ψ . Le plan $N(x^0)$ orthogonal en x^0 à $T(x^0)$ est appelé le *plan normal* à C_ψ en x^0 .

Ainsi :

$$N(x^0) = \left\{ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3; (y_1 - x_1^0) \psi_1'(t^0) + (y_2 - x_2^0) \psi_2'(t^0) + (y_3 - x_3^0) \psi_3'(t^0) = 0 \right\}$$

2.3.2 Plan tangent et normale à une surface dans \mathbb{R}^3 .

On supposera que Ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 et que ψ est continuellement différentiable sur Ω .

Définition : Posons : $\forall (s, t) \in \Omega$, $u = (s, t)$ et si $(s^0, t^0) \in \Omega$, $u^0 = (s^0, t^0)$. On dira qu'un point $x^0 = \psi(u^0)$, $u^0 \in \Omega$ est un point *régulier* de S_ψ si

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(u^0) \wedge \frac{\partial \psi}{\partial t}(u^0) \neq 0$$

sinon on dira que $x^0 = \psi(u^0)$, $u^0 \in \Omega$ est un point *singulier* de S_ψ .

(On rappelle que si $A = (a_1, a_2, a_3)$ et $B = (b_1, b_2, b_3)$, alors : $A \wedge B = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$) On appellera *plan tangent* à S_ψ en un point régulier $x^0 = \psi(u^0)$, $u^0 \in \Omega$, l'ensemble :

$$P(x^0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 ; x = \psi(u^0) + \left\langle (D\psi)(u^0) \mid (u - u^0) \right\rangle, u \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

ou plus explicitement :

$$P(x^0) = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; x_j = \psi_j(u^0) + \frac{\partial \psi_j}{\partial s}(u^0)(s - s_0) + \frac{\partial \psi_j}{\partial t}(u^0)(t - t_0), j = 1, 2, 3, u = \right.$$

On montre que $P(x^0)$ est un *plan* dans \mathbb{R}^3 qui est indépendant du paramétrage de S_ψ . La droite orthogonale à $P(x^0)$ en x^0 est appelée la *normale* à S_ψ en x^0 ; on la notera $N(x^0)$.

Le vecteur

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(u^0) \wedge \frac{\partial \psi}{\partial t}(u^0)$$

est un vecteur directeur de la droite $N(x^0)$.

2.4 Orientation des courbes et surfaces dans \mathbb{R}^3 .

2.4.1 Orientation des courbes paramétrées dans \mathbb{R}^3

Supposons que Ω_1 soit un ouvert de \mathbb{R} , image de Ω par un difféomorphisme θ (c-à-d une application bijective de Ω sur Ω_1 , continuellement dérivable sur Ω dont l'application réciproque est continuellement dérivable sur Ω_1). Soit ψ une application de Ω dans \mathbb{R}^3 continuellement dérivable sur Ω . Posons : $\psi = \psi^1 \circ \theta$ ($\Leftrightarrow \psi^1 = \psi \circ \theta^{-1}$)

$$\forall t \in \Omega, \psi'(t) = (\psi^1)'(\theta(t)) \theta'(t) = (\psi^1)'(t_1) \theta'(t) \quad \text{où } t_1 = \theta(t) \in \Omega_1$$

D'autre part :

$$C_\psi = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 ; x = \psi(t), t \in \Omega \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 ; x = \psi^1(t_1), t_1 \in \Omega_1 \right\} = C_{\psi^1}$$

On dira que C_ψ et C_{ψ^1} ont la même orientation (resp. des orientations opposées) si :

$$\forall t \in \Omega, \theta'(t) \in \mathbb{R}_+^* \quad (\text{resp. } \forall t \in \Omega, \theta'(t) \in \mathbb{R}_-^*)$$

Soit $T_\psi(x^0)$ la tangente à C_ψ en (un point régulier) $x^0 = \psi(t^0)$, $t^0 \in \Omega$. On a :

$$\begin{aligned} T_\psi(x^0) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 ; x = \psi(t^0) + (t - t^0) \psi'(t^0) , t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 ; x = \psi^1(t_1^0) + (t_1 - t_1^0) \psi'(t_1^0) , t_1 \in \mathbb{R} \right\} = T_{\psi^1}(x^0) \end{aligned}$$

On en déduit facilement que : Une orientation de C_ψ induit sur $T_\psi(x^0)$ et $T_{\psi^1}(x^0)$ deux orientations identiques (resp. opposées) si :

$$\forall t \in \Omega , \theta'(t) \in \mathbb{R}_+^* \quad (\text{resp. } \forall t \in \Omega , \theta'(t) \in \mathbb{R}_-^*)$$

2.4.2 Orientation des surfaces paramétrées dans \mathbb{R}^3 .

Supposons que Ω_1 soit un ouvert de \mathbb{R}^2 , image de Ω par un difféomorphisme θ (c-à-d une application bijective de Ω sur Ω_1 , continument différentiable sur Ω dont l'application réciproque est continument différentiable sur Ω_1).

Alors : $\forall u = (s, t) \in \Omega$, $\theta(u) = (\theta_1(u), \theta_2(u))$. On posera, ci-dessous : $\theta(u) = (u_1) = (s_1, t_1)$ avec $s_1 = \theta_1(u)$, $t_1 = \theta_2(u)$.

Soit ψ une application de Ω dans \mathbb{R}^3 continument différentiable sur Ω .

Posons : $\psi^1 = \psi \circ \theta^{-1}$ ($\Leftrightarrow \psi^1 = \psi \circ \theta^{-1}$) et :

$$\forall u = (s, t) \in \Omega , \quad D\psi(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial s}(u) \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(u) \end{pmatrix} , \quad D\theta(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_1}{\partial s}(u) & \frac{\partial \theta_2}{\partial s}(u) \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial t}(u) & \frac{\partial \theta_2}{\partial t}(u) \end{pmatrix}$$

et :

$$\forall u_1 = (s_1, t_1) \in \Omega_1 , \quad D\psi^1(u_1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi^1}{\partial s_1}(u_1) \\ \frac{\partial \psi^1}{\partial t_1}(u_1) \end{pmatrix}$$

Alors : $\forall u = (s, t) \in \Omega$, $D\psi(u) = D\theta(u) \cdot D\psi^1(u_1)$. D'autre part :

$$S_\psi = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 ; x = \psi(s, t) , (s, t) \in \Omega \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 ; x = \psi^1(s_1, t_1) , (s_1, t_1) \in \Omega_1 \right\} = S_{\psi^1}$$

On dira que S_ψ et S_{ψ^1} ont la même orientation (resp. des orientations opposées) si :

$$\forall u = (s, t) \in \Omega , \quad D\theta_1(u) \wedge D\theta_2(u) \in \mathbb{R}_+^* \quad (\text{resp. } D\theta_1(u) \wedge D\theta_2(u) \in \mathbb{R}_-^*)$$

Le déterminant noté $\det(D\theta_1 \wedge D\theta_2)$ est appelé le Jacobien de θ sur Ω . Soit $P_\psi(x^0)$ le plan tangent à S_ψ en un point régulier $x^0 = \psi(u^0)$, $u^0 \in \Omega$. Alors, avec des notations évidentes, on a :

$$\begin{aligned} P_\psi(x^0) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 ; x = \psi(u^0) + \left\langle (D\psi)(u^0) \mid (u - u^0) \right\rangle , u \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 ; x = \psi^1(u_1^0) + \left\langle (D\psi^1)(u_1^0) \mid (u_1 - u_1^0) \right\rangle , u_1 \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= P_{\psi^1}(x^0) \end{aligned}$$

On vérifie facilement que :

une orientation de S_ψ induit sur $P_\psi(x^0)$ et $P_{\psi^1}(x^0)$ deux orientations identiques (resp. opposées) si :

$$\forall u \in \Omega, \det(D\theta(u)) \in \mathbb{R}_+^* \quad (\text{resp. } \forall u \in \Omega, \det(D\theta(u)) \in \mathbb{R}_-^*)$$

2.5 Intégration sur des courbes et des surfaces contenues dans \mathbb{R}^3 .

On supposera connue, ci-dessous, la théorie élémentaire de l'intégration des fonctions continues bornées sur \mathbb{R} (resp. \mathbb{R}^2) ou sur une partie de \mathbb{R} (resp. \mathbb{R}^2).

2.5.1 Intégration sur une courbe paramétrée contenue dans \mathbb{R}^3 .

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et ψ une application de $[a, b]$ dans \mathbb{R}^3 , telle que $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$. On considère l'arc de courbe :

$$C_\psi = \{x \in \mathbb{R}^3; x = \psi(t), t \in [a, b]\}$$

On suppose que : $\forall t \in [a, b], \psi'(t) \neq 0$. On pose :

$$\forall u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3, \forall v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3, \langle u | v \rangle = \sum_{j=1}^3 u_j v_j \quad \text{et} \quad \|\cdot\| = (\langle \cdot | \cdot \rangle)^{\frac{1}{2}}$$

Définition : On dira que C_ψ est *rectifiable* si :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \{t_j^n; 0 \leq j \leq n\} \quad \text{tel que} \quad a = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = b$$

et tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Sup \{t_{j+1}^n - t_j^n; 0 \leq j \leq n-1\} \sum_{j=0}^{n-1} \|\psi(t_{j+1}^n) - \psi(t_j^n)\|) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^3 (\psi_k(t_{j+1}^n) - \psi_k(t_j^n))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

a une limite quand n tend vers l'infini.

On montre la

Proposition : On suppose que ψ est continue, dérivable sur $]a, b[$ (c-à-d que ψ est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite en a et à gauche en b), que sa dérivée est continue sur $]a, b[$ et que : $\forall t \in [a, b], \psi'(t) \neq 0$; Alors, C_ψ est rectifiable.

On appelle *longueur* de C_ψ , le scalaire :

$$l(C_\psi) = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^3 |\psi'_k(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt = \int_a^b \|\psi'(t)\| dt$$

On appelle *abscisse curviligne* (sur C_ψ) d'un point $\psi(t)$, $t \in [a, b]$, mesurée à partir d'une origine $\psi(t^0)$, $t^0 \in [a, b]$, le scalaire :

$$s(t) = \int_{t^0}^t \|\psi'(t)\| dt \quad \text{il en résulte que} \quad l(C_\psi) = s(b) - s(a)$$

Définition : Soit Ω une partie de \mathbb{R}^3 contenant C_ψ et f une application de C_ψ dans \mathbb{R} .

On munit C_ψ de la topologie induite par celle de \mathbb{R}^3 et on suppose que f est continue sur C_ψ . On appelle intégrale de f sur C_ψ , le scalaire que l'on notera

$$\int_{C_\psi} f(M) dl(M) \text{ qui est égal à } \int_a^b f(\psi(t)) ds(t) = \int_a^b f(\psi(t)) \|\psi'(t)\| dt$$

2.5.2 Circulation d'un champ vectoriel sur une courbe paramétrée contenue dans \mathbb{R}^3 .

Définition : On appellera *champ vectoriel* dans Ω une application $U = (U_1, U_2, U_3)$ de Ω dans \mathbb{R}^3 . Etant donné $M = \psi(t) \in \Omega$ on aura donc $U(M) = U(\psi(t))$. On appellera *circulation (ou travail)* de U le long de la courbe $C_\psi \subset \Omega$, le scalaire que l'on notera

$$\int_{C_\psi} \langle U(M) | dM \rangle, \text{ qui est égal à : } \int_a^b \langle U(\psi(t)) | \psi'(t) \rangle dt = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^3 U_k(\psi(t)) \psi'_k(t) \right) dt$$

quand cette dernière intégrale a un sens.

Champ dérivant d'un potentiel.

Supposons, maintenant, que Ω soit une partie ouverte connexe non vide de \mathbb{R}^3 .

On dira que le champ vectoriel $U = (U_1, U_2, U_3)$ *dérive d'un potentiel* W , s'il existe une application W de Ω dans \mathbb{R} , telle que : $U = DW (= grad W)$ ou plus explicitement :

$$\forall k \in \{1, 2, 3\} \quad \forall M = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \quad U_k(M) = \frac{\partial}{\partial x_k} W(M)$$

Posons : $A = \psi(a)$ et $B = \psi(b)$. Alors :

$$\begin{aligned} \int_{C_\psi} \langle U(M) | dM \rangle &= \int_a^b \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (W(\psi(t))), \psi'_k(t) \right) dt = \\ \int_a^b \frac{d}{dt} (W(\psi(t))) dt &= W(\psi(b)) - W(\psi(a)) = W(B) - W(A) \end{aligned}$$

On en déduit que : si ψ^{-1} est une application de $[a, b]$ dans \mathbb{R}^3 ayant la même régularité que ψ et telle que $\psi^{-1}(a) = A$ et $\psi^{-1}(b) = B$, alors :

$$\int_{C_{\psi^{-1}}} \langle U(M) | dM \rangle = \int_{C_\psi} \langle U(M) | dM \rangle = W(B) - W(A)$$

On montre que :

Pour que la circulation de U le long d'une courbe "régulière" $C_\psi \subset \Omega$, d'extrémités A et B ne dépende que de A et B et non de C_ψ (ou de ψ), il faut et il suffit que U dérive d'un potentiel.

Alors, quelle que soit la courbe fermée "régulière" $C \subset \Omega$, on a :

$$\int_C \langle U(M) | dM \rangle = 0$$

2.5.3 Intégration sur une surface paramétrée contenue dans \mathbb{R}^3 .

Soit Ω une partie ouverte connexe non vide de \mathbb{R}^2 et ψ une application de Ω dans \mathbb{R}^3 , continue sur Ω et possédant sur Ω des dérivées premières continues.

On suppose que Ω a une mesure finie dans \mathbb{R}^2 , que

$$\forall (s, t) \in \Omega, \quad \left\| \frac{\partial \psi(s, t)}{\partial s} \wedge \frac{\partial \psi(s, t)}{\partial t} \right\| \neq 0 \quad \text{et que} \quad \left\| \frac{\partial \psi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\| \quad \text{est bornée sur } \Omega.$$

On considère la surface : $S_\psi = \{x \in \mathbb{R}^3 ; x = \psi(s, t), (s, t) \in \Omega\}$

On notera que :

$$\forall (s, t) \in \Omega, \quad \left(\frac{\partial \psi(s, t)}{\partial s} \wedge \frac{\partial \psi(s, t)}{\partial t} \right) \quad \text{est un vecteur directeur de la normale } n(s, t) \text{ à } S_\psi \text{ en } (s, t).$$

On appelle aire de S_ψ , le scalaire :

$$\sigma(S_\psi) = \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial \psi(s, t)}{\partial s} \wedge \frac{\partial \psi(s, t)}{\partial t} \right\| ds dt$$

qui est fini, d'après les hypothèses faites plus haut.

Soit f une application de S_ψ dans \mathbb{R} .

On munit S_ψ de la topologie induite par celle de \mathbb{R}^3 et on suppose que f est continue sur S_ψ .

On appelle intégrale de f sur S_ψ , le scalaire noté $\int_{S_\psi} f(M) d\sigma(M)$ qui est égale à :

$$\int \int_{\Omega} f(\psi(s, t)) \left\| \frac{\partial \psi(s, t)}{\partial s} \wedge \frac{\partial \psi(s, t)}{\partial t} \right\| ds dt$$

2.5.4 Flux d'un champ vectoriel à travers une surface paramétrée dans \mathbb{R}^3 .

On utilise, ci-dessous, les mêmes hypothèses et notations que dans les paragraphes précédents.

Soit $U = (U_1, U_2, U_3)$ un champ vectoriel dans \mathbb{R}^3 , défini et continue sur S_ψ .

On appelle *flux* de U à travers S_ψ , le scalaire noté $\int_{S_\psi} \langle U(M) | n(M) \rangle d\sigma(M)$ qui est égal à :

$$\int \int_{S_\psi} \left\langle U(M) \mid \frac{\partial \psi(s, t)}{\partial s} \wedge \frac{\partial \psi(s, t)}{\partial t} \right\rangle ds dt$$

CHAPITRE 3

P3 ÉLECTROMAGNÉTISME.

C'est au dix-huitième siècle que les phénomènes électriques et magnétiques ont commencé à être étudiés scientifiquement. Auparavant ils étaient considérés comme des curiosités de la nature. Aujourd'hui, ils jouent un rôle essentiel dans tous les domaines de l'activité humaine.

3.1 Généalogie de l'électromagnétisme.

- 1600 *W. Gilbert* écrit un livre sur *les magnets*.
- 1660 *O. von Guericke* construit une *machine électrostatique*.
- 1733 *Dufay* découvre la *double nature de l'électricité*.
- 1747 *B. Franklin* met en évidence l'*induction électrostatique*.
- 1785 *Galvani* montre que l'électricité intervient dans le *monde du vivant*.
- 1794 *Volta* construit une *pile électrique*.
- 1820 *Oersted* montre l'influence du courant électrique sur un aimant.
- 1826 *Ohm* explicite la loi sur la circulation d'un courant électrique continu dans un conducteur.
- 1831 *Faraday* découvre le phénomène d'*induction électromagnétique*.
- 1841 *Joule* met en évidence le *dégagement de chaleur* produit par la circulation électrique dans un conducteur.
- 1861-1864 *Maxwell* établit les *lois fondamentales de l'électromagnétisme*.
- 1888 *Hertz* produit des *ondes électromagnétiques*.

A. Electrostatique.

3.2 Les fondements de l'électrostatique.

3.2.1 La charge électrique.

A tout corps électrisé est associé un nombre réel différent de zéro qu'on appelle sa charge électrique.

Deux corps électrisés ayant des charges de mêmes signes (resp. de signes opposés) se repoussent (resp. s'attirent).

La charge électrique est une grandeur *extensive* qui reste invariante dans tout changement de référentiel galiléen.

L'électrisation d'un corps peut être transférée à un autre corps.

3.2.2 La charge électrique ponctuelle.

On dira qu'une charge électrique \mathbf{q} est *ponctuelle* si elle est portée par un ensemble Ω dont les dimensions sont "très petites" relativement à l'étalon de mesure d'observation utilisé.

Si P est un point de Ω , on notera (abusivement) $\mathbf{q}(P)$ ou \mathbf{q}_P la charge électrique portée par Ω .

Hypothèse : Dans la suite, sauf mention explicite du contraire, nous supposons que le domaine de l'espace où nous opérons est vide.

Notation : Dans la suite nous désignerons par $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien de l'espace (à trois dimensions) et par $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot | \cdot \rangle}$, sa norme associée.

3.2.3 La loi de Coulomb.

Soient $\mathbf{q}(A)$ et $\mathbf{q}(B)$ deux charges électriques ponctuelles situées en deux points (distincts) A et B de l'espace (à trois dimensions) qui sont **fixes** relativement à un référentiel galiléen. Désignons par $F(A, B)$ le vecteur de l'espace qui représente la force (d'attraction ou de répulsion) exercée par $\mathbf{q}(A)$ sur $\mathbf{q}(B)$.

La loi de Coulomb (vérifiée expérimentalement) dit que :

$$F(A, B) = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} \mathbf{q}(A) \cdot \mathbf{q}(B) \cdot \frac{\mathbf{AB}}{\|AB\|^3}$$

où ε_0 est un scalaire positif appelé *permittivité euclidienne du vide*.

On notera que : si $\mathbf{q}(A)$ et $\mathbf{q}(B)$ sont de même signes (resp. de signes opposés) alors $F(A, B)$ a la même orientation que \mathbf{AB} (resp. une orientation opposée à celle de \mathbf{AB}).

De ce qui précède, il résulte que :

$$\|F(A, B)\| = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} |\mathbf{q}(A)| \cdot |\mathbf{q}(B)| \cdot \|\mathbf{AB}\|^{-2}$$

On dit que $F(A, B)$ est une *force coulombienne*.

Remarque 1 (i) *La loi de Coulomb est "la plus simple" qui explicite l'action de $\mathbf{q}(A)$ sur $\mathbf{q}(B)$.*

(ii) *On vérifie immédiatement que : $\lim_{B \rightarrow A} \|F(A, B)\| = +\infty$.*

On en déduit que la loi de Coulomb n'est applicable que si B est suffisamment éloigné de A .

(iii) *Formellement, la loi de Coulomb est analogue à celle de la gravitation universelle ; ces deux lois font référence à un même modèle mathématique.*

Proposition 1 (i) *Quels que soient les points A, B, C de l'espace, on a :*

$$F(B, A) = - F(A, B)$$

(ii) *Soient A et B deux points de l'espace. Notons $F_0(A, B)$ (resp. $F_1(A, B)$) la force électrique (coulombienne) exercée sur une charge électrique $q(B)$ par une charge électrique $q_0(A)$ (resp. $q_1(A)$). Alors :*

$$(q_1(A))^{-1} F_1(A, B) = (q_0(A))^{-1} F_0(A, B) .$$

3.2.4 Quantification de la charge électrique.

En 1910, Millikan a montré que toute charge électrique est un *multiple entier, positif ou négatif*, d'un nombre réel positif e qu'on appelle **charge électrique élémentaire**.

La charge électrique de l'**électron** est égal à $(-e)$ et celle du **proton** à $(+e)$.

Il n'y a donc pas de lien entre la charge électrique d'un corps (d'un système) et sa masse.

3.2.5 Distribution électriques linéiques, surfaciques, volumiques.

Soit Ω une partie de l'espace et W une famille de charges électriques portées par Ω .

On dira que W est *linéique* (resp. *surfacique*, *volumique*) si Ω peut être mise en correspondance *bijective* avec un segment de droite (resp. l'intérieur d'un cercle, d'une sphère).

Soit M un point de Ω et $\Delta\theta(M)$ un élément de longueur (resp. d'aire, de volume) contenant M lorsque W est de dimension 1 (resp. 2,3).

Soit $\Delta q(M)$ la charge électrique portée par $\Delta\theta(M)$.

Si

$$\lim_{\Delta\theta(M) \rightarrow 0} \frac{\Delta q(M)}{\Delta\theta(M)} = \rho(M) \in \mathbb{R}$$

alors, on dira que la **densité** de W en M est égale à $\rho(M)$.

Supposons que la densité de W en tout point $M \in \Omega$ soit égale à $\rho(M) \in \mathbb{R}$. Alors, si $q(W)$ est la charge électrique de W , on a :

$$q(W) = \int_{\Omega} \rho(P) d\theta(P)$$

quand cette intégrale a un sens.

On dira que W est *uniforme* si, quel que soit $P \in \Omega$, $q(P) = q_0 \in \mathbb{R}$. Alors, $q(W) = (\text{mesure}(\Omega)) q_0$.

3.3 Champ de forces électrostatiques.

3.3.1 Définition.

Soit A et M deux points de l'espace, A étant fixé et M quelconque.

Soit $F(A, M)$ la force électrostatique (coulombienne) exercée par une charge électrique $q(A)$ sur une charge électrique $q(M)$.

(Si M est "suffisamment éloigné" de A , alors)

$$F(A, M) = q(M) E_A(M) \quad \text{où} \quad E_A(M) = (4\pi\epsilon_0)^{-1} q(A) \frac{\mathbf{AM}}{\|AM\|^3}$$

$E_A(M)$ est appelé le *champ électrostatique (coulombien)* créé par la charge $q(A)$ au point M .

3.3.2 Champ électrostatique créé par une distribution de charges électriques.

Soit W une distribution de charges électriques portée par une partie bornée Ω de l'espace de dimension 1,2 ou 3 et de densité $\rho(P)$ en tout point $P \in \Omega$.

Le champ électrostatique créé par W en un point M de l'espace "suffisamment éloigné" de Ω est égal à :

$$E_W(M) = \int_{\Omega} (4\pi\epsilon_0)^{-1} \frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} \rho(P) d\theta(P)$$

$E_W(M)$ est la "somme" des champs électrostatiques élémentaires créés par les charges électriques élémentaires $\rho(P) d\theta(P)$ lorsque P décrit W .

3.4 Potentiel électrostatique.

3.4.1 Définition.

On fait les mêmes hypothèses et on utilise les mêmes notations que dans la définition du paragraphe précédent.

On suppose, de plus, que $\mathbf{q}(M) = \mathbf{q}_0$ et que M se déplace dans un domaine Ω borné et "suffisamment éloigné" de A .

Calculons le travail infinitésimal δT de la force électrostatique $F(A, M)$ exercée par $\mathbf{q}(A)$ sur \mathbf{q}_0 quand cette charge se déplace du point $M \in \Omega$ au point "infinitement voisin" $M + dM \in \Omega$. On a :

$$\begin{aligned} \delta T &= \langle F(A, M) | dM \rangle = \langle q_0 E_A(M) | dM \rangle = \langle q_0 E_A(M) | d(\mathbf{AM}) \rangle \\ &= q_0 \frac{\mathbf{q}(A)}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \frac{\mathbf{AM}}{\|\mathbf{AM}\|^3} | d(\mathbf{AM}) \right\rangle \end{aligned}$$

On vérifie facilement que :

$$-\left\langle \frac{\mathbf{AM}}{\|\mathbf{AM}\|^3} | d(\mathbf{AM}) \right\rangle = d\left(\frac{1}{\|\mathbf{AM}\|}\right)$$

Posons :

$$V_A(M) = \frac{\mathbf{q}(A)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\mathbf{AM}\|}$$

Ainsi : $E_A(M) = -grad(V_A(M))$ et $\delta T = -d(q_0 V_A(M))$.

$V_A(M)$ est appelé le **potentiel** créé par $\mathbf{q}(A)$ au point $M \in \Omega$.

On dit alors que le champ $E_A(M)$ **dérive** d'un potentiel.

On vérifie facilement, d'autre part, que si C est une courbe "régulière" d'extrémités M_0 et M_1 contenue dans Ω

alors :

$$\begin{aligned} \int_C \delta T &= \int_C \langle q_0 E_A(M) | dM \rangle = \int_C q_0 \langle grad(V_A(M)) | dM \rangle \\ &= q_0 (V_A(M_0) - V_A(M_1)) \end{aligned}$$

3.4.2 Potentiel électrostatique créé par une distribution de charges électriques.

Considérons une distribution de charges électriques W portée par une partie Ω de l'espace. On suppose que Ω est borné, de dimension 1,2 ou 3 et que la densité électrique en tout point $P \in \Omega$ est égale à $\rho(P)$.

On vérifie facilement, alors, que si $V_W(M)$ est le potentiel électrostatique créé en un point $M \in \Omega$ par W , on a :

$$V_W(M) = \int_{\Omega} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|PM\|} d\theta(P)$$

où $d\theta$ est l'élément de longueur, d'aire ou de volume de Ω suivant que la dimension de Ω est égale à 1,2 ou 3

3.4.3 Equipotentiellles électrostatiques.

On appelle surfaces équipotentiellles électrostatiques, les surfaces d'équation : $V_A(M) = cste$.

Comme $E_A(M) = -grad(V_A(M))$ le champ électrostatique est orthogonal aux lignes équipotentiellles.

3.4.4 Champ et potentiel électrostatiques créés par un dipôle électrique.

On appelle **dipôle électrique** un ensemble formé de deux charges électriques $q(A)$ et $q(B)$ telles que :

$q(A) = -q$, $q(B) = +q$, q étant une charge électrique (strictement) positive.

On désignera par $q(A, B)$ ce dipôle électrique et on notera O le milieu de AB .

Déterminons le champ et le potentiel électrostatiques créés par $q(A, B)$ en un point M tel que $\|AB\|$ soit négligeable devant OM .

(i) Notons $E_{AB}(M)$ le champ électrostatique créé par $q(A, B)$ en M .

On sait que :

$$E_{AB}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{BM}}{\|BM\|^3} - \frac{\mathbf{AM}}{\|AM\|^3} \right)$$

Comme $\|OA\|$ et $\|OB\|$ sont négligeables devant $\|OM\|$, on a, au deuxième ordre près :

$$E_{AB}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{BA}}{\|OM\|^3}$$

(ii) Notons $V_{AB}(M)$ le potentiel électrostatique créé par $q(A, B)$ en M .

On sait que :

$$V_{AB}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|BM\|} - \frac{1}{\|AM\|} \right)$$

Comme on l'a fait plus haut, on en déduit que :

$$dV_{AB}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \Xi \mid d \left(\frac{1}{\|OM\|} \right) \right\rangle$$

où $\Xi = \mathbf{q}(BA)$ est le **moment** du dipôle $\mathbf{q}(A, B)$.

3.5 Le théorème de Gauss.

Soit $M \in \mathbb{R}^3$ et $\Omega(M)$ une sphère de centre M et de rayon $\omega(M) \neq 0$.

Soit $\mathbf{q}(M)$ une charge électrique située en M .

En un point P de l'espace "suffisamment éloigné" de M , $\mathbf{q}(M)$ crée un champ électrique :

$$E(M, P) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \mathbf{q}(M) \frac{\mathbf{MP}}{\|MP\|^3}$$

Le flux de $E(M, P)$ à travers $\Omega(M)$ est égal à :

$$E(M, P) \times 4\pi (\omega(M))^2 = \frac{\mathbf{q}(M)}{\varepsilon_0}$$

Ce flux est donc *proportionnel* à $\mathbf{q}(M)$ et *indépendant* de $\omega(M)$.

Soit F un ensemble compact dans \mathbb{R}^3 dont l'intérieur $\overset{\circ}{F}$ n'est pas vide et dont la frontière ∂F est "régulière".

Supposons, maintenant, que $M \in \overset{\circ}{F}$, que $\Omega(M)$ soit contenu dans $\overset{\circ}{F}$ et que toute demi-droite issue de M rencontre ∂F en un seul point.

Alors, le flux du champ électrique créé par $\mathbf{q}(M)$ à travers ∂F , que nous noterons $\Phi(M, \partial F)$ est tel que :

$$\begin{aligned} \Phi(M, \partial F) &= \int_{\partial F} \langle E(M, P) | n(P) \rangle d\sigma(P) \\ &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \mathbf{q}(M) \int_{\partial F} \left\langle \frac{\mathbf{MP}}{\|MP\|^3} | n(P) \right\rangle d\sigma(P) \end{aligned}$$

Or, on vérifie facilement que :

$$\int_{\partial F} \left\langle \frac{\mathbf{MP}}{\|MP\|^3} | n(P) \right\rangle d\sigma(P) = \int_{\Omega(M)} \left\langle \frac{\mathbf{MP}}{\|MP\|^3} | n(P) \right\rangle d\sigma(P) = 4\pi$$

Par conséquent :

$$\Phi(M, \partial F) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \mathbf{q}(M) \times 4\pi = \frac{\mathbf{q}(M)}{\varepsilon_0}$$

De ce qui précède on déduit facilement le

Théorème de Gauss (intégral)

Soit Q une distribution discrète ou volumique de charges électriques contenues dans $\overset{\circ}{F}$ et qui crée, dans l'espace, un champ électrique E .

Notons $\Phi(Q, \partial F)$ le flux de E à travers ∂F . Alors :

$$\Phi(M, \partial F) = \int_{\partial F} \langle E(P) | n(P) \rangle d\sigma(P) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Lorsque Q est une distribution volumique de charges électriques, de densité ρ , on a :

$$Q = \int_F \rho(P) d\theta(P)$$

Alors :

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_F \rho(P) d\theta(P) = \int_{\partial F} \langle E(P) | n(P) \rangle d\sigma(P) = \int_F \operatorname{div} E(P) d\theta(P)$$

Par conséquent, on peut énoncer le

Théorème de Gauss (local)

Avec les hypothèses et notations ci-dessus, on a :

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

3.6 Equilibre électrostatique.

Un conducteur Ω d'intérieur $\overset{\circ}{\Omega}$ non-vidé est en équilibre électrostatique lorsque le champ électrostatique dans $\overset{\circ}{\Omega}$ est nul.

On déduit alors du théorème de Gauss que si Ω contient des charges électriques, elles sont nécessairement à la surface de Ω .

De plus, à l'intérieur de Ω , le potentiel électrostatique est constant puisque :

si A et B sont deux points quelconques intérieurs à Ω et si C est une courbe "régulière" quelconque reliant A et B et contenue dans l'intérieur de Ω , on a :

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \langle E(M) | dM \rangle = 0$$

3.6.1 Capacité d'un conducteur.

On montre facilement que :

- (i) Pour un conducteur en équilibre électrostatique, il n'existe qu'une seule distribution surfacique de charge électrique licite.
- (ii) Pour un conducteur possédant un potentiel électrostatique (uniforme), il n'existe qu'une seule distribution surfacique de charge électrique licite.
- (iii) De ce qui précède, il résulte que si Q (resp. V) est la charge électrique (resp. le potentiel) d'un conducteur Ω en équilibre électrostatique, alors le rapport

$$C = \frac{Q}{V} \text{ est constant.}$$

C est appelé la *capacité du conducteur* Ω .

- (iv) Si Ω est un conducteur électrique de charge Q , de potentiel V et d'énergie électrostatique \mathcal{E} , alors :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

3.6.2 Système de n conducteurs en équilibre électrostatique.

Soit Ω_j un conducteur électrique de charge Q_j et de potentiel V_j , $j = 1, \dots, n$.
En raison de la linéarité des équations de l'équilibre électrostatique, on a :

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ \dots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_n \end{pmatrix}$$

C_{kl} est appelé *coefficient d'influence* de Ω_k sur Ω_l , lorsque $k \neq l$.

et C_{pp} est appelé *capacité de Ω_p en présence des conducteurs Ω_j , $j \neq p$* .

3.6.3 Condensateurs chargés électriquement

On appelle *condensateur* un système de deux conducteurs Ω_1 et Ω_2 chargés électriquement, tels que toute ligne du champ électrostatique émanant de Ω_1 aboutisse sur Ω_2 ; Si Q est la charge électrique de Ω_2 et U la différence de potentielle entre Ω_1 et Ω_2 , alors le quotient

$$C = \frac{Q}{U}$$

est appelé la *capacité du condensateur*.

On appelle énergie (électrostatique) du condensateur, la quantité \mathcal{E} telle que :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

B. Electrodynamique.

3.7 Le courant électrique.

On dit qu'un milieu conduit l'électricité ou bien qu'il est **conducteur**, lorsque des charges électriques contenues dans ce milieu peuvent s'y déplacer.

Un milieu qui ne conduit pas l'électricité est dit **isolant**.

On appelle **courant électrique** une distribution de charges électriques en mouvement.

3.8 Charge électrique moyenne. Densité de charge électrique.

Soit Ω un milieu conducteur contenu dans \mathbb{R}^3 fixe par rapport à un repère galiléen et soit K une partie de Ω .

Désignons par $W(K, t)$, l'ensemble des charges électriques contenues dans K , à l'instant t et soit $A(K; t) = \{\alpha \in A ; \mathbf{q}_\alpha \in W(K, t)\}$

où A est un ensemble d'indices et \mathbf{q}_α ($\alpha \in A$) une charge électrique.

On supposera que $A(K; t)$ est fini.

Posons (pour simplifier l'écriture) : $m(K; t) = \text{Card}(A(K; t))$.

On supposera aussi que K est muni d'une mesure μ .

Notons que K peut être linéique, surfacique ou volumique.

3.8.1 Définitions.

On appellera **charge électrique moyenne** dans K , à l'instant t , la quantité :

$$\rho(K, t) = (\mu(K))^{-1} \left(\sum_{\alpha=1}^{m(K;t)} \mathbf{q}_\alpha \right)$$

On appellera **courant électrique moyen** dans K , à l'instant t , le vecteur :

$$J(K, t) = (\mu(K))^{-1} \left(\sum_{\alpha=1}^{m(K;t)} \mathbf{q}_\alpha v_\alpha(t) \right)$$

où $v_\alpha(t)$ est la vitesse de la charge \mathbf{q}_α , à l'instant t

Supposons que $W(K, t)$ soit constitué uniquement de charges identiques, c-à-d que : $\forall \alpha \in A(K; t)$, $\mathbf{q}_\alpha = \mathbf{q}$. Alors :

$$\rho(K, t) = (\mu(K))^{-1} m(K; t) \mathbf{q} \quad \text{et} \quad J(K, t) = (\mu(K))^{-1} \mathbf{q} \left(\sum_{\alpha=1}^{m(K;t)} v_\alpha(t) \right)$$

Posons :

$$\bar{v}(K, t) = (m(K; t))^{-1} \left(\sum_{\alpha=1}^{m(K;t)} v_\alpha(t) \right)$$

$\bar{v}(K, t)$ est la **vitesse moyenne** (on dit aussi la dérive) des charges électriques contenues dans K , à l'instant t .

Il en résulte que :

$$J(K, t) = \rho(K, t) \bar{v}(K, t)$$

Supposons que $W(K, t)$ soit constitué de p groupes de charges *identiques*. Alors :

$$W(K, t) = \cup_{k=1}^p W_k(K, t)$$

où $W_k(K, t)$ contient $m_k(K, t)$ charges identiques \mathbf{q}^k , à l'instant t , $k = 1, \dots, p$.

On vérifie facilement que :

$$\rho(K, t) = \sum_{k=1}^p \rho_k(K, t) \quad \text{où} \quad \rho_k(K, t) = (\mu(K))^{-1} m_k(K, t) \mathbf{q}^k$$

$$J(K, t) = \sum_{k=1}^p J_k(K, t) \bar{v}_k(K, t) \quad \text{avec}$$

$$\bar{v}_k(K, t) = (m_k(K; t))^{-1} \left(\sum_{\alpha=1}^{m_k(K;t)} v_\alpha(t) \right), \quad k = 1, \dots, p$$

3.8.2 Densité de charge électrique.

Soit P un point (quelconque) donné dans K .

Considérons une famille de parties de K , $\{K_\beta(P) ; \beta \in B\}$ où B est un ensemble d'indices, telle que

$$P = \bigcap_{\beta \in B} K_\beta(P)$$

On appellera densité de charge électrique en P , à l'instant t , la quantité :

$$\rho(P, t) = \lim (\rho(K_\beta(P), t) ; \sup_{\beta \in B} \mu(K_\beta(P)) \rightarrow 0)$$

lorsque cette limite existe.

Notons $Q(K, t)$ la charge électrique totale contenue dans K , à l'instant t . On a évidemment :

$$Q(K, t) = \sum_{\alpha=1}^{m(K;t)} \mathbf{q}_\alpha = \mu(K) \rho(K, t)$$

Montrons que :

$$Q(K, t) = \int_K \rho(P, t) d\mu(P)$$

Pour cela, subdivisons K au moyen d'une famille de parties de K ,

$\{K(P_j) ; j = 1, \dots, p\}$, ($p \in \mathbb{N}^*$) telle que

$$(\forall j, P_j \in K) \quad K(P_j) \cap K(P_l) = \emptyset \quad \text{si } j \neq l, \quad \bigcup_{j=1}^p K(P_j) = K$$

et $\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sup_{j \in \{1, \dots, p\}} \mu(K_\beta(P)) \right) = 0$

Alors :

$$\sum_{j=1}^p \mu(K(P_j)) \rho(K(P_j), t) = \sum_{j=1}^p Q(K(P_j), t) = Q(K, t) = \mu(K) \rho(K, t)$$

Le résultat annoncé résulte du fait que ;

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^p \mu(K(P_j)) \rho(K(P_j), t) = \int_K \rho(P, t) d\mu(P)$$

3.9 Densité et intensité du courant électrique.

On appellera **densité du courant électrique** en un point $P \in K$, à l'instant t , le vecteur :

$$J(P, t) = \lim (J(K_\beta(P), t) ; \sup_{\beta \in B} \mu(K_\beta(P)) \rightarrow 0)$$

lorsque cette limite existe.

Soit S une surface régulière orientée, contenue dans K .

Notons $n(P)$ la normale extérieure unitaire à S , en un point (quelconque) $P \in S$.

Supposons, maintenant, que $W(K, t)$ soit constitué uniquement de charges identiques. On sait que :

$$\rho(K, t) = (\mu(K))^{-1} m(K; t) \mathbf{q} \quad \text{et} \quad J(K, t) = \rho(K, t) \bar{v}(K, t)$$

Soit $K(P)$ une partie "infinitésimale" de S , contenant un point (quelconque) donné $P \in S$.

Désignons par $\Gamma(P, dt)$ le cylindre de base $K(P)$ dont les génératrices sont parallèles à $\bar{v}(K(P), t)$ et ont pour longueur $\bar{v}(K(P), t) dt$.

Au premier ordre près, $\Gamma(P, dt)$ a pour volume :

$$\Theta(\Gamma(P), t) = \langle \bar{v}(K(P), t) dt | n(P) \rangle$$

Supposons que S soit munie d'une masse superficielle σ telle que $\sigma(S) < +\infty$. Alors, on dira que

$$I(K(P), t) = \langle J(K(P), t) | n(P) \rangle \sigma(K(P))$$

est l'**intensité du courant électrique** de densité $J(\cdot, t)$ traversant $K(P)$, à l'instant t c-à-d la charge électrique $\mathbf{q}(K(P), t)$ qui traverse $K(P)$ pendant l'unité de temps.

Subdivisons S au moyen d'une famille de parties

$$\{K(P_j) ; j = 1, \dots, p\}, \quad (p \in \mathbb{N}^*) \text{ comme on l'a fait plus haut}$$

Posons :

$$I_p(S, t) = \sum_{j=1}^p \langle J(K(P_j), t) | n(P_j) \rangle \sigma(K(P_j)) \quad \text{et} \quad I(S, t) = \lim_{p \rightarrow \infty} I_p(S, t) \quad \text{lorsque cette limite a un sens.}$$

Alors, (avec des conditions de régularité suffisantes - par exemple si K est ouverte et étoilée - qu'on supposera vérifiées dans la suite) on a :

$$I(S, t) = \int_S \langle J(P, t) | n(P) \rangle d\sigma(P)$$

$I(S, t)$ est le flux du champ vectoriel $\{J(P, t); P \in K\}$ à travers S , à l'instant t .

De l'étude ci-dessus, il résulte facilement que :

$I(S, t)$ est la charge électrique qui traverse S , pendant l'unité de temps.

On dira que $I(S, t)$ est l'intensité du courant électrique de densité $J(\cdot, t)$ traversant S , à l'instant t . On dira que le courant électrique considéré est stationnaire si $I(S, t)$ est indépendante du temps.

Prolongement :

On peut étendre les définitions de $\mathbf{q}(P, t)$ et $J(P, t)$ au cas où $A(\Omega(P), t)$ n'est pas dénombrable, de sorte que :

$$\rho(\Omega, t) = (\mu(\Omega(P)))^{-1} \int_{A(\Omega(P), t)} \mathbf{q}_\alpha d\gamma(\alpha) \quad \text{et} \quad J(\Omega, t) = (\mu(\Omega(P)))^{-1} \int_{A(\Omega(P), t)} \mathbf{q}_\alpha v_\alpha(t) d\gamma(\alpha)$$

où γ est une mesure sur $A(\Omega(P), t)$.

Analogie :

Il existe une analogie entre la circulation d'un courant électrique et l'écoulement d'un fluide. Dans cette analogie, la charge électrique moyenne (resp. la densité) d'un courant électrique correspondent à la masse volumique (resp. le courant volumique) d'un fluide.

3.10 Bilan de charge.

Supposons que K soit un ensemble volumique contenu dans Ω et admettant pour frontière une surface S fermée et régulière.

Notons $\delta Q(K, t)$ la variation de la charge électrique de K entre les instants t et $t + dt$.

Désignons par \overline{K} l'adhérence de K dans \mathbb{R}^3 et supposons que la variation de charge $\delta Q(K, t)$ résulte exclusivement de l'échange de charges entre K et le milieu qui lui est extérieur.

Du paragraphe précédent on déduit que :

$$\frac{\delta Q(K, t)}{dt} = - I(S, t)$$

On sait, d'autre part, que :

$$Q(K, t) = \int_K \rho(P, t) d\mu(P)$$

On en déduit que :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_K \rho(P, t) d\mu(P) \right) = - \int_S \langle J(P, t) | n(P) \rangle d\sigma(P)$$

Avec des conditions de régularité suffisantes, on a :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_K \rho(P, t) d\mu(P) \right) = \int_K \frac{d}{dt} (\rho(P, t) d\mu(P))$$

et

$$\int_S \langle J(P, t) | n(P) \rangle d\sigma(P) = \int_K \text{div}_P (J(P, t)) d\mu(P)$$

Comme les deux relations ci-dessus sont vraies quels que soient K (et S) satisfaisant aux hypothèses spécifiées plus haut, on conclut que :

$$\frac{\partial \rho(P, t)}{\partial t} = -\text{div}_P (J(P, t))$$

Cette équation est l'équation locale du bilan de charge.

3.11 Puissance électrique.

On utilisera, ci-dessous, les mêmes notations et on fera les mêmes hypothèses qu'au paragraphe précédent.

Soit E le champ électrique dans Ω et P un point de Ω .

Notons $\delta T(P; (t, t + \delta t))$ le travail "infinitésimal" effectué par E lors du déplacement des charges électriques mobiles contenues dans un voisinage "infinitésimal" de P , de mesure $d\mu(P)$, dans Ω entre les instants t et $t + \delta t$.

Si $\bar{v}(P, t)$ est la vitesse moyenne des charges électriques mobiles, en P , à l'instant t , on a :

$$\delta T(P; (t, t + \delta t)) = \langle \rho(P, t) d\mu(P) E(P) | \bar{v}(P, t) \delta t \rangle$$

puisque $\rho(P, t) d\mu(P)$ est la charge électrique considérée et $\bar{v}(P, t) \delta t$ son déplacement. Posons :

$$\delta \Pi(P, t) = \frac{\delta T(P; (t, t + \delta t))}{\delta t}$$

On vérifie facilement que :

$$\delta \Pi(P, t) = \langle E(P) | J(P, t) \rangle d\mu(P)$$

$\Pi(P, t)$ est appelé la **puissance électrique** reçue par les charges mobiles contenues dans un "voisinage infinitésimal" de P de mesure $d\mu(P)$, contenu dans Ω , à l'instant t .

K étant une partie de Ω on écrira, dans la suite :

$$\Pi(K, t) = \int_K \langle E(P) | J(P, t) \rangle d\mu(P)$$

3.12 Puissance reçue par un dipôle électrocinétique.

Soit Ω un milieu conducteur, K une portion tubulaire de Ω limitée par deux sections S_1 et S_2 .

Supposons que S_1 et S_2 soient deux surfaces équipotentielles et que K soit parcouru par un courant électrique stationnaire d'intensité I .

Désignons par V_j le potentiel de S_j , $j = 1, 2$ et posons : $U = V_1 - V_2$.

Soit E le champ électrique dans K . Alors :

$$U = \int_C E(P) d\theta(P) \quad \text{et} \quad I = \int_S \langle J(P) | n(P) \rangle d\theta(P)$$

On sait que :

$$\Pi(K) = \int_K \langle E(P) | J(P) \rangle d\theta(P)$$

Ainsi :

$$\int_C \left\langle E(P) | \int_S \langle J(P) | n(P) \rangle d\theta(P) \right\rangle d\lambda(P)$$

On en déduit que : $\Pi(K) = U \cdot I$.

3.13 Loi d'Ohm.

3.13.1 Loi d'Ohm locale et conductivité.

Nous nous limiterons, dans ce paragraphe, au cas où le courant électrique est dû à l'existence d'un gradient du champ électrique.

Soit Ω un milieu conducteur.

On montre, *expérimentalement* que :

si J est la densité du courant électrique et E le champ électrique, dans Ω , alors, *près d'un état d'équilibre*, J est une fonction *linéaire* de E , c-à-d que :

$J = \Lambda E$, où Λ est une matrice (3×3) qu'on nomme conductivité de Ω .

La relation $J = \Lambda E$ est appelée **la loi d'ohm locale**.

Si Ω est *homogène*, alors Λ est *uniforme* sur Ω ,

si Ω est *isotrope*, alors $\Lambda = \lambda I_3$ où I_3 est la matrice (3×3) *unité* et $\lambda \in \mathbb{R}$,

si Ω est *anisotrope*, alors Λ est une matrice (3×3) quelconque.

3.13.2 Loi d'Ohm intégrale. Résistance en régime stationnaire.

Soit Ω un milieu conducteur *isotrope*, K une portion tubulaire de Ω limitée par deux sections équipotentielles S_1 et S_2 , ayant pour potentiels respectifs V_1 et V_2 .

Posons : $U = V_1 - V_2$.

Supposons que toute section S de K est traversée par un courant stationnaire d'intensité I .

Soit C une courbe régulière contenue dans K et reliant deux points $M_1 \in S_1$

et $M_2 \in S_2$.

Si E (resp J) désigne le champ électrique (resp. la densité de courant électrique) dans Ω , on a :

$$U = \int_C E(P) d\theta(P) \quad (\text{car } E = -\text{grad } U) \quad \text{et} \quad I = \int_S \langle J(P) | n(P) \rangle d\theta(P)$$

Considérons, maintenant, le rapport :

$$R(E, J) = \frac{U}{I}$$

On vérifie immédiatement que : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, R(\alpha E, \alpha J) = R(E, J)$.

Il en résulte que $R(E, J)$ est un scalaire qu'on appelle la **résistance** de K , que l'on notera, dans la suite, $R(K)$ ou, plus simplement, R .

Evidemment $R(K)$ dépend de la géométrie de K .

De ce qui précède, il résulte que : $U = RI$, relation que l'on nomme la **loi d'Ohm intégrale**. Si R_1, R_2, \dots, R_n , sont n *résistances en série* dans un circuit électrique, traversées par un courant électrique, si la portion de circuit qui contient les résistances R_1, R_2, \dots, R_n , a une résistance que l'on notera R si la différence de potentiel entre les sections qui limitent cette portion de circuit est égale à U , alors :

$$U = R I = \sum_{j=1}^n R_j I \quad \text{d'où :} \quad R = \sum_{j=1}^n R_j$$

D'autre part, si dans les mêmes conditions que ci-dessus R_1, R_2, \dots, R_n , sont n résistances en parallèle

si, alors, la résistance R_j est traversée par un courant d'intensité I_j , $j = 1, \dots, n$, on a : $U = R_k I_k$, $k = 1, \dots, n$.

Posons :

$$I = \sum_{k=1}^n I_k \quad \text{et} \quad U = R I$$

On a :

$$I_k = \frac{U}{R_k} \quad \text{et} \quad I = \sum_{k=1}^n \frac{U}{R_k} = \frac{U}{R} \quad \text{d'où :} \quad \frac{1}{R} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

3.14 Effet Joule.

Soit Ω un milieu conducteur *isotrope*, K une portion tubulaire de Ω , traversée par un courant stationnaire d'intensité I et de résistance R .

On vérifie expérimentalement qu'une partie de la puissance électrique reçue par K se dissipe en chaleur.

On appelle ce phénomène *l'effet Joule*.

La puissance électrique dissipée par effet Joule dans un élément "infinitésimal" de K de volume $\delta\theta$, pendant une durée δt , est égale à $U I \delta\theta \delta t$ ou encore à $R I^2 \delta\theta \delta t$.

Par conséquent, la puissance dissipée par effet Joule dans K , pendant une durée δt , est égale à $(\int_K R I^2 \delta\theta) \delta t$.

C. Magnétisme et Electromagnétisme.

Il existe dans la nature des matériaux qui ont la propriété d'attirer la limaille de fer mais aussi des objets en fer, en nickel, en cobalt ou des objets qui sont constitués d'alliages contenant du fer, du nickel ou du cobalt. Ces matériaux sont dits **magnétiques**. On les appelle aussi **aimants naturels**. On sait fabriquer des **aimants artificiels** qui ont les mêmes propriétés que les aimants naturels. Nous en parlerons plus loin. Quand on plonge un aimant naturel dans de la limaille de fer, celle-ci se répartit en deux lots distincts qui correspondent à deux zones spécifiques de l'aimant qui sont nommées **pôle magnétique nord et pôle magnétique sud**. Si on place, face à face, les pôles de même nom (resp. de noms différents) de deux aimants ceux-ci se repoussent (resp.s'attirent).

Il existe donc une analogie entre le comportement réciproque de deux pôles magnétiques et celui de deux charges électriques.

Cependant, s'il est possible d'isoler une charge électrique, il est impossible d'isoler l'un des pôles d'un aimant : en effet, si l'on coupe un aimant naturel en deux, alors, chaque fraction de l'aimant initial obtenu se comporte comme un nouvel aimant.

3.15 Champ magnétique créé par une charge électrique en mouvement.

Considérons deux charges électriques $\mathbf{q}(M)$ et $\mathbf{q}(N)$ en mouvement par rapport à un repère galiléen R et de vitesses $u(M)$ et $u(N)$ respectivement par rapport à R . On vérifie expérimentalement que la charge électrique $\mathbf{q}(M)$ exerce sur la charge électrique $\mathbf{q}(N)$ suffisamment éloignée de $\mathbf{q}(M)$, la force $F(M, N)$ telle que :

$$F(M, N) = (\mathbf{q}(N) u(N)) \wedge \left(\frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{q}(M) u(M)) \wedge \frac{\mathbf{MN}}{\|MN\|^3} \right)$$

où μ_0 est une constante qui dépend des unités choisies.

On appellera champ magnétique créé en N par la charge en mouvement $\mathbf{q}(M)$, la **force magnétique** :

$$B_M(N) = \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{q}(M) u(M)) \times \frac{\mathbf{MN}}{\|MN\|^3}$$

3.16 Champ magnétique créé par un courant stationnaire.

3.16.1 La loi de Biot et Savart.

Considérons un courant électrique créé par un flot W de charges électriques identiques, en mouvement par rapport à un repère galiléen R .

On suppose que ce courant électrique est stationnaire. Alors, sa densité est un vecteur J , indépendant du temps.

Soit K une partie de \mathbb{R}^3 (non vide), munie d'une mesure μ (induite par une mesure de \mathbb{R}^3) telle que $\mu(K) < +\infty$.

On suppose que K est "suffisamment éloignée" du courant électrique considéré.

Alors, le champ magnétique $B(N)$ créé par ce courant, en un point N de K est tel que :

$$B(N) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_K \left(J(M) \wedge \frac{\mathbf{MN}}{\|MN\|^3} \right) d\mu(M)$$

C'est la *loi de Biot et Savart*, qui a été établie et vérifiée expérimentalement.

3.16.2 Le flux magnétique est conservatif.

Calculons la divergence de B .

(Avec des conditions de régularité suffisantes) on a :

$$(\operatorname{div}(B))(N) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_K \operatorname{div} \left(J(M) \times \frac{\mathbf{MN}}{\|MN\|^3} \right) d\mu(M)$$

Or, $\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \langle \mathbf{b} \mid \operatorname{rot} \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{a} \mid \operatorname{rot} \mathbf{b} \rangle$ et, comme $\operatorname{rot}_N(J(M)) = 0$, on a :

$$(\operatorname{div}(B))(N) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_K - \left\langle J(M) \mid \operatorname{rot}_N \left(\frac{\mathbf{MN}}{\|MN\|^3} \right) \right\rangle d\mu(M)$$

Mais :

$$\operatorname{rot}_N \left(\frac{\mathbf{MN}}{\|\mathbf{MN}\|^3} \right) = \operatorname{rot}_N \left(\operatorname{grad}_N \left(-\frac{1}{\|\mathbf{MN}\|} \right) \right) = 0 \quad \text{car} \quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$$

On en déduit que : $\operatorname{div}(B) = 0$

3.16.3 Le potentiel vecteur.

Du fait que $\operatorname{div}(B) = 0$, il résulte que : $B = \operatorname{rot} A$.
 A est appelé le *potentiel vecteur du champ magnétique* B .
 On vérifie facilement que :

$$A(N) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_K \frac{J(M)}{\|\mathbf{MN}\|} d\mu(M)$$

3.17 Les lois de Faraday et de Lenz.

Hypothèses et notations :

Considérons, dans \mathbb{R}^3 , un circuit C , conducteur, filiforme et fermé.
 Supposons que C soit *immobile* relativement à un référentiel galiléen R .

Dans la suite de ce paragraphe, nous identifierons le circuit C à une courbe "*régulière*" de \mathbb{R}^3 que nous noterons encore C .

Supposons que, dans l'espace, règne un champ magnétique variable dans le temps, qui, en tout point $M \in \mathbb{R}^3$ et, à tout instant $t \in \mathbb{R}$, a pour valeur $B(M, t)$ relativement à C .

Soit S une surface *orientée "régulière"* dans \mathbb{R}^3 .

Notons, à tout instant t , $\Phi(t, S)$ le flux de $B(\cdot, t)$ à travers S . Nous savons que :

$$\Phi(t, S) = \int_S \langle B(M, t) | n(M) \rangle d\sigma(M)$$

où $n(M)$ est la normale extérieure unitaire à S en M , et $d\sigma$ l'élément d'aire de S .

Définition : On appelle force électromotrice (f.e.m.) induite dans le circuit (fixe) C , à l'instant t , la quantité :

$$e(t) = \frac{\Pi(C, t)}{I(t)}$$

où $\Pi(C, t)$ est la puissance reçue par C , à l'instant t et $I(t)$ l'intensité du courant qui traverse C , à l'instant t .

(i) La loi de Faraday :

(Avec les mêmes hypothèses et notations que ci-dessus)

Si S est un ensemble *compact*, ayant C pour *bord*, alors la variation de $\Phi(\cdot, S)$ **induit** dans C une force électromotrice (f.e.m.) e telle que :

$$\forall t, e(t) = -\frac{d}{dt}(\Phi(t, S))$$

(ii) La loi de Lenz :

$$\text{Si } \forall t, \frac{d}{dt}(\Phi(t, S)) > 0 \quad (\text{resp. } \frac{d}{dt}(\Phi(t, S)) < 0)$$

alors, le courant induit par $\Phi(\cdot, S)$ dans C est négatif (resp. positif)

Commentaires :

(*) La variation du flux magnétique $\Phi(\cdot, S)$ peut se produire en déplaçant S dans un champ magnétique invariable.

(**) La loi de Biot et Savart met en évidence l'existence d'un champ magnétique créé par un courant électrique ;

La loi de Faraday met en évidence l'existence d'un courant électrique créé par un champ magnétique ;

On dira que ces deux lois sont *réciproques*.

(iii) La relation de Maxwell-Faraday.

(Avec les mêmes hypothèses et notations que ci-dessus)

on sait que si, à l'instant t , $E(\cdot, t)$ est le champ électrique qui génère le courant électrique dans C , d'intensité $I(t)$, alors :

$$\Pi(C, t) = I(t) \int_C \langle E(P, t) | dP \rangle$$

Il en résulte que :

$$\forall t, e(t) = \int_C \langle E(P, t) | dP \rangle$$

D'autre part, avec des conditions de régularité suffisantes :

$$\frac{d}{dt}(\Phi(t, S)) = \frac{d}{dt} \left(\int_S \langle B(P, t) | n(P) \rangle d\sigma(P) \right) = \int_S \left\langle \frac{\partial B(P, t)}{\partial t} | n(P) \right\rangle d\sigma(P)$$

De la loi de Faraday, on déduit la relation de Maxwell-Faraday ci-dessous :

$$\int_C \langle E(P, t) | dP \rangle = - \int_S \left\langle \frac{\partial B(P, t)}{\partial t} | n(P) \right\rangle d\sigma(P)$$

(iv) Le potentiel électromagnétique.

(*) En régime variable, comme en régime stationnaire, le flux du champ électromagnétique est conservatif, c-à-d :

$$\forall t, \operatorname{div} B(\cdot, t) = 0$$

Cette propriété s'établit en régime variable comme en régime stationnaire. On en déduit que :

$$\forall t, B(\cdot, t) = \operatorname{rot}(A(\cdot, t))$$

(Evidemment) A est appelé le *potentiel vecteur* associé à B .

(**) (Avec les mêmes hypothèses et notations que ci-dessus) , on a :

$$\Phi(t, S) = \int_S \langle B(P, t) | n(P) \rangle d\sigma(P) = \int_C \langle A(P, t) | dP \rangle$$

De la relation de Maxwell-Faraday il résulte que :

$$\int_C \langle E(P, t) | dOP \rangle = - \int_C \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (A(P, t)) | dP \right\rangle$$

d'où :

$$\int_C \left\langle E(P, t) + \frac{\partial}{\partial t} (A(P, t)) | dP \right\rangle = 0$$

Il existe donc une fonction V telle que :

$$\forall t, E(P, t) + \frac{\partial}{\partial t} (A(P, t)) = - \text{grad} (V(\cdot, t))$$

Le couple (V, A) est appelé *potentiel électromagnétique*.

En régime stationnaire, $E = - \text{grad} V$ et $B = \text{rot} A$.

En régime statique, $A = 0$ et V est le potentiel électrostatique.

3.18 La force de Lorentz.

Définition : On appellera *champ électromagnétique*, relativement à un référentiel galiléen R , en un point M de l'espace, la donnée d'un couple $(E(M), B(M))$ où $E(M)$ (resp. $B(M)$) est le champ électrique (resp ; magnétique) au point M (relativement au référentiel R).

Considérons, dans \mathbb{R}^3 , une charge électrique \mathbf{q} , en mouvement par rapport à R .

On suppose que \mathbf{q} est animée de la vitesse w relativement à R et se déplace dans un champ électromagnétique (E, B) (relativement à R).

On vérifie expérimentalement que le champ électromagnétique (E, B) exerce alors sur la charge électrique \mathbf{q} une force F appelée *force de Lorentz*, telle que :

$$\forall M \in \mathbb{R}^3, F(M) = \mathbf{q} \left[E(M) + (w(M) \wedge B(M)) \right]$$

qui est *invariante dans tout changement de repère galiléen*.

Par conséquent, si R_1 est un référentiel galiléen animé d'une vitesse rectiligne uniforme u par rapport à R .

si (E_1, B_1) est le champ électromagnétique (E, B) considéré ci-dessus, explicité dans le repère galiléen R_1 , alors :

$$\forall M \in \mathbb{R}^3, F(M) = \mathbf{q} \left[E_1(M) + ((w(M) - u) \wedge B_1(M)) \right]$$

Il en résulte que :

$$\forall M \in \mathbb{R}^3, E_1(M) = E(M) - (u \wedge B_1(M)) \text{ et } B_1(M) = B(M)$$

3.19 Les équations de Maxwell dans le vide.

C'est Maxwell qui a explicité le système d'équations aux dérivées partielles qui détermine l'évolution d'un champ électromagnétique (E, B) (variable) - à partir des travaux de Faraday, en particulier.

Le système d'équations aux dérivées partielles de Maxwell, dans le vide, s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E &= -\frac{\partial B}{\partial t} & (a), \\ , \quad \operatorname{div} B &= 0 & (b), \\ \operatorname{div} (\varepsilon_0 E) &= \rho & (c), \\ \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu_0} B \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 E) &= J & (d) \end{aligned}$$

Les équations (a) et (b) sont des équations *structurelles*.

(a) est appelée *équation de Maxwell-Faraday*.

Les équations (c) et (d) relient le champ (E, B) aux densités de charge électrique ρ et de courant électrique J .

(c) se déduit du *théorème de Gauss*.

(d) est appelée *équation de Maxwell-Ampère*

Commentaires .:

(i) D'après le théorème de Gauss établi en Electrostatique, on sait que $\operatorname{div} (\varepsilon_0 E) = \rho$.

Ce théorème est encore vrai en Electrodynamique puisque le mouvement des charges électriques n'y intervient pas.

Or, on a montré que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} J = 0$$

On en déduit que

$$\operatorname{div} \left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) = 0$$

Le flux du vecteur

$$J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

est donc conservatif.

Mais on a montré que, en régime stationnaire :

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu_0} B \right) = J$$

Il en résulte que (d) étend le théorème d'Ampère en régime variable.

Maxwell a appelé "*courant de déplacement*", la quantité

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

Cette définition est **inappropriée** car la quantité ci-dessus est homogène à une densité de courant et ne correspond pas à un déplacement de charge électrique.

(ii) Avec des hypothèses convenables, on montre que tout champ de vecteurs X , dans \mathbb{R}^3 , se décompose de manière unique (modulo un vecteur constant) de la façon suivante :

$$X = X_1 + X_2 \quad \text{où} \quad \text{div } X_1 = 0 \quad \text{et} \quad \text{rot } X_2 = 0$$

Cette décomposition est appelée "formule d'Helmholtz".

De ce qui précède, on déduit qu'il existe deux champs de vecteurs Y et Z tels que :

$$X = -\text{grad } Y + \text{rot } Z$$

Ainsi :

$$\text{div } X = -\Delta Y \quad \text{et} \quad \text{rot } X = \text{grad } (\text{div } Z) - \Delta Z$$

La connaissance du couple $(\text{div } X, \text{rot } X)$ nous permet donc de déterminer Y, Z puis X .

Il est remarquable que les équations de Maxwell explicitent justement les relations fondamentales qui existent entre $(\text{div } B, \text{rot } B)$ et $(\text{div } E, \text{rot } E)$.

3.20 Ondes électromagnétiques dans le vide.

3.20.1 Equations de propagation des champs électriques et magnétiques dans le vide.

Nous allons, maintenant, établir, à partir des équations de Maxwell dans le vide, les lois de propagation des champs électriques et magnétiques dans le vide.

Nous supposons que les fonctions considérées seront suffisamment "régulières" pour que les opérations que nous effectuerons soient licites.

De la relation

$$-\frac{\partial B}{\partial t} = \text{rot } E, \quad \text{on déduit que :} \quad \text{rot} \left(-\frac{\partial B}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } B) = \text{rot} (\text{rot } E)$$

Or :

$$\text{rot} (\text{rot } E) = \text{grad } (\text{div } E) - \Delta E$$

Comme $\text{grad}(\text{div } E) = 0$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } B) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \Delta E$$

L'équation

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \Delta E$$

est l'équation de propagation du champ électrique.

On montrerait de même qu'en l'absence de sources électriques ($J = 0$), l'équation de propagation du champ magnétique est :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \Delta B$$

3.20.2 Equations de propagation du potentiel électromagnétique.

(Avec les hypothèses et notations utilisées plus haut) on a :

$$\text{rot } B = \text{rot } (\text{rot } A) = \text{grad } (\text{div } A) - \Delta A$$

Lorsque $J = 0$,

$$\text{rot } B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (-\text{grad } V - \frac{\partial A}{\partial t}) = -\text{grad } \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

D'où :

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \text{grad } (\text{div } A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t})$$

Et comme $\text{div } E = 0$,

$$\text{div } (-\text{grad } V - \frac{\partial A}{\partial t}) = 0 \quad \text{et par conséquent} \quad \text{div } A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

On en déduit les équations de propagation suivantes :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \Delta A \quad \text{et} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \Delta V$$

3.21 Energie d'un champ électromagnétique dans le vide.

Des équations

$$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{et} \quad \text{rot } \left(\frac{1}{\mu_0} B \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 E) = J$$

on déduit que :

$$\left\langle -\frac{1}{\mu_0} B \mid \text{rot } E \right\rangle = \frac{1}{\mu_0} \left\langle B \mid \frac{\partial B}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} (\|B\|^2)$$

et de même :

$$\left\langle \frac{1}{\mu_0} E \mid \text{rot } B \right\rangle = \langle J \mid E \rangle + \varepsilon_0 \left\langle E \mid \frac{\partial E}{\partial t} \right\rangle = \langle J \mid E \rangle + \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\|E\|^2)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \|E\|^2 + \frac{1}{2\mu_0} \|B\|^2 \right) &= -\langle J \mid E \rangle + \frac{1}{\mu_0} (\langle E \mid \text{rot } B \rangle - \langle B \mid \text{rot } E \rangle) \\ &= -\langle J \mid E \rangle + \frac{1}{\mu_0} \text{div } (E \wedge B) \end{aligned}$$

Posons :

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \|E\|^2 + \frac{1}{2\mu_0} \|B\|^2 \quad \text{et} \quad S = \frac{1}{\mu_0} (E \wedge B)$$

Alors :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\text{div } S - \langle J \mid E \rangle$$

U est appelé "énergie électromagnétique volumique" et S "vecteur de Poynting".

3.22 Equations de Maxwell dans un milieu matériel.

Nous dirons, très brièvement, que, dans un milieu matériel, il est nécessaire, pour décrire l'évolution d'un champ électromagnétique (E, B) , d'introduire les deux champs de vecteurs suivants : D appelé *induction électrique* et H appelé *excitation magnétique*. de sorte que les équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} & (a), \\ \operatorname{div} B = 0 & (b), \\ \operatorname{div} D = \rho & (c), \\ \operatorname{rot} H = J + \frac{\partial D}{\partial t} & (d) \end{cases}$$

où ρ (resp. J) est la densité de charge (resp. la densité de courant) électrique dans le milieu matériel considéré.

Dans le vide, on a, évidemment : $D = \varepsilon_0 E$ et $B = \mu_0 H$.

De même que plus haut, on montrerait, en posant :

$$U = \frac{1}{2} (\langle E | D \rangle + \langle B | H \rangle) \quad \text{et} \quad S = E \wedge H$$

que :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\operatorname{div} S - \langle J | E \rangle$$

U est encore appelé "énergie électromagnétique volumique" et S "vecteur de Poynting".

4.1 Introduction.

L'objet de ce chapitre est l'étude du mouvement des corps matériels, soumis à certaines contraintes, dans l'espace à trois dimensions.

Dans la suite, on appellera point matériel, un grain de matière dont les dimensions spatiales sont "très petites" relativement à l'étalon de mesure utilisé.

Le modèle mathématique d'un point matériel sera un couple $(M, \mu(M))$, où M est un point (quelconque) de \mathbb{E}^3 et $\mu(M)$ un scalaire positif ou nul appelé la masse de M .

4.2 La loi de la gravitation universelle (Newton 1687)

4.2.1 Énoncé.

Tout point matériel $(A, \mu(A))$ exerce sur tout autre point matériel $(M, \mu(M))$, quand $M \neq A$, une force d'attraction $F(A, M)$ telle que :

$$F(A, M) = -G \mu(A) \cdot \mu(M) \frac{\mathbf{AM}}{\|AM\|^3} \quad \text{où } G \text{ est une constante universelle.}$$

Commentaires :

- (i) Il existe une *analogie formelle* entre la loi de Coulomb en Electrostatique et la loi de gravitation universelle de Newton.

On passe de la première à la seconde en substituant aux charges électriques ponctuelles $q(A)$ et $q(B)$, les masses ponctuelles $\mu(A)$ et $\mu(B)$ et en substituant au coefficient $(4\pi\epsilon_0)^{-1}$ le coefficient $-G$. Il faut noter, cependant, que :

(*) d'une part, si les corps massiques électriquement neutres s'attirent toujours, les corps électriquement chargés peuvent s'attirer ou se repousser suivant leurs signes.

(**) d'autre part, la force de gravitation entre deux masses ne dépend pas du milieu dans lequel elles sont plongées, contrairement à la force coulombienne entre deux charges électriques.

- (ii) La force coulombienne est, environ, 10^{36} fois plus intense que la force de gravitation.
C'est parce que la force de gravitation intervient seule entre des corps astronomiques qu'elle joue un rôle essentiel en Cosmologie.

Proposition : (Avec les hypothèses et notations utilisées ci-dessus, on a)

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad F(A, M) &= -F(M, A) \\ \text{(ii)} \quad \|F(A, M)\| &= G \mu(A) \cdot \mu(M) \|AM\|^{-2} \\ \text{(iii)} \quad \lim_{M \rightarrow A} \|F(A, M)\| &= +\infty \end{aligned}$$

Preuve : immédiate.

Dans la suite (en tenant compte du commentaire (i) ci-dessus) nous énoncerons sans démonstration, les propriétés que l'on peut déduire de la loi de gravitation newtonienne car elles sont analogues à celles qui, en Electricité, se déduisent de la loi de Coulomb.

Ci-dessous, nous utiliserons les mêmes hypothèses et notations que ci-dessus.

4.2.2 Champ et potentiel gravitationnels.

Définition et proposition.

- (i) On appellera *champ gravitationnel* créé par la masse ponctuelle $(A, \mu(A))$ en un point quelconque M de l'espace différent de A , le vecteur :

$$E_A(M) = -G \mu(A) \cdot \frac{\mathbf{AM}}{\|AM\|^3}$$

$E(A, M)$ est la force exercée par la masse $(A, \mu(A))$ sur la masse $(M, 1)$.

- (ii) On appellera *potentiel gravitationnel* créé par la masse ponctuelle $(A, \mu(A))$ en un point quelconque M de l'espace, différent de A , le scalaire :

$$V_A(M) = -G \mu(A) \cdot \|AM\|^{-1}$$

(Comme en Electromagnétisme, on a) $E_A = -grad(V_A)$

Le théorème de Gauss : Soit F un ensemble compact dans \mathbb{R}^3 dont l'intérieur n'est pas vide et dont la frontière ∂F est "régulière".

- (i) Soit M un point contenu dans l'intérieur de F tel que toute demi-droite issue de F rencontre ∂F en un seul point (on dit que F est étoilé par rapport à M).
Soit $\mu(M)$ une masse ponctuelle située en M et $\Phi_M(\partial F)$ le flux du champ de gravitation créé dans l'espace par $(M, \mu(M))$. Alors :

$$\Phi_M(\partial F) = -4\pi G \mu(M)$$

- (ii) Soit Λ une distribution de masse volumique de densité (volumique) ρ telle que :

$$\Lambda = \int_F \rho(P) d\theta(P) \quad \text{où } d\theta \text{ est l'élément de volume}$$

Alors :

$$\Phi_M(\partial F) = -4\pi G \Lambda \quad \text{et} \quad div E = -4\pi G \rho$$

4.3 La loi fondamentale de la Dynamique.

Dans la suite de ce chapitre, nous nous placerons dans un cadre non-relativiste où l'espace et le temps sont des entités absolues.

Nous supposerons que les points de l'espace sont repérés par rapport à un référentiel donné.

4.3.1 Notions de base.

On considère un point M en mouvement dans l'espace.

On suppose que la *trajectoire spatiale* de M est représentée dans \mathbb{E}_3 par la courbe :

$$C = \{x \in \mathbb{E}_3 ; x = M(t) , t \in \Omega\} \quad \text{où } \Omega = [a, b] \quad \text{et} \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty$$

la fonction $t \rightarrow M(t)$ étant "régulière" sur Ω .

- (i) On appellera *quantité de mouvement* (ou *impulsion*) du point matériel $(M(t), \mu(M(t)))$, à l'instant t , le vecteur $p(M(t))$ (ou en abrégé $p(t)$) tel que :

$$p(M(t)) = \mu(M(t)) \cdot M'(t)$$

- (ii) On appellera *moment cinétique* du point matériel $(M(t), \mu(M(t)))$, par rapport à un point A , à l'instant t , le vecteur $L_A(M(t))$ (ou en abrégé $L_A(t)$) tel que :

$$L_A(M(t)) = AM(t) \wedge p(M(t))$$

$L_A(M(t))$ est le moment de $p(M(t))$ par rapport à A .

- (iii) On appellera *énergie cinétique* du point matériel $(M(t), \mu(M(t)))$, à l'instant t , le scalaire $e(M(t))$ (ou en abrégé $e(t)$) tel que :

$$e(M(t)) = \frac{1}{2} \mu(M(t)) \|M'(t)\|^2$$

4.3.2 Énoncé de la loi fondamentale de la Dynamique (deuxième loi de Newton).

(Avec les hypothèses et notations utilisées ci-dessus) la trajectoire spatiale de $M(t)$ dans \mathbb{E}_3 , lorsque le point matériel $(M(t), \mu(M(t)))$ est soumis à un ensemble de forces de résultante F , est déterminée par l'équation suivante :

$$F = \frac{d}{dt}(p(M(t)))$$

On notera que si $\mu(M(t)) = \mu_0$, μ_0 étant une masse indépendante du temps, alors :
 $F = \mu_0 M'(t)$.

4.4 Mouvement à une dimension.

4.4.1 Chute libre sans frottement.

Considérons un corps de centre de gravité H tombant en chute libre, sans frottement. Sur ce corps s'exerce une seule force, son poids, dont la valeur absolue est égale à $m.g$, g étant l'accélération de la pesanteur en H , supposée constante.

Alors, l'équation du mouvement de H sur un axe Oz passant par le centre de la Terre O et dirigé suivant la verticale passant par H est : $z''(t) = g$ à laquelle on doit ajouter deux conditions initiales, la valeur $z(t_0)$ de l'altitude du centre de gravité du corps à l'instant initial du mouvement et la valeur $z'(t_0)$ de sa vitesse initiale.

Alors : $z(t) = \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + (t - t_0)z'(t_0) + z(t_0)$.

4.4.2 Fusée lancée verticalement. Problème avec conditions initiales.

On doit alors résoudre le problème différentiel suivant :

$z''(t) = \varphi(t)$ où $z(t_0)$ et $z'(t_0)$ sont donnés.

Supposons que φ soit continue.

En utilisant la formule de Taylor avec reste "intégrale" de Peano, on a :

$$z(t) = z(t_0) + (t - t_0) z'(t_0) + \int_{t_0}^t (t - s) \varphi(s) ds.$$

Vérification :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(z(t+h) - z(t)) &= \frac{1}{h}(z(t_0) - z(t_0)) + \frac{1}{h}((t+h-t_0) z'(t_0) - (t-t_0) z'(t_0)) \\ &\quad + \frac{1}{h} \left(\int_{t_0}^{t_0+h} (t-s) \varphi(s) ds - \int_{t_0}^t (t-s) \varphi(s) ds \right) \\ &= z'(t_0) + \frac{1}{h} \left(\int_t^{t+h} (t-s) \varphi(s) ds + \frac{h}{h} \int_{t_0}^{t+h} (t-s) \varphi(s) ds \right) \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(z(t+h) - z(t)) = z'(t) = z'(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \text{ avec } z''(t) = \varphi(t).$$

4.4.3 Fusée lancée verticalement. Problème avec conditions aux limites.

On doit alors résoudre le problème différentiel suivant :

$z''(t) = \varphi(t)$ où $z(t_0)$ et $z(t_1)$ ($t_1 > t_0$) sont donnés.

On a, alors (comme ci-dessus) :

$$\begin{aligned} z(t) &= z(t_0) + (t - t_0) z'(t_0) + \int_{t_0}^t (t - s) \varphi(s) ds \text{ et} \\ z(t_1) &= z(t_0) + (t_1 - t_0) z'(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - s) \varphi(s) ds \end{aligned}$$

En éliminant $z'(t_0)$ entre les deux équations précédentes, on obtient :

$$z(t) = p_0(t) z(t_0) + p_1(t) z(t_1) + \int_{t_0}^t p_0(t)(s - t_0)\varphi(s)ds + \int_t^{t_1} p_1(t)(t_1 - s)\varphi(s)ds$$

avec :

$$p_0(t) = \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} \quad \text{et} \quad p_1(t) = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$$

Posons :

$$\Gamma(s, t) = \begin{cases} p_0(t)(s - t_0) & \text{si } t_0 \leq s \leq t \leq t_1 \\ p_1(t)(t_1 - s) & \text{si } t_0 \leq t \leq s \leq t_1 \end{cases}$$

G est appelé le **noyau de Green** du problème de conditions aux limites.

