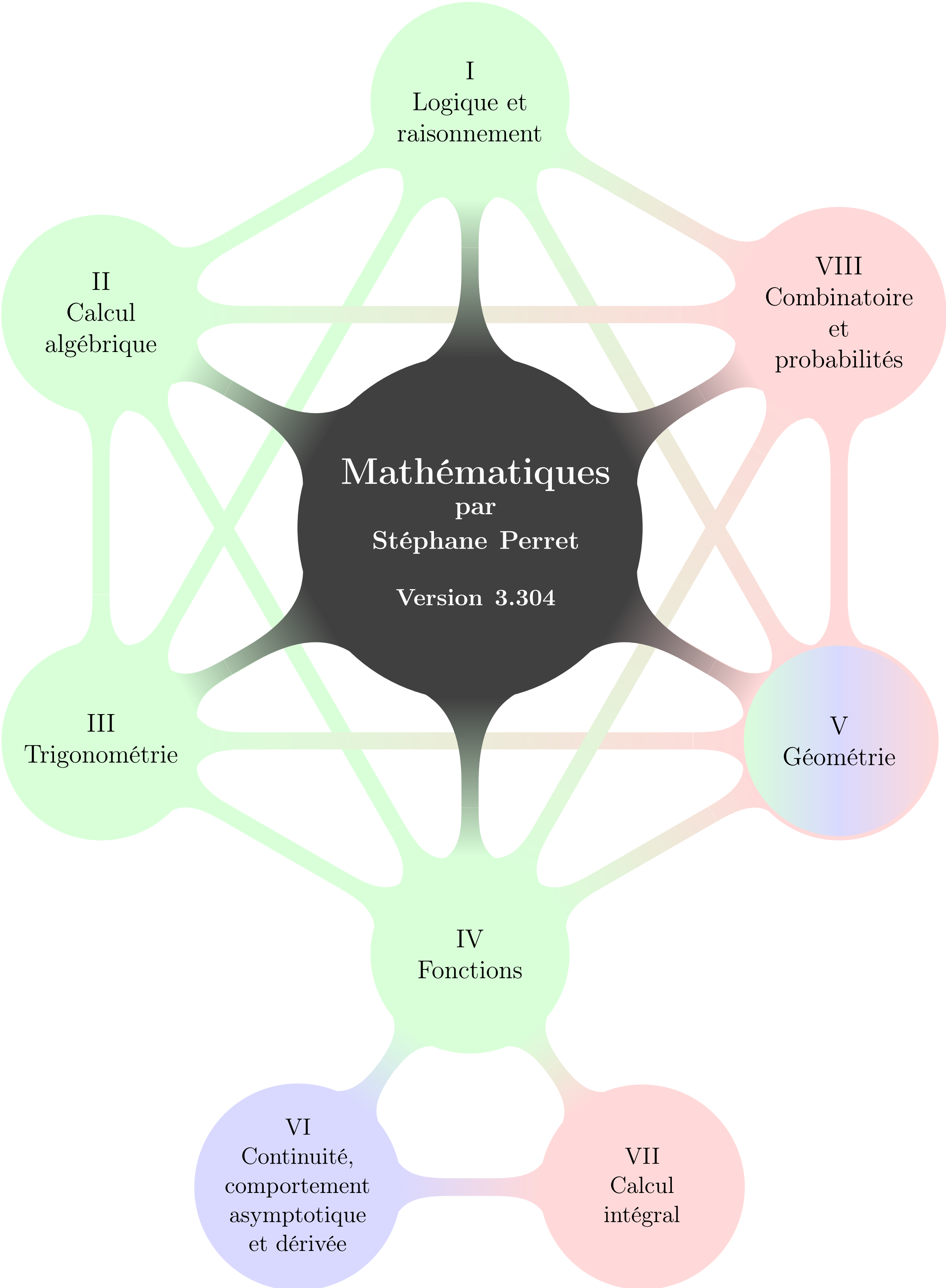
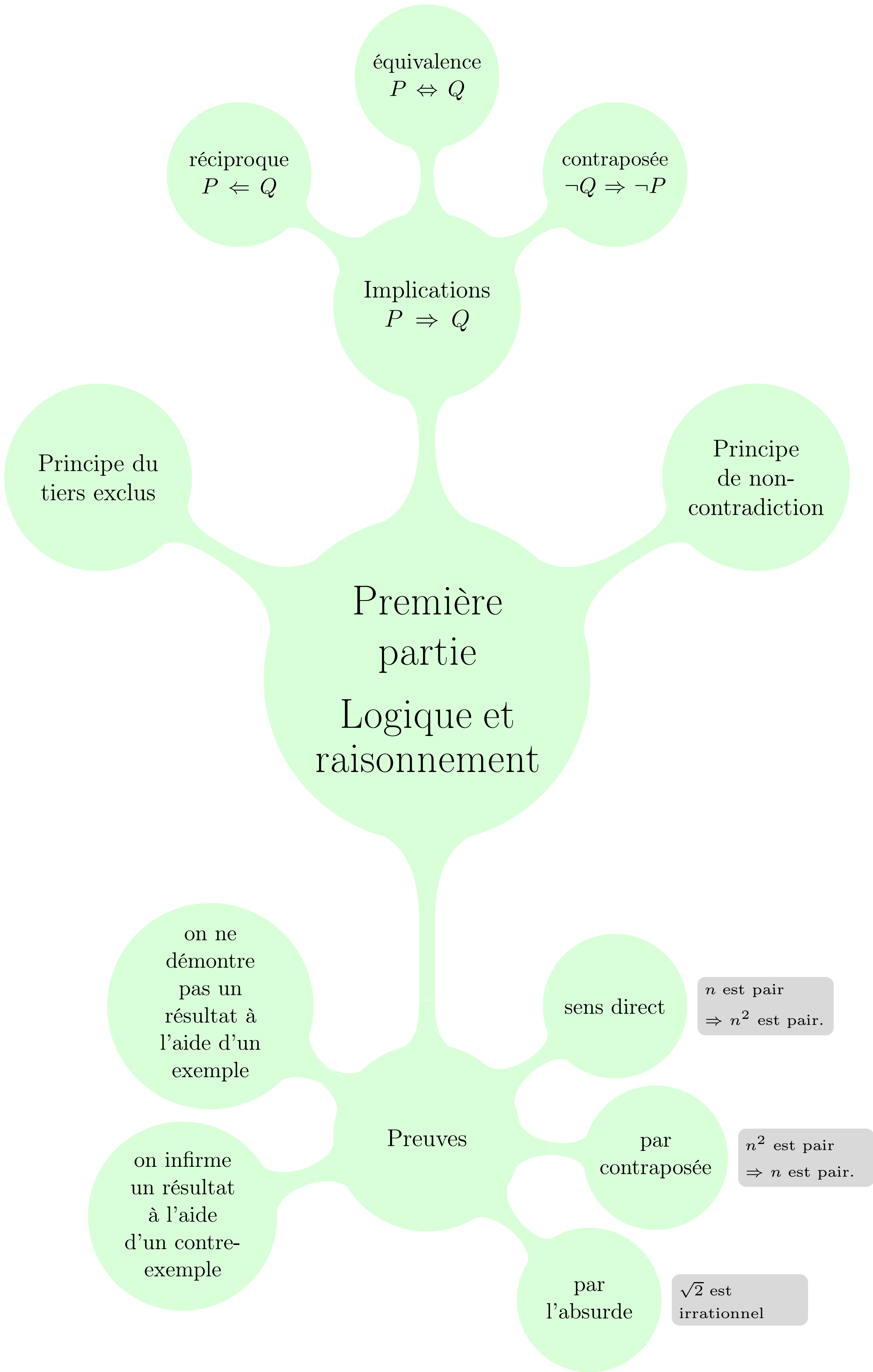

Mathématiques
par
Stéphane Perret
Version 3.304
I
Logique et raisonnement
II
Calcul algébrique
III
Trigonométrie
IV
Fonctions
V
Géométrie
VI
Continuité, comportement asymptotique et dérivée
VII
Calcul intégral
VIII
Combinatoire et probabilités

Table des matières

II Calcul algébrique 11

VIII Combinatoire et probabilités 269


Première partie
Logique et raisonnement
Implications $P \Rightarrow Q$
réciproque $P \Leftarrow Q$
équivalence $P \Leftrightarrow Q$
contraposée $\neg Q \Rightarrow \neg P$
Principe du tiers exclus
Principe de non-contradiction
Preuves
on ne démontre pas un résultat à l'aide d'un exemple
on infirme un résultat à l'aide d'un contre-exemple
sens direct
n est pair $\Rightarrow n^2$ est pair.
par contraposée
n^2 est pair $\Rightarrow n$ est pair.
par l'absurde
$\sqrt{2}$ est irrationnel

Chapitre 1

Les principes de base de la logique

En mathématique, une *expression bien formée* ou *proposition* est une expression qui a du sens et qui peut être vraie ou fausse.

1.1 Le principe de non-contradiction

La logique (et donc les mathématiques) est basée sur le *principe de non-contradiction*. Ce principe dit qu'une expression bien formée ne peut pas être vraie et fausse à la fois.

1.2 Le principe du tiers exclu

Le *principe du tiers exclu* stipule que si une expression bien formée n'est pas vraie, alors elle est fausse (ou que si elle n'est pas fausse, alors elle est vraie).

Ce principe est vrai pour la plupart des expressions bien formées, bien qu'il y ait des expressions qui ne vérifient pas le principe du tiers exclu (voir l'énigme du cyclope ci-dessous). Ces expressions très particulières se prononcent, en général, sur leur propre valeur de vérité. Dans la suite du cours, on admettra que nos propositions vont satisfaire ce principe.

L'énigme du cyclope

Vous voilà enfermé dans une caverne en compagnie d'un cyclope qui veut votre mort. Il vous donne néanmoins un choix : soit vous dites une proposition vraie et vous serez bouilli ; soit vous dites une proposition fausse et vous serez roti.

Que dire ?

Réponse : il y a plusieurs propositions possibles. Voici deux exemples.

1. On peut dire : «Vous allez me rotir !» (ou «Vous n'allez pas me bouillir !»)

   Si cette proposition était vraie, alors vous finiriez bouilli et ainsi cette proposition serait fausse ; il s'agit d'une contradiction, donc cette proposition ne peut pas être vraie.