On montre que $\Gamma(s, t) = \Gamma(t, s)$ et que :

$$z(t) = p_0(t) z(t_0) + p_1(t) z(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \Gamma(t, s)\varphi(s) ds$$

4.5 Mouvement à deux dimensions. Lancement d'un projectile dans un plan vertical.

4.5.1 Problème avec conditions initiales.

On considère un projectile se déplaçant dans le plan (Ox, Oz) . On suppose que seule la force de la pesanteur agit sur ce projectile.

Avec les mêmes hypothèses qu'auparavant, le mouvement du projectile est décrit en projection sur les axes Ox et Oz par les équations suivantes :

$$x''(t) = 0 \quad \text{et} \quad z''(t) = -g .$$

Désignons par v_0 le vecteur tangent à la trajectoire du projectile, au temps initial t_0 . On suppose que v_0 fait un angle α (aigu) avec l'axe Ox .

On suppose, de plus, que : $x(t_0) = z(t_0) = 0$. Alors :

$$\begin{aligned} x(t) &= x'(t_0)(t - t_0) , \\ z(t) &= -\frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + z'(t_0)(t - t_0) \quad \text{avec} \\ x'(t_0) &= \|v_0\| \cos \alpha , \quad z'(t_0) = \|v_0\| \sin \alpha . \end{aligned}$$

On vérifie facilement que le projectile décrit une parabole dans le plan (Ox, Oz) .

4.5.2 Problème avec conditions aux limites.

4.5.2.1 Premier problème.

Comme plus haut, on considère un projectile se déplaçant dans le plan (Ox, Oz) et on suppose que seule la force de la pesanteur agit sur ce projectile.

On suppose que le projectile part du point $(0, 0)$ à l'instant t_0 et l'on veut qu'il atteigne le point (a, b) à l'instant t_1 .

En projection sur les axes Ox et Oz , les équations du mouvement de ce projectile s'écrivent :

$$\begin{aligned}x''(t) &= 0, \quad z''(t) = -g \quad \text{avec} \\x(t_0) &= z(t_0) = 0 \quad \text{et} \quad x(t_1) = a, \quad z(t_1) = b\end{aligned}$$

On vérifie facilement que :

$$x(t) = a \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \quad \text{et} \quad z(t) = -\frac{1}{2}g(t - t_0)(t - t_1) + b \frac{(t - t_0)}{(t_1 - t_0)}$$

Calculons v_0 , module de la vitesse en t_0 du projectile.

Comme

$$\begin{aligned}x'(t_0) &= \frac{a}{(t_1 - t_0)} = \|v_0\| \cos \alpha \\z'(t_0) &= \frac{1}{2}g(t_1 - t_0) + b \frac{1}{(t_1 - t_0)} = \|v_0\| \sin \alpha\end{aligned}$$

on a :

$$\|v_0\|^2 = \frac{a^2}{(t_1 - t_0)^2} + \left(\frac{1}{2}g(t_1 - t_0) + b \frac{1}{(t_1 - t_0)}\right)^2$$

Donc si t_1 tend vers t_0 , alors v_0 tend vers l'infini.

4.5.2.2 Deuxième problème.

Avec les mêmes hypothèses et notations que plus haut, le mouvement du projectile est décrit en projection sur les axes Ox et Oz par les équations suivantes :

$$x''(t) = 0 \quad \text{et} \quad z''(t) = \varphi.$$

Alors :

$$\begin{aligned}x(t) &= p_0(t) x(t_0) + p_1(t) x(t_1) \\z(t) &= p_0(t) z(t_0) + p_1(t) z(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} G(t, s) \varphi(s) ds\end{aligned}$$

4.6 Sur le calcul du noyau de Green.

Soit $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $t_1 > t_0$; $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ "très petit" devant $t_1 - t_0$; et $t \in]t_0 + \varepsilon, t_1 - \varepsilon[$.

On considère la fonction $\lambda_{\varepsilon, t}$ sur $[t_0, t_1]$ telle que :

$$\lambda_{\varepsilon, t} = \begin{cases} 0 & \text{si } s \in [t_0, t - \varepsilon[\\ \frac{1}{2\varepsilon} & \text{si } s \in [t - \varepsilon, t + \varepsilon] \\ 0 & \text{si } s \in]t + \varepsilon, t_1] \end{cases}$$

Etant donné $\varphi \in C^0(t_0, t_1)$, posons :

$$\langle \varphi, \lambda_{\varepsilon, t} \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(s) \lambda_{\varepsilon, t}(s) ds = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \varphi(s) ds = \frac{1}{2\varepsilon} 2\varepsilon \varphi(\theta_\varepsilon)$$

où $\theta_\varepsilon \in [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$.

On en déduit que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \varphi, \lambda_{\varepsilon, t} \rangle = \varphi(t)$$

On dira que lorsque ε tend vers zéro, $\lambda_{\varepsilon, t}$ tend vers la fonctionnelle de Dirac δ_t .

On posera, ainsi : $\varphi(t) = \langle \varphi, \delta_t \rangle$.

Considérons, maintenant, le problème suivant :

Trouver la fonction Γ_ε , définie sur le pavé $[t_0, t_1] \times [t_0, t_1]$, qui soit solution du problème différentiel suivant :

$$\Pi_{1, \varepsilon} : \forall s \in [t_0, t_1], z^{primeprime}(s) = \lambda_{\varepsilon, t}(s) \text{ avec } z(t_0) = z(t_1) = 0.$$

on vérifie facilement que :

$$\Gamma_\varepsilon(t, s) = \begin{cases} a(\varepsilon, t) + b(\varepsilon, t) s & \text{si } s \in [t_0, t - \varepsilon[\text{ (puisque alors : } z''(s) = 0) \\ c(\varepsilon, t) + d(\varepsilon, t) s & \text{si } s \in]t + \varepsilon, t_1] \text{ (puisque alors : } z''(s) = 0) \\ \frac{s^2}{4\varepsilon} + k(\varepsilon, t) + h(\varepsilon, t) s & \text{si } s \in [t - \varepsilon, t + \varepsilon] \text{ (puisque alors : } z''(s) = \frac{1}{2\varepsilon}) \end{cases}$$

On détermine les six coefficients a, b, c, d, h, k , en tenant compte des propriétés suivantes de Γ_ε :

$$\Gamma_\varepsilon(t, \cdot) \text{ et } \frac{\partial \Gamma_\varepsilon}{\partial s}(t, \cdot) \text{ sont continues en } t - \varepsilon \text{ et } t + \varepsilon \text{ avec } \Gamma_\varepsilon(t, t_0) = \Gamma_\varepsilon(t, t_1) = 0.$$

On montre ainsi que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma_\varepsilon(t, s) = \Gamma(t, s) \text{ (Cf. plus haut).}$$

On vérifie, alors, que :

$$\forall \varphi \in C^0(t_0, t_1), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 \Gamma_\varepsilon(t, s)}{\partial s^2} \varphi(s) ds$$

c'est-à-dire que :

$$\frac{\partial^2 \Gamma_\varepsilon(t, s)}{\partial s^2} = \delta_t(s).$$

On dit que $\Gamma(t, s)$ est le noyau de Green du problème suivant :

$$\Pi_1 : \forall s \in [t_0, t_1], z''(s) = 0 \text{ avec } z(t_0) = z(t_1) = 0$$

4.7 Mouvements pendulaires périodiques.

4.7.1 Mouvement d'un pendule élastique sur une droite horizontale.

On considère un solide qui glisse sans frottement sur une droite horizontale Ox .

On fait les hypothèses suivantes :

les seules forces qui s'exercent sur le solide, en son centre de gravité sont :

la pesanteur et la force de rappel du ressort $F = -kx$

k désignant la raideur du ressort ($k > 0$) et x , l'abscisse du centre de gravité du solide sur Ox , comptée à partir du centre de gravité du solide à l'équilibre supposée en O .

En projetant sur l'axe Ox l'équation fondamentale de la Dynamique, on obtient :

$$(E_1) \quad mx'' = -kx \Leftrightarrow (x'' = -\omega^2 x \text{ où : } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}).$$

(i) *Première méthode de résolution de l'équation (E₁) :*

Comme l'équation ci-dessus est une équation différentielle à coefficients constants, elle possède une infinité de solutions de la forme :

$$x(t) = A \exp[i(\omega t + \theta_0)]$$

où A et θ_0 sont des paramètres réels (et $i^2 = -1$).

Comme le mouvement que l'on étudie est réel, on a :

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta_0) \text{ ce qui implique : } (x(0) = A \cos \theta_0 \text{ et } x'(0) = -A \omega \sin \theta_0)$$

Supposons que : $x'(0) = 0$. On en déduit que $\theta_0 = 0$ ou bien $\theta_0 = \pi$.

Si $x(0) > 0$, alors, nécessairement : $\theta_0 = 0$ et :

$$x(0) = A \text{ et } x(t) = x(0) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = x(0) \cos(\omega t)$$

Le mouvement du solide est donc périodique, de période T telle que $\sqrt{\frac{k}{m}}T = 2\pi$, c'est-à-dire que : $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.

(ii) *Deuxième méthode de résolution de l'équation (E₁) :*

Puisque :

$'t = -\omega^2 x$, on a : $x'tx' + \omega^2 xx' = 0$, ce qui est équivalent à :

$$\frac{d}{dt}((x'(t))^2 + \omega^2(x(t))^2) = 0.$$

On en déduit que : $(x'(t))^2 + \omega^2(x(t))^2 = (x'(0))^2 + \omega^2(x(0))^2$.

Supposons que : $x'(0) = 0$ et que : $x(0) > 0$. Alors : $(x'(t))^2 + \omega^2(x(t))^2 = \omega^2(x(0))^2$.

D'où : $(x'(t))^2 = \omega^2((x(0))^2 - (x(t))^2)$,

ce qui implique que : $(x(t))^2 \leq (x(0))^2$.

Etant donné le sens du mouvement, on a : $x'(t) = -\omega \sqrt{(x(0))^2 - (x(t))^2}$.

Ainsi :

$$dt = -\frac{dx}{\omega \sqrt{(x(0))^2 - x^2}}$$

Effectuons le changement de fonction : $x \rightarrow \psi$ tel que : $x(t) = x(0) \cos(\psi(t))$.

Alors : $dx(t) = -x(0) \sin(\psi(t)) \cdot (\psi'(t)) dt$, d'où :

$(\psi'(t)) dt = \omega dt \Rightarrow \psi'(t) = \omega \Rightarrow \psi(t) = \omega t + \theta_0$.

Comme $\cos(\psi(0)) = 1$, on a : $\psi(0) = 0$ et $x(t) = x(0) \cos(\omega t)$.

4.7.2 Mouvement d'un pendule sur un cercle.

On considère une bille roulant sur un cercle vertical de centre O et de rayon R .

On suppose que la seule force qui s'exerce sur la bille est la pesanteur \vec{P} en son centre de gravité H .

Soit θ l'angle formé par la demi-droite issue de O et passant par H avec l'axe vertical Oz orienté vers le bas. L'axe des abscisses Ox est orthogonal à Oz ($(Ox, Oz) = -\frac{\pi}{2}$).

Compte tenu du mouvement (observé) de la bille, on a :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} < 0$$

Comme la projection de \vec{P} sur la tangente au cercle est égale à $P \sin \theta$, le mouvement de H est régi par l'équation :

$$(E_2) \quad mR\theta'' = -P \sin \theta$$

Pour résoudre cette équation, multiplions ses deux membres par θ' .

$$\text{Posons : } \omega^2 = \frac{P}{mR}. \text{ Alors : } \theta' \theta'' = -\omega^2 \sin(\theta) \cdot \theta'$$

ou ce qui est équivalent :

$$\frac{d}{dt}((\theta'(t))^2) = 2\omega^2 \frac{d}{dt}(\cos(\theta(t)))$$

$$\text{d'où : } (\theta'(t))^2 = 2\omega^2 \cos(\theta(t) + h) = -4\omega^2 \sin^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) + 2\omega^2(1 + h)$$

$$\text{Posons : } 2\omega^2(1 + h) = (\theta'(0))^2. \text{ Alors : } (\theta'(t))^2 = (\theta'(0))^2 - 4\omega^2 \sin^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)$$

Supposons que : $|\theta'(0)| < 2\omega$.

$$\text{Posons : } |\theta'(0)| = 2\omega \sin \frac{\alpha}{2}. \text{ Alors : } (\theta'(t))^2 = 4\omega^2(\sin^2(\frac{\alpha}{2}) - \sin^2(\frac{\theta(t)}{2}))$$

θ variera, alors, entre $-\alpha$ et $+\alpha$.

La bille aura un mouvement pendulaire périodique.

Choisissons θ de façon que : $\theta'(t)$ soit strictement positif. Alors :

$$\theta'(t) = 2\omega \sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)}$$

On constate que θ est une fonction spéciale.

Si α et $|\theta'(0)|$ sont "*petits*", le pendule effectuera de "*petites*" oscillations. Ainsi :

$$\theta'(t) \sim 2\omega \sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) - \left(\frac{\theta(t)^2}{2}\right)}$$

On sait (Cf. plus haut) que :

$$\theta(t) \sim \alpha \sin(\omega(t - t_0)) \text{ et que : } \theta'(t) \cong -\omega^2 \cdot \theta(t)$$

On laisse au lecteur le soin d'examiner les cas suivants : $|\theta'(0)| = 2\omega$ et $|\theta'(0)| > 2\omega$.

4.7.3 Noyaux de Green.

On pourrait, comme on l'a fait plus haut, calculer les noyaux de Green des problèmes pendulaires étudiés ci-dessus.

4.8 Formulation variationnelle de la loi fondamentale de la Dynamique dans le cas d'une dimension.

Considérons le mouvement d'un point matériel soumis à une force φ dépendant du temps, continue sur l'intervalle (t_0, t_1) et d'ordonnée $z(t)$ telle que : $z(t_0) = z(t_1) = 0$.

L'énergie $E(z)$ du mouvement de ce point est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle du solide développées entre les instants t_0 et t_1 . On a :

$$E(z) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{(z'(s))^2}{2} + \varphi(s) z(s) \right) ds$$

Etant donné $p \in \mathbb{N}$, notons $C_0^p [t_0, t_1]$, l'espace vectoriel des fonctions définies continues et dérivables sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ et qui s'annulent en t_0 et en t_1 .

Calculons la dérivée directionnelle $E'_\theta(z)$ de E en un point $z \in C_0^1 [t_0, t_1]$ dans la direction $\theta \in C_0^1 [t_0, t_1]$. On a :

$$E'_\theta(z) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\lambda)^{-1} (E(z + \lambda\theta) - E(z)) = \int_{t_0}^{t_1} (z'(s)\theta'(s) + \varphi(s)\theta(s)) ds$$

Supposons que : $z \in C_0^2 [t_0, t_1]$. Alors :

$$E'_\theta(z) = [z'(s)\theta(s)]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} (-z''(s) + \varphi(s))\theta(s) ds$$

Puisque, $\theta(t_0) = \theta(t_1) = 0$, on a :

$$(E'_\theta(z) = 0) \Rightarrow (\forall s \in [t_0, t_1], z''(s) = \varphi(s) \text{ et } z(t_0) = z(t_1) = 0)$$

Inversement, on montre, facilement, que le problème :

$$\Pi_1 : \text{trouver } z \in C_0^2 [t_0, t_1] \text{ telle que : } (\forall s \in [t_0, t_1], z''(s) = \varphi(s) \text{ et } z(t_0) = z(t_1) = 0)$$

est équivalent au problème :

$$\Pi_2 : \text{trouver } z \in C_0^1 [t_0, t_1] \text{ telle que : } \forall \theta \in C_0^1 [t_0, t_1], \int_{t_0}^{t_1} (z'(s)\theta'(s) + \varphi(s)\theta(s)) ds = 0$$

Π_2 est appelé le **problème variationnel** associé à Π_1 .

4.9 Méthodes de résolution approchées de Π_1 et Π_2 .

4.9.1 Résolution approchée de Π_1 par la méthode des différences finies.

Soit $(s_j)_{0 \leq j \leq n}$ une subdivision de l'intervalle $[t_0, t_1]$ telle que :

$$s_0 = t_0, \quad s_{j+1} - s_j = h = \frac{t_1 - t_0}{n}, \quad 0 \leq j \leq n-1, \quad s_n = t_1$$

On sait que :

$$\forall s, s+h \in]t_0, t_1[, \quad z(s+h) = z(s) + hz'(s) + \frac{h^2}{2}(z''(s) + \zeta_2(s)) \quad \text{avec : } |\zeta_2(s)| \leq L$$

où L est une constante indépendante de $s \in]t_0, t_1[$.

On en déduit que :

$$\forall j \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \frac{z(s_{j+1}) - z(s_j)}{h} \simeq z'(s_j)$$

et

$$\forall j \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \frac{z(s_{j+1}) - 2z(s_j) + z(s_{j-1}))}{2h^2} \simeq z''(s_j)$$

La méthode des **différences finies** consiste à déterminer la suite des nombres réels $(z_j)_{0 \leq j \leq n}$ tels que :

$$\forall j \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \frac{z(s_{j+1}) - 2z(s_j) + z(s_{j-1}))}{2h^2} = \varphi(s_j) \quad \text{sachant que : } z_0 = z_n = 0$$

Le vecteur colonne ${}^t [z_1 \dots z_{n-1}]$ est solution du système linéaire suivant :

$$\frac{1}{2h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \\ \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(s_1) \\ \\ \\ \varphi(s_{n-1}) \end{bmatrix}$$

En interpolant la suite $((s_0, z_0), \dots, (s_j, z_j), \dots, (s_n, z_n))$, par des polynômes ou bien des morceaux de polynômes du premier ou du second degré, on obtient une solution approchée de Π_1 .

4.9.2 Résolution approchée de Π_2 par la méthode des éléments finis.

Comme au paragraphe précédent on subdivise l'intervalle $[t_0, t_1]$ au moyen de la suite de points $(s_j)_{0 \leq j \leq n}$.

Notons V_h l'espace vectoriel des fonctions z_h telles que :

$$\forall s \in [t_0, t_1], \quad z_h(s) = \sum_{j=1}^{j=n-1} \zeta_j p_j(s)$$

avec : $z_h(t_0) = z_h(t_1) = 0$

où, p_j est égal à un polynôme de degré inférieur ou égal à un tel que :

$$p_j(s_{j-1}) = p_j(s_{j+1}) = 0 \quad \text{et} \quad p_j(s_j) = 1.$$

Notons que sur chaque intervalle $[s_j, s_{j+1}]$, z_h est dérivable et que sa dérivée est continue. Alors z_h est solution du problème suivant :

$$\Pi_h : \forall \theta_h \in V_h, \quad \sum_{j=0}^{j=n-1} \int_{s_j}^{s_{j+1}} (z'_h(s)\theta'_h(s) + \varphi(s)\theta_h(s)) ds = 0$$

Un calcul élémentaire (mais fastidieux!) montre que résoudre Π_h revient à résoudre un système linéaire, du type suivant :

$$A \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \dots \\ \zeta_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \dots \\ \eta_{n-1} \end{bmatrix}$$

où A est une matrice de type $(n-1) \times (n-1)$ inversible et $\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \dots \\ \eta_{n-1} \end{bmatrix}$ est un vecteur connu.

On montre que lorsque h tend vers zéro, z_h tend vers la solution z de Π_2 , en un sens que nous ne précisons pas ici, pour ne pas allonger démesurément notre exposé.

La méthode que nous venons d'utiliser pour calculer z_h est appelée "*méthode des éléments finis*".

4.10 Mécanique du solide. Système d'équations de l'élasticité linéarisée.

On considère un corps matériel occupant, dans une configuration de référence, l'emplacement d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^3 .

On suppose que ce corps est encastré dans une paroi, le long d'une partie Γ_0 de sa frontière $\partial\Omega$ et que :

$$\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \quad \Gamma_0 \quad \text{et} \quad \Gamma_1 \quad \text{étant disjoints.}$$

On soumet Ω à des *efforts extérieurs*, à savoir :

(i) $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ en tout point $x \in \Omega$

ii) $g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x))$ en tout point $x \in \partial\Omega$.

On note $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$ la *déformation* de Ω au point $x \in \Omega$, quand Ω est soumis aux contraintes f et g .

Hypothèse de linéarisation :

On suppose que u est "assez petite" pour que ${}^t(Du) \cdot Du$ soit "négligeable" devant Du .

Alors, on montre que les équations d'équilibre du corps élastique considéré s'écrivent sous la forme suivante :

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{jk}(u) + f_k = 0 \text{ dans } \Omega \text{ lorsque } j = 1, 2, 3$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \text{ et } \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{jk} \gamma_{jk} = g_j \text{ sur } \Gamma_1 \text{ lorsque } j = 1, 2, 3$$

où $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ est la normale extérieure à Ω

$$\text{et } \sigma = \lambda(\text{trace } \varepsilon)I + \mu\varepsilon, \quad \lambda \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(Du + {}^t(Du))$$

Le système d'équations ci-dessus est appelé le *système d'équations de l'élasticité linéarisée*.

Exemples :

(i) On suppose que $n = 1$, que $\Omega =]a, b[$ $a < b$ et que $\Gamma_0 = \{b\}$, $\Gamma_1 = \{a\}$.

Alors : $\varepsilon = u'$, $\sigma = K\varepsilon$, $K = \lambda + \mu > 0$.

Il en résulte que :

$$Ku'' + f = 0 \text{ dans }]a, b[\text{, } u'(a) = \gamma \text{ et } u(b) = 0.$$

On peut résoudre simplement ce problème en procédant de la façon suivante :

$$\text{on sait que } \forall t \in]a, b[\text{ on a : } u(t) = u(a) + \int_a^t u'(s) ds$$

$$\text{et que } u'(s) = u'(a) + \int_a^s u''(\theta) d\theta$$

d'où il résulte que :

$$u(t) = u(a) + \int_a^t \left(\gamma + \int_a^s -\frac{f(\theta)}{K} d\theta \right) ds$$

$$\text{et donc : } u(t) = u(a) + (t-a) \gamma - \int_a^t \left(\int_a^s \frac{f(\theta)}{K} d\theta \right) ds$$

Par conséquent :

$$u(b) = 0 = u(a) + (b-a) \gamma - \int_a^b \left(\int_a^s \frac{f(\theta)}{K} d\theta \right) ds$$

Ainsi :

$$u(a) = -(b-a) \gamma + \int_a^b \left(\int_a^s \frac{f(\theta)}{K} d\theta \right) ds$$

et :

$$u(t) = (t-b) \gamma + \int_t^b \left(\int_a^s \frac{f(\theta)}{K} d\theta \right) ds$$

(ii) On suppose que $n = 3$.

Ci-dessous, on notera $H^1(\Omega)$ un complété de l'espace préhilbertien $(C^1(\Omega), \langle \cdot | \cdot \rangle_1)$ où :

$$\forall u, w \in C^1(\Omega) \quad , \quad \langle u | w \rangle_1 = \int_{\Omega} \left(u.w + \sum_{j=1}^3 \partial_j u . \partial_j w \right) (x) dx$$

On posera : $\|\cdot\|_1 = (\langle \cdot | \cdot \rangle_1)^{\frac{1}{2}}$ et on désignera par $\|\cdot\|_0$ la norme canonique de $L^2(\Omega)$.

On démontre et nous admettrons les propriétés suivantes :

Proposition (Inégalité de Korn)

On suppose que Ω est un ouvert borné, connexe de \mathbb{R}^3 de frontière "régulière". Alors :

$$\exists C_0 \in \mathbb{R}_+^* \quad , \quad \forall w \in (H^1(\Omega))^3 \quad , \quad \sum_{j,k=1}^3 \|\varepsilon_{jk}(w)\|_0^2 + \|w\|_0^2 \geq C_0 \|w\|_1^2$$

Corollaire (Avec les mêmes hypothèses et notations que dans la proposition précédente)

Soit $V = \{w \in (H^1(\Omega))^3 ; w = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$ Alors :

$$\exists C_1 \in \mathbb{R}_+^* \quad , \quad \forall w \in V \quad , \quad \sum_{j,k=1}^3 \|\varepsilon_{jk}(w)\|_0^2 + \|w\|_0^2 \geq C_1 \|w\|_1^2$$

Posons :

$$\forall u, w \in V \quad , \quad a(u, w) = \sum_{j,k=1}^3 \int_{\Omega} \sigma_{jk}(w) . \varepsilon_{jk}(w) dx$$

On vérifie, en utilisant la formule de Green que :

$$\forall u, w \in V \quad , \quad a(u, w) = \lambda \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^3 \partial_k u_k \right) \left(\sum_{k=1}^3 \partial_k w_k \right) dx \right) + 2\mu \left(\sum_{j,k=1}^3 \int_{\Omega} \varepsilon_{jk}(u) . \varepsilon_{jk}(w) dx \right)$$

De ce qui précède, on déduit le

Théorème

Il existe un seul élément $u \in V$ tel que :

$$\forall w \in V \quad , \quad a(u, w) = \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\Omega} (f_j . w_j) dx + \int_{\Gamma_1} (g_j . w_j) dx \right)$$

Posons, maintenant :

$$\forall w \in V \quad , \quad J(w) = \frac{1}{2} a(u, w) + \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\Omega} (f_j . w_j) dx + \int_{\Gamma_1} (g_j . w_j) dx \right)$$

On montre que :

La solution u du théorème ci-dessus est telle que : $J(u) = \text{Min} \{J(w) ; w \in V\}$

Interprétation mécanique.

- (a) L'espace V représente l'espace des déplacements cinématiquement admissibles.
 (b) $a(u, w)$ représente le travail de la déformation du corps élastique dans un déplacement virtuel $w \in V$.

(c)

$$\sum_{k=1}^3 \left(\int_{\Omega} (f_j \cdot w_j) dx + \int_{\Gamma_1} (g_j \cdot w_j) dx \right)$$

représente le travail effectué par les forces extérieures au corps considéré dans un déplacement virtuel $w \in V$.

- (d) la relation $a(u, w) = \sum_{j,k=1}^3 \int_{\Omega} \sigma_{jk}(w) \cdot \varepsilon_{jk}(w) dx$ explicite le principe du travail virtuel appliqué au corps considéré soumis aux contraintes données.

4.11 Mécanique des fluides. Système de Stokes.

Soit Ω un ouvert borné connexe dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , de frontière "régulière" $\partial\Omega$.

Le mouvement lent d'un fluide incompressible visqueux contenu dans Ω est modélisé par le système d'équations suivant, appelé système de Stokes :

$$-\nu \Delta u_j + \partial_j p = f_j \quad \text{dans } \Omega \quad (j = 2, 3)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$u_j = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

où $u = (u_j)$ est la vitesse du fluide, p sa pression et ν sa viscosité.

Etude du cas $n = 2$.

Comme $\operatorname{div}(u) = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2$, il existe une fonction (ou une distribution) ψ définie sur Ω telle que :

$$\psi = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad u_1 = \partial_2 \psi \quad \text{et} \quad u_2 = -\partial_1 \psi.$$

Par conséquent :

$$\nu \Delta (\partial_2 \psi) + \partial_1 p = f_1 \quad \text{et} \quad \nu \Delta (-\partial_1 \psi) + \partial_2 p = f_2$$

On en déduit que :

$$\nu \Delta (\partial_2^2 \psi + \partial_1^2 \psi) + \partial_{12}^2 p - \partial_{12}^2 p = \partial_2 f_1 - \partial_1 f_2$$

et, en posant : $g = \partial_2 f_1 - \partial_1 f_2$, on a :

$$\nu \Delta^2 \psi = g \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad \psi = 0, \quad \partial_1 \psi = \partial_2 \psi = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

ψ est solution d'un problème de Dirichlet biharmonique.

Etude du cas $n = 3$.

Soit $D(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans Ω .

Soit $H_0^1(\Omega)$, un complété de l'espace $D(\Omega)$ muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle_1$ tel que :

$$\forall u, w \in D(\Omega) \quad , \quad \langle u | w \rangle_1 = \int_{\Omega} (Du \cdot Dw + u \cdot w) \, dx \quad \text{où} \quad Du \cdot Dw = \sum_{j=1}^3 \partial_j u \cdot \partial_j w$$

Alors :

$$\forall w = (w_1, w_2, w_3) \in (D(\Omega))^3 \quad , \quad \int_{\Omega} \left[-\nu \left(\sum_{k=1}^3 (\partial_k^2 u_j) \right) + \partial_j p - f_j \right] w_j \, dx = 0$$

On en déduit (en appliquant la formule de Green) que :

$$\nu \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 (\partial_k u_j) (\partial_k w_j) \, dx - \int_{\Omega} p \cdot \partial_j w_j \, dx - \int_{\Omega} f_j \cdot w_j \, dx = 0$$

et par conséquent, après avoir posé :

$$a(u, w) = \sum_{k=1}^3 \left(\nu \int_{\Omega} (\partial_k u_j) (\partial_k w_j) \, dx \right)$$

on a :

$$\forall w \in (D(\Omega))^3 \quad , \quad a(u, w) - \int_{\Omega} p \cdot (\operatorname{div} w) \, dx - \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} f_k \cdot w_k \, dx = 0$$

On montre et nous admettons la proposition suivante :

Proposition :

$$\text{Soit} \quad V = \left\{ w \in \left(H_0^1(\Omega) \right)^3 \quad ; \quad \operatorname{div} w = 0 \right\}$$

Alors :

(i)

Il existe un seul élément $u \in V$ tel que : $\forall w \in V \quad , \quad a(u, w) = \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} f_k \cdot w_k \, dx$

(ii) Il existe un seul élément $u \in V$ et il existe un élément p déterminé à une constante additive près, telles que :

$$\forall w \in \left(H_0^1(\Omega) \right)^3 \quad , \quad a(u, w) - \int_{\Omega} p \cdot (\operatorname{div} w) \, dx = \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} f_k \cdot w_k \, dx$$

u est alors la *solution du problème de Stokes*.

A. Optique Géométrique.**5.1 Principes fondamentaux.****5.1.1 Premier principe.**

Dans un milieu isotrope, la vitesse de la lumière est la même dans toutes les directions.

On appelle **indice** (optique) d'un milieu isotrope, en un point P , le scalaire :

$$n(P) = \frac{c}{v(P)}$$

où $v(P)$ est la vitesse de la lumière en P et c la vitesse de la lumière dans le vide.

5.1.2 Chemin optique.

On appelle **chemin optique** le long d'une courbe Γ d'extrémités A et B , le scalaire :

$$L(A, B; \Gamma) = \int_A^B n(P).dl(P)$$

où $n(P)$ est l'indice (optique) en P et \int_A^B est une intégrale curviligne prise le long de Γ , entre A et B .

5.1.3 Deuxième principe (Principe de Fermat).

Pour aller d'un point A à un point B de l'espace, la lumière suit, parmi toutes les trajectoires possibles reliant A à B , celle, le long de laquelle, le chemin optique est extrémal.

P étant un point de l'espace, désignons par $d\tau(P; \Gamma)$, le temps mis par la lumière pour parcourir la distance $ds(P)$. On a :

$$d\tau(P; \Gamma) = \frac{ds(P)}{v(P)}$$

Posons :

$$\tau(A, B; \Gamma) = \int_A^B d\tau(P; \Gamma)$$

$\tau(A, B; \Gamma)$ est le temps mis par la lumière pour aller de A à B le long de Γ et l'on a :

$$L(A, B; \Gamma) = c \tau(A, B; \Gamma).$$

5.2 Réflexion d'un rayon lumineux.

5.2.1 Réflexion sur un miroir plan.

Déterminons le chemin optique extrémal d'un rayon lumineux issu de S , se réfléchissant sur un miroir plan Π en un point I et passant, après réflexion par un point R situé du même côté que S par rapport à Π .

On suppose que le milieu contenant les points S et R a un indice fixe.

Le chemin optique du rayon SIR sera donc extrémal quand le trajet SIR sera extrémal.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut d'abord que le plan déterminé par les points S, I et R soit normal au plan Π .

Dans la suite de ce paragraphe, nous repèrerons les points du plan déterminé par les points S, I et R par leur coordonnées dans un système d'axes rectangulaires Ox et Oy , Ox étant porté par Π et passant par I .

Notons (a, b) (resp. $(x, 0)$, (c, d)) les coordonnées des points S, I et R). Alors :

$$SI + IR = ((x - a)^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} + ((x - c)^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}$$

Posons : $SI + IR = \varphi(x)$.

SIR sera extrémal lorsque $\varphi'(x)$ sera nul. Or :

$$\varphi'(x) = \frac{x - a}{SI} + \frac{c - x}{RI}$$

Notons α (resp. β) l'angle aigu formé par SI (resp. RI) avec la normale à Π en I .

On vérifie facilement que $\varphi'(x) = 0$ implique que $\sin \alpha = -\sin \beta$, et que $\alpha = -\beta$ car α et β sont des angles aigus.

La relation $\alpha = -\beta$ est la loi de la réflexion sur un miroir plan.

5.2.2 Réflexion sur un miroir sphérique concave.

Soit Σ_0 un miroir sphérique concave qui est une portion d'une sphère Σ de centre O et de rayon ρ .

Soit S un point de l'espace situé du même côté que O par rapport à Σ .

Désignons par Δ la droite portant S et O ; Δ est un axe de symétrie de Σ .

R étant un point de Δ situé du même côté que S par rapport à Σ , on veut déterminer s'il existe un point M de Σ_0 tel que le trajet optique SMR soit extrémal.

Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire que la normale OM à Σ soit contenue dans le plan déterminé par S, R et M .

Repérons les points du plan déterminé par S, R et M au moyen de leurs coordonnées dans un système d'axes rectangulaires Ox et Oy tel que Ox soit porté par Δ .

Notons (x, y) (resp. $(a, 0)$, $(b, 0)$) les coordonnées des points M (resp. S, R). Alors :

$$MS + MR = ((x - a)^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + ((x - b)^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Posons : $MS + MR = \varphi(x, y)$ et $f(x, y) = x^2 + y^2 - \rho^2$.

Pour déterminer les points M qui rendent le trajet SMR extrémal, il faut (et il suffit) de déterminer les couples (x, y) pour lesquels $\varphi(x, y)$ est extrémal sous la contrainte $f(x, y) = x^2 + y^2 - \rho^2 = 0$.

Pour cela, il nous suffit de déterminer les couples (x, y) pour lesquels le gradient du lagrangien $\varphi(x, y) + \lambda f(x, y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, s'annule c-à-d tels que :

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, y) + \lambda f'_x(x, y) &= \frac{x - a}{MS} + \frac{x - b}{MR} + 2\lambda x = 0 \\ \varphi'_y(x, y) + \lambda f'_y(x, y) &= \frac{y}{MS} + \frac{y}{MR} + 2\lambda y = 0 \end{aligned}$$

Des deux relations précédentes, on déduit que :

$$x\left(\frac{1}{MS} + \frac{1}{MR} + 2\lambda\right) = \frac{a}{MS} + \frac{b}{MR} \quad \text{et} \quad y\left(\frac{1}{MS} + \frac{1}{MR} + 2\lambda\right) = 0$$

Il en résulte que :

$$\frac{1}{MS} + \frac{1}{MR} + 2\lambda = 0 \quad \text{ce qui implique que :} \quad \frac{a}{MS} + \frac{b}{MR} = 0.$$

Le trajet SMR sera donc extrémal lorsque OM sera la bissectrice de l'angle \widehat{SMR} . Désignons par T le point d'intersection de Δ et de la tangente à Σ en M . Alors, le faisceau de droites (MS, MR, MO, MT) sera harmonique.

Comme la division (S, R, O, T) est harmonique, on a :

$$\frac{1}{OR} + \frac{1}{OS} = \frac{2}{OT}$$

Lorsque le point S s'éloigne à l'infini dans la direction Ox , le point R tend vers le milieu de OT - qui est "voisin" du milieu de OP lorsque le point I est "voisin" du point P . Évidemment, R est confondu avec O lorsque S est confondu avec O .

5.2.3 Enveloppe du rayon réfléchi dans la réflexion sur un miroir sphérique concave

Déterminons l'équation (cartésienne) de la droite Δ passant par les points M et R . Écrivons cette équation sous la forme : $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$. Notons X et Y les coordonnées du point courant Q de Δ . Comme Δ contient les points M et R , on a :

$$\alpha X + \beta Y + \gamma = 0, \quad \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \quad \text{et} \quad \alpha b + \gamma = 0.$$

L'équation de Δ est donc :

$$\begin{bmatrix} X & Y & 1 \\ x & y & 1 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow yX + (b-x)Y - by = 0.$$

Calculons b en fonction de x et a . L'équation de la tangente en M à Σ est :

$$(X-x) + (Y-y) = 0 \Rightarrow xX + yY - \rho^2 = 0.$$

On en déduit que :

$$\overline{OT} \frac{\rho^2}{x}.$$

Or, on sait que :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2x}{\rho^2} \quad \text{donc : } b = \frac{\rho^2 a}{2ax - \rho^2} \quad \text{si } 2ax - \rho^2 \neq 0.$$

D'où l'équation de Δ en fonction de x , y et a :

$$(2ax - \rho^2)yX + (\rho^2 a - x(2ax - \rho^2))Y - \rho^2 ay = 0.$$

En posant $x = \rho \cos \alpha$ et $y = \rho \sin \alpha$, l'équation ci-dessus s'écrit, alors, en fonction du seul paramètre α :

$$(2a\rho \cos \alpha - \rho^2)\rho \sin \alpha X + (\rho^2 a - \rho \cos \alpha(2a\rho \cos \alpha - \rho^2))Y - \rho^3 a \sin \alpha = 0.$$

En supposant $\rho \neq 0$, on obtient, après simplification, l'équation :

$$(a \sin 2\alpha - \rho \sin \alpha)X + (\rho \cos \alpha - a \cos 2\alpha)Y - \rho a \sin \alpha = 0,$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$a(X \sin 2\alpha - Y a \cos 2\alpha) - \rho(X + a) \sin \alpha + \rho Y \cos \alpha = 0.$$

Pour déterminer l'enveloppe de Δ , nous devons éliminer α entre l'équation précédente et sa dérivée par rapport à qui s'écrit sous la forme suivante :

$$2a(X \cos 2\alpha + Y \sin 2\alpha) - \rho(X + a) \cos \alpha - \rho Y \sin \alpha = 0.$$

Posons : $\exp(i\alpha) = u$, ($u \neq 0$). On sait que :

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= -\frac{i}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right), & \cos \alpha &= \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right), \\ \sin 2\alpha &= -\frac{i}{2}\left(u^2 - \frac{1}{u^2}\right), & \cos 2\alpha &= \frac{1}{2}\left(u^2 + \frac{1}{u^2}\right). \end{aligned}$$

En reportant ces valeurs dans les équations ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} a \left[-\frac{i}{2}X\left(u^2 - \frac{1}{u^2}\right) - \frac{Y}{2}\left(u^2 + \frac{1}{u^2}\right) \right] + \frac{i}{2}\rho(X+a)\left(u - \frac{1}{u}\right) + \frac{\rho}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) &= 0 \\ a \left[X\left(u^2 + \frac{1}{u^2}\right) - iY\left(u^2 - \frac{1}{u^2}\right) \right] - \frac{\rho}{2}(X+a)\left(u + \frac{1}{u}\right) + \frac{i\rho}{2}Y\left(u - \frac{1}{u}\right) &= 0 \end{aligned}$$

ou, encore :

$$\begin{aligned} -a(iX + Y) u^4 + \rho(iX + Y + ia) u^3 + \rho(-iX + Y - ia) u + a(iX - Y) &= 0, \\ 2a(X - iY) u^4 - \rho(X + iY + a) u^3 - \rho(X - iY + a) u + 2a(X + iY) &= 0. \end{aligned}$$

Posons $Z = X + iY$. Les deux équations ci-dessus s'écrivent alors en fonction de Z :

$$\begin{aligned} a\bar{Z} u^4 - \rho(\bar{Z} + a) u^3 + \rho(Z + a) u - aZ &= 0 \\ 2a\bar{Z} u^4 - \rho(Z + a) u^3 + \rho(\bar{Z} + a) u - 2aZ &= 0 \end{aligned}$$

L'élimination de u entre les deux équations ci-dessus nous donnera l'équation en Z de l'enveloppe cherchée.

5.3 Réfraction.

5.3.1 Réfraction sur une surface plane. Loi de Snell-Descartes.

Soit Π une droite séparant deux milieux μ_1 et μ_2 du plan euclidien, d'indices (distincts) n_1 et n_2 respectivement.

Repérons les points du plan euclidien au moyen de leurs coordonnées relativement à deux axes rectangulaires Ox et Oy . On suppose que Ox est porté par Π .

Soit A_1 et A_2 deux points du plan euclidien situés de part et d'autre de Π tels que A_1 soit dans le milieu μ_1 et A_2 soit dans le milieu μ_2 .

On veut déterminer, s'il existe, un point M de Π tel que le chemin optique $n_1 A_1 M + n_2 A_2 M$ soit extrémal.

Notons (a_1, b_1) (resp. (a_2, b_2) , $(x, 0)$) les coordonnées de A_1 (resp. A_2, M). On a :

$$n_1 A_1 M + n_2 A_2 M = n_1 \left[(x - a_1)^2 + b_1^2 \right]^{\frac{1}{2}} + n_2 \left[(x - a_2)^2 + b_2^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Posons : $n_1 A_1 M + n_2 A_2 M = \varphi(x)$.

Les extrémales de $n_1 A_1 M + n_2 A_2 M$ correspondent aux points $M(x, 0)$ où la dérivée de φ s'annule. Or :

$$\varphi'(x) = \frac{n_1(x - a_1)}{A_1 M} + \frac{n_2(x - a_2)}{A_2 M}$$

Désignons par i_1 (resp. i_2) l'angle (aigu) formé par la normale à Π en M avec $A_1 M$ (resp. $A_2 M$). Pour que $\varphi'(x) = 0$, il faut et il suffit que :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

Cette relation est appelée la **loi de Snell-Descartes**.

5.3.2 Réfraction sur une surface régulière.

Soit Σ une surface régulière séparant deux milieux μ_1 et μ_2 de l'espace euclidien, d'indices (distincts) n_1 et n_2 respectivement.

On repère les points de l'espace euclidien au moyen de trois axes rectangulaires Ox , Oy et Oz .

On suppose que Σ a pour équation (cartésienne) $f(x, y, z) = 0$.

A_1 et A_2 étant deux points de l'espace, situés de part et d'autre de Σ tels que A_1 soit dans le milieu μ_1 et A_2 soit dans le milieu μ_2 , on veut déterminer s'il existe un point M de Σ tel que le chemin optique $n_1 A_1 M + n_2 A_2 M$ soit extrémal.

Notons (a_1, b_1, c_1) (resp. (a_2, b_2, c_2) , (x, y, z)) les coordonnées de A_1 (resp. A_2, M). On a :

$$\begin{aligned} & n_1 A_1 M + n_2 A_2 M \\ = & n_1 \left[(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Posons : $n_1 A_1 M + n_2 A_2 M = \varphi(x, y, z)$.

Alors, les extrémales de $n_1 A_1 M + n_2 A_2 M$ correspondent aux points $M(x, y, z)$ où les dérivées partielles, par rapport à x, y, z , du lagrangien du problème considéré, à savoir

$\varphi(x, y, z) + \lambda f(x, y, z)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, s'annulent.

On doit donc chercher les $M(x, y, z)$ tels que :

$$\varphi_x(x, y, z) + \lambda f_x(x, y, z) = 0, \quad \varphi_y(x, y, z) + \lambda f_y(x, y, z) = 0, \quad \varphi_z(x, y, z) + \lambda f_z(x, y, z) = 0$$

Ces trois relations expriment que le gradient de φ est équipollent à celui de f , c-à-d à la normale en M à Σ - que nous noterons MN .

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{n_1(x - a_1)}{A_1 M} + \frac{n_2(x - a_2)}{A_2 M} + \lambda f_x(x, y, z) &= 0 \\ \frac{n_1(y - b_1)}{A_1 M} + \frac{n_2(y - b_2)}{A_2 M} + \lambda f_y(x, y, z) &= 0 \\ \frac{n_1(z - c_1)}{A_1 M} + \frac{n_2(z - c_2)}{A_2 M} + \lambda f_z(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que le déterminant :

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & x - a_2 & f_x \\ y - b_1 & y - b_2 & f_y \\ z - c_1 & z - c_2 & f_z \end{vmatrix} = 0$$

et que les vecteurs $A_1 M$, $A_2 M$ et MN sont coplanaires.

Supposons, ce qui est loisible, que Oz soit parallèle au support de la normale MN à Σ en M . Alors, $f_x = f_y = 0$ et donc :

$$n_1 \frac{(x - a_1)}{A_1 M} = -n_2 \frac{(x - a_2)}{A_2 M} \quad \text{et} \quad n_1 \frac{(y - b_1)}{A_1 M} = -n_2 \frac{(y - b_2)}{A_2 M}$$

Notons i_1 (resp. i_2), l'angle de $A_1 M$ (resp. $A_2 M$) avec la normale en M à Σ .

Avec des conditions d'orientation convenables on déduit des relations précédentes que :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

Nous retrouvons la loi de Snell-Descartes.

5.4 L'équation fondamentale de l'Optique géométrique. Analogie avec la Mécanique.

5.4.1 Premier cas.

Soit α et β , $\alpha \neq \beta$ et $a, b \in \mathbb{R}^3$, $a \neq b$.

Notons :

(i) $C^1(\alpha, \beta)$, l'espace vectoriel des fonctions définies et continues ainsi que leur dérivées premières, sur l'intervalle (α, β) .

(ii) $E(\alpha, \beta)$, l'espace vectoriel des fonctions $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in (C^1(\alpha, \beta))^3$ telles que : $\psi(\alpha) = a$, $\psi(\beta) = b$.

$E_0(\alpha, \beta)$, l'espace vectoriel des fonctions $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in (C^1(\alpha, \beta))^3$ telles que : $\psi(\alpha) = 0$, $\psi(\beta) = 0$.

On notera $D\psi$ la dérivée d'une fonction quelconque $\psi \in E(\alpha, \beta)$ et aussi $\langle \cdot | \cdot \rangle$ (resp. $\| \cdot \|$) le produit scalaire euclidien (resp. la norme euclidienne) de \mathbb{R}^3 .

A toute $\psi \in E(\alpha, \beta)$ on peut associer une courbe Γ_ψ dans \mathbb{R}^3 , d'extrémités a et b (distinctes) dont le point courant a pour coordonnées $(\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t))$ où $t \in (\alpha, \beta)$.

On appellera *chemin optique relatif à ψ* (ou à Γ_ψ), la fonctionnelle L définie sur $E(\alpha, \beta)$ telle que :

$$\forall \psi \in E(\alpha, \beta), \quad L(\psi) = \int_{\alpha}^{\beta} F(\psi(t), D\psi(t)) dt.$$

où :

$$\forall t \in (\alpha, \beta), \quad F(\psi(t), D\psi(t)) = n(\psi(t)) \cdot \|D\psi(t)\|$$

Nous nous proposons de déterminer s'il existe $\psi \in E(\alpha, \beta)$ qui rende extrémale L sur $E(\alpha, \beta)$. Pour cela, nous allons calculer la *dérivée de Fréchet* de L .

$$\begin{aligned} \forall \psi &\in E(\alpha, \beta), \forall \varphi \in E_0(\alpha, \beta), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \\ &\frac{1}{\lambda}(L(\psi + \lambda\varphi) - L(\psi)) \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(\int_{\alpha}^{\beta} [F(\psi(t) + \lambda\varphi(t), D\psi(t) + \lambda D\varphi(t)) - F(\psi(t), D(\psi(t)))] dt \right) \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \psi} F(\psi(t), D(\psi(t))) \right) | \varphi(t) \right\rangle \right. \\ &+ \left. \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial (D\psi)} F(\psi(t), D(\psi(t))) \right) | D\varphi(t) \right\rangle + \varepsilon(t, \varphi; \lambda) \right] dt \end{aligned}$$

On montre que, si F est de classe C^1 , alors ε tend uniformément vers zéro, relativement à t

sur (α, β) et $\varphi \in E_0(\alpha, \beta)$, lorsque λ tend vers zéro. Or :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} &< \left(\frac{\partial}{\partial(D\psi)} F(\psi(t), D(\psi(t))) \mid D\varphi(t) \right) > dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial(D\psi_j)} F(\psi(t), D(\psi(t))) \right) \cdot D\varphi_j(t) \right) dt \\ &= \left[\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial(D\psi_j)} F(\psi(t), D(\psi(t))) \cdot \varphi_j(t) \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &\quad - \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial(D\psi_j)} F(\psi(t), D(\psi(t))) \right] \cdot \varphi_j(t) \right) dt \end{aligned}$$

Comme $\varphi_j(\alpha) = \varphi_j(\beta) = 0$, $j = 1, 2, 3$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} &< \left[\frac{\partial}{\partial(D\psi)} F(\psi(t), D(\psi(t))) \right] \mid D\varphi(t) > dt \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial(D\psi_j)} F(\psi(t), D(\psi(t))) \right] \cdot \varphi_j(t) \right) dt \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} (L(\psi + \lambda\varphi) - L(\psi)) \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} < \left[\frac{\partial}{\partial\psi} F(\psi(t), D(\psi(t))) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial(D\psi)} F(\psi(t), D(\psi(t))) \right) \mid \varphi(t) \right] > dt \end{aligned}$$

Mais :

$$\forall t \in (\alpha, \beta), \quad \frac{\partial}{\partial\psi} F(\psi(t), D\psi(t)) = \|D\psi(t)\| \cdot \text{grad}(n(\psi(t))).$$

et :

$$\begin{aligned} \forall t \in (\alpha, \beta), \quad \frac{\partial}{\partial(D\psi)} F(\psi(t), D(\psi(t))) &= \frac{d}{dt} (n(\psi(t)) \cdot u(t)) \\ \text{où} \quad : \quad u(t) &= \frac{D\psi(t)}{\|D\psi(t)\|}. \end{aligned}$$

Notons s_{ψ} l'abscisse curviligne de Γ_{ψ} . On sait que :

$$ds_{\psi}(t) = \|D\psi(t)\| dt \quad \text{d'où} : \quad \frac{d}{ds_{\psi}} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dt}{ds_{\psi}} = \frac{1}{\|D\psi(t)\|} \frac{d}{dt}$$

On en conclut que ψ est extrémale si :

$$\forall t \in (\alpha, \beta), \quad \frac{\partial}{\partial\psi} F(\psi(t), D\psi(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial(D\psi)} F(\psi(t), D(\psi(t))) \right) = 0$$

(dans l'espace vectoriel dual topologique de $E_0(\alpha, \beta)$) c-à-d si :

$$\text{grad}(n(\tilde{\psi}(s))) = \frac{d}{dt} (n(\tilde{\psi}(s)) \cdot u(s)) \quad \text{où} : \quad \tilde{\psi}(s) = \psi(t)$$

5.4.2 Deuxième cas.

Dans le premier cas, nous avons supposé que les trajectoires des rayons lumineux étaient de classe C^1 , c-à-d qu'elles étaient continues et admettaient, en tout point une tangente continue.

Il n'en va pas ainsi, en particulier, dans le cas de la réflexion ou de la réfraction.

Nous pourrions traiter ces deux cas, en supposant que :

(i)

$$E(\alpha, \beta) = \{ \psi \in C^0(\alpha, \beta) ; \forall t \in (\alpha, \beta), \psi(t) = \int_{\alpha}^t \psi^1(s) ds, \\ \text{où } \psi^1 \in L^p(\alpha, \beta), p \in \mathbb{R}, p \geq 1 \},$$

$L^p(\alpha, \beta)$ désignant l'espace vectoriel des fonctions définies presque partout sur (α, β) et qui sont de puissances p-ième intégrables.

(ii) les fonctions

$$\frac{\partial}{\partial \psi} F(\psi(t), D\psi(t)) \text{ et } \frac{\partial}{\partial (D\psi)} F(\psi(t), D(\psi(t)))$$

appartiennent à $L^p(\alpha, \beta)$.

Alors, en procédant comme dans le premier cas, on montrera que :

$$\forall t \in (\alpha, \beta), \text{ presque partout, } grad(n(\tilde{\psi}(s))) = \frac{d}{dt}(n(\tilde{\psi}(s)).u(s)) \text{ avec : } \tilde{\psi}(s) = \psi(t)$$

B. Optique ondulatoire.

5.5 Franges de diffraction ou d'interférences.

Si l'on projette un faisceau lumineux, issu d'une source S , sur un "petit" trou circulaire (resp. une "fine" fente), percé(e) dans un écran E , on voit apparaître sur un écran E_1 situé derrière E par rapport à S , des cercles (resp. des bandes) clair(e)s et foncé(e)s régulièrement espacé(e)s qui sont appelé(e)s *figures de diffraction*.

De même, si l'on projette un faisceau lumineux, issu de S , sur deux "fines" fentes rapprochées percées dans E , on voit apparaître sur E_1 , une suite de bandes sombres et claires qui sont nommées *franges d'interférences*.

Il est ainsi prouvé qu'il est impossible d'isoler un rayon lumineux qui passerait en ligne droite à travers une "fine" fente ou un "petit" trou circulaire percé dans un écran.

Le modèle physique de l'Optique géométrique ne peut donc donner une explication de tous les phénomènes lumineux.

5.6 Le principe de Huyghens.

5.6.1 Énoncé du principe de Huyghens.

Pour expliquer les phénomènes de diffraction et d'interférences de la lumière, Huyghens a énoncé un principe qui peut se formuler ainsi :

Une source de lumière placée en un point de l'espace crée une perturbation qui se propage dans tout l'espace alentour, sans transport de matière ; tout point de l'espace atteint par cette perturbation peut être considéré comme une source de lumière secondaire.

Dans la suite, on appellera **front d'onde** à un instant t positif, de la perturbation créée dans l'espace par un rayon lumineux issu de S à l'instant zéro, la surface $\Sigma(S, t)$ formée de tous les points atteints, à l'instant t , par ce rayon lumineux.

Dans un milieu isotrope, $\Sigma(S, t)$ est une sphère ; évidemment, $\Sigma(S, 0) = S$.

Huyghens a mis en évidence la propriété remarquable suivante :

Lorsque θ est positif, $\Sigma(S_0; t + \theta)$ est l'enveloppe de la famille de surfaces $\{\Sigma(S; \theta) ; S \in \Sigma(S_0; t)\}$.

Le principe de Huyghens est à l'origine d'un modèle de l'Optique qu'on nomme **Optique ondulatoire**.

Quand Huyghens énonça le principe qui porte son nom, les mathématiciens disposaient, essentiellement, des fonctions trigonométriques, pour représenter un signal périodique. Depuis, ils ont élaboré des outils performants comme la transformée de Fourier et la transformée en ondelettes que nous présentons à la fin de cet ouvrage.

6.1 Généalogie de la thermodynamique.

Fin du seizième siècle \rightarrow fabrication du thermomètre en Italie.

\downarrow

Fahrenheit (1686-1736) }
Réaumur (1683-1757) } \rightarrow Perfectionnement du thermomètre

\downarrow

Celsius (1707-1744)

\downarrow

Lavoisier (1743-1794) }
Laplace (1748-1827) } \rightarrow Perfectionnement de la calorimétrie.

\downarrow

Sadi Carnot (1796-1832) \rightarrow "Réflexions sur la puissance du feu" (1824).

\downarrow

Mayer (1743-1794) }
Joule (1748-1827) } \rightarrow Définition de l'équivalent mécanique de la calorie.

\downarrow

William Thomson (Lord Kelvin) (1824-1907)

\downarrow

Helmholtz (1821-1894) \rightarrow Bases de la Thermodynamique moderne.

\downarrow

Clausius (1822-1888) }
Maxwell (1831-1879) }
Boltzmann (1844-1906) } \rightarrow Théorie cinétique des gaz.
Gibbs (1839-1903) }

\downarrow

Jean Perrin (1870-1942) \rightarrow Mouvement brownien ; confirmation de la théorie atomique.

A. Modélisation macroscopique de la Thermodynamique.

6.2 Systèmes thermodynamiques.

Définition : On appellera *système thermodynamique*, la donnée d'un ensemble Θ dont les constituants sont de nature physico-chimique.

On appellera *milieu extérieur* à Θ tout ce qui, dans l'Univers, n'appartient pas à Θ .

Θ peut être séparé de son milieu extérieur par une surface réelle ou virtuelle (fixe ou mobile).

On dira que Θ est *fermé* s'il ne peut échanger de matière avec l'extérieur ; sinon, on dira qu'il est *ouvert*.

On dira que Θ est *isolé* s'il ne peut avoir aucun échange avec le milieu qui lui est extérieur.

Exemples de systèmes thermodynamiques : un thermomètre, un fluide, une cellule d'un être vivant.

On dira qu'une surface séparant Θ et son milieu extérieur est *adiabatique* (resp. *diatherme*) si elle empêche (resp. permet) le transfert de chaleur entre Θ et son milieu extérieur.

6.3 Variables d'état d'un système thermodynamique.

Définition :

Dans la suite, on identifiera tout système thermodynamique Θ à une sous-variété W de \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}^*$ convenablement choisie.

(Plus simplement on pourra supposer que W est une surface de \mathbb{R}^n).

Tout point $X \in W$ définira un état de Θ .

Les coordonnées (X_1, \dots, X_n) de X seront appelées les variables d'état de Θ .

6.4 Etat d'équilibre d'un système thermodynamique. Principe zéro.

Définition 1 :

On dira qu'un système thermodynamique Θ est dans son *état d'équilibre* (ou bien a atteint son état d'équilibre) lorsque ses variables d'état n'évoluent pas.

Définition 2 :

On dira que deux systèmes thermodynamiques *fermés*, séparés par une paroi adiabatique Π sont (mutuellement) *en équilibre thermique* si l'état thermique de chacun d'eux n'est pas modifié quand Π est remplacé par une paroi diatherme.

Enoncé du principe zéro de la Thermodynamique : Si deux systèmes thermodynamiques (*fermés*) sont en équilibre avec un même troisième, alors ils sont en équilibre (entre eux).

Conséquence du Principe zéro.

Le principe zéro définit une *relation d'équivalence* dans l'ensemble des systèmes thermodynamiques.

A chaque classe de cette relation d'équivalence on associe une grandeur (une variable d'état) thermodynamique qu'on appelle sa **température**.

Définition 3 :

On appelle **thermostat** un système thermodynamique dont la taille est suffisamment grande pour que sa température reste constante quel que soit le transfert thermique créé ou reçu par le thermostat.

6.5 Variables extensives et intensives.

Définition :

Soit λ un scalaire strictement positif qu'on appellera *paramètre de taille*.

On dira qu'une fonction γ de λ est une variable (ou une grandeur) *extensive* (resp. *intensive*) si : $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $\gamma(\lambda) = \lambda\gamma(1)$ (resp. $\gamma(\lambda) = \gamma(1)$).

On notera que si γ_1 et γ_2 sont deux variables extensives, alors :

$$\gamma_{12} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \text{ est une variable intensive.}$$

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, n variables *extensives*.

Soit Φ une fonction de $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ dans \mathbb{R} de classe C^1 , extensive, c-à-d telle que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \Phi(\lambda\gamma_1, \dots, \lambda\gamma_n) = \lambda \Phi(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

Alors,

$$\text{quel que soit } j \in \{1, \dots, n\}, \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_j} \text{ est une variable } \textit{intensive}.$$

Preuve (rapide) : On sait que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \Phi(\lambda(\gamma + \zeta)) = \lambda \Phi(\gamma + \zeta)$$

Donc :

$$\Phi(\lambda(\gamma + \zeta)) = \lambda (\Phi(\gamma) + \Phi'(\gamma)(\zeta) + \dots)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda(\gamma + \zeta)) &= \Phi(\lambda\gamma + \lambda\zeta) = \Phi(\lambda\gamma) + \Phi'(\lambda\gamma)(\lambda\zeta) + \dots \\ &= \lambda (\Phi(\gamma) + \Phi'(\lambda\gamma)(\zeta) + \dots) \end{aligned}$$

Il en résulte que : $\Phi'(\lambda\gamma) = \Phi'(\gamma)$.

6.6 Température Celsius et température absolue.

Les thermomètres usuels mesurent la température d'un milieu donné, dans des conditions "normales", à partir de la dilatation d'un liquide.

C'est Celsius qui a défini l'unité de température comme la centième partie de l'écart entre la température de fusion de la glace et celle d'ébullition de l'eau, à la pression atmosphérique normale.

Il attribue, alors, le niveau *zéro* à la température de fusion de la glace, le niveau *cent* à la température d'ébullition de l'eau sous la pression atmosphérique normale. Il a défini ainsi une échelle graduée de température.

On dira, évidemment, alors, qu'un milieu qui a une température inférieure à celle de la fusion de la glace, a une température Celsius négative. Si, relativement à l'échelle de Celsius, un milieu donné a une température t de m degrés, $m \in \mathbb{Z}$, on écrira que : $t = mC$.

Dessignons le graphe (le diagramme) donnant la variation du volume d'un gaz -"loin" de son point de liquéfaction - en fonction de sa température, à pression constante.

On constate, alors, que ce graphe est approximativement un segment de droite qui rencontre l'axe des températures en un point d'abscisse t_0 ; on montre que $t_0 = -273,15^\circ C$

Notons que t_0 est une température limite qui correspond à un volume nul!

On appelle **température absolue** d'un milieu donné, la température, notée T , telle que $T = t_C + t_0$, où t_C est la température du milieu considéré, repérée dans l'échelle de Celsius.

On appellera *degré Kelvin*, le degré Celsius augmenté de $273,15$.

On écrira : $1^\circ K = 1^\circ C + 273,15$.

Ainsi, la température de fusion de la glace se produit-elle à $273,15^\circ K$.

6.7 Vers l'équation d'état d'un gaz parfait.

Dès le dix-septième siècle, les physiciens étudièrent les relations entre la pression, le volume et la température d'un gaz.

Ils utilisèrent, pour déterminer ces relations, des gaz placés dans des conditions "normales" de pression, volume et température.

Voici les principaux résultats qu'ils obtinrent :

(i) *Loi de Boyle-Mariotte (Boyle 1664; Mariotte 1676) :*

A température constante, le produit de la pression d'un gaz par son volume est constante.

(ii) *Loi de Gay-Lussac (1802) :*

A pression constante, le volume d'un gaz est proportionnel à sa température absolue.

(iii) *Loi de Charles :*

A volume constant, la pression d'un gaz est proportionnel à sa température absolue.

(iv) *Loi d'Avogadro (constitution moléculaire des gaz) :*

Des volumes égaux de gaz, à la même pression et à la même température contiennent le même nombre de molécules.

6.8 L'équation d'état d'un gaz parfait.

Définition :

On appellera *gaz parfait*, un gaz "idéal" qui vérifierait rigoureusement les lois (i), (ii), (iii) et (iv) énoncées au paragraphe précédent.

Un gaz réel, "suffisamment loin" de son point de liquéfaction, et tel que les interactions entre ses molécules soient négligeables peut être regardé, approximativement, comme un gaz parfait.

Considérons un gaz parfait dans deux états distincts caractérisés par leurs pressions, volumes et températures absolues (P, V, T) et (P', V', T') .

On sait que :

$$\text{si } P = P', \text{ alors : } \frac{V'}{V} = \frac{T'}{T}$$

$$\text{si } V = V', \text{ alors : } \frac{P'}{P} = \frac{T'}{T}$$

$$\text{et que : } P'V' = PV$$

Des relations précédentes, on déduit que :

$$\frac{P'V'}{T'} = \frac{PV}{T}$$

De la loi d'Avogadro résulte la loi suivante :

(v) *Loi des gaz parfaits :*

Les trois variables d'état d'un gaz parfait, à savoir sa pression P , son volume V , et sa température absolue T sont liées par la relation suivante :

$$PV = n R T$$

où n est le nombre de moles du gaz et R une constante (dépendant des unités choisies).

Remarque : la pression et la température sont des variables intensives, le volume est une variable extensive proportionnelle au nombre de moles n du gaz.

6.9 Les trois premiers principes de la Thermodynamique.

Ces principes sont des lois empiriques, sans cesse confirmées par l'expérience.

6.9.1 Enoncé du premier principe

Soit Θ un système thermodynamique et X_1, \dots, X_n ses variables d'état.

Il existe une fonction U de $X = (X_1, \dots, X_n)$ extensive telle que :

- (i) quels que soient X^1 et X^2 appartenant à W , la différence $U(X^2) - U(X^1)$ est indépendante du chemin suivi par X pour aller de X^1 à X^2 .
- (ii) si T_{12} (resp. Q_{12}) est le travail (resp. la quantité de chaleur) reçue par Θ dans son passage de l'état X^1 à l'état X^2 , alors :

$$U(X^2) - U(X^1) = T_{12} + . Q_{12}.$$

Notons que T_{12} et Q_{12} peuvent dépendre du chemin suivi par X pour aller de X^1 à X^2 .

U est appelée l'énergie interne de Θ .

6.9.2 Enoncé du deuxième principe

Soit Θ un système thermodynamique et X_1, \dots, X_n ses variables d'état.

Il existe une fonction S de $X = (X_1, \dots, X_n)$ extensive telle que :

- (i) Si Θ est un système isolé, alors S ne peut que croître lorsque Θ est le siège de transformations irréversibles.

(ii) S est maximale lorsque Θ est un système isolé, en équilibre thermique.

S est appelée l'entropie de Θ .

Commentaires :

(a) Si Θ n'est pas isolé, alors S peut décroître, au cours de l'évolution de Θ .

(b) La variation de S au cours d'une transformation cyclique de Θ , est nulle.

6.9.3 Enoncés équivalents au deuxième principe

(a) *Clausius* : L'échange de chaleur entre deux corps de températures différentes ne peut pas se faire spontanément du corps froid vers le corps chaud.

(b) *Thomson (Lord Kelvin)* : Un système thermodynamique en contact avec un seul thermostat ne peut, au cours d'un cycle, que recevoir ou fournir de la chaleur.

6.9.4 Enoncé du troisième principe.

Lorsque la température d'un corps pur tend vers zéro degré, son entropie tend vers une valeur limite qui est nulle si ce corps est stable.

6.10 La transformation de Legendre.

6.10.1 La transformée de Legendre d'une fonction d'une variable réelle.

Définition : Soit f une application différentiable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On appelle *transformée de Legendre de f* , la transformation qui, à l'ensemble

$$\begin{aligned} \text{graphe}(f) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x)\} \quad \text{associe} \\ (\text{graphe}(f))^* &= \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2; x^* = f'(x), y^* = x \cdot x^* - f(x); x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Notons que $(\text{graphe}(f))^*$ est défini paramétriquement.

Supposons maintenant que l'application dérivée f' de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , soit différentiable et inversible et posons : $g = (f')^{-1}$. Alors :

$$(x^* = f'(x)) \Leftrightarrow (x = g(x^*))$$

On appellera, alors, *duale (ou polaire)* de f , l'application f^* de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , telle que :

$$\begin{aligned} \forall x^* \in \mathbb{R}, \quad f^*(x^*) &= x \cdot x^* - f(x) \quad \text{avec} \quad x = g(x^*) \\ \text{et donc} \quad : \quad f^*(x^*) &= x^* \cdot g(x^*) - (f \circ g)(x^*) \end{aligned}$$

On vérifie facilement que si f^* est différentiable et inversible sur \mathbb{R} , alors :

$$(x^* = f'(x)) \Leftrightarrow (x = (f^*)'(x^*)) \quad \text{et} \quad f(x) = x^* \cdot (f^*)'(x^*) - f^*(x^*)$$

On dit alors que la relation entre (x, f) et (x^*, f^*) est *involutive*.

6.10.2 Un cas particulier important : le cas convexe.

Si f est une application convexe de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on appelle *transformée de Legendre-Fenchel* de f (ou duale ou polaire de f), l'application f^* de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , telle que :

$$\forall x^* \in \mathbb{R}, \quad f^*(x^*) = \text{Sup} \{x \cdot x^* - f(x); x \in \mathbb{R}\}$$

On montre que :

- (i) f^* est convexe et s.c.i (semi-continue inférieurement)
- (ii) Si f est convexe et différentiable sur \mathbb{R} et si sa dérivée est inversible alors :

$$\forall x^* \in \mathbb{R}, \quad f^*(x^*) = x \cdot x^* - f(x) \quad \text{avec} \quad x^* = f'(x)$$

- (iii) Si f est s.c.i sur \mathbb{R} , alors : $(f^*)^* = f$ et les couples (x, f) et (x^*, f^*) sont en involution.

6.10.3 La transformée de Legendre d'une fonction de plusieurs variables réelles.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$ et $X = \mathbb{R}^m$.

On munit X du produit scalaire euclidien canonique que l'on notera $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

On identifiera l'espace euclidien dual de $(X, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ à l'espace X .

Soit f une application différentiable de X dans \mathbb{R} .

En tout point $x \in X$, on notera $(Df)(x)$ le gradient de f .

Comme ci-dessus, on appellera *transformée de Legendre* de f la transformation qui à l'ensemble

$$\begin{aligned} \text{graphe}(f) &= \{(x, y) \in X \times \mathbb{R}; y = f(x)\} \quad \text{associe} \\ (\text{graphe}(f))^* &= \{(x^*, y^*) \in X \times \mathbb{R}; x^* = (Df)(x), y^* = \langle x | x^* \rangle - f(x); x \in X\} \end{aligned}$$

De même si f est convexe on appellera *transformée de Legendre-Fenchel* de f , l'application f^* de X dans \mathbb{R} telle que :

$$\forall x^* \in X, \quad f^*(x^*) = \text{Sup} \{\langle x | x^* \rangle - f(x); x \in X\}$$

La théorie de la transformation de Legendre (ou de Legendre-Fenchel) d'une variable réelle se prolonge sans difficulté au cas de plusieurs variables réelles.

6.10.4 Transformée de Legendre partielle.

Définition :

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $X = \mathbb{R}^m$ et ψ une application différentiable de X dans \mathbb{R} .

Soit $p \in \{1, \dots, m\}$, $J = \{1, \dots, p\}$ et $X_J = (x_1, \dots, x_p)$.

On appellera transformation de Legendre partielle de ψ , relativement à J (ou X_J), l'application qui, à l'ensemble

$$\text{graphe}(\psi) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R}; y = \psi(x)\}$$

associe l'ensemble :

$$(\text{graphe } (\psi))_J^* = \left\{ (X_J^*, y_J^*) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}; X_J^* = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_p}(x) \right\}, \right. \\ \left. y_J^* = \sum_{j=1}^p \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) \cdot x_j - \psi(x); x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{X} \right\}$$

Noter que si $p = m$, alors on retrouve, évidemment, le cas étudié au paragraphe précédent. Désignons par $\langle \cdot | \cdot \rangle_J$ la restriction à X_J du produit scalaire euclidien canonique défini sur X .

Posons :

$$D_J = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_p} \right).$$

Alors

$$(\text{graphe } (\psi))_J^* = \{(X_J^*, y_J^*) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}; X_J^* = (D_J \psi)(x), \\ y_J^* = \langle X_J | (D_J \psi)(x) \rangle_J - \psi(x); x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{X}\}$$

6.11 Potentiels thermodynamiques.

Soit Θ un système thermodynamique isolé, caractérisé par les variables d'état X_1, \dots, X_m et la fonction d'état $X_0 = \psi(X_1, \dots, X_m)$.

A partir de X_0 nous allons obtenir ci-dessous, de nouvelles fonctions d'état en opérant des transformations de Legendre partielles appropriées.

6.11.1 Applications.

Supposons connue l'énergie U du système Θ en fonction de son entropie S , son volume V et du nombre de moles N qu'il contient, soit : $U = \psi(S, V, N)$.

Alors, on obtient :

(i) L'énergie libre

$$F = U - TS \quad \text{où} \quad T = \frac{\partial U}{\partial S}$$

par une transformation de Legendre partielle de ψ relativement à S .

(ii) L'enthalpie

$$H = U + PV \quad \text{où} \quad P = -\frac{\partial U}{\partial V}$$

par une transformation de Legendre partielle de ψ relativement à V .

(iii) L'enthalpie libre

$$G = U - TS + PV \quad \text{où} \quad T = \frac{\partial U}{\partial S} \quad \text{et} \quad P = -\frac{\partial U}{\partial V}$$

par une transformation de Legendre partielle de ψ relativement à S et V .

6.11.2 La relation de Gibbs-Duhem.

(a) La relation d'Euler pour les fonctions homogènes.

Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^q$.

Munissons E (resp. F) du produit scalaire euclidien canonique $\langle \cdot | \cdot \rangle$ (resp. $(\cdot | \cdot)$) et désignons par $\|\cdot\|$ la norme associée à $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Proposition et Définition 2 :

Soit f une application de $(E, \|\cdot\|)$ dans F de classe C^1 .

On dit que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ sur E si :

$$\forall x \in E, \forall k \in \mathbb{R}^*, f(kx) = k^\alpha f(x)$$

Alors : $\forall x \in E, f'(x).x = \alpha f(x)$.

Preuve : Puisque f est de classe C^1 sur $(E, \|\cdot\|)$, on a :

$$\forall x, h \in E, f(x+h) = f(x) + f'(x).h + o(\|h\|)$$

où $f'(x)$ est une application linéaire de E dans F .

Supposons que $h = (k-1)x$, $k \neq 1$. Alors :

$$f'(x).x = \frac{k^\alpha - 1}{k-1} + \frac{o(|k-1| \|x\|)}{k-1}$$

Comme

$$\lim_{k \rightarrow 1} \frac{o(|k-1| \|x\|)}{k-1} = 0$$

on a, si $\alpha \neq 0$:

$$\lim_{k \rightarrow 1} \frac{k^\alpha - 1}{k-1} = \lim_{k \rightarrow 1} \frac{k^\alpha - 1^\alpha}{k-1} = \left[\frac{\partial(k^\alpha)}{\partial k} \right]_{k=1} = [\alpha k^{\alpha-1}]_{k=1} = \alpha$$

d'où le résultat annoncé.

Plus généralement, on prouve le résultat suivant :

(b) **La relation de Gibbs-Duhem.** Soit Θ un système thermodynamique isolé, caractérisé par les variables d'état X_1, \dots, X_m et la fonction d'état $X_0 = \psi(X_1, \dots, X_m)$.

On suppose que les variables X_0, X_1, \dots, X_m sont extensives.

(*) ψ étant suffisamment régulière, on a :

$$dX_0 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial X_j} dX_j$$

(**) Comme X_0 est extensive, ψ est homogène de degré un. De la relation d'Euler, établie ci-dessus, il résulte que :

$$\psi(X_1, \dots, X_m) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial X_j} X_j$$

(***) Posons :

$$\frac{\partial \psi}{\partial X_j} = Y_j, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Alors :

$$dX_0 = \sum_{j=1}^n Y_j dX_j + \sum_{j=1}^n X_j dY_j$$

et comme :

$$dX_0 = \sum_{j=1}^n Y_j dX_j,$$

on a :

$$\sum_{j=1}^n X_j dY_j = 0$$

C'est la *relation de Gibbs-Duhem*.

Remarquons que, dans les conditions explicitées ci-dessus, on passe

$$\text{de } dX_0 = \sum_{j=1}^n Y_j dX_j \quad \text{à} \quad X_0 = \sum_{j=1}^n Y_j X_j \quad \text{en intégrant } X_0, dX_1, \dots, dX_n$$

Application : Avec les hypothèses faites plus haut,

$$U = \psi(S, V, N) \Rightarrow dU = TdS - PdV + \mu dN \quad \text{et} \quad U = TS - PV + \mu N.$$

On notera que la relation de Gibbs-Duhem établit la *non-indépendance* des variables intensives Y_1, \dots, Y_n .

(c) **La relation de Gibbs-Helmholtz.** H étant l'enthalpie et G l'enthalpie libre, on sait que :

$$H = U + PV \quad \text{avec} \quad P = -\frac{\partial U}{\partial V}$$

et

$$G = U - TS + PV \quad \text{avec} \quad T = \frac{\partial U}{\partial S} \quad \text{et} \quad P = -\frac{\partial U}{\partial V}$$

Il en résulte que : $H = G + TS$.

$$\text{Or : } dG = dU - TdS - SdT + PdV + VdP$$

$$\text{Mais : } dU = TdS - PdV + \mu dN$$

$$\text{Par conséquent : } dG = -SdT + VdP + \mu dN.$$

Or :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial T} dT + \frac{\partial G}{\partial P} dP + \frac{\partial G}{\partial N} dN$$

Ainsi :

$$S = -\frac{\partial G}{\partial T} \quad \text{et} \quad H = G - T \frac{\partial G}{\partial T}$$

On vérifie, immédiatement, que :

$$H = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} (T^{-1}G)$$

Cette dernière relation est la *relation de Gibbs-Helmholtz*.

(d) **Les relations de Maxwell.** On sait que si les dérivées partielles d'ordre *deux* de la fonction ψ sont continues, alors :

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\partial \psi}{\partial X_k} \right) = \frac{\partial}{\partial X_k} \left(\frac{\partial \psi}{\partial X_j} \right), \quad j, k \in \{1, \dots, n\}$$

Application : Comme :

$$\frac{\partial U}{\partial S} = T, \quad \frac{\partial U}{\partial V} = -P, \quad \frac{\partial U}{\partial N} = \mu$$

on a :

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} \right) \frac{\partial T}{\partial V} = -\frac{\partial P}{\partial S}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial N} \right) \frac{\partial T}{\partial N} = \frac{\partial \mu}{\partial S}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial N} \right) \frac{\partial P}{\partial N} = -\frac{\partial \mu}{\partial V}$$

Les relations ci-dessus sont les *relations de Maxwell*.

B. Thermodynamique statistique.

6.12 La théorie cinétique des gaz parfaits de Maxwell.

Considérons un gaz \mathbf{G} enfermé dans une enceinte \mathbf{E} limitée par une paroi élastique $\mathbf{\Pi}$.

La théorie cinétique des gaz est fondée sur l'idée que tout gaz est composé d'une "myriade" de molécules en perpétuelle agitation.

Il en résulte que :

- (i) La pression exercée par \mathbf{G} sur $\mathbf{\Pi}$ est la résultante des chocs des molécules de \mathbf{G} sur $\mathbf{\Pi}$.
- (ii) La température de \mathbf{G} est une mesure de l'énergie cinétique moyenne de l'ensemble des molécules de \mathbf{G} , quand on néglige l'énergie potentielle d'interaction de ces molécules.

Si, à tout instant, on connaissait, la position et la vitesse de chaque molécule de \mathbf{G} , on connaîtrait, alors, son état à tout instant.

Ceci est impossible car le nombre de molécules de \mathbf{G} est très élevé.

La théorie cinétique des gaz de Maxwell repose, ainsi, sur deux types d'hypothèses, mécanistes et probabilistes.

(a) Hypothèses mécanistes :

- (a₁) Les molécules de \mathbf{G} sont assimilées à des *sphères* de diamètre négligeable devant la distance moyenne des molécules entre elles.
- (a₂) Les molécules de \mathbf{G} sont assimilées à des *sphères (dures)* impénétrables et indéformables.
- (a₃) Les chocs entre les molécules sont élastiques. Entre deux chocs, les molécules se déplacent en ligne droite. et à vitesse constante.

(b) Hypothèses probabilistes : (Les positions et) les vitesses des molécules de \mathbf{G} sont *distribuées au hasard*.

- (b₁) Les mouvements des molécules ne modifient pas la *densité moléculaire* de \mathbf{G} .
- (b₂) Dans chaque élément de volume de \mathbf{G} , les molécules possèdent des vitesses dont les directions sont *uniformément réparties* dans l'espace.
- (b₃) Les composantes des vitesses des molécules de \mathbf{G} sont des *variables aléatoires indépendantes*.

Supposons que \mathbf{G} soit un gaz parfait monoatomique contenant N molécules.

Des hypothèses a) et b), ci-dessus, on déduit que :

- (i) Si V est le volume de \mathbf{G} et \tilde{u} la vitesse moyenne des molécules de \mathbf{G} , alors la *pression* P de \mathbf{G} sur la paroi $\mathbf{\Pi}$ est :

$$P = \frac{Nm}{V} \frac{\tilde{u}^2}{3}$$

- (ii) La *densité de probabilité de la norme u* des vitesses des molécules de \mathbf{G} est égale à :

$$4\pi \left(\frac{B}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} u^2 \exp(-Bu^2) \quad \text{où } B \text{ est une constante}$$

Les résultats (i) et (ii) ci-dessus sont *indépendants*.

(iii) Comme l'énergie potentielle de \mathbf{G} - dûe aux interactions moléculaires - est négligeable, l'énergie interne U de \mathbf{G} est égale à la somme des énergies cinétiques des molécules de \mathbf{G} et :

$$U = (Nm) \frac{\tilde{u}^2}{2}$$

(iv) On sait que $PV = n RT$ où $n = N (N_A)^{-1}$, N_A étant le nombre d'Avogadro et $R = k_B \cdot N_A$, k_B étant la constante de Boltzmann.

On a montré en (i) que :

$$PV = \frac{Nm\tilde{u}^2}{3} . \text{ Il en résulte que : } \tilde{u}^2 = \frac{3k_B T}{m}$$

$$\text{Par conséquent : } T = \frac{m}{3k_B} \tilde{u}^2 \quad \text{et} \quad U = \frac{3}{2} N k_B T$$

La température absolue de \mathbf{G} est donc proportionnelle à son énergie interne.

6.13 La Thermodynamique statistique de Boltzmann.

6.13.1 Sur la Physique statistique.

La Physique statistique a pour objet de déterminer les propriétés (physiques) des systèmes macroscopiques (macrosystèmes) à partir de celles des sous-systèmes microscopiques (micro-sous-systèmes) qui les constituent.

Définition :

On appelle **micro-état accessible** d'un macro-système, une configuration possible de l'ensemble des micro-sous systèmes qui constituent ce macrosystème.

Précisons qu'en général, il est impossible de déterminer explicitement dans quel micro-état se trouve un système, à un instant donné. En effet, pour décrire l'évolution d'une mole de gaz parfait monoatomique qui contient $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ molécules, il nous faudrait connaître, à tout instant, les $3N_A$ coordonnées et les $3N_A$ vitesses des centres de gravité des N_A molécules dont elle est formée

Par contre, en général, on peut déterminer la probabilité pour qu'un micro-système soit dans un micro-état accessible.

6.13.2 La loi de Boltzmann. Application.

Définition :

Si Θ est un système thermodynamique, en équilibre thermique avec un thermostat, alors : il existe une constante $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ et une mesure μ sur $\Gamma(\Theta)$ telles que la *densité de probabilité* de trouver le micro-état $s \in \Gamma(\Theta)$ dans l'état d'énergie $E(s)$ est égale à :

$$dP(E(s); \beta) = C(\beta) \exp(-\beta E(s)) d\mu(s)$$

où $C(\beta)$ est un scalaire dépendant uniquement de β .

Comme :

$$\int_{s \in \Gamma(\Theta)} dP(E(s); \beta) = 1, \text{ on a : } (C(\beta))^{-1} = \int_{s \in \Gamma(\Theta)} \exp(-\beta E(s)) d\mu(s)$$

Notons Z l'application de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} qui à α associe $(C(\alpha))^{-1}$.

Désignons par $E(\beta)$ la valeur moyenne des énergies des micro-états $s \in \Gamma(\Theta)$.

Alors :

$$E(\beta) = \int_{s \in \Gamma(\Theta)} E(s) dP(E(s); \beta) = (Z(\beta))^{-1} \int_{s \in \Gamma(\Theta)} E(s) \exp(-\beta E(s)) d\mu(s)$$

Proposition : On suppose que la dérivation sous le signe $\int_{s \in \Gamma(\Theta)}$ est licite, et on note Δ le domaine de définition de $\ln(Z)$. Alors :

(i) $E = -(\ln(Z))'$ sur Δ .

(ii) La dérivée seconde de $\ln(Z)$ est positive ou nulle sur Δ . Il en résulte que $\ln(Z)$ est convexe sur Δ et continue dans l'intérieur de Δ .

Preuve :

(i)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\ln(Z(\alpha))) &= \frac{Z'(\alpha)}{Z(\alpha)} \\ &= (Z(\alpha))^{-1} \int_{s \in \Gamma(\Theta)} -E(s) \exp(-\alpha E(s)) d\mu(s) \\ &= -(Z(\alpha))^{-1} \int_{s \in \Gamma(\Theta)} E(s) \exp(-\alpha E(s)) d\mu(s) = -E(s) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (\ln(Z(\alpha))) &= -(Z(\alpha))^{-2} \left(\frac{\partial Z(\alpha)}{\partial \alpha} \right)^2 + (Z(\alpha))^{-1} \frac{\partial^2 (Z(\alpha))}{\partial \alpha^2} \\ &= (Z(\alpha))^{-2} \left[Z(\alpha) \frac{\partial^2 (Z(\alpha))}{\partial \alpha^2} - \left(\frac{\partial Z(\alpha)}{\partial \alpha} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{\partial^2 (Z(\alpha))}{\partial \alpha^2} = \int_{s \in \Gamma(\Theta)} (E(s))^2 \exp(-\alpha E(s)) d\mu(s)$$

Mais :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Z(\alpha)}{\partial \alpha} \right)^2 &= \left(\int_{s \in \Gamma(\Theta)} E(s) \exp\left(-\frac{\alpha}{2} E(s)\right) \cdot \exp\left(-\frac{\alpha}{2} E(s)\right) d\mu(s) \right)^2 \\ &\leq \left(\int_{s \in \Gamma(\Theta)} (E(s))^2 \exp(-\alpha E(s)) d\mu(s) \right) \cdot \left(\int_{s \in \Gamma(\Theta)} \exp(-\alpha E(s)) d\mu(s) \right) \end{aligned}$$

Et donc :

$$\left(\frac{\partial Z(\alpha)}{\partial \alpha} \right)^2 \leq (Z(\alpha)) \frac{\partial^2 (Z(\alpha))}{\partial \alpha^2}$$

d'où

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (\ln(Z(\alpha))) \geq 0$$

Proposition et définition :

Supposons que $\ln(Z)$ soit définie sur \mathbb{R} et posons :
 $\forall \alpha \in \mathbb{R}, Y(\alpha) = \ln(Z(\alpha))$.

(i) L'application de \mathbb{R} dans $\mathbb{R} : \alpha \rightarrow \alpha \zeta - Y(\alpha)$ atteint son extremum au point $\gamma(\zeta) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\zeta = Y'(\gamma(\zeta)) = -E(\gamma(\zeta))$$

(ii) Notons Y^* la transformée de Legendre de Y et posons :

$\omega(s, \zeta) = (Z(\gamma(\zeta)))^{-1} \exp(-\gamma(\zeta)E(s))$. Alors :

$$\forall \zeta \in \mathbb{R}, Y^*(\zeta) = \int_{s \in \Gamma(\Theta)} \omega(s, \zeta) \cdot \ln(\omega(s, \zeta)) d\mu(s)$$

Preuve :

(i) immédiate.

(ii)

$$Y^*(\zeta) = \gamma(\zeta) (-E(\gamma(\zeta))) - Y(\zeta) = \int_{s \in \Gamma(\Theta)} -\gamma(\zeta)E(s) dP(E(s); \gamma(\zeta)) - \ln(Z(\gamma(\zeta)))$$

et comme :

$$\int_{s \in \Gamma(\Theta)} dP(E(s); \gamma(\zeta)) = 1$$

on a :

$$Y^*(\zeta) = \int_{s \in \Gamma(\Theta)} -\gamma(\zeta)E(s) dP(E(s); \gamma(\zeta)) - \int_{s \in \Gamma(\Theta)} \ln(Z(\gamma(\zeta))) dP(E(s); \gamma(\zeta))$$

Or : $dP(E(s); \gamma(\zeta)) = \omega(s, \zeta) d\mu(s)$. On en déduit immédiatement le résultat annoncé.

Y^* sera appelée *l'entropie statistique* du système thermodynamique Θ .

$S = kY^*$ sera appelé *l'entropie de Boltzmann*. $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ erg/degré est la *constante de Boltzmann*. S est sans dimension. Quand on exprime la température en degrés Kelvin, on intègre le facteur k dans la définition de S donnée ci-dessus afin que la constante k n'apparaisse pas dans les équations générales de la Thermodynamique.

7.1 Généalogie de la Relativité .

Copernic (1473-1543) et **Bruno G.**(1548-1600)

↓

Galilée (1564-1642) et **Descartes** (1596-16xx)

↓

Leibniz(1646-1716) et **Newton** (1642-1727)

↓

Maxwell (1831-1879)

↓

Lorentz (1833-1928) et **Michelson** (1852-1931) et **Morley**

↓

Poincaré (1854-1912) et **Einstein** (1879-1955) et **Minkowski** (1864-1909)

A. La Relativité restreinte.

7.2 L'espace-temps.

Pour le physicien, l'espace-temps est la donnée de l'espace (géométrique) à trois dimensions - dans lequel nous vivons - et d'une horloge.

Un référentiel dans l'espace temps est la donnée d'un mobile à trois dimensions grâce auquel, à tout instant, on peut repérer tout point de l'espace (géométrique) et d'une horloge au repos relativement au mobile.

Un évènement est un point de l'espace-temps.

A tout évènement (P, t) , P désignant un point de l'espace et t le temps, le mathématicien associe quatre nombres (x_1, x_2, x_3, t) , les trois premiers fixant la position de P par rapport à un mobile à trois dimensions, le dernier repérant le temps donné par une horloge au repos par rapport au mobile.

Ainsi un référentiel de l'espace-temps peut-il être identifié à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

On dit qu'un référentiel est galiléen, si, relativement à ce référentiel, un corps qui n'est soumis à aucune force est au repos ou bien est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme. Les observations astronomiques effectuées depuis longtemps, permettent d'affirmer, avec une excellente approximation, que le référentiel formé par trois axes ayant pour origine le centre du Soleil et dirigés vers trois étoiles dites fixes, très éloignées de tous les corps du système solaire, est un repère galiléen. Tout référentiel en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel galiléen est évidemment galiléen. La Terre qui tourne sur elle-même en 24 heures, n'est pas un référentiel galiléen. Cependant, la vitesse de rotation de la Terre étant très faible par rapport à sa vitesse de translation le long de sa trajectoire autour du Soleil - qui est de 30 kilomètres par seconde - on peut considérer que tout référentiel lié à la Terre est un référentiel galiléen, avec une très bonne approximation.

7.3 Retour sur la loi fondamentale de la dynamique. Un mouvement comme nul.

Soit \mathcal{R} un repère galiléen d'origine A . Considérons un point P dans l'espace, de masse m et soumis à une force unique \mathbf{F} .

Le mouvement de P relativement à \mathcal{R} est régi par la loi fondamentale de la dynamique.

Si (F_1, F_2, F_3) sont les coordonnées de $\tilde{\mathbf{F}}$ dans \mathcal{R} et (x_1, x_2, x_3) celles de $\tilde{\mathbf{P}}$, on sait que :

$$\tilde{\mathbf{F}} = m \frac{d^2(\tilde{\mathbf{A}\tilde{\mathbf{P}}})}{dt^2} \Leftrightarrow (F_j = m \frac{d^2(x_j)}{dt^2}, j = 1, 2, 3)$$

Soit \mathcal{S} un autre repère galiléen d'origine B .

Alors, $\tilde{\mathbf{A}\tilde{\mathbf{P}}} = \tilde{\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}}} + \tilde{\mathbf{B}\tilde{\mathbf{P}}}$ et puisque :

$$\frac{d^2(\tilde{\mathbf{A}\tilde{\mathbf{P}}})}{dt^2} = 0 \quad \text{on a : } \mathbf{F} = m \frac{d^2(\tilde{\mathbf{B}\tilde{\mathbf{P}}})}{dt^2} .$$

Notons (y_1, y_2, y_3) les coordonnées de P dans \mathcal{S} .

7.3 Retour sur la loi fondamentale de la dynamique. Un mouvement comme nul.89

Puisque \mathcal{S} a un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à \mathcal{R} , les coordonnées de \mathbf{F} dans \mathcal{S} sont les mêmes que celles de \mathbf{F} dans \mathcal{R} . Ainsi :

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2(\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{P}})}{dt^2} \Leftrightarrow (F_j = m \frac{d^2(y_j)}{dt^2}, j = 1, 2, 3) .$$

En intervertissant les rôles de \mathcal{R} et \mathcal{S} , c-à-d en supposant \mathcal{S} fixe et \mathcal{R} en mouvement (rectiligne et uniforme) par rapport à \mathcal{S} , on peut énoncer le

Principe de la relativité galiléenne : La loi fondamentale de la dynamique a même expression dans deux repères (cartésiens) en mouvement rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre.

La portée de ce principe est si grande qu'il était naturel que les physiciens se demandent si toutes les lois de la Physique avaient même expression dans deux repères (cartésiens) en mouvement rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre.

Hélas (!), la réponse à cette question est négative.

C'est de la volonté de trouver un principe de relativité, analogue au principe de relativité galiléenne, qui englobe la loi fondamentale de la dynamique et les équations de Maxwell, que la théorie de la Relativité restreinte (R.R) est née .

Cette théorie a été établie en suivant deux cheminements parallèles, l'un mathématique, l'autre physique, que nous allons décrire maintenant.

I La voie physique (Michelson et Morley, Einstein).

7.4 L'expérience de Michelson et Morley (M.M) et ses conséquences.

Newton a établi la loi fondamentale de la dynamique en postulant l'existence d'un espace et d'un temps absolus.

Dans la conception de Newton le temps et l'espace sont donc indépendants.

Se fondant sur ce résultat et s'inspirant de la théorie des phénomènes ondulatoires, les physiciens imaginèrent qu'il existait un fluide invisible, qu'ils appelèrent *l'éther*, emplissant uniformément l'espace absolu, dans lequel les ondes électromagnétiques devaient se propager comme les ondes sonores dans l'air.

En 1887, Michelson et Morley, dans une expérience, désormais célèbre, tentaient de mettre en évidence l'existence de l'éther en comparant les parcours de deux faisceaux lumineux judicieusement choisis.

Contrairement à ce que les physiciens pensaient, en général, l'expérience de Michelson et Morley prouva :

- (i) que l'éther n'existait pas
- (ii) que la vitesse de la lumière mesurée dans deux référentiels en mouvement rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre était la même.
- (iii) que la vitesse de la lumière était une vitesse limite maximale.

Les physiciens se trouvaient donc contraints, alors, d'expliquer, d'une part, comment les ondes électromagnétiques pouvaient se propager en l'absence d'éther et, d'autre part, pourquoi la loi d'addition des vitesses, pourtant bien établie, était violée dans l'expérience de Michelson et Morley.

7.5 Le principe de relativité d'Einstein.

Pour surmonter les contradictions que l'expérience de Michelson et Morley avaient mises en évidence, dans l'ordonnancement de la physique newtonienne, Einstein posa comme principe que :

"les lois de l'électrodynamique et de l'optique doivent être valides dans tous les systèmes de référence dans lesquels les équations de la mécanique sont valables."

et postula que :

"la lumière se propage dans l'espace vide avec une vitesse bien définie c qui est indépendante de l'état de mouvement du corps émetteur."

Il fonda, ainsi, la théorie de la Relativité.

Dans toute la suite, nous supposerons - sauf mention explicite du contraire - que :

- (i) \mathcal{R} et \mathcal{S} sont deux référentiels galiléens.
- (ii) Tout point de l'espace est repéré, relativement à \mathcal{R} et \mathcal{S} , dans un système de coordonnées cartésiennes.
- (iii) \mathcal{H} (resp. \mathcal{K}) est une horloge au repos relativement à \mathcal{R} (resp. \mathcal{S}).

(iv) \mathcal{H} et \mathcal{K} sont synchrones, c-à-d qu'elles ont été réglées exactement l'une sur l'autre, alors qu'elles étaient au repos relativement à un même repère galiléen.

7.6 La transformation de Lorentz et la théorie de la Relativité restreinte.

7.6.1 Le cadre de la Relativité restreinte.

Soient P et Q deux points de l'espace.

Désignons par (x_1, x_2, x_3) et $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$ les coordonnées respectives de P et Q dans \mathcal{R} , par (y_1, y_2, y_3) et $(y_1 + \Delta y_1, y_2 + \Delta y_2, y_3 + \Delta y_3)$ les coordonnées respectives de P et Q dans \mathcal{S} .

Plaçons nous dans le cadre de la Mécanique newtonnienne où l'espace et le temps sont absolus.

Alors, la distance entre P et Q est la même dans \mathcal{R} et \mathcal{S} et l'on a :

$$|\mathbf{PQ}|^2 = \sum_{j=1}^3 (\Delta x_j)^2 = \sum_{j=1}^3 (\Delta y_j)^2 .$$

Cette distance est donc un invariant.

Plaçons nous dans le cadre de la Mécanique Einsteinienne où l'invariant est la vitesse de la lumière.

Nous dirons que nous sommes dans le cadre de la Relativité restreinte.

Si un rayon lumineux, se propageant dans le vide, met le temps Δt (resp. $\Delta \theta$) pour aller de P à Q dans \mathcal{R} (resp. \mathcal{S}), alors :

$$(c\Delta t)^2 = \sum_{j=1}^3 (\Delta x_j)^2 \quad (\text{resp. } (c\Delta \theta)^2 = \sum_{j=1}^3 (\Delta y_j)^2)$$

Il est équivalent de dire que :

$$(c\Delta t)^2 - \sum_{j=1}^3 (\Delta x_j)^2 = 0 \quad \text{implique} \quad (c\Delta \theta)^2 - \sum_{j=1}^3 (\Delta y_j)^2 = 0 .$$

et réciproquement.

Posons : $c\Delta t = \Delta x_0$ (resp. $c\Delta \theta = \Delta y_0$) car $c\Delta t$ (resp. $c\Delta \theta$) a la dimension d'une longueur. Ainsi :

$$(\Delta x_0)^2 - \sum_{j=1}^3 (\Delta x_j)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\Delta y_0)^2 - \sum_{j=1}^3 (\Delta y_j)^2 = 0 .$$

Il en résulte que si $u = (u_1, u_2, u_3)$ est la vitesse de \mathcal{S} relativement à \mathcal{R} et si $\Delta x = (\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$, alors :

$$(\Delta y_0)^2 - \sum_{j=1}^3 (\Delta y_j)^2 = \lambda(\Delta x_0, u) \cdot \left[(\Delta x_0)^2 - \sum_{j=1}^3 (\Delta x_j)^2 \right] \quad \text{où } \lambda(\Delta x_0, u) \neq 0 .$$

De considérations physiques (ou mathématiques) on peut déduire que $\lambda(\Delta x_0, u) = 1$, nécessairement. Par conséquent,

$$(\Delta x_0)^2 - \sum_{j=1}^3 (\Delta x_j)^2$$

est un invariant dans tout changement de repère galiléen.

On notera que $(c\Delta t)^2$ et $(c\Delta\theta)^2$ sont invariants si on change Δt en $-\Delta t$ et $\Delta\theta$ en $-\Delta\theta$.

7.6.2 La transformation de Lorentz.

On montre et nous admettrons que les transformations dans l'espace-temps qui laissent invariante la quantité

$$(\Delta x_0)^2 - \sum_{j=1}^3 (\Delta x_j)^2$$

doivent être linéaires.

Déterminer ces transformations est équivalent à déterminer les transformations linéaires de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^4 qui laissent invariante la forme quadratique \oplus sur \mathbb{R}^4 telle que :

quel que soit $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$, $\oplus(x) = (x_0)^2 - \sum_{j=1}^3 (x_j)^2$.

Caractérisons ces transformations.

Notons d'abord que :

$$\forall x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4,$$

$$\oplus(x) = (x_0, x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Soit G une matrice réelle 4×4 et T_G l'application linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^4 associée à G . Alors, si $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$, $y = (y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^4$, $y = T_G x$

$$\text{on a : } \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Définition 1 On dira que T_G est une transformation de Lorentz si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^4, \Phi(T_G x) = \Phi(x)$$

ou ce qui est équivalent si

$${}^t G J G = J$$

$$\text{où } J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cette relation implique que :

- (i) $\det(G) = \pm 1$ donc G est inversible.
- (ii) ${}^t(G^{-1}) J (G^{-1}) = J$.

Proposition 3 : Les transformations de Lorentz forment donc un **groupe** (multiplicatif).
On en déduit que :

Les seules transformations linéaires dans l'espace-temps qui laissent invariante la quantité

$$(\Delta x_0)^2 - \sum_{j=1}^3 (\Delta x_j)^2$$

sont les transformations de Lorentz.

Par conséquent, si T_G est une transformation de Lorentz, alors :

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$((\Delta x_0)^2 - \sum_{j=1}^3 (\Delta x_j)^2) = (\Delta y_0)^2 - \sum_{j=1}^3 (\Delta y_j)^2.$$

7.6.3 La transformation de Lorentz réduite.

Supposons maintenant (ce qui ne restreint pas la généralité de notre étude) que \mathcal{S} se déplace par rapport à \mathcal{R} , de façon que l'axe des y_1 glisse le long de l'axe des x_1 , les axes des y_2 et y_3 restant parallèles, respectivement, à ceux des x_2 et x_3 .

On dira que \mathcal{S} est 1-galiléen par rapport à \mathcal{R} .

Puisque :

$$((\Delta x_0)^2 - \sum_{j=1}^3 (\Delta x_j)^2) = (\Delta y_0)^2 - \sum_{j=1}^3 (\Delta y_j)^2$$

et puisque : $(\Delta x_j)^2 = (\Delta y_j)^2$, $j = 2, 3$, on déduit que :

Dans tout mouvement 1-galiléen de \mathcal{S} par rapport à \mathcal{R} , la quantité $(\Delta y_0)^2 - (\Delta y_1)^2$ reste invariante.

De considérations physiques ou mathématiques élémentaires on déduit que :

Si u est la vitesse du mouvement (rectiligne et uniforme) du repère \mathcal{S} , 1-galiléen par rapport à \mathcal{R} , telle que $|u| < c$, on a :

$$\Delta x_0 = \gamma(\Delta y_0 + \frac{u}{c}\Delta y_1), \Delta x_1 = \gamma(\Delta y_1 + \frac{u}{c}\Delta y_0), \Delta x_2 = \Delta y_2, \Delta x_3 = \Delta y_3$$

où

$$\gamma = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1}$$

On notera la symétrie des formules ci-dessus.

Inversement, si les formules ci-dessus sont vérifiées, posons :

quel que soit λ , $|\lambda| \in]1, \infty[$, $\gamma(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}}$,

$$A(\lambda) = \gamma(\lambda) \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad B(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors,
$$\begin{pmatrix} \Delta y_0 \\ \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta y_3 \end{pmatrix} = B\left(\frac{u}{c}\right) \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}.$$

Définition 2 La transformation qui permet de passer de $\begin{pmatrix} \Delta y_0 \\ \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta y_3 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$

et qui est caractérisée par la matrice $B\left(\frac{u}{c}\right)$ est appelée la transformation de Lorentz réduite (relative à u lorsque $|u| < c$).

7.6.4 Propriétés de $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ lorsque $|\lambda| < 1$

(i) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $|\lambda| < 1$, $|\mu| < 1$, on a :

$$\left| \frac{\lambda + \mu}{1 + \lambda\mu} \right| < 1, \quad A(\mu).A(\lambda) = A\left(\frac{\lambda + \mu}{1 + \lambda\mu}\right) \quad \text{et} \quad B(\mu).B(\lambda) = B\left(\frac{\lambda + \mu}{1 + \lambda\mu}\right)$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| < 1$,

$$[A(\lambda)]^{-1} = A(-\lambda), \quad [B(\lambda)]^{-1} = B(-\lambda),$$

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \Delta y_0 \\ -\Delta y_1 \end{pmatrix} = A(-\lambda) \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ -\Delta x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A(-\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A(\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$B(\lambda)$ sera appelée transformation de Lorentz normalisée.

Remarquons qu'en remplaçant Δx_0 par $c\Delta t$ et Δy_0 par $c\Delta\theta$, on obtient les formules classiques de la transformation de Lorentz réduite, qui ne sont pas symétriques. Ainsi :

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta\theta + \frac{u}{c^2} \Delta y_1 \right), \quad \Delta x_1 = \gamma \left(\Delta y_1 + u \Delta\theta \right), \quad \Delta x_2 = \Delta y_2, \quad \Delta x_3 = \Delta y_3$$

\Downarrow

$$\Delta\theta = \gamma \left(\Delta t - \frac{u}{c^2} \Delta x_1 \right), \quad \Delta t = \gamma \left(\Delta x_1 - u \Delta t \right), \quad \Delta y_2 = \Delta x_2, \quad \Delta y_3 = \Delta x_3$$

\Downarrow

$$\begin{pmatrix} \Delta\theta \\ \Delta y_1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\frac{u}{c^2} \\ -u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x_1 \end{pmatrix}$$

7.7 Premières conséquences de la Relativité restreinte.

On supposera dans, ce paragraphe, que \mathcal{S} est 1-galiléen par rapport à \mathcal{R} .

Soit E_1 et E_2 deux événements de l'espace-temps.

E_1 sera repéré, relativement à \mathcal{R} (resp. \mathcal{S}), par les coordonnées spatiales (x_1, x_2, x_3) (resp. (y_1, y_2, y_3)) et relativement à l'horloge \mathcal{H} (resp. \mathcal{K}) par la coordonnée temporelle t (resp. θ).

De façon analogue, E_2 sera repéré, relativement à \mathcal{R} (resp. \mathcal{S}), par les coordonnées spatiales $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$ (resp. $(y_1 + \Delta y_1, y_2 + \Delta y_2, y_3 + \Delta y_3)$) et relativement à l'horloge \mathcal{H} (resp. \mathcal{K}) par la coordonnée temporelle $t + \Delta t$ (resp. $\theta + \Delta\theta$).

7.7.1 Relativité de la simultanéité de deux événements.

Supposons que E_1 et E_2 soient simultanés dans \mathcal{R} où ce qui est équivalent que $\Delta t = 0$.

Alors, en général, E_1 et E_2 ne sont pas simultanés dans \mathcal{S} car

$$\Delta\theta = \gamma \left(-\frac{u}{c^2} \right) \Delta x_1$$

.

7.7.2 Relativité de la localisation de deux événements.

Supposons que E_1 et E_2 soient localisés au même point dans \mathcal{R} ou ce qui est équivalent que : $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$.

Alors, E_1 et E_2 ne seront pas localisés au même point dans \mathcal{S} , puisque $\Delta\theta = -\gamma u \Delta t$.

7.7.3 Relativité de la longueur d'une règle.

Pour mesurer la longueur L_S d'une règle portée par l'axe y_1 de \mathcal{S} , il faut que les événements E_1 et E_2 qui consistent à repérer l'origine et l'extrémité de la règle dans \mathcal{S} soient simultanés c-à-d que : $\Delta y_0 = 0$.

Dans \mathcal{S} , on a : $L_S = \Delta y_1$ et dans \mathcal{R} , $L_{\mathcal{R}} = \Delta x_1$.

Puisque

$$\Delta x_1 = \gamma(\Delta y_1 + \frac{u}{c}\Delta y_0) = \gamma\Delta y_1, \text{ on déduit que :}$$

$$\boxed{L_{\mathcal{R}} = \frac{1}{\gamma}L_S}$$

7.7.4 Temps propre .

$$\text{Posons : } \tau = \frac{1}{c} \left[(\Delta x_0)^2 - \sum_{j=1}^3 (\Delta x_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Il est immédiat que τ est invariant dans toute transformation de Lorentz .
Comme τ a la dimension d'un temps, τ est appelé *temps propre*.

Si E_1 et E_2 sont localisés au même point dans \mathcal{R} , on a : $\tau = \frac{1}{c} |\Delta x_0|$.

Or,

$$c\Delta\theta = \Delta y_0 = \gamma(\Delta x_0 + \frac{u}{c}\Delta x_1) = \gamma\Delta x_0.$$

$$\text{On en déduit que : } \boxed{\tau = |\Delta t| = \gamma |\Delta\theta|}$$

7.7.5 Transformation de la vitesse.

Il est immédiat que :

$$\Delta\theta = \gamma(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x_1), \quad dy_1 = \gamma(dx_1 - u\Delta t), \quad dy_2 = dx_2, \quad dy_3 = dx_3.$$

Donc :

$$\frac{dy_1}{d\theta} = \frac{\frac{dx_1}{dt} - u}{dt - \frac{u}{c^2} \frac{dx_1}{dt}} \quad \text{et de même :}$$

$$\frac{dy_j}{d\theta} = \frac{\frac{dx_j}{dt}}{1 - \frac{u}{c^2} \frac{dx_1}{dt}} \quad j = 2, 3 .$$

II. La voie mathématique (Lorentz - Poincaré).

7.8 Détermination de la transformation de Lorentz réduite abstraite.

7.8.1 Un semi-groupe multiplicatif d'applications linéaires.

Soit ρ un paramètre réel. Considérons la famille d'applications linéaires de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 qui, à tout couple $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$, associe $(v_0, v_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{cases} v_0 = \tilde{\gamma}(\rho) [A(\rho) - B(\rho)u_1] \\ v_1 = \tilde{\gamma}(\rho) [u_1 - \rho u_0] \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = G(\rho) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad G(\rho) = \tilde{\gamma} \begin{pmatrix} A(\rho) & -B(\rho) \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons montré, ci-dessus, que :

si $A(\rho) = 1$ et $B(\rho) = \rho$, alors la famille de matrices $\{G(\rho); |\rho| < 1\}$ forme un groupe multiplicatif tel que $(G(\rho))^{-1} = G(-\rho)$ et qui possède la propriété de symétrie suivante :

$$\forall \rho \in \mathbb{R}, |\rho| < 1, G(-\rho) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Inversement, déterminons à quelles conditions la famille de matrices $\{G(\rho); |\rho| < a\}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, possède les deux propriétés suivantes :

- (i) $\{G(\rho); |\rho| < a\}$ est un semi-groupe multiplicatif.
- (ii) $\forall \rho \in \mathbb{R}, |\rho| < a, \exists \rho' \in \mathbb{R}, |\rho'| < a$ tel que :

$$G(\rho') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} G(\rho) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

7.8.2 Conditions pour que $\{G(\rho); |\rho| < a\}$ soit un semi-groupe multiplicatif

. Soient $\sigma, \rho \in \mathbb{R}, |\sigma| < a, |\rho| < a$. Alors :

$$\begin{aligned} G(\sigma).G(\rho) &= \tilde{\gamma}(\sigma).\tilde{\gamma}(\rho) \begin{pmatrix} A(\sigma) & -B(\sigma) \\ -\sigma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(\rho) & -B(\rho) \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} \\ &= \tilde{\gamma}(\sigma).\tilde{\gamma}(\rho) \begin{pmatrix} A(\sigma)A(\rho) + \rho B(\sigma) & -[A(\sigma)B(\rho) + B(\sigma)] \\ -[\rho + \sigma A(\rho)] & 1 + \sigma B(\rho) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour que $G(\sigma).G(\rho) = G(\tau)$, $|\tau| < a$ il faut et il suffit que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\gamma}(\tau) = \tilde{\gamma}(\sigma) \cdot \tilde{\gamma}(\rho) [1 + \sigma B(\rho)] \quad (1) \\ \tau \tilde{\gamma}(\tau) = \tilde{\gamma}(\sigma) \cdot \tilde{\gamma}(\rho) [\rho + \sigma A(\rho)] \quad (2) \\ B(\tau) \tilde{\gamma}(\tau) = \tilde{\gamma}(\sigma) \cdot \tilde{\gamma}(\rho) [B(\sigma) + A(\sigma)B(\rho)] \quad (3) \\ A(\tau) \tilde{\gamma}(\tau) = \tilde{\gamma}(\sigma) \cdot \tilde{\gamma}(\rho) [\rho B(\sigma) + A(\sigma)B(\rho)] \quad (4) \end{array} \right.$$

Supposons que : $\forall \rho \in \mathbb{R}$, $|\rho| < a$, on ait : $\tilde{\gamma}(\rho) \neq 0$. De (1) et (2), on déduit que :

$$\tau = \frac{\rho + \sigma A(\rho)}{1 + \sigma B(\rho)} \quad \text{lorsque } 1 + \sigma B(\rho) \neq 0 \quad (5)$$

De (3) et (4), il résulte que :

$$\frac{A(\tau)}{B(\tau)} = \frac{\rho B(\sigma) + A(\sigma)A(\rho)}{B(\sigma) + A(\sigma)B(\rho)} , \text{ lorsque } B(\tau) \neq 0 \quad (6)$$

7.8.3 Conditions déduites de la relation de symétrie.

Si $\rho \in \mathbb{R}$, $|\rho| < a$, $\exists \rho' \in \mathbb{R}$, $|\rho'| < a$, tel que :

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(\rho') \begin{pmatrix} A(\rho') & -B(\rho') \\ -\rho' & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tilde{\gamma}(\rho) \begin{pmatrix} A(\rho) & -B(\rho) \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \tilde{\gamma}(\rho) \begin{pmatrix} A(\rho) & B(\rho) \\ \rho & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \rho' &= -\rho , \quad \tilde{\gamma}(\rho') = \tilde{\gamma}(\rho) , \\ \tilde{\gamma}(\rho')B(\rho') &= -\tilde{\gamma}(\rho)B(\rho) , \quad \tilde{\gamma}(\rho')A(\rho') = \tilde{\gamma}(\rho)A(\rho) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que :

$$\tilde{\gamma}(-\rho) = \tilde{\gamma}(\rho) , \quad A(-\rho) = A(\rho) , \quad B(-\rho) = -B(\rho) \quad (7)$$

Montrons que : $\forall \rho \in \mathbb{R}$, $|\rho| < a$, $A(\rho) = 1$.

De (1) et (4), on déduit que :

$$A(\tau) = \frac{\rho B(\sigma) + A(\sigma)A(\rho)}{1 + \sigma B(\rho)} \quad \text{lorsque } 1 + \sigma B(\rho) \neq 0 .$$

En combinant ce résultat à (5), on obtient lorsque $1 + \sigma B(\rho) \neq 0$:

$$A \left(\frac{\rho + \sigma A(\rho)}{1 + \sigma B(\rho)} \right) = \frac{A(\rho)A(\sigma) + \rho B(\sigma)}{1 + \sigma B(\rho)} \quad (8).$$

Il en résulte, lorsque $\sigma = 0$ que :

$$A(\rho) = A(\rho)A(0) + \rho B(0) \quad \text{d'où : } A(\rho)(1 - A(0)) = \rho B(0) .$$

Mais, de (7) on déduit que :

$$B(0) = -B(0) , \text{ d'où : } B(0) = 0 \text{ et } A(\rho)(1 - A(0)) = 0 .$$

Deux éventualités se présentent alors :

$$\forall \rho \in \mathbb{R} , |\rho| < a , A(\rho) = 0 \text{ que l'on exclut et } A(0) = 1 .$$

Supposons maintenant que $\sigma = -\rho$. On déduit alors de (7) et (8) que : lorsque $1 - \rho B(\rho) \neq 0$

$$A\left(\frac{\rho(1 - A(\rho))}{1 - \rho B(\rho)}\right) = \frac{A(\rho)A(-\rho) + \rho B(-\rho)}{1 - \rho B(\rho)} = \frac{(A(\rho))^2 - \rho B(\sigma)}{1 - \rho B(\rho)}$$

Posons : $F(\rho) = A(\rho) - 1$ ce qui implique : $F(0) = 0$.

Alors, si $1 - \rho B(\rho) \neq 0$,

$$\begin{aligned} 1 + F\left(\frac{-\rho F(\rho)}{1 - \rho B(\rho)}\right) &= \frac{(F(\rho) + 1)^2 - 1 + 1 - \rho B(\rho)}{1 - \rho B(\rho)} \\ &= \frac{(F(\rho) + 1)^2 - 1}{1 - \rho B(\rho)} + 1 \\ &= \frac{(F(\rho))^2 + 2F(\rho)}{1 - \rho B(\rho)} . \end{aligned}$$

On montre et nous admettrons que cette équation fonctionnelle n'a pour solution régulière que la solution triviale, telle que :

$$\forall \rho \in \mathbb{R} , |\rho| < a , 1 - \rho B(\rho) \neq 0 , F(\rho) = 0 ; \text{ ce qui implique : } A(\rho) = 0 .$$

7.8.4 Explicitation de $\tilde{\gamma}(\rho)$ et de $\mathbf{B}(\rho)$.

Puisque : $A(\rho) = 1$, on déduit de (8) que :

$$\forall \rho \in \mathbb{R} , |\rho| < a , 1 = \frac{1 + \rho B(\sigma)}{1 + \sigma B(\rho)}$$

Ainsi , $\forall \rho, \sigma \in \mathbb{R} , |\rho| < a , |\sigma| < a , \rho B(\sigma) = \sigma B(\rho)$.

En supposant que B est continue, il résulte que :

$$\exists K \in \mathbb{R} , \text{ tel que : } \forall \rho \in \mathbb{R} , |\rho| < a , B(\rho) = K\rho \quad (10)$$

et comme on a supposé que $1 + \sigma B(\rho) \neq 0$, la condition suivante doit être vérifiée :

$$\forall \rho \in \mathbb{R} , |\rho| < a , 1 + K\sigma\rho \neq 0 .$$

Alors :

$$\tau = \frac{\rho + \sigma}{1 + K\sigma\rho}$$

De ce résultat et de (1), on déduit que :

$$\tilde{\gamma}\left(\frac{\rho + \sigma}{1 + K\rho\sigma}\right) = \tilde{\gamma}(\rho)\tilde{\gamma}(\sigma)(1 + K\rho\sigma)$$

Lorsque $\sigma = -\rho$, on obtient :

$\forall \rho \in \mathbb{R}, |\rho| < a,$

$$\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(\rho)\tilde{\gamma}(-\rho)(1 - K\rho^2) = (\tilde{\gamma}(\rho))^2(1 - K\rho^2)$$

et donc, lorsque $\rho = 0$, on a : $\tilde{\gamma}(0) = (\tilde{\gamma}(0))^2$, ce qui implique : $\tilde{\gamma}(0) = 1$.

Par conséquent,

$$\forall \rho \in \mathbb{R}, |\rho| < a, (\tilde{\gamma}(\rho))^2 = \frac{1}{1 - K\rho^2}.$$

d'où : $1 - K\rho^2 > 0$.

Lorsque $K = 0$, alors $\tilde{\gamma}(\rho) = 1$, $B(\rho) = 0$.

La transformation considérée est alors la transformation de Galilée.

Lorsque $K \neq 0$, supposons que γ soit une fonction continue.

On déduit alors, du fait que $\forall \rho \in \mathbb{R}, |\rho| < a, \tilde{\gamma}(\rho) \neq 0$, que, nécessairement, :

$$\tilde{\gamma}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{1 - K\rho^2}}$$

puisque : $\gamma(0) = 1$

Il en résulte, évidemment, que :

$$a = \frac{1}{K}$$

Deux éventualités se présentent alors : $K > 0$ ou bien $K < 0$.

On exclura la première éventualité car pour certaines valeurs positives de ρ et σ , on obtiendrait une valeur négative de

$$\tau = \frac{\rho + \sigma}{1 + K\rho\sigma}$$

On retiendra donc la valeur $K < 0$.

Dans ce cas, nous dirons que la transformation obtenue est la transformation de Lorentz réduite abstraite.

Alors

$$G(\rho) = \frac{1}{\sqrt{1 - K\rho^2}} \begin{pmatrix} 1 & -K\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie, comme au paragraphe 5, que

la famille de matrices $\{ G(\rho); |\rho| < \frac{1}{K} \}$ forme un groupe multiplicatif.

En particulier, lorsque

$$K = \frac{1}{c^2}$$

(c étant la vitesse de la lumière) la transformation de Lorentz réduite abstraite peut être identifiée à la transformation de Lorentz classique.

7.9 La géométrie de Minkowski.

7.9.1 La transformation $\mathbb{T}(\rho, K)$.

Étant donné $K \in \mathbb{R}_+^*$ et $\rho \in]-K, K[$, notons $\mathbb{T}(\rho, K)$ la transformation linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^4 qui, à tout quadruplet (u_0, \dots, u_3) associe le quadruplet (v_0, \dots, v_3) tel que :

$$v_0 = \gamma_K(\rho)(u_0 - K\rho), \quad v_1 = \gamma_K(\rho)(-\rho u_0 + u_1), \quad v_2 = u_2, \quad v_3 = u_3 \quad \text{où}$$

$$\gamma_K(\rho) = \frac{1}{\sqrt{1 - K\rho^2}}$$

Posons, quel que soit $u = (u_0, \dots, u_3) \in \mathbb{R}^4$

$$(S_K(u))^2 = (u_0)^2 - K\left(\sum_{j=1}^3 (u_j)^2\right)$$

On vérifie immédiatement que si $v = (v_0, \dots, v_3)$ est l'image de $u = (u_0, \dots, u_3)$ par la transformation $\mathbb{T}(\rho, K)$, alors : $(S_K(u))^2 = (S_K(v))^2$.

Inversement, on montrerait aisément (en procédant comme au paragraphe 5 que si \mathbb{T} est une transformation linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^4 et K un nombre réel positif tels que :

$$\forall u = (u_0, \dots, u_3) \in \mathbb{R}^4, \quad S_K(\mathbb{T}u) = S_K(u),$$

alors il existe $\rho_0 \in]-K, K[$ tel que : $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\rho_0, K)$.

7.9.2 Géométrie de Minkowski.

Soit $K \in \mathbb{R}_+^*$. Étant donnés $u, u + \Delta u \in \mathbb{R}^4$, $u = (u_0, \dots, u_3)$, $\Delta u = (\Delta u_0, \dots, \Delta u_3)$, on appellera K -distance de Minkowski entre u et $u + \Delta u$, le scalaire $S_K(\Delta u)$.

S_K détermine une géométrie de \mathbb{R}^4 que l'on appelle la géométrie de Minkowski.

L'élément de "longueur" qui mesure la K -distance de Minkowski entre deux points quelconques de \mathbb{R}^4 infiniment voisins, u et $u + du$, $u = (u_0, \dots, u_3)$, $du = (du_0, \dots, du_3)$, est la K -métrique de Minkowski, ds_K telle que :

$$(ds_K)^2 = (du_0)^2 - K\left(\sum_{j=1}^3 (du_j)^2\right)$$

De l'étude que nous avons faite précédemment, il résulte que la géométrie de Minkowski est caractérisée de façon équivalente par la K -métrique de Minkowski ou bien par la famille de transformations $\{ \mathbb{T}(\rho, K) ; |\rho| < \frac{1}{K} \}$.

III. Propriétés physiques de l'espace-temps (suite).

7.10 Le cône de lumière.

Soit P un point de l'espace-temps de coordonnées (a_0, \dots, a_3) , $a_0 = c\tau$, où c est la vitesse de la lumière.

Notons $\Gamma_+(P)$ (resp. $\Gamma_-(P)$), l'ensemble des points Q de l'espace-temps de coordonnées $(a_0 + x_0, \dots, a_3 + x_3)$, $x_0 = ct$, qui peuvent être atteints par un rayon lumineux lancé de P (resp. d'où l'on peut lancer un rayon lumineux qui atteindra P).

Posons : $\Gamma(P) = \Gamma_+(P) \cup \Gamma_-(P)$. Alors,

$$\Gamma(P) = \left\{ Q = (a_0 + x_0, \dots, a_3 + x_3) ; (x_0)^2 - \sum_{j=1}^3 (x_j)^2 = 0 \right\}$$

$\Gamma(P)$ est un cône de sommet P , à base circulaire.

$\Gamma(P)$ est appelé le cône de lumière.

Tout point Q situé à l'intérieur de $\Gamma_+(P)$ (resp. $\Gamma_-(P)$) est tel que

$$(x_0)^2 - \sum_{j=1}^3 (x_j)^2 \text{ soit positif.}$$

Si Q appartient à l'intérieur de $\Gamma_+(P)$, il pourra être atteint par un signal lancé de P et se propageant sur une trajectoire rectiligne à une vitesse (strictement) inférieure à c .

De Q appartenant à l'intérieur de $\Gamma_-(P)$, on pourra lancer un signal se propageant sur une trajectoire rectiligne, à une vitesse inférieure (strictement) à c , qui atteindra P .

Lorsque Q est situé à l'intérieur ou sur la surface de $\Gamma_-(P)$ ou de $\Gamma_+(P)$, on dit que \mathbf{PQ} est un vecteur temporel de l'espace-temps. Sinon on dit que \mathbf{PQ} est un vecteur spatial de l'espace-temps - car, alors, en choisissant convenablement le référentiel $(\mathcal{R}, \mathcal{H})$ on peut annuler x_0 .

7.11 Dynamique relativiste du point dans l'espace-temps de Minkowski.

7.11.1 Rappels.

Soit $(\mathcal{R}, \mathcal{H})$ un référentiel galiléen de l'espace-temps.

Soit, d'autre part, M une particule, de masse m , mobile dans l'espace.

M est repéré par ses coordonnées (x_1, x_2, x_3) relativement à \mathcal{R} .

On pose : $x = (x_1, x_2, x_3)$. Si t est le temps marqué par \mathcal{H} , la vitesse de M est :

$$\phi = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right).$$

Désignons par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de \mathbb{R}^3 . Alors :

$$(\|\phi\| s < zw)^2 = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{dx_j}{dt}\right)^2$$

La quantité de mouvement de M est le vecteur $p = m\phi$.

Supposons que s'exerce sur M une force F . Alors, M est soumis à une accélération a telle que :

$$a = \left(\frac{d^2x_1}{dt^2}, \frac{d^2x_2}{dt^2}, \frac{d^2x_3}{dt^2}\right) = \frac{F}{m}$$

L'énergie cinétique de M est : $\mathcal{E} = \frac{1}{2}m(\|\phi\|)^2$.

7.11.2 Temps propre élémentaire d'une particule.

Considérons une particule M , de masse m , mobile dans l'espace. Notons (x_1, x_2, x_3) les coordonnées spatiales de M relativement à \mathcal{R} et $x_0 = ct$, t étant la coordonnée temporelle de M relative à \mathcal{H} .

Posons : $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\hat{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$.

La vitesse de M relativement à \mathcal{R} (et \mathcal{H}) est :

$$\phi(x) = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right)$$

On suppose que $\|\phi(x)\| < c$ ou ce qui est équivalent :

$$c^2(dt)^2 - \sum_{j=1}^3 (dx_j)^2 > 0$$

Posons : $d\hat{x} = (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3)$. Alors,

$$\|\widehat{dx}\| = (c^2(dt)^2 - \sum_{j=1}^3 (dx_j)^2)^{\frac{1}{2}} = c \frac{dt}{\gamma(\phi(x))}$$

où

$$\gamma(\phi(x)) = \left(1 - \frac{\|\phi(x)\|^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Comme

$$\frac{\|\widehat{dx}\|}{c} = \frac{dt}{\gamma(\phi(x))}$$

est invariant dans toute transformation de Lorentz, on dit que :

$$\frac{dt}{\gamma(\phi(x))} \text{ est le temps propre élémentaire de la particule.}$$

7.11.3 Quadrivecteurs .

Soient (y_1, y_2, y_3) les coordonnées spatiales de M relativement à \mathcal{S} et $y_0 = c\theta$, θ étant la coordonnée temporelle de M relative à \mathcal{K} . Posons : $y = (y_1, y_2, y_3)$, $\hat{y} = (y_0, y_1, y_2, y_3)$.

Plaçons nous dans le cadre de la mécanique d'Einstein.

$$\text{Soit } \phi(y) = \frac{dy}{dt}. \quad \text{Alors, } \|\phi(y)\| < c .$$

Posons, comme ci-dessus,

$$\gamma(\phi(x)) = \left(1 - \frac{\|\phi(x)\|^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

et notons $d\tau$ le temps propre élémentaire de la particule .

On sait que :

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma(\phi(x))} = \frac{dt}{\gamma(\phi(y))}$$

Supposons que le mouvement de \mathcal{S} par rapport à \mathcal{R} soit 1-galiléen de vitesse uniforme u .
On a montré plus haut que :

$$\Delta t = \gamma(\Delta\theta + \frac{u}{c^2}\Delta y_1), \quad \Delta x_1 = \gamma(\Delta y_1 + u\Delta\theta), \quad \Delta x_2 = \Delta y_2, \quad \Delta x_3 = \Delta y_3$$

$$\text{où } \gamma = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} .$$

$$\text{Soit : } \hat{\phi}(\hat{x}) = \frac{d\hat{x}}{d\tau} \text{ et } \hat{\phi}(\hat{y}) = \frac{d\hat{y}}{d\tau} .$$

On vérifie, sans difficulté, que :

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{u}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{u}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx_0}{d\tau} \\ \frac{dx_1}{d\tau} \\ \frac{dx_2}{d\tau} \\ \frac{dx_3}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dy_0}{d\tau} \\ \frac{dy_1}{d\tau} \\ \frac{dy_2}{d\tau} \\ \frac{dy_3}{d\tau} \end{pmatrix}$$

ou ce qui est équivalent que :

$$\hat{\phi}(\hat{y}) = \mathbb{T}\left(\frac{u}{c}, \frac{1}{c^2}\right)\hat{\phi}(\hat{x}).$$

$\hat{\phi}(\hat{x})$ est un quadrivecteur qu'on appelle le quadrivecteur vitesse.

D'autre part, $\|\hat{\phi}(\hat{y})\| = \|\hat{\phi}(\hat{x})\| = c$.

Dans la suite de ce paragraphe, nous écrirons $\hat{\phi}$ au lieu de $\hat{\phi}(\hat{x})$ et ϕ au lieu de $\phi(x)$.

Par analogie avec le cas newtonien, posons : $\hat{p} = m\hat{\phi}$.

Comme *la masse est invariante dans tout changement de repère galiléen*, on déduit, immédiatement, de ce qui précède que :

\hat{p} est un quadrivecteur appelé quadrivecteur quantité de mouvement.

On vérifie facilement que :

$$\hat{p} = m\gamma(\phi)\left(c, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_3}{dt}\right) \quad , \|\hat{p}\| = mc \quad .$$

Posons : $\mathcal{E}_\phi = m\gamma(\phi)c^2$. \mathcal{E}_ϕ est analogue à l'énergie cinétique et l'on a :

$$\hat{p} = \left(\frac{\mathcal{E}_\phi}{c}, m\gamma(\phi)\frac{dx_1}{dt}, \dots, m\gamma(\phi)\frac{dx_3}{dt}\right)$$

et par conséquent :

$$\|\hat{p}\| = \left[\left(\frac{\mathcal{E}_\phi}{c}\right)^2 - (\gamma(\phi)\|p\|)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Comme : $\gamma(0) = 1$, on dit que :

$\mathcal{E}_0 = mc^2$ est l'énergie au repos ou l'énergie propre de la particule M .

La formule $\mathcal{E}_0 = mc^2$ établit l'équivalence entre l'énergie et la masse.

Cette formule joue un rôle important dans l'étude de la désintégration atomique.

Remarquons que l'on ne peut définir l'énergie propre d'un corps solide comme la somme des énergies propres de toutes les particules qui le composent car *il existe des énergies d'interaction entre les particules*.

On remarquera aussi que, si $\|\phi\|$ est négligeable devant c , alors on peut effectuer un développement limité de \mathcal{E}_ϕ de la forme suivante :

$$\mathcal{E}_\phi = mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\|\phi\|}{c}\right)^2 + \dots\right)$$

Donc, si $\|\phi\| \ll c$, alors : $\mathcal{E}_\phi \sim mc^2 + \frac{1}{2}m(\|\phi\|)^2$
où $\frac{1}{2}m(\|\phi\|)^2$ est l'énergie cinétique newtonienne de M .

La loi fondamentale de la dynamique s'énonce donc ainsi : Dans tout référentiel galiléen, une particule M , de masse m , soumise à une force f vérifie l'équation suivante :

$$f = \frac{dp}{d\tau} = m\frac{d}{dt}\left(\gamma(\phi)\frac{dx_1}{dt}, \dots, \gamma(\phi)\frac{dx_3}{dt}\right). \text{ Ainsi :}$$

$$f = \gamma(\phi)m\left(\gamma(\phi)\frac{d^2x_1}{dt^2}, \dots, \frac{d^2x_3}{dt^2}\right) + m\frac{d}{dt}(\gamma(\phi))\left(\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_3}{dt}\right)$$

$$\text{Soit } \hat{f} = \frac{d}{d\tau}(\hat{p})$$

\hat{f} est un quadrivecteur (comme on le vérifie facilement) qu'on appelle le quadrivecteur force.

On a :

$$\hat{f} = \gamma(\phi)\frac{d}{dt}(\hat{p}) = \gamma(\phi)\frac{d}{dt}\left(m\gamma(\phi)c, m\frac{dx_1}{d\tau}, \dots, m\frac{dx_3}{d\tau}\right)$$

Posons :

$$\tilde{p} = m\left(\frac{dx_1}{d\tau}, \dots, \frac{dx_3}{d\tau}\right), \tilde{f} = \frac{d}{dt}(\tilde{p}).$$

On montre que :

$$\frac{d}{dt}(\gamma(\phi)mc^2) = \langle \tilde{f}, \phi \rangle$$

d'où l'on déduit que :

$$\hat{f} = \left(\frac{\gamma(\phi)}{c} \langle \tilde{f}, \phi \rangle, m\gamma(\phi)\frac{d^2x_1}{dt d\tau}, \dots, m\gamma(\phi)\frac{d^2x_3}{dt d\tau}\right).$$

7.12 Equations de Maxwell et Relativité .

7.12.1 Rappels sur les équations de Maxwell.

Désignons par E (resp. B , ρ , J) le champ électrique (resp. le champ magnétique, la charge volumique, le vecteur courant volumique) en tout point de l'espace.

Les équations de Maxwell s'écrivent, dans le vide, sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(E) + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad (1) \\ \text{div}(B) = 0 \quad (2) \\ \text{div}(\varepsilon_0 E) = \rho \quad (3) \\ \text{rot}\left(\frac{B}{\mu_0}\right) - \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = J \quad (4) \end{array} \right.$$

où ε_0 et μ_0 sont deux constantes telles que : $\varepsilon_0\mu_0 = c^{-2}$, c étant la vitesse de la lumière dans le vide.

On notera que :

$$(2) \Rightarrow B = \text{rot}(A)$$

$$(1) \Rightarrow \text{rot}\left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0$$

$$(3) \Rightarrow \Delta V + \frac{\partial}{\partial t} \text{div}(A) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$(4) \Rightarrow \Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \text{grad}(\text{div}(A) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}) = -\mu_0 J$$

En choisissant les potentiels A et V de façon que :

$$\operatorname{div}(A) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

et en posant : $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ où

$$\Delta = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

on obtient : $\square A = \mu_0 J$ et $\square V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

\square est appelé le *d'alembertien*.

On notera que A est un potentiel vecteur et que V est un potentiel scalaire.

Nous allons, maintenant, étudier la transformation des équations de Maxwell, lorsqu'on effectue une transformation de Lorentz réduite dans l'espace-temps.

7.12.2 Transformation du d'alembertien.

Supposons que \mathcal{S} soit 1-galiléen par rapport à \mathcal{R} et que sa vitesse (uniforme) par rapport à \mathcal{R} soit égale à u .

Désignons par (x_1, x_2, x_3) (resp. (y_1, y_2, y_3)) les coordonnées spatiales d'un point quelconque fixé de l'espace-temps et soit $x_0 = ct$ (resp. $y_0 = c\theta$) où t (resp. θ) est la coordonnée temporelle de ce point relativement à l'horloge \mathcal{H} (resp. \mathcal{K}).

Alors, on sait que :

$$x_0 = \gamma(y_0 + \frac{u}{c}y_1), \quad x_1 = \gamma(y_1 + \frac{u}{c}y_0), \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_3$$

ou ce qui est équivalent :

$$y_0 = \gamma(x_0 - \frac{u}{c}x_1), \quad y_1 = \gamma(x_1 - \frac{u}{c}x_0), \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3$$

avec

$$\gamma = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Posons : $\hat{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $\hat{y} = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ et $\hat{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ où A_1, A_2, A_3 sont les composantes de A , et $A_0 = \frac{V}{c}$.

Alors, avec les notations déjà utilisées ci-dessus :

$$A_0(y) = \gamma(A_0(x) - \frac{u}{c}A_1(x)), \quad A_1(y) = \gamma(A_1(x) - \frac{u}{c}A_0(x)), \quad A_2(y) = A_2(x), \quad A_3(y) = A_3(x).$$

De plus, $\|\hat{A}(y)\| = \|\hat{A}(x)\|$.

\hat{A} est donc un quadrivecteur qu'on appelle quadripotentiel.

On vérifie facilement que :

$$\frac{\partial}{\partial x_0} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial y_0} - \frac{u}{c} \frac{\partial}{\partial y_1} \right), \quad \frac{\partial}{\partial x_1} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{u}{c} \frac{\partial}{\partial y_0} \right), \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial y_3}$$

On en déduit immédiatement que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} &= \gamma^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2} - 2\frac{u}{c} \frac{\partial^2}{\partial y_0 \partial y_1} + \frac{u^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= \gamma^2 \left(\frac{u^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} - 2\frac{u}{c} \frac{\partial^2}{\partial y_0 \partial y_1} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\square_{\hat{x}} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\end{aligned}$$

d'où :

$$\square_{\hat{x}} = \square_{\hat{y}} .$$

7.12.3 Transformation de ρ et J

Nous postulons, maintenant, que dans le domaine conceptuel où nous nous plaçons :
La charge électrique est invariante dans tout changement de repère galiléen.

Supposons que la charge électrique que nous considérons soit répartie de façon "continue" dans tout l'espace.

Notons $\rho(x)$ (resp. $\rho(y)$) la charge électrique volumique en un point M de l'espace, repéré par ses coordonnées (x_1, x_2, x_3) (resp. (y_1, y_2, y_3)) relativement à \mathcal{R} (resp. \mathcal{S}).

Supposons que la charge électrique considérée soit au repos relativement à \mathcal{R} -ce qui ne limite nullement la généralité du problème étudié.

Si $d\mathfrak{V}(x) = dx_1 dx_2 dx_3$ (resp. $d\mathfrak{V}(y) = dy_1 dy_2 dy_3$) est l'élément de volume entourant le point M dans le repère \mathcal{R} (resp. \mathcal{S}), on déduit facilement de la transformation de Lorentz réduite que :

$$d\mathfrak{V}(x) = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\mathfrak{V}(y)$$

. Comme $\rho(x)d\mathfrak{V}(x) = \rho(y)d\mathfrak{V}(y)$, on déduit que :

$$\boxed{\rho(y) = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \rho(x)}$$

(Avec les mêmes hypothèses que ci-dessus) posons :

$\hat{J}(x) = (J_0(x), J_1(x), J_2(x), J_3(x))$ où $J_0(x), \dots, J_3(x)$ sont les composantes du vecteur courant volumique en M dans le repère \mathcal{R} et $J_0(x) = \rho(x).c$.

On vérifie facilement que :

$$J_0(y) = \gamma(J_0(x) - \frac{u}{c}J_1(x)),$$

$$J_1(y) = \gamma(J_1(x) - \frac{u}{c}J_0(x)),$$

$$J_2(y) = J_2(x),$$

$$J_3(y) = J_3(x)$$

$$\text{avec : } \gamma = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} .$$

Il en résulte que : \hat{J} est un quadrivecteur qu'on appelle le quadrivecteur source du champ magnétique.

On notera que : $\|\hat{J}(x)\| = \|\hat{J}(y)\| = \rho(x).c$.

De plus : $\boxed{\hat{A} = \mu_0 \hat{J}}$

7.12.4 Transformation des équations de Maxwell.

Puisque : $B = \text{rot}(A)$, on a :

$$B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3},$$

$$B_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1},$$

$$B_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}$$

et puisque : $E = -\text{grad}(V) - \frac{\partial A}{\partial t}$,

$$E_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial t},$$

$$E_2 = -\frac{\partial V}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial t},$$

$$E_3 = -\frac{\partial V}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial t}$$

Des relations qui lient

$$\frac{\partial}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_3}$$

à

$$\frac{\partial}{\partial y_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_3}$$

que nous avons établies ci-dessus, on déduit facilement que :

$$\begin{aligned} c.B_1(y) &= c.B_1(x), \\ c.B_2(y) &= \gamma(c.B_2(x) + \frac{u}{c}E_3(x)), \\ c.B_3(y) &= \gamma(c.B_3(x) - \frac{u}{c}E_2(x)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E_1(y) &= E_1(x), \\ E_2(y) &= \gamma(E_2(x) - uB_3(x)), \\ E_3(y) &= \gamma(E_3(x) + uB_2(x)) \end{aligned}$$

avec : $\gamma = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

On vérifiera que le couple $(E, c.B)$ n'est pas un quadrivecteur. On peut cependant lui associer un tenseur antisymétrique qui est un quadrivecteur.

On montre aussi les propriétés d'invariance suivantes :

$$\langle E(x), c.B(x) \rangle = \langle E(y), c.B(y) \rangle$$

et

$$\|E(x)\|^2 - \|c.B(x)\|^2 = \|E(y)\|^2 - \|c.B(y)\|^2.$$

Des relations précédentes il résulte que :

Si E et B sont orthogonaux dans \mathcal{R} , ils le sont aussi dans \mathcal{S} , l'un des deux pouvant être nul.

Il faut noter que si E (resp. B) est nul, alors $\|E\|^2 - \|c.B\|^2$ est négatif (resp. positif).

Si $\|E\|^2 - \|c.B\|^2$ est positif (resp. négatif) dans \mathcal{R} il est aussi positif (resp. négatif) dans \mathcal{S} .

C. Introduction à la Relativité générale

7.13 Equivalence entre la masse grave et la masse inerte.

Soient P_1 et P_2 deux points matériels dans l'espace, distants d'une longueur r .

Nous savons que P_1 (resp. P_2) exerce sur P_2 (resp. P_1) une force d'attraction dont l'intensité f dépend de deux paramètres m_1 et m_2 associés, respectivement, à P_1 et P_2 , telle que :

$$f = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

(G étant une constante universelle)

m_j est appelée la *masse grave* de P_j , $j = 1, 2$.

D'autre part, si $\vec{\mathbf{F}}_1$ est la résultante des forces s'exerçant sur P_1 , nous savons aussi que, dans un repère galiléen, $\vec{\mathbf{F}}_1$ imprime à P_1 un mouvement d'accélération \mathbf{a}_1 , tel que : $\vec{\mathbf{F}}_1 = \mu_1 \tilde{\mathbf{a}}_1$, où μ_1 est un paramètre associé à P_1 qu'on appelle sa *masse inerte*.

L'équivalence entre la masse grave et la masse inerte a été vérifiée avec une grande précision par Eötvös en 1890 et 1909 (puis, plus tard, en 1960 par Dicke).

Pour étendre la théorie de la Relativité, comme nous allons l'indiquer, au cas de repères non galiléens, A. Einstein postula, le principe, d'équivalence entre la masse grave et la masse inerte.

7.14 Equivalence locale entre champ de gravitation et champ d'accélération.

Supposons, maintenant, d'une part, que P_2 est le centre de gravité de la Terre, affectée de sa masse m_2 , d'autre part, que l'influence sur P_1 de toutes les masses de l'Univers, excepté celle de la Terre, est négligeable.

Supposons, enfin, que la distance r de P_1 à P_2 soit supérieure au rayon de la Terre. Alors, P_1 sous l'attraction terrestre, tombe vers la Terre, avec une accélération \mathbf{a}_1 . Comme la masse grave et la masse inerte de P_1 sont égales, on a :

$$m_1 |\tilde{\mathbf{a}}_1| = G \frac{m_1 m_2}{r^2} (|\tilde{\mathbf{a}}_1|$$

où $|\tilde{\mathbf{a}}_1|$ est la norme de $\tilde{\mathbf{a}}_1$)

On en déduit que :

$\tilde{\mathbf{a}}_1$ est indépendant de la masse m_1 .

$\tilde{\mathbf{a}}_1$ est appelée l'accélération de la pesanteur.

Tant que P_1 ne rencontre pas la Terre, on peut considérer que son mouvement est dû, indifféremment, à l'attraction terrestre ou à l'accélération de la pesanteur.

7.15 Champ de gravitation et Géométrie .

7.15.1 Métrique associée localement à un champ de gravitation.

Soit \mathcal{R} un repère galiléen et \mathcal{H} une horloge au repos par rapport à \mathcal{R} .

Nous savons que l'on peut repérer tout point de l'espace-temps par un quadruplet (x_0, x_1, x_2, x_3) où (x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées spatiales du point considéré relativement à un repère cartésien lié à \mathcal{R} et $x_0 = ct$, t étant le temps marqué par \mathcal{H} .

Posons : $\hat{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$. A tout instant t , on peut trouver autour du point P de l'espace de coordonnées (x_1, x_2, x_3) un domaine spatial $\mathcal{D}(\hat{x})$, suffisamment "petit" pour que le champ de gravitation créé par toutes les masses de l'Univers dans ce domaine puisse être considéré comme uniforme.

Des remarques faites au paragraphe précédent, on déduit qu'il existe un référentiel $\mathcal{S}(\hat{x})$, d'origine \hat{x} qui, en général, est accéléré par rapport à \mathcal{R} et relativement auquel le champ de gravitation créé par toutes les masses de l'Univers est nul.

Associés à $\mathcal{S}(\hat{x})$ une horloge $\mathcal{K}(\hat{x})$, fixe par rapport à $\mathcal{S}(\hat{x})$ et synchrone de \mathcal{H} .

Alors, le couple $(\mathcal{K}(\hat{x}), \mathcal{S}(\hat{x}))$ est un référentiel - en général non galiléen - de l'espace-temps.

(Une cabine spatiale munie d'une horloge fixe, synchrone d'une horloge terrestre, et dans laquelle la gravitation reste très faible au cours de son évolution, nous donne une représentation concrète d'un référentiel $(\mathcal{K}(\hat{x}), \mathcal{S}(\hat{x}))$)

Désignons par (X_0, X_1, X_2, X_3) les coordonnées d'un point de l'espace-temps relativement au référentiel $(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ et par (Y_0, Y_1, Y_2, Y_3) celles du même point relativement au référentiel $(\mathcal{K}(\hat{x}), \mathcal{S}(\hat{x}))$.

On montre facilement que :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} \text{ où } A \text{ est une matrice inversible.}$$

On en déduit immédiatement que :

$$\begin{pmatrix} dX_0 \\ dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} dY_0 \\ dY_1 \\ dY_2 \\ dY_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Posons : } ds^2 = (dX_0)^2 - \sum_{j=1}^3 (dX_j)^2$$

ds^2 est la métrique de Minkowski. Or :

$$ds^2 = (dX_0, dX_1, dX_2, dX_3) E \begin{pmatrix} dX_0 \\ dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{pmatrix} \text{ où } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$ds^2 = (dY_0, dY_1, dY_2, dY_3) A E A \begin{pmatrix} dY_0 \\ dY_1 \\ dY_2 \\ dY_3 \end{pmatrix}$$

Posons : $G = A E A = (g_{j,k})_{0 \leq j,k \leq 3}$.

G est une matrice réelle symétrique et

$$ds^2 = \sum_{j,k=0}^3 g_{j,k} dY_j dY_k$$

On notera que les coefficients $g_{j,k}$ dépendent de \hat{x} .

On remarquera qu'il existe au maximum dix coefficients distincts dans la famille

$\{ g_{j,k} ; j, k = 0, 1, 2, 3 \}$.

Il est évident, d'autre part, que la matrice E est obtenue par diagonalisation de la matrice G .

De ce qui précède, il résulte qu'il est équivalent de se donner un champ de gravitation ou une famille de métriques qui se réduisent, par diagonalisation, à la forme classique de Minkowski.

7.15.2 L'espace-temps de la Relativité générale est une variété à quatre dimensions.

7.15.2.1 Définition d'une variété.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle *variété à n dimensions* un espace topologique connexe à n dimensions. Notons V_n une telle variété.

On appelle *carte locale* de V_n de domaine D , une application ϕ_D d'un domaine D de V_n dans \mathbb{R}^n .

\mathbb{R}^n étant muni d'une base quelconque, on appelle *coordonnées locales* d'un point x de D , les coordonnées de $\phi_D(x)$ dans la base considérée de \mathbb{R}^n .

On dit que V_n est une *variété différentiable* de classe C^p , $p \in \mathbb{N}$, s'il existe une famille de cartes locales $\{ D_j ; j \in J \}$ appelée *atlas*, telle que :

- (i) $\cup_{j \in J} D_j \supset V_n$
- (ii) Si $x \in D_j \cap D_k$, $j, k \in J$, les coordonnées locales de x dans D_j sont les fonctions de classe C^p , à jacobien non nul, des coordonnées de x dans D_k .

7.15.2.2 Variété de Riemann.

Soit V_n une variété différentiable de classe C^p , $p \in \mathbb{N}$ et $A = \{ D_j ; j \in J \}$ un atlas de V_n .

On dit que V_n est une *variété de Riemann* quand, sur tout élément D de A est définie une forme différentielle quadratique ds_D^2 telle que :

- (i) Si (y_j) est un système de coordonnées locales de D ,

$$ds_D^2 = \sum_{j,k=1}^3 g_{j,k}^D dy_j dy_k$$

où $g_{j,k}^D$ est de classe C^2 sur D .

- (ii) Quels que soient $j, k \in J$, $ds_{D_j}^2$ et $ds_{D_k}^2$ coïncident sur $D_j \cap D_k$.

De cette définition il résulte que, si V_n est une variété riemannienne, on peut faire correspondre à tout $x \in V_n \cap D$, $D \in A$, une forme différentielle quadratique $ds^2(x)$ qui coïncide avec ds_D^2 .

Alors, ds^2 est appelé la métrique riemannienne de V_n .

Einstein a prouvé, uniquement par voie déductive, à partir des principes généraux de la Physique que *l'espace-temps de la Relativité générale est une variété riemannienne, de dimension quatre, munie de la métrique de Minkowski.*

Ce résultat théorique a été confirmé par voie expérimentale avec une très bonne précision.

7.16 La métrique (statique) de Schwarzschild.

Considérons un point matériel P de masse m placé dans le champ de gravitation créé par une sphère de centre O , de masse M , de densité uniforme.

On suppose que $m \ll M$.

Alors, le champ de gravitation créé par la masse M peut être décrit par la métrique de Schwarzschild qui s'exprime, en fonction des coordonnées polaires de l'espace, sous la forme suivante :

$$ds^2 = g_{11} dr^2 + g_{22} d\theta^2 + g_{33} d\phi^2 + g_{44} dt^2,$$

où :

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{1}{1 - \frac{R}{r}}, \\ g_{22} &= -r^2, \\ g_{33} &= -r^2 \sin^2 \theta, \\ g_{44} &= 1 - \frac{R}{r}, \end{aligned}$$

avec $R = \frac{2GM}{c^2}$.

R est appelé le rayon de Swarzschild.

De ce cas d'école on peut déduire de multiples conséquences pratiques que nous ne pouvons développer ici.

Birkhoff a montré que la métrique de Schwarzschild était la seule qui pouvait décrire le champ de gravitation considéré ci-dessus.

7.17 Généalogie du progrès.

Géométrie : **Euclide** progrès des connaissances **Riemann**

Relativité : **Newton** progrès des connaissances **Einstein**

Armements : Newton *progrés de la barbarie* **Einstein**

lance, arc, arbalète, fusils, canons, chars, bombardiers, chasseurs, fusées etc.. bombes nucléaires etc...!

D. La Relativité d'échelle (selon L. Nottale).

7.18 Retour sur la notion de mesure en physique.

L'étude (quantitative) d'un phénomène physique implique la *mesure* d'un certain nombre de paramètres fondamentaux.

Cette mesure impose de faire le choix d'un instrument et d'un étalon de mesure. Ce choix est conditionné par l'ensemble des connaissances théoriques et des outils technologiques auxquels peut accéder celui qui veut effectuer la mesure.

La précision d'une mesure est définie par la *résolution de l'instrument de mesure* utilisé.

Il n'existe pas d'étalon de mesure absolu.

Cependant, pour mesurer, par exemple, un paramètre d'espace (resp. de temps), on ne choisit pas, indifféremment, pour unité de longueur l'Angström ou l'année-lumière (resp. le millénaire ou la nanoseconde).

Le choix d'un étalon de mesure définit l'échelle à laquelle une mesure est effectuée. Comme il n'existe pas d'étalon de mesure absolu, il n'existe pas, non plus, d'échelle absolue.

Supposons, maintenant, que nous ayons mesuré un même paramètre physique au moyen de trois étalons de longueur distincts $\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2$. Alors, on a :

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_0} : \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \quad \text{et :} \\ \ln \rho &= \ln \left(\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \right) = \ln \left(\frac{\Delta x_2}{\Delta x_0} \right) - \ln \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \right)\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \ln \rho = [\ln (\Delta x_2) - \ln (\Delta x_0)] - [\ln (\Delta x_1) - \ln (\Delta x_0)] \quad (1)$$

Cette formule est semblable, comme nous allons le vérifier, à la loi de composition des vitesses galiléenne.

En effet, soit $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ trois repères galiléens animés d'un mouvement 1-galiléen relativement à un même axe d'un repère galiléen \mathcal{R} .

Notons v_j la vitesse uniforme de \mathcal{R}_j relativement à \mathcal{R} , $j = 0, 1, 2$.

$$\text{On sait que : } v \stackrel{\text{def}}{=} v_2 - v_1 = (v_2 - v_0) - (v_1 - v_0) \quad (2)$$

Il est immédiat, en posant : $v_j = \ln (\Delta x_j)$, $j = 0, 1, 2$ et $v = \ln \rho$ que les relations (1) et (2) sont équivalentes.

Nous allons montrer, ci-dessous, que *l'analogie* entre les relations précédentes (1) et (2) *n'est pas simplement formelle*.

7.19 Ensembles S-invariants et dimension de Minkowski.

7.19.1 Ensembles S-invariants.

Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on notera, ci-dessous, $|\cdot|_n$ la norme euclidienne de \mathbb{R}^n et $\langle \cdot | \cdot \rangle_n$ le produit scalaire associé à $|\cdot|_n$.

Définition 3 On dit qu'une application S de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}^*$, est une similitude dans \mathbb{R}^n , de rapport ρ , $\rho \in]0, 1[$ si :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad |S(x) - S(y)|_n = \rho |x - y|_n .$$

On notera, dans la suite, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \rho)$ l'ensemble de telles similitudes.

Soit $S \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \rho)$. Posons :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad g(x) = \frac{1}{\rho}(S(x) - S(0)).$$

Evidemment, $g(0) = 0$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad |g(x) - g(y)|_n &= |x - y|_n \text{ et} \\ 2 < g(x)|g(y) >_n &= |g(x)|_n^2 + |g(y)|_n^2 - |g(x) - g(y)|_n^2 \\ &= |x|_n^2 + |y|_n^2 - |x - y|_n^2 = 2 < x|y >_n . \end{aligned}$$

On en déduit que : $g \in O(n)$, où $O(n)$ est, dans \mathbb{R}^n , le groupe formé par les rotations et les rotations combinées avec une réflexion sur un hyperplan convenable.

Définition 4 : Soit $S = (S_1, \dots, S_p)$, $p \in \mathbb{N}^*$ où $S_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \rho_j)$, $j = 1, \dots, p$.

On dit qu'une partie E de \mathbb{R}^n est S -invariante si :

$$E = \cup_{j=1}^{j=p} S_j(E).$$

Posons : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall A \subset \mathbb{R}^n$

$$d_n(x, A) = \text{Inf} |x - y|_n ; y \in A .$$

Notons K_n l'ensemble des parties non vides, compactes de \mathbb{R}^n .

Posons : $\forall E, F \in K_n$,

$$\delta_n(E, F) = \max_{x \in E, y \in F} (d_n(x, F), d_n(y, E))$$

On montre et nous admettrons que :

- i δ_n est une distance sur K_n .
- ii l'application T de K_n dans K_n qui à tout $E \in K_n$ associe $\cup_{j=1}^{j=p} S_j(E)$ où $S_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \rho_j)$, $j = 1, \dots, p$ est une contraction.
- On en déduit que si $S_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \rho_j)$, $j = 1, \dots, p$, $p \in \mathbb{N}^*$,
- iii il existe $K \in K_n$ telle que : $K = \cup_{j=1}^{j=p} S_j(K)$
- iv $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $K = \cup_{j_1=1}^{j_1=p} \dots \cup_{j_m=1}^{j_m=p} (S_{j_1} \circ \dots \circ S_{j_m})(K)$
- v Si $K_0 \in K_n$ et si : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $T^m(K_0) = \cup_{j_1=1}^{j_1=p} \dots \cup_{j_m=1}^{j_m=p} (S_{j_1} \circ \dots \circ S_{j_m})(K_0)$, alors $T^m(K_0)$ converge, lorsque m tend vers l'infini, vers K dans K_n muni de la distance δ_n .