   Si cette proposition était fausse, alors vous finiriez roti et ainsi cette proposition serait vraie ; il s'agit d'une contradiction, donc cette proposition ne peut pas être fausse.

   Cette proposition n'est donc ni vraie, ni fausse.

2. On peut aussi dire : «Je suis en train de mentir !»

   Si cette proposition était vraie, alors vous seriez en train de dire la vérité et ainsi cette proposition serait fausse ; il s'agit d'une contradiction, donc cette proposition ne peut pas être vraie.

   Si cette proposition était fausse, alors vous seriez en train de mentir et ainsi cette proposition serait vraie ; il s'agit d'une contradiction, donc cette proposition ne peut pas être fausse.

   Cette proposition n'est donc ni vraie, ni fausse.

3. On peut aussi dire : «Cette phrase est fausse !»

1.3 Les implications

Lorsqu'on a deux expressions bien formées P et Q, on écrit

$$\boxed{P \Rightarrow Q}$$

pour dire que l'expression P *implique* l'expression Q. Dans ce cas, P est l'*hypothèse* et Q est la *conclusion*.

Il y a différentes façons de lire $P \Rightarrow Q$. On peut dire :

Si P, alors Q	Si la proposition P est vraie, alors la proposition Q est vraie
Q si P	La proposition Q est vraie si la proposition P est vraie
P seulement si Q	La proposition P est vraie seulement si la proposition Q est vraie

Lorsque l'expression P n'implique pas l'expression Q, on note $P \not\Rightarrow Q$. C'est le cas lorsque Q est fausse quand P est vraie.

Remarques importantes

1. En mathématiques, on n'écrit jamais d'expressions bien formées fausses (sauf si on s'est trompé en toute bonne foi).
2. En mathématiques, lorsqu'on dit qu'une proposition (ou implication) est vraie, cela signifie qu'elle est TOUJOURS vraie (l'expression «l'exception qui confirme la règle» n'a pas sa place en mathématiques). Ainsi une proposition (ou implication) est fausse lorsqu'elle n'est pas toujours vraie.

Exemples d'implications

1. Jean a gagné au loto $\Rightarrow$ Jean a joué au loto.

   On lit : a) Le fait que Jean a gagné au loto implique le fait qu'il a joué au loto.
   b) Si Jean a gagné au loto, alors il a joué au loto.
   c) Jean a joué au loto, s'il a gagné.
   d) Jean a gagné au loto seulement s'il a joué.

   Cette implication est vraie, car on ne peut pas gagner sans jouer.

2. $2x = 6 \overset{:2}{\Longrightarrow} x = 3$.

   Cette implication est vraie, car si le double d'un nombre x vaut 6, alors le nombre x est égal à 3 (on divise chaque côté de l'égalité par 2).

3. Si un enseignant vous dit : «Les cancres s'asseyent au fond de la classe», il pense que :

   $$\text{Un élève est un cancre} \implies \text{Il s'assied au fond de la classe}$$

   Non seulement cela ne signifie pas qu'il y a des cancres dans la classe, mais surtout cela ne signifie en aucun cas que tous les élèves du fond de la classe sont des cancres. Ainsi, l'enseignant n'a pas affirmé que : «Ceux qui s'asseyent au fond de la classe sont des cancres». D'ailleurs, même cet enseignant sera d'accord de penser que :

   $$\text{Un élève s'assied au fond de la classe} \;\not\Longrightarrow\; \text{C'est un cancre}$$

1.4 La réciproque d'une implication

La *réciproque* d'une implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $P \Leftarrow Q$.
Lorsque la réciproque n'est pas vraie, on trace l'implication : $P \not\Leftarrow Q$.

Exemples Regardons les réciproques des deux premiers exemples précédents.

1. Jean a gagné au loto $\not\Longleftarrow$ Jean a joué au loto.

   En effet, il y a au moins une personne qui joue au loto et qui ne gagne pas.

2. $2x = 6 \overset{\cdot 2}{\Longleftarrow} x = 3$.

   En effet, si un nombre x vaut 3, alors son double vaut 6 (on multiplie chaque côté de l'égalité par 2).

Moralité

La valeur de vérité de la réciproque d'une implication est indépendante de celle de l'implication.

En effet, la première implication de l'exemple est vraie, alors que sa réciproque est fausse. Tandis que la deuxième implication de l'exemple est vraie et que sa réciproque est vraie.

1.5 Les équivalences

Lorsqu'on a deux expressions bien formées P et Q telles que $P \Rightarrow Q$ et $P \Leftarrow Q$, on écrit :

$$\boxed{P \Longleftrightarrow Q}$$

et on dit que la proposition P *est équivalente à* la proposition Q.

Lorsque la proposition P n'est pas équivalente à la propostion Q, on note $P \not\Leftrightarrow Q$. C'est le cas lorsque $P \not\Rightarrow Q$ ou $P \not\Leftarrow Q$.

Au lieu de dire que P est équivalent à Q, on peut aussi dire que

$$P \textit{ si et seulement si } Q$$

Exemples d'équivalence

1. Georges est le frère de Sophie si et seulement si Sophie est la sœur de Georges.

   Il est évident que «Georges est le frère de Sophie» et «Sophie est la sœur de Georges» sont des propositions synonymes.

2. Jean a gagné au loto $\not\Longleftrightarrow$ Jean a joué au loto.

   En effet, l'implication '$\Leftarrow$' est fausse, donc l'équivalence est fausse (malgré le fait que '$\Rightarrow$' est vraie).

3. $2x = 6 \Longleftrightarrow x = 3$.

   En effet, les deux implications '$\Leftarrow$' et '$\Rightarrow$' sont vraies.

1.6 Le contraire d'une expression bien formée

Si P est une proposition, alors sa *proposition contraire* est notée non P, $\neg P$ ou $\sim P$.

Par exemple

Si P est la proposition «Il pleut», alors non P est la proposition «Il ne pleut pas» (et non pas «Il fait beau», car il peut aussi neiger, grêler, etc.).

Remarques

1. Le principe de non-contradiction affirme que P et non P ne peuvent pas être vraies en même temps. De même, elles ne peuvent pas être fausses en même temps.
2. Le principe du tiers exclu permet d'affirmer que :
$$\begin{cases} P \text{ est vraie} & \Longleftrightarrow \quad \text{non } P \text{ est fausse} \\ P \text{ est fausse} & \Longleftrightarrow \quad \text{non } P \text{ est vraie} \end{cases}$$
On voit l'importance du principe du tiers exclu, car les contraires des phrases de l'énigme du cyclope, qui ne sont ni vraies, ni fausses, sont des phrases vraies.

1.7 La contraposée

La *contraposée* d'une implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication non $Q \Rightarrow$ non P.

Théorème

La contraposée d'une implication I est une implication qui a la même valeur de vérité que l'implication I.

$$\boxed{\underbrace{P \Rightarrow Q}_{\text{implication } I} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P}_{\text{contraposée de l'implication } I}} \; (\bigstar)$$

Interprétations

1. Le sens '$\Longrightarrow$' de $(\bigstar)$ signifie que
Si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors sa contraposée non $Q \Rightarrow$ non P est vraie.
2. Le sens '$\Longleftarrow$' de $(\bigstar)$ signifie que
Si la contraposée non $Q \Rightarrow$ non P est vraie, alors l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie.
3. La contraposée du sens '$\Longrightarrow$' de $(\bigstar)$ signifie que
Si la contraposée non $Q \Rightarrow$ non P est fausse, alors l'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse.
4. La contraposée du sens '$\Longleftarrow$' de $(\bigstar)$ signifie que
Si l'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse, alors sa contraposée non $Q \Rightarrow$ non P est fausse.

Moralité

Quelque soit la valeur de vérité d'une implication, sa contraposée a exactement la même valeur de vérité et inversement.

Exemples

1. La contraposée de l'implication

$$\text{Jean a gagné au loto} \implies \text{Jean a joué au loto}$$

est

$$\text{Jean n'a pas joué au loto} \implies \text{Jean n'a pas gagné au loto}$$

Comme la première implication est vraie, le théorème affirme que la deuxième implication est aussi vraie.

2. La contraposée de la proposition

$$\text{Jean a joué au loto} \not\Longrightarrow \text{Jean a gagné au loto}$$

est

$$\text{Jean n'a pas gagné au loto} \not\Longrightarrow \text{Jean n'a pas joué au loto}$$

Comme la première proposition est vraie (l'implication «Jean a joué au loto $\Rightarrow$ Jean a gagné au loto» est fausse), le théorème affirme que la deuxième proposition est aussi vraie (l'implication «Jean n'a pas gagné au loto $\Rightarrow$ Jean n'a pas joué au loto» est fausse).

3. La contraposée de l'équivalence $2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$ est $x \neq 3 \Leftrightarrow 2x \neq 6$.

C'est la raison principale pour laquelle on résout rarement des équations où le symbole '$=$' est remplacé par le symbole '$\neq$'.

Remarque

Si on contrapose la contraposée d'une implication, on retrouve cette implication.

Preuve du théorème

'$\Longrightarrow$' On suppose que $P \Rightarrow Q$ est vraie. On doit montrer que non $Q \Rightarrow$ non P est vraie, donc encore supposer que non Q est vraie, afin de montrer que non P est vraie.

On remarque que si P était vraie, alors l'implication $P \Rightarrow Q$ nous permettrait d'affirmer que Q serait vraie, ce qui est impossible (principe de non contradiction) car Q est fausse (puisque non Q est supposé vraie (principe du tiers exclu)).

Par conséquent, P n'est pas vraie, donc non P est vraie (principe du tiers exclu).

On vient donc de montrer, grâce aux principes de non-contradiction et du tiers exclu, que :

$$\Big(P \Rightarrow Q\Big) \Longrightarrow \Big(\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P\Big)$$

'$\Longleftarrow$' En refaisant le raisonnement '$\Longrightarrow$' en remplaçant P par non Q et Q par non P, on a :

$$\Big(\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P\Big) \Longrightarrow \Big(\text{non (non } P) \Rightarrow \text{non (non } Q)\Big) \Longleftrightarrow \Big(P \Rightarrow Q\Big)$$

$\square$

1.8 Trois méthodes pour démontrer des implications

Pour montrer que l'implication ci-dessous est vraie

$$P \Rightarrow Q$$

on peut utiliser l'une des trois méthodes ci-dessous.

1. La première est la *méthode directe* : on suppose que P est vraie et on essaie de démontrer que Q est aussi vraie.

2. La deuxième façon utilise la contraposée, c'est la *preuve par contraposée* : on montre l'implication équivalente non $Q \Rightarrow$ non P de manière directe. C'est-à-dire que l'on suppose que non Q est vraie et on cherche à démontrer que non P est vraie.

3. La troisième façon de faire, c'est de procéder *par l'absurde*. Cela consiste à faire comme si la conclusion Q était fausse et à essayer d'en dégager une contradiction (c'est-à-dire une proposition vraie et fausse en même temps). Par le principe de non-contradiction, cela signifie donc qu'il y a une erreur quelque part et, si la preuve est bien ficelée, que cette erreur ne peut être que le fait que Q est fausse. Ainsi, Q doit donc être vraie (si Q satisfait le principe du tiers exclu).

   Voici un exemple d'une *preuve par l'absurde* :

   > Montrons qu'il n'existe pas de nombre réel x tel que $x^2 = -1$.
   >
   > Par l'absurde, on suppose que la conclusion est fausse, c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel x tel que $x^2 = -1$. Or, grâce à la règle des signes, on sait que $x^2 \geqslant 0$. Ainsi, on a $-1 = x^2 \geqslant 0$.
   > On a une contradiction : $-1 \geqslant 0$.
   > Donc, il n'existe pas de nombre réel x tel que $x^2 = -1$.

1.9 Contre-exemples

Pour montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse, il faut un *contre-exemple*, c'est-à-dire un cas particulier pour lequel P est vraie et Q est fausse.

Exemple

On a :

$$x \text{ est un nombre pair } \not\Rightarrow \frac{x}{2} \text{ est un nombre pair}$$

En effet, $x = 2$ fournit un contre-exemple, car 2 est un nombre pair et que $\frac{2}{2} = 1$ n'est pas un nombre pair. Ici, le nombre 2 est un contre-exemple.

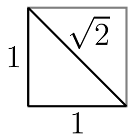
Attention

On ne démontre pas une implication à l'aide d'un exemple.

En effet, x est un nombre pair $\not\Rightarrow$ $\frac{x}{2}$ est un nombre pair. Pourtant, si on essaye avec $x = 4$, alors $\frac{x}{2} = \frac{4}{2} = 2$ est bien un nombre pair.

1.10 La découverte des nombres irrationnels

À la fin du VI$^{\text{e}}$ siècle, les mathématiciens grecs, membres de l'école pythagoricienne, pensaient que deux grandeurs a et b étaient toujours *commensurables*, c'est-à-dire qu'il existait un nombre réel u (u comme unité) et deux nombres entiers m et n tels que $a = mu$ et $b = nu$, donc que $\frac{a}{b}$ est une fraction (car $\frac{a}{b} = \frac{mu}{nu} = \frac{m}{n}$).
Ils furent troublés de découvrir qu'ils avaient tort en étudiant un objet pourtant très simple, la diagonale du carré de côté 1, qui se trouve aussi être l'hypoténuse du triangle rectangle isocèle dont les cathètes sont de longueur 1.



car $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$
(par le théorème de Pythagore)

En effet, il se trouve que 1 et $\sqrt{2}$ sont incommensurables, car $\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ n'est pas une fraction. Puisque, pour les grecs, l'existence de tels nombres dépassait la raison, ces nombres furent appelés *irrationnels*.

Théorème

Le nombre $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, c'est-à-dire $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Preuve

On note $2\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres qui sont des multiples de 2.

1. **Ingrédient** : Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $n^2 \in 2\mathbb{Z}$, alors $n \in 2\mathbb{Z}$.

   Il est équivalent de montrer la contraposée : si $n \notin 2\mathbb{Z}$, alors $n^2 \notin 2\mathbb{Z}$.

   Si n n'est pas un multiple de 2, alors n s'écrit $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On a

   $$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\overbrace{2k^2 + 2k}^{\in\mathbb{Z}}) + 1$$

   Ainsi, n^2 n'est pas un multiple de 2.

2. **La preuve par l'absurde.**

   Par l'absurde, on suppose que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Donc $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec a, $b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$. On peut encore supposer que $\frac{a}{b}$ est irréductible.

   On a ainsi : $$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \implies 2 = \frac{a^2}{b^2} \implies \boxed{a^2 = 2b^2} (\bigstar)$$

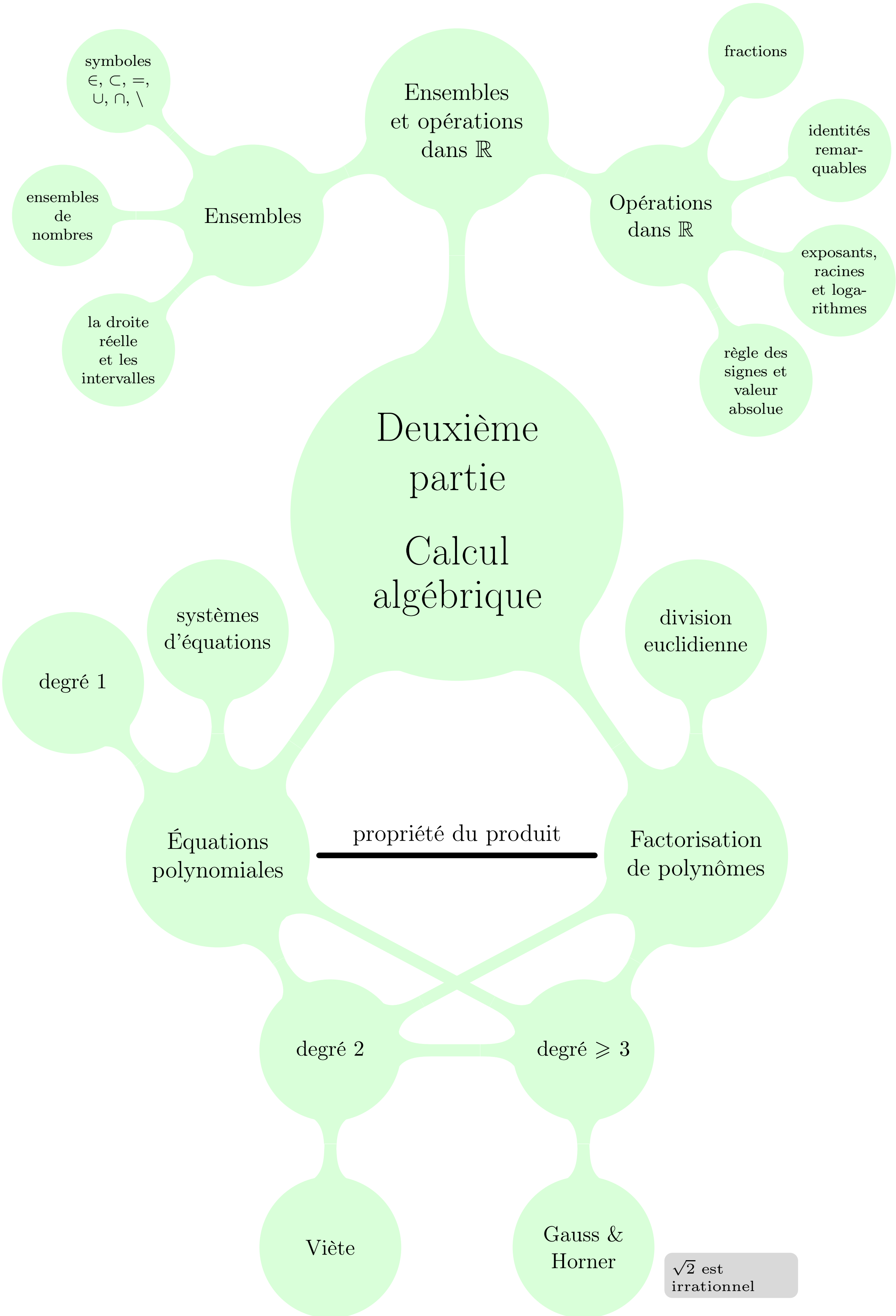
   Ainsi, on constate que $a^2 \in 2\mathbb{Z}$. Par l'**ingrédient**, on sait que $a \in 2\mathbb{Z}$.

   Par conséquent $a = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. En substituant ce résultat dans l'équation ($\bigstar$), on obtient
   $$(2k)^2 = 2b^2 \implies 4k^2 = 2b^2 \implies b^2 = 2k^2$$

   Ainsi, on constate que $b^2 \in 2\mathbb{Z}$. Par l'**ingrédient**, on sait que $b \in 2\mathbb{Z}$.

   Par conséquent, la fraction est réductible par 2. $\lightning$ contradiction avec l'irréductibilité de $\frac{a}{b}$.

   Donc $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.


Deuxième partie
Calcul algébrique
Ensembles et opérations dans ℝ
Ensembles
symboles ∈, ⊂, =, ∪, ∩, \
ensembles de nombres
la droite réelle et les intervalles
Opérations dans ℝ
fractions
identités remarquables
exposants, racines et logarithmes
règle des signes et valeur absolue
Équations polynomiales
degré 1
systèmes d'équations
propriété du produit
Factorisation de polynômes
division euclidienne
degré 2
degré ⩾ 3
Viète
Gauss & Horner
√2 est irrationnel

Chapitre 2

Ensembles, nombres et calcul algébrique

2.1 Ensembles et opérations sur les ensembles

Définition

Un *ensemble* est une collection d'*éléments*. N'importe quel objet (mathématique ou non) peut être considéré comme un élément d'un ensemble (y compris un ensemble !). Lorsqu'on énumère les éléments d'un ensemble, on note ses éléments entre accolades. Par exemple, l'ensemble E des nombres de 0 à 10, y compris, se note de la manière suivante.