Exemple 7.19.1 : Ensemble triadique de Cantor dans \mathbb{R}

Posons :

$$E_0 =]0, 1[, E_1 = E_0 \setminus \left] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right[\quad E_2 = E_1 \setminus \left] \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \right[\setminus \left] \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \right[$$

et ainsi de suite.

Quel que soit $m \in \mathbb{N}$, E_m est la réunion des éléments d'une famille \mathcal{I}_m d'intervalles.

E_{m+1} se déduit de E_m en otant de tout intervalle $] \alpha, \beta [\in \mathcal{I}_m$, l'intervalle :

$$\left] \alpha + \frac{\beta - \alpha}{3}, \beta - \frac{\beta - \alpha}{3} \right[.$$

On montre que la suite $\{E_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ converge dans \mathbb{K}_1 muni de la distance δ_1 vers un ensemble E qu'on appelle l'ensemble triadique de Cantor.

On vérifie aisément que la mesure de Lebesgue de E est nulle.

D'autre part, $E = S_1 \cup S_2$ où S_1 (resp. S_2) est la similitude qui associe à l'intervalle

$$E_0 =]0, 1[, \text{ l'intervalle } E_{10} = \left] 0, \frac{1}{3} \right[\text{ (resp. } E_{11} = \left] \frac{2}{3}, 1 \right[).$$

7.19.2 Dimension de Minkowski .

Définition : Soit E une partie bornée de \mathbb{R}^n $n \in \mathbb{N}^*$.

Etant donné $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, notons $N(E ; \varepsilon)$ le plus petit nombre d'hypercubes de volume ε^n dont la réunion recouvre E .

On appelle *dimension de Minkowski* de E , le scalaire :

$$\delta(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} - \frac{\ln(N(E ; \varepsilon))}{\ln \varepsilon} .$$

On notera que :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \delta(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} - \frac{\log_a(N(E ; \varepsilon))}{\log_a \varepsilon}$$

On vérifie facilement que si $E = [0, 1]^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\delta(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} - \frac{\ln(\varepsilon^{-n})}{\ln \varepsilon} = n .$$

Lorsque $\delta(E)$ n'est pas entier, on dit que E est un *ensemble de type fractal* et $\delta(E)$ est aussi appelé la *dimension fractale* de E .

On montre et nous admettrons la

Proposition :

Soit $S = (S_1, \dots, S_p)$, $p \in \mathbb{N}^*$ où $S_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \rho_j)$, $j = 1, \dots, p$.

Si K est S-invariante, alors :

$$\sum_{j=1}^p \rho_j^{\delta(K)} = 1 .$$

En particulier, si $\rho_1 = \dots = \rho_p = \rho$

$$\delta(K) = - \frac{\ln(p)}{\ln(\rho)} .$$

Exemple 7.19.2 : Si E est l'ensemble de Cantor triadique dans \mathbb{R} , alors :

$$\delta(E) = -\frac{\ln(2)}{\ln(\frac{1}{3})} = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} .$$

7.20 Dimension fractale et relativité d'échelle .

Soit E une partie bornée de \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

Etant donné $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, notons $N(E; \varepsilon)$ le plus petit nombre d'hypercubes de volume ε^n dont la réunion recouvre E .

Supposons que :

$$\delta(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} -\frac{\ln(N(E; \varepsilon))}{\ln \varepsilon} \in \mathbb{R}_+ .$$

Etant donnés $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_+^*$, posons :

$$\begin{aligned} \delta(E; \varepsilon_j) &= -\frac{\ln(N(E; \varepsilon_j))}{\ln \varepsilon_j}, \quad j = 1, 2 . \text{ Alors :} \\ \frac{N(E; \varepsilon_2)}{N(E; \varepsilon_1)} &= \frac{\varepsilon_2^{-\delta(E; \varepsilon_2)}}{\varepsilon_1^{-\delta(E; \varepsilon_1)}} = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^{\delta(E)} \cdot \frac{\varepsilon_2^{\delta(E) - \delta(E; \varepsilon_2)}}{\varepsilon_1^{\delta(E) - \delta(E; \varepsilon_1)}} . \end{aligned}$$

Supposons que :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_j \rightarrow 0_+} (\delta(E) - \delta(E; \varepsilon_j)) \cdot \ln(\varepsilon_j) &= 0 \quad j = 1, 2. \\ \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0_+} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} &= \rho \in \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

Donc, lorsque ε_1 (ou ε_2) est "suffisamment petit", on a :

$$\frac{N(E; \varepsilon_2)}{N(E; \varepsilon_1)} \sim \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^{\delta(E)}$$

ou ce qui est équivalent :

$$\ln(N(E; \varepsilon_2)) - \ln(N(E; \varepsilon_1)) \sim \delta(E) \cdot \ln\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) .$$

Les considérations précédentes nous conduisent "naturellement" à nous intéresser à la classe des applications ϕ de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* telles que :

$$\exists \eta_0 \in \mathbb{R}_+^* \exists \delta \in \mathbb{R} , \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in]0, \eta_0[,$$

$$\frac{\phi(\varepsilon_2)}{\phi(\varepsilon_1)} = \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^{-\delta}$$

On notera $\mathcal{F}(\eta_0, \delta)$ cette classe de fonctions.

Soit $\phi \in \mathcal{F}(\eta_0, \delta)$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in]0, \eta_0[$. Evidemment,

$$\ln(\phi(\varepsilon_2)) = \ln(\phi(\varepsilon_1)) - \delta \ln\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) .$$

Étant donné $a \in \mathbb{R}_+^*$, posons :

$$\log_a(\phi(\varepsilon_j)) = x_j \quad j = 1, 2 \quad \text{et} \quad \log_a\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) = v.$$

Considérons deux repères galiléens \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 d'origine O_1 et O_2 respectivement.

Supposons que \mathcal{R}_2 soit animé d'un mouvement (rectiligne et uniforme) 1-galiléen, de vitesse v relativement à \mathcal{R}_1 , le long d'un axe O_1x de \mathcal{R}_1 .

Supposons que \mathcal{R}_2 coïncide avec \mathcal{R}_1 , à l'instant $t = 0$.

Soit M un point d'abscisse x_j sur l'axe O_jx , $j = 1, 2$.

Alors, à l'instant $t = \delta$ on a : $x_2 = x_1 - v\delta$.

Ainsi est établie l'analogie qui existe entre l'évolution d'une fonction

$\phi \in \mathcal{F}(\eta_0, \delta)$ ($\eta_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $\delta \in \mathbb{R}$) et le mouvement rectiligne et uniforme d'un mobile M dans l'espace-temps galiléen.

7.21 Relativité d'échelle .

Nous pouvons, maintenant, envisager d'aller plus loin dans l'analogie que nous avons développée ci-dessus, en posant un principe analogue au principe de relativité d'Einstein, le principe de relativité d'échelle qui s'énonce ainsi :

"Les lois de la nature doivent être les mêmes dans tous les systèmes de coordonnées, quel que soit leur état d'échelle".

Pour expliciter les formules fondamentales qui résultent de la relativité d'échelle, nous suivons la même démarche que dans la partie II.

Nous expliciterons, d'abord, les formules de composition des vitesses puis celles de Lorentz.

Nous préciserons, en même temps, la correspondance entre mouvement et processus.

7.21.1 Composition des vitesses.

Soit $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$ un étalon donné.

Dilatons ou contractons cet étalon d'un coefficient $\rho_1 \in \mathbb{R}_+^*$.

On obtient un nouvel étalon $\varepsilon_1 = \rho_1\varepsilon_0$, ($\rho_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}$).

Effectuons une nouvelle dilatation ou contraction de l'étalon ε_0 , de coefficient $\rho_2 \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors on obtient un étalon $\varepsilon_2 = \rho_2\varepsilon_0$, ($\rho_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}$)

Notons ρ la dilatation ou contraction qui transforme l'étalon ε_1 en l'étalon ε_2

D'autre part, soient $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1$ et \mathcal{R}_2 trois repères galiléens.

Supposons que \mathcal{R}_1 (resp. \mathcal{R}_2) soit animé d'un mouvement 1-galiléen par rapport à \mathcal{R}_0 .

Notons u_1 (resp. u_2) la vitesse de \mathcal{R}_1 (resp. \mathcal{R}_2) relativement à \mathcal{R}_0 .

Notons que l'on passe des formules relatives au mouvement à celles qui sont relatives au processus en posant :

$$u_1 = \log_a \rho_1, \quad u_2 = \log_a \rho_2, \quad u = \log_a \rho \quad \text{et} \quad c = k(\varepsilon_0; a).$$

Remarques importantes :

(i) Remplaçons, ci-dessus,

$$\log_a(\cdot) \quad \text{par} \quad \frac{\ln(\cdot)}{\ln(a)}$$

On obtient :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(a) \cdot k(\varepsilon_0; a) = k(\varepsilon_0; e) .$$

On pose, maintenant, $k(\varepsilon_0; e) = k(\varepsilon_0)$.

(ii) Pour homogénéiser la formule relativiste de composition des vitesses, écrivons $k(\varepsilon_0)$ sous la forme suivante :

$$k(\varepsilon_0) = \ln\left(\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon_0}\right), \quad \mathcal{E} \in \mathbb{R}_+^* .$$

Supposons que : $\varepsilon_1 = \mathcal{E}$, Alors :

$$\ln\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}\right) = k(\varepsilon_0) = \ln\left(\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon_0}\right).$$

Il en résulte que \mathcal{E} est indépendant de ε_0 .

On obtient ainsi une nouvelle écriture de la formule relativiste de composition des vitesses :

$$\ln\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}\right) = \frac{\ln \rho + \ln\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)}{1 + \frac{\ln \rho \cdot \ln\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)}{(\ln\left(\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon_0}\right))^2}} .$$

7.21.2 Formules de type lorentzien .

Nous désignerons, ci-dessous, par $(\mathcal{R}, \mathcal{H}(\mathcal{R}))$ un repère quelconque dans l'espace-temps galiléen,

\mathcal{R} étant un repère galiléen et $\mathcal{H}(\mathcal{R})$ une horloge fixe dans \mathcal{R} , réglée exactement sur une horloge $\mathcal{H}(\mathcal{R}_0)$, fixe dans un repère galiléen arbitrairement choisi \mathcal{R}_0 , à l'instant $t_0 = 0$.

Nous noterons $(x_{\mathcal{R}}, t_{\mathcal{R}})$ le couple de coordonnées d'un point générique de l'espace-temps relativiste par rapport au repère $(\mathcal{R}, \mathcal{H}(\mathcal{R}))$.

Nous pouvons maintenant dresser le tableau des correspondances principales, ci-dessous :

Mouvement	Processus
Repère galiléen \mathcal{R}	Echelle ε , $\varepsilon \in]0, \eta_0[$, $\eta_0 \in \mathbb{R}_+^*$
$\mathcal{H}(\mathcal{R})$, horloge liée à \mathcal{R}	Mesure de Minkowski associée à ε
$(x_{\mathcal{R}}, t_{\mathcal{R}})$ coordonnées d'un point dans $(\mathcal{R}, \mathcal{H}(\mathcal{R}))$	$(\ln(\phi(\varepsilon)), \delta(\varepsilon))$
Vitesse v d'un repère galiléen \mathcal{R}_2 par rapport à un repère galiléen \mathcal{R}_1	$\ln(\rho)$
$x_{\mathcal{R}_2} - x_{\mathcal{R}_0} = \frac{x_{\mathcal{R}_1} - x_{\mathcal{R}_0} + vt_{\mathcal{R}_1}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	$\ln \left(\frac{\phi(\varepsilon_2)}{\phi(\varepsilon_0)} \right) = \frac{\ln \left(\frac{\phi(\varepsilon_1)}{\phi(\varepsilon_0)} \right) + \delta(\varepsilon_1) \ln(\rho)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\ln(\rho)}{\ln \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)} \right)^2}}$
$t_{\mathcal{R}_2} = \frac{t_{\mathcal{R}_1} + \frac{v}{c^2} (x_{\mathcal{R}_1} - x_{\mathcal{R}_0})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	$\delta(\varepsilon_2) = \frac{\delta(\varepsilon_1) + \frac{\ln(\rho)}{\left(\ln \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) \right)^2} \cdot \ln \left(\frac{\phi(\varepsilon_1)}{\phi(\varepsilon_0)} \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\ln(\rho)}{\ln \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)} \right)^2}}$

Dans les deux formules ci-dessus on a remplacé $\phi(\varepsilon)$ par $\frac{\phi(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon_0)}$, mettant en évidence $\phi(\varepsilon_0)$ comme référence.

A. Radioactivité naturelle et radioactivité artificielle

8.1 La découverte de la radioactivité.

En 1895-1896 le savant allemand W.K. (Van) Röntgen réalisa une expérience qui mit en évidence un rayonnement invisible inconnu, que l'on nomma : "rayonnement X" (ou rayons X). De multiples expériences furent alors effectuées avec ce nouveau rayonnement et montrèrent qu'il traversait le papier, le bois, de fines feuilles métalliques et qu'il impressionait une plaque photographique.

On pouvait même voir le squelette d'une main sur une plaque photographique en plaçant cette main sur le trajet d'un faisceau de rayons X.

On remarqua aussi que les rayons X créaient un phénomène de fluorescence sur le verre qui entourait l'appareillage et qui les produisait.

Ce fait attira l'attention du physicien français Henri Becquerel qui effectuait des recherches sur la fluorescence.

Becquerel pensa, tout d'abord, que la production du rayonnement X dans l'expérience de Röntgen, s'expliquait par le fait que les matières fluorescentes éclairées par une forte lumière solaire devaient émettre en même temps que de la lumière visible, des rayons X.

Une première expérience réalisée avec du bisulfate d'uranium et de potassium sembla confirmer son hypothèse.

Mais par un "heureux" hasard, il s'aperçut que, même en l'absence de lumière solaire, le bisulfate d'uranium et de potassium émettait un fort rayonnement invisible dont l'action était identique à celle des rayons X.

H. Becquerel venait de découvrir la radioactivité. Il annonça ce résultat le 2 mars 1897.

8.2 La nature du rayonnement radioactif.

Après Becquerel plusieurs physiciens s'intéressèrent au phénomène radioactif et découvrirent que de nombreux éléments émettaient un rayonnement radioactif.

J.J. Thomson et Soddy émirent l'hypothèse que *tout rayonnement radioactif avait pour cause une instabilité essentielle des atomes de ce corps.*

En 1903, ils établirent la **loi** très simple qui régit la transmutation - ou désintégration - des corps radioactifs.

Voici comment s'exprime cette loi.

Soit $n(t)$ le nombre d'atomes présents dans un corps radioactif à l'instant t , $dn(t)$ le nombre d'atomes qui se désintègrent entre les instants t et $t + dt$.

En admettant que : $dn(t) = \Lambda N(t) dt$ où Λ est une constante - appelée constante de radioactivité - on obtient la loi suivante : $n(t) = n(t_0)e^{-\Lambda(t-t_0)}$ où t_0 est un temps origine.

On appelle période ou demi-vie du corps radioactif considéré le temps au bout duquel le nombre d'atomes présents dans le corps radioactif a diminué de moitié.

Si T est ce temps, on a : $T = \log(2)/\Lambda$.

8.3 La composition du rayonnement radioactif.

Un mince faisceau d'un rayonnement radioactif placé dans un champ magnétique se divise en trois faisceaux qu'on a nommés rayonnements α , β^- et γ .

Le rayonnement α est faiblement énergétique. Quand il pénètre dans un solide, il est arrêté au bout de quelques centièmes de millimètre.

Le rayonnement β^- , lui, peut traverser plusieurs centimètres de plomb.

Le rayonnement γ est le plus énergétique. Pour l'arrêter, il faut une couche de plomb ayant une épaisseur de plusieurs dizaines de centimètres.

On a établi que le rayonnement α est un flux de particules rapides positivement chargées, que le rayonnement β^- est un flux d'électrons, que le rayonnement γ est produit par des oscillations électromagnétiques de très haute fréquence se propageant à la vitesse de la lumière et qu'il est identique au rayonnement X.

8.4 Les premiers modèles de l'atome.

Pour comprendre le phénomène de la radioactivité, les savants, au 20^e siècle, ont été conduits à s'interroger sur la structure de l'atome.

- (i) *L'atome de J.J. Thomson* : J.J. Thomson imagina que l'atome était une sphère emplies d'électrons en mouvement et de particules positivement chargées, de sorte que l'ensemble soit électriquement neutre.

Ce modèle fut vite abandonné car il ne permettait pas d'expliquer, par exemple, comment un faisceau d'électrons pouvait traverser une feuille d'or.

- (ii) *L'atome de Bohr-Rutherford* : Suivant une idée de Rutherford, un de ses élèves, Niels Bohr, physicien danois, présenta, en 1913, le premier modèle de l'atome qui pouvait expliquer un certain nombre de résultats expérimentaux.

Selon ce modèle l'atome était comparable à un *système solaire*.

Autour du centre de ce système appelé *noyau de l'atome* gravitaient sur des orbites circulaires les *électrons*. A l'intérieur du noyau on trouvait les *protons*, particules chargées positivement en même nombre que les électrons.

(iii) *Le neutron :*

Dés 1920, Rutherford avait conjecturé l'existence d'une particule électriquement neutre, de masse égale au proton.

C'est son élève, Chadwick, qui, en 1932, découvrit cette particule qu'on appela *neutron*.

On montra, alors, que le noyau de l'atome étaient constitué de protons et de neutrons. Protons et neutrons sont appelés des *nucléons*.

(iv) *Formule d'un atome.* Aujourd'hui, on représente l'atome d'un corps, de symbole Γ , par la formule suivante : $\frac{A}{Z} \Gamma$, où A est le nombre de nucléons contenus dans le noyau de Γ , et Z le nombre de protons contenus dans le noyau de Γ .

$A - Z$ est ainsi le nombre de neutrons contenus dans le noyau de Γ .

Deux atomes d'un même corps qui diffèrent seulement par le nombre de neutrons contenus dans leur noyau sont appelés des *isotopes*.

L'atome le plus simple est l'atome d'*hydrogène* composé d'un électron et d'un proton. Cet atome a un isotope, le *deutérium* composé d'un électron d'un proton et d'un neutron.

L'hydrogène constitue 90 % de la matière de l'univers.

Les découvertes relatives à la structure de l'atome ont confirmé la justesse de la *classification périodique des éléments de Mendeleïev*.

Elles ont permis de compléter le tableau de Mendeleïev qui, à l'origine, comportait plusieurs cases vides.

8.5 Étrangeté du monde subatomique.

(i) *Le monde subatomique échappe à notre intuition sensible.*(ii) *Le monde subatomique est le monde de l'infiniment petit.*

Voici quelques chiffres pour nous en convaincre. La taille d'une fourmi (ou d'un circuit intégré) est de l'ordre du centimètre. L'épaisseur d'un cheveu est de l'ordre de 10 à 50 microns, un micron mesurant 10^{-4} centimètre. La taille de l'ADN contenu dans une cellule d'un être vivant est de l'ordre de 2,5 nanomètre, un nanomètre mesurant 10^{-7} centimètre. La taille d'un atome de silicium est d'environ quelques dixèmes de nanomètres. Protons et neutrons ont un diamètre de l'ordre de $0,8 \cdot 10^{-13}$ centimètre.

(iii) *L'atome est quasiment vide !* Si un atome avait la taille d'un stade de foot-ball, son noyau aurait la taille d'un petit pois.(iv) *La durée de vie de certaines particules est "infiniment" petite.*

Ainsi, la durée de vie de la particule Z est de $2,69 \cdot 10^{-25}$ secondes. (Pour la particule Z, le neutron dont la durée de vie (moyenne) est de 15 mn "paraîtra éternel"!).

(v) *La théorie de la relativité restreinte est essentielle pour l'étude du monde subatomique* car, d'une part, les vitesses des particules en mouvement sur leur trajectoires sont très élevées

et, d'autre part, elle nous donne la formule fondamentale, découverte par Einstein en 1905, qui relie la masse et l'énergie d'une particule à savoir : $E = mc^2$ où E est l'énergie de la particule, m sa masse et c la vitesse de la lumière.

C'est pourquoi la masse des particules élémentaires est exprimée en *électron-volts*. Grâce à la formule d'Einstein, ci-dessus, on peut calculer l'énergie \mathcal{E} de liaison des nucléons.

En effet, considérons un corps de formule ${}^A_Z\Gamma$ et de masse M .

Désignons par m_p (resp. m_n) la masse du proton (resp. neutron).

Alors : $\mathcal{E} = (Zm_p + (A - Z)m_n - M) c^2$.

- (vi) **Le monde subatomique est quantique.** Les physiciens qui étudiaient la structure de l'atome se sont trouvés confrontés à des énigmes insolubles dans le cadre des connaissances dont ils disposaient.

Ils ne pouvaient expliquer pourquoi le spectre de la lumière émise par un gaz était formé d'une suite discontinue de bandes (de fréquences).

La solution de cette énigme leur fut suggérée par les travaux de Max Planck, qui, en 1900, émit l'hypothèse que l'énergie E du rayonnement du corps noir était liée à sa fréquence ν par la formule : $E = h\nu$

où h était une constante appelée aujourd'hui *constante de Planck* et égale à $6,625 \cdot 10^{-34}$ joules/seconde.

Dans le même axe de pensée que Planck, Bohr formula le postulat qui devait fonder la Physique quantique :

"tout processus atomique présente un caractère de discontinuité, ou plutôt d'individualité, complètement étranger aux théories classiques et caractérisé par le quantum d'action de Planck."

Ce postulat justifiait, en particulier, le fait que, l'électron, dans un atome, ne pouvait graviter autour du noyau que sur un nombre fini d'orbites bien déterminées et que, lorsqu'il passait d'une orbite à une autre, plus proche (resp. plus éloignée) du noyau, il donnait (resp. il absorbait) une quantité d'énergie bien définie.

- (vii) **Les particules possèdent un moment cinétique appelé spin.**

Le spin d'une particule est un multiple entier ou demi-entier de

$$\frac{h}{2\pi}$$

.

Si le spin d'une particule est égal

$$n \frac{h}{2\pi}$$

on dira que la particule est de spin égal à n .

Lorsque n est pair on dit que la particule est un boson, si n est impair on dit que c'est un fermion.

Le physicien W. Pauli, étudiant le spectre de l'atome d'hélium, constata que deux électrons, dans un atome, ne pouvaient coexister avec les mêmes caractères quantiques. Il en déduisit un principe qu'on appella *principe d'exclusion de Pauli*. Celui ci fut étendu aux fermions et s'énonce ainsi : *"Deux fermions, de même nature, dans un atome, ne peuvent occuper le même état quantique"*

- (viii) **Une particule subatomique est à la fois onde et corpuscule.**

Cette propriété est la plus déroutante.

C'est Einstein qui, en découvrant le *photon*, en 1905, révéla la nature corpusculaire de la lumière et L. de Broglie, en 1923, qui mit en évidence la *nature ondulatoire de l'électron* et

qui établit la formule suivante qui lie la longueur d'onde λ de la particule et son impulsion p à savoir : $\lambda = h.p^{-1}$.

Une expérience classique montre le caractère ondulatoire et corpusculaire de la matière.

Envoyons des électrons, un à un, sur une plaque perpendiculaire à la trajectoire rectiligne des électrons et percée de deux trous situés à la distance d . On observe, alors, sur un écran parallèle à la plaque, situé à la distance L , des franges d'interférence dont les extrema sont séparés d'une distance $\delta = (\lambda L)/(2d)$.

λ est la longueur d'onde de l'onde associée à l'électron.

Il faut noter que *l'onde associée à une particule n'est pas une onde matérielle*. Cette entité est représentée par une fonction, la *fonction d'onde*, qui est la *probabilité* pour que le corpuscule associé à la particule se trouve en un point donné, à un instant donné.

- (ix) **Relation d'incertitude de Heisenberg.** Heisenberg a montré que si l'on désigne par x (resp. p) la position (resp. l'impulsion) d'une particule à un instant donné et par Δx (resp. Δp) le domaine d'incertitude de x (resp. p) alors : $\Delta x.\Delta p \geq (2\pi)^{-1}h$.

Il en résulte que, plus on connaît avec précision la longueur d'onde de la particule, moins on connaît précisément son impulsion et réciproquement.

- (x) **Particules et antiparticules.** À chaque particule on peut associer une antiparticule ayant même masse, même spin et une charge électrique opposée.

Ainsi, l'électron a une antiparticule, découverte en 1932, qui est appelé le *positron*.

Quand une particule et une antiparticule se rencontrent elles s'annihilent en produisant un rayonnement γ .

Une particule neutre peut avoir une antiparticule distincte. C'est le cas de l'antineutron (cf. plus loin).

8.6 Le monde des particules.

- (a) **A la découverte de nouvelles particules.** Il est impossible de voir une particule qui est à l'échelle du monde subatomique (par exemple un électron ou un nucléon) car ces particules ont une longueur d'onde inférieure à celle de la lumière.

Cependant, comme toute particule a une double nature, corpusculaire et ondulatoire, on peut espérer la "voir" en la bombardant avec une particule de longueur d'onde suffisamment petite ou ce qui est équivalent d'énergie suffisamment grande.

C'est ainsi que pour pénétrer le secret de l'atome, Rutherford, à partir de 1919, bombarda des feuilles très minces de différents métaux avec un flux de particules α . Il réussit, de cette façon, à

- (i) prouver l'existence, à l'intérieur de l'atome, d'une partie très dense, le noyau
(ii) réaliser la première *transmutation artificielle*- la première *réaction nucléaire* - transformant un noyau d'azote en un noyau de fluor, qui se désintégrait pour donner un noyau d'oxygène et un proton.

Après Rutherford, les physiciens, afin de découvrir des particules de plus en plus petites, ont bombardé des cibles très diverses avec de projectiles de plus en plus énergétiques.

Les premiers projectiles qu'ils utilisèrent furent les particules du rayonnement cosmique.

Puis ils entreprirent la construction d'accélérateurs de particules.

Dans les accélérateurs, les particules chargées électriquement, sont accélérées par un champ électrique très intense tout au long de leur parcours et sont éjectées vers leur cible quand elles ont atteint leur énergie maximale.

Autour de la cible, on place un ou plusieurs détecteurs qui permettent de mesurer la direction, l'impulsion, l'énergie, la nature des particules produites.

Il existe plusieurs types de détecteurs (chambres de Wilson, chambres à bulles, scintillateurs, chambres multifils, multidétecteurs, électroniques) qui, maintenant sont couplés à des ordinateurs permettant d'enregistrer et de traiter très rapidement un très grand nombre d'informations.

Pour améliorer les performances des accélérateurs, les physiciens conçurent des collisionneurs. Là, on propulse, en sens inverse, deux faisceaux de particules qui se rencontrent, à très grande vitesse, plusieurs dizaines de milliers de fois par seconde. (Notons que dans les accélérateurs et les collisionneurs, les projectiles ne doivent pas se désintégrer avant d'avoir atteint leur cible et qu'il doit régner un vide suffisant pour que les particules en mouvement ne heurtent pas des molécules qui les feraient dévier de leur trajectoire.)

Lorsqu'une particule accélérée atteint sa cible, trois éventualités peuvent se produire :

- (*) déviation de la particule de sa trajectoire initiale
- (**) captation du projectile par la cible et donc création d'une nouvelle particule
- (***) explosion - c'est à dire désintégration - de la cible.

Comme ces évènements se produisent au hasard, il faut donc beaucoup d'ingéniosité, de patience et ..d'argent pour découvrir de nouvelles particules !

(b) Des particules fondamentales aux propriétés étonnantes : les quarks.

Dans les années 1960, les physiciens avaient découvert plusieurs centaines de particules. Celles-ci, compte tenu de leur nombre, ne pouvaient être les briques élémentaires de la matière, qu'ils recherchaient.

Pour surmonter cette difficulté, M. Gell-Man et G. Zweig imaginèrent qu'il existait des particules élémentaires, encore indétectées, qui seraient les pièces constitutives des nucléons et que Gell-Man nomma *quarks*.

Cette idée se révéla féconde.

Aujourd'hui, on distingue six quarks, qu'on a nommés :

u (up), d (down), s (strange), c (charmed), b (bottom) et t (top).

up, down, strange, charmed, bottom et top sont appelées saveurs des quarks.

Les quarks ont une charge électrique fractionnaire (!) précisée dans le tableau ci-dessous.

quarks	<i>u</i>	<i>d</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>t</i>
charges	$\frac{2e}{3}$	$\frac{-e}{3}$	$\frac{-e}{3}$	$\frac{2e}{3}$	$\frac{-e}{3}$	$\frac{2e}{3}$

où *e* désigne la charge de l'électron.

Ainsi, un proton (resp. un neutron) est formé de deux (resp. un) quark(s) *u* et de un (resp. deux) quark(s) *d*.

On écrit symboliquement : $p = uud$ et $n = udd$.

8.7 Les forces / interactions nucléaires. Un pas de plus dans un monde étrange.129

(Évidemment), à chaque quark est associé un antiquark.

L'antiquark de u (resp. d , ...) est noté \bar{u} (resp. \bar{d} , ...)

On a été conduit, d'autre part, à munir les quarks d'une qualité que les autres particules ne possèdent pas, et qu'on a nommée *charge de couleur* (ou plus simplement *couleur*).

Les quarks peuvent ainsi être colorés en "Bleu", "Rouge" ou "Vert". A toute couleur est associée une anticouleur. Les charges de couleurs s'additionnent.

La couleur obéit à la règle suivante : Bleu + Rouge + Vert =Incolore.

Toutes les particules "visibles" sont incolores.

C'est en combinant saveurs, charges électriques et couleurs que l'on peut décrire toutes les particules constitutives des structures atomiques les plus massives.

- (c) ***Physique des particules et cosmologie.*** Comme nous observons dans le cosmos les réactions nucléaires qui se sont produites il y a très longtemps, *la plongée dans l'intime de la matière est équivalente à une remontée dans le temps.* Les découvertes de la structure intime de la matière ont, ainsi, permis à la cosmologie de progresser à pas de géant au 20^e siècle.

8.7 Les forces / interactions nucléaires. Un pas de plus dans un monde étrange.

- (i) ***Les quatre forces / interactions en physique.*** Avant que l'on n'explore le monde subatomique, on ne connaissait que deux forces :

la force gravitationnelle et la force électromagnétique.

La force gravitationnelle agit, à très longue distance dans tout l'univers. Elle se manifeste sur la Terre par la chute des corps.

La force électromagnétique agit entre les particules électriquement chargées. Elle est beaucoup plus intense que la force gravitationnelle.

Ainsi, les charges électriques de deux protons se repoussent avec une force électromagnétique qui est 10^{35} fois plus grande que la force gravitationnelle qui les attire.

Les forces qui interviennent dans le monde subatomique sont dénommées interactions forte et faible.

Elles sont dues à des particules.

L'interaction forte est celle qui empêche, en particulier deux protons dans le noyau d'un atome de se repousser.

Elle agit à une très faible distance, de l'ordre de 10^{-13} cm.

Elle s'exerce pendant un temps très court de l'ordre de 10^{-23} s.

On appelle *hadrons* les particules sensibles à l'interaction forte.

L'interaction faible a une très faible intensité.

Elle a une portée de l'ordre de 10^{-15} cm et elle s'exerce pendant une durée qui va de 10^{-12} s à plusieurs minutes.

Elle concerne tous les *fermions*.

- (ii) ***Quelques notions élémentaires sur la théorie quantique du champ électromagnétique.***

Une charge électrique ε au repos ou en mouvement dans l'espace, exerce une force électromagnétique en un point quelconque de l'espace. On dit que ε crée un champ électromagnétique dans l'espace.

Dans la théorie classique du champ électromagnétique, le champ, comme l'espace lui-même, est continu.

Une théorie quantique du champ électromagnétique implique nécessairement que ce champ soit discontinu.

L'existence d'un *quantum de champ* s'impose donc.

Ce quantum a été identifié au photon.

De là, il résulte que *l'action électromagnétique* que deux particules électriques exercent l'une sur l'autre, *peut être interprétée* comme un échange de photons- c'est-à-dire, *comme un échange de particules.*

On est ainsi conduit à admettre que tout électron est enveloppé d'un nuage de photons qui apparaissent et disparaissent de façon presque aléatoire. Ces photons qui sont étroitement liés à l'électron sont dits *virtuels*.

Un électron peut émettre un photon virtuel à un instant donné et le réabsorber très peu après. La probabilité d'émission d'un photon est égale à environ 137^{-1} .

Un photon virtuel peut devenir un photon réel.

Par exemple quand un électron et un antiélectron se rencontrent les deux particules s'annihilent et libèrent les photons virtuels qui les accompagnent.

Le phénomène inverse peut se produire : un photon réel ayant suffisamment d'énergie peut se transmuter en une paire d'électrons de charges opposées qui à leur tour s'annihilent en libérant un photon réel.

On en déduit que le vide peut être vu comme un bouillonnement de particules virtuelles !

Les photons virtuels qui gravitent autour des électrons ne sont pas des entités abstraites car ils ont des effets réels.

Ce sont eux qui sont cause du *décalage de Lamb* qui existe entre les niveaux d'énergie théoriques et les niveaux d'énergie réels des électrons gravitant autour du noyau des atomes.

Ils modifient aussi légèrement le moment magnétique de l'électron.

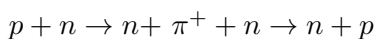
(iii) *L'interaction nucléaire forte.* En 1935, Yukawa a proposé un modèle explicatif performant de l'interaction nucléaire forte qui est analogue à celui du champ électromagnétique que nous avons décrit au paragraphe précédent.

Selon ce modèle, l'interaction nucléaire forte a pour messagère une particule appelée méson π ou pion.

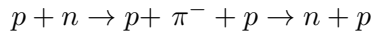
Le pion est un quantum de champ nucléaire analogue au quantum de champ électromagnétique, le photon. C'est un boson de spin nul dont la masse est égale à 300 fois celle de l'électron qui apparaît sous trois formes : π^+ , π^- , π^0 .

π^+ (*resp.* π^-) est chargé positivement (*resp.* négativement). π^0 est neutre. π^+ et π^- furent décelés pour la première fois dans le rayonnement cosmique et π^0 fut détecté pour la première fois dans un accélérateur.

Ainsi, peut-on expliquer la transformation d'un proton en neutron et la transformation inverse par les formules suivantes :



8.7 Les forces / interactions nucléaires. Un pas de plus dans un monde étrange 131



De la théorie de Yukawa on peut déduire aussi que tout nucléon est entouré d'un nuage de pions virtuels.

Parce que certains de ces pions sont chargés électriquement, le neutron possède un champ magnétique, bien qu'il ne soit pas électriquement chargé.

Or, le pion est une particule composée de quarks.

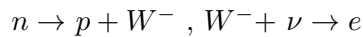
L'interaction nucléaire forte est finalement attribuée aux gluons qui agissent à l'échelle des quarks (Cf. v).

(iv) *L'interaction nucléaire faible.*

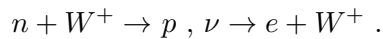
Le modèle explicatif de l'interaction nucléaire faible fut élaboré par Gashow en 1961 qui postula l'existence de trois bosons messagers de cette interaction, les bosons W^+ , W^- et Z^0 .

Ces bosons ont une masse égale environ à 80 fois celle du proton.

L'existence du rayonnement β peut s'expliquer ainsi grâce aux formules suivantes :



ou bien symétriquement :



Comme l'interaction forte, l'interaction nucléaire faible est attribuée à l'action des gluons (Cf v).

Glashow, Salam et Weinberg ont unis dans une même théorie celles du champ électromagnétique et celle de l'interaction faible.

v) *La chromodynamique quantique.* La chromodynamique quantique a été élaborée à l'image de l'électrodynamique quantique.

Ainsi, à la charge électrique - positive ou négative - qui intervient fondamentalement dans l'électrodynamique quantique, correspond la charge de couleur - rouge verte ou bleue, positive ou négative - portée par les quarks.

Au photon, particule messagère de l'interaction électromagnétique, électriquement neutre correspond un ensemble de huit particules *les gluons*, possédant une charge de couleur hybride.

Les quarks changent de couleur en émettant ou absorbant un gluon. Au contraire des photons, ils agissent très fortement les uns sur les autres.

Les quarks, comme les gluons, sont "cachés".

Dans une particule, ils sont étroitement liés par l'échange permanent de gluons entre eux.

Les gluons, comme les photons sont des bosons de spin 1 et de masse nulle.

Comme les photons qui produisent, de façon presque aléatoire, des paires (électron, anti-électron) les gluons se décomposent en paires (quark, antiquark) qui très vite, s'annihilent en donnant de nouveaux gluons.

(vi) *Classement des particules.*

Familles	Familles	Familles	Particules	charges	Spins	Stabilité
			<i>graviton</i>	0	2	<i>stable</i>
			<i>photon</i>	0	1	<i>stable</i>
<i>leptons</i>			<i>électron</i>	+1, -1	$\frac{1}{2}$	<i>stable</i>
			<i>neutrino</i>	0	$\frac{1}{2}$	<i>stable</i>
			<i>muon</i>	+1, -1	$\frac{1}{2}$	
			<i>tauon</i>	+1, -1	$\frac{1}{2}$	
	<i>mésons</i>		<i>pion</i>	+1, -1, 0	0	
			<i>kaon</i>	+1, -1, 0	0	
			<i>éta</i>	0	0	
<i>hadrons</i>	<i>baryons</i>	<i>nucléons</i>	<i>proton</i>	+1, -1	$\frac{1}{2}$	<i>stable</i>
			<i>neutron</i>	0	$\frac{1}{2}$	
		<i>hypérons</i>	<i>lambda</i>	0	$\frac{1}{2}$	
			<i>sigma</i>	+1, -1, 0	$\frac{1}{2}$	
			<i>xi</i>	+1, -1, 0	$\frac{1}{2}$	
			<i>oméga</i>	+1, -1	$\frac{3}{2}$	

On notera que les mésons sont composés de deux quarks et les baryons de trois quarks.

CHAPITRE 9

DE LA MÉCANIQUE CLASSIQUE À LA MÉCANIQUE QUANTIQUE.

9.1 L'équation eikonale en optique géométrique.

Soit ψ la fonction qui décrit l'évolution d'une onde lumineuse se propageant dans un milieu réfringent, loin de toute charge.

ψ est une fonction de la variable d'espace $q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ et du temps $t \in \mathbb{R}$, qui est solution de l'équation des ondes :

$$\frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi = 0$$

où u est la vitesse de la lumière dans le milieu considéré et $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_3^2}$.

Je voudrai déduire de l'équation des ondes, l'équation que doit satisfaire la fonction qui régit la propagation d'un rayon lumineux obéissant aux lois de l'optique géométrique.

Notons θ cette fonction.

et supposons que $\theta = ae^{i\phi}$, où a est une fonction de q et t variant très lentement et $e^{i\phi}$ une fonction de q et t oscillant très rapidement.

Ecrivons que θ vérifie l'équation des ondes. Alors,

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \Delta a \right) + 2i \left(\frac{1}{u^2} \frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \langle \nabla a | \nabla \phi \rangle \right) \right. \\ & \left. + i a \left(\frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi \right) - a \left(\frac{1}{u^2} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^2 - |\nabla \phi|^2 \right) \right] e^{i\phi} = 0 \end{aligned}$$

Des hypothèses faites ci-dessus, il résulte que ϕ doit être solution de l'équation ci-dessous, appelée *équation eikonale* :

$$\frac{1}{u^2} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^2 - |\nabla \phi|^2 = 0$$

qui est indépendante de a .

On peut calculer ϕ en utilisant l'équation eïkonale puis a sachant donc que :

$$2\left(\frac{1}{u^2} \frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \langle \nabla a \nabla \phi \rangle\right) + a\left(\frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi\right) = 0$$

Un cas important est celui où : $\phi(q, t) = \nu(q) t - \phi_1(q)$. Alors :

$$|\nabla \phi|^2 = \frac{\nu^2}{u^2}$$

On notera que si ψ est la fonction d'onde d'une onde plane monochromatique, alors ψ est solution de l'équation eïkonale, car :

$\psi(q, t) = \nu t - (k | q)$ où :

$$|k| = \frac{\nu}{u}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu, \quad \nabla \psi = -k \quad \text{et} \quad \frac{1}{u^2} \nu^2 - k^2 = 0.$$

9.2 L'équation de Hamilton-Jacobi en mécanique analytique.

En Mécanique analytique, l'évolution d'un système dynamique (Σ) peut être modélisée, dans de nombreux cas, par le mouvement d'un point $(q, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ de telle façon que :

Parmi tous les chemins *possibles*, joignant deux points donnés (q^0, t_0) et (q^1, t_1) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, celui qui correspond à l'évolution effective de (Σ) soit une *extrémale* d'une fonctionnelle \mathcal{S} , appelée *action*.

\mathcal{S} est telle que :

Quel que soit le chemin *licite* y reliant (q^0, t_0) à (q^1, t_1) on ait :

$$\mathcal{S}(y) = \int_{t_0}^{t_1} L(s, y(s), \dot{y}(s)) ds \quad \text{où} \quad \dot{y} = \frac{dy}{ds}$$

L est appelé le *Lagrangien* de (Σ) .

Proposition 4 *Supposons que $q = (q_1, \dots, q_n)$, soit une application deux fois différentiable de $[t_0, t_1]$ dans \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}^*$.*

Alors, pour que q soit une extrémale de \mathcal{S} , il faut et il suffit que :

$\forall t \in [t_0, t_1], \forall j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(t, q(t), \dot{q}(s)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}(t, q(t), \dot{q}(s)) \right) = 0.$$

Etant donné $(t, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, désignons par H l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} telle que :

$\forall (t, y, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{H}(t, y, p) = \langle p | v \rangle - L(t, y, v) \quad \text{avec} \quad p = \frac{\partial L}{\partial v}$$

H est appelé l'*hamiltonien* de (Σ) .

H est la transformée de Legendre partielle de L par rapport à son dernier argument.

Proposition et Définition 5 Si q est une extrémale de \mathcal{S} , on a :

$$\mathcal{H}(t, q, p) = \langle p | \dot{q} \rangle - L(t, q, \dot{q}) \quad \text{avec} \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad j \in \{1, \dots, n\}$$

$p = (p_1, \dots, p_n)$ est appelé l'impulsion de (Σ) .

On en déduit que :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

et que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j \in \{1, \dots, n\}$$

(ii)

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = \dot{q}_j, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = -\dot{p}_j, \quad j \in \{1, \dots, n\}$$

D'autre part, avec des conditions de régularité convenables, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_j} &= p_j, \quad j \in \{1, \dots, n\}, \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} &= L - \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j = -\mathcal{H} dt \end{aligned}$$

$$d\mathcal{S} = \sum_{j=1}^n p_j \cdot dq_j - \mathcal{H} dt$$

L'équation

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \mathcal{H}(t, q, p) dt = 0$$

est appelée l'équation de Hamilton-Jacobi.

Exemple 9.2.1 Cas classique (non relativiste), $n = 3$.

$$\mathcal{H} = \frac{|p|^2}{2m} + V(q) \quad \text{est l'énergie totale de } (\Sigma)$$

Exemple 9.2.2 Cas relativiste, $n = 3$.

$$(\mathcal{H} - V(q))^2 = c^2 |p|^2 + m_0^2 c^4 \quad \text{est l'énergie totale de } (\Sigma)$$

et puisque $p = \nabla \mathcal{S}$, on a :

$$\text{dans le cas classique : } |\nabla \mathcal{S}|^2 = 2m(\mathcal{H} - V)$$

$$\text{dans le cas relativiste : } |\nabla \mathcal{S}|^2 = \frac{1}{c^2}(\mathcal{H} - V) - m_0^2 c^2.$$

9.3 Passage de la Mécanique classique à la Mécanique ondulatoire.

Posons : $y_0 = t$, $y_j = q_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}_+^*$ et $y = (t, q)$.

Etant donné $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, considérons la fonction d'onde ψ telle que :

$$\psi(y; \varepsilon) = a(y) e^{\frac{i}{\varepsilon} \mathcal{S}(y)}$$

Alors :

$$i\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial y_k} = \left(i\varepsilon \frac{\partial a}{\partial y_k} - a \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y_k} \right) e^{\frac{i}{\varepsilon} \mathcal{S}(y)}$$

Plus généralement, posons :

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \text{ où } \alpha_j \in \mathbb{N} \quad j \in \{1, \dots, n\} \\ |\alpha| &= \alpha_0 + \dots + \alpha_n \quad \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y_\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y_{\alpha_0} \dots \partial y_{\alpha_n}} \end{aligned}$$

On vérifie facilement que :

$$i\varepsilon \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y_\alpha} \psi = \left[a \frac{\partial^\alpha \mathcal{S}}{\partial y_\alpha} + O(\varepsilon) \right] e^{\frac{i}{\varepsilon} \mathcal{S}(y)}$$

Soit $P(y, i\varepsilon \frac{\partial}{\partial y})$ polynôme à coefficients variables par rapport aux n indéterminées $\frac{\partial}{\partial y_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}$. Alors :

$$P(y, i\varepsilon \frac{\partial}{\partial y}) \psi = P(y, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y}) \psi + O(\varepsilon)$$

On en déduit que l'équation de type Hamilton-Jacobi $P\left(y, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y}\right) \psi = 0$ est *formellement* la limite, lorsque ε tend vers zéro de l'équation $P\left(y, i\varepsilon \frac{\partial}{\partial y}\right) \psi = 0$.

Exemple 9.3.1 ($n = 3$).

$$P(y, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y}) \psi = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y_j} \right)^2 + U(q)$$

Alors, $P(y, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y}) \psi = 0$ est la limite formelle, lorsque ε tend vers zéro, de :

$$\left[i\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\varepsilon^2}{2m} \Delta + U(q) \right] \psi = 0$$

Comme \hbar est "très petit", on pourra considérer que toute solution ψ de l'équation :

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(q) \right] \psi = 0$$

qu'on appelle équation de Schrödinger, est aussi solution de l'équation :

$$P(y, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y}) \psi = 0$$

Exemple 9.3.2 ($n = 3$).

$$P(y, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y}) \psi = \frac{1}{c^2} (\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t})^2 - \sum_{j=1}^3 (\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y_j})^2 - m^2 c^2$$

Comme ci-dessus, on pourra considérer que toute solution ψ de l'équation

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^3 \Delta \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0$$

est aussi solution de l'équation :

$$P(y, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y}) \psi = 0$$

On notera que l'on passe de l'équation

$$P(y, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y}) \psi = 0$$

à l'équation :

$$P(y, i\hbar \frac{\partial}{\partial y}) \psi = 0$$

en remplaçant

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y_k} \text{ par } i\hbar \frac{\partial}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \text{ par } i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \text{ et } p_k \text{ par } i\hbar \frac{\partial}{\partial y_k}, j \in \{1, \dots, n\}$$

9.4 La fonction d'onde en Mécanique quantique.

9.4.1

Établissons, tout d'abord, la permanence de la relation $E = h\nu$ dans tout système galiléen.

Soit \mathcal{R}_0 un repère spatial d'origine O et \mathcal{H}_0 une horloge associée à \mathcal{R}_0 .

On suppose que $(\mathcal{R}_0, \mathcal{H}_0)$ est un repère galiléen de l'espace-temps.

Soit \mathcal{R} un autre repère spatial en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à \mathcal{R}_0 .

On note Ox , l'axe de ce mouvement.

Soit \mathcal{H} une horloge liée à \mathcal{R} telle que $(\mathcal{R}, \mathcal{H})$ soit un repère galiléen de l'espace-temps.

On note u la vitesse de \mathcal{R} par rapport à \mathcal{R}_0 et on pose : $u = \beta c$.

t^0 (resp. t) désignant le temps marqué par \mathcal{H}_0 (resp. \mathcal{H}), on sait que :

$$t^0 = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} (t - \frac{\beta}{c})$$

Considérons une particule σ au repos relativement à \mathcal{R}_0 .

Désignons par ψ_0 (resp. ψ) la fonction d'onde associée à σ dans le repère $(\mathcal{R}_0, \mathcal{H}_0)$ (resp. $(\mathcal{R}, \mathcal{H})$). Alors :

$$\psi_0 = ae^{2i\pi\nu_0 t^0} \text{ et } \psi = ae^{2i\pi\nu(t - \frac{x}{\omega})} \text{ où } \nu = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}\nu_0 \text{ et } \omega = \frac{c}{\beta} = \frac{c^2}{u}$$

Dans $(\mathcal{R}_0, \mathcal{H}_0)$, l'énergie (propre) de σ est $W_0 = m_0 c^2$.

Or, d'après la formule de Planck : $W_0 = h \nu_0$ et donc :

$$\nu_0 = \frac{W_0}{h} = \frac{m_0 c^2}{h}.$$

Dans le repère $(\mathcal{R}, \mathcal{H})$, on aura :

$$\nu = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \nu_0 = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{W_0}{h} = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{m_0 c^2}{h} = \frac{W}{h}$$

où W est l'énergie de σ dans $(\mathcal{R}, \mathcal{H})$.

Il en résulte que, dans tout repère galiléen, la relation $W = h \nu$ est valide.

9.4.2 Analogie entre la phase et l'action.

On suppose que : $\phi(q, t) = \nu(q) t - \phi_1(q)$. On a alors :

$$|\nabla \phi|^2 = \frac{\nu^2}{u^2}$$

Désignons par n , l'indice de réfraction du milieu considéré par rapport au vide (et par c la vitesse de la lumière dans le vide). Alors :

$$n = \frac{c}{u} \quad \text{et} \quad |\nabla \phi|^2 = \frac{\nu^2 n^2}{c^2} = \frac{n^2 W^2}{c^2 h^2} \quad (1)$$

Il existe une analogie étonnante entre la relation (1) et l'une ou l'autre des relations établies dans les exemples précédents, à savoir :

$$|\nabla \mathcal{S}|^2 = 2m(W - V) \quad \text{dans le cas classique} \quad (2')$$

$$|\nabla \mathcal{S}|^2 = \frac{1}{c^2}(W - V)^2 - m_0^2 c^2 \quad \text{dans le cas relativiste} \quad (2'')$$

(W remplaçant H , lorsque W et V ne dépendent que de q).

On peut, donc, identifier (1) et (2') et (2'') en posant :

$$\phi = \hbar^{-1} \mathcal{S} \quad \text{et} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$n^2 = \begin{cases} 4\pi^2 \frac{c^2}{W^2} 2m(W - V) & \text{dans le cas classique} \\ 4\pi^2 \frac{c^2}{W^2} \left[\frac{1}{c^2}(W - V)^2 - m_0^2 c^2 \right] & \text{dans le cas relativiste} \end{cases}$$

Ainsi, la phase joue-t-elle, en optique géométrique, le même rôle que l'action en Mécanique analytique.

Soit $k = -\nabla\phi$ le vecteur d'onde, qui est perpendiculaire au front d'onde.

Puisque $p = \nabla\mathcal{S}$ et $\phi = \hbar^{-1}\mathcal{S}$, on a : $p = \hbar k$.

En remarquant que la longueur d'onde λ , de l'onde considérée est égale à $\frac{v}{\nu}$, on déduit de ce qui précède la *formule de De Broglie* :

$$\lambda = \frac{\hbar}{|p|}$$

CHAPITRE 10

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE DE LA THÉORIE ATOMIQUE.

A. Le modèle de Dirac et Von Neumann.

10.1 Introduction.

La modélisation mathématique de la théorie atomique fut élaborée dans un dialogue constant entre physiciens (théoriciens) et mathématiciens.

Son assise est constituée par un certain nombre de postulats qui ont été validés par de nombreuses expériences dans les multiples domaines d'application de la Mécanique quantique.

Dans toute la suite, $(\mathcal{R}, \mathcal{H})$ désignera un repère galiléen de l'espace-temps. On repèrera un point quelconque M de l'espace-temps au moyen du couple (x, t) où $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, x_1, x_2, x_3 étant les coordonnées spatiales de M relativement à \mathcal{R} et $t \in \mathbb{R}$ étant la coordonnée temporelle relativement à \mathcal{H} .

10.2 La fonction d'onde.

Postulat 1 *A toute particule σ on peut associer une fonction ψ_σ de $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ à valeurs complexes, telle que :*

$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, $|\psi_\sigma|^2$ soit la densité de la probabilité de trouver σ au point x à l'instant t

ψ_σ est appelée la fonction d'onde de σ .

On notera que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}^3} |\psi_\sigma(x, t)|^2 dx = 1$$

puisque, à tout instant, σ se trouve nécessairement en un point de l'espace.

On en déduit facilement que les fonctions d'onde ne sont définies qu'à une phase près.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $|\psi_\sigma(\cdot, t)|$ est un élément de l'espace de Hilbert $(L^2(\mathbb{R}^3), \langle \cdot | \cdot \rangle)$ tel que :

$$\forall (u, v) \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad \langle u | v \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{u(x)} \cdot v(x) dx$$

Les fonctions d'onde que nous considérerons dans la suite n'engendreront pas $L^2(\mathbb{R}^3)$ tout entier mais seulement un sous-espace (pré-)hilbertien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ de $(L^2(\mathbb{R}^3), \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

10.3 Systèmes et états quantiques.

En Mécanique quantique, la notion de fonction d'onde associée à une particule, a joué un rôle essentiel.

Cette notion cependant est apparue trop limitative.

C'est pourquoi, on a introduit deux nouvelles notions, celle de système quantique qui s'est substituée à celle de particule et celle d'état quantique (d'un système quantique) qui s'est substituée à celle de fonction d'onde (d'une particule).

On a été ainsi conduit à formuler le postulat suivant :

Postulat 2 *A tout système quantique \mathcal{S} on peut associer un espace (pré-)hilbertien $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ et à tout état quantique \mathcal{E} de ce système, à chaque instant t , un élément $\psi(\cdot, t)$ de H normalisé (c-à-d) tel que*

$$\forall t, \quad \langle \psi(\cdot, t) | \psi(\cdot, t) \rangle = 1$$

On dira, alors, que $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ (resp. ψ) est une représentation - ou bien représente - \mathcal{S} (resp. \mathcal{E}).

Commentaire :

(i) En Mécanique classique, l'état d'une particule à un instant t est déterminée par six paramètres.

Trois de ces paramètres sont les composantes (dans \mathbb{R}^3) du vecteur qui précise la position de la particule considérée à l'instant t .

Les trois autres paramètres sont les composantes (dans \mathbb{R}^3) du vecteur vitesse de la particule à l'instant t .

Le Postulat 0 implique que l'état d'une particule est déterminé, en Mécanique quantique, par une infinité de paramètres. Ces paramètres sont les valeurs prises par la fonction d'onde ψ , en tout point de l'espace à l'instant t .

(ii) Nous verrons plus loin, qu'aux équations, qui, en Mécanique classique, gouvernent la trajectoire d'une particule, correspond, en Mécanique quantique, l'équation de Schrödinger qui régit la propagation de la fonction d'onde associée à la particule.

Notation 1 *Notation de Dirac :*

Étant donné l'espace de Hilbert $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, Dirac a proposé de noter $|\psi\rangle$ tout élément de H et $\langle \phi|$ la fonctionnelle sur H qui, à tout $\psi \in H$, associe le scalaire (réel ou complexe) $\langle \phi | \psi \rangle$.

Il a nommé $\langle \cdot |$, bra et $|\cdot\rangle$, ket.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\phi, \psi \in H$.

On a évidemment :

$$|\lambda\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \quad \text{et} \quad \langle \lambda\phi| = \bar{\lambda}\langle \phi|.$$

D'autre part, l'application de H dans \mathbb{C} qui, à tout $\psi \in H$ associe $\lambda\psi \in H$ est un opérateur de H et l'on a :

$$\forall \psi \in H, \quad |\psi\rangle \lambda = \lambda|\psi\rangle, \quad \langle \psi| \lambda = \bar{\lambda}\langle \psi|.$$

Si A est un opérateur linéaire de H , alors : $\forall \phi, \psi \in H, \lambda A|\psi\rangle = A\lambda|\psi\rangle$ et $\langle \phi | \lambda |\psi\rangle = \lambda \langle \phi | \psi\rangle = \langle \phi | \psi\rangle \lambda$. Soit \mathcal{V} un sous-espace vectoriel de H engendré par les vecteurs ψ_1, \dots, ψ_m orthonormés dans $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Alors,

$$P_{\mathcal{V}} = \sum_{j=1}^m |\psi_j\rangle \langle \psi_j|$$

est le projecteur de H sur \mathcal{V} , car :

$$\forall \phi \in H, P_{\mathcal{V}}\phi = \sum_{j=1}^m \langle \phi | \psi_j\rangle \langle \psi_j|$$

Nous n'utiliserons pas, dans la suite, les notations de Dirac adoptées par les physiciens ! mais les notations mathématiques usuelles.

10.4 Grandeurs physiques et observables.

10.4.1 L'observable A

Postulat 3 Soit \mathcal{S} un système quantique et $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ l'espace (pré-)hilbertien qui le représente.

A toute grandeur physique \mathcal{A} , liée à \mathcal{S} et mesurable, on peut associer un opérateur linéaire auto-adjoint A de $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ qu'on appelle l'observable représentant \mathcal{A} .

Soit Δ un intervalle de \mathbb{R} (qui peut être réduit à un point), $M(\Delta)$ le sous-espace vectoriel de H engendré par tous les vecteurs propres associés aux valeurs propres de A appartenant à Δ et $P(\Delta)$ le projecteur de $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ sur $M(\Delta)$.

Alors, la probabilité d'obtenir comme résultat de la mesure de \mathcal{A} , (dans l'état (normalisé) $\psi \in H$), une valeur propre de A appartenant à Δ est :

$$\mathcal{P}_{\psi}(\Delta) = \langle \psi | P(\Delta)\psi \rangle = \|P(\Delta)\psi\|^2 = \langle P(\Delta)\psi | \psi \rangle .$$

Exemple 10.4.1 Supposons que les valeurs propres de A , forment un ensemble dénombrable Γ et que : $\Delta = \{\mu_{\alpha}\}$, $\mu_{\alpha} \in \Gamma$.

Soit $\{u_{\alpha}^{\gamma}; \gamma \in \Gamma(\alpha)\}$ une base orthonormée quelconque de $M(\Delta)$. Alors :

$$\mathcal{P}_{\psi}(\cdot) = \sum_{\alpha \in \Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma(\alpha)} |\langle u_{\alpha}^{\gamma} | \psi \rangle|^2$$

Si $P(\lambda)$ désigne le projecteur de $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ sur le sous-espace vectoriel propre $M(\lambda)$ de H , associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ de A , on sait que :

$$I = \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda) \quad \text{et} \quad A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dP(\lambda).$$

Il en résulte que, si $\psi \in H$ est tel que $\|\psi\|^2 = 1$, alors :

$$1 = \langle \psi | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} d(\langle \psi | P(\lambda)\psi \rangle) \quad \text{et} \quad \langle \psi | A\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d(\langle \psi | P(\lambda)\psi \rangle)$$

Ainsi, $\langle \psi | P(\cdot)\psi \rangle$ est une mesure de probabilité et $\langle \psi | A\psi \rangle$ est sa moyenne.
D'où la

Définition 5 (Avec les hypothèses et notations ci-dessus) on appelle valeur moyenne de l'observable A dans l'état quantique normalisé $\psi \in (H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, la quantité : $\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | A \psi \rangle$.

Dans l'exemple considéré ci-dessus,

$$\langle A \rangle_\psi = \sum_{\alpha \in \Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma(\alpha)} \langle \psi | u_\alpha^\gamma \rangle \langle u_\alpha^\gamma | \psi \rangle.$$

En calculant la moyenne d'un "très grand nombre" de mesures de la grandeur physique représentée par A sur des systèmes quantiques dans le même état quantique normalisé $\psi \in (H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, on obtiendrait une "très bonne" approximation de $\langle A \rangle_\psi$.

10.4.2 Représentation de l'observable A .

(i) Le spectre de A est dénombrable.

Soit $\{a_\alpha, \alpha \in J\}$ où $J \subset \mathbb{N}$ le spectre de A .

Le spectre de A constitue une base orthonormée de $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Ainsi : $\forall \alpha \in J, A a_\alpha = \lambda_\alpha a_\alpha, \lambda_\alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall \alpha, \beta \in J, \langle a_\alpha | a_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$.

Si ψ est une fonction d'onde telle que : $\forall t, \psi(\cdot, t) \in H$, alors $\forall t, \psi(\cdot, t)$ peut être identifié à la famille de scalaires $\{\langle a_\alpha | \psi(\cdot, t) \rangle; \alpha \in J\}$ et A peut être identifié à la famille de scalaires $\{\langle a_\alpha | A a_\alpha \rangle; \alpha \in J\}$.

Notons que : $\forall \alpha, \beta \in J, \langle a_\beta | A a_\alpha \rangle = \langle a_\beta | \lambda_\alpha a_\alpha \rangle = \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta}$.

(ii) Deuxième cas : Le spectre de A est continu.

On dira qu'une famille de vecteurs $\{a_\alpha; \alpha \in J\}$ où $J \subset \mathbb{R}$ est une *pseudo-base* orthonormée de $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$,

si elle engendre H et si : $\forall \alpha, \beta \in J, \langle a_\alpha | a_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$.

Supposons que le spectre de A constitue une pseudo-base orthonormée $\{a_\alpha; \alpha \in J, J \subset \mathbb{R}\}$ de $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Si ψ est une fonction d'onde telle que : $\forall t, \psi(\cdot, t) \in H$, alors $\forall t, \psi(\cdot, t)$ peut être identifié à la famille de scalaires $\{\langle a_\alpha | \psi(\cdot, t) \rangle; \alpha \in J\}$

et A peut être identifié à la famille de scalaires $\{\langle a_\alpha | A a_\alpha \rangle; \alpha \in J\}$.

Commentaire : Avec les notations de Dirac, on écrira :

$\forall \alpha \in J, A | a_\alpha \rangle = \lambda_\alpha | a_\alpha \rangle$ et

$$A = \sum_{\alpha \in J} \lambda_\alpha (| a_\alpha \rangle \langle a_\alpha |)$$

Cette dernière somme est égale à une intégrale relativement à une mesure convenable sur \mathbb{R} lorsque $J \subset \mathbb{R}$.

Postulat 4 (réduction du paquet d'ondes) :

(Avec les hypothèses et notations ci-dessus), l'état d'un système quantique représenté par $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ après une mesure ayant donné le résultat $\mu_\alpha, \alpha \in \Gamma$, est représenté par l'élément normalisé :

$$\frac{P(\mu_\alpha)\psi}{\langle \psi | P(\mu_\alpha)\psi \rangle} \in M(\alpha).$$

10.5 Les observables Q et P .

10.5.1 L'observable Q .

Soit ψ la fonction d'onde représentant un état quantique d'une particule σ .

On sait que $|\psi(\cdot, t)|^2$ est la densité de la probabilité de trouver σ au point $q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$, à l'instant t . Donc,

$$\int_{\mathbb{R}^3} q_j |\psi(q, t)|^2 dq$$

est la j^e composante de la mesure de probabilité $|\psi(\cdot, t)|^2$, $j \in \{1, 2, 3\}$. Posons :

$$D_j = \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}^3); \int_{\mathbb{R}^3} q_j |\psi(q, t)|^2 dq < +\infty, j \in \{1, 2, 3\} \right\}$$

Soit Q_j l'observable représentant la grandeur physique *valeur de la j^e composante de la position d'une particule, à l'instant donné t* , $j \in \{1, 2, 3\}$. Alors :

$$\forall j \in \{1, 2, 3\}, \quad \forall \psi \in D_j, \quad \langle Q_j \rangle_\psi = \langle \psi | Q_j \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} q_j |\psi(q, t)|^2 dq$$

ou ce qui est équivalent :

$$\forall j \in \{1, 2, 3\}, \quad \forall \psi \in D_j, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi(q, t)} [(Q_j \psi)(q, t) - q_j \psi(q, t)] dq = 0$$

Si D_j est dense dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, nous déduisons de la relation ci-dessus que :

$$\forall q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}, \quad \forall \psi \in D_j \quad Q_j \psi - q_j \psi = 0$$

Définition 6 *Quel que soit $j \in \{1, 2, 3\}$, l'opérateur Q_j de domaine D_j , est appelé "opérateur de multiplication par q_j ".*

10.5.2 L'observable P .

10.5.2.1 Rappels.

(i) (En optique ondulatoire) l'évolution d'une onde plane est décrite par une fonction θ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \theta(x, t) = \exp i(x | k) - \omega t$$

où $(\cdot | \cdot)$ est le produit scalaire euclidien canonique de \mathbb{R}^3 , k est le vecteur d'onde orthogonal au plan d'onde et ω la pulsation de l'onde.

L'évolution d'un "paquet d'ondes planes" (superposition linéaire d'une infinité d'ondes planes) est décrite par une fonction ψ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \psi(x, t) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \exp i(x | k) - \omega(k)t g(k) dk$$

où $g \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

On vérifie immédiatement que $\psi(\cdot, 0)$ est la *transformée de Fourier* de g dans \mathbb{R}^3 .

- (ii) Louis de Broglie a montré qu'entre l'impulsion p d'une particule subatomique et le vecteur d'onde k de l'onde qui lui est associée, il existe la relation suivante :

$$p = \hbar \cdot k \quad \text{où} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Alors, la pulsation ω de l'onde est telle que :

$$\omega = \frac{p^2}{2m\hbar}$$

m étant la masse de la particule.

Ainsi, l'évolution d'une onde plane associée à une particule d'impulsion p et de masse m est-elle décrite par une onde ζ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \zeta(x, t) = \exp i \left[\frac{(\eta | p)}{\hbar} - \frac{p^2}{2m\hbar} t \right]$$

10.5.2.2 L'observable P .

Des remarques faites au paragraphe ci-dessus, on déduit la

Définition 7 On appelle impulsion d'une particule subatomique, de fonction d'onde ψ , à l'instant t , l'état quantique de cette particule représenté par la fonction d'onde ϕ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \phi(x, t) = (h)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i \frac{(p|q)}{\hbar}} \psi(q, t) dq.$$

$\phi(\cdot, t)$ se déduit donc de $\psi(\cdot, t)$ par une transformation de Fourier.

Notons (p_1, p_2, p_3) les composantes de l'impulsion p de la particule subatomique considérée.

$\forall j \in \{1, 2, 3\}$, p_j est une grandeur physique.

Définition 8 Quel que soit $j \in \{1, 2, 3\}$, on désignera par P_j , l'observable qui représente p_j et par D_j son domaine.

Notons, de façon générale, $\hat{\theta}$ la transformée de Fourier de θ , lorsqu'elle existe). Alors :

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1, 2, 3\}, \quad \forall \phi \in D_j, \quad \langle P_j \rangle_\phi &= \int_{\mathbb{R}^3} p_j |\phi(p, t)|^2 dp = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\phi(p, t)} p_j \phi(p, t) dp \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi(\cdot, t)} \hat{\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_j} \psi(\cdot, t) \right)} (p) dp = \int_{\mathbb{R}^3} \psi(q, t) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_j} \psi(q, t) \right) dq \end{aligned}$$

D'où, il résulte que :

$$\forall j \in \{1, 2, 3\}, \quad P_j = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_j} \quad \text{et donc} \quad P = \frac{\hbar}{i} \nabla_q$$

On notera l'analogie entre cette formule et celle que nous avons obtenue en Mécanique.

10.5.3 La relation d'incertitude de Heisenberg.

Soit A une observable quelconque de $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

On posera, dans la suite :

$\forall \psi \in (H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ tel que $\langle \psi | \psi \rangle = 1$, $\sigma_\psi(A) = (\langle A^2 \rangle_\psi - (\langle A \rangle_\psi)^2)^{\frac{1}{2}}$.

Des propriétés de la transformée de Fourier, on déduit que :

$$\forall j \in \{1, 2, 3\}, \quad \forall \psi \in (H, \langle \cdot | \cdot \rangle), \quad \langle \psi | \psi \rangle = 1, \quad \sigma_\psi(P_j) \cdot \sigma_\psi(Q_j) \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Cette relation est appelée la relation d'incertitude de Heisenberg.

10.5.4 Relations de commutation.

On vérifie facilement que : $\forall j, k \in \{1, 2, 3\}, [Q_j, Q_k] = [P_j, P_k] = 0$.

D'autre part :

$\forall \psi \in (H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, ψ différentiable sur \mathbb{R}^3 , $\forall j \in \{1, 2, 3\}$,

$$\begin{aligned} (Q_j P_k - P_j Q_k) \psi &= Q_j \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial q_k} - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial (Q_j \psi)}{\partial q_k} \\ &= \frac{\hbar}{i} \left(q_j \frac{\partial \psi}{\partial q_k} - \frac{\partial (q_j \psi)}{\partial q_k} \right) = i \hbar \delta_{jk} \psi \end{aligned}$$

Si l'on désigne par I_H l'opérateur identité de H , on a donc :

$$\forall j, k \in \{1, 2, 3\}, \quad [Q_j, P_k] = i \hbar \delta_{jk} I_H$$

On dit que les observables P et Q sont des *observables conjuguées*.

10.5.5 Représentations de Q et P .

Pour simplifier l'écriture des formules, dans la suite, nous supposerons que Q (resp. P) ne comporteront qu'une seule composante que nous noterons encore Q (resp. P).

(i) Représentation de Q .

Du postulat 2 énoncé plus haut, il résulte que tout scalaire $q \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de l'observable Q associée à un vecteur propre $|q\rangle$.

Ainsi : $\forall q \in \mathbb{R}, Q |q\rangle = q |q\rangle$ et $\forall q, q' \in \mathbb{R}, \langle q' | q \rangle = \delta_{qq'}$. De plus :

$$\int_{\mathbb{R}} |q\rangle \langle q| dq \quad \text{est égal à l'opérateur identité de } (H, \langle \cdot | \cdot \rangle).$$

Se donner une fonction d'onde ψ telle que : $\forall t, \psi(\cdot, t) \in H$, est équivalent à se donner la famille de scalaires $\{\langle q | \psi(\cdot, t) \rangle; q \in \mathbb{R}\}$.

Remarque importante :

Usuellement, on écrit : $\forall q \in \mathbb{R} \langle q | \psi(\cdot, t) \rangle = \psi(q, t)$.

Supposons que $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle) \in \text{Hilb}(\mathbb{C}^{\mathbb{R}})$ et désignons par \tilde{H} son noyau hilbertien. Alors : $\forall q \in \mathbb{R}, \psi(q, t) = \langle \tilde{H}(q, \cdot) | \psi(\cdot, t) \rangle$.

Or, $\tilde{H}(q, \cdot)$ est différent de $\langle q |$; il en résulte qu'écrire $\langle q | \psi(\cdot, t) \rangle = \psi(q, t)$ c'est faire un *abus de langage*.

(ii) **Représentation de P** . Comme au paragraphe (i) ci-dessus, on peut dire que tout scalaire $p \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de l'observable P associée à un vecteur propre $|p\rangle$ et l'on a : $\forall p \in \mathbb{R}, P|p\rangle = p|p\rangle$ et $\forall p, p' \in \mathbb{R}, \langle p'|p\rangle = \delta_{pp'}$. De plus :

$$\int_{\mathbb{R}} |p\rangle \cdot \langle p| dp \text{ est égal à l'opérateur identité de } (H, \langle \cdot | \cdot \rangle).$$

Se donner une fonction d'onde ψ telle que : $\forall t, \psi(\cdot, t) \in H$, est équivalent à se donner la famille de scalaires $\{\langle p | \psi(\cdot, t) \rangle ; p \in \mathbb{R}\}$.

Usuellement, on écrit : $\forall p \in \mathbb{R}, \langle p | \psi(\cdot, t) \rangle = \psi(p, t)$, ce qui est un abus de langage.

De la relation qui existe entre la fonction d'onde d'une particule et son impulsion, on déduit que :

$$\langle q | p \rangle = (\hbar)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{iq \cdot p}{\hbar}\right)$$

10.6 Evolution d'un système quantique en Mécanique quantique non relativiste en l'absence de spin.

10.6.1 Postulat 4 (Equation de Schrödinger non relativiste) :

Soit \mathcal{S} un système quantique représenté par un espace (pré-)hilbertien $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Considérons un état de \mathcal{S} , évoluant avec le temps $t \in \mathbb{R}$, en l'absence de spin, dans un cadre non relativiste, et représenté par un élément $\psi(\cdot, t) \in (H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Tant que \mathcal{S} n'est soumis à aucune observation, l'évolution de ψ est régie par l'équation de Schrödinger (non relativiste) :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

où H est l'observable représentant l'énergie totale de \mathcal{S} .

10.6.2 La relation d'Ehrenfest :

(Avec les hypothèses et notations ci-dessus) soit A une observable de $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ et $\psi(\cdot, t)$ un élément normalisé de $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, représentant un état quantique dépendant du temps $t \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\frac{d}{dt}(\langle A \rangle_{\psi}) = \frac{d}{dt}(\langle \psi | A \psi \rangle) = \left\langle \frac{d\psi}{dt} | A \psi \right\rangle + \left\langle \psi | \frac{\partial A}{\partial t} \psi \right\rangle + \left\langle \psi | A \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle$$

Si

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi,$$

on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\langle A \rangle_{\psi}) &= \frac{i}{\hbar} \langle H\psi | A \psi \rangle + \left\langle \psi | \frac{\partial A}{\partial t} \psi \right\rangle - \frac{i}{\hbar} \langle \psi | A H \psi \rangle \\ &= \left\langle \psi | \frac{\partial A}{\partial t} \psi \right\rangle + \frac{i}{\hbar} \langle \psi | [H, A] \psi \rangle \end{aligned}$$

Lorsque A ne dépend pas de t , on obtient la relation d'Ehrenfest :

$$\frac{d}{dt}(\langle A \rangle_{\psi}) = \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle_{\psi}$$

10.7 L'observable associée au moment cinétique.

10.7.1 L'observable L

Ci-dessous, on supposera que le repère \mathcal{R} par rapport auquel on repèrera tout point $q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ de l'espace est orthonormal et on notera o son origine.

Définition 9 On appelle moment cinétique par rapport à o d'un corpuscule, d'impulsion p au point q , la grandeur : $l = q \wedge p$.

A cette grandeur mesurable l est associée une observable L telle que $L = Q \wedge P$.

Soit L_1, L_2, L_3 les composantes de L . On a :

$L_1 = [Q_2, P_3]$, $L_2 = [Q_3, P_1]$, $L_3 = [Q_1, P_2]$. Ainsi :

$$L_1 = \frac{\hbar}{i} \left(q_2 \frac{\partial}{\partial q_3} - q_3 \frac{\partial}{\partial q_2} \right), L_2 = \frac{\hbar}{i} \left(q_3 \frac{\partial}{\partial q_1} - q_1 \frac{\partial}{\partial q_3} \right), L_3 = \frac{\hbar}{i} \left(q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} - q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} \right)$$

10.7.2 Relations entre L_1, L_2, L_3

Proposition 6 $[L_1, L_2] = i\hbar L_3$, $[L_2, L_3] = i\hbar L_1$, $[L_3, L_1] = i\hbar L_2$.

Preuve :

$$[L_1, L_2] = L_1 L_2 - L_2 L_1 = \frac{\hbar}{i} \left[L_1 \left(q_3 \frac{\partial}{\partial q_1} - q_1 \frac{\partial}{\partial q_3} \right) - \left(q_3 \frac{\partial}{\partial q_1} - q_1 \frac{\partial}{\partial q_3} \right) L_1 \right]$$

Comme :

$$\frac{\partial}{\partial q_1} L_1 = L_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \text{ on a :}$$

$$[L_1, L_2] = (L_1 q_3 - q_3 L_1) \frac{\partial}{\partial q_1} - q_1 \left(L_1 \frac{\partial}{\partial q_3} - \frac{\partial}{\partial q_3} L_1 \right)$$

On montre facilement que :

$$(L_1 q_3 - q_3 L_1) \frac{\partial}{\partial q_1} = \frac{\hbar}{i} q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} \text{ et } q_1 \left(L_1 \frac{\partial}{\partial q_3} - \frac{\partial}{\partial q_3} L_1 \right) = \frac{\hbar}{i} q_1 \frac{\partial}{\partial q_2}$$

Il en résulte que :

$$[L_1, L_2] = \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \left(q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} - q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} \right) = \frac{\hbar}{i} L_3$$

Par permutation circulaire des indices 1, 2, 3, dans la formule ci-dessus, on obtient les deux autres résultats annoncés.

On montre facilement la

Proposition 7 Proposition

Posons : $\mathcal{L}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$

$L_+ = L_1 + iL_2$, $L_- = L_1 - iL_2$. Alors :

(i) $\forall j \in \{1, 2, 3\}, [\mathcal{L}^2, L_j] = 0$.

(ii) $[L_+, L_-] = 2L_3$, $[L_3, L_+] = L_+$, $[L_3, L_-] = -L_-$ et $\mathcal{L}^2 = L_+ L_- + L_3^2 - L_3 = L_- L_+ + L_3^2 + L_3$.

10.7.3 Valeurs propres de \mathcal{L}^2 et L_3

Proposition 8 (i) *Les seules valeurs propres possibles de \mathcal{L}^2 sont de la forme $j(j+1)$ où $2j \in \mathbb{N}$*

(ii) *Les seules valeurs propres possibles de L_3 sont les nombres m tels que $2m \in \mathbb{Z}$ (\mathbb{Z} étant l'ensemble des entiers relatifs).*

(iii) *Si $j(j+1)$ et m sont les seules valeurs propres respectivement de \mathcal{L}^2 et L_3 relatives à un état quantique du moment cinétique d'une particule, alors les seules valeurs possibles de m sont les $(2j+1)$ valeurs : $-j, -j+1, \dots, j-1, j$.*

Remarque 2 *La proposition ci-dessus est vraie pour toute observable $J = (J_1, J_2, J_3)$ telle que : $[J_1, J_2] = i\hbar J_3$, $[J_2, J_3] = i\hbar J_1$, $[J_3, J_1] = i\hbar J_2$.*

Proposition 9 *Si L est l'observable associée au moment cinétique orbital d'une particule et si $j(j+1)$ (resp. m) sont les valeurs propres de l'observable \mathcal{L}^2 (resp. L_3), alors nécessairement : $j \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$.*

10.8 Spin et spineur.

10.8.1 L'expérience de Stern et Gerlach (1922).

Cette expérience avait pour objectif de mesurer le moment magnétique (intrinsèque) d'un atome d'argent. Décrivons-la sommairement. Dans un creuset, on faisait chauffer un échantillon d'argent de sorte que, lorsque la température était assez élevée, s'échappaient du creuset des atomes d'argent vaporisés.

La trajectoire de chacun de ces atomes étant rectiligne, on sélectionnait par un dispositif approprié les atomes dont la vitesse était parallèle à une direction Δ .

On obtenait ainsi un jet d'atomes d'argent auquel on imposait de traverser l'entrefer d'un électro-aimant d'axe Δ , avant que ce jet ne se condense sur un écran.

Stern et Gerlach déduisaient des lois qui régissent la Mécanique classique que, lorsque le champ magnétique \mathcal{B} régnant dans l'entrefer croissait à partir de zéro, le jet d'atomes d'argent obtenu devait se condenser sur l'écran en formant une tache circulaire de centre a fixe et de rayon croissant.

Lorsque \mathcal{B} était nul leur prévision était validée par l'expérience mais elle était infirmée lorsque \mathcal{B} était différent de zéro.

Dans ce cas apparaissaient deux taches circulaires bien distinctes, de même rayon et symétriques par rapport à a

10.9 Algèbre de Clifford. Matrices de Dirac.

10.9.1 Application de Clifford.

Définition 10 *Soit \mathcal{A} une algèbre associative, unitaire, sur un corps commutatif \mathbb{K} .*

On notera $1_{\mathcal{A}}$ l'élément neutre de la multiplication sur \mathcal{A} .

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} et g une forme quadratique sur E .

On pose : $\forall x \in E, \quad q(x) = g(x, x)$.

Alors : $\forall x, y \in E, \quad g(x, y) = \frac{1}{2} [q(x + y) - q(x) - q(y)]$.

On appelle application de Clifford de (E, q) dans \mathcal{A} , toute application linéaire ϕ de E dans \mathcal{A} telle que : $\forall x \in E, (\phi(x))^2 = q(x) \cdot 1_{\mathcal{A}}$.

Exemples 10.9.1 (i) $E = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathbb{C}$. Posons : $\forall x \in \mathbb{R}, (\phi(x))^2 = -x^2 = q(x)$.

ϕ est donc une application de Clifford de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

(ii) Soit \mathbb{K} un corps commutatif, E un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension 1.

Soit $\mathcal{A} = \mathbb{K}(2)$, l'ensemble des matrices de type 2×2 dont les éléments appartiennent à

\mathbb{K} . Posons : $\forall x = \lambda e \in E, \quad q(x) = \alpha \lambda^2, \alpha \in \mathbb{K}$ et $\phi(e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

Alors : $\forall x = \lambda e \in E, (\phi(x))^2 = (\lambda \phi(e))^2 = \lambda^2 (\phi(e))^2 = \lambda^2 \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = q(x) 1_{\mathcal{A}}$.

ϕ est donc une application de Clifford de E dans $\mathbb{K}(2)$.

(iii) On suppose que E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension 3 et que $\mathcal{A} = \mathbb{C}_{\mathbb{R}}(2)$ est l'algèbre sur \mathbb{R} des matrices de type 2×2 dont les éléments appartiennent à \mathbb{C} .

(e_1, e_2, e_3) étant une base de E , posons :

$\phi(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \phi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \phi(e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Alors :

$\forall x \in E, x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in E, q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. et :

$$\begin{aligned} (\phi(x))^2 &= \left[\begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \right]^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = q(x) \cdot 1_{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

ϕ est donc une application de Clifford de E dans $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}(2)$.

Remarque :

De ce qui précède, on déduit que :

$$\begin{aligned} (\phi(e_1))^2 &= (\phi(e_2))^2 = (\phi(e_3))^2 = 1_{\mathcal{A}}, \\ \phi(e_1) \cdot \phi(e_2) &= -\phi(e_2) \cdot \phi(e_1) = i\phi(e_3), \\ \phi(e_2) \cdot \phi(e_3) &= -\phi(e_3) \cdot \phi(e_2) = i\phi(e_1), \\ \phi(e_3) \cdot \phi(e_1) &= -\phi(e_1) \cdot \phi(e_3) = i\phi(e_2). \end{aligned}$$

Les matrices $\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)$ sont appelées matrices de Pauli.

(iv) On suppose que E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension 4.

(e_0, e_1, e_2, e_3) étant une base de E , posons :

$\forall x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in E, q(x) = x_0^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$.

et soit $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\forall x = \sum_{j=0}^3 x_j X_j = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{X} = x_0 X_0 - (x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3) = \begin{pmatrix} x_0 - x_3 & -(x_1 - ix_2) \\ -(x_1 + ix_2) & x_0 + x_3 \end{pmatrix}$$

Posons :

$$\forall x = \sum_{j=0}^3 x_j e_j \in E, \quad \phi(x) = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{X} \\ \tilde{X} & 0 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$(\phi(x))^2 = \begin{pmatrix} X\tilde{X} & 0 \\ 0 & \tilde{X}X \end{pmatrix} = q(x).I_4$$

où I_4 est la matrice unité de type 4×4 à éléments complexes .

On en déduit que ϕ est une application de Clifford de E dans l'espace vectoriel des matrices de type 4×4 à éléments complexes dont l'image est engendrée par les matrices

$$\phi(e_j) = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{X}_j \\ \tilde{X}_j & 0 \end{pmatrix}, j \in \{0, 1, 2, 3\}, \text{ qu'on appelle matrices de Dirac.}$$

10.9.2 Algèbre de Clifford

Nous utiliserons ci-dessous, les mêmes hypothèses et notations qu'au paragraphe précédent. Etant donné $p \in \mathbb{N}^*, p \geq 2$, nous noterons $E^{\otimes p}$, le produit tensoriel de p copies de E .

Nous poserons :

$$E^{\otimes 0} = \mathbb{K}, \quad E^{\otimes 1} = E, \quad E^{\otimes} = \bigoplus_{p=0}^{\infty} (E^{\otimes p})$$

Notons que : E^{\otimes} a une structure d'algèbre sur \mathbb{K} .

Définition et Théorème 10.9.1 Etant donné l'espace vectoriel E sur \mathbb{K} et la forme quadratique q sur E , désignons par \mathcal{J}_q l'idéal bilatère de l'algèbre E^{\otimes} engendré par la famille $\{x \otimes x - q(x).1_{\mathbb{K}} : x \in E\}$.

Désignons par $C(E, q)$ l'algèbre quotient de E^{\otimes} par \mathcal{J}_q et soit ϕ_C l'application canonique de E^{\otimes} sur $C(E, q)$. Alors :

(i) ϕ_C est une application de Clifford injective de (E, q) sur $C(E, q)$

(ii) Si ϕ est une application de Clifford de (E, q) dans une algèbre associative et unitaire \mathcal{A} on a le schéma commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (E, q) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{A} \\ \phi_C \searrow & & \uparrow \\ & & C(E, q) \end{array}$$

où ϕ est un homomorphisme de l'algèbre $C(E, q)$ dans l'algèbre \mathcal{A} .

(iii) Si $\dim(E) = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\dim(C(E, q)) = 2^n$.

De plus, si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , alors $\mathbf{1}_A \cup \{\phi(e_{j_1}) \dots \phi(e_{j_p}), 1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n\}$ est une base de $C(E, q)$.

$C(E, q)$ est appelée l'**algèbre de Clifford** associée à (E, q) .

Exemple 10.9.2

Mêmes hypothèses et notations qu'à l'exemple (ii) donné plus haut.

Puisque $\dim(E) = 1$, on a : $\dim(C(E, q)) = 2$.

Alors, $C(E, q)$ est engendré par les deux matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$a \in C(E, q) \Leftrightarrow a = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu \alpha & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

D'autre part,

$$(\lambda I + \mu T)(\lambda I - \mu T) = (\lambda^2 - \mu^2 \alpha) I$$

Donc, si α n'est pas un carré, alors $C(E, q)$ est un corps.

Lorsque $\alpha = -1$, $C(E, q)$ est isomorphe à \mathbb{C} .

(ii) Mêmes hypothèses et notations qu'à l'exemple plus haut (iii).

Puisque $\dim(E) = 3$, on a : $\dim(C(E, q)) = 2^3 = 8$.

Alors, $C(E, q)$ est engendré par les matrices suivantes :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \phi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \phi(e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (10.1)$$

avec : $\phi(e_1)\phi(e_2) = \phi(e_3)$, $\phi(e_1)\phi(e_3) = -\phi(e_2)$, $\phi(e_2)\phi(e_3) = \phi(e_1)$,
 $\phi(e_1)\phi(e_2)\phi(e_3) = I$.

$C(E, q)$ est isomorphe à l'algèbre des matrices de type 2×2 à éléments complexes.

(iii) Mêmes hypothèses et notations qu'à l'exemple (iv) plus haut. Puisque $\dim(E) = 4$, on a :
 $\dim(C(E, q)) = 2^4 = 16$.

Alors, $C(E, q)$ est engendré par la matrice I_4 et les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} \phi(e_j) &= \begin{pmatrix} 0 & X_j \\ \tilde{X}_j & 0 \end{pmatrix}, \quad j \in \{0, 1, 2, 3\} \\ \phi(e_j)\phi(e_k) &= \begin{pmatrix} X_j \tilde{X}_k & 0 \\ 0 & \tilde{X}_j X_k \end{pmatrix}, \quad j, k \in \{0, 1, 2, 3\}, j < k \\ \phi(e_j)\phi(e_k)\phi(e_l) &= \begin{pmatrix} X_j \tilde{X}_k \tilde{X}_l & 0 \\ 0 & \tilde{X}_j X_k \tilde{X}_l \end{pmatrix}, \quad j, k, l \in \{0, 1, 2, 3\}, j < k < l \\ \phi(e_0)\phi(e_1)\phi(e_2)\phi(e_3) &= \begin{pmatrix} X_0 \tilde{X}_1 X_2 \tilde{X}_3 & 0 \\ 0 & \tilde{X}_0 X_1 \tilde{X}_2 X_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Proposition 10 *Si q est une forme quadratique régulière sur E , alors $C(E, q)$ est une algèbre simple ou la somme directe de deux algèbres simples.*

10.10 Spineurs

(Cf. R. Deheuvels, Tenseurs et spineurs).

Définition 11 *Soit \mathcal{A} une algèbre associative, unitaire sur un corps commutatif \mathbb{K} . On appelle **représentation linéaire** de \mathcal{A} dans un espace vectoriel M (de dimension finie) un homomorphisme ρ de \mathcal{A} dans l'algèbre $L(M)$ sur \mathbb{K} . On dit que la représentation ρ est **fidèle** si elle est injective. Étant donné $a \in \mathcal{A}$, notons am l'image par $\rho(a)$ d'un élément quelconque $m \in M$.*

On a : $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)m = a(bm)$.

*On dit, ainsi, que M est un \mathcal{A} -module (à gauche). Un \mathcal{A} -module est **simple** s'il ne contient aucun autre sous-module que lui-même et $\{0\}$. Dans ce cas, on dit que la représentation ρ de \mathcal{A} dans M est **irréductible**.*

*Un \mathcal{A} -module est **semi-simple** s'il est somme directe de sous- \mathcal{A} -modules simples. Dans ce cas, on dit que la représentation ρ de \mathcal{A} dans M est **complètement réductible**.*

*Un \mathcal{A} -module est **fidèle** si la représentation ρ de \mathcal{A} dans M est injective.*

Théorème 10.10.1 *Toute algèbre simple \mathcal{A} , sur un corps commutatif \mathbb{K} , est isomorphe à l'algèbre des endomorphismes (à droite) d'un espace vectoriel M sur un corps Γ - éventuellement non commutatif - qui est une extension de \mathbb{K} , ou ce qui est équivalent :*

si la dimension de M relativement à Γ est égale à $p \in \mathbb{N}^$, alors \mathcal{A} est isomorphe à l'algèbre des matrices de type $p \times p$ dont les éléments appartiennent à Γ .*

Il en résulte que si $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$ (resp. $\dim_{\mathbb{K}}(\Gamma)$) est la dimension de \mathcal{A} relativement à \mathbb{K} (resp. Γ), alors $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}) = p^2 \dim(\mathcal{A})$.

De la proposition établie ci-dessus, on déduit le

Corollaire 1 *Si q est une forme quadratique régulière sur un espace vectoriel E , alors l'algèbre de Clifford $C(E, q)$ est isomorphe à une algèbre de matrices ou bien à la somme directe de deux algèbres de matrices isomorphes, sur un corps non nécessairement commutatif selon que $C(E, q)$ est simple ou semi-simple.*

Théorème 10.10.2 *Soit \mathcal{A} une algèbre associative, unitaire sur un corps commutatif \mathbb{K} . Supposons que \mathcal{A} soit semi-simple et somme directe des algèbres simples $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_p$ ($p \in \mathbb{N}$). Il existe donc $e_1 \in \mathcal{A}_1, \dots, e_p \in \mathcal{A}_p$ tels que : $1_{\mathcal{A}} = e_1 + \dots + e_p$. Alors :*

(i) *Tout \mathcal{A} -module M est somme directe des sous- \mathcal{A} -modules $e_j M$.*

(ii) *Si M est un \mathcal{A} -module fidèle, alors quel que soit $j \in \{1, \dots, p\}$, il existe un \mathcal{A}_j -module simple M_j tel que $M_j \subset e_j M$.*

(iii) *Il existe un seul \mathcal{A} -module fidèle minimal \mathcal{B} - à un isomorphisme près - qui est somme de p modules simples M_1, \dots, M_p , où M_j est un module simple de la sous-algèbre \mathcal{A}_j de \mathcal{A} , $j \in \{1, \dots, p\}$.*

(iv) *Les modules simples M_1, \dots, M_p sont les seuls sous-modules simples de \mathcal{B} .*

Corollaire 2 *Si q est une forme quadratique régulière sur un espace vectoriel E , alors l'algèbre de Clifford $C(E, q)$ possède un module fidèle minimal unique $B(E, q)$ qui est soit simple soit somme directe de deux sous-modules simples selon que $C(E, q)$ est simple ou non.*

Définition 12 *Soit (E, q) un espace quadratique régulier. On appelle **spineur** relativement à (E, q) , tout module fidèle minimal de l'algèbre de Clifford $C(E, q)$ associée à (E, q) .*

*Lorsque ce spineur est somme directe de deux sous-modules simples, ces derniers sont appelés **espaces de demi-spineurs**.*

Exemple 10.10.1 *(i) Mêmes hypothèse et notations qu'à l'exemple (ii) ci-dessus. Alors $B(E, q)$ est isomorphe à \mathbb{C}^2 .*

(ii) Mêmes hypothèse et notations qu'à l'exemple (iii) ci-dessus. Alors $B(E, q)$ est isomorphe à \mathbb{C}^4 .

10.11 L'interprétation de L. Schwartz.

(Cf. Application des distributions à l'étude des particules élémentaires en Mécanique quantique relativiste.)

Pour simplifier l'exposé, nous présenterons ce point de vue, ci-dessous, dans le cas d'une particule scalaire.

Considérons donc une particule scalaire de spin nul associée à un espace hilbertien $(K, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Notons $\|\cdot\|$ la norme de $(K, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Soit E_4 un espace affine à quatre dimensions.

On notera (x_0, x_1, x_2, x_3) les coordonnées d'un point quelconque $x \in E_4$. (x_1, x_2, x_3) sont des variables spatiales, $x_0 = ct$ où c est la vitesse de la lumière et t la variable temporelle.

Soit $D'(E_4)$ l'espace des fonctions complexes, indéfiniment différentiables, à support compact dans E_4 , muni de sa topologie localement convexe canonique.

De ce qui précède il résulte que $(K, \langle \cdot | \cdot \rangle) \in \text{Hilb}(D'(E_4))$.

Désignons par \widetilde{K} le noyau hilbertien de $(K, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ relatif à $D'(E_4)$.

On sait que $\widetilde{K} \in D'(E_4 \times E_4)$.

On montre que : $\forall x, y \in E_4, \widetilde{K}(x, y) = F(x - y)$.

On sait, d'autre part, que : $\forall \varphi \in D(E_4), \langle \langle \widetilde{K} \varphi \otimes \varphi \rangle \rangle \geq 0$.

Du théorème classique de Bochner, il résulte que la transformée de Fourier de F est une mesure positive.

Supposons qu'il existe un groupe d'opérateurs \mathcal{G} sur K (groupe de translations, groupe de Lorentz) tel que :

$$\forall \psi \in K, \forall \sigma \in \mathcal{G}, \|\sigma\psi\| = \|\psi\|.$$

L. Schwartz appelle *particule élémentaire* tout sous-espace hilbertien de $D'(E_4)$ qui est minimal (c-à-d qui ne contient strictement aucun sous-espace hilbertien de $D'(E_4)$).

La liste des particules élémentaires s'obtient par transformation de Fourier de mesures positives.

Plus généralement, les particules possédant un spin sont identifiées aux sous-espaces hilbertiens de $D'(E_4) \otimes F$, ($\dim(F)$ étant égal au spin de la particule) ou bien à un noyau positif appartenant à $D'(E_4 \times E_4) \otimes F \otimes F$.

II. Bosons et fermions.

10.12 n - systèmes quantiques. Bosons et fermions. Espaces de Fock.

10.12.1 Produit tensoriels d'espaces (pré-)hilbertiens.

Définition 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(H_j, \langle \cdot | \cdot \rangle_j)$, $j = 1, \dots, n$, n espaces (pré-) hilbertiens.

On appelle produit tensoriel des espaces $(H_j, \langle \cdot | \cdot \rangle_j)$, $j = 1, \dots, n$, l'espace (pré-) hilbertien $(K, \langle \langle \cdot | \cdot \rangle \rangle_n)$ engendré par les vecteurs du type :

$(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = \otimes_{j=1}^n x_j$ où $x_j \in H_j$, $j = 1, \dots, n$, tel que :

$$\forall x = \otimes_{j=1}^n x_j, \quad \forall y = \otimes_{j=1}^n y_j, \quad \langle \langle x | y \rangle \rangle_n = \prod_{j=1}^n \langle x_j | y_j \rangle_j$$

10.12.2 n -systèmes quantiques.

Définition 14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dira qu'un système quantique Σ est un n - système quantique s'il est déterminé par la donnée de n systèmes quantiques $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ - qu'on appellera aussi ses degrés de liberté.

Postulat 5 (Avec les mêmes hypothèses et notations que ci-dessus) l'espace (pré-) hilbertien $(K, \langle \langle \cdot | \cdot \rangle \rangle_n)$ associé à un n -système quantique est le produit tensoriel des espaces (pré-) hilbertiens $(H_1, \langle \cdot | \cdot \rangle_1)$, ..., $(H_n, \langle \cdot | \cdot \rangle_n)$ respectivement associés aux systèmes quantiques S_1, \dots, S_n .

Exemple 10.12.1 Supposons que $n = 2$ et que pour $j = 1, 2$, Σ_j soit un système quantique associé à l'espace de Hilbert $(L^2(\Omega_j), (\cdot | \cdot)_j)$ où Ω_j est un ouvert de \mathbb{R}^k , $k \in \mathbb{N}^*$ et $(\cdot | \cdot)_j$ est le produit scalaire canonique de $L^2(\Omega_j)$.

On montre et nous admettons que :

$(L^2(\Omega_1), (\cdot | \cdot)_1) \otimes (L^2(\Omega_2), (\cdot | \cdot)_2) = (L^2(\Omega_1 \times \Omega_2), (\cdot | \cdot)_{12})$ où $(\cdot | \cdot)_{12}$ est le produit scalaire canonique de $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Alors, Σ est un système quantique associé à $(L^2(\Omega_1 \times \Omega_2), (\cdot | \cdot)_{12})$.

Si ψ est la fonction d'onde d'un état quantique de Σ , on sait que :

$\forall t, \psi(\cdot, t) \in L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$. On en déduit que :

$$\forall t, \forall x_1 \in \Omega_1, \forall x_2 \in \Omega_2, \psi(x_1, x_2, t) = \sum_{j \in J} \psi_j^1(x_1, t) \cdot \psi_j^2(x_2, t)$$

où J est un ensemble dénombrable, ψ_j^1 et ψ_j^2 étant les fonctions d'onde d'états quantiques de Σ_1 et Σ_2 .

10.12.3 Produits tensoriels symétriques et antisymétriques.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace (pré-) hilbertien.

Désignons par $(H^{\otimes n}, \langle \langle \cdot | \cdot \rangle \rangle_n)$ le produit tensoriel de n copies de H , muni du produit scalaire $\langle \langle \cdot | \cdot \rangle \rangle_n$.

On dira qu'un élément x de $H^{\otimes n}$ est un tenseur symétrique (resp. antisymétrique) si :

$$x = \frac{1}{n!} \left(\sum_{\rho \in \sigma(n)} \left(\otimes_{j=1}^n x_{\rho(j)} \right) \right), \left(\text{resp. } x = \frac{1}{n!} \left(\sum_{\rho \in \sigma(n)} \varepsilon(\rho) \left(\otimes_{j=1}^n x_{\rho(j)} \right) \right) \right)$$

où $x_1, \dots, x_n \in H$, $\sigma(n)$ est le *nième groupe symétrique* (et $\varepsilon(\rho)$ est égal à $(+1)$ ou (-1) suivant que ρ est paire ou impaire).

On posera :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in H, \quad \vee_{j=1}^n x_j = x_1 \vee \dots \vee x_n = \frac{1}{n!} \left(\sum_{\rho \in \sigma(n)} \left(\otimes_{j=1}^n x_{\rho(j)} \right) \right)$$

$$\left(\text{resp. } \wedge_{j=1}^n x_j = x_1 \wedge \dots \wedge x_n = \frac{1}{n!} \left(\sum_{\rho \in \sigma(n)} \varepsilon(\rho) \left(\otimes_{j=1}^n x_{\rho(j)} \right) \right) \right)$$

On notera $H^{\vee n}$ (resp. $H^{\wedge n}$) le sous-espace vectoriel (fermé) de $H^{\otimes n}$, engendré par les vecteurs de la forme $x_1 \vee \dots \vee x_n$ (resp. $x_1 \wedge \dots \wedge x_n$) où $x_1, \dots, x_n \in H$.

Posons :

$$\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in H, \quad \left\langle \left\langle \vee_{j=1}^n x_j \mid \vee_{j=1}^n y_j \right\rangle \right\rangle_{\vee n} = \frac{1}{n!} \sum_{\rho \in \sigma(n)} \langle x_1 \mid y_{\rho(1)} \rangle \dots \langle x_n \mid y_{\rho(n)} \rangle$$

et :

$$\left\langle \left\langle \wedge_{j=1}^n x_j \mid \wedge_{j=1}^n y_j \right\rangle \right\rangle_{\wedge n} = \frac{1}{n!} \det G(x, y)$$

où $G(x, y)$ est la matrice ayant pour élément, au croisement de la j ème ligne et de la k ème colonne, le scalaire $\langle x_j \mid y_k \rangle$, $j, k = 1, \dots, n$.

Alors, $(H^{\vee n}, \langle \langle \cdot \mid \cdot \rangle \rangle_{\vee n})$, (resp. $(H^{\wedge n}, \langle \langle \cdot \mid \cdot \rangle \rangle_{\wedge n})$) est un espace (pré-) hilbertien appelé *produit tensoriel symétrique* (resp. *antisymétrique*) d'ordre n .

10.12.4 Bosons et fermions.

Définition 15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que Σ soit un système quantique composé de n systèmes quantiques identiques associés à un même espace (pré-) hilbertien $(H, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$.

Tout élément de $H^{\vee n}$ (resp. $H^{\wedge n}$) est appelé un *boson* (resp. *fermion*).

Exemple 10.12.2 Supposons que $n = 2$, que $\Sigma_1 = \Sigma_2 = T$ et que l'espace (pré-) hilbertien associé à T soit l'espace de Hilbert $(L^2(\Omega), (\cdot \mid \cdot))$ où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^k , $k \in \mathbb{N}^*$ et où $(\cdot \mid \cdot)$ est le produit scalaire canonique de $L^2(\Omega)$.

Soient φ et ψ deux fonctions d'onde relatives à deux états quantiques de T .

Alors, $\forall t$, $\varphi(\cdot, t)$ et $\psi(\cdot, t)$ appartiennent à $L^2(\Omega)$.

Posons :

$$\forall t, \forall x, y \in \Omega \quad (\varphi \vee \psi)(x, y, t) = \frac{1}{2!} (\varphi(x, t) \cdot \psi(y, t) + \varphi(y, t) \cdot \psi(x, t))$$

$$\left(\text{resp. } (\varphi \wedge \psi)(x, y, t) = \frac{1}{2!} (\varphi(x, t) \cdot \psi(y, t) - \varphi(y, t) \cdot \psi(x, t)) \right)$$

On en déduit que $\varphi \vee \psi$ (resp. $\varphi \wedge \psi$) est la fonction d'onde d'un boson (resp. d'un fermion).

Notons que : si $\varphi = \psi$ on a : $(\varphi \vee \varphi)(x, y, t) = \varphi(x, t) \cdot \varphi(y, t)$ et : $(\varphi \wedge \varphi)(x, y, t) = 0$.

Ce dernier résultat traduit le principe d'exclusion de Pauli, à savoir :

"le même état quantique ne peut être occupé par deux fermions identiques".

Commentaires (rappels sur la radioactivité) :

- (i) Toutes les particules de *spin entier* (resp. *demi-entier*) sont des *bosons* (resp. *des fermions*).
- (ii) [Selon le modèle standard de la physique des particules]
 - (j) tous les constituants de la matière sont des fermions ; ils sont au nombre de 12, à savoir : 6 quarks de charges $-\frac{1}{3}e$ et $\frac{2}{3}e$, 6 leptons de charges $-e$ et 0 , (e étant la charge de l'électron) A ces fermions sont associés 12 antifermions.
 - (jj) La gravité (resp. l'interaction électromagnétique, l'interaction forte, l'interaction faible) est due à l'échange d'un graviton (hypothétique) (resp. un photon, de gluons au nombre de huit, des bosons W^+, W^-, Z^0)
Treize bosons interviennent donc dans les interactions fondamentales.

10.12.5 Opérateurs de création et d'annihilation.

Définition 16 (Avec les mêmes hypothèses et notations que celles que nous avons utilisées plus haut) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons : $\|\cdot\| = (\langle \cdot | \cdot \rangle)^{\frac{1}{2}}$.

On appelle **opérateur de création** a_h^+ (resp. b_h^+) où $h \in H$, l'opérateur de $H^{\otimes n}$ dans $H^{\otimes(n+1)}$ qui, à tout $x = x_1 \vee \dots \vee x_n$ (resp. $x = x_1 \wedge \dots \wedge x_n$) associe :

$$a_h^+(x) = h \vee x_1 \vee \dots \vee x_n \quad (\text{resp. } b_h^+(x) = h \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_n)$$

On appelle **opérateur d'annihilation** a_h^- (resp. b_h^-) où $h \in H$, l'opérateur de $H^{\otimes n}$ dans $H^{\otimes(n-1)}$ qui, à tout $x = x_1 \vee \dots \vee x_n$ (resp. $x = x_1 \wedge \dots \wedge x_n$) associe :

$$a_h^-(x) = \sum_{j=1}^n \langle h | x_j \rangle (x_1 \vee \dots \vee \widehat{x_j} \vee \dots \vee x_n)$$

$$(\text{resp. } b_h^-(x) = \sum_{j=1}^n (-1)^j \langle h | x_j \rangle (x_1 \vee \dots \vee \widehat{x_j} \vee \dots \vee x_n))$$

où $\widehat{x_j}$ indique que x_j ne figure pas dans la liste.

Des définitions précédentes, il résulte facilement que :

- (i) $a_h^+(id_H) = b_h^+(id_H) = h$.
- (ii) La norme de l'opérateur a_h^+ (resp. b_h^+) est égale à $(n+1)^{\frac{1}{2}} \|h\|$ (resp. $\|h\|$).
- (iii) L'application : $h \rightarrow a_h^-$ (resp. $h \rightarrow b_h^-$) est antilinéaire.
- (iv) $a_h^-(id_H) = b_h^-(id_H) = 0$.

10.12.6 Espaces de Fock.

Définition 17 Soit $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace (pré-) hilbertien.

Notons $E(H)$ la somme directe vectorielle des espaces $H^{\otimes n}$, $n \in \mathbb{N}$, avec $H^{\otimes 0} = \{id_H\}$. Tout élément $y \in E(H)$ s'identifie à une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $H^{\otimes n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Posons, quel que soit $a \in H$:

$$EXP(a) = \left(\frac{a^{\otimes n}}{\sqrt{n!}} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{avec } a^{\otimes 0} = id_H$$

On montre que la famille $\{EXP(a) ; a \in H\}$ est libre et totale dans $E(H)$.

On appelle espace de Fock associé à $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ l'espace $E(H)$ muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle_{E(H)}$ tel que :

$$\forall a, b \in H, \langle EXP(a) | EXP(b) \rangle_{E(H)} = \exp(\langle a | b \rangle) .$$

On définit de même, sans difficulté les espaces de Fock symétriques et antisymétriques.

On notera $E^\vee(H)$ (resp. $E^\wedge(H)$) l'espaces de Fock symétrique (resp. antisymétrique) associé à $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Commentaires (sur les produits tensoriels d'espaces (pré-)hilbertiens).

On montre et nous admettrons que :

- (i) Si, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $(H_j, \langle \cdot | \cdot \rangle_j)$ admet pour base orthonormale la famille $\{a_j^k ; k \in \mathbb{N}\}$, alors, le produit tensoriel $(K, \langle \langle \cdot | \cdot \rangle \rangle_n)$ admet pour base orthonormale la famille $\{a_1^{k(1)} \otimes \dots \otimes a_n^{k(n)} ; k(1), \dots, k(n) \in \mathbb{N}\}$.
- (ii) Si $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace (pré-) hilbertien (réel ou complexe), alors $E(H)$ est une algèbre (réelle ou complexe).
- (iii) Si $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace (pré-) hilbertien de dimension finie, alors l'espace de Fock $E^\wedge(H)$ est de dimension finie tandis que l'espace de Fock $E^\vee(H)$, est, en général, de dimension infinie.

III. La thèse de Feynman.

10.12.7 Retour sur l'Optique ondulatoire.

L'optique ondulatoire est fondée sur le principe de Huygens que nous allons expliciter ci-dessous :

Soient A et A' deux points de l'espace. Désignons par $\Gamma(A', A)$ l'ensemble des chemins que la lumière peut emprunter pour aller de A à A' .

Considérons une onde lumineuse issue du point A et arrivant au point A' .

Notons $g(A', A)$ l'amplitude de cette onde et T sa période. Alors :

$$g(A', A) = \sum_{\gamma \in \Gamma(A', A)} g_{\gamma}(A', A) \quad \text{où} \quad g_{\gamma}(A', A) = \mu \exp\left(\frac{2i\pi\theta_{\gamma}}{T}\right)$$

μ étant un scalaire indépendant de $\gamma \in \Gamma(A', A)$ et θ_{γ} le temps mis par l'onde lumineuse pour aller de A en A' le long de γ .

$g(A', A)$ est donc la superposition linéaire des ondes $g_{\gamma}(A', A)$, $\gamma \in \Gamma(A', A)$.

Notons que l'intensité lumineuse d'amplitude $g(A', A)$ est égale à

$$|g(A', A)|^2 = g(A', A) \overline{g(A', A)}$$

($\overline{g(A', A)}$ étant le nombre complexe conjugué de $g(A', A)$).

Le principe de Huygens induit le principe de Fermat. En effet, lorsque la longueur d'onde λ de l'onde lumineuse est "petite" devant les dimensions du système considéré - par exemple, dans le cas de la diffraction, quand λ est "petite" devant la dimension du trou que traverse l'onde lumineuse - tout se passe comme si la lumière suivait le chemin déterminé par le principe de Fermat.

10.12.8 Les postulats de Feynman.

Considérons une particule allant du point A au point A' dans l'espace-temps.

Notons $G_{\gamma}(A', A)$ l'amplitude de la probabilité pour que la particule suive le chemin γ pour aller du point A au point A' et $G(A', A)$ l'amplitude de probabilité pour que la particule soit en $A'(t', x')$ après avoir été en $A(t, x)$.

Désignons par $\Gamma(A, A')$ l'ensemble des chemins licites reliant A à A' dans l'espace-temps.

(i) Postulat 1 de Feynman :

$$G(A', A) = \sum_{\gamma \in \Gamma(A', A)} G_{\gamma}(A', A).$$

(ii) Postulat 2 de Feynman :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall \gamma \in \Gamma(A, B), \quad G_{\gamma}(A', A) = C \exp\left(\frac{iS_{\gamma}}{\hbar}\right)$$

où $i^2 = -1$, $\hbar = (2\pi)^{-1}h$, h étant la constante de Planck et S_{γ} l'**action classique** de la particule le long du chemin γ .

Les postulats de Feynman ci-dessus affirment donc qu'il existe une (stricte) analogie entre l'Optique ondulatoire régie par le principe de Huygens et la Mécanique quantique. Dans

cette analogie, l'action S joue le même rôle que le temps et la constante de Planck le même rôle que la période de l'onde lumineuse.

10.12.9 Approximation de $G_\gamma(A', A)$.

Supposons que γ soit un chemin continu reliant A à A' .

Subdivisons γ au moyen des points $M_j = (t_j, x_j)$, $j \in \{0, \dots, n\}$ tels que :

$M_0 = A$, $M_n = B$, $t_{j+1} - t_j = \varepsilon$, $j \in \{0, \dots, n-1\}$.

Pour tout $j \in \{0, \dots, n-1\}$, notons $\gamma_j(\varepsilon)$ le chemin classique qui relie M_j à M_{j+1} c'est-à-dire le chemin qui relie M_j à M_{j+1} et qui est solution des équations d'Euler du mouvement considéré.

Posons :

$$\gamma(\varepsilon) = \cup_{j=0}^{n-1} \gamma_j(\varepsilon), \quad S_{\gamma_j(\varepsilon)} = \int_{\gamma_j(\varepsilon)} L(s, y(s), \dot{y}(s)) ds \quad \text{et} \quad S_{\gamma(\varepsilon)} = \sum_{j=0}^{n-1} S_{\gamma_j(\varepsilon)}$$

Alors :

$$G_{\gamma(\varepsilon)}(A', A) = C \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{n-1} S_{\gamma_j(\varepsilon)}\right) \quad \text{et}$$

$$G_\varepsilon(A', A) = \sum_{\gamma(\varepsilon)} G_{\gamma(\varepsilon)}(A', A)$$

10.13 De Schrödinger à Feynman. Définition et propriétés du propagateur d'un système quantique.

Soit ψ la fonction d'onde d'un système quantique dont l'évolution est régie par le problème aux dérivées partielles suivant :

$t_0 \in \mathbb{R}$ étant donné, trouver ψ tel que :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - H(t)\psi = 0$$

où $\psi(\cdot, t_0)$ est fixé et $H(t)$ est un opérateur linéaire (dépendant du temps) t .

On déduit d'un théorème classique que :

$$\psi(\cdot, t) = U(t, s)\psi(\cdot, s)$$

où $U(t, s)$ est un opérateur linéaire tel que :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, s) - H(t)U(t, s) = 0 \quad \text{avec :}$$

$$U(t, t_0) = U(t, s).U(s, t_0) \quad \text{si } t_0 \leq s \leq t \quad \text{et } U(t, t) = 1$$

En utilisant le formalisme de Dirac, on a :

$$\psi(x', t') = \langle x' | \psi(\cdot, t') \rangle = \langle x' | U(t', t) | \psi(\cdot, t) \rangle$$

et comme $\int_{\mathbb{R}} |x\rangle\langle x| dx = 1$

$$\psi(x', t') = \int_{\mathbb{R}} \langle x' | U(t', t) | x \rangle \langle x | \psi(\cdot, t) \rangle dx = \int_{\mathbb{R}} \langle x' | U(t', t) | x \rangle \psi(x, t) dx$$

Définition 18 Posons $G(x', t'; x, t) = \langle x' | U(t', t) | x \rangle$.

G est appelé le propagateur du problème d'évolution considéré plus haut.

Proposition 11 (Propriétés du propagateur).

(i) Si ψ est la fonction d'onde d'une particule et $\psi(y, s)$ la probabilité pour que cette particule se trouve au point y à l'instant s , alors

$G(x', t'; x, t)$ est l'amplitude de probabilité pour que la particule se trouvant au point x , à l'instant t se trouve au point x' , à l'instant t' .

(ii) $G(x', t'; x, t) = \int_{\mathbb{R}} G(x', t'; y, s) G(y, s; x, t) dy$.

$$\begin{aligned} \text{En effet : } G(x', t'; x, t) &= \langle x' | U(t', t) | x \rangle \\ &= \langle x' | U(t', s) U(s, t) | x \rangle \\ &= \langle x' | U(t', s) \left(\int_{\mathbb{R}} |y\rangle\langle y| dy \right) U(s, t) | x \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \langle x' | U(t', s) | y \rangle \langle y | U(s, t) | x \rangle dy \end{aligned}$$

(iii) Plus généralement, si t_0, t_1, \dots, t_n est une subdivision de l'axe du temps telle que $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, on déduit facilement, par récurrence, de ce qui précède que :

$$G(x_n, t_n; x_0, t_0) = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} G(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}) \dots G(x_1, t_1; x_0, t_0) dx_{n-1} \dots dx_1$$

Remarque 3 $G(x_n, t_n; x_0, t_0)$ est calculé pour la totalité des chemins reliant (t_0, x_0) à (t_n, x_n) puisque, pour tout $j \in \{0, \dots, (n-1)\}$ on intègre $G(x_{j+1}, t_{j+1}; x_j, t_j)$ sur la droite d'équation $x = x_j$.

Exemple 10.13.1 Supposons que :

$$\forall t, \quad H(t) = \frac{p^2}{2m}$$

De l'équation de Schrödinger à laquelle satisfait $U(\cdot, s)$, on déduit facilement que :

$$U(t', t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(t' - t)H\right)$$

En utilisant le formalisme de Dirac, on obtient :

$$G(x', t'; x, t) = \left\langle x' \left| \exp\left(\frac{i}{\hbar}(t' - t)H\right) \right| x \right\rangle$$

et, comme $\int_{\mathbb{R}} |p\rangle\langle p| dp = 1$, on a :

$$G(x', t'; x, t) = \left\langle x' \mid \left(\int_{\mathbb{R}} \mid p \rangle \langle p \mid dp \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} (t' - t) H \right) \mid \left(\int_{\mathbb{R}} \mid p' \rangle \langle p' \mid dp' \right) x \right\rangle$$

Or, on montre que :

$$\langle x \mid p \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{1}{2}}} \exp \left(\frac{i}{\hbar} px \right)$$

On en déduit que :

$$G(x', t'; x, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)} \int_{\mathbb{R}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[p(x' - x) + (t' - t) \frac{p^2}{2m} \right] \right\}$$

d'où, après intégration :

$$G(x', t'; x, t) = \exp \left(-i \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{m}{2\pi\hbar(t' - t)} \right) \exp \left(\frac{i m (x' - x)^2}{2\hbar(t' - t)} \right)$$

Remarque 4 Nous renvoyons le lecteur au dernier paragraphe du chapitre sur la résolution des équations aux dérivées partielles linéaires où nous identifions le propagateur à un noyau hilbertien.

Les invariants relatifs au mouvement jouent un rôle important en Physique. Nous allons mettre en évidence, ci-dessous, deux méthodes générales pour les obtenir.

A. invariants en Physique classique non-relativiste.

Nous noterons $L : (t, y) \rightarrow L(t, y(t), \dot{y}(t))$ le lagrangien relatif au mouvement d'une particule décrivant une trajectoire "régulière" : $t \rightarrow y(t)$.

11.1 Premier cas : espace homogène.

Si l'espace où se déroule le mouvement étudié est homogène, alors :

$$\forall y^0 \in \mathbb{R}^3, \quad L(t, y(t) + y^0, \dot{y}(t)) = L(t, y(t), \dot{y}(t)) .$$

Il en résulte immédiatement que :

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

De l'équation d'Euler-Lagrange, on déduit que :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = 0$$

Mais, on sait que si p désigne la quantité de mouvement de la particule considérée, on a :

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$$

De ce qui précède, on déduit que : p est constante.

Le résultat ci-dessus explicite la *loi de conservation de la quantité de mouvement*, dans un espace homogène.

11.2 Deuxième cas : temps homogène.

Dans ce cas, L est invariant dans toute translation du temps.

Par conséquent :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \text{ et } L \text{ ne dépend pas de } T$$

$$\text{Ainsi : } \frac{dL}{dt} = \left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \mid \dot{y} \right\rangle_3 - L(y, \dot{y})$$

Il en résulte que l'hamiltonien du mouvement considéré est constant.

Comme l'hamiltonien s'identifie à l'énergie, on dira que le *mouvement considéré est conservatif*.

11.3 Troisième cas : espace isotrope.

Dans ce cas, L est invariant dans toute rotation de l'espace.

Soit $\delta\alpha$ une rotation "infinitésimale" de l'espace.

Dans cette rotation, y (resp. \dot{y}) subit une modification "infinitésimale" égale à $\delta y = \delta\alpha \wedge y$ (resp. $\delta\dot{y} = \delta\alpha \wedge \dot{y}$).

Soit (\cdot) le produit scalaire dans \mathbb{R}^3 . Alors, L subit la modification δL telle que :

$$\delta L = \left\langle \frac{\partial L}{\partial y} \mid \delta y \right\rangle_3 + \left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \mid \delta \dot{y} \right\rangle_3,$$

et des équations de Lagrange, on déduit que :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y}$$

Par conséquent :

$$\delta L = \left\langle \frac{dp}{dt} \mid (\delta\alpha \wedge y) \right\rangle_3 + \left\langle p \mid (\delta\alpha \wedge y) \right\rangle_3 = \left\langle \delta\alpha \mid \frac{d}{dt} (y \wedge p) \right\rangle_3 = 0$$

Or,

$$L = y \wedge p \text{ et donc : } \frac{dL}{dt} = 0$$

11.4 Cas général : Le théorème d'Emily Nöther.

Le théorème d'E. Nöther généralise les propositions établies aux paragraphes précédents.

Nous ne l'énoncerons pas dans le contexte le plus général.

On en déduit que :

Si le système des équations d'Euler-Lagrange d'un mouvement donné est *invariant* dans une transformation de coordonnées qui à tout $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, associe $(\theta(t), \varsigma(y)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, alors ce système admet une *intégrale première* (associée à la transformation considérée).

B. Invariants en Physique quantique non relativiste.

Soit ψ_σ la fonction d'onde d'une particule σ se mouvant dans (l'espace-temps) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\psi_\sigma(\cdot, t) \in (L^2(\mathbb{R}^3), \langle \cdot | \cdot \rangle_0)$ où $\langle \cdot | \cdot \rangle_0$ est le produit scalaire canonique (hermitien) sur $L^2(\mathbb{R}^3)$.

On posera : $\|\cdot\|_0 = (\langle \cdot | \cdot \rangle_0)^{\frac{1}{2}}$.

11.5 Opérateur unitaire.

11.5.1 Définition et premières propriétés.

Effectuons sur ψ_σ une translation spatiale d'amplitude x^0 (resp. une translation temporelle d'amplitude t^0 , une rotation spatiale ρ^0).

Désignons par U cette transformation. Alors :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, (U \psi_\sigma)(x, t) = \psi_\sigma(x + x^0, t)$$

(resp. $(U \psi_\sigma)(x, t) = \psi_\sigma(x, t + t^0)$, $(U \psi_\sigma)(x, t) = \psi_\sigma(\rho^0 x, t)$).

On montre la proposition suivante :

Proposition 12 :

([i]) $U^*U = UU^* = Id$ où U^* est l'opérateur transposé conjugué de U et Id est l'opérateur identité de $L^2(\mathbb{R}^3)$.

([ii]) $\|(U \psi_\sigma)(\cdot, t)\|_0 = \|\psi_\sigma(\cdot, t)\|_0$ Ainsi : U est isométrique.

11.5.2 Extension.

Soit $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert.

Définition 19 On dit qu'un opérateur linéaire continu U dans $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est unitaire si :

$$\forall a, b \in H, \langle Ua | Ub \rangle = \langle a | b \rangle.$$

On montre la proposition suivante :

Proposition 13 Si U est un opérateur linéaire continu unitaire dans $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, alors :

([i]) $U^*U = UU^* = I_H$ où I_H est l'opérateur identité dans H .

([ii]) Si $\|\cdot\| = (\langle \cdot | \cdot \rangle)^{\frac{1}{2}}$ alors : $\forall a \in H, \|Ua\| = \|a\|$

([iii]) Désignons par B l'opérateur linéaire dans H tel que :

$$\forall a \in H, \langle Ba | a \rangle = \langle A(Ua) | (Ua) \rangle$$

$$\text{Alors : } B = U^*AU.$$

11.6 Générateurs.

11.6.1 Un résultat préliminaire.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , indéfiniment différentiable.

Supposons que f admette un développement en série de Taylor en tout point

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Désignons par $D = (D_1, \dots, D_n)$ l'opérateur gradient et posons :

$$\langle x | D \rangle_n = \sum_{j=1}^n x_j D_j$$

Alors :

$$(\langle x | D \rangle_n)^2 = \left(\sum_{j=1}^n x_j D_j \right)^2 = \sum_{j, k=1}^n x_j x_k D_j D_k \quad .$$

On peut expliciter comme ci-dessus $(\langle x | D \rangle_n)^k$ lorsque $k = 3, 4, \dots$

Si $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ est un point quelconque de \mathbb{R}^n , on a :

$$f(x+x^0) = f(x) + \left(\left(\sum_{j=1}^n x_j^0 D_j \right) f \right) (x) + \frac{1}{2!} \left(\left(\sum_{j=1}^n x_j^0 D_j \right)^2 f \right) (x) + \dots + \frac{1}{k!} \left(\left(\sum_{j=1}^n x_j^0 D_j \right)^k f \right) (x) + \dots$$

D'où :

$$f(x+x^0) = f(x) + \left(\langle x^0 | D \rangle_n f \right) (x) + \dots + \frac{1}{k!} \left(\langle x^0 | D \rangle_n^k f \right) (x) + \dots = \left(\exp \left(\langle x^0 | D \rangle_n \right) \right) f(x)$$

11.6.2 Générateur d'une translation spatiale.

On suppose que $n = 3$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

Supposons que $\psi_\sigma(\cdot, t)$ soit indéfiniment différentiable sur \mathbb{R}^n et admette un développement de Taylor en tout point de \mathbb{R}^3 .

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \mathbb{R}^3$.

Du paragraphe précédent, on déduit que :

$$\psi_\sigma(x + x^0, t) = \exp \left(\langle x^0 | D \rangle_3 \right) \psi_\sigma(x, t)$$

Du principe de correspondance établi plus haut, il résulte que : $D = i(\hbar)^{-1} P$ où P est l'opérateur quantité de mouvement.

Il en résulte que :

$$\psi_\sigma(x + x^0, t) = \exp \left(\frac{i}{\hbar} \langle x^0 | P \rangle_3 \right) \psi_\sigma(x, t)$$

Or nous savons que : $\psi_\sigma(x + x^0, t) = U(x^0) \psi_\sigma(x, t)$ où $U(x^0)$ est un opérateur linéaire unitaire.

Par conséquent :

$$U(x^0) = \exp \left(\frac{i}{\hbar} \langle x^0 | P \rangle_3 \right)$$

Lorsque x^0 est un vecteur "infinitésimal" de \mathbb{R}^3 , on obtient, en négligeant les termes "infinitésimaux" d'ordre supérieur ou égal à deux :

$$U(x^0) = I + \frac{i}{\hbar} \langle x^0 | P \rangle_3$$

11.6.3 Générateur d'une translation temporelle.

Soit $t, t^0 \in \mathbb{R}$. On a :

$$\psi_\sigma(\cdot, t + t^0) = \exp\left(t^0 \cdot \frac{\partial}{\partial t}\right) \psi_\sigma(\cdot, t)$$

Du principe de correspondance, on déduit que :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} E \quad \text{où } E \text{ est l'opérateur énergie.}$$

Il en résulte que :

$$\psi_\sigma(\cdot, t + t^0) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} t^0 E\right) \psi_\sigma(\cdot, t)$$

et si t^0 est "infinitésimal", avec les notations définies plus haut, on a :

$$U(t^0) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} t^0 E\right)$$

11.6.4 Générateur d'une rotation spatiale.

En procédant comme au paragraphes précédents, on a :

$$\psi_\sigma(x + \alpha \wedge x, t) = \exp(\langle \alpha \wedge x | D \rangle_3) \psi_\sigma(x, t).$$

Or :

$$\langle \alpha \wedge x | D \rangle_3 = \langle \alpha | x \wedge D \rangle_3 = \left\langle \alpha | x \wedge \frac{i}{\hbar} P \right\rangle_3 = \frac{i}{\hbar} \langle \alpha | x \wedge P \rangle_3$$

Mais $x \times P$ est égal au moment cinétique L et donc :

$$\psi_\sigma(x + \alpha \wedge x, t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \langle \alpha | L \rangle_3\right) \psi_\sigma(x, t)$$

Lorsque α est une rotation "infinitésimale", on a :

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar} \langle \alpha | L \rangle_3\right) = I + \frac{i}{\hbar} \langle \alpha | L \rangle_3$$

au deuxième ordre "infinitésimal" près. Ainsi :

$$\psi_\sigma(x + \alpha \wedge x, t) = \left(I + \frac{i}{\hbar} \langle \alpha | L \rangle_3\right) \psi_\sigma(x, t)$$

On en déduit que :

$$U(\alpha) = I + \frac{i}{\hbar} \langle \alpha | L \rangle_3$$

11.7 Opérateurs anti-unitaires.

11.7.1 Définition et premières propriétés.

Soit $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace hilbertien. On dit qu'un opérateur antilinéaire et continu V dans $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est *anti-unitaire* si : $\forall a, b \in H, \langle Va | Vb \rangle = \overline{\langle a | b \rangle}$.

Notons K l'opérateur linéaire dans H tel que : $\forall a \in H, Ka = \bar{a}$ où \bar{a} est le complexe conjugué de a .

On vérifie facilement que :

$\forall a, b \in H, \langle Ka | Kb \rangle = \overline{\langle a | b \rangle}$ et que : $K = K^{-1}$.

Proposition 14 *Un opérateur antilinéaire et continu V dans $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est anti-unitaire si et seulement si : $V = UK$ où U est un opérateur linéaire continu et unitaire dans $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.*

Preuve :

(i) *Supposons que V soit anti-unitaire. Alors :*

$$\begin{aligned} \forall a, b \in H, \langle Va | Vb \rangle &= \overline{\langle a | b \rangle} \quad \text{et donc :} \\ \forall a, b \in H, \langle (VKa) | (VKb) \rangle &= \overline{\langle Ka | Kb \rangle} \end{aligned}$$

Comme K est bijective, on a : $VK = U$ où U est un opérateur unitaire linéaire dans $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Par conséquent : $V = UK$.

(ii) *Inversement, il est évident que si $V = UK$ où U est linéaire et unitaire, alors V est antilinéaire et anti-unitaire.*

11.7.2 L'opérateur de renversement du temps.

Définition 20 *On dira qu'un opérateur T est un opérateur de renversement du temps si : $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \psi_\sigma(x, -t) = (T\psi_\sigma)(x, t)$.*

De cette définition, on déduit que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \psi_\sigma(\cdot, \theta - t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\theta E\right) (T\psi_\sigma)(\cdot, t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\theta E\right) \psi_\sigma(\cdot, -t)$$

et d'autre part, que :

$$\psi_\sigma(\cdot, \theta - t) = (T\psi_\sigma)(\cdot, t - \theta) = T\left(\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\theta E\right)\right) \psi_\sigma(\cdot, t)$$

On en déduit que :

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\theta E\right) (T\psi_\sigma)(\cdot, t) = T\left(\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\theta E\right)\right) \psi_\sigma(\cdot, t)$$

Si θ est "infinitésimal", on a donc :

$$\left(I + \frac{i}{\hbar}\theta E\right) T = T\left(I - \frac{i}{\hbar}\theta E\right)$$

Il en résulte que : $\iota(ET) = T(-\iota E)$.

On montre et nous admettrons que T est nécessairement anti-unitaire.

Or, on sait que : $T = UK$; Par conséquent :

$$T(-\iota E) = UK(-\iota E) = UiKE = iTE,$$

et finalement : $\iota(ET) = iTE$ d'où : $ET = TE$.

CHAPITRE 12

P 12 PRINCIPE DE "MOINDRE ACTION".

12.1 Le principe de moindre action en Mécanique.

12.1.1 Notations.

Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on notera, dans la suite $\langle \cdot | \cdot \rangle_n$ le produit scalaire euclidien canonique de \mathbb{R}^n .

On désignera par E , l'espace vectoriel des fonctions continues et dérivables (en un sens généralisé éventuellement) sur un intervalle (t_1, t_2) , ($t_1 < t_2$) de \mathbb{R} .

12.1.2 Énoncé du Principe de moindre action (P.M.A.) en Mécanique.

A un système mécanique évoluant entre les deux instants t_1 et t_2 ($t_1 < t_2$) on associe une application S de E dans \mathbb{R} , appelée **action**, qui à tout $x \in E$ fait correspondre

$$S(x) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$$

où \dot{x} est la dérivée de x sur (t_1, t_2) et L est une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ dans \mathbb{R} , aussi régulière qu'on le désirera, appelée **lagrangien** du système mécanique considéré.

On appellera mouvement du système étudié, un élément x_0 de E qui rend S extrémale.

On supposera, dans la suite que S est une fonction différentiable sur E et on notera S' le gradient de S sur E .

Pour déterminer le mouvement du système considéré, on cherchera donc x_0 parmi les éléments de E qui annulent S' sur E .

12.1.3 Calcul du gradient de S .

Dans la suite, on notera

$$\frac{\partial L}{\partial y} \quad \text{le vecteur dérivé de } L \quad \text{par rapport à } y = (y_1, \dots, y_n)$$

Si L vérifie des conditions de régularité convenables, on montre facilement que :

$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$

$$\lambda^{-1}(S(x + \lambda y) - S(x)) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left\langle \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) \mid y(t) \right\rangle_n + \left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \mid \dot{y}(t) \right\rangle_n \right] dt + O(\lambda)$$

Il en résulte que :

pour tout $x \in E$, $S'(x)$ est l'application linéaire de E dans \mathbb{R} telle que :

$\forall y \in E,$

$$\begin{aligned} (S'(x))(y) &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left\langle \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) \mid y(t) \right\rangle_n + \left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \mid \dot{y}(t) \right\rangle_n \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left\langle \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \right) \mid y(t) \right\rangle_n dt \right] + \left[\left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \mid \dot{y}(t) \right\rangle_n \right]_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$

12.1.4 Equation (s) d'Euler-Lagrange.

Notons E_0 le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans (t_1, t_2) .

On sait que E_0 est dense dans $L^2(t_1, t_2)$ et que : $\forall \varphi \in E_0, \varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$.

Alors $\forall x \in E$ tel que $S'(x) = 0$ vérifie l'(les) équation(s) suivantes appelée(s) équation(s) d'Euler-Lagrange est (sont) vérifi'ee(s) :

$$\forall t \in (t_1, t_2) \quad , \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \right) = 0$$

Ces équations forment un système de n équations à n inconnues x_1, \dots, x_n .

La solution générale de ce système dépend de $2n$ constantes d'intégration.

Etant donnés deux nombres réels a_1 et a_2 , posons :

$$E(a_1, a_2) = \{x \in E; x(t_1) = a_1 \text{ et } x(t_2) = a_2\}$$

Alors, pour qu'un élément $x \in E(a_1, a_2)$ soit une extrémale de S sur $E(a_1, a_2)$, il faut et il suffit que x soit solution des équations d'Euler-Lagrange.

Remarque 5 Posons :

$$\forall x \in E, \quad \forall t \in (t_1, t_2), \quad L_1(t, x(t), \dot{x}(t)) = L(t, x(t), \dot{x}(t)) + \frac{d}{dt} f(t, x(t)) \text{ et}$$

$$S_1(x) = \int_{t_1}^{t_2} L_1(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$$

Alors :

$$\forall x \in E(a_1, a_2), \quad S_1(x) = S(x) + f(t_2, a_2) - f(t_1, a_1) \quad \text{et} \quad S'_1(x) = S'(x)$$

12.2 Dualité. Lagrangien et hamiltonien.

12.2.1 La duale de S .

Calculons la duale de (x^*, S^*) de S .

On sait que : $x^* = S'(x)$ et $S^* = \langle x | x^* \rangle_n - S(x)$. D'où :

$$x^* = S'(x) \text{ et}$$

$$S^* = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left\langle \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) \mid x(t) \right\rangle_n + \left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \mid \dot{x}(t) \right\rangle_n - L(t, x(t), \dot{x}(t)) \right] dt$$

Notons que si x_0 est une trajectoire réelle du mouvement considéré, on a :

$$S'(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad S_0^* = -S(x_0) = - \int_{t_1}^{t_2} L(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) dt$$

12.2.2 Lagrangien et hamiltonien.

Posons :

$$H(t, x, p) = \langle p | x^* \rangle_n - L(t, x, \dot{x}) \quad \text{avec} \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

H est la duale (partielle) de L par rapport à son troisième argument. C'est l'hamiltonien du système considéré.

H est indépendant de \dot{x} car :

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} (\langle p | x^* \rangle_n - L(t, x, \dot{x})) = p - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

Ainsi :

$$S^* = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left\langle \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) \mid x(t) \right\rangle_n + H(t, x(t), p(t)) \right] dt$$

12.2.3 Explicitation de S^* relativement à une trajectoire réelle x_0 .

On sait que :

$$\frac{\partial L}{\partial x_0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} \right) = \dot{p}_0$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left\langle \frac{\partial L}{\partial x}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) \mid x_0(t) \right\rangle_n dt &= \int_{t_1}^{t_2} \langle \dot{p}_0(t) \mid x_0(t) \rangle_n dt \\ &= [\langle p_0(\cdot) \mid x_0(\cdot) \rangle_n]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \langle p_0(t) \mid \dot{x}_0(t) \rangle_n dt \end{aligned}$$

Ainsi :

$$S_0^* = [\langle p_0(\cdot) \mid x_0(\cdot) \rangle_n]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\langle p_0(t) \mid \dot{x}_0(t) \rangle_n - H(t, x_0(t), p_0(t)) \right] dt$$

$\langle p | \dot{x} \rangle_n - H(t, x, p)$ est appelé *invariant de Poincaré-Cartan* ou bien *invariant intégral de Hilbert*.

12.2.4 Equations de Hamilton.

On a :

$$dH(t, x, p) = \frac{\partial H}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial H}{\partial x} \mid dx \right\rangle_n + \left\langle \frac{\partial H}{\partial p} \mid dp \right\rangle_n$$

Mais :

$$\begin{aligned} dH(t, x, p) &= d \left(\langle p | \dot{x} \rangle_n - L(t, x, \dot{x}) \right) \\ &= -\frac{\partial L}{\partial t} dt - \left\langle \frac{\partial L}{\partial x} \mid dx \right\rangle_n + \langle \dot{x} \mid dp \rangle_n \end{aligned}$$

car : $\langle p | \dot{x} \rangle_n - L(t, x, \dot{x})$ est indépendant de \dot{x} .

Il en résulte que :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x}, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x} \quad \text{avec} \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

Si x_0 est une trajectoire réelle du système considéré, on a :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) \right) = \dot{p}_0(t)$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial H}{\partial x_0} = -\dot{p}_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial p_0} = \dot{x}_0$$

Alors x_0 est solution des équations suivantes, appelées équations de Hamilton :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p} \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x} \quad \text{avec} \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

Inversement supposons que x_1 soit une solution des équations de Hamilton. On a, alors :

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\dot{p}_1 = -\frac{\partial L}{\partial x_1} \quad \text{avec} \quad p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}$$

Il en résulte que :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)$$

et que x_1 est une solution des équations d'Euler-Lagrange.

On dit que *les équations d'Euler-Lagrange et de Hamilton sont duales*.

Dans la suite, on appellera **énergie** du mouvement considéré le long de la trajectoire x , à l'instant t , la quantité :

$$E(t, x, \dot{x}) = \left\langle \dot{x} \mid \frac{\partial L}{\partial x} \right\rangle_n - L(t, x, \dot{x})$$

Les équations de Hamilton peuvent être obtenues directement, comme solutions des équations d'Euler-Lagrange relatives à un lagrangien que nous allons expliciter ci-dessous.

Posons : $\forall X = (x, y) \in E_1 \times E_2$, $F(X) = y\dot{x} - H(t, x, y)$.

Considérons l'action :

$$G : X \rightarrow G(X) = \int_{t_1}^{t_2} F(X(t)) dt.$$

On sait que :

$$G'(X) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right) - \frac{\partial F}{\partial X} = 0.$$

Or

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{X}} = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right),$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \dot{x} - \frac{\partial H}{\partial y}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} &= y, \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$G'(X) = 0 \Rightarrow \left(\dot{y} - \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{x} - \frac{\partial H}{\partial y} = 0. \right)$$

Notons que si H est indépendant du temps on a :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \dot{y} = \dot{y}\dot{x} - \dot{x}\dot{y} = 0.$$

12.2.5 Equation de Hamilton-Jacobi.

Posons :

$$\forall t \in (t_1, t_2), \quad \forall x \in E, \quad \tilde{S}(t, x) = \int_{t_1}^t L(s, x(s), \dot{x}(s)) dt$$

Alors :

$$d\tilde{S} = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} dt + \left\langle \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} \mid dx \right\rangle_n = \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} dt + \left\langle \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} \mid \dot{x} \right\rangle_n \right) dt$$

d'où :

$$\frac{d\tilde{S}}{dt} = \frac{\partial\tilde{S}}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial\tilde{S}}{\partial x} \mid \dot{x} \right\rangle_n$$

Soit $a_1 \in \mathbb{R}^n$ et $E_1 = \{x \in E \ ; \ x(t_1) = a_1\}$ et $x_0 \in E_1$
une trajectoire réelle du mouvement du système mécanique considéré.
Alors, avec des hypothèses de régularité convenables sur L , on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{S}(t, x_0)}{dt} &= L(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) = \left\langle p_0(t) \mid \dot{x}_0(t) \right\rangle_n - H(t, x_0(t), p_0(t)) \\ \text{avec} \quad : \quad p_0(t) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{S}(t, x_0)}{\partial t} &= \langle p_0(t), dx_0(t) \rangle_n - H(t, x_0(t), p_0(t)), \quad d'où : \\ \frac{\partial \tilde{S}(t, x_0)}{\partial t} &= -H(t, x_0(t), p_0(t)), \quad \frac{\partial \tilde{S}(t, x_0)}{\partial x} = p_0(t) \end{aligned}$$

On en déduit que : x_0 est solution de l'équation aux dérivées partielles (non linéaire, en général) suivante :

$$\frac{\partial \tilde{S}(t, x)}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial \tilde{S}(t, x)}{\partial x}\right) = 0$$

appelée *équation de Hamilton-Jacobi*.

et de façon équivalente que : le long de la trajectoire réelle du mouvement x_0 ,

$$d\tilde{S} = \langle p_0 \mid dx_0 \rangle_n - H(t, x_0, p_0)dt \quad \text{avec} \quad p_0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\cdot, x_0(\cdot), \dot{x}_0(\cdot))$$

De ce qui précède, il résulte que :

$$\frac{\partial \tilde{S}(t, x_0)}{\partial t} = -E(t, x_0, \dot{x}_0)$$

12.2.6 Equivalence entre les équations de Hamilton et l'équation de Hamilton-Jacobi.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et U un ouvert de \mathbb{R}^n .

On dit qu'une application S de $I \times U \times U$ dans \mathbb{R} qui, à tout triplet $(t, x, a) \in I \times U \times U$ associe $S(t, x, a) \in \mathbb{R}$, est une solution complète de l'équation de Hamilton-Jacobi si :

- (i) S est suffisamment régulière sur $I \times U \times U$
- (ii) $\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial a} \right)$ est différent de zéro sur $I \times U \times U$

$$(iii) \quad \forall (t, x, a) \in I \times U \times U, \quad \frac{\partial S}{\partial t}(t, x, a) + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}(t, x, a)\right) = 0.$$

Proposition 15 *Supposons que X et Y soient des applications de $I \times U \times U$ dans \mathbb{R}^n qui, à tout triplet $(t, x, a) \in I \times U \times U$ associent $X(t, x, a)$ et $Y(t, x, a)$ telles que :*

$$\forall (t, x, a) \in I \times U \times U, \quad \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a}(t, X(t, a, b), a) &= b \quad \text{et} \\ \frac{\partial S}{\partial x}(t, X(t, a, b), a) &= Y(t, a, b) \end{aligned}$$

Alors $X(t, x, a)$ et $Y(t, x, a)$ sont solutions du système d'équations de Hamilton :

$$\dot{x} = \frac{\partial H(t, x, y)}{\partial y} \quad \text{et} \quad \dot{y} = - \frac{\partial H(t, x, y)}{\partial x}$$

Preuve :

(i) En différentiant par rapport à a l'équation :

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, x, a) + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}(t, x, a)\right) = 0 \quad (\alpha)$$

on obtient :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial a}(t, x, a) + \frac{\partial H}{\partial y}\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}(t, x, a)\right) \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial a} = 0$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial a}(t, X, a) + \frac{\partial H}{\partial y}(t, X, Y) \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial a}(t, X, a) = 0 \quad (\beta)$$

(ii) Différentions par rapport à a l'équation :

$$\frac{\partial S}{\partial x}(t, x, a) = -b$$

On obtient :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial a}(t, X, a) + \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial a}(t, X, a) \cdot \dot{X} = 0 \quad (\gamma)$$

(iii) Soustrayons (β) de (γ) , On obtient :

$$\left[\dot{X} - \frac{\partial H}{\partial y}(t, X, Y) \right] \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial a}(t, X, a) = 0$$

ce qui implique que :

$$\dot{X} - \frac{\partial H}{\partial y}(t, X, Y) = 0$$

(iv) Différentions (α) par rapport à x . On obtient :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x}(t, x, a) + \frac{\partial H}{\partial x} \left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}(t, x, a) \right) + \frac{\partial H}{\partial y} \left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}(t, x, a) \right) \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial x \otimes \partial x}(t, x, a) = 0$$

En remplaçant x par $X(t, a, b)$, on déduit des propriétés de X et Y que :

$$- \frac{\partial H}{\partial x}(t, X, Y) = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x}(t, X, a) + \frac{\partial^2 S}{\partial x \otimes \partial x}(t, X, a) \cdot \dot{X}$$

et, en différentiant (β), on obtient :

$$\dot{Y} = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x}(t, X, a) + \frac{\partial^2 S}{\partial x \otimes \partial x}(t, X, a) \cdot \dot{X}$$

Par conséquent :

$$\dot{Y} = - \frac{\partial H}{\partial x}(t, X, Y)$$

12.2.7 Etude d'un système mécanique fermé. Lois de conservation.

12.2.7.1 Energie d'un système mécanique fermé.

Considérons un système mécanique fermé dont la trajectoire réelle x vérifie les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Alors :

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left(\left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \mid \dot{x} \right\rangle_n + \left\langle \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \mid \ddot{x} \right\rangle_n \right) = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left(\left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \mid \dot{x} \right\rangle_n \right)$$

Si le système mécanique considéré est *fermé*, on a :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \left(L - \left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \mid \dot{x} \right\rangle_n \right) = 0 \quad \text{donc} \quad \left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \mid \dot{x} \right\rangle_n - L = cste$$

$\left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \mid \dot{x} \right\rangle_n - L$ est (une intégrale première du système qui est) appelée l'*énergie mécanique* du système

Par conséquent, l'*énergie mécanique* d'un système mécanique fermé reste constante pendant tout le mouvement.

12.2.7.2 Quantité de mouvement d'un système mécanique fermé dans un espace homogène.

Dans un espace *homogène*, les propriétés mécaniques d'un système mécanique *fermé* ne changent pas lors d'une translation de ce système.

Il en résulte que :

quelle que soit la translation x_0 de ce système, on a :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

En effet,

$$0 = L(t, x(t) + x_0, \dot{x}(t)) - L(t, x(t), \dot{x}(t)) \simeq \left\langle \frac{\partial L}{\partial x} \mid x_0 \right\rangle_n$$

d'où le résultat annoncé.

Si x est une trajectoire réelle du système mécanique considéré, on a :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \text{et donc} \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \text{cste}$$

Par conséquent, *dans un espace homogène*,

la quantité de mouvement $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ d'un système mécanique fermé, de lagrangien L reste constante pendant tout le mouvement.

12.2.7.3 Moment cinétique d'un système mécanique fermé, dans un espace isotrope.

Dans un espace *isotrope*, les propriétés mécaniques d'un système mécanique *fermé* ne changent pas lors d'une rotation de ce système.

Dans une rotation ϱ de centre l'origine, on a :

$$\varrho(x) = x + \varphi_0 \wedge x, \quad \varphi_0 \quad \text{étant constant}$$

Donc :

$$\dot{\varrho}(x) = \dot{x} + \varphi_0 \wedge \dot{x}$$

Alors :

$$0 = L(t, x + \varphi_0 \wedge x, \dot{x} + \varphi_0 \wedge \dot{x}) - L(t, x, \dot{x}) \simeq \left\langle \frac{\partial L}{\partial x} \mid \varphi_0 \wedge x \right\rangle_n + \left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \mid \varphi_0 \wedge \dot{x} \right\rangle_n$$

Si φ_0 est "petit", on a :

$$\left\langle \varphi_0 \mid \left(\frac{\partial L}{\partial x} \wedge x \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \wedge \dot{x} \right) \right\rangle = \left\langle \varphi_0 \mid \left(\frac{d}{dt} (p \wedge x) \right) \right\rangle = 0$$

Comme on peut choisir arbitrairement φ_0 , on déduit de la relation précédente que $(p \wedge x) = \text{cste}$.

Par conséquent, *dans un espace isotrope*, le moment cinétique $p \wedge x$ d'un système mécanique fermé reste constant pendant tout le mouvement.

12.3 Un exemple élémentaire. Mouvement d'un point matériel dans \mathbb{R}^3 .

On considère le mouvement d'un point matériel dans \mathbb{R}^3 , caractérisé par sa trajectoire x que l'on suppose de classe C^2 sur un intervalle ouvert (t_1, t_2) de \mathbb{R} .

On note x_1, x_2, x_3 les trois composantes de x .

On munit \mathbb{R}^3 du produit scalaire euclidien canonique que l'on notera $\langle \cdot | \cdot \rangle_3$ et on notera $\|\cdot\|_3$ la norme qui lui est associée.

(i) Explicitation du lagrangien L du mouvement.

Désignons par m la masse du point matériel en mouvement, U son énergie potentielle et $x \rightarrow \frac{1}{2}m \|\dot{x}\|_3^2$ son énergie cinétique. Alors :

$$\forall t, L(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m \|\dot{x}\|_3^2 - U(x).$$

(ii) Equation(s) d'Euler du mouvement.

On sait que :

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) = \left(-\frac{\partial U}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial x_j} = -\frac{\partial U}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3 \right)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \right) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m\dot{x}_j, \quad j = 1, 2, 3 \right)$$

et :

$$\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + U'(x) = 0 \right) \Leftrightarrow \left(m\ddot{x}_j + \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, 3. \right)$$

(iii) Energie du mouvement.

Si E est l'énergie du mouvement, on a :

$$E = \left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \mid \dot{x} \right\rangle_3 - L = m \|\dot{x}\|_3^2 - \frac{1}{2}m \|\dot{x}\|_3^2 + U(x)$$

Par conséquent :

$$E = \frac{1}{2}m \|\dot{x}\|_3^2 + U(x)$$

(iv) Hamiltonien du mouvement.

Si H est l'hamiltonien du mouvement, on a :

$$H(t, x, p) = \left\langle p \mid \dot{x} \right\rangle_3 - L(t, x, \dot{x}) \quad \text{avec} \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

Ainsi : $H(t, x, p) = (2m)^{-1} \|p\|^2 + U(x)$.

(v) **Equation(s) de Hamilton.**

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -U'(x)$$

ou de façon plus explicite :

$$\dot{x}_j = \frac{p_j}{m}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial U}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3$$

d'où il résulte que :

$$m\ddot{x}_j + \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

(vi) **Equation(s) de Hamilton-Jacobi.** Avec les notations utilisées plus haut, on a :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0$$

ce qui implique que :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} + (2m)^{-1} \left\| \frac{\partial S}{\partial x} \right\|^2 + U(x) = 0 \right) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial t} + (2m)^{-1} \left(\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial S}{\partial x_j} \right)^2 \right) + U(x) = 0 \right)$$

(vii) **Intégration des équations du mouvement.**

Première méthode : intégration de l'équation de Lagrange $m\ddot{x} = -U'(x)$.

Avec les conditions aux limites suivantes : $x(t_0) = \alpha_0$ $\dot{x}(t_0) = \beta_0$ pour un problème de Cauchy

ou bien $x(t_0) = \alpha_0$, $x(t_1) = \alpha_1$ pour un problème de Dirichlet.

La solution du problème de Cauchy est alors :

$$mx(t) = \alpha_0 + \beta_0(t - t_0) - \int_{t_0}^t U'(x(s)) ds$$

et la solution du problème de Dirichlet :

$$mx(t) = \frac{t - t_1}{t_0 - t_1} x(t_0) + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} x(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} G(t, s) U'(x(s)) ds$$

avec :

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} G(t, s) = \delta_t(s), \quad G(t, t_0) = G(t, t_1) = 0$$

En général, x s'obtient comme solution d'un problème *non-linéaire*.

Pour calculer x numériquement, on peut utiliser des méthodes de résolution approchée d'équations différentielles (vectorielles) à pas séparés (de type Runge et Kutta) ou bien à pas liés.

Deuxième méthode : intégration de l'équation de Hamilton-Jacobi.

Nous allons présenter cette méthode dans le cas où $U(x) = \sum_{j=1}^3 U_j(x_j)$.

Nous allons chercher, alors une solution S de l'équation de Hamilton-Jacobi telle que :

$$\forall t, \forall x, \quad S(t, x) = f(t) + \sum_{j=1}^3 g_j(x_j)$$

Ainsi, on aura :

$$\forall t, \forall x, \quad f'(t) + (2m)^{-1} \left[\sum_{j=1}^3 (g'_j(x_j))^2 \right] + \sum_{j=1}^3 U_j(x_j) = 0$$

Il existe donc des constantes arbitraires h_0, h_1, h_2, h_3 telles que :

$$h_1 + h_2 + h_3 = h_0$$

$$f'(t) = -h_0 \quad \text{et} \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}, \quad (2m)^{-1} (g'_j(x_j))^2 + U_j(x_j) = h_j$$

On en déduit que :

(*) $\forall t, f(t) = k_0 - h_0 t$ où k_0 est une constante

(**) si nous posons $A_j(h_j) = \{x_j ; h_j - U_j(x_j) \in \mathbb{R}_+\}$, alors :

$$\forall j \in \{1, 2, 3\}, \forall x_j \in A_j(h_j), \quad g_j(x_j) = \varepsilon_j \int (2m(h_j - U_j(y_j)))^{\frac{1}{2}} dy_j \quad \text{où} \quad \varepsilon_j = \pm 1$$

Par conséquent,

$$\forall t, \forall x = (x_1, x_2, x_3), \quad x_j \in A_j(h_j), \quad j \in \{1, 2, 3\},$$

$$S(t, x) = k_0 - h_0 t + \sum_{j=1}^3 \varepsilon_j \int (2m(h_j - U_j(y_j)))^{\frac{1}{2}} dy_j \quad \text{où} \quad \varepsilon_j = \pm 1$$

On détermine alors x en fonction de t en opérant comme on l'a indiqué plus haut.

Les calculs se simplifient beaucoup dans les cas particuliers suivants :

(*) $x \in \mathbb{R}, \quad U(x) = -\omega^2 x$ où $\omega \neq 0$.

Alors, $m\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. et le mouvement est *oscillatoire*.

(**) $x \in \mathbb{R}^3, \quad U(x) = 0$.

Alors si $h_j \geq 0$, on a : $g_j(x_j) = (2m h_j)^{\frac{1}{2}} x_j + k_j$ où k_j est une constante arbitraire et

$$S(t, x) = k_0 - h_0 t + \sum_{j=1}^3 \varepsilon_j (2m h_j)^{\frac{1}{2}} x_j + k_j \quad \text{avec} \quad \varepsilon_j = \pm 1$$

12.4 Mécanique et Optique. De l'action à la phase.

12.4.1 Mécanique newtonnienne et optique géométrique.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ et $a, b \in \mathbb{R}^3$, $a \neq b$.

Désignons par $C^1(\alpha, \beta)$, l'espace vectoriel des fonctions définies et continues ainsi que leurs dérivées premières, sur l'intervalle (α, β) . Soit :

$$E(\alpha, \beta) = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in (C^1(\alpha, \beta))^3 ; x(\alpha) = a, x(\beta) = b \right\}$$

$$E_0(\alpha, \beta) = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in (C^1(\alpha, \beta))^3 ; x(\alpha) = 0, x(\beta) = 0 \right\}$$

On notera \dot{x} , la dérivée d'un élément quelconque x de $E(\alpha, \beta)$ (resp. $E_0(\alpha, \beta)$) ainsi $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$.

On notera aussi $\langle \cdot | \cdot \rangle_3$ (resp. $\|\cdot\|_3$) le produit scalaire euclidien (resp. la norme euclidienne) canonique de \mathbb{R}^3 .

Etant donné un élément quelconque $x \in E(\alpha, \beta)$, on notera $\Gamma(x)$ la courbe dans \mathbb{R}^3 d'extrémités a et b (distinctes) dont le point courant a pour coordonnées $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, $t \in (\alpha, \beta)$.

Supposons maintenant que \mathbb{R}^3 soit un milieu optique dont l'indice en un point $x(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ sera noté $n(x(t))$.

On appelle chemin optique relatif à $x \in E(\alpha, \beta)$ (ou à $\Gamma(x)$), la fonctionnelle l définie sur $E(\alpha, \beta)$ telle que :

$$\forall x \in E(\alpha, \beta), l(x) = \int_{\alpha}^{\beta} n(x(t)) \|\dot{x}(t)\|_3 dt$$

On posera alors :

$$\forall x \in E(\alpha, \beta), \forall t \in (\alpha, \beta), L(x(t), \dot{x}(t)) = n(x(t)) \|\dot{x}(t)\|_3$$

Nous nous proposons de déterminer s'il existe un élément de $E(\alpha, \beta)$ qui rende extrémale l sur $E(\alpha, \beta)$.