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Les mathématiciens utilisent le symbole $\in$ pour dire qu'un élément *appartient à* un ensemble. Lorsqu'un élément n'appartient pas à un ensemble, on utilise le symbole $\notin$. Par exemple,

$$0 \in E, \qquad 5 \in E, \qquad \text{mais} \quad 15 \notin E$$

Néanmoins, lorsque les objets ne sont pas décrits de façon explicite, mais dépendent d'une condition, on utilise une notation légèrement plus sophistiquée. Par exemple, on traduit la phrase

$$\text{«}\underbrace{F\text{ est}}_{F=}\text{ l'}\underbrace{\text{ensemble}}_{\{...\}}\text{ des }\underbrace{\text{éléments de }E}_{\substack{n\in E\\ \text{on donne un nom général}\\ \text{aux éléments de l'ensemble}}}\ \underbrace{\text{tels que}}_{:}\ \underbrace{\text{leur carré est plus grand ou égal à 35}}_{\substack{n^2\geqslant 35\\ \text{on écrit la condition à l'aide d'une formule}\\ \text{grâce au fait qu'on a donné un nom aux éléments}}}\text{»}$$

par

$$F = \{n \in E : n^2 \geqslant 35\}$$

On constate, en calculant les carrés des éléments de E, que $F = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

Définition

Si A et B sont des ensembles, on dit que A est un *sous-ensemble de* B lorsque chaque élément de A appartient à l'ensemble B.

En reprenant l'exemple ci-dessus, on voit que l'ensemble F est un sous-ensemble de l'ensemble E.

$$F = \{n \in E : n^2 \geqslant 35\} = \{6, 7, 8, 9, 10\} \quad \text{est un sous-ensemble de } E$$

Définitions et notations

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E quelconque. On dit que

1. A est *inclus dans* B lorsque tout élément de A appartient à B. On note $A \subset B$. Dans ce cas, A est un sous-ensemble de B.
2. A *contient* B lorsque tout élément de B appartient à A. On note $A \supset B$. Dans ce cas, B est un sous-ensemble de A.
3. A est *égal à* B, lorsque tout élément de A appartient à B et que tout élément de B appartient à A. On note $A = B$.

Exemples

Si E est l'ensemble de la page précédente ($E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$), alors :

1. $F = \{n \in E : n^2 \geqslant 35\} = \{6, 7, 8, 9, 10\} \subset E$;
2. $E \supset F = \{n \in E : n^2 \geqslant 35\} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

Attention aux notations

Dire que $\{1\} \in A$ signifie que $\{1\}$ est un élément de A et ainsi l'ensemble A est de la forme suivante.

$$A = \Big\{\{1\}, \ldots\Big\}$$

Remarques

Il est évident que :

$$A \subset B \iff B \supset A$$

$$\big(A \subset B \text{ et } B \subset A\big) \iff A = B$$

Lorsqu'on veut démontrer que deux ensembles A et B sont égaux, on peut faire une *preuve par double inclusion*, c'est-à-dire qu'on démontre que $A \subset B$ et que $B \subset A$ (en vertu de la deuxième équivalence ci-dessus).

Syntaxe

Les symboles ainsi définis sont des opérateurs binaires, c'est-à-dire qu'à deux objets les opérateurs font correspondre un seul objet.

Nom	Terme de gauche	Symbole	Terme de droite	Résultat
Appartenir à	Elément	$\in$	Ensemble	Proposition
Etre inclus dans	Ensemble	$\subset$	Ensemble	Proposition
Etre égal à	Ensemble	$=$	Ensemble	Proposition
Etre égal à	Elément	$=$	Elément	Proposition
contenir	Ensemble	$\supset$	Ensemble	Proposition
contenir	Ensemble	$\ni$	Elément	Proposition

On a l'équivalence suivante lorsque A est un ensemble.

$$\boxed{x \in A \iff \{x\} \subset A}$$

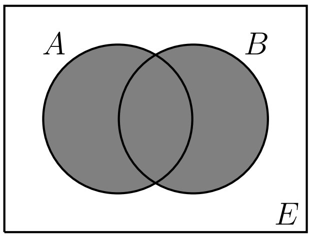
Définition

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

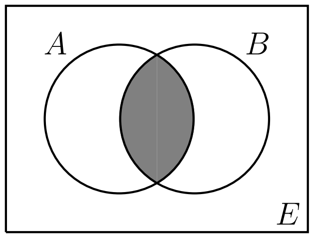
On définit les sous-ensembles *réunion* $A \cup B$ et *intersection* $A \cap B$ comme suit.

$$\begin{array}{rcl} A \cup B & = & \{e \in E : e \in A \text{ ou } e \in B\} \\ A \cap B & = & \{e \in E : e \in A \text{ et } e \in B\} \end{array}$$

$A \cup B$



$A \cap B$



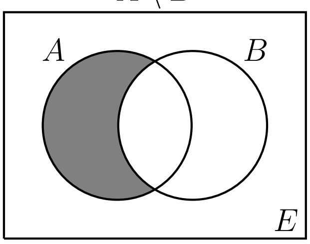
Définition

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

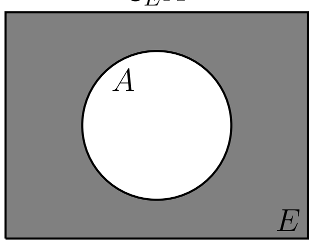
On définit les sous-ensembles *différence* $A \setminus B$, *complémentaire de* A *dans* E, noté $\complement_E A$, et *différence symétrique* $A \triangle B$ comme suit.

$$\begin{array}{rcl} A \setminus B & = & \{e \in E : e \in A \text{ et } e \notin B\} \\ \complement_E A & = & \{e \in E : e \notin A\} \\ A \triangle B & = & \{e \in E : e \in A \text{ ou (exclusif) } e \in B\} \end{array}$$

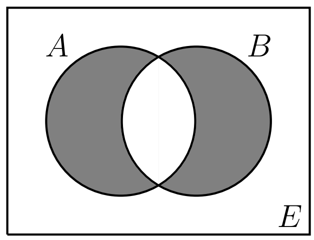
$A \setminus B$



$\complement_E A$



$A \triangle B$



Définition

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

1. Si l'ensemble A ne contient aucun élément, on dit que A est vide et on utilise la notation $A = \emptyset$ où $\emptyset$ est *l'ensemble vide*.
2. On dit que A et B sont *disjoints* si $A \cap B = \emptyset$.

Convention

L'ensemble vide est contenu dans tous les ensembles.

Cela signifie que la proposition $\emptyset \subset A$ est considérée comme vraie quelque soit l'ensemble A.

2.2 Les ensembles de nombres

Les mathématiciens ont classé les nombres dans des ensembles, appelés *ensembles de nombres*.

Tout d'abord, on a les *nombres naturels*. C'est eux que l'on utilise la plupart du temps pour compter (des objets, de l'argent, etc.).

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

Historiquement, le zéro n'est pas venu tout de suite. Il a été inventé en Orient et importé par Fibonacci au début du XIII[e] siècle.

Ensuite, les nombres négatifs sont apparus et, mis ensemble avec les nombres naturels, ont formé l'ensemble des *nombres entiers*. Moins utilisés que les nombres naturels dans la vie de tous les jours, on les trouve notamment dans l'expression de la température (en degré Celsius). Leur présence permet à la soustraction d'exister quelque soit les nombres que l'on soustrait : sans eux, $2 - 3$ n'existerait pas.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Construits à partir des nombres entiers, les *nombres rationnels* ou *fractions*, sont très importants. On les utilise tous les jours lorsqu'on parle de centimètres, de décilitres, de centièmes de seconde, de moitié, de tiers, etc. Grâce à eux on peut diviser n'importe quel nombre par un nombre non nul.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

En termes mathématiques a est le *numérateur* (vient du mot numéro ou nombre, car il compte) et b est le *dénominateur* (vient du mot dénommer, car il correspond à un nom comme demi, tiers, dixième, etc.).

Enfin, il y a des nombres qui ne sont pas des fractions. Ce sont les *nombres irrationnels*. Découverts par les Grecs (qui ont eu de la peine à en accepter l'existence), ils apparaissent par exemple lorsqu'on étudie la longueur des côtés d'un triangle, le périmètre d'un cercle ou encore en calculant des intérêts bancaires. Réunis avec les nombres rationnels, ils forment l'ensemble des *nombres réels*.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \left\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi, e, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ldots\right\}$$

Contrairement aux ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable, c'est-à-dire que l'on ne peut pas énumérer les nombres réels.

On a les inclusions d'ensembles suivantes :

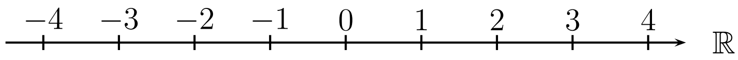
$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

Les élèves qui sont dans une option scientifique auront le privilège de découvrir l'ensemble des *nombres complexes*, noté $\mathbb{C}$. Il s'agit de l'ensemble des nombres construits à l'aide des nombres réels et d'un *nombre imaginaire*, noté i, dont le carré vaut -1 (ce nombre n'est évidemment pas un nombre réel). Ce qui permet de prolonger la suite d'inclusion précédente.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

2.3 La droite réelle

On représente les nombres réels par une droite, appelée la *droite réelle*.



2.3.1 Les intervalles

Les *intervalles* sont des notations simples et efficaces pour décrire certains sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Ils sont notamment utilisés lors de résolution d'inéquations (voir page 117).

Dans le tableau ci-dessous, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, chacune des lignes décrit le même sous-ensemble de trois façons équivalentes.

Les huit types d'intervalles		
Sous-ensemble	Intervalle	Représentation graphique
$\{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$	$[a, b]$	
$\{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$	$[a, b[$ ou $[a, b)$	
$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$	$]a, b]$ ou $(a, b]$	
$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	$]a, b[$ ou (a, b)	
$\{x \in \mathbb{R} : x > b\}$	$]b, +\infty[$ ou $(b, +\infty)$	
$\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant b\}$	$[b, +\infty[$ ou $[b, +\infty)$	
$\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$	$]-\infty, a[$ ou $(-\infty, a)$	
$\{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$	$]-\infty, a]$ ou $(-\infty, a]$	

Il est aussi possible d'utiliser l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ pour décrire l'ensemble des nombres réel $\mathbb{R}$, mais dans ce cas cela perd le côté pratique et simple.