Pour cela, nous allons calculer la dérivée (de Fréchet) de l . On a :

$$\forall x \in E(\alpha, \beta), \forall y \in E_0(\alpha, \beta), \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} [l(x + \lambda y) - l(x)] &= \lambda^{-1} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} [L(x(t) + \lambda y(t), \dot{x}(t) + \lambda \dot{y}(t)) - L(x(t), \dot{x}(t))] dt \right\} \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\left\langle \frac{\partial}{\partial x} L(x(t), \dot{x}(t)) \mid y(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(x(t), \dot{x}(t)) \mid \dot{y}(t) \right\rangle + \varepsilon(t; x, \lambda) \right] dt \end{aligned}$$

On montre que, si L est de classe C^1 , lorsque λ tend vers zéro alors ε tend vers zéro, uniformément par rapport à t sur (α, β) et par rapport à y sur $E_0(\alpha, \beta)$.

Or :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left\langle \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(x(t), \dot{x}(t)) \mid \dot{y}(t) \right\rangle_3 dt = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} L(x(t), \dot{x}(t)) \cdot \dot{y}_j(t) \right) \right) dt =$$

$$\left[\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} L(x(t), \dot{x}(t)) y_j(t) \right]_{t=\alpha}^{t=\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \left[\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} L(x(t), \dot{x}(t)) \cdot y_j(t) \right) \right] dt$$

Comme $y_j(\alpha) = y_j(\beta) = 0$, $j \in \{1, 2, 3\}$, on a :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left\langle \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(x(t), \dot{x}(t)) \mid y(t) \right\rangle_3 dt = - \int_{\alpha}^{\beta} \left[\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} L(x(t), \dot{x}(t)) \cdot y_j(t) \right) \right] dt$$

Il en résulte que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-1} [l(x + \lambda y) - l(x)] = \int_{\alpha}^{\beta} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} L(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(x(t), \dot{x}(t)) \mid y(t) \right) \right\rangle_3 dt$$

Mais,

$$\forall t \in (\alpha, \beta), \quad \frac{\partial}{\partial x} L(x(t), \dot{x}(t)) = \|\dot{x}(t)\|_3 \operatorname{grad}(n(x(t)))$$

et :

$$\forall t \in (\alpha, \beta), \quad \frac{\partial}{\partial x} L(x(t), \dot{x}(t)) = n(x(t)) \cdot u(t) \quad \text{où} \quad u(t) = \frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|}$$

Notons s_x l'abscisse curviligne sur la courbe $\Gamma(x)$. On sait que :

$$d s_x(t) = \|\dot{x}(t)\| dt, \text{ d'où : } \frac{d}{d s_x} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dt}{d s_x} = \|\dot{x}(t)\|^{-1} \frac{d}{dt}$$

On en conclut que si x rend l extrémale, alors :

$$\forall t \in (\alpha, \beta), \quad \frac{\partial}{\partial x} L(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(x(t), \dot{x}(t)) \right) = 0$$

dans l'espace vectoriel qui est le dual topologique de $E_0(\alpha, \beta)$ muni de sa topologie habituelle.

Par conséquent, en posant :

$$\tilde{x}(s) = x(t) \quad \text{et} \quad \tilde{u}(s) = \frac{\dot{\tilde{x}}(s)}{\|\dot{\tilde{x}}(s)\|} \quad \text{on a :} \quad \operatorname{grad}(n(\tilde{x}(s))) = \frac{d}{ds} (n(\tilde{x}(s)) \cdot \tilde{u}(s))$$

L'équation ci-dessus est appelée *équation ikonale*. Elle est formellement analogue à l'équation fondamentale de la dynamique du point matériel, à savoir :

$$\frac{d(pu)}{ds} = \frac{F}{v}$$

où s est l'abscisse curviligne de la trajectoire γ du mouvement, mesurée à partir de l'origine du mouvement sur γ où,

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ est la vitesse du point matériel sur } \gamma$$

et $u(s)$, le vecteur unitaire de la tangente à la courbe γ au point d'abscisse curviligne s .

Ci-dessus, nous avons supposé que x était de classe C^1 , ce qui n'est pas vrai, en particulier dans le cas de la réflexion ou de la réfraction. Dans ces deux cas on pourra supposer que :

$$E(\alpha, \beta) = \left\{ x \in (C^0(\alpha, \beta))^2 ; \forall t \in (\alpha, \beta), x(t) = \int_{\alpha}^t x^1(s) ds \quad \text{où} \quad x^1 \in (L^p(\alpha, \beta))^3, p \in \mathbb{R}, p \geq 1 \right\}$$

et poursuivre l'étude comme on l'a fait ci-dessus dans le cas où x était de classe C^1 .

13.1 Groupes. Anneaux. Corps.

Définition 21 :

On appelle **groupe**, la donnée d'un couple (G, \perp) où G est un ensemble et \perp une loi de composition interne sur G telle que :

- (i) \perp est associative ç-à-d : $\forall x, y, z \in G \quad (x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$.
- (ii) \perp admet un élément neutre e ç-à-d : $\forall x \in G, \quad x \perp e = e \perp x = x$.
- (iii) tout élément de G a un inverse ç-à-d : $\forall x \in G \quad \exists y \in G$ tel que : $x \perp y = y \perp x = e$.
On dit que (G, \perp) est commutatif ou abélien si : $\forall x, y \in G, \quad x \perp y = y \perp x$.

Notation 1 :

Habituellement, on utilise, au lieu de la notation \perp la notation $+$ ou bien la notation \cdot ; on dit alors, que $(G, +)$ (resp. (G, \cdot)) est un groupe additif (resp. multiplicatif).

Exemples 13.1.1 :

- * $(G, +)$ où G est l'ensemble des nombres entiers relatifs (des nombres rationnels, réels ou complexes) et $+$ est l'addition.
- ** (G, \perp) où G est l'ensemble des permutations des éléments de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ $n \in \mathbb{N}_+^*$ et \perp le produit de deux permutations.
- *** Le groupe des endomorphismes de (G, \perp) .
On appelle endomorphisme de (G, \perp) une application u de G dans lui-même telle que :
 $\forall x, y \in G \quad u(x \perp y) = u(x) \perp u(y)$.
Notons $L(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G et munissons $L(G)$ de la loi \circ de composition des applications telle que :
 $\forall x \in G \quad \forall u, v \in L(G) \quad (v \circ u)(x) = v(u(x))$.
On montre facilement que $(L(G), \circ)$ est un groupe. (On notera que l'application identité de G est un élément neutre de $(L(G), \circ)$.)

Définition 22 :

On appelle **anneau**, la donnée d'un triplet (A, \perp, \top) où A est un ensemble et \perp, \top deux lois de composition internes sur A telles que :

- (i) (A, \perp) est un groupe commutatif.
- (ii) \perp est une loi distributive par rapport à \top ζ -à-d telle que :
 $\forall x, y, z \in A, \quad x \top (y \perp z) = (x \top y) \perp (x \top z)$ et $(x \perp y) \top z = (x \top z) \perp (y \top z)$.
- (iii) \top est associative sur A ζ -à-d que : $\forall x, y, z \in A, \quad x \top (y \top z) = (x \top y) \top z$.
- (iv) \top admet un élément neutre ε ζ -à-d : $\forall x \in A, x \top \varepsilon = \varepsilon \top x = x$.

On dit que l'anneau (A, \perp, \top) est *commutatif* ou *abelien* si :

$$\forall x, y \in A, \quad x \top y = y \top x.$$

On dit qu'un anneau (A, \perp, \top) commutatif est *intègre* si : $e \neq \varepsilon$ et s'il n'existe pas d'éléments $x, y \in A$ tels que :

$$x \neq e, \quad y \neq e, \quad x \top y = e.$$

Notation 2 :

Habituellement, on utilise, au lieu des notations \perp et \top les notations $+$ et \cdot respectivement ; on note alors 0 (resp. 1) l'élément neutre de $+$ (resp. \cdot).

Exemples 13.1.2 :

* (A, \perp, \top) où A est l'ensemble des nombres entiers relatifs (des nombres rationnels, réels, complexes) et où $+$ (resp. \cdot) est l'addition (resp. la multiplication).

** Notons $L(A)$ l'ensemble des endomorphismes de (A, \perp) . On montre facilement que $L(A)$ muni de la loi $+$ d'addition des endomorphismes et de la loi \cdot de composition des endomorphismes est un anneau.

Définition 23 :

On appelle *corps*, un anneau (A, \perp, \top) qui, privé de l'élément neutre de \perp est un groupe pour la loi \top .

Exemple 13.1.3 :

$(A, +, \cdot)$ où A est l'ensemble des nombres rationnels (des nombres réels, complexes) et où $+$ (resp. \cdot) est l'addition (resp. la multiplication).

13.2 (Rappels) sur les espaces vectoriels.

Dans la suite, \mathbb{K} désignera le corps des nombres réels \mathbb{R} ou le corps des nombres complexes \mathbb{C} . On notera $|\cdot|$ la valeur absolue d'un nombre réel ou le module d'un nombre complexe et $\bar{\gamma}$ le conjugué d'un nombre complexe γ .

13.2.1 Espaces normés. Espaces préhilbertiens.

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} . On appelle norme sur E , une application p de E dans \mathbb{R}_+ , telle que :

$$* \quad \forall x \in E, (p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0)$$

$$** \quad \forall x, y \in E, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$$

$$*** \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, p(\lambda x) \leq |\lambda| p(x).$$

E muni de la norme p sera noté (E, p) .

Exemple 13.2.1 :

$n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

On pose : $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E, \forall \alpha \in \mathbb{N}^*$,

$$p_\alpha(x) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{et} \quad p_\infty(x) = \text{Max}\{|x_k| ; k = 1, \dots, n\}$$

p_α et p_∞ sont des normes sur E .

Exemple 13.2.2 :

E est l'espace des suites infinies de scalaires appartenant à \mathbb{K} , $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ telles que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^\alpha < +\infty \quad (\text{resp. } \text{Max}\{|x_k| ; k \in \mathbb{N}^*\} < +\infty)$$

On pose :

$$p_\alpha(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{et} \quad p_\infty(x) = \text{Max}\{|x_k| ; k \in \mathbb{N}^*\}$$

Alors, p_α (resp. p_∞) est une norme sur E .

E est alors noté l^α (resp. l^∞).

Exemple 13.2.3 :

$E = \mathbb{C}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On pose :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E, \forall y = (y_1, \dots, y_n) \in E, \langle x | y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}.$$

Alors : $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien.

Exemple 13.2.4 :

$E = l^2$.

On pose :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in E, \forall y = (y_1, \dots, y_n, \dots) \in E, \langle x | y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

Alors : $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien.

Exemple 13.2.5 :

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. E est l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, définies et continues sur l'intervalle (a, b) et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Posons :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x | y \rangle = \int_a^b x(t) \cdot y(t) dt .$$

Alors : $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien.

13.2.2 Complétion d'un espace normé.

Soit (E, p) un espace vectoriel normé sur le corps \mathbb{K} .

On dit qu'une suite (x_n) d'éléments de E est une *suite de Cauchy* dans (E, p) si il existe, quel que soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $m \in \mathbb{N}^*$, tel que, quels que soient k et l appartenant à \mathbb{N}^* avec $k \geq m$ $l \geq m$ on ait : $p(x_k - x_l) \leq \varepsilon$.

On dit que (E, p) est un espace vectoriel normé complet si :

quelle que soit la suite de Cauchy $(x_n) \subset E$, il existe un élément $\bar{x} \in E$ tel que .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n - \bar{x}) = 0$$

(c-à-d \bar{x} est la limite de la suite (x_n) dans (E, p)).

Un espace vectoriel normé complet est appelé un espace de Banach.

Un espace préhilbertien complet est appelé un espace de Hilbert.

Les espaces vectoriels normés définis ci-dessus, dans les exemples 1 à 5 sont complets.

13.2.3 Continuité.

Soient (E, p) et (F, q) deux espaces normés et u une application linéaire de E dans F .

Définition 24 On dira que u est continue de (E, p) dans (F, q) si :

$$\exists \gamma \text{ tel que : } \forall x \in E \quad q(u(x)) \leq \gamma p(x) .$$

Proposition 16 Notons $L((E, p) (F, q))$ l'espace vectoriel des applications linéaires et continues de (E, p) dans (F, q) .

Posons :

$$\forall u \in L((E, p) (F, q)) \quad \rho(u) = \text{Sup} \left\{ \frac{q(u(x))}{p(x)} ; x \in E \right\}$$

Alors : $(L((E, p) (F, q)) \quad \rho)$ est un espace normé.

Si (E, p) et (F, q) sont des espaces de Banach, alors $(L((E, p) (F, q)) \quad \rho)$ est un espace de Banach.

13.2.4 Dualité

Soit (E, p) un espace vectoriel sur \mathbb{K} , normé.

On dit qu'une application linéaire u de (E, p) dans \mathbb{K} est *continue* si :

Il existe un scalaire $\gamma(u) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, quel que soit $x \in E$, on ait : $|u(x)| \leq \gamma(u).p(x)$.

On appelle **dual topologique** de l'espace vectoriel normé (E, p) sur \mathbb{K} , et on le note E^* , l'espace vectoriel des applications linéaires et continues de E dans \mathbb{K} .

Ainsi, quel que soit $x^* \in E^*$, l'application qui à tout $x \in E$ associe $x^*(x)$ est linéaire et il existe un scalaire $\gamma(x^*) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

quel que soit $x \in E$, $|x^*(x)| \leq \gamma(x^*).p(x)$.

On vérifie aussi facilement que :

quel que soit $x \in E$, l'application qui à tout $x^* \in E^*$ associe $x^*(x)$ est linéaire.

Dans la suite on posera :

$\forall x \in E, \forall x^* \in E^*, x^*(x) = \langle x, x^* \rangle$.

Posons :

$$\forall x^* \in E^*, p^*(x^*) = \text{Sup} \{ |\langle x, x^* \rangle| ; p(x) \leq 1 \} = \text{Sup} \{ |\langle x, x^* \rangle| ; p(x) = 1 \}$$

On vérifie facilement que p^* est une norme sur E^* qu'on appelle la **norme duale** de p .

Alors : (E^*, p^*) est appelé le dual topologique de (E, p) .

Exemple 6 :

On utilise dans cet exemple les mêmes hypothèses et notations que dans l'exemple 2 ci-dessus. On montre que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^*, \alpha \geq 2, (p_\alpha)^* = p_{\alpha^*} \quad \text{où} \quad \alpha^* \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^*} = 1$$

De même : $(p_1)^* = p_\infty$.

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert sur \mathbb{K} .

Soit y un élément quelconque de E ;

notons l_y , l'application de E dans \mathbb{K} telle que : $\forall x \in E, l_y(x) = \langle x | y \rangle$.

On vérifie facilement que :

(i) l_y est linéaire

(ii) l_y est injective.

En effet, soit y_1 et $y_2 \in E$ tels que : $\forall x \in E, l_{y_1}(x) = l_{y_2}(x)$. Alors :

$$(\forall x \in E, \langle x | y_1 - y_2 \rangle = 0) \Rightarrow (\langle y_1 - y_2 | y_1 - y_2 \rangle = 0) \Leftrightarrow (y_1 = y_2)$$

(iii) l_y est continue

car : $\forall x \in E, |l_y(x)| = |\langle x | y \rangle| \leq \|y\| \cdot \|x\|$.

Il en résulte que : $l_y \in E^*$.

Inversement, Riesz a montré que :

Quel que soit $x^* \in E^*$, il existe un et un seul élément appartenant à E , que nous noterons Hx^* tel que :

$$\forall x \in E, \langle x, x^* \rangle = \langle x | Hx^* \rangle$$

et que : H est une application linéaire et continue de $(E^*, \|\cdot\|^*)$ dans $(E, \|\cdot\|)$.

H est appelé l'**application de dualité** de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Cette application permet d'identifier $(E^*, \|\cdot\|^*)$ à $(E, \|\cdot\|)$.

13.2.5 Bases.

13.2.5.1 Bases des espaces de dimensions finies.

Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} .

On dit que E est de dimension finie - on écrira alors $\dim(E) < +\infty$ - s'il existe un nombre fini n d'éléments de E , soit x_1, \dots, x_n , appelés **générateurs** de E tels que :

$$\forall x \in E, x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \quad \text{où} \quad \lambda_k \in \mathbb{K}, k = 1, \dots, n$$

sinon on dit que E est de dimension **infinie**.

On dit qu'un système fini de générateurs de E , soit (x_1, \dots, x_n) , est une base de E si les vecteurs x_1, \dots, x_n sont linéairement indépendants c-à-d si :

$$\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0, \lambda_k \in \mathbb{K}, k = 1, \dots, n \right) \Rightarrow (\lambda_k = 0, k = 1, \dots, n)$$

On vérifie facilement que toutes les bases d'un espace vectoriel E sur \mathbb{K} , de dimension finie, ont le même nombre d'éléments qu'on appelle la dimension de E .

Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} et $E^\#$, l'espace vectoriel sur \mathbb{K} des applications linéaires de E dans \mathbb{K} . $E^\#$ est appelé le **dual algébrique** de E .

On montre que si $\dim(E) < +\infty$, alors :

quelle que soit la norme p sur E , le dual algébrique $E^\#$ de E peut être identifié au dual topologique E^* de (E, p)

et $\dim(E) = \dim(E^\#) = \dim(E^*)$.

Exemple 7 :

Supposons que $E = \mathbb{C}$.

Si l'on considère E comme un espace vectoriel sur \mathbb{R} , alors, $\dim(E) = 2$ car E a pour base $(1, i)$, où $i^2 = -1$.

Si l'on considère E comme un espace vectoriel sur \mathbb{C} , alors, $\dim(E) = 1$.

En effet, soit $z_0 = a_0 + ib_0$ où $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ avec $a_0^2 + b_0^2 \neq 0$.

Alors, quel que soit $z \in \mathbb{C}$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $z = \lambda z_0$.

13.2.5.2 Bases des espaces de dimensions infinies.

Soit (E, p) un espace vectoriel normé sur le corps \mathbb{K} .

Supposons que E soit de dimension infinie.

On dit qu'une famille $(x_k)_{k \in J}$ d'éléments de E est **totale** dans (E, p) si :
quel que soit $x \in E$, quel que soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe une partie finie J de I ,

une famille de scalaires $(\lambda_k)_{k \in J} \subset \mathbb{K}$ tels que $p(x - \sum_{k \in J} \lambda_k x_k) \leq \varepsilon$.

On dit qu'une famille $(x_k)_{k \in I}$ d'éléments de E est **libre** dans (E, p) si :

quel que soit $m \in I$, x_m n'appartient pas au sous-espace vectoriel **fermé** dans (E, p) engendré par la famille $(x_k)_{k \in I \setminus m}$.

(Rappelons qu'un sous-espace vectoriel F de E est fermé dans (E, p) s'il contient les limites de toutes les suites contenues dans F , convergentes dans (E, p))

et que le sous-espace vectoriel fermé de (E, p) engendré par une partie A de E est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels fermés de (E, p) contenant A).

On appelle **base** d'un espace vectoriel normé (E, p) toute famille $(x_k)_{k \in I}$ d'éléments de E qui est libre et totale dans (E, p) .

13.3 Complément. Espace vectoriel topologique (localement convexe).

Définition :

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Soit B un ensemble non vide de parties U de E telles que :

(i) $\forall U \in B \quad \forall x \in U \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad |\lambda| \leq 1$ on a : $\lambda x \in U$ (on dit que U est *équilibrée*)

(ii) $\forall x \in E \quad \exists k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad |\lambda| \leq k$ on a : $\lambda x \in U$ (on dit que U est *absorbante*)

(iii) $\forall U_1, U_2 \in B \quad \exists U_3 \in B$ tel que : $U_3 \subset U_1 \cap U_2$

(iv) $\forall U \in B \quad \exists W \in B$ tel que : $W + W \subset U$.

(Notons que de (i) et (ii) on déduit que : $\forall U \in B \quad 0 \in U$)

Alors, on dira que B est une famille de voisinages de 0 dans E que B définit une topologie vectorielle sur E et

que (E, B) est un *espace vectoriel topologique (e.v.t.)*.

On dira que (E, B) est *localement convexe (l.c.)* si tout voisinage $U \in B$ est convexe.

Exemple 8 :

Soit (E, p) un e.v.t. normé.

Posons : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad U(\varepsilon) = \{x \in E ; p(x) < \varepsilon\}$ et soit $B = \{U(\varepsilon) ; \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\}$.

Alors, (E, B) est un e.v.t.l.c.

Exemple 9 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $D(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment différentiables sur \mathbb{R}^n et à support compact.

Posons : $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$U(p, m, \varepsilon) = \{\varphi \in D(\mathbb{R}^n) ; \text{Sup} \{|D^\alpha \varphi(x)| < \varepsilon \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \|x\|_n\}\}$$

$$\text{et } B = \{U(p, m, \varepsilon) \subset D(\mathbb{R}^n) \quad p \in \mathbb{N}^* \quad m \in \mathbb{N} \quad \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\}.$$

On montre que $(D(\mathbb{R}^n); B)$ est un e.v.t.l.c.

2.7 Fonctionnelle de Dirac.

Définition :

Désignons par $C_K^0(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des applications linéaires et continues de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , à support compact dans \mathbb{R}^n

Etant donné $x \in \mathbb{R}^n$ considérons l'application l_x de $C_K^0(\mathbb{R}^n)$ dans \mathbb{R} telle que :

$$\forall f \in C_K^0(\mathbb{R}^n) \quad l_x(f) = f(x).$$

Posons : $\forall f \in C_K^0(\mathbb{R}^n), \quad \|f\| = \text{Sup} \{|f(y)| ; y \in \mathbb{R}^n\}$.

$(C_K^0(\mathbb{R}^n) ; \|\cdot\|)$ est un espace normé et : $\forall f \in C_K^0(\mathbb{R}^n) \quad |f(x)| \leq \|f\|$.

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité entre $C_K^0(\mathbb{R}^n)$ et son dual topologique.

On appelle fonctionnelle de Dirac en x et on la note δ_x , l'élément du dual topologique de $(C_K^0(\mathbb{R}^n); \|\cdot\|)$ tel que :

$$\forall f \in C_K^0(\mathbb{R}^n) \quad l_x(f) = f(x) = \langle f, \delta_x \rangle . .$$

13.4 Algèbre. Notions élémentaires.

Définition 3.1

On appelle *algèbre* sur un corps commutatif \mathbb{K} , un espace vectoriel \mathcal{A} muni d'une loi de composition interne

(appliquant $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ dans \mathcal{A}) appelée multiplication qui est bilinéaire sur l'espace vectoriel \mathcal{A} .

On dit qu'une algèbre \mathcal{A} est associative (resp. unitaire) si la multiplication sur \mathcal{A} est associative (resp. admet un élément neutre).

Exemple 3.1

Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif \mathbb{K} et $L(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E .

Munissons $L(E)$ de la multiplication qui, à tout couple (u, v) d'éléments de $L(E)$ associe leur produit de composition $(u \circ v)$.

Alors, $L(E)$ est une algèbre sur \mathbb{K} .

Définition 3.2

On appelle **algèbre de Lie** (sur un corps commutatif \mathbb{K}), une algèbre \mathcal{A} (sur \mathbb{K}) munie d'une multiplication notée

canoniquement $[\cdot, \cdot]$ et appelée *crochet de Lie*, qui satisfait aux deux axiomes suivants :

(j) $\forall x \in \mathcal{A}, [x, x] = 0$

ce qui implique que : $\forall x, y \in \mathcal{A}, [x, y] = -[y, x]$ (antisymétrie).

(jj) $\forall x, y, z \in \mathcal{A}, [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

Cette dernière relation est appelée l'identité de Jacobi.

Exemples 3.2

(i) \mathbb{R}^3 muni du produit vectoriel est une algèbre de Lie.

(ii) Soit \mathbb{K} un corps commutatif et $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathbb{K}(n)$, l'ensemble des matrices de type $n \times n$ dont les éléments appartiennent à \mathbb{K} .

On sait que $\mathbb{K}(n)$ a une structure d'espace vectoriel (sur \mathbb{K}).

Posons : $\forall a, b \in \mathbb{K}(n), [a, b] = ab - ba$.

Alors $\mathbb{K}(n)$ muni de la multiplication $[\cdot, \cdot]$ a une structure d'algèbre de Lie.

(iii) Plus généralement, considérons une algèbre associative \mathcal{A} .

Posons : $\forall a, b \in \mathcal{A}, [a, b] = ab - ba$.

Alors \mathcal{A} munie de la multiplication $[\cdot, \cdot]$ a une structure d'algèbre de Lie.

Définition 3.3

Soit \mathcal{A} une algèbre sur un corps commutatif \mathbb{K} .

(i) Soit \mathcal{B} un sous-ensemble de \mathcal{A} . Si \mathcal{B} muni de la structure d'algèbre induite par celle de \mathcal{A} est une algèbre sur \mathbb{K} on dit

que \mathcal{B} est une **sous-algèbre** de \mathcal{A} .

(ii) On dit qu'un sous-ensemble \mathcal{J} de \mathcal{A} est un **idéal à gauche** (resp. à droite) de \mathcal{A} si \mathcal{J} est une sous-algèbre de \mathcal{A} telle que :

$$\forall a \in \mathcal{A}, \forall b \in \mathcal{J}, ab \in \mathcal{J} \text{ ou encore } a\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$$

$$(\text{resp. } \forall a \in \mathcal{A}, \forall b \in \mathcal{J}, ba \in \mathcal{J} \text{ ou encore } \mathcal{J}a \subset \mathcal{J})$$

On dit qu'un idéal de \mathcal{A} est un **idéal bilatère** si c'est un idéal à droite et à gauche de \mathcal{A} .

Définition 3.4

On dit qu'une algèbre \mathcal{A} est **simple** si elle est unitaire, de dimension finie et n'a pas d'autres idéaux bilatères que $\{0\}$ et \mathcal{A} .

On dit qu'une algèbre \mathcal{A} est **semi-simple** si elle est somme directe d'un nombre fini d'algèbres simples.

Définition 3.5 : Algèbres de Clifford

Une présentation des algèbres de Clifford se trouve à la fin du chapitre P9.

CHAPITRE 14

M 2 ÉLÉMENTS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL.

14.1 A. Point de vue analytique.

14.1.1 1. Formule de Taylor d'ordre n

14.1.1.1 1.1 Dérivée en un point.

Soit f une fonction réelle de la variable réelle ($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) et x_0 un nombre réel. On appelle dérivée de f en x_0 , la limite, si elle existe du quotient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{lorsque } x \text{ tend vers } x_0, \quad x \neq x_0$$

On écrit :

$$f'(x_0) = \lim \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}; \quad x \rightarrow x_0, \quad x \neq x_0 \right\}$$

Supposons que $f'(x_0)$ existe et posons :

$$\varepsilon_1(f; x; x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), \quad x \neq x_0$$

Alors :

$$\lim \{ \varepsilon_1(f; x; x_0); \quad x \rightarrow x_0 \quad x \neq x_0 \} = 0$$

et :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)(f'(x_0) + \varepsilon_1(f; x; x_0))$$

On dira, alors, que si x est "voisin" de x_0 le polynôme

$$x \rightarrow p_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0)$$

est un "approximant" de f d'ordre 1.

14.1.1.2 1.2 Dérivée d'ordre n (ou dérivée n ième) en un point.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un nombre réel.

(i) On suppose que f' a une dérivée en tout point x "voisin" de x_0 .

On définit, alors, f'' comme la dérivée, si elle existe de f' en x_0 .

Ainsi :

$$f''(x_0) = \lim \left\{ \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}; x \rightarrow x_0 \quad x \neq x_0 \right\}$$

Comme au paragraphe précédent, on a :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) + (x - x_0)^2 f''(x_0) + \varepsilon_2(f; x; x_0)$$

avec $\lim \{ \varepsilon_2(f; x; x_0); x \rightarrow x_0, x \neq x_0 \} = 0$

On dira, alors, que si x est "voisin" de x_0 le polynôme :

$$x \rightarrow p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) + (x - x_0)^2 f''(x_0)$$

est un "approximant" de f d'ordre 2.

(ii) Supposons que f admette des dérivées jusqu'à l'ordre $n \geq 3$ en tout point x "voisin" de x_0 .

Notons $f^{(n)}(x_0)$ la dérivée d'ordre n au point x_0

On vérifiera facilement que, si x est "voisin" de x_0 , alors :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \varepsilon_n(f; x; x_0)$$

avec $\lim \{ \varepsilon_n(f; x; x_0); x \rightarrow x_0, x \neq x_0 \} = 0$

Cette formule est appelée la **formule de Taylor à une variable, d'ordre n , au point x_0** .

On dira, alors, que si x est "voisin" de x_0 le polynôme de degré n :

$$x \rightarrow p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) + (x - x_0)^2 f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

est un "approximant" de f d'ordre n .

14.1.1.3 1.3 Dérivées partielles. Formule de Taylor à plusieurs variables.

(i) Soit f une fonction réelle de deux variables réelles ($f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$) et a_0 un point de \mathbb{R}^2 de coordonnées x_0 et y_0 .

(Avec toutes les précautions de langage utilisées ci-dessus) on appellera dérivée partielle de f par rapport à x (resp. y) le scalaire :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim \left\{ \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}; x \rightarrow x_0, x \neq x_0 \right\}$$

$$\text{(resp. } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim \left\{ \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}; y \rightarrow y_0, y \neq y_0 \right\}$$

Dans la suite, on écrira :

$$f'_x(x_0, y_0) \quad \text{ou éventuellement } f_x(x_0, y_0) \quad \text{au lieu de } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\text{(resp. } f'_y(x_0, y_0) \text{ ou éventuellement } f_y(x_0, y_0) \text{ au lieu de } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Si (x, y) est "voisin" de (x_0, y_0) , alors :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \cdot f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) \cdot f'_y(x_0, y_0) + \varepsilon_1(f; x, y; x_0, y_0)$$

avec $\lim \{\varepsilon_1(f; x, y; x_0, y_0); x \rightarrow x_0, x \neq x_0, y \rightarrow y_0, y \neq y_0\} = 0$

On dira que, si (x, y) est "voisin" de (x_0, y_0) alors le polynôme :

$$(x, y) \rightarrow p_1(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \cdot f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) \cdot f'_y(x_0, y_0)$$

est un "approximant" de f d'ordre 1.

(ii) Comme ci-dessus, on définira les dérivées partielles d'ordre deux de f en (x_0, y_0) que l'on notera :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

$$\text{ou bien resp. } f''_{x^2}(x_0, y_0), \quad f''_{xy}(x_0, y_0) \quad f''_{y^2}(x_0, y_0)$$

Alors :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \cdot f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) \cdot f'_y(x_0, y_0)$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[(x - x_0)^2 f''_{x^2}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0) f''_{xy}(x_0, y_0) + (y - y_0)^2 \cdot f''_{y^2}(x_0, y_0) \right]$$

$$+ \varepsilon_2(f; x, y; x_0, y_0)$$

avec $\lim \{\varepsilon_2(f; x, y; x_0, y_0); x \rightarrow x_0, x \neq x_0, y \rightarrow y_0, y \neq y_0\} = 0$

Si (x, y) est "voisin" de (x_0, y_0) , alors le polynôme du deuxième degré :

$$p_2(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \cdot f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) \cdot f'_y(x_0, y_0)$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[(x - x_0)^2 f''_{x^2}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0) f''_{xy}(x_0, y_0) + (y - y_0)^2 \cdot f''_{y^2}(x_0, y_0) \right]$$

est un "approximant" de f du deuxième ordre.

Posons, maintenant :

$$\alpha = (x - x_0) \cdot f'_x(x_0, y_0), \quad \beta = (y - y_0) \cdot f'_y(x_0, y_0),$$

$$\alpha^{(k)} = (x - x_0)^k \cdot f_{x^k}^{(k)}(x_0, y_0), \quad \beta^{(k)} = (y - y_0)^k \cdot f_{y^k}^{(k)}(x_0, y_0)$$

$$\text{et } (\alpha + \beta)^{(j)} = \sum_{k=0}^j C_j^k \alpha^{(k)} \beta^{(j-k)}$$

Alors :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} (\alpha + \beta)^{(j)} + \varepsilon_n(f; x, y; x_0, y_0)$$

avec $\lim \{\varepsilon_n(f; x, y; x_0, y_0); x \rightarrow x_0, x \neq x_0, y \rightarrow y_0, y \neq y_0\} = 0$

Cette formule est appelée **formule de Taylor à deux variables en (x_0, y_0) d'ordre n** .

(iii) Soit f une fonction réelle de trois variables réelles ($f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$) continue et dérivable en $a_0 = (x_0, y_0, z_0)$, jusqu'à un ordre aussi élevé qu'on le désire. On aura alors :

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + (x - x_0) \cdot f'_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \cdot f'_y(x_0, y_0, z_0) \\ + (z - z_0) \cdot f'_z(x_0, y_0, z_0) + \varepsilon_n(f; x, y, z; x_0, y_0, z_0)$$

avec $\lim \{ \varepsilon_n(f; x, y, z; x_0, y_0, z_0); x \rightarrow x_0, x \neq x_0, y \rightarrow y_0, y \neq y_0, z \rightarrow z_0, z \neq z_0 \} = 0$

Cette formule est appelée **formule de Taylor à trois variables en (x_0, y_0, z_0) d'ordre n** .

Remarque 6 :

Lorsque $x_0 = 0$ (resp. $x_0 = y_0 = 0$ ou bien $x_0 = y_0 = z_0 = 0$), les formules de Taylor ci-dessus sont aussi appelées **formules d'Euler-Mac Laurin**.

14.1.2 2. Différentielles.

Dans la suite, on supposera que toutes les fonctions considérées seront dérivables autant de fois qu'on le désirera.

14.1.2.1 2.1 Définition de la différentielle.

Soit f une fonction réelle de la variable réelle ($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) et $x, x + \Delta x \in \mathbb{R}$.

Posons : $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$. Alors :

$$\Delta f(x) = f'(x) \Delta x + \frac{1}{2!} f''(x) (\Delta x)^2 + \dots$$

Quand Δx est "voisin" de zéro, on peut négliger, dans les calculs, les termes $f''(x) (\Delta x)^2$ et ceux qui le suivent dans le développement d'Euler-MacLaurin, devant le terme $f'(x) \Delta x$ et écrire $\Delta f(x) = f'(x) \Delta x$.

Le mathématicien écrira : $d f(x) = f'(x) dx$ où dx et $d f(x)$ sont considérés comme des "infinitésimales"

Exercice : Utilisation de la notation différentielle pour la dérivation (formelle) d'une fonction composée.

$$d(f(g(x))) = f'(g(x)) dg(x) = f'(g(x)) g'(x) dx$$

d'où l'on déduit que :

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x)$$

Retournons aux formules de Taylor à deux et trois variables. Il sera alors "naturel" d'écrire :

$$df(x, y) = f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy$$

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z) dx + f'_y(x, y, z) dy + f'_z(x, y, z) dz$$

14.1.2.2 2.2 Formes différentielles.

Définition 25 :

On appelle **forme différentielle élémentaire de degré un**, une expression du type suivant :

- A une dimension : $\omega(x) = \alpha(x)dx$, $x \in \mathbb{R}$
- A deux dimensions : $\omega(x, y) = \alpha(x, y)dx + \beta(x, y)dy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- A trois dimensions : $\omega(x, y, z) = \alpha(x, y, z)dx + \beta(x, y, z)dy + \gamma(x, y, z) dz$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
- et plus généralement

$$A \text{ n dimensions : } \omega(x) = \sum_{j=1}^n \omega_j(x)dx_j, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

On peut interpréter une forme différentielle de degré un, à n dimensions, comme un élément d'un espace vectoriel "infinitement petit", à n dimensions, d'origine $x = (x_1, \dots, x_n)$ admettant les "vecteurs" dx_1, \dots, dx_n comme vecteurs de base.

Dans la suite, il sera commode de considérer toute fonction comme une forme différentielle de degré zéro.

De façon générale on appelle **forme différentielle de degré un**, une forme différentielle qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^p \omega_{j_k} \text{ où : } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad j_k \in \{1, \dots, n\}, \quad p \in \{1, \dots, n\}, \quad j_k \neq j_l \text{ si } k \neq l$$

14.1.2.3 2.3 Différentiation d'une forme différentielle de degré un.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\omega(x) = \sum_{j=1}^n \omega_j(x) dx_j$.

Formellement, on écrira :

$$d\omega(x) = \sum_{j=1}^n (d \omega_j(x)) \wedge dx_j$$

$$\text{où } d \omega_j(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \omega_j(x) \right) dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \omega_j(x) \right) dx_n$$

\wedge qui est appelé "**produit extérieur**" possède les propriétés fondamentales suivantes :

(*) \wedge est antisymétrique c-à-d : si u et v sont des formes différentielles de degré un, on a :

$$u \wedge v = -(v \wedge u), \text{ d'où : } u \wedge u = 0.$$

(**) \wedge est distributive par rapport à l'addition c-à-d : si u_1, u_2 et v_1, v_2 sont des formes différentielles de degré un, on a :

$$(u_1 + u_2) \wedge v = (u_1 \wedge v) + (u_2 \wedge v) \quad \text{et} \quad u \wedge (v_1 + v_2) = (u \wedge v_1) + (u \wedge v_2)$$

On en déduit que :

Si $\omega(x) = \alpha(x) dx$ $x \in \mathbb{R}$ alors : $d\omega(x) = (\alpha'(x) dx) \wedge dx = \alpha'(x) (dx \wedge dx) = 0$

Si $\omega(x, y) = \alpha(x, y) dx + \beta(x, y) dy$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

alors : $d\omega = (\alpha'_x dx + \alpha'_y dy) \wedge dx + (\beta'_x dx + \beta'_y dy) \wedge dy = (\beta'_x - \alpha'_y) (dx \wedge dy)$

Si $\omega(x, y, z) = \alpha(x, y, z)dx + \beta(x, y, z)dy + \gamma(x, y, z)dz$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

alors : $d\omega = (\beta'_x - \alpha'_y)(dx \wedge dy) + (\gamma'_y - \beta'_z)(dy \wedge dz) + (\alpha'_z - \gamma'_x)(dz \wedge dx)$

Les formes différentielles obtenues ci-dessus par différentiation sont appelées formes différentielles de degré deux.

De même par différentiation de formes différentielles de degré deux, on obtient des formes différentielles de degré trois.

Supposons, ainsi, que :

$$\omega(x, y, z) = \alpha(x, y, z)(dx \wedge dy) + \beta(x, y, z)(dy \wedge dz) + \gamma(x, y, z)(dz \wedge dx), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{alors : } d\omega = (\alpha'_z + \beta'_x + \gamma'_y)(dx \wedge dy \wedge dz)$$

On montre, par récurrence, qu'en différentiant une forme différentielle de degré $p \in \mathbb{N}^*$, on obtient une forme différentielle de degré $p + 1$.

Une forme différentielle élémentaire de degré $p \in \mathbb{N}^*$ s'écrira, ainsi, sous la forme suivante :

$$\omega(x) = \omega_{j_1 \dots j_p}(x)(dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}) \quad \text{où : } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad j_1, \dots, j_p \in \{1, \dots, n\}, \quad j_1 < \dots < j_p$$

Noter l'analogie entre les formes différentielles élémentaires de degré $p \in \mathbb{N}^*$ et les polynômes homogènes de degré $p \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 17 :

Quelle que soit la forme différentielle ω , on a : $d(d\omega) = 0$.

Définition 26 :

On dit qu'une forme différentielle ω est **exacte** s'il existe une fonction f telle que : $\omega = df$.

Examinons un cas particulier :

Supposons que : $\omega = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$ où $\omega, \alpha, \beta, \gamma$ sont des fonctions de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Pour que $\omega = df$, il faut et il suffit que :

$$\omega = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz \quad \text{et donc que : } \alpha = f'_x \quad \beta = f'_y \quad \gamma = f'_z.$$

Supposons maintenant que f admette des dérivées secondes continues. Alors :

$$f''_{xy} = f''_{yx} \quad f''_{yz} = f''_{zy} \quad f''_{zx} = f''_{xz}$$

On vérifie immédiatement que $\omega = df$ implique :

$$\alpha'_y = f''_{xy} = f''_{yx} = \beta'_x \quad \text{donc : } \alpha'_y - \beta'_x = 0$$

On montrerait de même que :

$$\beta'_z - \gamma'_y = 0 \quad \text{et que } \gamma'_x - \alpha'_z = 0$$

On montre que les conditions :

$$\alpha'_y - \beta'_x = \beta'_z - \gamma'_y = \gamma'_x - \alpha'_z = 0$$

nécessaires pour que $\omega = df$ sont aussi suffisantes.

14.1.3 3. Champs.

14.1.3.1 3.1 Définition.

On appellera **champ de vecteurs** dans \mathbb{R}^3 une famille $\{x, A(x) ; x \in E\}$ où E est une partie de \mathbb{R}^3 et $A(x)$ un vecteur dans \mathbb{R}^3 , d'origine x .

Exemples 14.1.1 :

(i) *Champ linéaire :*

$\forall x \in E \quad A(x) = u(x) e$ où e est un vecteur de \mathbb{R}^3 et u une fonction réelle de la variable x .

(ii) *Champ planaire :*

$\forall x \in E \quad A(x) = u(x) e + v(x) f$ où e et f sont des vecteurs de \mathbb{R}^3 , u et v deux fonctions réelles de la variable x .

(iii) *Champ spatial :*

14.1.3.2 3.2 Opérateurs fondamentaux sur un champ.

Considérons le champ $\{x, A(x) ; x \in E\}$ où $\forall x \in E \quad A(x) = u(x) e + v(x) f + w(x) g$.

On écrira aussi : $A(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{pmatrix}$ avec $x = (\zeta, \eta, \theta) \in \mathbb{R}^3$.

3.2.1 Gradient de A On a : $dA(x) = du(x) e + dv(x) f + dw(x) g$ ou encore :

$$dA(x) = \begin{pmatrix} du(x) \\ dv(x) \\ dw(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_\zeta & u'_\eta & u'_\theta \\ v'_\zeta & v'_\eta & v'_\theta \\ w'_\zeta & w'_\eta & w'_\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\zeta \\ d\eta \\ d\theta \end{pmatrix}$$

On appellera **gradient de A** la matrice suivante :

$$\text{grad } A = \begin{pmatrix} u'_\zeta & u'_\eta & u'_\theta \\ v'_\zeta & v'_\eta & v'_\theta \\ w'_\zeta & w'_\eta & w'_\theta \end{pmatrix}$$

3.2.2. Rotationnel. Remplaçons maintenant dans l'expression de $A(x)$, les vecteurs e, f et g par les "vecteurs infinitésimaux" $d\zeta, d\eta, d\theta$.

On obtient alors le champ "infinitésimal de degré un :

$B(x) = u(x) d\zeta + v(x) d\eta + w(x) d\theta$ où $x = (\zeta, \eta, \theta) \in \mathbb{R}^3$. Ainsi :

$$\begin{aligned} dB(x) &= du(x) \wedge d\zeta + dv(x) \wedge d\eta + dw(x) \wedge d\theta \\ &= (u'_\zeta d\zeta + u'_\eta d\eta + u'_\theta d\theta) \wedge d\zeta + (v'_\zeta d\zeta + v'_\eta d\eta + v'_\theta d\theta) \wedge d\eta + (w'_\zeta d\zeta + w'_\eta d\eta + w'_\theta d\theta) \wedge d\theta \end{aligned}$$

On vérifie facilement que :

$$dB(x) = a (d\eta \wedge d\theta) + b (d\theta \wedge d\zeta) + c (d\zeta \wedge d\eta)$$

$$\text{où : } a = w'_\eta - v'_\theta \quad b = u'_\theta - w'_\zeta \quad c = v'_\zeta - u'_\eta$$

Le vecteur de composantes (a, b, c) est appelé le **Rotationnel de A** et on le note $Rot A$.

3.2.3 Divergence. Remplaçons maintenant dans l'expression de $A(x)$, les vecteurs e, f et g par les "vecteurs infinitésimaux"

$$(d\eta \wedge d\theta) \quad (d\theta \wedge d\zeta) \quad (d\zeta \wedge d\eta), \text{ respectivement.}$$

On obtient alors le champ "infinitésimal de degré deux :

$$C(x) = u(x) (d\eta \wedge d\theta) + v(x) (d\theta \wedge d\zeta) + w(x) (d\zeta \wedge d\eta) \quad \text{où } x = (\zeta, \eta, \theta) \in \mathbb{R}^3.$$

On vérifie facilement que :

$$dC(x) = (u'_\zeta + v'_\eta + w'_\theta) (d\zeta \wedge d\eta \wedge d\theta)$$

$$(u'_\zeta + v'_\eta + w'_\theta) \text{ est appelé la } \mathbf{Divergence de } A \text{ et on le note } Div A.$$

Remarque 7 :

La divergence de A est égale à la trace (c-à-d la somme des éléments diagonaux) de la matrice $grad A$.

Posons : $G = grad A$. On a :

$$G = \frac{G + G^t}{2} + \frac{G - G^t}{2}$$

On vérifie immédiatement que

$$\text{la matrice } \frac{G - G^t}{2} \text{ est symétrique et que sa diagonale est nulle.}$$

3.2.4 Formules utiles.

14.1.4 4. Produit de deux formes différentielles.

Définition 27 :

Soit $k, m, n \in \mathbb{N}^*$ et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n .

On appelle **produit** d'une k -forme-différentielle ω telle que :

$$\forall x \in \Omega, \quad \omega(x) = \sum_{(j)} P_{(j)}(x) (dx_{j(1)} \wedge \dots \wedge dx_{j(k)})$$

par une m -forme-différentielle ψ telle que :

$$\forall x \in \Omega, \quad \psi(x) = \sum_{(l)} Q_{(l)}(x) (dx_{l(1)} \wedge \dots \wedge dx_{l(m)})$$

la forme différentielle notée $\omega \wedge \psi$ d'ordre $k + m$ en général, telle que :

$$\forall x \in \Omega, \quad (\omega \wedge \psi)(x) = \sum_{(j)} \sum_{(l)} P_{(j)}(x) Q_{(l)}(x) (dx_{j(1)} \wedge \dots \wedge dx_{j(k)} \wedge dx_{l(1)} \wedge \dots \wedge dx_{l(m)})$$

Si ψ est d'ordre 0 et ω d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ alors on posera :
 $\omega \wedge \psi = \omega$. $\psi = \psi$. $\omega = \psi \wedge \omega$.

Proposition 18 :

(Avec les hypothèses et notations de la définition ci-dessus), on a :

(i) $\omega \wedge \psi = (-1)^{km} (\psi \wedge \omega)$

(ii) Si ψ et ω sont de classe supérieure ou égale à 1 sur Ω , alors : $d(\omega \wedge \psi) = (d\omega) \wedge \psi + (-1)^k (\omega \wedge d\psi)$

14.1.5 5. Effet d'une application différentiable.

Soit $k, m, n \in \mathbb{N}^*$ U (resp V) un ouvert de \mathbb{R}^m (resp. \mathbb{R}^n) et θ une application différentiable de U dans V .

Soit ψ une k -forme-différentielle sur V . On pose :

$$\forall x \in U \quad \psi(\theta(x)) = (\theta^*(\psi))(x)$$

où θ^* est l'image réciproque de ψ par θ .

Supposons que :

$$\forall y \in V, \quad \psi(y) = \sum_{(j)} P_{(j)}(y) (dy_{j(1)} \wedge \dots \wedge dy_{j(k)})$$

On a :

$$\forall x \in U, \quad \psi(\theta(x)) = \sum_{(j)} P_{(j)}(\theta(x)) (d\theta_{j(1)} \wedge \dots \wedge d\theta_{j(k)})$$

On en déduit que :

$$\forall x \in U, (\theta^*(\psi))(x) = \sum_{(j)} P_{(j)}(\theta(x)) \frac{Dx(j(1), \dots, j(k))}{Dx(l(1), \dots, l(k))} dx_{l(1)} \wedge \dots \wedge dx_{l(k)}$$

où :

$$\frac{D\theta(j(1), \dots, j(k))}{Dx(l(1), \dots, l(k))} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_{j(1)}}{\partial x_{l(1)}} & \dots & \frac{\partial \theta_{j(1)}}{\partial x_{l(k)}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \theta_{j(k)}}{\partial x_{l(1)}} & \dots & \frac{\partial \theta_{j(k)}}{\partial x_{l(k)}} \end{pmatrix}$$

On montre facilement avec des hypothèses de régularité suffisantes que :

$$(\theta \circ \eta)^* = \eta^* \circ \theta^* \text{ et que : } (\theta^*)^{-1} = (\theta^{-1})^*$$

14.1.6 6. Intégration des formes différentielles.

$m \in \mathbb{N}^*$.

Etant donné $j \in \{1, \dots, m\}$ notons e_j le vecteur de \mathbb{R}^m dont toutes les composantes sont nulles sauf la j -ème qui est égal à 1.

On sait que les vecteurs (e_1, \dots, e_m) forment une base de \mathbb{R}^m .

Donnons à \mathbb{R}^m l'orientation définie par le multivecteur $(e_1 \wedge \dots \wedge e_m)$.

Soit Ω un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^m et ω une m -forme différentielle sur Ω telle que :

$$\forall x \in \Omega, \quad \omega(x) = \varphi(x) (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m)$$

Notons que $(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m)$ et $(e_1 \wedge \dots \wedge e_m)$ ont la même orientation.

Soit, maintenant, A une partie de \mathbb{R}^m , contenue dans Ω et désignons par 1_A la fonction caractéristique de A .

Si $\varphi.1_A$ est intégrable sur \mathbb{R}^m , on appellera **intégrale sur A** , le scalaire

$$\int_A \omega = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x).1_A(x) dx \quad \text{où} \quad dx = dx_1 \dots dx_m$$

Ainsi :

$$\int_A \omega = \int_{-\infty}^{+\infty} (\dots (\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).1_A(x) dx_1) \dots) dx_m$$

On dira, alors, que ω est *intégrable* sur A .

Proposition.

On suppose que \mathbb{R}^m, Ω et A vérifient les mêmes hypothèses que ci-dessus.

(i) Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et ω_1, ω_2 deux m -formes différentielles sur Ω , *intégrables* sur A .
Alors :

$$\int_A (\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \lambda_1 \int_A \omega_1 + \lambda_2 \int_A \omega_2$$

(ii) Soit θ une application *bijective* de A sur $\theta(A)$ qui est différentiable sur l'intérieur de A et dont l'inverse est différentiable sur l'intérieur de $\theta(A)$. On suppose, de plus, que θ respecte l'orientation induite par \mathbb{R}^m sur A et $\theta(A)$. Alors :

$$\int_{\theta(A)} \omega = \int_A \theta^*(\omega)$$

14.1.7 Formule de Stokes.

14.1.7.1 Premières définitions.

Soit $q \in \mathbb{N}^*$.

On appelle **q -pavé** de \mathbb{R}^q tout sous-ensemble P de \mathbb{R}^q tel que :

$$P = \{x = (x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q ; a_j \leq x_j \leq b_j \quad j \in \{1, \dots, q\}\}$$

$$\text{où } a = (a_1, \dots, a_q) \in \mathbb{R}^q \quad b = (b_1, \dots, b_q) \in \mathbb{R}^q \quad \text{et} \quad a_j < b_j \quad j \in \{1, \dots, q\}$$

On notera que P est fermé dans \mathbb{R}^q et que son intérieur dans \mathbb{R}^q n'est pas vide.

On appelle *face* de P tout sous-ensemble de P tel que :

$$F = \{x = (x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q ; x_j = a_j\} \quad \text{ou bien} \\ F = \{x = (x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q ; x_j = b_j\}, \quad j \in \{1, \dots, q\}$$

P a donc $2q$ faces qui sont des $(q-1)$ -pavés.

On appelle *bord* de P et on le note ∂P la réunion des $2q$ faces de P qui est un sous-ensemble de \mathbb{R}^{q-1} .

P étant muni de l'orientation définie par le numérotage de ses coordonnées, on choisit, pour des motifs qui se justifieront plus loin, d'affecter à la face $F = \{x = (x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q ; x_j = a_j\}$ (resp. $F = \{x = (x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q ; x_j = b_j\}$), $j \in \{1, \dots, q\}$) définie par la suite de coordonnées $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_q)$ si j est impair (resp. si j est pair) et l'orientation opposée dans les autres cas.

14.1.7.2 Formule de Stokes pour un pavé de \mathbb{R}^q .

Soit P un q -pavé de \mathbb{R}^q et ω une q -forme différentielle de classe C^1 sur un sous-ensemble ouvert Ω de \mathbb{R}^q , contenant P .

(i) Supposons que $q = 1$. Alors :

$$P = \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x \leq b\} \quad (\text{où } a, b \in \mathbb{R} \text{ et } a < b)$$

$$\text{et } \forall x \in \Omega \quad \omega(x) = \varphi(x) dx \quad \varphi \in C^1$$

On a :

$$\forall x \in \Omega \quad (d\omega)(x) = \varphi'(x) dx \quad \text{et}$$

$$\int_P d\omega = \int_a^b \varphi'(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_{\partial P} \omega$$

(ii) Supposons que $q = 2$. Alors :

$$P = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; a_j \leq x_j \leq b_j \quad j \in \{1, 2\}\}$$

$$\text{où } a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \quad b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et } a_j < b_j \quad j \in \{1, 2\}$$

Notons A, B, C, D les sommets du rectangle P tels que :

$$A = (a_1, b_1) \quad B = (a_2, b_1) \quad C = (a_2, b_2) \quad D = (a_1, b_2)$$

Soit ω la 1-forme différentielle de classe C^1 sur un sous-ensemble ouvert Ω de \mathbb{R}^2 , contenant P telle que :

$$\forall x \in \Omega \quad \omega(x) = \alpha(x_1, x_2) dx_1 + \beta(x_1, x_2) dx_2$$

Alors :

$$\forall x \in \Omega \quad (d\omega)(x) = \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right) dx_1 \wedge dx_2$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_P d\omega &= \int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial \beta}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 - \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \\ &= \int_{b_1}^{b_2} (\beta(a_2, x_2) - \beta(a_1, x_2)) dx_2 - \int_{a_1}^{a_2} (\alpha(x_1, b_2) - \alpha(x_1, b_1)) dx_1 = \int_P d\omega \end{aligned}$$

(iii) Supposons que $q = 3$. Alors :

$$P = \{x = (x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q ; a_j \leq x_j \leq b_j \quad j \in \{1, \dots, q\}\}$$

$$\text{où } a = (a_1, \dots, a_q) \in \mathbb{R}^q \quad b = (b_1, \dots, b_q) \in \mathbb{R}^q \quad \text{et} \quad a_j < b_j \quad j \in \{1, \dots, q\}$$

Soit ω la $q-1$ -forme différentielle sur P telle que :

$$\omega = \varphi_j(x) (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_q)$$

Alors :

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_j(x)) (dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_q) \\ &= (-1)^{j-1} \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_j(x)) (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_q) \end{aligned}$$

L'orientation de \mathbb{R}^q étant définie par le numérotage canonique de ses coordonnées, on a :

$$\begin{aligned} \int_P d\omega &= (-1)^{j-1} \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_q}^{b_q} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_j(x)) (dx_1 \dots dx_q) \right) \\ &= (-1)^{j-1} \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \int_{a_{j+1}}^{b_{j+1}} \dots \int_{a_q}^{b_q} [\varphi_j(x)]_{x_j=a_j}^{x_j=b_j} (dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_q) \end{aligned}$$

Chacune des intégrales ci-dessus est une intégrale sur une face du pavé P .

Avec le choix d'orientation des bords que nous avons fait ci-dessus, on déduit donc que :

$$\int_P d\omega = \int_{\partial P} \omega$$

14.1.8 Chaîne, bord ; formule de Stokes pour une chaîne.

14.1.8.1 Définitions et premières propriétés.

Soit $k, m \in \mathbb{N}^*$ $k \leq m$.

On appellera **élément de chaîne** à k dimensions dans \mathbb{R}^m un couple $\gamma = (P, \psi)$ où P est un k -pavé orienté par le numérotage canonique de ses coordonnées et ψ une application d'un voisinage ouvert Ω de P dans \mathbb{R}^m , différentiable sur Ω .

On appellera **intégrale** d'une k -forme différentielle ω **sur l'élément de chaîne** $\gamma = (P, \psi)$, le scalaire :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_P \psi^* \omega = \int_{\mathbb{R}^m} \psi^*(x) \omega(x) \mathbb{1}_P(x) (dx_1 \dots dx_m) \quad \text{lorsque cette intégrale a un sens.}$$

On dira que deux éléments de chaîne à k dimensions dans \mathbb{R}^m $\gamma_1 = (P_1, \psi_1)$ et $\gamma_2 = (P_2, \psi_2)$ sont *égaux* (resp. *opposés*) et on écrira :

$\gamma_1 = \gamma_2$ (resp. $\gamma_1 = -\gamma_2$) si, quelle que soit la k -forme différentielle ω , on a :

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega \quad \text{ou encore} \quad \int_{P_1} \psi_1^* \omega = \int_{P_2} \psi_2^* \omega$$

$$\text{(resp. } \int_{\gamma_1} \omega = - \int_{\gamma_2} \omega \text{ ou encore } \int_{P_1} \psi_1^* \omega = - \int_{P_2} \psi_2^* \omega$$

On appellera **chaîne** dans \mathbb{R}^m toute combinaison linéaire formelle, finie ou infinie, d'éléments de chaîne.

Une chaîne C s'écrira de la façon suivante :

$$C = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j \gamma_j \quad \text{où :}$$

$\{\gamma_j ; j \in \mathbb{N}\}$ (resp. $\{\lambda_j ; j \in \mathbb{N}\}$) est une série d'éléments de chaîne (resp. de nombres réels)

On notera qu'une même chaîne peut s'expliciter comme série d'éléments de chaîne distincts.

L'intégrale d'une forme différentielle ω sur la chaîne $C = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j \gamma_j$ s'écrira :

$$\int_C \omega = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j \int_{\gamma_j} \omega \quad \text{lorsque cette intégrale aura un sens.}$$

On dira que deux chaînes C_1 et C_2 sont *égales (resp. opposées)* et on écrira : $C_1 = C_2$ (resp. $C_1 = -C_2$) si :

$$\text{quelle que soit la forme différentielle } \omega \text{ on a : } \int_{C_1} \omega = \int_{C_2} \omega \quad \text{(resp. } \int_{C_1} \omega = - \int_{C_2} \omega \text{)}$$

On montre la proposition suivante :

Proposition 19 :

Soit $m, p \in \mathbb{N}^$, φ une application différentiable de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^p*

C une chaîne dans \mathbb{R}^m et $\varphi(C)$ son image dans \mathbb{R}^p .

Alors, si ω est une forme différentielle nulle en dehors d'un compact de \mathbb{R}^m , ou bien si C est une somme finie d'éléments de chaîne, on a :

$$\int_{\varphi(C)} \omega = \int_C \varphi^* \omega$$

Ce théorème résulte de la linéarité de l'intégrale et du fait qu'il est exact pour un élément de chaîne.

Définition 28 :

On appellera **bord d'une chaîne** $C = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j \gamma_j$, $\gamma_j = (P_j, \psi_j)$, $j \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$\partial C = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j \partial P_j.$$

Proposition 20 :

(i) Si $C_1 = C_2$ (resp. $C_1 = -C_2$) alors : $\partial C_1 = \partial C_2$ (resp. $\partial C_1 = -\partial C_2$)

(ii) $\partial^2 C = 0$.

Preuve :

(i) résulte de la définition du bord d'une chaîne.

(ii) $\int_{\partial^2 C} \omega = \int_{\partial C} d\omega = \int_C d^2 \omega = 0$.

14.1.8.2 Formule de Stokes pour une chaîne.

(Avec les mêmes hypothèses et notations que ci-dessus), considérons la chaîne :

$$C = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j \gamma_j, \quad \gamma_j = (P_j, \psi_j) \quad j \in \mathbb{N}$$

On sait que :

$$\int_C d\omega = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j \int_{P_j} d\omega = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j \int_{\partial P_j} \omega = \int_{\partial C} \omega \quad \text{où} \quad \partial C = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j \partial P_j$$

De ce qui précède on déduit le Théorème de Stokes (pour une chaîne) :

(Avec les mêmes hypothèses et notations que ci-dessus)

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega$$

CHAPITRE 15

M 3 GÉOMÉTRIE HILBERTIENNE ÉLÉMENTAIRE.

15.1 A. Préliminaires. Mesure. Intégration. Probabilités.

Dans ce paragraphe, Ω désignera un ensemble et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de parties de Ω .

15.1.1 Clan.Tribu.

Définition 29 :

On appelle *clan de parties de Ω* , toute famille Γ de parties de Ω telle que :

$$A, B \in \Gamma \Rightarrow A \cup B \in \Gamma \text{ et } A \setminus B = \{x \in A; x \notin B\} \in \Gamma .$$

On notera $\mathcal{C}(\Omega)$ la famille de tous les clans de parties de Ω .

Exemple 15.1.1 :

(i) $\mathcal{P}(\Omega) \in \mathcal{C}(\Omega)$.

(ii) \emptyset désignant l'ensemble vide, on a : $\{\Omega, \emptyset\} \in \mathcal{C}(\Omega)$.

Proposition 21 : Soit $\Gamma \in \mathcal{C}(\Omega)$. Alors :

(i) $\emptyset \in \Gamma$.

(ii) Si $\forall A \in \Gamma$.

Définition 30 :

On appelle *σ -clan de parties de Ω* , tout clan Γ de parties de Ω tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \Gamma) \Rightarrow \left(\bigcup_n A_n\right) \in \Gamma .$$

On appelle *tribu de parties de Ω* un σ -clan de parties de Ω contenant Ω .

On notera dans la suite $\mathcal{S}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{T}(\Omega)$) la famille des σ -clans (resp. tribus) de parties de Ω .

Exemple 15.1.2 :

- (i) $\mathcal{P}(\Omega) \in \mathcal{T}(\Omega)$.
- (ii) $\{\Omega, \emptyset\} \in \mathcal{T}(\Omega)$.

Proposition 22 : Soient Ω_1 et Ω_2 deux ensembles et f une application de Ω_1 dans Ω_2 .
Etant donné $\Gamma \in \mathcal{C}(\Omega_1)$ (resp. $\Gamma \in \mathcal{T}(\Omega_1)$), posons :

$$f^{-1}(\Gamma) = \{A \in \Omega_2; f(A) \in \Gamma\}.$$

Alors : $f^{-1}(\Gamma) \in \mathcal{C}(\Omega_2)$ (resp. $f^{-1}(\Gamma) \in \mathcal{T}(\Omega_2)$).

Définition 31 :

Soit E un espace topologique et $\theta(E)$ la famille de tous les ouverts de E .

On appelle tribu borélienne de $(E, \theta(E))$ la tribu de parties de Ω engendrée par $\theta(E)$ et on la notera $\mathcal{B}(E)$.

Tout élément de $\mathcal{B}(E)$ est appelé un ensemble borélien.

15.1.2 Mesure positive.

Définition 32 :

On appelle mesure positive sur un clan $\Gamma \in \mathcal{C}(\Omega)$, une application μ de Γ dans $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ telle que :

- (i) $\forall A, B \in \Gamma$ tels que : $A \cap B = \emptyset$, on ait : $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
- (ii) Quelle que soit la suite $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de Γ , disjoints deux à deux, telle que $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \in \Gamma$,
on ait : $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$.

On dit que μ est bornée si :

$\exists M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall A \in \Gamma, \mu(A) \leq M$.

Proposition 23 : Soit $\Gamma \in \mathcal{C}(\Omega)$ et μ une mesure positive sur Γ .

- (i) S'il existe $A \in \Gamma$ tel que $\mu(A) \neq +\infty$, alors $\mu(\emptyset) = 0$.
- (ii) Si $A, B \in \Gamma, A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- (iii) Si $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ est une suite d'éléments de Γ telle que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \supset A_n$ (resp. $A_{n+1} \subset A_n$) et que :
 $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \in \Gamma$ (resp. $(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) \in \Gamma$), alors :
 $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_n \mu(A_n) = \text{Sup}_n \mu(A_n)$
(resp. $\mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_n \mu(A_n) = \text{Inf}_n \mu(A_n)$).

Exemple 15.1.3 *Mesure de Borel.*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On désigne par Γ_k le clan des réunions finies de pavés de \mathbb{R}^k du type :

$$P = \prod_{j=1}^k [a_j, b_j[\text{ où } a_j, b_j \in \mathbb{R}, a_j < b_j, j \in \{1, \dots, k\}, \text{ disjoints deux à deux.}$$

En posant : $\mu(P) = \prod_{j=1}^k (b_j - a_j)$ et lorsque P_1, \dots, P_m sont des pavés de \mathbb{R}^k , disjoints deux à deux, $\mu(\cup_{j=1}^m P_j) = \sum_{j=1}^m \mu(P_j)$, on définit sur Γ_k une mesure positive qui se prolonge sur la tribu borélienne engendrée par Γ_k en une mesure que l'on appelle mesure de Borel.

Définition 33 :

On appelle espace mesuré, tout triplet (Ω, Γ, μ) où Ω est un ensemble, $\Gamma \in \mathcal{T}(\Omega)$ et μ est une mesure positive sur Γ .

Les éléments de Γ sont appelés ensembles mesurables.

Le couple (Ω, Γ) est appelé espace mesurable.

Définition 34 :

Soit (Ω_1, Γ_1) et (Ω_2, Γ_2) deux espaces mesurables.

Une application f de Ω_1 dans Ω_2 est dite Γ_1 - Γ_2 -mesurable (ou plus simplement mesurable lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté à craindre)

$$\text{si } f^{-1}(\Gamma_2) \subset \Gamma_1.$$

Proposition 24 :

Soit (Ω, Γ) un espace mesurable et f une application de Ω dans $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$

On note $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ la tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$.

Pour que f soit $(\Gamma$ - $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ -) mesurable, il faut et il suffit que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, f^{-1}([-\infty, a]) \in \Gamma.$$

15.1.3 Intégration.

Définition 35 :

Soit f une application de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est étagée (sur Ω) si l'image de Ω par f est une partie finie de $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemple 15.1.4 :

Soit $A \subset \Omega$. Posons : $\forall x \in \Omega, 1(x; A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors, $1(\cdot; A)$ est une fonction étagée sur Ω .

Proposition 25 : Si f est une application étagée de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors :

$\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists \zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{R}, \exists A_1, \dots, A_n \subset \Omega$ tels que :

$$f = \sum_{j=1}^n \zeta_j 1(\cdot; A_j)$$

où $A_j = f^{-1}(\{\zeta_j\})$ et $A_j \cap A_k = \emptyset, j \neq k, j, k \in \{1, \dots, n\}$

Dans ce cas, on dira que $f = \sum_{j=1}^n \zeta_j 1(\cdot; A_j)$ est une décomposition normale de la fonction étagée f .

Définition 36 :

Soit (Ω, Γ, μ) un espace mesuré et f une application étagée de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ admettant la décomposition normale $f = \sum_{j=1}^n \zeta_j 1(\cdot; A_j)$.

On dit, alors, que f est μ -intégrable (ou bien intégrable, si aucune ambiguïté n'est à craindre) lorsque $\sum_{j=1}^n \zeta_j \mu(A_j)$ est finie.

On montre que si f est μ -intégrable et admet une autre décomposition normale :

$$f = \sum_{k=1}^m \eta_k 1(\cdot; B_k)$$

alors :

$$\sum_{j=1}^n \zeta_j \mu(A_j) = \sum_{k=1}^m \eta_k \mu(B_k).$$

On pose alors :

$$\int_{\Omega} f(s) d\mu(s) = \sum_{j=1}^n \zeta_j \mu(A_j).$$

Proposition 26 : Soit (Ω, Γ, μ) un espace mesuré.

Si f est une application de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, mesurable, alors il existe une suite croissante $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ de fonctions étagées sur Ω (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) qui converge ponctuellement vers f .

Définition 37 :

Soit (Ω, Γ, μ) un espace mesuré, $\mathcal{E}(\Omega, \Gamma, \overline{\mathbb{R}}_+)$ l'ensemble des fonctions étagées sur Ω et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

$\int_{\Omega} f(s) d\mu(s) = \text{Sup}\{\int_{\Omega} g(s) d\mu(s); g \in \mathcal{E}(\Omega, \Gamma, \overline{\mathbb{R}}_+), g \leq f\}$

est appelé l'intégrale de f sur Ω relativement à μ .

(On écrira \int au lieu de \int_{Ω} quand aucune ambiguïté ne sera à craindre).

Lorsque f est une application mesurable de Ω dans \mathbb{R} , on pose :

$$\forall s \in \Omega, f_+(s) = \begin{cases} f(s) & \text{si } f(s) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad f_-(s) = \begin{cases} -f(s) & \text{si } f(s) \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } \int_{\Omega} f(s) d\mu(s) =$$

$$\int_{\Omega} f_+(s) d\mu(s) - \int_{\Omega} f_-(s) d\mu(s).$$

Lorsque f est une application mesurable de Ω dans \mathbb{C} telle que $f = f_1 + i f_2$ où f_1 et f_2 sont des applications mesurables de Ω dans \mathbb{R} , on pose :

$$\int_{\Omega} f(s) d\mu(s) = \int_{\Omega} f_1(s) d\mu(s) + i \int_{\Omega} f_2(s) d\mu(s).$$

Dans la suite, on dira que la fonction mesurable f de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}$ est

(μ) -intégrable sur Ω si :

$$\int_{\Omega} f_+(s) d\mu(s) \text{ et } \int_{\Omega} f_-(s) d\mu(s) \text{ sont finies.}$$

On dira que la fonction mesurable f de Ω dans \mathbb{C} est (μ) -intégrable sur Ω si $f = f_1 + i f_2$

f_1 et f_2 à valeurs réelles et si $\int_{\Omega} f_1(s) d\mu(s)$ et $\int_{\Omega} f_2(s) d\mu(s)$ sont finies.

(S'il n'y a aucune ambiguïté à craindre, on écrira, dans la suite $\int f d\mu$ au lieu de $\int_{\Omega} f(s) d\mu(s)$).

Proposition 27 : Soit f et g deux fonctions μ -intégrables sur Ω , à valeurs dans \mathbb{R} . Alors :

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \int \lambda f d\mu = \lambda \int f d\mu, \int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$

(ii) $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu .$

Si $|f| \leq g$, on a : $|\int f d\mu| \leq \int g d\mu$

(iii) (Lebesgue)

Si $\{h_n; n \in \mathbb{N}\}$ est une suite de fonctions mesurables définies sur Ω , à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui converge ponctuellement vers une fonction h définie sur Ω , à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ et si :

$\forall n \in \mathbb{N}, |h_n| \leq f$, alors

h est μ -intégrable sur Ω et $\int_{\Omega} h d\mu = \lim_n (\int_{\Omega} h_n d\mu) .$

Définition 38 :

Soit (Ω, Γ, μ) un espace mesuré.

Etant donné $p \in [1, +\infty[$, on note $\mathcal{L}^p(\Omega, \Gamma, \mu)$, l'espace des fonctions f mesurables sur Ω , à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ telle que l'intégrale $\int_{\Omega} |f|^p d\mu$ soit finie.

On définit sur $\mathcal{L}^p(\Omega, \Gamma, \mu)$ une relation d'équivalence, en posant :

si $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Gamma, \mu)$, $f \sim g$ lorsque f est égale à g , μ -presque partout.

On note $L^p(\Omega, \Gamma, \mu)$ l'espace vectoriel des classes d'équivalence de fonctions de $\mathcal{L}^p(\Omega, \Gamma, \mu)$ pour la relation \sim .

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}^*$, Γ est l'ensemble des boréliens de \mathbb{R}^k et μ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^k , on écrit $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^k)$ (resp. $L^p(\mathbb{R}^k)$) au lieu de $\mathcal{L}^p(\Omega, \Gamma, \mu)$ (resp. $L^p(\Omega, \Gamma, \mu)$).

15.1.4 Terminologie des probabilités.

Définition 39 :

On dit qu'une mesure μ sur un espace mesuré (Ω, Γ, μ) définit une loi de probabilité si $\mu(\Omega) = 1$.

Alors, tout $A \in \Omega$ s'appelle un évènement et $\mu(A)$ est la probabilité de l'évènement A .

On appelle variable aléatoire sur Ω une fonction de Ω dans \mathbb{R} qui est $(\Gamma - \mathcal{B}(\mathbb{R}) -)$ mesurable ($\mathcal{B}(\mathbb{R})$ désignant la tribu des boréliens de \mathbb{R}).

Soit X et Y deux variables aléatoires (sur Ω).

On appelle espérance mathématique de X , la quantité : $E(X) = \int_{\Omega} X(\omega) d\mu(\omega)$

et covariance de X et Y , la quantité : $cov(X, Y) = E(XY) - E(X).E(Y)$.

15.2 B. Structure hilbertienne.

15.2.1 Espace de Hilbert.

Après avoir rappelé quelques éléments d'Algèbre, utiles ci-dessous, nous définirons l'espace de Hilbert.

Les exemples qui suivront cette définition auront pour but de familiariser le lecteur "innocent" avec la notion abstraite d'espace de Hilbert.

Ils auront pour objectif de montrer que cette notion abstraite est le prolongement "naturel" de celle d'espace géométrique à deux ou trois dimensions qui nous est "intuitive".

15.2.1.1 Groupe. Corps.

Définition 40 :

On appelle groupe (commutatif), un ensemble G , muni d'une loi de composition interne, notée $+$ (en général) telle que :

$$\forall x, y \in G, x + y \in G \quad (\text{et } x + y = y + x \text{ si } + \text{ est commutative})$$

$$\forall x, y, z \in G, x + (y + z) = (x + y) + z \quad (\text{associativité})$$

$$\exists 0 \in G, \forall x \in G, x + 0 = 0 + x \quad (0 \text{ est élément neutre de } (G, +))$$

$$\forall x \in G, \exists -x \in G, x + (-x) = (-x) + x = 0 \quad (\text{tout élément de } G \text{ a un inverse})$$

On appelle corps, un ensemble \mathbb{K} , muni de deux lois de composition interne, notées $+$ et \times (en général) telles que :

$$(\mathbb{K}, +) \text{ est un groupe commutatif (d'élément neutre } 0)$$

$$(\mathbb{K} \setminus 0, \times) \text{ est un groupe (d'élément neutre } 1)$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{K}, x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z) \quad (y + z) \times x = (y \times x) + (z \times x)$$

Exemple 15.2.1 :

L'ensemble des nombres réels \mathbb{R} (des nombres complexes \mathbb{C}) muni de l'addition et de la multiplication est un corps.

15.2.1.2 Espace vectoriel.

On appelle espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} , un ensemble E muni d'une loi de composition interne, notée $+$, et d'une loi de composition externe, notée \cdot telles que :

$$(E, +) \text{ soit un groupe commutatif}$$

$$\text{la loi } \cdot \text{ soit distributive par rapport à la loi } + \text{ c-à-d :}$$

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot (x + y) = (\lambda \cdot x) + (\lambda \cdot y)$$

$$\forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, (\lambda + \mu) \cdot x = (\lambda \cdot x) + (\mu \cdot x)$$

$$\forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, (\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$$

$$\forall x \in E, 1 \cdot x = x$$

Dans la suite, on omettra, en général, les symboles \cdot et \times et on désignera par 0 l'élément neutre de $(\mathbb{K}, +)$ et de $(E, +)$.

Exemple 15.2.2 :

\mathbb{R} (resp. \mathbb{C}) est un espace vectoriel sur \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}).

15.2.1.3 5.3 Espace de Hilbert.

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{C} .

Dans la suite, étant donné $z \in \mathbb{C}$, on notera \bar{z} son complexe conjugué et $|z|$ son module.

Définition 41 :

On appelle produit scalaire sur E , une application de $E \times E$ dans \mathbb{C} , notée $\langle \cdot | \cdot \rangle$, telle que :

$$\forall x, y \in E, \langle x | y \rangle \in \mathbb{C} \text{ et } \langle x | y \rangle = \overline{\langle y | x \rangle}$$

$$\forall x, y, z \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C},$$

$$\langle x | \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x | y \rangle + \mu \langle x | z \rangle$$

On dit que le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sur E est (défini) positif si :

$$\forall x \in E, \langle x | x \rangle \geq 0 \text{ (et } (x \in E, \langle x | x \rangle = 0) \iff x = 0)$$

Définition 42 :

On appelle espace préhilbertien sur \mathbb{C} la donnée d'un espace vectoriel E sur \mathbb{C} et d'un produit scalaire défini positif sur E que nous noterons $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Posons : $\|\cdot\| = (\langle \cdot | \cdot \rangle)^{\frac{1}{2}}$.

On vérifie facilement que $\|\cdot\|$ est une norme c-à-d :

$$\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$(x \in E, \|x\| = 0) \iff (x = 0)$$

$\|\cdot\|$ est appelée la norme associée à $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

On dit que l'espace préhilbertien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un *espace de Hilbert* (ou un *espace hilbertien*) si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé complet (c-à-d si tout filtre de Cauchy d'éléments de $(E, \|\cdot\|)$ converge vers un élément de E pour la norme $\|\cdot\|$).

On dit que E est de *dimension finie* s'il existe un nombre fini n d'éléments

$$a_1, \dots, a_n \text{ tels que : } x = \sum_{j=1}^{j=n} \lambda_j a_j .$$

Si les vecteurs a_1, \dots, a_n sont linéairement indépendants, on dit qu'ils forment une base de E .

Si E n'est pas de dimension finie, on dit qu'il est de dimension infinie!

15.2.1.4 Exemples d'espaces de Hilbert.**Exemple 15.2.3 :**

Désignons par \mathcal{P}_2 une surface géométrique plane.

Munissons \mathcal{P}_2 d'un repère cartésien \mathcal{R}_2 .

Alors, tout point de \mathcal{P}_2 peut être repéré par un couple de nombre réels (x_1, x_2) qui sont ses coordonnées relativement à \mathcal{R}_2 .

Ainsi \mathcal{P}_2 peut-il être identifié à \mathbb{R}^2 .

Soit O l'origine de \mathcal{R}_2 , M et N deux points de \mathcal{P}_2 repérés relativement à \mathcal{R}_2 par leur coordonnées (x_1, x_2) et (y_1, y_2) .

On montre que le produit scalaire des vecteurs \overrightarrow{OM} et \overrightarrow{ON} tel que :
 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \|\overrightarrow{OM}\| \cdot \|\overrightarrow{ON}\| \cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ est égal à : $x_1 y_1 + x_2 y_2$.

Posons :

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \forall y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Alors, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire défini positif et

$(\mathbb{R}^2, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert de dimension deux.

$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \|x - y\|$ est la distance euclidienne (géométrique) entre x et y .

Exemple 15.2.4 :

$\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$ muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ tel que :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \langle x | y \rangle = \sum_{j=1}^{j=n} x_j y_j$$

est un espace de Hilbert de dimension n .

Exemple 15.2.5 :

$\mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}^*$ muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ tel que :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n, \forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n,$$

$$\langle x | y \rangle = \sum_{j=1}^{j=n} \overline{x_j} y_j$$

est un espace de Hilbert de dimension $2n$.

Exemple 15.2.6 :

Soit $l^2(\mathbb{C})$, l'espace vectoriel des suites infinies dénombrables

$$\{x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \mathbb{C}; \sum_{j=1}^{j=n} |x_j|^2 \in \mathbb{R}\}.$$

Posons :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in l^2(\mathbb{C}), \forall y = (y_1, \dots, y_n, \dots) \in l^2(\mathbb{C}), \langle x | y \rangle = \sum_{j=1}^{j=\infty} \overline{x_j} y_j$$

Alors, $(l^2(\mathbb{C}), \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert de dimension infinie.

Exemple 15.2.7 :

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$.

Désignons par $L^2(\Omega)$, l'espace vectoriel des (classes de) fonctions à valeurs complexes dont le carré du module est intégrable.

$$\text{Posons : } \forall x, y \in L^2(\Omega), \langle x | y \rangle = \int_{\Omega} \overline{x(\omega)} y(\omega) d\omega.$$

Alors, $(L^2(\Omega), \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert de dimension infinie.

15.2.2 Orthogonalité. Théorème de projection.

15.2.2.1 6.1 Inégalité de Schwarz.

De la positivité du produit scalaire, on déduit que :

$$\forall x, y \in E, |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

15.2.2.2 Orthogonalité.

Définition 43 :

Soit A une partie de E .

On dit que A est fermée dans E si tout filtre d'éléments de A qui converge dans $(E, \|\cdot\|)$, converge vers un élément de A .

On appelle orthogonal de A dans $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, l'ensemble

$$A^\circ = \{y \in E; \forall x \in A, \langle x | y \rangle = 0\}$$

A° est un sous espace vectoriel fermé de $(E, \|\cdot\|)$.

Si B est une autre partie de E , alors :

$$B \subset A \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$$

D'autre part, $A^{\circ\circ} = \overline{A}$ où \overline{A} est le plus petit sous-espace vectoriel fermé de E contenant A .

Théorème 15.2.1 (de projection) : Si M est un sous-espace vectoriel (ou une partie convexe) de E complèt(e) pour la norme $\|\cdot\|$, alors, quel que soit $x \in E$, il existe un seul élément $P_M x \in M$ tel que :

$$\forall y \in M, \|x - P_M x\| \leq \|x - y\|$$

$P_M x$ est appelé la projection de x sur M et P_M un projecteur de E .

De plus, $(y = P_M x) \iff (\forall z \in M, \langle x - y | x - z \rangle = 0)$.

On montre que tout projecteur de E est caractérisé par les relations suivantes :

$$P_M^2 = P_M = \overline{P_M}.$$

15.2.3 Topologies et dualité hilbertienne.

15.2.3.1 Topologies hilbertiennes.

Définition 44 :

Sur un espace de Hilbert $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, on définit canoniquement deux topologies :

la topologie forte, dont les voisinages ouverts de l'origine sont les ensembles

$$\mathcal{V}_\varepsilon = \{x \in E; \|x\| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$$

et la topologie faible dont les voisinages ouverts de l'origine sont les ensembles :

$$\mathcal{W}_{\varepsilon, y} = \{x \in E; |\langle x | y \rangle| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, y \in E.$$

La topologie forte est, en général, plus fine que la topologie faible. Si E est de dimension finie, alors les topologies forte et faible coïncident sur E .

15.2.3.2 Dualité.

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace hilbertien complexe.

Etant donné $y \in E$, posons : $\forall x \in E, l(x; y) = \langle y | x \rangle$.

On vérifie facilement que $l(x; y)$ est une application linéaire de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ dans \mathbb{C} qui est faiblement et fortement continue.

Notons $\mathcal{L}_s(E)$ (resp. $\mathcal{L}_w(E)$) l'espace vectoriel des applications linéaires et continues de E muni de sa topologie forte (resp. faible) dans \mathbb{C} .

On montre que $\mathcal{L}_s(E) = \mathcal{L}_w(E)$.

$\mathcal{L}_s(E)$ ou $\mathcal{L}_w(E)$ est appelé le dual topologique de l'espace de Hilbert $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ et on le note en général E^* .

Ainsi,

$$(x^* \in E^*) \iff (\exists C(x^*) \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, |x^*(x)| \leq C(x^*) \|x\|)$$

Sur E^* on définit une norme duale $\|\cdot\|_*$ telle que :

$$\forall x^* \in E^*, \|x^*\|_* = \text{Sup}\{|x^*(x)|; x \in E, \|x\| = 1\}.$$

On montre le théorème suivant :

Théorème 15.2.2 (de Riesz) :

$$\forall x^* \in E^*, \exists \Lambda x^* \in E, \forall x \in E, x^*(x) = \langle \Lambda x^* | x \rangle$$

Λ est une isométrie antilinéaire de E^* sur E , c-à-d :

$$\forall x^*, y^* \in E^*, \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

$$\Lambda(x^* + y^*) = \Lambda(x^*) + \Lambda(y^*), \quad \Lambda(\lambda x^*) = \bar{\lambda} \Lambda(x^*)$$

$$\|\Lambda x^*\| = \|x^*\|.$$

Λ permet d'identifier $(E, \|\cdot\|)$ et $(E^*, \|\cdot\|_*)$

Λ est appelé l'application de dualité de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

15.2.4 Opérateurs linéaires.

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert.

15.2.4.1 Définitions et premières propriétés.

On appelle opérateur de E une application A d'une partie de E , notée $\text{dom}(A)$, dans E telle que :

$$\text{dom}(A) = \{x \in E; Ax \in E\}.$$

Exemple 15.2.8 :

Supposons que $E = L^2(\mathbb{R})$ et que :

$$\forall x, y \in E, \langle x | y \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t) y(t) dt.$$

Considérons l'opérateur A qui, à tout $x \in E$, associe la fonction qui, à tout $t \in \mathbb{R}$, associe $tx(t)$.

Il est clair que $\text{dom}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E distinct de E .

Désignons par $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions réelles indéfiniment différentiables dont le support est borné (fermé). $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de E dense dans $(E, \|\cdot\|)$.

$\forall x \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} |Ax(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |tx(t)|^2 dt \leq (\int_{\text{support}(x)} |t|^2 dt) \cdot (\int_{\text{support}(x)} |x(t)|^2 dt) < +\infty.$$

Il en résulte que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est contenu dans le $\text{dom}(A)$ et

donc que $\text{dom}(A)$ est dense dans $(E, \|\cdot\|)$.

On notera que A n'est pas une application continue de $(\text{dom}(A), \|\cdot\|)$ dans $(E, \|\cdot\|)$.

On peut remédier à cette situation en supposant que $E = L^2(\Omega)$ où Ω est une partie bornée de \mathbb{R} et que $\forall x, y \in E, \langle x | y \rangle = \int_{\Omega} x(t) y(t) dt$.

Alors, l'opérateur de E dans E , défini ci-dessus, a pour domaine E . Il est de plus linéaire et continu de $(E, \|\cdot\|)$ dans $(E, \|\cdot\|)$.

Dans la suite, sauf mention du contraire, on supposera que tout opérateur de E aura pour domaine l'espace E tout entier.

On posera alors, $\| |A| \| = \text{Sup}\{ \|Ax\| ; \|x\| = 1\}$.

On notera $L(E)$, l'espace vectoriel des opérateurs linéaires de E ayant E pour domaine et muni de la topologie associée à $\| \cdot \|$.

Exemple 15.2.9 (en dimension deux) :

On utilisera, ci-dessous, les hypothèses et notations de l'exemple 1.3.

On définit classiquement les opérateurs linéaires suivants :

Homothétie

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et A l'opérateur tel que :

$$\forall x \in E, Ax = \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2). \text{ Alors, } A \in L(E).$$

Rotation

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ et A l'opérateur tel que :

$$\forall x = (x_1, x_2), Ax = (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta).$$

Alors, $A \in L(E)$.

Similitude

C'est le produit d'une rotation par une homothétie ou l'inverse.

Une similitude est donc un élément de $L(E)$.

15.2.4.2 Inverse d'un opérateur.

Notons d'abord que :

$$(A \in L(E)) \iff (\exists \beta \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \|Ax\| \leq \beta \|x\|)$$

Soit I l'application identité de E . Si :

$$(\exists B \in L(E), AB = I) \iff (\exists B \in L(E), BA = I)$$

$$\iff (\exists \gamma \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \|Ax\| \geq \gamma \|x\|), \text{ alors :}$$

on dit que A est inversible et que son inverse est B et on posera $B = A^{-1}$.

Ainsi,

$$(A \in L(E), A \text{ inversible}) \implies (A^{-1} \in L(E)) \text{ et } (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$

Exemple 15.2.10 :

On utilise les mêmes hypothèses et notation qu'à l'exemple 4.2.

Homothétie : Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $A = \alpha x$, alors $A^{-1}x = \alpha^{-1}x$.

Rotation : Si $\theta \in [0, 2\pi[$, $x = (x_1, x_2)$, alors :

$$A^{-1}x = (x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)$$

15.2.4.3 Dualité.

Soit $(E^*, \|\cdot\|_*)$ le dual topologique de $(E, \|\cdot\|)$ et $A \in L(E)$. Alors,

$$\forall x, y \in E, |\langle Ax | y \rangle| \leq \|Ax\| \|y\| \leq \| |A| \| \|x\| \|y\|.$$

On en déduit qu'à tout $A \in L(E)$, on peut associer de manière unique un opérateur

$A^* \in L(E^*)$, appelé l'adjoint de A tel que :

$$\forall x, y \in E, |\langle Ax | y \rangle| = |\langle x | A^* y \rangle|.$$

Il en résulte que :

$$\forall A, B \in L(E), \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

$$(A + B)^* = A^* + B^*, (\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*,$$

$$(AB)^* = B^*A^*, (A^*)^* = A,$$

$$I^* = I,$$

D'autre part, si A est inversible, alors A^* est aussi inversible et :

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

Définition 45 :

On dit que $A \in L(E)$ est autoadjoint si $A^* = A$.

$A^* A$ est un opérateur autoadjoint.

On dit que $A \in L(E)$ est normal si $A^* A = A A^*$.

On dit que $A \in L(E)$ est unitaire si $A^* A = A A^* = I$.

Si $A, B \in L(E)$ sont unitaires, alors AB est unitaire.

Si $A \in L(E)$ est unitaire, on a :

$$\forall x \in E, \|Ax\| = \|x\| \text{ et } \forall B \in L(E), (ABA^*)^* = AB^*A.$$

Donc, si B est autoadjoint, alors ABA^* est autoadjoint.

15.2.4.4 Commutateur.

Soient $A, B \in L(E)$.

Alors, $AB \in L(E)$ et $BA \in L(E)$ mais, en général, $AB \neq BA$.

On pose : $[A, B] = AB - BA$.

$[A, B]$ qui appartient à $L(E)$ est appelé le *commutateur* de A et B (pris dans cet ordre).

On montre facilement que :

$$\begin{aligned} [A, B] &= -[B, A], \\ [A, B + C] &= [A, B] + [A, C] \\ [A, BC] &= [A, B]C + B[A, C], \\ [AB, C] + [CA, B] + [BC, A] &= 0, \\ [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] &= 0, \\ [A, B]^* &= [B^*, A^*] \end{aligned}$$

15.2.4.5 Opérateurs définis positifs.

Définition 46 :

On dit que $A \in L(E)$ est positif (resp. strictement positif ou défini positif) si :

$$\forall x \in E, \langle Ax | x \rangle \geq 0 \text{ (resp. } \forall x \in E, x \neq 0, \langle Ax | x \rangle > 0).$$

On notera que $\forall A \in L(E), A^* A$ est positif.

Si $A \in L(E)$ est inversible, alors $A^* A$ est défini positif.

15.3 C. Théorie spectrale.

15.3.1 9. Théorie spectrale élémentaire.

15.3.1.1 9.1 Introduction.

Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et A l'opérateur linéaire de E tel que :

$$\forall x = (x_1, x_2) \in E, \quad A = (a_{11} x_1 + a_{12} x_2, a_{21} x_1 + a_{22} x_2).$$

Déterminons les droites de E , passant par l'origine de E globalement invariantes par A .

Pour cela, il faut résoudre le problème suivant :

\mathcal{P} : Déterminer les couples $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$, $x \neq 0$, tels que : $Ax = \lambda x$ ou ce qui est équivalent tels que :

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

λ est donc solution de l'équation du second degré :

$$\mathcal{E} : \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Exemple 15.3.1 :

Supposons que A soit la rotation d'angle $\theta \in]0, 2\pi]$.

Comme $a_{11} = \cos \theta$, $a_{12} = -\sin \theta$, $a_{21} = \sin \theta$, $a_{22} = \cos \theta$, λ est la solution de l'équation : $\lambda^2 - 2 \cos \theta \cdot \lambda + 1 = 0$ qui admet les deux racines suivantes : $\lambda_1 = e^{i\theta}$ et $\lambda_2 = e^{-i\theta}$.

Ainsi, λ_1 et λ_2 n'appartiennent pas à \mathbb{R} .

Le problème \mathcal{P} a deux solutions qui sont les droites D_1 et D_2 associées respectivement à λ_1 et λ_2 et qui ont pour vecteurs directeurs $u_1 = (-1, i)$ et $u_2 = (-1, -i)$, où $i^2 = -1$.

Il n'existe donc pas de droite réelle dans E qui reste globalement invariante par A .

Exemple 15.3.2 :

Supposons que A soit l'homothétie ayant pour centre l'origine et pour rapport $a \in \mathbb{R}^*$.

Alors, $a_{11} = a$, $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{22} = a$.

λ est solution de l'équation $(a - \lambda)^2 = 0$, d'où : $\lambda = a$.

On vérifie facilement que toute droite D passant par l'origine de E est globalement invariante.

Exemple 15.3.3 :

Supposons que A soit auto-adjointe et définie positive.

Alors, $a_{11} > 0$, $a_{12} = a_{21}$, $a_{11}a_{22} - a_{12} + a_{21} > 0$.

On en déduit que l'équation \mathcal{E} a deux racines réelles positives, distinctes λ_1 et λ_2 .

λ_1 et λ_2 sont appelées les valeurs propres de A .

A λ_j est associée la droite réelle D_j de E , de vecteur directeur $u_j = (a_{11}, \lambda_j - a_{11})$, $j = 1, 2$.

D_j est appelé l'espace vectoriel propre associé à λ_j et tout vecteur porté par D_j est appelé vecteur propre associée à λ_j , $j = 1, 2$.

On vérifie facilement que $\langle u_1 | u_2 \rangle = 0$.

Les droites D_1 et D_2 sont donc orthogonales dans $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Prenons pour base de E les vecteurs u_1 et u_2 .

Si $x = \zeta_1 u_1 + \zeta_2 u_2$ et $y = \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2$, on a : $\langle y | Ax \rangle = \zeta_1 \eta_1 \lambda_1 + \zeta_2 \eta_2 \lambda_2$.

Soit $\mathcal{A} = \{x \in E; \langle x | Ax \rangle = 1\}$. \mathcal{A} est représenté graphiquement par

l'ellipse : $\{ (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}^2; \lambda_1 \zeta_1^2 + \lambda_2 \zeta_2^2 = 1 \}$ dont les demi-axes sont portés par les droites D_1 et D_2 et ont pour longueurs $(\lambda_1)^{-\frac{1}{2}}$ et $(\lambda_2)^{-\frac{1}{2}}$ respectivement.

15.3.1.2 9.2 Spectre et résolvante d'un opérateur linéaire.

Au paragraphe précédent, nous avons mis en évidence - en utilisant des exemples très simples - que le problème \mathcal{P} n'était pas aussi élémentaire que son énoncé pouvait le laisser croire.

Nous allons, maintenant étudier le problème \mathcal{P} dans un cadre plus général et nous allons en découvrir la complexité.

Dans la suite, $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ sera un espace de Hilbert sur \mathbb{C} et A un opérateur linéaire continu de E .

On se propose de déterminer s'il existe des "droites" de E , globalement invariantes par A , ou ce qui est équivalent, s'il existe des couples $(\lambda, x) \in \mathbb{C}^* \times (E \setminus \{0\})$ tels que : $Ax = \lambda x$.

(i) On dira que $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est une *valeur régulière* de A si $A - \lambda I$ est inversible et si son inverse est continu. Alors,

$$\text{Ker} (A - \lambda I) = 0 \text{ et } \text{Im} (A - \lambda I) = E.$$

On appelle *ensemble résolvant* de A , l'ensemble $\rho(A)$ des valeurs régulières de A .

$$\text{On posera : } \forall \lambda \in \rho(A), \quad R(A; \lambda) = (A - \lambda I)^{-1}.$$

$R(A; \lambda)$ est appelé la *résolvante* de A (associée à λ).

Nous noterons que $\forall \lambda, \mu \in \rho(A)$,

$$\begin{aligned} R(A; \mu) [(A - \lambda I) - (A - \mu I)] R(A; \lambda) \\ = (\mu - \lambda) R(A; \mu) R(A; \lambda) = R(A; \mu) - R(A; \lambda) \end{aligned}$$

On montre que $R(A; \lambda)$ est une fonction analytique de $\lambda \in \rho(A)$.

(ii) On appelle *spectre de A* l'ensemble $\sigma(A)$ complémentaire de $\rho(A)$ dans \mathbb{C} .

La quantité $r(A) = \text{Sup} \{ |\lambda|; \lambda \in \sigma(A) \}$ est appelée le *rayon spectral* de A et l'on a : $r(A) \leq \|A\|$. Par conséquent, $\sigma(A)$ est borné en module dans \mathbb{C} .

(iii) On appelle *spectre ponctuel de A* , l'ensemble $\sigma_p(A)$ des scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que

$$\text{Ker} (A - \lambda I) \neq 0 \text{ (où } I \text{ est l'opérateur identité)}.$$

Tout $\lambda \in \sigma_p(A)$ est appelé *valeur propre de A* et tout $x \in E \setminus \{0\}$ tel que : $Ax = \lambda x$ est appelé vecteur propre de A associé à λ .

L'ensemble des vecteurs propres de A associés à $\lambda \in \sigma_p(A)$ est un espace vectoriel appelé *espace propre* de A associé à λ .

Il est égal à $\text{Ker} (A - \lambda I)$.

Evidemment, $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$.

(iv) On appelle *spectre continu de A* , l'ensemble $\sigma_c(A)$ des scalaires $\lambda \in \sigma(A)$ tels que l'adhérence de $\text{Im} (A - \lambda I)$ dans E soit égal à E .

On appelle *spectre résiduel de A* , l'ensemble $\sigma_r(A)$ des scalaires $\lambda \in \sigma(A)$ tels que l'adhérence de $\text{Im} (A - \lambda I) \neq E$.

Proposition 28 : Si $A \in L(E)$ est auto-adjoint, alors :

- (j) le spectre résiduel de A est vide.
- (jj) le spectre ponctuel de A est réel.
- (jjj) deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

15.3.1.3 Opérateurs auto-adjoints compacts.

On dit que l'opérateur $A \in L(E)$ est de rang fini si la dimension de $Im A$ est finie.

Evidemment lorsque la dimension de E est finie, tout $A \in L(E)$ est de rang fini.

On dit que $A \in L(E)$ est compact si :

$\exists \{A_n; n \in \mathbb{N}\} \subset L(E)$ telle que $\lim |||A - A_n||| = 0$.

Proposition 29 : Si $A \in L(E)$ est auto-adjoint et compact, alors :

- (i) $\sigma_r(A)$ est vide et $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$.
- (ii) Il existe au moins un élément $\lambda \in \sigma_p(A)$ tel que $|\lambda| = |||A|||$.
- (iii) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_p(A)$ sont distincts alors deux vecteurs propres quelconques u_1 et u_2 associés respectivement à λ_1 et λ_2 sont orthogonaux.
- (iv) Si $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}$, alors l'espace propre de A associé à λ est de dimension finie.
- (v) Il existe une famille dénombrable de valeurs propres (λ_k) et une famille (ϕ_k) de vecteurs propres orthonormés (dans $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$) associés à la famille (λ_k) telles que :
 - (j) $\forall x \in E, x = x_0 + \sum_k \gamma_k \phi_k, x_0 \in Ker A, \gamma_k \in \mathbb{C}$
et $Ax = \sum_k \gamma_k \lambda_k \phi_k$.
 - (jj) Si la suite (λ_k) est infinie (dénombrable) alors $\lim_k \lambda_k = 0$ et, en dehors de tout voisinage de l'origine dans \mathbb{C} , il n'existe qu'un nombre **fini** de valeurs propres de la suite (λ_k) .

15.3.2 10. Décomposition spectrale d'un opérateur auto-adjoint.

15.3.2.1 10.1 Quelques propriétés des opérateurs auto-adjoints.

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, $L(E)$ (resp. $\mathcal{A}(E)$) l'espace vectoriel des opérateurs de E linéaires et continus (resp. linéaires et continus auto-adjoints).

Propriétés 10.1

(i) Relation d'ordre :

Etant donnés $A, B \in \mathcal{A}(E)$, on dira que $A \leq B$ ssi $\forall x \in E, \langle Ax | x \rangle \leq \langle Bx | x \rangle$.

(ii) Si $A, B \in \mathcal{A}(E)$ sont permutables, alors $AB \in \mathcal{A}(E)$.

(iii) Si $A \in \mathcal{A}(E)$ et si A^{-1} existe, alors $A^{-1} \in \mathcal{A}(E)$.

(iv) Bornes de A .

Posons $\forall A \in L(E), |||A||| = \text{Sup}\{\|Ax\|; \|x\| = 1\}$.

Alors $\forall A \in \mathcal{A}(E), |\langle Ax | x \rangle| \leq \|Ax\| \|x\| \leq |||A||| \cdot \|x\|^2$.

On montre que $|||A||| = \text{Sup}\{|\langle Ax | x \rangle|; \|x\| = 1\}$.

D'autre part, puisque $\forall x \in E, \|x\| = 1, \langle Ax | x \rangle \leq \|A\|$, il existe deux nombres réels positifs $m(A)$ et $M(A) \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in E, \|x\| = 1, \quad m(A) = \text{Inf} \{ \langle Ax | x \rangle ; \|x\| = 1 \}$$

$$M(A) = \text{Sup} \{ \langle Ax | x \rangle ; \|x\| = 1 \},$$

c-à-d si I désigne l'opérateur identité,

$$m(A)I \leq A \leq M(A)I.$$

(v) *Inégalité de Schwarz généralisée*

Soit $A \in \mathcal{A}(E)$.

Si $A \geq 0$, alors : $\forall x, y \in E, |\langle Ax | y \rangle|^2 \leq \langle Ax | x \rangle \cdot \langle Ay | y \rangle$.

(vi) *Suites monotones :*

Toute suite monotone et bornée d'éléments de $\mathcal{A}(E)$ converge fortement vers un élément de $\mathcal{A}(E)$.

(vii) On appelle *projecteur de E* un opérateur $P \in \mathcal{A}(E)$ tel que $P^2 = P = P^*$.

Soient P et Q deux projecteurs de E .

Si $\|P - Q\| < 1$, alors PE et QE munis de la norme induite par celle de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ sont isométriques.

(viii) Soit $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des polynômes définis sur \mathbb{R} .

Etant donné $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tel que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, p(\lambda) = \sum_{j=1}^{j=n} a_j \lambda^j$, on pose

$$\forall A \in \mathcal{A}(E), p(A) = \sum_{j=1}^{j=n} a_j A^j.$$

Alors,

(j) $p(A) \in \mathcal{A}(E)$

(jj) $\{ T \in \mathcal{A}(E) ; T = p(A), A \in \mathcal{A}(E), p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \}$ est un espace vectoriel.

(jjj) Soit $A \in \mathcal{A}(E)$.

Si $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est tel que $\forall \lambda \in [m(A), M(A)], p(\lambda) \geq 0$, alors $p(A) \geq 0$.

15.3.2.2 Décomposition spectrale de $A \in \mathcal{A}(E)$.

(i) On suppose que $\dim E = n, n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A \in \mathcal{A}(E)$ ayant pour valeurs propres les nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ où $1 \leq q \leq n$.

Désignons par P_j le projecteur de E tel que $P_j E$ soit le sous-espace vectoriel propre de A associé à $\lambda_j, 1 \leq j \leq q$.

On sait que $E = P_1 \oplus \dots \oplus P_q$. Donc

$$(\forall x \in E, x = \sum_{j=1}^{j=n} P_j x) \iff (I = \sum_{j=1}^{j=n} P_j) \text{ et}$$

$$(\forall x \in E, Ax = \sum_{j=1}^{j=n} AP_j x = \sum_{j=1}^{j=n} \lambda_j P_j x) \iff (A = \sum_{j=1}^{j=n} \lambda_j P_j).$$

(ii) Le théorème suivant généralise les propriétés énoncées au paragraphe ci-dessus.

Théorème 15.3.1 :

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{A}(E)$.

On pose : $m(A) = \text{Inf} \{ \langle Ax | x \rangle ; \|x\| = 1 \}$ et $M(A) = \text{Sup} \{ \langle Ax | x \rangle ; \|x\| = 1 \}$.

Il existe une seule famille $\{ E(\lambda) ; \lambda \in \mathbb{R} \}$ de projecteurs de E possédant les propriétés suivantes :

(j) $E(\lambda)$ est la limite forte d'une suite de polynômes de A .

(jj) Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \leq \mu$, alors

$$E(\lambda) \leq E(\mu) \iff (E(\lambda).E(\mu) = E(\mu).E(\lambda) = E(\lambda) = E(\min(\lambda, \mu)))$$

(jjj) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{\mu \rightarrow \lambda^+} E(\mu) = E(\lambda)$, dans $(L(E), \|\cdot\|)$.

(jv) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < m(A)$, $E(\lambda) = 0$

on a bien $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq M(A)$, $E(\lambda) = 1$.

et telle que :

Quelle que soit la fonction ϕ à valeurs complexes définie sur \mathbb{R} on ait :

$$\forall x, y \in E, \langle \phi(A)x | y \rangle = \int_{m(A)-0}^{M(A)} \phi(\lambda) d(\langle E(\lambda)x | y \rangle)$$

Ce que l'on écrit symboliquement : $\phi(A) = \int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda) d(E(\lambda))$

On en déduit que :

$$I = \int_{\mathbb{R}} d(E(\cdot; \lambda)), \quad A = \int_{\mathbb{R}} \lambda d(E(\lambda)), \quad \text{et } \forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{iAt} = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} d(E(\lambda)).$$

Quelques indications pour démontrer le théorème précédent :

$$\text{Posons : } \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad e(t; \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq \lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$e(\cdot; \lambda)$ est la limite d'une suite décroissante de polynômes $p_n(\cdot; \lambda)$.

(Sur un intervalle borné, $p_n(\cdot; \lambda)$ converge uniformément vers $e(\cdot; \lambda)$)

Etant donné $A \in \mathcal{A}(E)$, $(p_n(\cdot; \lambda))$ converge fortement dans $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ vers un élément de $\mathcal{A}(E)$ que nous noterons $E(\lambda)$.

Posons : $e(\cdot; \mu, \nu) = e(\cdot; \nu) - e(\cdot; \mu)$.

Supposons que $\mu < \nu$. Alors :

$$\forall \lambda \in]-\infty, \mu] \cup]\nu, +\infty], \quad e(\lambda; \mu, \nu) = 0 \quad \text{et}$$

$$\forall \lambda \in]\mu, \nu], \quad e(\lambda; \mu, \nu) = 1.$$

On en déduit que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mu e(\lambda; \mu, \nu) \leq \lambda e(\lambda; \mu, \nu) \leq \nu e(\lambda; \mu, \nu)$$

Il en résulte que :

$$\text{si } \mu < \nu, \text{ alors : } \mu (E(\nu) - E(\mu)) \leq A (E(\nu) - E(\mu)) \leq \nu (E(\nu) - E(\mu))$$

Soit $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$, tels que :

$$\mu_0 < m(A) < \mu_1 < \dots < \mu_{n-1} < M(A) < \mu_n.$$

On déduit de ce qui précède que :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{k=n} \mu_{k-1} (E(\mu_k) - E(\mu_{k-1})) \leq A \left\{ \sum_{k=1}^{k=n} (E(\mu_k) - E(\mu_{k-1})) \right\} \\ & \leq \sum_{k=1}^{k=n} \mu_k (E(\mu_k) - E(\mu_{k-1})). \end{aligned}$$

Donc, si λ_k est un point quelconque de l'intervalle $]\mu_{k-1}, \mu_k[$ et si $\text{Max}_k(\mu_k - \mu_{k-1}) \leq \varepsilon$, alors :

$\left\| A - \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k (E(\mu_k) - E(\mu_{k-1})) \right\| \leq \varepsilon$. On en conclut que :

$\forall x, y \in E, \langle A x | y \rangle^2 = \int_{m(A)-0}^{M(A)} \lambda \, d(\langle E(\lambda) x | y \rangle) = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d(\langle E(\lambda) x | y \rangle)$.

Comme $(e(\cdot; \lambda))^2 = e(\cdot; \lambda) = \overline{e(\cdot; \lambda)}$, on a : $(E(\lambda))^2 = E(\lambda) = \overline{E(\lambda)}$.

$E(\cdot; \lambda)$ est donc un projecteur dans $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

De ce qui précède, il résulte que si $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ alors

$p(A) = \int_{m(A)-0}^{M(A)} p(\lambda) \, d(E(\lambda))$.

La propriété relative à une fonction continue énoncée dans le théorème ci-dessus s'en déduit aisément.

15.3.2.3 Opérateur auto-adjoint associé à une décomposition spectrale de l'identité.

Définition 47 :

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et $\{E(\lambda); \lambda \in \mathbb{R}\}$, une famille de projections de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

On désigne par $E(\lambda + 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. $E(-\infty)$, $E(+\infty)$) l'opérateur de E tel que :

$\forall x \in E, E(\lambda + 0)x = \lim_{\mu \downarrow \lambda} \text{forte } E(\mu)x$

(resp. $E(-\infty)x = \lim_{\mu \downarrow (-\infty)} \text{forte } E(\mu)x$, $E(+\infty)x = \lim_{\mu \uparrow (+\infty)} \text{forte } E(\mu)x$)

On dit que $\{E(\lambda); \lambda \in \mathbb{R}\}$ est une décomposition spectrale de l'identité si :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad E(\lambda).E(\mu) = E(\mu).E(\lambda) = E(\min(\lambda, \mu))$$

et $E(\lambda + 0) = E(\lambda)$, $E(-\infty) = 0$, $E(+\infty) = I$.

Proposition 30 :

(i) Quels que soient $x, y \in E$, la fonction $\langle E(\cdot)x | y \rangle$ est une fonction à variation bornée.

(ii) Posons : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda < \mu, E(] \lambda, \mu]) = E(\mu) - E(\lambda)$.

Étant donnés $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$, désignons par $\{\lambda_j^n; 1 \leq j \leq p(n), n \in N^*\}$ une suite de subdivisions de $[\alpha, \beta]$ telle que : $\alpha = \lambda_1^n < \lambda_2^n < \dots < \lambda_{p(n)}^n = \beta$ et par $\widetilde{\lambda}_j^n$ un point arbitraire de l'intervalle $]\lambda_j^n, \lambda_{j+1}^n]$, $1 \leq j \leq p(n) - 1, n \in N^*$.

f étant une fonction à valeurs complexes, définie et continue sur \mathbb{R} , posons :

$$S_n(f; \alpha, \beta; \lambda) = \sum_{j=1}^{p(n)-1} f(\widetilde{\lambda}_j^n) E(]\lambda_j^n, \lambda_{j+1}^n]).$$

Alors, quand $\text{Max}\{|\lambda_{j+1}^n - \lambda_j^n|; 1 \leq j \leq p(n) - 1\}$ tend vers zéro, lorsque n tend vers l'infini, quel que soit $x \in E$, $S_n(f; \alpha, \beta; \lambda)x$ tend vers un élément de E que nous noterons $\int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) \, d(E(\lambda)x)$.

On posera, dans la suite :

$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, d(E(\lambda)x) = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty, \beta \rightarrow +\infty} \text{forte } \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) \, d(E(\lambda)x)$. On montre que

Théorème 15.3.2 : Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, $\{E(\lambda); \lambda \in \mathbb{R}\}$ une décomposition spectrale de l'identité de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ et f une fonction à valeurs complexes, définie et continue sur \mathbb{R} .

On pose : $\forall x, y \in E, \langle Hx | y \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d(\langle E(\lambda)x | y \rangle)$ ou symboliquement :

$$H = \int_{\mathbb{R}} f \lambda dE(\lambda) .$$

Alors, H est un opérateur auto-adjoint de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ qui n'est pas nécessairement borné.

H est défini sur le domaine :

$$D(H) = \{x \in E; \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d(\|E(\lambda)x\|^2) < +\infty\} .$$

$$\text{Ainsi, } \forall x \in D(H), \|Hx\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d(\|E(\lambda)x\|^2) .$$

On notera que :

$$H(E(\lambda)) \supset E(\lambda)H \quad \text{c-à-d} \quad H(E(\lambda)) \quad \text{est une extension de} \quad E(\lambda)H .$$

15.3.3 Décomposition spectrale d'une transformation unitaire.

15.3.3.1

Du théorème ci-dessus on déduit le théorème suivant :

Théorème 15.3.3 Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et U une transformation unitaire de E .

Il existe une seule famille $\{E(\alpha); \alpha \in [0, 2\pi]\}$ de projecteurs de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, possédant les propriétés suivantes :

(i) $\forall \alpha, \beta \in [0, 2\pi], E(\alpha).E(\beta) = E(\beta).E(\alpha) = E(\min(\alpha, \beta))$

(ii) $\forall \alpha \in [0, 2\pi] \quad \forall x \in E, \lim_{\beta \downarrow \alpha} \text{forte} E(\beta)x = E(\alpha)x,$

$$E(0) = 0, \quad E(2\pi) = I$$

et telle que :

quelle que soit la fonction ϕ , à valeurs complexes, définie et continue sur $[0, 2\pi]$, on ait

$$\forall x, y \in E, \langle \phi(U)x | y \rangle = \int_0^{2\pi} \phi(e^{i\alpha}) d(\langle E(\alpha)x | y \rangle) .$$

15.3.3.2 Semi-groupe d'opérateurs. Théorème de Stone.

Définition 48 Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert.

On dit qu'une famille d'opérateurs de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, notée $\{T(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ est un semi-groupe à un paramètre réel, de classe (C_0) si :

(i) $\forall t, s \in \mathbb{R}, T(t).T(s) = T(t+s), T(0) = I$

(ii) $\forall x \in E, \forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \lim_{t \rightarrow t_0} \text{forte} T(t)x = T(t_0)x .$

On montre que si $\{T(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ est un semi-groupe de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ de classe (C_0) , on a :

$$\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*, \exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in \mathbb{R}, \|T(t)\| \leq M e^{\beta t} .$$

On appelle alors, *générateur infinitésimal* de $\{T(t); t \in \mathbb{R}_+\}$, l'opérateur A de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ tel que :

$$\forall x \in E, Ax = \lim_{h \downarrow 0} \text{forte} h^{-1}(T(h) - I)x .$$

Proposition 31 :

Si $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert séquentiellement complet et si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ de classe (C_0) , alors le domaine de A est dense dans $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Théorème 15.3.4 Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert.

(i) A étant un opérateur auto-adjoint de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, posons : $\forall t \in \mathbb{R}, U(t) = e^{itA}$.

Alors, $\{U(t); t \in \mathbb{R}\}$ est un groupe d'opérateurs unitaires, de classe (C_0) , de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

(ii) Réciproquement, soit $\{U(t); t \in \mathbb{R}\}$ un groupe d'opérateurs unitaires, de classe (C_0) , de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Alors : $\forall t \in \mathbb{R}, U(t) = e^{itA}$ où A est un opérateur auto-adjoint de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ et iA le générateur infinitésimal de $\{U(t); t \in \mathbb{R}\}$.

Indication :

On notera que si $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda)$, alors :

$$e^{itA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} \lambda^n dE(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \frac{(it\lambda)^n}{n!} dE(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} dE(\lambda)$$

15.3.3.3 11.3 Théorème de Bochner.

On déduit du théorème de Stone le

Théorème 15.3.5 (Bochner) :

Soit f une fonction à valeurs complexes, définie et continue sur \mathbb{R} .

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe une fonction sur \mathbb{R} , à valeurs réelles, bornée et non décroissante V telle que :
 $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} dV(\lambda)$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{C}, \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}, \sum_{j,k=1}^n \rho_j \rho_k f(t_j - t_k) \geq 0$.

On dit alors que f est définie positive.

Ce théorème admet plusieurs extensions, en particulier dans le cas où f est une distribution.

15.3.4 14. Produits tensoriels d'espaces de Hilbert.**15.3.4.1 Produit tensoriel de deux espaces de Hilbert.****Définition 14.1**

Soit $(E_j, \langle \cdot | \cdot \rangle_j)$ deux espaces de Hilbert.

On appelle produit tensoriel de $x_1 \in E_1$ par $x_2 \in E_2$, l'application bilinéaire, notée $x_1 \otimes x_2$ telle que :

$$\forall y_1 \in E_1, \forall y_2 \in E_2, (x_1 \otimes x_2)(y_1, y_2) = \langle x_1 | y_1 \rangle_1 \cdot \langle x_2 | y_2 \rangle_2.$$

On appelle produit tensoriel algébrique de $(E_1, \langle \cdot | \cdot \rangle_1)$ par $(E_2, \langle \cdot | \cdot \rangle_2)$ l'espace vectoriel :

$$E_1 \otimes E_2 = \left\{ \sum_{j=1}^n (x_1^j \otimes x_2^j); x_1^j \in E_1, x_2^j \in E_2, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

On notera que tout $u \in E_1 \otimes E_2$ peut s'écrire de plusieurs façons sous la forme

$$\sum_{j=1}^n (x_1^j \otimes x_2^j) .$$

Soit $x, y \in E_1 \otimes E_2$, $x = \sum_{j=1}^n (x_1^j \otimes x_2^j)$, $y = \sum_{k=1}^m (y_1^k \otimes y_2^k)$.

Posons : $\langle x | y \rangle_{\otimes} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \langle x_1^j | y_1^k \rangle_1 \cdot \langle x_2^j | y_2^k \rangle_2$

On montre que $\langle x | y \rangle_{\otimes}$ est indépendant de la décomposition de x et y en somme de produits tensoriels et que $(E_1 \otimes E_2, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\otimes})$ est un espace préhilbertien.

Soit $\| \cdot \|_{\otimes} = (\langle \cdot | \cdot \rangle_{\otimes})^{\frac{1}{2}}$.

On appelle produit tensoriel (topologique) de $(E_1, \langle \cdot | \cdot \rangle_1)$ par $(E_2, \langle \cdot | \cdot \rangle_2)$ un complété de $(E_1 \otimes E_2, \| \cdot \|_{\otimes})$ que l'on notera $E_1 \otimes_{\hat{\sigma}} E_2$.

15.3.4.2 14.2 Produit tensoriel symétrique (resp. antisymétrique) de n exemplaires d'un espace de Hilbert.

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

Etant donnés $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$, on désigne par $x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n$ la n -forme linéaire sur E^n telle que :

$$\forall y_1, y_2, \dots, y_n \in E, \\ (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n)(y_1, y_2, \dots, y_n) = \langle x_1 | y_1 \rangle \dots \langle x_n | y_n \rangle .$$

Il est naturel d'écrire :

$$(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)(y_1, \dots, y_n) = \langle x_1 \otimes \dots \otimes x_n | y_1 \otimes \dots \otimes y_n \rangle_{\otimes^n} .$$

Alors $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\otimes^n}$ se prolonge en un produit scalaire défini positif sur

$$E^{\otimes n} = \{ \sum_{j=1}^p (x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j) ; x_1^j, \dots, x_n^j \in E, 1 \leq j \leq p, p \in \mathbb{N}^* \} .$$

Soit S_n le n^{ieme} groupe symétrique.

Etant donnée une permutation $\rho \in S_n$, on note $\varepsilon(\rho)$ le signe de ρ et on pose :

$$\forall x = x_1 \otimes \dots \otimes x_n \in E^{\otimes n},$$

$$ux = x_1 \vee \dots \vee x_n = \frac{1}{n!} \sum_{\rho \in S_n} (x_{\rho_1} \otimes \dots \otimes x_{\rho_n}) \\ vx = x_1 \wedge \dots \wedge x_n = \frac{1}{n!} \sum_{\rho \in S_n} \varepsilon(\rho) (x_{\rho_1} \otimes \dots \otimes x_{\rho_n})$$

et

$$E^{\vee n} = \{ \sum_{j=1}^p ux^j ; x^j = x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j ; x_1^j, \dots, x_n^j \in E, 1 \leq j \leq p, p \in \mathbb{N}^* \}$$

$$E^{\wedge n} = \{ \sum_{j=1}^p vx^j ; x^j = x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j ; x_1^j, \dots, x_n^j \in E, 1 \leq j \leq p, p \in \mathbb{N}^* \} .$$

D'autre part, $\forall x = x_1 \otimes \dots \otimes x_n \in E^{\otimes n}$ et $\forall y = y_1 \otimes \dots \otimes y_n \in E^{\otimes n}$,

$$\begin{aligned} \langle ux \mid uy \rangle_{\vee n} &= \frac{1}{n!} \sum_{\rho \in S_n} \langle x_1 \mid y_{\rho(1)} \rangle \dots \langle x_n \mid y_{\rho(n)} \rangle \\ \langle vx \mid vy \rangle_{\wedge n} &= \frac{1}{n!} \sum_{\rho \in S_n} \varepsilon(\rho) \langle x_1 \mid y_{\rho(1)} \rangle \dots \langle x_n \mid y_{\rho(n)} \rangle . \\ \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\vee n} \text{ (resp. } \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\wedge n}) &\text{ se prolonge en un produit scalaire défini positif sur } E^{\vee n} \text{ (resp. } E^{\wedge n}) \end{aligned}$$

On notera dans la suite, $(\widehat{E_\sigma^{\otimes n}}, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\otimes n})$ (resp. $(\widehat{E_\sigma^{\vee n}}, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\vee n}), (\widehat{E_\sigma^{\wedge n}}, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\wedge n})$) un complété de $(E^{\otimes n}, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\otimes n})$ (resp. $(E^{\vee n}, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\vee n}), (E^{\wedge n}, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\wedge n})$) relativement à la norme associée à $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\otimes n}$ (resp. $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\vee n}, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\wedge n}$).

15.3.5 15. Noyaux hilbertiens.

15.3.5.1 15.1 Noyaux d'Aronszjan.

Définition 15.1 Soit Ω un ensemble (quelconque).

On dit qu'un espace de Hilbert $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ est un sous-espace hilbertien (complexe) de \mathbb{C}^Ω si :

- (i) E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^Ω .
- (ii) $\forall t \in \Omega, \exists M(t) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in E, |x(t)| \leq M(t) \|x\| \quad \text{où} \quad \|\cdot\| = (\langle \cdot \mid \cdot \rangle)^{\frac{1}{2}}.$$

(autrement dit, l'injection canonique de $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ dans \mathbb{C}^Ω muni de sa topologie faible est continue);

On désignera par $Hilb(\mathbb{C}^\Omega)$ l'ensemble des sous-espaces hilbertiens de \mathbb{C}^Ω .

Théorème 15.1 et définition 15.2

Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle) \in Hilb(\mathbb{C}^\Omega)$.

Il existe un seul élément $e \in \mathbb{C}^{\Omega \times \Omega}$ tel que :

$$\forall x \in E, \forall t \in \Omega, x(t) = \langle x \mid e(\cdot, t) \rangle.$$

e est appelé le *noyau hilbertien (ou reproduisant ou d'Aronszjan)* de $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ relativement à \mathbb{C}^Ω .

Théorème 15.2

Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle) \in Hilb(\mathbb{C}^\Omega)$ et e son noyau hilbertien.

e possède les deux propriétés suivantes :

- (i) $\forall s, t \in \Omega, e(s, t) = \overline{e(t, s)}$ (hermiticité)
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t_1, \dots, t_n \in \Omega, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C},$
 $\sum_{j, k=1}^n \overline{\lambda_j} \lambda_k e(t_j, t_k) \geq 0$ (positivité).

Inversement, tout élément $e \in \mathbb{C}^{\Omega \times \Omega}$ qui possède les propriétés d'hermiticité et de positivité ci-dessus, est le noyau d'un sous-espace hilbertien de \mathbb{C}^Ω .

(iii) Si e est le noyau d'un sous-espace hilbertien $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ de \mathbb{C}^Ω , alors :

$$E_0 = \{ x \in E; x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e(\cdot, t_j), n \in \mathbb{N}^*, t_1, \dots, t_n \in \Omega, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} \}$$

est fortement *dense* dans $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$.

Exemple 15.1.

Fonctions définies positives et noyaux invariants par translation.

(i) Considérons une fonction f sur \mathbb{R} telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}, \forall \rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{C},$$

$$\sum_{j,k=1}^n \overline{\rho_j} \rho_k f(t_j - t_k) \geq 0$$

Alors la fonction qui à t, s associe $f(t - s)$ est un noyau hilbertien car

$$f(t - s) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\lambda} dV(\lambda) = \overline{f(s - t)} \quad (\text{cf. § 7.3}).$$

(ii) Inversement, soit e un noyau d'Aronszjan défini sur \mathbb{R} et invariant par translation. Posons :
 $\forall t \in \mathbb{R}, e(t, 0) = f(t)$.

Alors, $\forall s, t \in \mathbb{R}, e(s, t) = e(s - t, 0) = f(s - t)$.

On en déduit immédiatement que f est une fonction définie sur \mathbb{R} et définie positive.

15.3.5.2 Noyaux de L. Schwartz.

Définition 15.3

Soit X un espace vectoriel localement convexe (complexe), X' son dual topologique, $\overline{X'}$ son antidual topologique et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité entre X et X' . Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert (complexe), $\|\cdot\| = (\langle \cdot | \cdot \rangle)^{\frac{1}{2}}$, E' le dual topologique de E et $\overline{E'}$ son antidual topologique.

Désignons par Λ l'isomorphisme canonique de $\overline{E'}$ sur E .

On dit que l'espace de Hilbert $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un *sous-espace hilbertien de X* si :

(i) E est un sous-espace vectoriel de X .

(ii) $\forall \phi' \in X', \exists M(\phi') \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in E, |\langle jx, \phi' \rangle| \leq M(\phi') \|x\|$

où j est l'injection canonique de E dans X .

On note $Hilb(X)$, l'ensemble des sous-espaces hilbertiens de X .

j^* désignant l'application adjointe de j , on a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \overline{X'} & \xrightarrow{j^*} & \overline{E'} & \xrightarrow{\Lambda} & E & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

Alors, $e = j\Lambda j^*$ est appelé le noyau hilbertien (de Schwartz) de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle) \in Hilb(X)$.

e est une application faiblement continue de $\overline{X'}$ dans X telle que :

$$\forall \phi' \in X', \forall x \in E, \langle jx, \phi' \rangle = \langle x | \tilde{e}\phi' \rangle \quad \text{où } \tilde{e} = \Lambda j^*.$$

Théorème 15.3

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle) \in Hilb(X)$ et e son noyau hilbertien.

e possède les deux propriétés suivantes :

(i) $\forall \phi', \psi' \in X', \langle e\phi', \psi' \rangle = \overline{\langle e\psi', \phi' \rangle}$ (hermiticité)

(ii) $\forall \phi' \in X', \langle e\phi', \phi' \rangle \geq 0$ (positivité).

Inversement, si e est une application faiblement continue de $\overline{X'}$ dans X , qui possède les deux propriétés ci-dessus (hermiticité et positivité), alors e est le noyau hilbertien d'un sous-espace hilbertien de X .

(iii) Si e est le noyau d'un sous-espace hilbertien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ de X , alors :

$$\tilde{e}X' \text{ est dense dans } (E, \langle \cdot | \cdot \rangle).$$

Un cas important : celui où $X = \mathbb{C}^\Omega$.

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle) \in Hilb(\mathbb{C}^\Omega)$ et e son noyau de Schwartz.

Posons : $\forall t \in \Omega, e(\cdot, t) = \tilde{e}\delta_t$.

Alors, $e(\cdot, t) \in E$ et $\forall s \in \Omega, \langle e\delta_t, \delta_s \rangle = e(s, t) = \langle j\tilde{e}\delta_t, \delta_s \rangle$.

Ainsi, $\forall x \in E, \forall t \in \Omega,$

$$x(t) = \langle jx, \delta_t \rangle = \langle x, j^*\delta_t \rangle = \langle x | \Lambda j^*\delta_t \rangle = \langle x | \tilde{e}\delta_t \rangle = \langle x | e(\cdot, t) \rangle.$$

La fonction qui à tout couple $(s, t) \in \Omega \times \Omega$ associe $e(s, t)$ est donc le noyau d'Aronszajn de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Exemple 15.2

Nous nous placerons ci-dessous dans le cas réel.

Soit X l'espace vectoriel $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ des distributions à support compact dans \mathbb{R} , mis en dualité avec l'espace vectoriel $X' = \mathcal{D}(\mathbb{R})$ des fonctions à support compact dans \mathbb{R} , indéfiniment différentiables sur \mathbb{R} .

Etant donnés $\mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R}_+^*$, posons :

$$\forall \phi \in X', \forall s \in \mathbb{R}, (e\phi)(s) = -\mu_1 \frac{d^2 \phi(s)}{ds^2} + \mu_0 \phi(s).$$

Alors,

$$\forall \phi, \psi \in X', \langle e\phi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} (\mu_1 \frac{d\phi(s)}{ds} \cdot \frac{d\psi(s)}{ds} + \mu_0 \phi(s)\psi(s)) ds = \langle e\psi, \phi \rangle$$

et $\langle e\phi, \phi \rangle \geq 0$.

On en déduit que e est le noyau hilbertien d'un sous-espace hilbertien de X .

15.3.5.3 15.3 Opérations élémentaires sur les noyaux hilbertiens.

15.3.1 Produit par un scalaire et somme. Soit X un espace vectoriel localement convexe (complexe).

(i) Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle) \in \text{Hilb}(X)$ et e son noyau hilbertien.

Posons : $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \|x\|_{\lambda} = \lambda^{-\frac{1}{2}} \|x\|$.

$\|\cdot\|_{\lambda}$ est une norme hilbertienne sur E .

Désignons par $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\lambda}$ le produit scalaire associé à $\|\cdot\|_{\lambda}$.

Alors, λe est le noyau hilbertien de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\lambda}) \in \text{Hilb}(X)$.

(ii) Soit $(E_j, \langle \cdot | \cdot \rangle_j) \in \text{Hilb}(X)$, e_j son noyau hilbertien et $\|x\|_j = (\langle \cdot | \cdot \rangle_j)^{\frac{1}{2}}$, $j = 1, 2$.

Posons : $E = \{z \in X; z = x_1 + x_2, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\} \stackrel{\text{def}}{=} E_1 + E_2$

et $\forall z \in E, \|z\| = \text{Inf} \{ (\|x\|_1 + \|x\|_2)^{\frac{1}{2}}; z = x_1 + x_2, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2 \}$

On vérifie facilement que $\|\cdot\|$ est une norme hilbertienne sur E .

Désignons par $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire associé à $\|\cdot\|$.

Alors, $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle) \in \text{Hilb}(X)$ et son noyau hilbertien est $e = e_1 + e_2$.

(iii) On déduit des paragraphes (i) et (ii) ci-dessus que $\text{Hilb}(X)$ a une structure de cône convexe.

15.3.2 Produit tensoriel. Par souci de simplification (technique), nous nous placerons dans le cas des noyaux d'Aronszjan.

Soit Ω_j un ensemble quelconque et $(E_j, \langle \cdot | \cdot \rangle_j) \in \text{Hilb}(\mathbb{C}^{\Omega_j})$ de noyau hilbertien e_j , $j = 1, 2$.

On montre que le produit des fonctions e_1 et e_2 est le noyau hilbertien de

$$(E_1 \widehat{\otimes}_{\sigma} E_2) \in \text{Hilb}(\mathbb{C}^{\Omega_1 \times \Omega_2}).$$

15.3.3 Image.

Soit X_1 et X_2 deux espaces vectoriels localement convexes (complexes) et u une application linéaire faiblement continue de X_1 dans X_2 .

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle) \in \text{Hilb}(X_1)$, e son noyau hilbertien et $\|\cdot\| = (\langle \cdot | \cdot \rangle)^{\frac{1}{2}}$.

Posons : $u(E) = \{z \in X_2; z = ux, x \in E\}$ et

$\forall z \in u(E), \|\cdot\|_u = \text{Inf} \{ \|x\|; z = ux, x \in E \}$.

Alors, $\|\cdot\|_u$ est une norme hilbertienne sur $u(E)$.

Désignons par $\langle \cdot | \cdot \rangle_u$ le produit scalaire associé à $\|\cdot\|_u$.

$(u(E), \langle \cdot | \cdot \rangle_u) \in \text{Hilb}(X_2)$, et son noyau hilbertien est $u e u^*$.

Exercice 15.3.1

En utilisant le résultat ci-dessus, expliciter les noyaux hilbertiens du produit d'un espace de Hilbert par un scalaire positif, de la somme de deux espaces de Hilbert, des produits tensoriels symétriques et antisymétriques de deux espaces de Hilbert, du transformé de Fourier d'un espace de Hilbert.

CHAPITRE 16

M 4 SUR LA RÉOLUTION DES PROBLÈMES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES (PDP) LINÉAIRES.

16.1 0. Sur les fonctions et distributions.

Une distribution est une "fonction généralisée" qui peut être différenciée indéfiniment. Il n'est pas possible, dans le cadre de cet ouvrage, de présenter, même sommairement, l'essentiel de la théorie des distributions.

Nous pouvons cependant en montrer l'intérêt, dans un cas très simple, en calculant la "dérivée-distribution" d'une fonction numérique u définie sur \mathbb{R} et non-dérivable.

φ étant une fonction réelle définie sur \mathbb{R} , posons :

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} u(t)\varphi(t) dt \quad \text{lorsque cette intégrale a un sens}$$

Supposons que φ ait un support compact dans \mathbb{R} (ce support est donc borné et fermé) et soit dérivable sur \mathbb{R} .

Si u était dérivable sur \mathbb{R} , on aurait alors :

$$\langle u', \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} u'(t)\varphi(t) dt = [u(t)\varphi(t)]_{\text{supp}(\varphi)} - \int_{\mathbb{R}} u(t)\varphi'(t) dt = - \langle u, \varphi' \rangle$$

Notons $D(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur \mathbb{R} , à support compact, indéfiniment différentiable sur \mathbb{R} .

Si u n'est pas dérivable et si $\int_{\mathbb{R}} u(t)\varphi'(t) dt$ a un sens, quelle que soit $\varphi \in D(\mathbb{R})$, on appellera *dérivée-distribution* de u la fonctionnelle qui, à toute $\varphi \in D(\mathbb{R})$, associe $-\int_{\mathbb{R}} u(t)\varphi'(t) dt$.

Exemple :

Supposons que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, u(t) = |t| = \begin{cases} t & \text{si } t \geq 0 \\ -t & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Alors, u n'est pas dérivable à l'origine.

Cependant, on vérifie immédiatement que :

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}) \quad \langle u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} u(t)\varphi(t) dt \quad \text{a un sens.}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} - \langle u', \varphi \rangle &= \langle u, \varphi' \rangle = \int_{\mathbb{R}_+} u(t)\varphi'(t) dt + \int_{\mathbb{R}_-} u(t)\varphi'(t) dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}_+} \varphi'(t) dt - \int_{\mathbb{R}_-} (-1) \varphi'(t) dt = \int_{\mathbb{R}} w(t)\varphi(t) dt \quad \text{où} \quad w(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t > 0 \\ +1 & \text{si } t < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On dit que w est la dérivée distribution de u ; w est la fonction de Heaviside (qui est discontinue).

16.2 1. Introduction. Problèmes aux dérivées partielles du deuxième ordre.

L'étude de nombreux phénomènes physiques conduit, *in fine*, à la résolution de problèmes aux dérivées partielles du type suivant :

Ω étant un ouvert de \mathbb{R}^p , ($p = 1, 2, 3$) de frontière $\partial\Omega$ "régulière", déterminer une fonction numérique u définie sur Ω telle que :

$$\text{Sur } \Omega \quad F(\cdot, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{(i)}$$

$$\text{et sur } \partial\Omega \quad G(\cdot, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{(ii)}$$

où Du (resp. D^2u) est le gradient (resp. le hessien) de u ,

F et G étant des équations ou des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires (du deuxième ordre).

L'équation (ii) explicite les conditions vérifiées par u sur (la frontière) $\partial\Omega$; on les appelle les "conditions aux limites".

16.3 2. Classification des principaux problèmes aux dérivées partielles du deuxième ordre.

Dans la suite, on désignera par Δ_p l'opérateur Lapacien sur \mathbb{R}^p , ($p = 1, 2, 3$) tel que :

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on écrira (pour simplifier l'écriture) Δ au lieu de Δ_p .

D'autre part, si Ω est un ensemble ouvert de \mathbb{R}^p , ($p = 1, 2, 3$) de frontière $\partial\Omega$ et si w est une application de Ω dans \mathbb{R} on notera H (lorsque

cette expression aura un sens, l'application de $\partial\Omega$ dans \mathbb{R} telle que :

$$Hw = 1_{\partial\Omega} \quad (\text{resp.} \quad \frac{\partial}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} ; \alpha \frac{\partial}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} + \beta 1_{\partial\Omega} \quad \text{où} \quad \alpha, \beta \geq 0 \quad \text{et} \quad \alpha \beta \neq 0)$$

Un pdp du type suivant :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u \text{ définie sur } \overline{\Omega} \text{ telle que : } & F(u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{sur } \Omega \text{ et} \\ & G(u, Du) = Hu - g \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

est appelé

problème de Dirichlet si $Hw = 1_{\partial\Omega}$

problème de Neumann si $Hw = \frac{\partial}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega}$

problème mêlé ou mixte si $Hw = \alpha \frac{\partial}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} + \beta 1_{\partial\Omega}$ où $\alpha, \beta \geq 0$ et $\alpha \beta \neq 0$.

En Physique, on distingue deux types principaux de pdp du deuxième ordre :

a) **Les problèmes elliptiques** qui s'explicitent, sous forme simplifiée, de la façon suivante :

Ω étant un ouvert de \mathbb{R}^2 trouver une fonction ou une distribution u sur $\overline{\Omega}$ telle que :

$$-\Delta u = f \quad \text{sur } \Omega \quad \text{et} \quad Hu = g \quad \text{sur } \partial\Omega$$

où f (resp.) g est une application de Ω (resp. $\partial\Omega$) dans \mathbb{R} .

b) **Les problèmes d'évolution paraboliques**

parmi lesquels on distingue :

(i) *Le problème de la chaleur* qui s'explicit de la façon suivante :

Ω étant un ouvert de \mathbb{R}^p ($p = 1, 2, 3$) et I un intervalle de \mathbb{R} fini ou infini, trouver une fonction ou une distribution u sur $I \times \overline{\Omega}$ telle que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{sur } I \times \Omega \quad \text{et} \quad Hu = g \quad \text{sur } \partial(I \times \overline{\Omega})$$

où f (resp. g) est une application de $I \times \overline{\Omega}$ (resp. $\partial(I \times \overline{\Omega})$) dans \mathbb{R} .

(ii) *Le problème de Schrödinger* qui s'explicit de la façon suivante :

Ω étant un ouvert de \mathbb{R}^p ($p = 1, 2, 3$) et I un intervalle de \mathbb{R} fini ou infini, trouver une fonction ou une distribution u sur $I \times \overline{\Omega}$ telle que

$$i \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{sur } I \times \Omega \quad \text{et} \quad Hu = g \quad \text{sur } \partial(I \times \overline{\Omega}) \quad \text{où} \quad i^2 = -1$$

et f (resp. g) définies comme en (i)

c) **Les problèmes d'évolution hyperboliques** dont le modèle est le problème des ondes (Cf Electromagnétisme) et qui s'explique de la façon suivante :

Avec les mêmes hypothèses et notations qu'au paragraphe b) ci-dessus, on cherche u telle que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad \text{sur } I \times \Omega \quad \text{et} \quad Hu = g \quad \text{sur } \partial(I \times \overline{\Omega})$$

A. Résolution des pdp linéaires du deuxième ordre elliptiques.

16.4 Le problème Π_1

On se propose de résoudre le pdp suivant Π_1 :

Ω étant un ouvert de \mathbb{R}^2 , de frontière $\partial\Omega$ "suffisamment régulière", trouver une fonction ou une distribution u sur $\overline{\Omega}$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \Omega \quad -\Delta u(x, y) = f(x, y) \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega \quad (Hu)(x, y) = g(x, y)$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ H est défini comme au paragraphe 2 (a)

et où f (resp. g) est une application de Ω (resp. $\partial\Omega$) dans \mathbb{R}

16.4.1 Solutions de l'équation homogène $\Delta u = 0$.

L'équation ci-dessus, qui est nommée *équation de Laplace*, possède, une infinité de solutions qu'on appelle *fonctions harmoniques*.

Exemples de fonctions harmoniques :

(i) Soit $\tilde{\Omega} = \{z \in \mathbb{C} ; z = x + i y \quad i^2 = -1 \quad (x, y) \in \Omega\}$

et \tilde{f} une fonction complexe sur $\tilde{\Omega}$ telle que :

$$\forall z \in \tilde{\Omega} \quad \tilde{f}(z) = P(x, y) + i Q(x, y) \quad (x, y) \in \Omega$$

On montre facilement que si \tilde{f} est analytique, alors :

$$\Delta P = \Delta Q = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

(ii) Notons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^2 ;

Etant donné $\zeta_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ notons u l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} telle que :

$$\forall \zeta = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad u(\zeta) = \|\zeta - \zeta_0\| = \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On montre facilement que $\Delta u = 0$ sur \mathbb{R}^2 .

Exercice :

Montrer que si $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n, n > 2$, et si $u = \|\cdot - \zeta_0\|$ $\zeta_0 \in \mathbb{R}^n$, alors $\Delta u = 0$ sur \mathbb{R}^n .

16.4.2 3.2 Deux propriétés importantes des fonctions harmoniques.

On montre et on admettra le

Théorème

Si u est une fonction harmonique, alors

- (i) u atteint son maximum en un point de $\partial\Omega$ au moins.
- (ii) si Q est un point quelconque de Ω et Γ un cercle quelconque contenu dans Ω , de centre Q de rayon ρ ,

alors :

$$u(Q) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\Gamma} u(s) ds \quad \text{où } s \text{ est l'abscisse curviligne sur } \Gamma$$

16.4.3 3.3 Solutions générales de Π_1 .

On les obtient comme somme de solutions du problème homogène et d'une solution particulière du problème non homogène.

16.5 4. Méthode variationnelle.

Cette méthode est très performante et d'une grande généralité.

Nous allons la mettre en oeuvre ci-dessous, dans le cas du pdp Π_1 . Bien que ce problème provienne d'une modélisation très élémentaire et irréaliste (!) du comportement d'un matériau élastique, nous verrons fonctionner tous ses rouages.

Nous supposons, donc, ci-dessous, que Ω est un matériau élastique à deux dimensions et que u est le déplacement de Ω lorsqu'il est soumis à des contraintes f et g . Supposons que $u \in C^1(\Omega)$ et posons :

$$J_0(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \right)^2 + u^2(x,y) \right] d\omega(x,y)$$

$$\text{et } L(u) = \int_{\Omega} f(x,y) u(x,y) d\omega(x,y) + \int_{\partial\Omega} g(x,y) u(x,y) d\lambda(x,y)$$

où $f \in C^0(\Omega)$ $g \in C^0(\partial\Omega)$, $d\omega(x,y) = dxdy$ et $d\lambda$ est la restriction de $d\omega$ à $\partial\Omega$.

Posons enfin :

$$J(u) = J_0(u) - L(u).$$

Suivant le modèle considéré, $J_0(u)$ est l'énergie interne de Ω et $J(u)$ l'énergie totale de Ω lorsque Ω subit le déplacement u .

Remarquons que la fonctionnelle $u \rightarrow J(u)$ est quadratique.

Posons maintenant :

$$\forall u, w \in C^1(\Omega), \quad \langle u | w \rangle = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + u w \right) d\omega \quad \text{et} \quad \|\cdot\| = (\langle \cdot | \cdot \rangle)^{\frac{1}{2}}$$

Soit $C_0^1(\Omega) = \{u \in C^1(\Omega) ; u|_{\partial\Omega} = 0\}$

On vérifie facilement que $C^1(\Omega)$ (resp. $C_0^1(\Omega)$) muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ un est espace préhilbertien.

Notons $H^1(\Omega)$ (resp. $H_0^1(\Omega)$) un complété de $(C^1(\Omega) \quad \|\cdot\|)$ (resp. $(C_0^1(\Omega) \quad \|\cdot\|)$) que l'on notera V (pour simplifier l'écriture).

On montre facilement que la fonctionnelle J_0 (resp. L, J) se prolonge par continuité sur V ; on notera, encore, J_0 (resp. L, J) son prolongement.

Nous allons montrer maintenant que :

S'il existe $\bar{u} \in V$ tel que : $\forall u \in V \quad J(\bar{u}) \leq J(u)$,
alors \bar{u} est solution du problème de Dirichlet ou de Neumann

Posons :

$$\forall \rho \in \mathbb{R} \quad \forall w \in V \quad J(w ; \rho) = \rho^{-1} (J(\bar{u} + \rho w) - J(\bar{u}))$$

Alors,

$$\text{si } \rho > 0 \quad J(w ; \rho) \geq 0 \quad \text{et si } \rho < 0 \quad J(w ; \rho) \leq 0$$

Il en résulte que :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} J(w ; \rho) = 0 \quad \text{quand cette limite existe}$$

On vérifie facilement que :

$$\forall w \in V \quad \lim_{\rho \neq 0, \rho \rightarrow 0} J(w ; \rho) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \bar{u} w \right) d\omega - \int_{\Omega} f w d\omega - \int_{\partial\Omega} g w d\lambda$$

Proposition (formule de Green)

$$\forall a, b \in C^2(\Omega) \quad \int_{\Omega} \left(\frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial y} \right) d\omega = \int_{\Omega} (-\Delta a) b d\omega + \int_{\partial\Omega} b \frac{\partial a}{\partial n} d\lambda$$

Cette formule (qui s'établit facilement) est une formule d'intégration par parties à deux variables.

De cette formule on déduit que :

$$\text{si } u, w \in C^2(\Omega) \quad \text{alors : } \int_{\Omega} (-\Delta \bar{u} + \bar{u} - f) w d\omega + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} - g \right) w d\lambda = 0$$

et par conséquent

$$\text{si } u \in H_0^1(\Omega) \cap C_0^2(\bar{\Omega}), \text{ alors : } -\Delta \bar{u} + \bar{u} = f \text{ et } \bar{u}|_{\partial\Omega} = 0$$

\bar{u} est donc solution du problème de Dirichlet.

$$\text{si } u \in H^1(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega}) \text{ alors : } -\Delta \bar{u} + \bar{u} = f \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} - g \right) |_{\partial\Omega} = 0$$

\bar{u} est donc solution du problème de Neumann.

et nous admettrons le

Théorème :

Soit $W = \{w \in V ; \forall u \in V \quad J(w) \leq J(u)\}$. W n'est pas vide et se réduit à un seul élément.

La preuve de ce théorème se déduit du théorème de Lax-Milgram (théorème fondamental de la théorie des espaces hilbertiens).

Exercice :

Expliciter la fonctionnelle J dont la minimisation prouvera l'existence (et l'unicité) d'une solution du problème elliptique *mixte*.

B. Résolution des pdp d'évolution linéaires du deuxième ordre paraboliques.

16.6 Le problème Π_2 .

Nous nous proposons d'étudier le problème suivant Π_2 appelé "problème de la chaleur" :

Ω étant un ouvert de \mathbb{R}^2 et $I = [0, T]$, $T \in \mathbb{R}_+^*$ ou bien $T = \infty$,
trouver une fonction ou une distribution u définie sur $I \times \overline{\Omega}$ telle que :

$$\begin{aligned} \forall (t, \cdot) \in]0, T[\times \Omega \quad \frac{\partial u(t, \cdot)}{\partial t} - \Delta u(t, \cdot) &= f(t, \cdot) \\ \forall (t, \cdot) \in]0, T[\times \partial\Omega \quad H u(t, \cdot) &= h(t, \cdot) \\ \forall (x, y) \in \overline{\Omega} \quad u(0, (x, y)) &= u_0(x, y) \end{aligned}$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ H est défini comme au paragraphe 2 (a)
 f (resp. h) est une fonction ou une distribution définie sur $I \times \Omega$ (resp. $I \times \partial\Omega$)
 et u_0 est une fonction ou une distribution définie sur $\overline{\Omega}$

16.6.1 Sur les solutions de l'edp homogène

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$$

Proposition 32 (Principe du maximum (resp. minimum)) *Si $u \in C^0(I \times \overline{\Omega})$ est telle que sur $]0, T[\times \Omega$, on ait : $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ alors u atteint son maximum (resp. minimum) en un point $(t_0, (x_0, y_0))$ tel que : $t_0 = 0$ ou bien $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$.*

Nous admettrons cette proposition.

5.2 Fonctions propres du pdp homogène associé à Π_2 .

Avec les notations et hypothèses utilisées plus haut, nous nous proposons de caractériser les fonctions ou distributions u telles que :

$$\forall (t, (x, y)) \in I \times \Omega \quad u(t, (x, y)) = \varphi(t) \cdot \psi(x, y)$$

qui sont solutions du problème suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{sur } I \times \Omega \quad \text{et} \quad u = 0 \quad \text{sur } I \times \partial\Omega$$

Alors, on a :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) (\varphi \otimes \psi) = \varphi' \otimes \psi - \varphi \otimes (\Delta \psi) = 0$$

et par conséquent :

$$\forall t \in]0, T[\quad \forall (x, y) \in \Omega \quad \varphi'(t) \cdot \psi(x, y) - \varphi(t) \cdot (\Delta \psi(x, y)) = 0$$

Comme on suppose que u n'est pas identiquement nulle, on a :

$$\forall t \in]0, T[\quad \forall (x, y) \in \Omega \quad \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\Delta\psi(x, y)}{\psi(x, y)}$$

On en déduit qu'il existe un scalaire μ indépendant de t et de (x, y) tel que :

$$\forall t \in]0, T[\quad \varphi'(t) = \mu \varphi(t) \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad \Delta\psi(x, y) = \mu \psi(x, y)$$

φ et ψ sont donc solutions d'un problème de valeurs propres.

5.3 Formulation "faible" du problème Π_2 .

Supposons que Π_2 admette une solution $u \in C^2(I \times \bar{\Omega})$. Alors :

$$\forall w \in V \quad \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f \right) w \, d\omega = 0$$

Or,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(t, \cdot)}{\partial t} \cdot w \, d\omega = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} u(t, \cdot) \cdot w \, d\omega \right)$$

et :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\Delta u(t, \cdot)) w \, d\omega &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x}(u(t, \cdot)) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(w(t, \cdot)) + \frac{\partial}{\partial y}(u(t, \cdot)) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(w(t, \cdot)) \right) d\omega \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n}(u(t, \cdot)) w \, d\lambda \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} \forall w \in V \quad E(u, w) &= \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} u(t, \cdot) \cdot w \, d\omega \right) + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x}(u(t, \cdot)) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(w(t, \cdot)) + \frac{\partial}{\partial y}(u(t, \cdot)) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(w(t, \cdot)) \right) d\omega \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n}(u(t, \cdot)) w \, d\lambda + \int_{\Omega} f(t, \cdot) \cdot w \, d\omega \end{aligned}$$

Si Π_2 admet une solution $u \in C^2(I \times \bar{\Omega})$ alors : $(\forall w \in V, E(u, w) = 0)$.

Proposition :

Si $V = H^1(\Omega)$ ou bien $V = H_0^1(\Omega)$, il existe $u \in L^2(I, V) \cap C^0(I, L^2(\Omega))$

(où $L^2(I, V) = \left\{ w ; \int_0^T \|w(t, \cdot)\|_V^2 \, dt \text{ est fini} \right\}$)

et $C^0(I, L^2(\Omega)) = \left\{ w ; \text{Sup} \left\{ \|w(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 ; t \in I \right\} \text{ est fini} \right\}$)

tel que $(\forall w \in V, E(u, w) = 0)$.

On appellera problème "faible" associé à Π_2 le problème suivant :

$$\text{Trouver } u : t \in I \rightarrow u(t, \cdot) \in V \quad \text{telle que : } (\forall w \in V, E(u, w) = 0) .$$

C. Résolution des pdp d'évolution linéaires du deuxième ordre hyperboliques.

Le problème Π_3 .

Nous nous proposons d'étudier le problème suivant Π_3 appelé "problème des ondes" :

Ω étant un ouvert de \mathbb{R}^2 et $I = [0, T]$ $T \in \mathbb{R}_+^*$ ou bien $T = \infty$
trouver une fonction ou une distribution u définie sur $I \times \bar{\Omega}$ telle

que :

$$\begin{aligned} \forall (t, \cdot) \in]0, T[\times \Omega \quad & \frac{\partial^2 u(t, \cdot)}{\partial t^2} - \Delta u(t, \cdot) = f(t, \cdot) \\ \forall (t, \cdot) \in]0, T[\times \partial\Omega \quad & H u(t, \cdot) = h(t, \cdot) \\ \forall (x, y) \in \bar{\Omega} \quad & u(0, (x, y)) = u_0(x, y) \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} (u(t, (x, y))) \right]_{t=0} = u_1(x, y) \end{aligned}$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ $H = id$ ou bien $H = \frac{\partial}{\partial n}$
 f (resp. h) est une fonction ou une distribution définie sur $I \times \Omega$ (resp. $I \times \partial\Omega$)
 u_0 et u_1 sont des fonctions ou des distributions définies sur Ω .

6.1 Solutions de l'équation homogène $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$

Il existe une infinité de solutions de l'équation homogène $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ telles que :

$$\forall (t, (x, y)) \in]0, T[\times \Omega \quad u(t, (x, y)) = \varphi(t) \cdot \psi(x, y)$$

On montrerait facilement, comme dans le cas de l'équation homogène parabolique, ci-dessus, que ces solutions sont telles que :

$$\varphi'' = \mu \varphi \quad \text{et} \quad \Delta \psi = \mu \psi \quad \text{où} \quad \mu \quad \text{est un scalaire}$$

Cas particulier : solutions périodiques en dimension d'espace égal à un.

On suppose que $\Omega = [0, l]$ $l \in \mathbb{R}_+^*$ et $T = +\infty$.

On cherche les solutions u de l'edp homogène :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad & \text{telles que :} \\ \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, l] \quad & u(t, x) = \varphi(t) \cdot \psi(x) \\ \text{avec} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad & u(t, 0) = u(t, l) = 0 \end{aligned}$$

On sait que :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad & \varphi''(t) + \mu \varphi(t) = 0 \quad \text{(a)} \quad \text{et que} \\ \forall x \in [0, l] \quad & \psi''(x) + \mu \psi(x) = 0 \quad \text{(b)} \\ \text{avec} \quad & \psi(0) = \psi(l) = 0 \end{aligned}$$

On montre facilement que l'équation (b) admet une infinité de solutions $\{\psi_n \ n \in \mathbb{N}^*\}$ telles que :

$$\forall x \in [0, l] \quad \psi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad \text{avec} \quad \psi_n''(x) + \mu_n \psi_n(x) = 0 \quad \text{où} \quad \mu_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$$

Aux fonctions $\{\psi_n \ n \in \mathbb{N}^*\}$, on associe les fonctions $\{\varphi_n \ n \in \mathbb{N}^*\}$ solutions des équations :

$$\varphi_n'' + \mu_n \varphi_n = 0 \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (c)$$

L'edp homogène considérée a donc une infinité de solutions u_n telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in [0, l] \quad u_n(t, x) = \varphi_n(t) \cdot \psi_n(x)$$

6.2 Formulation "faible" du problème Π_3 .

Posons :

$$\begin{aligned} \forall w \in V, \quad E(u, w) = & \frac{d^2}{dt^2} \left(\int_{\Omega} u(t, \cdot) \cdot w \, d\omega \right) + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} (u(t, \cdot)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (w(t, \cdot)) + \frac{\partial}{\partial y} (u(t, \cdot)) \cdot \frac{\partial}{\partial y} (w(t, \cdot)) \right. \\ & \left. - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n} (u(t, \cdot)) \, w \, d\lambda + \int_{\Omega} f(t, \cdot) \cdot w \, d\omega \right) \end{aligned}$$

On appellera problème "faible" associé au problème Π_3 le problème suivant :

$$\text{Trouver } u : t \in I \rightarrow u(t, \cdot) \in V \quad \text{telle que : } (\forall w \in V \quad E(u, w) = 0)$$

On montre et nous admettrons que le problème "faible" a une solution

$$u \in C^0(I, V) \cap C^1(I, L^2(\Omega))$$

où :

$$C^1(I, L^2(\Omega)) = \left\{ w ; \quad \text{Sup} \left\{ \|w(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 ; t \in I \right\} \quad \text{et} \right. \\ \left. \text{Sup} \left\{ \left\| \frac{d}{dt} w(t, \cdot) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ; t \in I \right\} \quad \text{sont finis} \right\}$$

Large D. Noyaux hilbertiens et noyaux de Green associés à un pdp linéaire du deuxième ordre.

7. Noyau hilbertien. Rappel.

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe (evtlc) et E' son dual topologique.

Soit $(K, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et $\|\cdot\|$ la norme associée à $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

On dit que $(K, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un sous-espace hilbertien de E si K est un sous-espace vectoriel de E et si l'injection de

$(K, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ dans E est continue.