2.3.2 Écriture décimale et scientifique

L'*écriture décimale* permet de représenter TOUS les nombres réels d'une façon agréable, mais qui n'est en général PAS EXACTE, ni unique (car $0.\overline{9} = 1$). Cette écriture permet de placer avec une précision relative n'importe quel nombre réel sur la droite réelle. Voici quelques nombres écrits sous forme décimale :

$$2 = 2.0 \qquad \frac{2}{5} = 0.4 \qquad \frac{1}{8} = 0.125 \qquad \frac{2}{3} = 0.\overline{6} \qquad \frac{5}{13} = 0.\overline{384615} \qquad \sqrt{2} = 1.414213\ldots$$

Les nombres rationnels peuvent s'écrire sous forme de nombres décimaux limités (comme $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{8}$) ou périodiques (comme $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{13}$), contrairement aux nombres irrationnels dont le développement décimal est TOUJOURS infini et non-périodique (comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ou aussi $\pi = 3.14159265\ldots$).

La *notation scientifique* demande que l'on note les nombres non nuls comme ceci : $\pm\, x \cdot 10^n$ avec $1 \leqslant x < 10$ ($x \in \mathbb{R}$) et $n \in \mathbb{Z}$. En d'autres termes, on écrit le premier chiffre non nul du nombre suivi d'une virgule et des chiffres suivants, ensuite on calibre le nombre n afin d'avoir le nombre désiré (placement de la virgule). Le nombre de chiffres écrits est appelé *le nombre de chiffres significatifs*. Il est en général fixé à l'avance soit par l'enseignant, soit par le contexte. Afin de raccourcir l'écriture la plupart des calculatrices écrivent :

$$\pm\, x\,\mathtt{E}\,n \quad \text{au lieu de} \quad \pm\, x \cdot 10^n$$

Exemples :

nombre exact	nombre décimal arrondi	notation scientifique	nb de chiffres significatifs
2	2	$2 \cdot 10^0$	1
$\frac{1}{2}$	0.50	$5.0 \cdot 10^{-1}$	2
$-\frac{2}{3}$	-0.66667	$-6.6667 \cdot 10^{-1}$	5
$\frac{40}{3}$	13.33	$1.333 \cdot 10^1$	4
$\sqrt{13}$	3.6056	$3.6056 \cdot 10^0$	5
2^{20}	$1'048'576$	$1.048576 \cdot 10^6$	7
$(-2)^{49}$	$-5629499534\cdots?$	$-5.629499534 \cdot 10^{14}$	10
3^{100}	$5153775207\cdots?$	$5.1537752 \cdot 10^{47}$	8
$\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$	$0.0000000\cdots?$	$1.940325 \cdot 10^{-48}$	7

Comme on le voit la notation scientifique permet de se donner un ordre de grandeur du nombre en question. Plutôt superflue dans les premiers exemples, elle est ESSENTIELLE dans les derniers exemples !

2.4 Opérations sur les nombres réels

Le *calcul arithmétique* consiste à prendre des nombres et exécuter sur ces derniers des opérations.

Le *calcul algébrique* consiste à manipuler des expressions littérales (c'est-à-dire des expressions avec des nombres et des lettres qui représentent des nombres). Le calcul algébrique est pratique et économe : il permet d'éviter le tâtonnement lors de la résolution de problèmes divers et d'appliquer des déductions logiques inspirées du calcul arithmétique afin de résoudre ces problèmes. De plus, si des données sont variables, le calcul algébrique permet d'exprimer les éventuelles solutions en fonction de ces données.

La règle d'or est la suivante.

> La présence de lettres dans un calcul ne change rien à la façon de calculer. Une lettre ne fait que représenter un nombre quelconque !

On peut décrire les différentes règles de calcul par des expressions algébriques. Par exemple, l'addition satisfait la règle de calcul suivante.

$$x + y = y + x$$

Cela signifie que si x et y sont deux nombres réels quelconques (qui pourraient même être égaux), alors le calcul de $x + y$ donne la même réponse que le calcul de $y + x$. On parle de la *commutativité de l'addition*.

2.4.1 Addition, neutre additif, opposé et soustraction

Quand on fait des calculs, il faut définir des priorités, pour cela on met des parenthèses qui indiquent comment les opérations sont groupées ! Afin d'alléger les notations les mathématiciens ont énoncé des règles qui permettent d'écrire moins de parenthèses.

avec toutes les parenthèses	avec le minimum de parenthèses	simplification éventuelle	exemple avec $x = 2$, $y = 3$ et $z = 4$
$(x + (y + z))$	$x + y + z$		$2 + 3 + 4 = 9$
$((x + y) + z)$	$x + y + z$		$2 + 3 + 4 = 9$
Le fait que $x + (y + z) = (x + y) + z$ est appelé *associativité de l'addition*			

Si à un nombre x, on ajoute le nombre 0, on retrouve x (c'est une opération neutre pour l'addition). C'est pour cette raison que le nombre 0 s'appelle *neutre additif*.

$$x + 0 = x$$

Si un nombre y satisfait la relation suivante, on dit que y est *l'opposé de* x, noté $-x$.

$$x + y = 0 \iff y = -x$$

On peut démontrer que l'opposé d'un nombre x est unique.

Lorsqu'à un nombre x on ajoute l'opposé du nombre y, on obtient une notation un peu lourde, qui est $x + (-y)$. C'est pour alléger cette notation que les mathématiciens ont défini une nouvelle opération, appelée *soustraction*, de la manière suivante.

$$x - y \overset{\text{définition}}{=} x + (-y)$$

Sur la calculatrice, les deux symboles «$-$» (pour l'opposé ou pour la soustraction) ne correspondent pas à la même touche ; cela illustre la différence entre ces deux symboles.

L'opposé de $(x+y)$ est noté $-(x+y)$, mais comme on a

$$(x+y)-x-y=0$$

on peut en déduire que $-(x+y)=-x-y$, grâce à l'unicité de l'opposé.

Voici comment on définit les priorités avec la soustraction.

avec toutes les parenthèses	avec le minimum de parenthèses	simplification éventuelle	exemple avec $x=2$, $y=3$ et $z=4$
$(x-(y-z))$	$x-(y-z)$	$x-y+z$	$2-(3-4)=3$
$((x-y)-z)$	$x-y-z$		$2-3-4=-5$
La soustraction n'est donc pas associative			

Attention, la soustraction n'est pas commutative. Par exemple $2-1\neq 1-2$.

Voici comment on définit les priorités avec l'addition et la soustraction.

avec toutes les parenthèses	avec le minimum de parenthèses	simplification éventuelle	exemple avec $x=2$, $y=3$ et $z=4$
$(x+(y-z))$	$x+y-z$		$2+3-4=1$
$((x+y)-z)$	$x+y-z$		$2+3-4=1$
$(x-(y+z))$	$x-(y+z)$	$x-y-z$	$2-(3+4)=-5$
$((x-y)+z)$	$x-y+z$		$2-3+4=3$

2.4.2 Multiplication, neutre multiplicatif, inverse et division

La multiplication est définie à l'aide de l'addition de la façon suivante.

$$x\cdot y=\underbrace{y+y+\cdots+y}_{\text{on voit } x \text{ fois le nombre } y}$$

Illustrons cette définition sur un exemple : $7\cdot 5=5+5+5+5+5+5+5$. Le mot «fois» est celui de la langue française, puisque dans l'addition, on voit 7 fois le nombre 5.

On peut ainsi déduire les règles de *distributivité de la multiplication sur l'addition.*

$$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z \quad \text{et} \quad (x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$$

Illustrons ces règles ainsi :

$$7\cdot(2+3)=7\cdot 2+7\cdot 3 \quad \text{et} \quad (3+4)\cdot 5=3\cdot 5+4\cdot 5$$

Voici comment on définit les priorités avec la multiplication.

avec toutes les parenthèses	avec le minimum de parenthèses	simplification éventuelle	exemple avec $x=2$, $y=3$ et $z=4$
$(x\cdot(y\cdot z))$	$x\cdot y\cdot z$		$2\cdot 3\cdot 4=24$
$((x\cdot y)\cdot z)$	$x\cdot y\cdot z$		$2\cdot 3\cdot 4=24$
Le fait que $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ est appelé *associativité de la multiplication*			

De plus, comme l'addition, la multiplication est commutative. Cela signifie que $x\cdot y=y\cdot x$.

Voici comment on définit les priorités avec l'addition et la multiplication.

avec toutes les parenthèses	avec le minimum de parenthèses	simplification éventuelle	exemple avec $x=2$, $y=3$ et $z=5$
$(x+(y\cdot z))$	$x+y\cdot z$		$2+3\cdot 5=17$
$((x+y)\cdot z))$	$(x+y)\cdot z$	$x\cdot z+y\cdot z$	$(2+3)\cdot 5=25$
pour ne pas confondre, on doit laisser les parenthèses à la deuxième ligne			
$(x\cdot(y+z))$	$x\cdot(y+z)$	$x\cdot y+x\cdot z$	$2\cdot(3+5)=16$
$((x\cdot y)+z))$	$x\cdot y+z$		$2\cdot 3+5=11$
pour ne pas confondre, on doit laisser les parenthèses à la première ligne			

Si on a une soustraction qui se combine à une multiplication, on peut simplement regarder le tableau de priorité de l'addition et de la multiplication, et remplacer l'addition par la soustraction.

De la définition, on a une évidence : 1 fois x vaut x (c'est une opération neutre pour la multiplication). C'est pour cette raison que le nombre 1 s'appelle *neutre multiplicatif*.

$$1\cdot x=x$$

Si un nombre y satisfait la relation suivante, on dit que y est *l'inverse de* x, noté x^{-1} (certaines calculatrices utilisent plutôt la notation $\frac{1}{x}$ pour l'inverse de x (cela dépend du fabriquant)). On remarque l'utilisation du symbole $-$ de l'opposé dans cette notation (car l'inverse est à la multiplication ce que l'opposé est à l'addition).

$$x\cdot y=1 \iff y=x^{-1}$$

On peut démontrer que l'inverse d'un nombre x est unique.