Soit Λ l'application de dualité de K' , dual topologique de $(K, \|\cdot\|)$, dans K et ${}^t j$ l'application transposée de j .

On a le schéma suivant :

$$E' \xrightarrow{{}^t j} K' \xrightarrow{\Lambda} K \xrightarrow{j} E$$

L'application $K = j \circ \Lambda \circ {}^t j$ est appelée le noyau hilbertien de $(K, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ relatif à E .

Posons : $\widetilde{K} = \Lambda \circ {}^t j$. Alors : $K = j \circ \widetilde{K}$.

\widetilde{K} est caractérisé par la relation suivante :

$$\forall e' \in E' \quad \forall u \in K \quad \langle u | \widetilde{K} e' \rangle = \langle ju, e' \rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le crochet de dualité entre E et E' .

Exemples :

(i) Soit Ω un ensemble quelconque et $E = \mathbb{R}^\Omega$.

On montre que E' est l'ensemble des combinaisons linéaires finies des mesures de Dirac sur Ω et que :

$$\forall t \in \Omega \quad \widetilde{K} \delta_t = K(\cdot, t)$$

Il en résulte que :

$$\forall t \in \Omega \quad \forall u \in K \quad \langle u | K(\cdot, t) \rangle = u(t)$$

On dit que K est un "noyau reproduisant".

(ii) Soit Ω un domaine ouvert de \mathbb{R}^3 $E = D'(\Omega)$ - espace des distributions à support compact dans Ω -

$E' = D(\Omega)$ - espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω à support compact -

Alors :

$$\forall t \in \Omega \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \quad \langle \varphi | \widetilde{K} \delta_t \rangle = \varphi(t)$$

Exercice :

Notons $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ l'un des deux espaces de Hilbert : $(H^1(\Omega), \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ou bien $(H_0^1(\Omega), \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

On vérifie facilement que $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un sous-espace hilbertien de $(L^2(\Omega), (\cdot | \cdot))$ où $(\cdot | \cdot)$ est le produit scalaire hilbertien canonique sur $L^2(\Omega)$.

Notons H le noyau hilbertien de $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ relatif à $(L^2(\Omega), (\cdot | \cdot))$ et j l'injection canonique de V dans $L^2(\Omega)$.

On a :

$$\forall \varphi \in L^2(\Omega) \quad \forall u \in V \quad \langle u | \widetilde{H} \varphi \rangle = (ju | \varphi) \quad \text{avec} \quad H = j \widetilde{H}.$$

En identifiant \widetilde{H} et H ce qui est loisible ici, on a, lorsque Ω est un domaine ouvert de \mathbb{R}^2 :

$$\forall (x, y) \in \Omega \quad (H\varphi)(x, y) = \int_{\Omega} H((x, y); (\zeta, \eta)) \varphi(\zeta, \eta) \, d\omega(\zeta, \eta)$$

En déduire que si $V = H_0^1(\Omega)$, alors :

$$(-\Delta + id) H((\cdot, \cdot); (\zeta, \eta)) = \delta_{(\zeta, \eta)} \quad \text{et} \quad \forall (\zeta, \eta) \in \Omega \quad H((\cdot, \cdot); (\zeta, \eta))|_{\partial\Omega} = 0$$

et que si $V = H^1(\Omega)$ alors :

$$(-\Delta + id) H((\cdot, \cdot); (\zeta, \eta)) = \delta_{(\zeta, \eta)} \quad \text{et} \quad \forall (\zeta, \eta) \in \Omega \quad \frac{\partial}{\partial n} (H((\cdot, \cdot); (\zeta, \eta)))|_{\partial\Omega} = 0$$

8. Noyau de Green d'un pdp linéaire.

Soient Ω un domaine ouvert de \mathbb{R}^p , $p \in \mathbb{N}^*$ de frontière $\partial\Omega$ régulière et $E_0 = D(\Omega)$.

Soit L (resp. M) un opérateur linéaire défini sur E_0 , à valeurs dans $D(\Omega)$ (resp. $D(\partial\Omega)$).

Posons :

$$\forall \psi_1, \psi_2 \in E_0, \quad \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_{\Omega} (L\psi_1)(\zeta) \cdot (L\psi_2)(\zeta) \, d\omega(\zeta) + \int_{\partial\Omega} (M\psi_1)(\zeta) \cdot (M\psi_2)(\zeta) \, d\lambda(\zeta)$$

où ω (resp. λ) est la mesure de Lebesgue sur Ω (resp. $\partial\Omega$).

On vérifie facilement que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire sur E_0 telle que : $\forall \psi \in E_0, \langle \psi | \psi \rangle \geq 0$.

Supposons que : $(L\psi = 0 \text{ et } M\psi = 0) \Rightarrow (\psi = 0)$.

Alors : $(\forall \psi \in E_0, \langle \psi | \psi \rangle = 0) \iff (\psi = 0)$.

Ainsi, $(E_0, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien.

Notons $\|\cdot\| = (\langle \cdot | \cdot \rangle)^{\frac{1}{2}}$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Soit E un complété de $(E_0, \|\cdot\|)$.

On montre facilement que $\langle \cdot | \cdot \rangle, \|\cdot\|, L, M$ définis sur E_0 se prolongent par continuité sur E .

On notera encore - pour simplifier l'écriture - $\langle \cdot | \cdot \rangle, \|\cdot\|, L, M$ leurs prolongements sur E .

Supposons que $(E, \|\cdot\|)$ soit un sous-espace hilbertien de $F = D'(\Omega)$.

Notons H le noyau hilbertien de $(E, \|\cdot\|)$ relatif à F . Alors :

$$\forall \psi \in E, \forall \varphi \in F' = D(\Omega)$$

$$\langle \psi | H\varphi \rangle = \int_{\Omega} (L\psi)(\zeta) \cdot (L(H\varphi))(\zeta) d\omega(\zeta) + \int_{\partial\Omega} (M\psi)(\zeta) \cdot (M(H\varphi))(\zeta) d\lambda(\zeta)$$

8.1 Noyau de Green d'un pdp linéaire elliptique.

Nous supposons que $p = 2$ que $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ et que :

$$\forall \zeta \in \Omega \quad (L\psi)(\zeta) = -(\Delta\psi)(\zeta) = -\left(\frac{\partial^2\psi(\zeta)}{\partial\zeta_1^2} + \frac{\partial^2\psi(\zeta)}{\partial\zeta_2^2}\right) \quad \text{et} \quad (M\psi)(\zeta) = \psi(\zeta)|_{\zeta \in \partial\Omega}$$

Alors :

$$\forall \psi \in E, \forall \varphi \in F' = D(\Omega)$$

$$\langle \psi | H\varphi \rangle = \int_{\Omega} (\Delta\psi)(\zeta) \cdot (\Delta(H\varphi))(\zeta) d\omega(\zeta) + \int_{\partial\Omega} \psi(\zeta) \cdot (H\varphi)(\zeta) d\lambda(\zeta)$$

On peut montrer en faisant tendre φ vers δ_{ζ_0} $\zeta_0 \in \Omega$ que l'on a au sens des distributions:

$$\psi(\zeta_0) = \langle \psi | H(\cdot, \zeta_0) \rangle = \int_{\Omega} (\Delta\psi)(\zeta) \cdot (\Delta(H(\cdot, \zeta_0)))(\zeta) d\omega(\zeta) + \int_{\partial\Omega} \psi(\zeta) \cdot H(\zeta, \zeta_0) d\lambda(\zeta)$$

On appellera **noyau de Green du problème de Dirichlet**, la distribution G telle que :

$$G(\cdot, \zeta_0) = \Delta(H(\cdot, \zeta_0)) \quad \text{et} \quad G(\cdot, \zeta_0)|_{\zeta \in \partial\Omega} = 0$$

On en déduit que :

$$\psi(\zeta_0) = \int_{\Omega} G(\zeta, \zeta_0) (\Delta\psi)(\zeta) \cdot d\omega(\zeta)$$

Exercice :

Caractériser le noyau de Green du problème de Neumann.

8.2 Le propagateur d'un problème parabolique (en dimension un) est un noyau de Green .

Supposons que : $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et que :

$$\forall \zeta \in \mathbb{R} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}_+ \quad (L\psi)(\theta, \zeta) = \frac{\partial\psi(\theta, \zeta)}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\psi(\theta, \zeta)}{\partial\zeta^2} \quad \text{et}$$

$$(M\psi)(\theta, \zeta) = \psi(t_0, \zeta) \quad \text{où} \quad t_0 \in \mathbb{R}_+$$

Comme au paragraphe précédent, on a :

$$\forall \psi \in E, \forall \varphi \in F' \quad , \quad \langle \psi | H\varphi \rangle = \int_{\Omega} (L\psi)(\theta, \zeta) \cdot (L(H\varphi))(\theta, \zeta) d\omega(\theta, \zeta) + \int_{\mathbb{R}} \psi(t_0, \zeta) \cdot (H\varphi)(t_0, \zeta) d\lambda$$

et :

$$\begin{aligned} \forall (t, x) \in \Omega \quad \psi(t, x) &= \langle \psi | H((\cdot, \cdot); (t, x)) \rangle \\ &= \int_{\Omega} (L\psi)(\theta, \zeta) \cdot (L(H((\cdot, \cdot); (t, x))))(\theta, \zeta) d\omega(\theta, \zeta) + \int_{\mathbb{R}} \psi(t_0, \zeta) \cdot H((t_0, \zeta); (t, x)) d\lambda(\zeta) \end{aligned}$$

Lorsque $L\psi = 0$ on obtient :

$$\psi(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t_0, \zeta) \cdot H((t_0, \zeta); (t, x)) d\lambda(\zeta)$$

$H((t_0, \zeta); (t, x))$ est appelé le **propagateur** du problème parabolique considéré.

On vérifie facilement que :

$$\forall (t, x) \in \Omega \quad L(H((\cdot, \cdot); (t, x))) = 0 \quad \text{et} \quad H((t_0, \zeta); (t_0, x)) = \delta_{(\zeta, x)}$$

Autre exemple :

On suppose que L est l'opérateur de Schrödinger, à savoir :

$$L\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - K\psi \quad \text{où} \quad K(t, X, P) = \frac{P^2}{2m}$$

On montre (en utilisant par exemple la transformée de Fourier) que : le propagateur H de l'opérateur de Schrödinger est tel que :

$$H((\theta, \zeta); (t, x)) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar(t - \theta)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp \left(\frac{i m(x - \zeta)^2}{2\hbar(t - \theta)} \right)$$

8.3 Noyau hilbertien et noyau de Green d'un pdp linéaire hyperbolique, en dimension un.

Considérons le problème hyperbolique Π_4 suivant :

$$\forall (t, x) \in \Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - F(t, x) = 0$$

$$\text{avec} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad u(0, x) = f(x) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \right)_{t=0} = g(x)$$

sachant que $F \in C^0(\Omega)$ et que $f, g \in C^2(\mathbb{R})$

On dit que Π_4 est un **problème de Cauchy** car les conditions aux limites de ce problème sont données au temps $t = 0$.

8.3.1 Sur l'edp homogène associée au problème Π_4

Considérons l'edp homogène suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{où } \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$$

Posons : $Y = \frac{1}{2}(t-x)$ et $Z = \frac{1}{2}(t+x)$ ou, ce qui est équivalent :
 $t = Z + Y$ et $x = Z - Y$.

Alors : $u(t, x) = w(Y, Z)$. On vérifie immédiatement que :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial Y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial Y}\right)$$

ou ce qui est équivalent :

$$\frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}$$

Or, on a formellement :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial Z \partial Y}$$

Supposons que u soit une solution (suffisamment régulière) de l'edp homogène

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Comme $u(t, x) = w(Y, Z)$ on a : $\frac{\partial^2 w}{\partial Z \partial Y} = 0$

d'où, il résulte facilement que :

$$w(Y, Z) = \varphi_0(Y) + \psi_0(Z)$$

et, par conséquent :

$$u(t, x) = \varphi(t - x) + \psi(t + x)$$

8.3.2 Sur la solution du problème Π_4 .

Soit $(t_0, x_0) \in \Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Notons Ω_0 le domaine triangulaire contenu dans Ω de sommets $(0, x_0 - t_0)$, (t_0, x_0) $(0, t_0 + x_0)$.

On montre facilement que, si ψ est assez régulière, alors :

$$\int \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} \right) dt dx = - \int_{\partial \Omega_0} \left(\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} dt - \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} dx \right)$$

d'où l'on déduit que :

si u est une solution de Π_4 , on a :

$$2 u(t_0, x_0) = \int \int_{\Omega_0} F(t, x) dt dx + f(x_0 - t_0) + f(x_0 + t_0) + \int_{x_0 - t_0}^{x_0 + t_0} g(x) dx$$

Posons maintenant :

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{et}$$

$$\forall \psi_1, \psi_2 \in C^2(\Omega), \quad \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_{\Omega} (L\psi_1)(t, x) \cdot (L\psi_2)(t, x) dt dx \\ + \int_{\mathbb{R}} \psi_1(0, x) \cdot \psi_2(0, x) dx + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial t}(t, x) \right)_{t=0} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial t}(t, x) \right)_{t=0} dx$$

On montre que le pdp homogène :

$$L\psi = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \psi(0, x) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) \right)_{t=0} = 0$$

admet pour solution unique, la solution triviale $\psi = 0$.

On en déduit, comme on l'a fait plus haut, que $(C^2(\Omega), \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien.

Si $(E, \|\cdot\|)$ est un complété de $(C^2(\Omega), \langle \cdot | \cdot \rangle)$ c'est un sous-espace hilbertien de $D'(\Omega)$.

Notons H son noyau hilbertien.

On peut vérifier que H est une distribution suffisamment régulière pour que :

si u est une solution de Π_4 , on a :

$$u(t_0, x_0) = \int \int_{\Omega} L_{(t,x)} \cdot (H((t, x); (t_0, x_0))) F(t, x) dt dx \\ + \int_{\mathbb{R}} H((0, x); (t_0, x_0)) f(x) dx + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial t} H((t, x); (t_0, x_0)) \right)_{t=0} g(x) dx$$

toutes les intégrales ci-dessus étant licites.

Il en résulte que :

$$L_{(t,x)} \cdot (H((t, x); (t_0, x_0))) = \frac{1}{2} 1_{\Omega_0}(t, x) \\ H((0, x); (t_0, x_0)) = \frac{1}{2} 1_{\Omega_1}(t, x) \quad \text{où } \Omega_1 = \{x_0 - t_0\} \cup \{x_0 + t_0\} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} H((t, x); (t_0, x_0)) \right)_{t=0} = \frac{1}{2} 1_{\Omega_2}(t, x) \quad \text{où } \Omega_2 = [x_0 - t_0, x_0 + t_0]$$

De ce qui précède, on déduit que

$H((\cdot, \cdot); (t_0, x_0))$ est déterminé par ses valeurs sur l'adhérence de Ω_0 dans Ω .

Les droites $D_\varepsilon = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} ; t + \varepsilon x = cste\}$ $\varepsilon = \pm 1$ sont appelées

les **caractéristiques** de l'edp linéaire hyperbolique L définie ci-dessus.

8.4 Solutions fondamentales d'une edp linéaire (du deuxième ordre).

Soit L une edp linéaire (du deuxième ordre).

On appelle **solution fondamentale** de L toute fonction ou distribution ψ telle que : $L\psi = \delta$ où δ est la distribution de Dirac.

Dans les cas classiques, en particulier lorsque L est une edp linéaire à coefficients constants, on détermine ψ par transformation de Fourier.

Exemple :

$$L = -\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Alors :

$$(L\psi = \delta) \iff -(x^2 + y^2) \hat{\psi} = 1 \Rightarrow \hat{\psi} = -\frac{1}{x^2 + y^2}$$

où $\hat{\psi}$ est la transformée de Fourier de ψ .

Remarque :

Le noyau de Green d'un pdp linéaire (du deuxième ordre)

$L\psi = f$ $M\psi = 0$ est une solution fondamentale de L

E. Résolution numérique (approchée) des pdp linéaires (du deuxième ordre).

9. Approximation polynomiale à une dimension.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ $\Omega = [a, b]$ et $f \in C^{n+1}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$.

Dans la suite, on supposera n aussi élevé qu'il sera nécessaire.

9.1 La formule de Taylor (Rappel).

Proposition :

(i) Quels que soient $x_0, x \in \Omega$

$$f(x) = (T_{n, x_0}(f))(x) + \frac{(\cdot - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta(x))$$

$$\text{où } (T_{n, x_0}(f)) = \sum_{j=0}^n \frac{(\cdot - x_0)^j}{j!} f^{(j)}(x_0) \text{ et}$$

$$\zeta(x) = \theta(x)x_0 + (1 - \theta(x))x, \quad 0 < \theta(x) < 1.$$

(ii) (Formule de Taylor avec reste "intégrale")

$$\forall x \in \Omega \quad f(x) = (T_{n, x_0}(f))(x) + \int_a^b K_n(x, t) f^{(n+1)}(t) dt$$

où :

$$K_n(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq t \\ \frac{(x-t)^n}{n!} & \text{si } x > t \end{cases} \quad (\text{et } 0! = 1)$$

Remarques :

* $T_{n, x_0}(f)$ est une approximation polynomiale de f .

** $f \rightarrow T_{n, x_0}(f)$ est une application linéaire.

*** Quel que soit le polynôme π de degré inférieur ou égal à n

on a : $T_{n, x_0}(\pi) = \pi$.

9.2 L'interpolation lagrangienne.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $S_k = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ une subdivision de Ω telle que :

$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_k \leq b$ avec $x_{j+1} - x_j = h$ $j = 0, 1, \dots, (k-1)$.

Définition :

On appelle *interpolation lagrangienne* de $f \in C^{n+1}(\Omega)$ de degré k sur S_k le polynôme suivant :

$$L_{S_k}(f) = \sum_{j=0}^k f(x_j) L_{S_k, j}$$

où $L_{S_{k,j}}$ est le polynôme (sur \mathbb{R}) de degré inférieur ou égal à k tel que :

$$L_{S_{k,j}}(x_m) = \delta_{jm} \quad j, m = 0, 1, \dots, (k-1)$$

On vérifie facilement que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad L_{S_{k,j}}(x) = \prod_{m=0, \dots, k, m \neq j} \left(\frac{x - x_m}{x_j - x_m} \right)$$

Remarques :

* $L_{S_k}(f)$ est une interpolation polynomiale de f .

** $f \rightarrow L_{S_k}(f)$ est linéaire.

*** Quel que soit le polynôme π de degré inférieur ou égal à k

on a : $L_{S_k}(\pi) = \pi$.

Proposition :

On montre que :

$$\forall x \in \Omega \quad \exists \zeta(x) \text{ tel que : } f(x) - (L_{S_k}(f))(x) = \frac{1}{(k+1)!} L_{k+1}(x) f^{(k+1)}(\zeta(x))$$

$$\text{où : } L_{k+1}(x) = \prod_{j=0}^k (x - x_j)$$

9.3 Le problème dual de celui de l'interpolation lagrangienne.

(Avec les mêmes hypothèses et notations qu'au paragraphe précédent,) on notera $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le crochet de dualité entre $C^{n+1}(\Omega)$ et son dual algébrique (ou topologique).

Etant donné $y \in \Omega$ on notera δ_y la fonctionnelle (de Dirac) sur $C^{n+1}(\Omega)$ telle que :

$$\forall f \in C^{n+1}(\Omega) \quad \langle f | \delta_y \rangle = f(y).$$

Définition :

Le *problème dual* de celui de l'interpolation lagrangienne s'énonce ainsi :

Étant donné une fonctionnelle linéaire (et continue) λ sur $C^{n+1}(\Omega)$ trouver, s'il existe, un jeu de scalaires $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tel que :

quel que soit le polynôme π de degré inférieur ou égal à k sur Ω , on ait :

$$\lambda(\pi) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \lambda(x_j)$$

Si un tel jeu existe, on dira que $\sum_{j=0}^k \alpha_j \delta_{x_j}$ est une représentation exacte de λ sur l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à k .

9.4 Convergence.

On montre la proposition suivante :

Proposition :

Avec les hypothèses de régularité ci-dessus

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - (T_{n, x_0}(f))(x) = 0.$$

0 .

Cette convergence est uniforme.

Lorsque x sera suffisamment "voisin" de x_0 on écrira : $f(x) \simeq (T_{n, x_0}(f))(x)$.

Phénomène de Runge :

On montre que $L_{S_k}(f)$ ne converge pas toujours uniformément vers f sur Ω lorsque k tend vers l'infini.

On prouve alors qu'entre les points $x \in \Omega$ où $L_{S_k}(f)(x)$ s'annule, $L_{S_k}(f)$ prend des valeurs qui tendent vers $\pm\infty$, lorsque k tend vers l'infini.

Ce phénomène met en évidence ce que l'on appelle la "rigidité" des polynôme (ou encore que l'interpolation lagrangienne polynomiale est instable).

10. La méthode des différences finies.

10.1 Approximation des dérivées d'une fonction.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ $\Omega = [a, b]$ et $S_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ $n \in \mathbb{N}^*$ une subdivision de Ω telle que :

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b \quad x_{j+1} - x_j = h \quad j = 0, 1, \dots, (n-1).$$

(i) *Approximation de la dérivée première.*

Supposons que $f \in C^2(\Omega)$. Si h est suffisamment "petit", alors : $f(x_{j+1}) \simeq f(x_j) + h f'(x_j)$.

On en déduit que :

$$f'(x_j) \simeq \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{h}$$

Comme on a aussi : $f(x_{j-1}) \simeq f(x_j) - h f'(x_j)$ on a l'approximation suivante :

$$f'(x_j) \simeq \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1}))}{2h}$$

(ii) *Approximation de la dérivée seconde.*

Supposons que $f \in C^3(\Omega)$. Si h est suffisamment "petit", alors :

$$f(x_{j+1}) \simeq f(x_j) + h f'(x_j) + \frac{h^2}{2!} f''(x_j) \quad \text{et} \quad f(x_{j-1}) \simeq f(x_j) - h f'(x_j) + \frac{h^2}{2!} f''(x_j)$$

On en déduit que :

$$f''(x_j) \simeq \frac{f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1}))}{h^2}$$

Remarques :

(a) Les formules obtenues ci-dessus sont exactes
 en (i) pour les polynômes de degré inférieur ou égal à un, à une variable.
 en (ii) pour les polynômes de degré inférieur ou égal à deux, à une variable.

(b) Les formules obtenues ci-dessus se généralisent, sans difficulté, au cas de fonctions de plusieurs variables.

10.2 La méthode des différences finies.

Nous allons présenter cette méthode dans un cas particulier :

la résolution numérique approchée du problème de Dirichlet sur un rectangle.

Le lecteur se convaincra aisément du fait que cette méthode peut s'appliquer à la résolution numérique approchée de pdp linéaires plus généraux.

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $a < b$, $c < d$ $b - a = d - c$ et $\Omega = [a, b] \times [c, d]$.
 (Ω est un carré!)

Considérons le problème de Dirichlet suivant :

(P) : "Trouver u telle que $-\Delta u = f$ sur Ω et que : $u = 0$ sur $\partial\Omega$."

Subdivisons Ω au moyen du maillage de points (x_j, y_k) tels que :
 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$ où $m \in \mathbb{N}^*$.
 Pour simplifier l'exposé de la méthode des différences finies, on supposera que :
 $x_{j+1} - x_j = h$ et que : $y_{k+1} - y_k = h$ $j = 0, 1, \dots, (m - 1)$.

On notera Ω_h (resp. $\partial\Omega_h$) l'ensemble des points du maillage considéré qui sont situés à l'intérieur de Ω (resp. sur la frontière de Ω).

Si h est suffisamment "petit", nous pouvons approcher l'opérateur Δ par l'opérateur Δ_h tel que :

$$\forall (x_j, y_k) \in \Omega_h \quad , \quad \Delta_h = h^{-2} [u(x_{j+1}, y_k) - 2u(x_j, y_k) + u(x_{j-1}, y_k)] \\ + h^{-2} [u(x_j, y_{k+1}) - 2u(x_j, y_k) + u(x_j, y_{k-1})]$$

et le problème (P) par le problème suivant :

(P_h) "Trouver $u_h = (u_{jk})$ définie sur $\Omega_h \cup \partial\Omega_h$ telle que :

$$h^{-2} [u_{j+1,k} + u_{j-1,k} + u_{j,k+1} + u_{j,k-1} - 4 u_{j,k}] = f(x_j, y_k) \quad j, k = 1, \dots, (m - 1) \\ \text{et } u_{0,j} = u_{k,m} = 0 \quad j, k = 0, \dots, m$$

Résoudre (P_h) revient donc à résoudre l'équation matricielle suivante :
 $A_h u_h = h^2 f_h$ où :

A_h est une matrice de blocs, de type $(m \times m)$ tridiagonale, telle que :

$$(A_h)_{j,j} = D \quad (A_h)_{j,j-1} = (A_h)_{j-1,j} = -I$$

D est une matrice, de type $(m \times m)$ tridiagonale, telle que :

$$D_{j,j} = 4 \quad D_{j,j-1} = D_{j-1,j} = -1$$

I est la matrice diagonale unitaire de type $(m \times m)$.

D'autre part :

u_h est une matrice colonne d'éléments w_j , $j = 1, \dots, (m-1)$

w_j est une matrice colonne d'éléments $u_{j,k}$, $j, k = 1, \dots, (m-1)$

et f_h la matrice colonne associée naturellement à u_h .

On montre que l'équation matricielle ci-dessus a une seule solution qui converge ponctuellement (aux points du maillage considéré) vers la solution du problème (P) lorsque h tend vers zéro.

On notera que A_h est une matrice creuse dont l'inversion relève de méthodes de calcul numérique spécifiques.

11. Interpolation lagrangienne en coordonnées barycentriques.

11.1 En dimension un.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $\Omega = [a, b]$.

a) Polynômes de degré un.

Posons :

$$\forall x \in \Omega \quad \lambda(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad \text{et} \quad \mu(x) = \frac{b-x}{b-a}$$

On vérifie immédiatement que :

$$\lambda(x) \geq 0 \quad \mu(x) \geq 0 \quad \lambda(x) + \mu(x) = 1$$

$\lambda(x)$ et $\mu(x)$ sont appelés les **coordonnées barycentriques** de x dans Ω .

D'autre part :

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \lambda(x) \quad (\text{resp. } x \rightarrow \mu(x)) \text{ est un polynôme de degré un tel que :} \\ \lambda(a) &= 0 \quad \lambda(b) = 1 \quad (\text{resp. } \mu(a) = 1 \quad \mu(b) = 0) \end{aligned}$$

Soit $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, $a_1 < b_1$ et $\Omega_1 = [a_1, b_1]$ et $x \rightarrow \lambda(x)$ et $x \rightarrow \mu(x)$ les coordonnées barycentriques d'un point x quelconque de Ω (relativement à a_1 et b_1).

Alors, $\lambda(\cdot)$ et $\mu(\cdot)$ sont les polynômes de base lagrangiens de degré un, sur Ω_1 , relativement aux points d'interpolation a_1 et b_1 .

b) Polynômes de degré deux.

Posons : $c = 2^{-1}(a + b)$. Alors les polynômes :

$$\begin{aligned} x \rightarrow L_1(x) &= 2 \frac{(x - b)(x - c)}{(b - a)^2} \\ x \rightarrow L_2(x) &= -4 \frac{(x - a)(x - b)}{(b - a)^2} \\ x \rightarrow L_3(x) &= 2 \frac{(x - c)(x - a)}{(b - a)^2} \end{aligned}$$

sont des polynômes de degré deux sur Ω tels que :

$$\begin{aligned} L_1(a) = 1 \quad L_1(b) = L_1(c) = 0 \\ L_2(c) = 1 \quad L_2(a) = L_2(b) = 0 \\ L_3(b) = 1 \quad L_3(c) = L_3(a) = 0 \end{aligned}$$

Ces polynômes forme la base lagrangienne des polynômes de degré deux sur Ω relativement aux points d'interpolations a, b, c .

On en déduit que les polynômes lagrangiens de degré deux sur un intervalle queconque, relativement aux extrémités de cet intervalle et à son milieu s'expriment en coordonnées barycentriques sous la forme suivante :

$$\mu(\cdot)(2\mu(\cdot) - 1) \quad 4\lambda(\cdot)\mu(\cdot) \quad \lambda(\cdot)(2\lambda(\cdot) - 1) \quad .$$

c) Généralisation.

Exprimer en coordonnées barycentriques les polynômes lagrangiens relatifs aux points d'interpolation $a, b, 3^{-1}(2a + b), 3^{-1}(a + 2b)$.

d) Points de vue affine et projectifs.

On montre facilement qu'il existe une application (unique) bijective u de Ω sur l'intervalle $\widehat{\Omega}$ contenu dans \mathbb{R}^2 d'extrémités

$$\widehat{a} = (1, 0) \quad \text{et} \quad \widehat{b} = (0, 1) \quad \text{telle que :}$$

quel que soit $x \in \Omega$ les coordonnées cartésiennes de $u(x)$ dans \mathbb{R}^2 sont les coordonnées barycentriques de x dans Ω .

11.2 En dimension deux.

a) Coordonnées barycentriques.

Notons \widehat{K} le triangle dans \mathbb{R}^3 de sommets :

$$\widehat{a}_1 = (1, 0, 0) \quad \widehat{a}_2 = (0, 1, 0) \quad \widehat{a}_3 = (0, 0, 1) \quad \text{et soit} \quad \widehat{x} \quad \text{un}$$

point quelconque de \widehat{K} tel que :

$$\widehat{x} = \sum_{j=1}^3 \widehat{\lambda}_j(\widehat{x}) \widehat{a}_j$$

On vérifie facilement que :

$$\widehat{\lambda}_j(\widehat{x}) \in [0, 1] \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{et} \quad \text{que} \quad \sum_{j=1}^3 \widehat{\lambda}_j(\widehat{x}) = 1 .$$

\widehat{K} est donc l'enveloppe convexe des points $\widehat{a}_1, \widehat{a}_2, \widehat{a}_3$.
Soit K un triangle non dégénéré dans \mathbb{R}^3 de sommets a_1, a_2, a_3
et x le point de K tel que :

$$x = \sum_{j=1}^3 \widehat{\lambda}_j(\widehat{x}) a_j$$

Posons $\lambda_j(x) = \widehat{\lambda}_j(\widehat{x}) \quad j = 1, 2, 3$.

Alors : $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x)$ sont appelés les *coordonnées barycentriques* de x .

Notons (x_1, x_2) les coordonnées cartésiennes de x dans \mathbb{R}^2 et (a_{1j}, a_{2j}) celles de $a_j, j = 1, 2, 3$. Alors : Posons $\lambda_j(x) = \widehat{\lambda}_j(\widehat{x}) \quad j = 1, 2, 3$.

Alors : $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x)$ sont appelés les *coordonnées barycentriques* de x .

Notons (x_1, x_2) les coordonnées cartésiennes de x dans \mathbb{R}^2
et (a_{1j}, a_{2j}) celles de $a_j, j = 1, 2, 3$. Alors :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(x) \\ \lambda_2(x) \\ \lambda_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce que l'on écrira, de façon condensée :

$$A \lambda(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme le triangle K n'est pas dégénéré, on sait que $\det(A) \neq 0$
(A est donc inversible). Ainsi :

$$\lambda(x) = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda_j(x) = \sum_{k=1}^3 \alpha_{jk} x_k \quad j = 1, 2, 3$$

L'application $x \rightarrow \lambda(x)$ est donc linéaire affine.

Soit F une application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} . Posons :

$$\forall \widehat{x} \in \widehat{K} \quad \widehat{F}(\widehat{x}) = F(\widehat{\lambda}_1(x), \widehat{\lambda}_2(x), \widehat{\lambda}_3(x))$$

$$\text{et donc} \quad \widehat{F}(\widehat{x}) = F(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x)) \stackrel{\text{def}}{=} G(x)$$

On en déduit que, si F est une fonction polynomiale, il en est de même de G (puisque $\lambda(x) = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$)

b) Base lagrangienne de degré un sur K en coordonnées barycentriques.

Posons : $\forall x \in K \quad p_j(x) = \lambda_j(x) \quad j = 1, 2, 3$.

p_j est donc un polynôme de degré un sur K tel que :

$$p_j(a_{j\ k}) = \delta_{j\ k}, \quad j, k = 1, 2, 3.$$

$\{p_j; \quad j = 1, 2, 3\}$ est donc la base polynomiale lagrangienne de degré un sur K relative aux points d'interpolation a_j , $j = 1, 2, 3$.

c) Base lagrangienne de degré deux sur K en coordonnées barycentriques.

Posons : $a_{j\ k} = 2^{-1}(a_j + a_k) \quad j, k = 1, 2, 3 \quad j \neq k$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in K \quad p_j(x) &= \lambda_j(x) (2 \lambda_j(x) - 1) \quad j = 1, 2, 3 \\ p_{j\ k}(x) &= 4 \lambda_j(x) \lambda_k(x) \quad j, k = 1, 2, 3 \quad j \neq k \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que :

$$p_j(a_k) = \delta_{j\ k}, \quad j, k = 1, 2, 3$$

Montrons que :

$$p_{j\ k}(a_{l\ m}) = \delta_{(j, k), (l, m)} \quad j, k, l, m = 1, 2, 3$$

En effet :

$$p_{j\ k}(a_{l\ m}) = p_{j\ k}(2^{-1}(a_l + a_m)) = 4 \lambda_j(2^{-1}(a_l + a_m)) \cdot \lambda_k(2^{-1}(a_l + a_m))$$

Comme λ_j et λ_k sont linéaires affines, on a :

$$p_{j\ k}(a_{l\ m}) = (\lambda_j(a_l) + \lambda_j(a_m)) (\lambda_k(a_l) + \lambda_k(a_m))$$

On en déduit que :

$$p_{j\ k}(a_{j\ k}) = (\lambda_j(a_j) + \lambda_j(a_k)) (\lambda_k(a_j) + \lambda_k(a_k)) = (1 + 0)(0 + 1) = 1$$

D'autre part, si $(j, k) \neq (l, m)$ alors a_j ou a_k est distinct de a_l et de a_m . donc $p_{j\ k}(a_{l\ m}) = 0$.

Il en résulte que :

$$\{p_j; \quad j = 1, 2, 3\} \cup \{p_{j\ k}; \quad j, k = 1, 2, 3\}$$

est une base polynomiale lagrangienne de degré deux sur K relative aux points d'interpolation

$$\{a_j; \quad j = 1, 2, 3\} \cup \{a_{j\ k}; \quad j, k = 1, 2, 3\}$$

Exercice :

On pose :

$$a_0 = 3^{-1}(a_1 + a_2 + a_3) \quad \text{et} \quad a_{j \ j \ k} = 3^{-1}(2a_j + a_k) \quad j, k = 1, 2, 3$$

Montrer que les polynômes $(p_0, p_{j \ j \ k} ; j, k = 1, 2, 3)$ tels que :

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 27 \lambda_1(x) \lambda_2(x) \lambda_3(x) \\ p_j(x) &= \frac{1}{2} \lambda_j(x) (3\lambda_j(x) - 1) (3\lambda_j(x) - 1) \quad j = 1, 2, 3 \\ p_{j \ j \ k}(x) &= \frac{9}{2} \lambda_j(x) \lambda_k(x) (3\lambda_j(x) - 1) \quad j, k = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

forment une base polynomiale lagrangienne de degré trois sur K relative aux points d'interpolation

$$\{a_0\} \cup \{a_{j \ j \ k} ; j, k = 1, 2, 3\}$$

11.3 Éléments finis.

Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, notons $(\widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} (quel que soit $j \in \{1, \dots, (n+1)\}$ \widehat{a}_j est le point de \mathbb{R}^{n+1} dont la seule composante différente de zéro est la $j^{\text{ème}}$ qui est égale à un).

Définition :

(i) On appellera n -simplexe de référence dans \mathbb{R}^{n+1} l'ensemble \widehat{K} qui est l'enveloppe convexe des points $\widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_n$.

Ainsi :

$$(\widehat{x} \in \widehat{K}) \Leftrightarrow \left(\widehat{x} = \sum_{j=1}^{n+1} \widehat{\lambda}_j(\widehat{x}) \widehat{a}_j \quad \text{où} \quad \widehat{\lambda}_j(\widehat{x}) \in [0, 1] \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n+1} \widehat{\lambda}_j(\widehat{x}) = 1 \right)$$

(ii) On appellera n -simplexe (non dégénéré) dans \mathbb{R}^n tout sous ensemble de K de \mathbb{R}^n qui est l'image du n -simplexe de référence \widehat{K} (dans \mathbb{R}^{n+1}) par une application linéaire, affine, inversible.

(iii) On appellera *élément fini de Lagrange*, polynomial, n -simplicial, de référence, la donnée d'un triplet $(\widehat{K}, \widehat{S}, \widehat{P})$ tel que :

$$\begin{aligned} \widehat{K} &\text{ soit le } n\text{-simplexe de référence dans } \mathbb{R}^{n+1}, \\ \widehat{S} &= \{\widehat{b}_1, \dots, \widehat{b}_m\} \quad m \in \mathbb{N}^* \quad \text{où} \quad \widehat{b}_j \in \widehat{K} \quad \widehat{b}_j \neq \widehat{b}_k \quad \text{si } j \neq k, \\ \widehat{P} &\text{ soit l'espace vectoriel des polynômes définis sur } \widehat{K} \text{ qui est} \\ &\text{engendré par les polynômes (de Lagrange), de degré } m \\ \widehat{p}_j &\text{ tels que : } \widehat{p}_j(\widehat{b}_k) = \delta_{j \ k} \quad j, k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

(iv) On appellera *élément fini de Lagrange*, polynomial, n -simplicial, de référence, la donnée d'un triplet (K, S, P) image du triplet $(\widehat{K}, \widehat{S}, \widehat{P})$ par une application linéaire, affine, inversible u de \mathbb{R}^{n+1} dans \mathbb{R}^n telle que :

$$K = u(\widehat{K}) \quad S = \{b_1, \dots, b_m\} \quad \text{où} \quad b_j = u(\widehat{b}_j)$$

et P soit l'espace vectoriel engendré par les polynômes p_j tels que : $p_j = \widehat{p}_j \circ u^{-1} \quad j = 1, \dots, m$.

(Il faut noter que, évidemment (avec des notations licites) on a :

$$(K, S, P) = u(\widehat{K}, \widehat{S}, \widehat{P}) \Leftrightarrow (\widehat{K}, \widehat{S}, \widehat{P}) = u^{-1}(K, S, P)$$

Exemples :

(i) $K = [a_1, a_2] \quad S = \{a_1, a_2\}$
 P est l'espace vectoriel engendré par les polynômes $p_1 = \lambda \quad p_2 = \mu$
 où λ et μ sont les coordonnées barycentriques relatives à l'intervalle $[a_1, a_2]$
 .

(ii) Avec les notations utilisées plus haut soient $K = \text{conv}(a_1, a_2, a_3)$
 et $S = \{a_1, a_2, a_3\}$
 P est l'espace vectoriel engendré par les polynômes p_1, p_2, p_3 .

(iii) Avec les notations utilisées plus haut soient $K = \text{conv}(a_1, a_2, a_3)$
 et $S = \{a_j, a_{j,k} \quad j, k = 1, 2, 3\}$
 P est l'espace vectoriel engendré par les polynômes p_j , et $p_{j,k}$, $j, k = 1, 2, 3$
 .

12. Introduction à la méthode des éléments finis.

12.1 Méthode des éléments finis en dimension un.

Soit $a, b \in \mathbb{R} \quad a < b \quad \Omega = [a, b]$.

On appellera triangulation de Ω (en référence à la terminologie classique en dimension deux), la donnée d'une suite finie de points

$$a_1, a_2, \dots, a_{q+1} \quad q \in \mathbb{N}^* \quad \text{tels que} \quad a = a_1 < a_2 < \dots < a_{q+1} = b$$

On posera $\forall j \in \{1, \dots, q\} \quad K_j = [a_j, a_{j+1}]$ avec $a_{j+1} - a_j = h \in \mathbb{R}_+^*$
 .

Ω est la réunion des intervalles (1-simplexes) $K_j \quad j \in \{1, \dots, q\}$.

Pour tout $j \in \{1, \dots, q\} \quad K_j$ est l'image d'un élément de référence \widehat{K} contenu dans \mathbb{R}^2 d'extrémités $(1,0)$ et $(0,1)$,

par une application linéaire, affine, inversible u_j .

Soit $\widehat{S} = \{\widehat{b}_1, \dots, \widehat{b}_{m+1}\} \quad m \in \mathbb{N}^*$ une subdivision de \widehat{K} et S_j son image par u_j . $j = 1, \dots, q$.

Posons :

$$b_{j,k} = u_j(\widehat{b}_k) \quad j = 1, \dots, q \quad k = 1, \dots, (m+1)$$

On suppose (ce qui est loisible) que :

$$a_j = b_{j,1} < \dots < b_{j,m+1} = a_{j+1} \quad , \quad b_{j,k+1} - b_{j,k} = \frac{h}{m} \quad k = 1, \dots, m$$

L'ensemble $\{b_{j,k} ; j = 1, \dots, q \quad k = 1, \dots, m+1\}$ est appelé l'ensemble des noeuds de la triangulation considérée que nous noterons T_h .

Dans la suite, nous noterons, aussi $\{\tau_l ; l = 1, \dots, (n+1)\}$ l'ensemble des noeuds de T_h rangés par ordre croissant.

Avec les hypothèses faites ci-dessus, on a :

$$\tau_1 = a_1 \quad \tau_{n+1} = a_{q+1} \quad \text{et} \quad \tau_{l+1} - \tau_l = \frac{h}{m} \quad l = 1, \dots, n$$

Soit \widehat{P} l'espace vectoriel engendré par les polynômes d'interpolation de Lagrange relatifs à la subdivision $\{\widehat{S}\}$ de \widehat{K} .

Notons $\widehat{p}_1, \dots, \widehat{p}_{m+1}$ les polynômes de base de \widehat{P} .

Alors : $\forall l, k \in \{1, \dots, (m+1)\} \quad \widehat{p}_l(\widehat{b}_k) = \delta_{j,k}^l$.

Posons : $p_{j,k} = \widehat{p}_k \circ u_j^{-1} \quad j = 1, \dots, q \quad k = 1, \dots, m+1$.

Alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in K_j \quad x = u_j(\widehat{x}) \quad p_{j,k}(x) &= (\widehat{p}_k \circ u_j^{-1})(x) = \widehat{p}_k(\widehat{x}) \quad \text{et} \\ p_{j,k}(b_j) &= \widehat{p}_k(\widehat{b}_j) = \delta_{j,k} \end{aligned}$$

Ainsi, $p_{j,1}, \dots, p_{j,m+1}$ sont les polynômes de base d'interpolation de Lagrange relatifs à la subdivision S_j de K_j .

On posera dans la suite : $P_{K_j} = \widehat{P} \circ u_j^{-1}$.

Soit maintenant :

$$V_h = \left\{ y \in C^0(\Omega) \quad ; \quad \forall K \in T_h \quad y_K \in P_K \right\}$$

On démontre et nous admettrons la proposition suivante :

Proposition :

Etant donné $y \in C^0(\Omega)$ on note $\pi_h y$ l'élément de $C^0(\Omega)$ tel que :

$$\forall K \in T_h \quad \forall x \in K \quad \pi_h y = y_K(x) \quad . \text{ Alors :}$$

(i) $V_h = \{ \pi_h y ; y \in C^0(\Omega) \}$

(ii) $\forall j \in \{1, \dots, (n+1)\} \quad \exists e_j \in V_h$ tel que :

$$\forall l \in \{1, \dots, (n+1)\} \quad e_j(\tau_l) = \delta_{j,l} \quad \text{et} \quad \forall y \in C^0(\Omega) \quad \pi_h y = \sum_{j=1}^{n+1} y(\tau_j) e_j$$

$\{ e_1, \dots, e_{(n+1)} \}$ est donc une base de V_h .

Considérons les fonctions $\tilde{e}_l \quad l \in \{1, \dots, (n+1)\}$ telles que :

si $\tau_l = b_{j\ k}$ ($j \in \{1, \dots, q\}$) $(\tilde{e}_l)_{K_j}$ est une fonction de base de T_{K_j} .

Comme on le vérifie facilement :

$$\tilde{e}_l \in V_h \quad \text{et} \quad \tilde{e}_l(\tau_j) = \delta_{j\ l} \quad j, l = 1, \dots, (n + 1).$$

On en déduit donc que : $\tilde{e}_l = e_l$, $l = 1, \dots, (n + 1)$.

Par conséquent,

(i) si τ_l appartient à l'intérieur de K_j , alors $(e_l)_{K_p} = 0$ $p = 1, \dots, q$ $p \neq j$.

(ii) si $\tau_l = b_{j\ 1}$ (appartenant au bord gauche de K_j)
 $(e_l)_{K_p} = 0$ $p = 1, \dots, q$ $p \neq j$ et $p \neq (j + 1)$.

(iii) si $\tau_l = b_{j\ m}$ (appartenant au bord droit de K_j)
 $(e_l)_{K_p} = 0$ $p = 1, \dots, q$ $p \neq j$ et $p \neq (j - 1)$.

Considérons maintenant le problème différentiel suivant :

(Q_0) : (Avec les hypothèses et notations utilisées ci-dessus)

Etant donné $f \in C^0(\Omega)$ trouver $u \in C^2(\Omega)$ tel que : $-u'' + u = f$ sur Ω et $u(a) = u(b) = 0$.

Notons $C_0^1(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions continûment différentiables sur $]a, b[$ qui s'annulent en a et b .

Si u est solution de (Q_0) alors :

$$\forall w \in C_0^1(\Omega) \quad \int_a^b (-u'' w) dx = - [u'w]_a^b + \int_a^b (u' w') dx$$

Comme $[u'w]_a^b = 0$ on a :

$$\forall w \in C_0^1(\Omega) \quad \int_a^b (-u'' + u - f) w dx = \int_a^b (u' w' + u w - f w) dx$$

On en déduit que (Q_0) est un cas particulier du problème

(Q_1) : " Etant donné $f \in C^0(\Omega)$ trouver $u \in C_0^1(\Omega)$ tel que :
 $\forall w \in C_0^1(\Omega) \quad \int_a^b (u' w' + u w - f w) dx = 0$ "

Soit $H_0^k(\Omega)$ un complété de $C_0^k(\Omega)$ muni du produit scalaire suivant

$$\forall u, w \in C_0^k(\Omega) \quad \langle u | v \rangle_k = \sum_{l=1}^k u^{(l)} w^{(l)} dx \quad \text{et de la norme} \quad \|\cdot\|_k = (\langle \cdot | \cdot \rangle_k)^{\frac{1}{2}}$$

(Q_0) est un cas particulier du problème

(Q) : " Etant donné $f \in L^2(\Omega)$ trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :
 $\forall w \in H_0^1(\Omega) \quad \int_a^b (u' w' + u w - f w) dx = 0$ "

Dans la suite, on posera :

$$\varphi(u, w) = \int_a^b (u' w' + u w) dx \quad \text{et} \quad \rho(w) = \int_a^b f w dx$$

Soit $\{h(p) ; p \in \mathbb{N}_+^*\}$ une suite de nombres réels positifs tels que $\lim_{p \rightarrow \infty} h(p)$.

À tout $p \in \mathbb{N}_+^*$ associons une suite de points de Ω :

$\{a_j^{(p)} ; j = 1, \dots, q(p) + 1\}$ telle que :

$$a = a_1^{(p)} < a_2^{(p)} < \dots < a_{q(p)+1}^{(p)} = b \quad \text{et} \quad a_{j+1}^{(p)} - a_j^{(p)} = h(p) .$$

Alors Ω est la réunion des intervalles $K_j^{(p)} \quad j = 1, \dots, q(p)$ tels que : $K_j^{(p)} = [a_j^{(p)}, a_{j+1}^{(p)}]$.

Quels que soient $p \in \mathbb{N}_+^*$ et $j \in \{1, \dots, q(p)\}$ $K_j^{(p)}$ est l'image de l'élément de référence \widehat{K} - défini plus haut - par une application linéaire, affine, inversible $u_j^{(p)}$.

Les intervalles $K_j^{(p)} \quad j \in \{1, \dots, q(p)\}$ forment une triangulation de Ω que nous noterons $T_{h(p)}$.

En utilisant les hypothèses et notations précisées plus haut, on posera :

$$\{K_j^{(p)}, S_j^{(p)}, P_j^{(p)}\} = u_j^{(p)} \{\widehat{K}, \widehat{S}, \widehat{P}\} .$$

On notera $\{\tau_l^{(p)} ; l = 1, \dots, n(p) + 1\}$ l'ensemble des noeuds de la triangulation $T_{h(p)}$ et par $\{e_l^{(p)} ; l = 1, \dots, n(p) + 1\}$ la base de $V_{h(p)}$ qui lui est associée.

On appellera "problème approché" de (Q) le problème suivant :

$(Q_{h(p)})$ " Trouver $u_{h(p)} \in V_{h(p)}$ telle que : $\forall w \in V_{h(p)} \quad \varphi(u_{h(p)}, w) = \rho(w)$ "

$u_{h(p)}$ est déterminé par les relations suivantes :

$$u_{h(p)} = \sum_{j=1}^{n(p)+1} \eta_j \varphi(e_j^{(p)}, e_k^{(p)}) = \rho(e_k^{(p)}) \quad k \in \{1, \dots, n(p) + 1\}$$

On notera que $u_{h(p)} \in H_0^1(\Omega)$.

D'autre part, lorsque p tend vers l'infini, la matrice $[\varphi(e_j^{(p)}, e_k^{(p)})]_{j, k \in \{1, \dots, n(p)+1\}}$ est une matrice "de plus en plus" creuse, dont les éléments non nuls sont situés parallèlement à sa diagonale principale.

On peut maintenant énoncer le théorème de convergence suivant :

Théorème :

Supposons que \widehat{P} soit engendré par les polynômes d'interpolation de Lagrange sur \widehat{K} relatifs à \widehat{S} de degré $m \in \mathbb{N}_+^*$.

Alors, u (resp. $u_{h(p)}$) désignant la solution du problème (Q) (resp. $(Q_{h(p)})$), on a :

Si $u \in H_0^m(\Omega)$ il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ γ indépendant de $h(p)$ tel que :

$$\|u - u_{h(p)}\|_1 \leq \gamma (h(p))^m \|u\|_{m+1} \quad \text{et} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \|u - u_{h(p)}\|_1 = 0$$

12.2 Extension de la méthode des éléments finis en dimension supérieure ou égale à deux.

La méthode des éléments finis que nous avons développée ci-dessus en dimension un se transpose, formellement, sans difficulté,

en dimension d supérieure ou égale à deux. Alors :

- *) Au 1-simplexe \widehat{K} on substitue un d -simplexe de \mathbb{R}^{d+1} .
- *) L'intervalle Ω est remplacé par un sous-ensemble polyédrique de \mathbb{R}^d .
- *) Ω est la réunion d'une famille finie de d -simplexes $K_j^{(p)}$ qui sont les images du d -simplexe de référence \widehat{K} dans \mathbb{R}^{d+1}

par une application linéaire affine inversible $u_j^{(p)}$ $j = 1, \dots, (q(p) + 1)$.

Noter que Ω est indépendant de p .

- *) La famille des d -simplexes $K_j^{(p)}$, $j = 1, \dots, q(p)$ définit la triangulation $T_{h(p)}$ de Ω .

- *) Le problème (Q) s'énonce de la façon suivante :

" Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que : $\forall w \in H_0^1(\Omega) \quad \varphi(u, w) = \rho(w)$

$$\text{où } \varphi(u, w) = \int_{\Omega} Du \cdot Dw \, dx \quad \rho(w) = \int_{\Omega} f \cdot w \, dx$$

Du (resp. Dw) étant le gradient de l'application u (resp. w) de Ω dans \mathbb{R}^d et $Du \cdot Dw$ le produit scalaire dans l'espace euclidien \mathbb{R}^d des vecteurs Du et Dw .

17.1 1. Séries de Fourier trigonométriques.

17.1.1 1.1 Définitions.

On appelle polynôme trigonométrique de degré fini, toute fonction P définie sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = \sum_{k \in J} \gamma_k \exp(2i\pi k \frac{t}{T})$$

où J est une partie finie de \mathbb{N} , $T \in \mathbb{R}_+^*$ et $\gamma_k \in \mathbb{C}$, $k \in J$.

Le degré de P est égal à $\text{Max}\{|k|; k \in J\}$.

En choisissant $m \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, on peut écrire P sous la forme suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = \sum_{k=-m}^m \widetilde{\gamma}_k \exp(2i\pi k \frac{t}{T}) \quad \text{où } \widetilde{\gamma}_k \in \mathbb{C}, k = -m, \dots, 0, \dots, m$$

On vérifie immédiatement que :

P est une fonction **périodique** sur \mathbb{R} de période T ,

c-à-d que : $P(t+T) = P(t)$.

Posons :

$$\forall k = -m, \dots, 0, \dots, m, \quad \alpha_k = \gamma_k + \gamma_{-k}, \quad \beta_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k})$$

Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{l=1}^m \alpha_l \cos(2\pi l \frac{t}{T}) + \beta_l \sin(2\pi l \frac{t}{T})$$

Notons (pour la suite) que :

$$\gamma_k = \frac{1}{2}(\alpha_k - i\beta_k), \quad \gamma_{-k} = \overline{\gamma_k}.$$

17.1.2 1.2 L'espace de Hilbert \mathcal{P}_m .

Posons :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, e_k(t) = \exp\left(2i\pi k \frac{t}{T}\right)$$

Etant donné $m \in \mathbb{N}^*$, notons \mathcal{P}_m , l'ensemble des polynômes trigonométriques P tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = \sum_{k=-m}^m \gamma_k e_k(t) \text{ où } \gamma_k \in \mathbb{C}, k = -m, \dots, 0, \dots, m$$

\mathcal{P}_m est un espace vectoriel de dimension finie engendré par les éléments $e_{-m}, \dots, e_0, \dots, e_m$.

Posons maintenant :

$$\forall P, Q \in \mathcal{P}_m, \langle P | Q \rangle = \int_0^T P(t) \cdot \overline{Q(t)} dt$$

On vérifie facilement que :

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur \mathcal{P}_m . Il en résulte que :

$(\mathcal{P}_m, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert sur \mathbb{C} .

D'autre part,

$$\forall k, l \in \mathbb{N}, \langle e_k | e_l \rangle = \int_0^T \exp(2i\pi k \frac{t}{T}) \cdot \overline{\exp(2i\pi l \frac{t}{T})} dt = \int_0^T \exp(2i\pi(k-l) \frac{t}{T}) dt$$

On en déduit que : $\langle e_k | e_l \rangle = T \delta_{kl}$.

En effet, lorsque $k \neq l$,

$$\langle e_k | e_l \rangle = 2i\pi(k-l)T^{-1} \left[\exp(2i\pi(k-l) \frac{t}{T}) \right]_{t=0}^{t=T}$$

et, lorsque $k = l$, $\langle e_k | e_l \rangle = \langle e_l | e_l \rangle = \int_0^T dt = T$.

Ainsi, $\{e_k; k = -m, \dots, 0, \dots, m\}$ est une base orthogonale de $(\mathcal{P}_m, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ - considéré comme un espace vectoriel sur \mathbb{C} et :

$$\forall l \in \{-m, \dots, 0, \dots, m\}, \gamma_l = \frac{1}{T} \langle P | e_l \rangle$$

Il en résulte que :

$$\forall l \in \{-m, \dots, 0, \dots, m\},$$

$$\alpha_l = \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \cos(2\pi l \frac{t}{T}) dt, \beta_l = \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \sin(2\pi l \frac{t}{T}) dt$$

De plus,

$$\sum_{k=-m}^m |\gamma_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |P(t)|^2 dt = \frac{(\alpha_0)^2}{4} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} ((\alpha_k)^2 + (\beta_k)^2)$$

car :

$$\int_0^T |P(t)|^2 dt = \langle P | P \rangle = \left\langle \sum_k \gamma_k e_k \mid \sum_l \gamma_l e_l \right\rangle = \sum_k |\gamma_k|^2 \cdot T$$

et, d'autre part,

$$|\gamma_k|^2 = \gamma_k \cdot \overline{\gamma_k} = \frac{1}{2} (\alpha_k)^2 + (\beta_k)^2 \text{ si } k \neq 0 \text{ et } \overline{\gamma_k} = \gamma_{-k}$$

On notera que, si P est une fonction paire (resp. impaire), alors :

$\forall l \in 0, 1, \dots, m, \beta_l = 0$ (resp. $\alpha_l = 0$).

17.1.3 Séries de Fourier trigonométriques.

Les propriétés que nous avons établies au paragraphe précédent, nous conduisent "naturellement" à nous poser les deux questions suivantes, étroitement corrélées :

- (i) Quelle(s) condition(s) doit satisfaire un jeu de coefficients $\{\gamma_k; k \in \mathbb{Z}\}$ pour que la série $S(\gamma) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k e_k$ soit convergente et, dans ce cas, que peut-on dire de sa limite ?
- (ii) Quelle(s) condition(s) doit satisfaire une fonction f périodique, de période $T \in \mathbb{R}_+^*$, intégrable sur $(0, T)$, pour que la série $T(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\int_0^T f(t) \overline{e_k(t)} dt) e_k$ soit convergente ?

À partir de considérations mathématiques que l'on ne peut développer ici, nous répondons dans certains cas à ces deux questions, ci-dessous.

(a) Convergence en moyenne quadratique.

Proposition 33

- (i) L'espace vectoriel $L_P^2(0, T)$ des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , périodiques, de période $T \in \mathbb{R}_+^*$ et de carré intégrable au sens de Lebesgue, sur l'intervalle $(0, T)$, muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ tel que :

$$\forall f, g \in L_P^2(0, T), \langle f | g \rangle = \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt$$

est un espace de Hilbert.

- (ii)

$$\forall f \in L_P^2(0, T), \forall m \in \mathbb{N}, \exists \widetilde{P}_m \in \mathcal{P}_m \text{ tel que}$$

$$\int_0^T |f(t) - \widetilde{P}_m(t)|^2 dt = \text{Min} \left\{ \int_0^T |f(t) - P_m(t)|^2 dt; P \in \mathcal{P}_m \right\}$$

$$\text{où } \widetilde{P}_m = \sum_{k=-m}^m \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{e_k(t)} dt \right) e_k \text{ et}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_0^T |f(t) - P_m(t)|^2 dt \right) = 0.$$

(b) Convergence ponctuelle.

- Proposition 34 (i)** L'espace vectoriel $L_P^1(0, T)$ des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , périodiques, de période $T \in \mathbb{R}_+^*$, intégrables au sens de Lebesgue, sur l'intervalle $(0, T)$, muni de la norme p telle que

$$\forall f \in L_P^1(0, T), \quad p(f) = \int_0^T |f(t)| dt$$

est un espace de Banach.

- (ii) Si $f \in L_P^1(0, T)$ et si, en un point $t_0 \in (0, T)$, les limites $f(t_{0+})$, $f(t_{0-})$, $f'(t_{0+})$, $f'(t_{0-})$ existent, alors :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=-m}^m \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{e_k(t)} dt \right) e_k(t_0) \right) = \frac{1}{2} (f(t_{0+}) + f(t_{0-}))$$

la convergence ci-dessus n'est pas une convergence absolue.

(c) Convergence vers zéro des coefficients des séries de Fourier trigonométriques.

Proposition 35 Si $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\gamma_k(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{e_k(t)} dt$, alors :

$$\begin{aligned} (f \in L_P^1(0, T)) &\Rightarrow \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k(f) = 0 \right) \\ (f \in L_P^2(0, T)) &\Rightarrow \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\gamma_k(f)|^2 < +\infty \right) \\ (f \in C_P^1(0, T)) &\Rightarrow \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\gamma_k(f)| < +\infty \right) \end{aligned}$$

$C_P^1(0, T)$ étant l'espace des fonctions périodiques, de période $T \in \mathbb{R}_+^*$, continues et dérivables sur l'intervalle $(0, T)$.

17.2 Transformée de Fourier.

17.2.1 Remarques préliminaires.

(i) Supposons que \mathbb{K} soit égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Si g est une fonction définie sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{K} , périodique de période $T \in \mathbb{R}_+^*$, intégrable sur tout intervalle de longueur T , on a :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} g(t) dt = \int_0^T g(t) dt$$

En effet : $\int_0^T = \int_0^a + \int_a^{a+T} + \int_{a+T}^T$. Or :

$$\int_a^{a+T} g(t) dt = \int_a^0 g(t+T) dt = \int_a^0 g(t) dt = - \int_0^a g(t) dt$$

d'où, le résultat annoncé. Ainsi :

$$L_P^2(0, T) = L_P^2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right).$$

(ii) Posons :

$$\forall f \in L_P^2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right), \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \gamma_k(f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \exp(-2ik\pi \frac{t}{T}) dt = \int_0^T f(t) \exp(-2ik\pi \frac{t}{T}) dt$$

Notons $l^2(\mathbb{K})$, l'espace vectoriel des suites infinies d'éléments de \mathbb{K} , $x = \{x_m \in \mathbb{K} ; m \in \mathbb{Z}\}$ telles que : $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |x_m|^2 < +\infty$.

On sait que :

$$\forall f \in L_P^2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right), \quad \{\gamma_k(f) ; k \in \mathbb{Z}\} \in l^2(\mathbb{K})$$

On montre, inversement, que si $\{x_m \in \mathbb{K} ; m \in \mathbb{Z}\} \in l^2(\mathbb{K})$, alors, il existe un seul élément $f \in L_P^2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ tel que : $\forall m \in \mathbb{Z}, x_m = \gamma_m(f)$.

Posons :

$$I(s, f, T) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \exp(-2ik\pi \frac{t}{T}) dt \right) \cdot \exp(2ik\pi \frac{s}{T})$$

Formellement,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} I(s, f, T) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-2ik\pi\theta t) f(\theta) d\theta \right) \exp(2ik\pi st)$$

d'où la

Définition 49 Désignons par $L^1(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des applications f de \mathbb{R} dans \mathbb{K} , intégrables sur \mathbb{R} , au sens de Lebesgue. On a :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < +\infty .$$

On appellera transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, l'application \hat{f} de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , telle que :

$$\forall s \in \mathbb{R} , \hat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-2i\pi st) dt$$

On montre la

Proposition 36

a) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors, en général, $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$, mais :

(i) f est continue et bornée sur \mathbb{R} .

(ii) $\text{Sup}\{|\hat{f}(s)| ; s \in \mathbb{R}\} \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$.

b) Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors :

(i) $f \cdot \hat{g}$ et $\hat{f} \cdot g$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$.

(ii) $\int_{\mathbb{R}} f(\theta) \hat{g}(\theta) d\theta = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\rho) g(\rho) d\rho$.

Nous allons voir maintenant comment la transformée de Fourier peut être étendue à $L^2(\mathbb{R})$, bien que $L^1(\mathbb{R}) \not\subseteq L^2(\mathbb{R})$, puis à l'espace des distributions tempérées que nous définirons plus loin et qui contient $L^2(\mathbb{R})$.

17.2.2 La transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$.

On sait que :

$$\forall g \in L^2(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, \text{l'intégrale } \int_{\mathbb{R}} g(s) \exp(2i\pi st) ds \text{ a un sens .}$$

De ce qui précède, on déduit que l'intégrale ci-dessus a encore un sens lorsque $g \in L^2(\mathbb{R})$.

Définition 50 On appellera **transformée de Fourier inverse** d'un élément $g \in L^2(\mathbb{R})$, l'élément \tilde{g} de $L^2(\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall g \in L^2(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, \tilde{g}(t) = \int_{\mathbb{R}} g(s) \exp(2i\pi st) ds$$

Proposition 37 (i) Quel que soit l'élément $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on a : $\widehat{\widetilde{g}} = \widetilde{\widehat{g}} = g$ (presque partout sur \mathbb{R}).

Remarque :

Formellement, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \forall g &\in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R} \text{ (presque partout),} \\ g(t) &= \widehat{\widetilde{g}}(t) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(\theta) \exp(-2i\pi s\theta) d\theta \right) \exp(2i\pi st) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(2i\pi s(t - \theta)) ds \right) g(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall t, \theta \in \mathbb{R}$, $E(t, \theta) = \int_{\mathbb{R}} \exp(2i\pi s(t - \theta)) ds$ joue le rôle de la fonctionnelle de Dirac.)

(ii) Identité de Parseval :

$$\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot \overline{g}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(s) \cdot \overline{\widehat{g}}(s) ds$$

(iii) Loi de conservation de l'énergie (qui se déduit de l'identité de Parseval) :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(s)|^2 ds$$

(iv) Produit de convolution :

Etant donnés $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, posons :

$$\forall t \in \mathbb{R}, (f \star g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - s) \cdot \overline{g}(s) ds$$

$f \star g$ est appelé le produit de convolution de f et g et l'on a :

$$\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), \widehat{f \star g} = \widehat{f} \star \widehat{g} \text{ et } f \star g = \widetilde{(\widehat{f} \cdot \widehat{g})}$$

(v) Dérivation :

(En intégrant par parties, on obtient)

Si $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et $f' \in L^2(\mathbb{R})$, alors :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \widehat{f'}(s) = (2i\pi s) \widehat{f}(s) \text{ et } (\widehat{f'})'(s) = ((-2i\pi s) \widehat{f}(s))'$$

(vi) Théorème de Bochner :

(j) On dit qu'une fonction h définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{C} est **de type positif** si :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}, \sum_{k=1}^m \lambda_k \overline{\lambda_l} h(t_k - t_l) \geq 0$$

(On a montré plus haut que h est alors un noyau d'Aronszajn - c-à-d un noyau hilbertien sur $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ - invariant par translation).

(jj) Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, positive sur \mathbb{R} .

On vérifie, facilement, que \widehat{f} est une fonction de type positif.

(Bochner a établi, inversement que :

toute fonction définie et continue sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{C} , de type positif est la transformée de Fourier d'une mesure positive "à croissance lente").

17.2.3 Le principe d'incertitude.

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{C} , continue et à dérivée première continue telle que :

$$f, f', (\cdot f(\cdot)) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \quad (\Leftrightarrow f, f', \widehat{f}, \widehat{f}' \in L^2(\mathbb{R}))$$

On pose :

$$\begin{aligned} E(f) &= \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(s)|^2 ds \quad (\text{énergie de } f) \\ \sigma(f) &= \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{dispersion d'énergie en temps}) \\ \sigma(\widehat{f}) &= \left(\int_{\mathbb{R}} s^2 |\widehat{f}(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{dispersion d'énergie en fréquence}) \end{aligned}$$

Alors :

$$\sigma(f) \cdot \sigma(\widehat{f}) \geq \frac{E(f)}{4\pi}$$

17.2.4 Les espaces vectoriels $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Définition 51 On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des applications f de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , telles que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \lim_{|t| \rightarrow \infty} |t^p f(t)| = 0$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est appelé l'espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{C} à décroissance rapide.

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R})$, dense dans $L^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire tel que :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ telle que : } \int_{\mathbb{R}} |f(t) - g(t)|^2 dt \leq \varepsilon$$

On appelle espace vectoriel des distributions tempérées sur \mathbb{R} , et on le note $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, le sous-espace des fonctionnelles linéaires u sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, telles que :

quelle que soit la suite $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tels que :

$$\begin{aligned} \forall k, l \in \mathbb{N}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \text{Sup} \{ |t^k \varphi_m^{(l)}(t)|, t \in \mathbb{R} \} = 0 \quad \text{on a :} \\ \lim_{m \rightarrow \infty} u(\varphi_m) = 0 \text{ dans } \mathbb{C} \end{aligned} \quad (17.1)$$

Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de u la distribution $\widehat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \widehat{u}(\varphi) = u(\widehat{\varphi})$$

Les principales propriétés de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ s'étendent à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

17.3 Ondelettes.

L'Analyse de Fourier d'un signal présente deux inconvénients :

- (i) elle utilise des fonctions qui ont pour support la droite réelle, toute entière.
- (ii) c'est seulement une analyse en fréquence.

Pour remédier au premier inconvénient, on utilise la transformée de Fourier "à fenêtre glissante"; pour remédier au second, on utilise la transformée en ondelette que nous allons décrire ci-dessous.

17.3.1 La transformée de Fourier "à fenêtre glissante".

Cette méthode, utilisée pour analyser localement un signal représenté par une fonction f , consiste à tronquer f en la multipliant par une fonction g à support borné (ou bien "négligeable" en dehors d'un intervalle borné).

On remplace ainsi le calcul de \widehat{f} par celui de $\widehat{g \circ f} = \widehat{g} \star \widehat{f}$.

Exemples fenêtres.

(i) L'indicatrice :

Etant donné $\mu \in \mathbb{R}_+^*$, on considère :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g_\mu(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-\mu, \mu] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \widehat{g}_\mu(s) = \frac{\sin(2\pi\mu s)}{\pi s}$$

(ii) Le "chapeau" : Etant donné $\mu \in \mathbb{R}_+^*$, on considère :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g_\mu(t) = \begin{cases} 1 - \left| \frac{t}{\mu} \right| & \text{si } t \in [-\mu, \mu] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \widehat{g}_\mu(s) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\sin(\pi\mu s)}{\pi s} \right)^2$$

17.3.2 3.2 La transformée en ondelette.

Définition 52 On dira qu'une fonction h définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} est une ondelette continue (resp. discrète) si toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$f = C(h) \cdot \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} h_{a,b}(t) \cdot f(t) dt \right) h_{a,b} \frac{da \cdot db}{a^2} \text{ où :}$$

$$a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, h_{a,b} = |a|^{-\frac{1}{2}} h\left(\frac{\cdot - b}{a}\right)$$

$$\text{(resp. } f = C(h) \cdot \left(\sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} h_{k,l}(t) \cdot f(t) dt \right) h_{k,l} \right) \text{ où :}$$

$$\forall k, l \in \mathbb{Z}, h_{k,l}(\cdot) = 2^{\frac{k}{2}} h(2^l \cdot - l)$$

$C(h)$ étant une fonction qui dépend de h uniquement.

17.3.3 Ondelette continue.

Définition 53 Soit $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $h \neq 0$ telle que $\int_{\mathbb{R}} |h(t)|^2 dt = 1$.
Avec les mêmes notations que ci-dessus, posons :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), \gamma(a, b; f) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot h_{a,b}(t) dt$$

L'application de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ qui à toute $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ associe $\gamma(\cdot, \cdot; f) \in L^2(\mathbb{R})$ est appelée transformée en ondelette continue de f .
 $\gamma(a, b; f)$ est appelé coefficient en ondelette de f .

Avec les hypothèses et notations ci-dessus, on montre que :

- (i) $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{\mu} \cdot \int_{(\mathbb{R}^*)^2} |\gamma(a, b; f)|^2 \frac{da \cdot db}{a^2}$ où : $\mu = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{h}(\theta)|^2}{|\theta|} d\theta < +\infty$, par hypothèse.
- (ii) $f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mu} \int \int_{\substack{|a| \geq \varepsilon \\ b \in \mathbb{R}}} \gamma(a, b; f) \cdot h_{a,b}(t) \frac{da \cdot db}{a^2}$ presque partout

17.3.4 Ondelette discrète.

Définition 54 On appelle **analyse multirésolution (A.M)** de $L^2(\mathbb{R})$, la donnée d'une famille $\{V_k; k \in \mathbb{Z}\}$ de sous-espaces vectoriels fermés de $L^2(\mathbb{R})$ tels que :

- (*)

$$\forall k \in \mathbb{Z}, V_k \subset V_{k+1}$$

- (*)

$$(\cup_{k \in \mathbb{Z}} V_k) \text{ est dense dans } L^2(\mathbb{R})$$

$$c\text{-à-d } \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists g \in \cup_{k \in \mathbb{Z}} V_k \text{ tel que : } \int_{\mathbb{R}} |f(t) - g(t)|^2 dt \leq \varepsilon$$

- (*)

$$\cap_{k \in \mathbb{Z}} V_k = 0$$

- (*)

$$(\forall k \in \mathbb{Z}, f \in V_k) \Rightarrow (f(2 \cdot) \in V_{k+1})$$

- (*)

$$(f \in V_0) \Rightarrow (\forall l \in \mathbb{Z}, f(\cdot - l) \in V_0)$$

- (*)

$\exists g \in V_0$ telle que $\{g(\cdot - l); l \in \mathbb{Z}\}$ soit une base inconditionnelle de V_0

c-à-d une famille d'éléments de V_0 qui vérifie les deux conditions suivantes :

(j)

$$\forall f \in V_0, \exists \{\gamma_l(f); l \in \mathbb{Z}\} \text{ telle que : } \int_{\mathbb{R}} |\gamma_l(f)|^2 dt \leq +\infty$$

$$\text{et } \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left| f(t) - \sum_{k=-m}^m \gamma_k(f) \cdot g(t - k) \right|^2 dt = 0$$

(j)

$$\exists A, B \in \mathbb{R}_+^* \text{ tels que : } \forall f \in V_0, \quad A \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\gamma_l(f)|^2 \leq B \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt$$

Soit W_k le complémentaire orthogonal de V_k dans V_{k+1} relativement au produit scalaire canonique de $L^2(\mathbb{R})$. Alors, $L^2(\mathbb{R})$ est la somme directe des sous-espaces vectoriels W_k , $k \in \mathbb{Z}$.

17.3.5 La méthode d'orthonormalisation de Poincaré et son application dans le théorème des ondelettes.

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert de dimension finie $m \in \mathbb{N}^*$ et $\{e_1, \dots, e_m\}$ une base de E . Soit G l'application de E dans lui-même qui, à tout $x \in E$ associe $\sum_{k=1}^m \langle x | e_k \rangle e_k$. G est une application linéaire (continue de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ dans lui-même), positive car :

$$\forall x \in E, \quad x \neq 0, \quad \langle Gx | x \rangle = \sum_{k=1}^m |\langle x | e_k \rangle|^2$$

On vérifie facilement que G est surjective et injective.

Notons G^{-1} l'application inverse de G .

G^{-1} est positive.

Posons : $\forall k = 1, \dots, m, \quad u_k = G^{-\frac{1}{2}} e_k$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad \sum_{k=1}^m \langle x | u_k \rangle u_k &= \sum_{k=1}^m \langle x | G^{-\frac{1}{2}} e_k \rangle G^{-\frac{1}{2}} e_k \\ &= G^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^m \langle G^{-\frac{1}{2}} x | e_k \rangle e_k \right) = G^{-\frac{1}{2}} (G(G^{-\frac{1}{2}} x)) = x \end{aligned}$$

Il en résulte que $\{u_1, \dots, u_m\}$ est une base orthonormée de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

La méthode d'orthonormalisation que nous venons de décrire s'étend au cas des espaces de Hilbert à base infinie dénombrable.

Désignons, maintenant, par $\langle \cdot | \cdot \rangle$ (resp. $\|\cdot\|$) le produit scalaire (resp. la norme) canonique de $L^2(\mathbb{R})$.

Soit Γ l'application de V_0 dans lui-même telle que :

$$\forall f \in V_0, \quad \Gamma f = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle g(\cdot - l) | f \rangle g(\cdot - l)$$

On montre que Γ est linéaire, positive, bijective, continue de $(V_0, \|\cdot\|)$ dans lui-même. On en déduit que Γ est inversible et que son inverse Γ^{-1} est positive et continue de $(V_0, \|\cdot\|)$ dans lui-même.

Posons : $\forall l \in \mathbb{Z}, \quad \varphi(\cdot - l) = \Gamma^{-\frac{1}{2}} g(\cdot - l)$. Alors :

(i) La famille $\{\varphi(\cdot - l) ; l \in \mathbb{Z}\}$, est une base orthonormée de $(V_0, \|\cdot\|)$.

(ii) Quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, la famille $\{2^{\frac{k}{2}} \varphi(2^k \cdot - l) ; l \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de $(V_k, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

(iii) Il existe $\psi \in V_1$ telle que la famille $\{\psi(\cdot - l) ; l \in \mathbb{Z}\}$ soit une base orthonormée de $(W_0, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ et que

quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, la famille $\{2^{\frac{k}{2}}\psi(2^k \cdot - l) ; l \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de $(W_k, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

ψ est telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \beta_l \varphi(t - l) \quad \text{avec } \beta_l = (-1)^{1-l} \alpha_{1-l}$$

$$\text{et } \forall t \in \mathbb{R}, \varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \alpha_l \varphi(t - l)$$

Exemple 17.3.1 *Ondelette spline.*

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$.

Quelle que soit l'application f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , posons :

$$E_h f = f(\cdot + h), \quad D_h f = h^{-1}[f(\cdot + h) - f(\cdot)] \quad \text{et}$$

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, D_h^m = D_h \circ \dots \circ D_h$$

Posons :

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, \quad K_{m,h}(s, t) = D_{h,s}^m D_{h,t}^m \left(\frac{(-1)^m}{(2m-1)!} (s-t)_+^{2m-1} \right)$$

et :

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathbb{Z}, \quad \varphi_j &= K_{m,2^j h}(\cdot, 0) \\ \forall j, k \in \mathbb{Z}, \quad \varphi_{j,k} &= K_{m,2^j h}(\cdot - k 2^j h, 0) \end{aligned}$$

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, désignons par V_j le sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\mathbb{R})$, engendré par la famille $\{\varphi_{j,k} ; k \in \mathbb{Z}\}$.

Alors, la famille de sous-espaces vectoriels (fermés) de $L^2(\mathbb{R})$, $\{V_j ; j \in \mathbb{Z}\}$ est une AM. de $L^2(\mathbb{R})$.

Définition 55 Soit $m \in \mathbb{N}$.

On dit qu'une fonction ψ est une ondelette (mère) de classe m si elle possède les propriétés suivantes :

(i) $\forall j = 0, \dots, m, \quad \psi^{(j)} \in L^\infty(\mathbb{R})$

(ii) $\forall j = 0, \dots, m, \quad \psi^{(j)} \in S(\mathbb{R})$

(iii) $\forall k = 0, \dots, m, \quad \int_{\mathbb{R}} t^k \psi(t) dt = 0$

(iv) La famille $\{2^{\frac{k}{2}}\psi(2^k \cdot - q) ; p, q \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Exemple 17.3.2 *élémentaire :*

(i) Posons :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors : $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = g(2t) + g(2t - 1)$ et

ψ telle que : $\forall t \in \mathbb{R}, \psi(t) = g(2t) - g(2t - 1)$ est une ondelette (mère) de classe zéro.

(ii) Déterminer ψ lorsque :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0, 1] \\ 2 - t & \text{si } t \in [1, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$