Lorsqu'un nombre x est multiplié par l'inverse du nombre y, on obtient une notation un peu lourde, qui est $x\cdot y^{-1}$. C'est pour alléger cette notation que les mathématiciens ont défini une nouvelle opération, appelée *division*, de la manière suivante.

$$x\div y \overset{\text{définition}}{=} x\cdot y^{-1}$$

Avec l'autre notation, cette définition est compatible avec la définition du produit

$$\frac{x}{y}=x\cdot\frac{1}{y}$$

Sur la calculatrice, on a deux symboles différents qui ne correspondent pas à la même touche : «x^{-1}» ou «$\frac{1}{x}$» pour l'inverse de x ; «$\div$» pour la division de deux nombres.

L'inverse de $(x\cdot y)$ est noté $(x\cdot y)^{-1}$, mais comme on a

$$(x\cdot y)\div x\div y=1$$

on peut en déduire que $(x\cdot y)^{-1}=x^{-1}\cdot y^{-1}$, grâce à l'unicité de l'inverse.
Avec l'autre notation, cela s'écrit $\frac{1}{x\cdot y}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}$.

Voici comment on définit les priorités avec la division.

avec toutes les parenthèses	avec le minimum de parenthèses	simplification éventuelle	exemple avec $x=12$, $y=3$ et $z=4$
$(x\div(y\div z))$	$x\div(y\div z)$	$x\div y\cdot z$	$12\div(3\div 4)=16$
$((x\div y)\div z)$	$x\div y\div z$		$12\div 3\div 4=1$
La division n'est donc pas associative			

Attention, la division n'est pas commutative. Par exemple $3\div 2\neq 2\div 3$.

Voici comment on définit les priorités avec la multiplication et la division.

avec toutes les parenthèses	avec le minimum de parenthèses	simplification éventuelle	exemple avec $x = 12$, $y = 3$ et $z = 4$
$(x \cdot (y \div z))$	$x \cdot y \div z$		$12 \cdot 3 \div 4 = 9$
$((x \cdot y) \div z)$	$x \cdot y \div z$		$12 \cdot 3 \div 4 = 9$
$(x \div (y \cdot z))$	$x \div (y \cdot z)$	$x \div y \div z$	$12 \div (3 \cdot 4) = 1$
$((x \div y) \cdot z)$	$x \div y \cdot z$		$12 \div 3 \cdot 4 = 16$

Si on a une addition (ou une soustraction) qui se combine à une division, on peut simplement regarder le tableau de priorité de l'addition et de la multiplication et remplacer la multiplication par la division (et l'addition par la soustraction).

2.4.3 Règles concernant les fractions

L'amplification, la simplification et l'irréductibilité d'une fraction

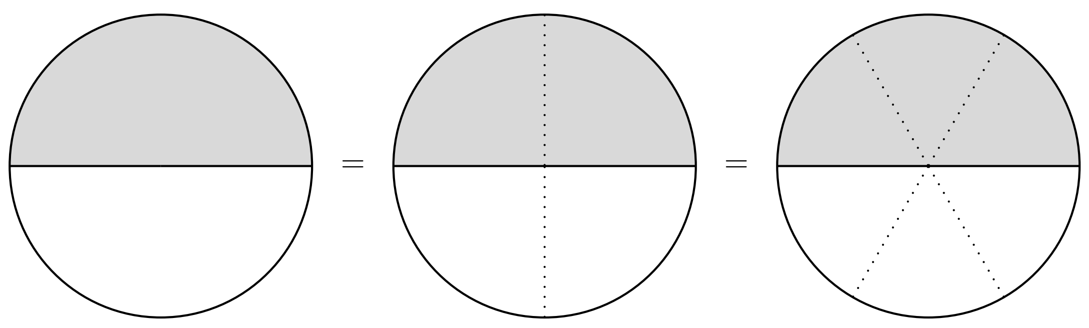
On a la règle suivante.

$$\frac{a}{m} = \frac{a \cdot n}{m \cdot n}$$

En lisant de gauche à droite, on *amplifie* la fraction. En lisant de droite à gauche, on *simplifie* la fraction. On dit qu'une fraction est *irréductible* si on ne peut pas la simplifier.

Voici 3 fractions qui représentent le nombre 0.5. Seule celle de gauche est irréductible.

$$\frac{1}{2} \quad = \quad \frac{2}{4} \quad = \quad \frac{3}{6}$$



Remarque fondamentale. Un même nombre peut être représenté par plusieurs fractions, mais par une seule fraction irréductible.

Utilité du pgcd (plus grand commun diviseur)

On a

$$\frac{35}{28} = \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad \frac{65}{52} = \frac{5}{4}$$

Pour simplifier une fraction, il est utile de savoir calculer le plus grand commun diviseur (aussi appelé le plus grand diviseur commun) du numérateur a et du dénominateur b, que l'on note $\text{pgcd}(a, b)$.

Ici, on a $\text{pgcd}(35, 28) = \text{pgcd}(5 \cdot 7, 4 \cdot 7) = 7$ et $\text{pgcd}(65, 52) = \text{pgcd}(5 \cdot 13, 4 \cdot 13) = 13$. On simplifie les deux fractions par leur pgcd respectif pour arriver à $\frac{5}{4}$.

L'addition et la soustraction de fractions

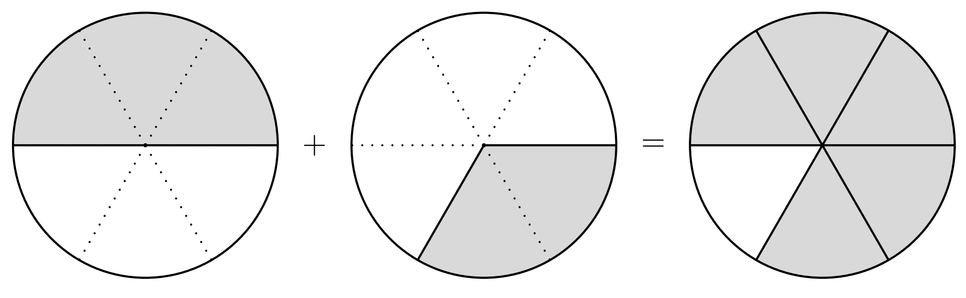
Lorsqu'on désire additionner ou soustraire deux fractions, il faut respecter le principe

> Avant d'additionner ou de soustraire deux fractions, on doit s'assurer qu'elles soient au même dénominateur ! Si ce n'est pas le cas, alors on les met au même dénominateur en les amplifiant.

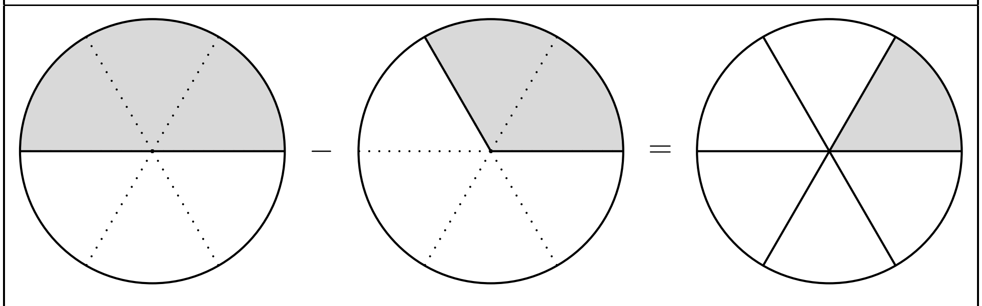
On a ensuite les règles suivantes : $\boxed{\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}=\dfrac{a+b}{c}}$ $\boxed{\dfrac{a}{c}-\dfrac{b}{c}=\dfrac{a-b}{c}}$

Ces règles s'illustrent parfaitement sur l'exemple suivant.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \overset{\text{amplification}}{=} \frac{3}{6}+\frac{2}{6} \overset{\text{addition}}{=} \frac{5}{6}$$



$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3} \overset{\text{amplification}}{=} \frac{3}{6}-\frac{2}{6} \overset{\text{soustraction}}{=} \frac{1}{6}$$



Le point du vue du calcul algébrique

Même si les calculs peuvent paraître plus abstraits, le principe reste exactement le même, comme on le voit sur les deux exemples suivants :

a) $$\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x-2} \overset{\text{ampl.}}{=} \frac{3(x-2)}{(x+1)(x-2)}-\frac{2(x+1)}{(x-2)(x+1)} \overset{\text{soustr.}}{=} \frac{3(x-2)-2(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$$\overset{\text{simpl.}}{=} \frac{3x-6-(2x+2)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x-8}{(x+1)(x-2)}$$

b) $$\frac{3}{2(x+1)}+\frac{2}{(x+1)^2} \overset{\text{ampl.}}{=} \frac{3(x+1)}{2(x+1)^2}+\frac{4}{2(x+1)^2} \overset{\text{add.}}{=} \frac{3(x+1)+4}{2(x+1)^2} = \frac{3x+7}{2(x+1)^2}$$

Utilité du ppcm (plus petit commun multiple)

Pour mettre des fractions au même dénominateur, on utilise le plus petit commun multiple (aussi appelé le plus petit multiple commun), noté ppcm.

Exemple de calcul : $\text{ppcm}(12, 15) = \text{ppcm}(3\cdot 4, 3\cdot 5) = 3\cdot 4\cdot 5 = 60$.

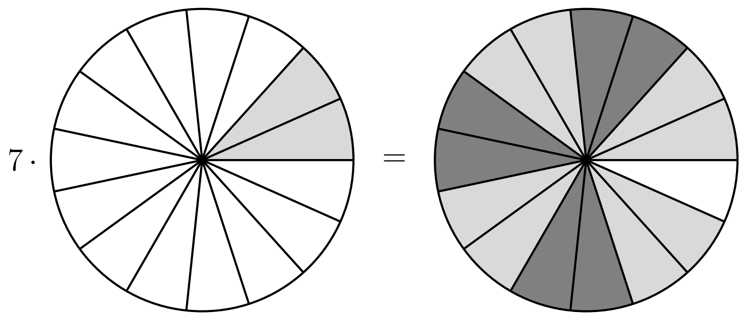
La multiplication de fractions

On va établir deux règles qui nous permettrons de déduire la règle de la multiplication de deux fractions.

Règle 1	**Cas particulier**	**Moralité du cas particulier**
$a \cdot \dfrac{c}{b} = \dfrac{a \cdot c}{b}$	$a \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{b}$	multiplier a par $\frac{1}{b}$ revient à diviser a par b

Pour mieux comprendre la règle 1, on peut contempler la situation ci-dessous.

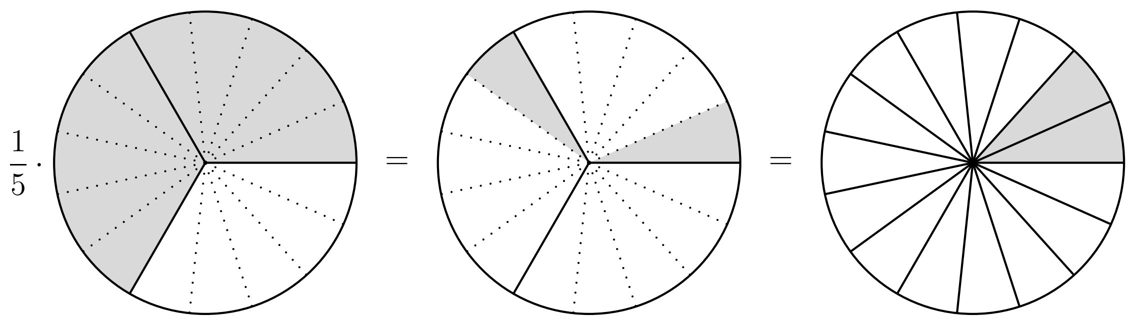
$$7 \cdot \frac{2}{15} = \frac{7 \cdot 2}{15} = \frac{14}{15}$$



De la moralité ci-dessus, on en déduit la **règle 2** : $\boxed{\dfrac{1}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{c}{b \cdot d}}$ car multiplier $\frac{c}{d}$ par $\frac{1}{b}$ revient à diviser $\frac{c}{d}$ par b

Pour mieux comprendre la règle 2, on peut contempler la situation ci-dessous.

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$$



On peut maintenant en déduire la **règle de la multiplication** :

$$\boxed{\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}}$$

En effet, on utilise les règles 1 et 2 pour y arriver :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \overset{\text{R1}}{=} \left(a \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{c}{d} = a \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \overset{\text{R2}}{=} a \cdot \frac{c}{b \cdot d} \overset{\text{R1}}{=} \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Remarque. Les règles 1 et 2 se retrouvent comme cas particuliers de la règle de la multiplication. Ainsi, parmi les trois règles ci-dessus, seule la règle de la multiplication mérite d'être apprise.

La division par une fraction

Commençons par montrer que l'inverse d'une fraction est encore une fraction. On appellera cette formule, la **règle d'inversion** :

$$\boxed{\frac{1}{\frac{d}{c}} = \frac{c}{d}}$$

En effet, grâce à la règle de la multiplication, on a :

$$\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c} = \frac{c \cdot d}{d \cdot c} = 1$$

Or, en divisant le membre de gauche et le membre de droite de l'égalité ci-dessus par $\frac{d}{c}$, on trouve l'égalité suivante.

$$\frac{c}{d} = \frac{1}{\frac{d}{c}}$$

On peut maintenant démontrer la **règle de la division** :

$$\boxed{\boxed{\frac{a}{\frac{d}{c}} = a \cdot \frac{c}{d}}}$$

En effet, on utilise la règle 1 de la page précédente et la règle d'inversion (RI) :

$$\frac{a}{\frac{d}{c}} \overset{\text{R1}}{=} a \cdot \frac{1}{\frac{d}{c}} \overset{\text{RI}}{=} a \cdot \frac{c}{d}$$

Exemple de calculs

a) $\dfrac{2}{\frac{5}{11}} = 2 \cdot \dfrac{11}{5} = \dfrac{22}{5}$ *b)* $\dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{5}{11}} = \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{11}{5} = \dfrac{33}{35}$

c) $$\frac{\dfrac{x+1}{x+3}}{\dfrac{x-2}{x+5}} = \frac{x+1}{x+3} \cdot \frac{x+5}{x-2} = \frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)(x-2)}$$

d) $$\overbrace{\frac{\dfrac{x+1}{x+3}}{1 - \dfrac{x-2}{x+5}}}^{\substack{\text{On ne peut appliquer la règle de la division que si on a une fraction au dénominateur, il} \\ \text{faut donc écrire la soustraction du dénominateur comme une fraction. Par conséquent,} \\ \text{on commence par faire cette soustraction en amplifiant les fractions.}}} = \frac{\dfrac{x+1}{x+3}}{\dfrac{x+5}{x+5} - \dfrac{x-2}{x+5}} = \frac{\dfrac{x+1}{x+3}}{\dfrac{x+5-(x-2)}{x+5}} = \frac{\dfrac{x+1}{x+3}}{\dfrac{7}{x+5}}$$

$$= \frac{x+1}{x+3} \cdot \frac{x+5}{7} = \frac{(x+1)(x+5)}{7(x+3)}$$

2.4.4 Puissances, bases et exposants

Afin de se rendre la vie plus agréable, les mathématiciens ont inventé une notation qui permet de simplifier l'écriture.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{a \text{ apparaît } n \text{ fois}} = a^n$$

Quand on lit a^n, on dit «a élevé à la *puissance* n» ou plus rapidement «a puissance n». Le symbole n est appelé la *puissance* (ou *l'exposant*) et le symbole a est appelé la *base*. On en déduit immédiatement les règles suivantes :

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{a \text{ apparaît } m \text{ fois}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{a \text{ apparaît } n \text{ fois}}}_{a \text{ apparaît } m+n \text{ fois}} = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{a^m \text{ apparaît } n \text{ fois}} = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{a \text{ apparaît } m \text{ fois}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{a \text{ apparaît } m \text{ fois}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{a \text{ apparaît } m \text{ fois}}}_{a \text{ apparaît } m \cdot n \text{ fois}} = a^{m \cdot n}$$

On a donc établi les formules suivantes :

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}\ \boxed{(a^m)^n = a^{mn}} \quad \text{pour tout } m,\, n \geqslant 1 \text{ et } a \in \mathbb{R}$$

2.4.5 Les identités remarquables

Les *identités remarquables* sont des formules qu'il est bon de reconnaître en toute circonstance. Les voici :

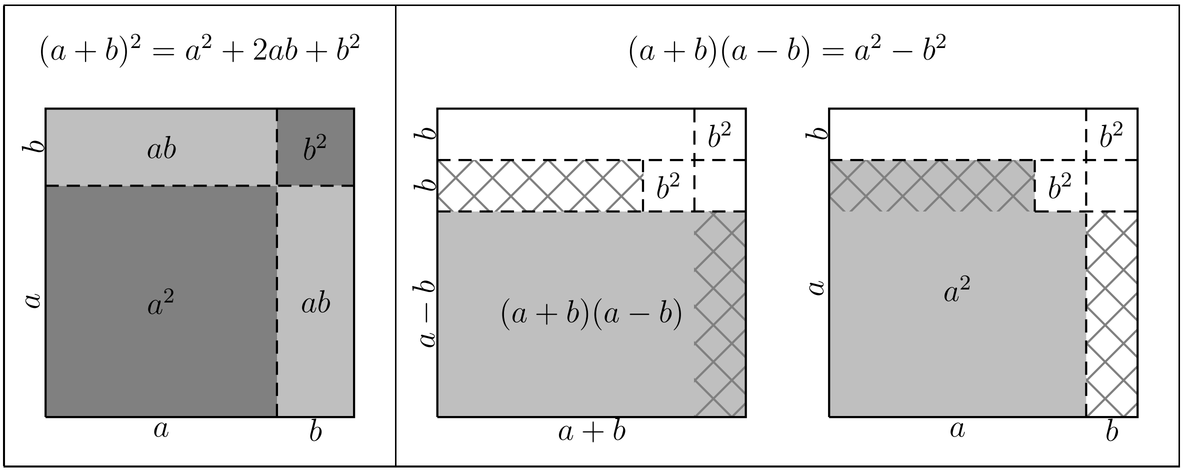
$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2} \qquad \boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$$

Ces identités se lisent dans les DEUX sens (comme toute égalité). Il est facile de les retrouver en développant le terme de droite. Par contre, il est important de bien les connaître afin de pouvoir les reconnaître lorsque seul le terme de gauche est présent.

L'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ montre que l'on doit faire extrêmement attention lorsqu'on élève une somme au carré. D'où le slogan :

LORSQU'ON ÉLÈVE UNE SOMME AU CARRÉ, DES DOUBLES PRODUITS APPARAISSENT

Vision géométrique



2.4.6 Les racines n-ièmes

Il peut arriver qu'on ait besoin de trouver un nombre x qui élevé à la puissance n donne un nombre a. Autrement dit, on cherche le ou les nombres réels x (s'ils existent) qui satisfont la condition

$$x^n = a$$

Ce ou ces nombres, lorsqu'ils existent, sont appelés *racines n-ièmes de a.*

On est ainsi face à deux soucis mathématiques : l'existence et l'unicité de ces nombres x. On distingue ainsi plusieurs cas :

1. Si a est nul.

   Alors[1] seul 0 satisfait la condition $x^n = 0$. Ainsi 0 est la seule racine n-ième de 0. On note $x = \sqrt[n]{0} = 0$.

2. Si n est impair (et si a est non nul).

   Alors[1] il existe un seul nombre x réel qui satisfait la condition $x^n = a$. Comme il est unique, on parle de LA racine n-ième de a que l'on note $x = \sqrt[n]{a}$.

3. Si n est pair et que a est positif.

   Alors[1] il existe deux nombres qui satisfont la condition $x^n = a$: un de ces nombres est positif, l'autre est négatif. On définit LA racine n-ième de a comme étant la solution POSITIVE que l'on note $\sqrt[n]{a}$, l'autre solution est ainsi notée $-\sqrt[n]{a}$.

4. Si n est pair et que a est négatif.

   Alors[1] aucun nombre ne satisfait la condition $x^n = a$. Dans ce cas $\sqrt[n]{a}$ n'existe pas.

Exemples

1. $\sqrt{0} = 0$ (car $0^2 = 0$).
2. $\sqrt[3]{8} = 2$ (car 2 est solution de $x^3 = 8$ puisque $2^3 = 8$).
   $\sqrt[3]{-8} = -2$ (car -2 est solution de $x^3 = -8$ puisque $(-2)^3 = -8$).
3. $\sqrt{4} = 2$ (car 2 et -2 sont les deux solutions de $x^2 = 4$ et 2 est la solution positive).
4. $\sqrt{-1}$ n'a pas de sens parce qu'il n'existe pas de nombre réel x qui satisfait $x^2 = -1$.

2.4.7 Extension de la notion d'exposants

Pour l'instant, on ne sait calculer a^n que lorsque $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On va étendre ce calcul pour toutes les puissances réelles ($n \in \mathbb{R}$), en conservant les deux formules suivantes.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(a^m)^n = a^{mn}$	pour tout m, $n \geqslant 1$ et $a \in \mathbb{R}$

On va donc définir a^q pour $q \in \mathbb{Q}$ à l'aide des règles ci-contre.

$a^0 = 1$	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$a^{n-m} = \dfrac{a^n}{a^m}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a}^{\,m} = \sqrt[n]{a^m}$ si $\frac{m}{n}$ est réduite et si chacun de ces termes existe

1. Ces affirmations sont évidentes pour le lecteur qui sait résoudre graphiquement une équation et esquisser les graphes des fonctions x^n (il en sera d'autant plus à l'aise s'il utilise des arguments sur la parité des fonction x^n).

Extension à la puissance nulle

On veut définir a^0 en conservant la formule $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. En posant $m = 0$ dans cette formule, elle devient $a^0 \cdot a^n = a^n$. L'implication ci-dessous nous montre que $a^0 = 1$.

$$a^0 \cdot a^n = a^n \overset{:a^n}{\Longrightarrow} a^0 = 1$$

Extension aux puissances négatives

Maintenant que a^0 est défini, on peut définir a^{-n} (pour $n \in \mathbb{N}$) en conservant la formule $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. En posant $m = -n$ dans cette formule, elle devient $a^{-n} \cdot a^n = a^0 = 1$. L'implication ci-dessous nous montre que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

$$a^{-n} \cdot a^n = 1 \overset{:a^n}{\Longrightarrow} a^{-n} = \tfrac{1}{a^n}$$

Extension aux puissances rationnelles (première partie)

Commençons par définir $a^{\frac{1}{n}}$ en conservant la formule $(a^m)^n = a^{mn}$. En posant $m = \frac{1}{n}$ dans cette formule, elle devient $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$. Ainsi, $x = a^{\frac{1}{n}}$ satisfait la condition $x^n = a$, tout comme c'est le cas pour $x = \sqrt[n]{a}$ (voir page 27). On va donc définir $a^{\frac{1}{n}}$ comme étant LA racine n-ième de a, c'est-à-dire $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. Rappelons que cette racine n-ième n'existe pas lorsque $a < 0$ et que n est pair.

Extension aux puissances rationnelles (deuxième partie)

Si $\frac{m}{n}$ est une fraction irréductible, on définit $a^{\frac{m}{n}}$ en conservant la formule $(a^m)^n = a^{mn}$. En utilisant cette formule de droite à gauche, on obtient :

$$a^{\frac{m}{n}} \;=\; a^{\frac{1}{n}\cdot m} \;\overset{\text{formule}}{=}\; (a^{\frac{1}{n}})^m \;\overset{\text{1ère partie}}{=}\; \sqrt[n]{a}^{\,m}$$

Remarquons que l'on a $\sqrt[n]{a}^{\,m} = \sqrt[n]{a^m}$ lorsque chacune de ces expressions existe. En effet

$$a^{\frac{m}{n}} \;=\; a^{m\cdot\frac{1}{n}} \;\overset{\text{formule}}{=}\; (a^m)^{\frac{1}{n}} \;\overset{\text{1ère partie}}{=}\; \sqrt[n]{a^m}$$

Dans le cas d'une fraction irréductible, les deux écritures $\sqrt[n]{a}^{\,m}$ ou $\sqrt[n]{a^m}$ existent (ou n'existent pas) simultanément.

Remarquons que si $\sqrt{-1}^{\,2}$ n'existe pas, $\sqrt{(-1)^2}$ vaut 1, et n'est donc pas égal à $(-1)^{\frac{2}{2}}$ qui devrait valoir $(-1)^1 = -1$. Ainsi, si une puissance est sous forme de fraction réductible, il faut d'abord la réduire avant d'appliquer les formules.

*Extension aux puissances irrationnelles

Ce passage est extrêmement délicat car on n'a pas défini les nombres réels de manière formelle[2]. On va donc se contenter d'expliquer comment trouver une bonne approximation de a^x avec $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pour cela, on prend une fraction q qui est proche du nombre x et on calcule a^q. Ce n'est pas facile, mais on peut montrer que plus la fraction q est proche de x, plus a^q est proche de a^x.

Par exemple, pour calculer $3^{\sqrt{2}}$, on peut estimer $\sqrt{2}$ par la fraction $\frac{22'619'537}{15'994'428}$ (cette approximation permet de *tromper* les calculatrices les plus avancées) et on calcule $3^{\frac{22619537}{15994428}}$. Cela revient à calculer la racine 15994428-ième de $3^{22619537}$. On trouve ainsi l'approximation à quatre chiffres significatifs $3^{\sqrt{2}} \cong 4.729$.

2. On peut définir les nombres réels comme espace quotient où la relation d'équivalence utilise les suites de Cauchy.

2.4.8 Les logarithmes

Développés par l'Écossais John Napier au XVII^{e} siècle, les logarithmes permettent de trouver une puissance x à laquelle on élève une base a pour trouver un nombre b. Autrement dit, on cherche le ou les nombres réels x (s'ils existent) qui satisfont la condition

$$a^x = b$$

Le mot logarithme est dérivé des mots grecs *logos* (parole, discours) et *arithmos* (nombre).

On peut montrer que si on évite les cas particuliers inintéressants $a = 0$ ou $a = \pm 1$, alors, s'il existe, le nombre x qui satisfait la condition $a^x = b$ est unique. On peut ainsi lui donner un nom : il s'agit du *logarithme en base a de b* que l'on note $x = \log_a(b)$.

On a ainsi l'équivalence : $\boxed{a^x = b \iff x = \log_a(b)}$ (pour autant que $\log_a(b)$ existe)

D'où le *slogan du logarithme* (c'est le discours sur les nombres qu'il faut tenir) :

$\boxed{\log_a(b) \text{ est la puissance à laquelle on élève la base } a \text{ pour obtenir le nombre } b}$

Sur la calculatrice, on trouve la touche `LOG`, qui correspond au logarithme en base 10. La formule de changement de base suivante est utile pour calculer des logarithmes.

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(a)}}$$

Exemples

a) $\log_2(8) = 3$ (car $2^3 = 8$).

b) $\log_3(1) = 0$ (car $3^0 = 1$).

c) $\log_4(\frac{1}{4}) = -1$ (car $4^{-1} = \frac{1}{4}$).

d) $\log_5(\frac{1}{25}) = -2$ (car $5^{-2} = \frac{1}{25}$).

e) On peut estimer que $\log_2(20)$ se situe entre 4 et 5 (car $2^4 = 16$ et $2^5 = 32$), mais si on veut une valeur plus précise, on peut utiliser le changement de base ci-dessus et la calculatrice. On trouve (à 5 chiffres significatifs) :
$$\log_2(20) = \frac{\log_{10}(20)}{\log_{10}(2)} \cong 4.3219$$

f) $\log_{-2}(-8) = 3$ (car $(-2)^3 = -8$), pourtant $\log_{-2}(8)$ et $\log_2(-8)$ n'existent pas.

2.4.9 Analogies entre les diverses opérations

Voici un résumé des formules importantes. Même si ces formules paraissent analogues, elles sont néanmoins différentes. Il est important de NE PAS CONFONDRE CES FORMULES ! Les formules concernant les logarithmes seront établies à la fin de la première année.

Multiplication	Puissance	Logarithme
$\underbrace{a + a + \ldots + a}_{a \text{ apparaît } n \text{ fois}} = a \cdot n$	$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{a \text{ apparaît } n \text{ fois}} = a^n$	$a^x = b \iff x = \log_a(b)$
$a \cdot m + a \cdot n = a \cdot (m + n)$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\log_a(m) + \log_a(n) = \log_a(m \cdot n)$
$a \cdot m - a \cdot n = a \cdot (m - n)$	$a^m / a^n = a^{m-n}$	$\log_a(m) - \log_a(n) = \log_a(m/n)$
$(a \cdot m) \cdot n = a \cdot (m \cdot n)$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\log_a(m^n) = n \cdot \log_a(m)$

2.4.10 Règle des signes, valeur absolue et distance

Règles des signes

Lorsqu'on a une multiplication ou une division entre deux nombres, la *règle des signes* s'applique.

nombre	multiplication ou division	nombre	nombre	phrase mnémotechnique
$+$		$+$	$+$	les amis de mes amis sont mes amis
$+$		$-$	$-$	les amis de mes ennemis sont mes ennemis
$-$		$+$	$-$	les ennemis de mes amis sont mes ennemis
$-$		$-$	$+$	les ennemis de mes ennemis sont mes amis

En Allemand, les négations suivent une règle semblable.

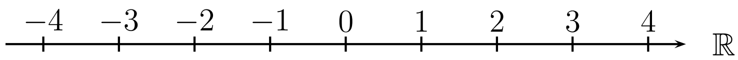
Valeur absolue et distance

La *valeur absolue*, notée $|a|$, est définie comme suit.

$$\boxed{|a| = \sqrt{a^2}} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}}$$

Rappel : si a est négatif, alors $-a$ est positif.

La valeur absolue d'un nombre permet de mesurer la *distance* sur la droite réelle de ce nombre par rapport à l'origine, qui est le nombre 0.



Par exemple, les valeurs absolues de -3 et de 3 sont les mêmes, car ces nombres sont à distance 3 de 0. Autrement dit : $|-3| = |3| = 3$.

Elle permet aussi de calculer la distance entre deux nombres x et y, qui est $|x - y|$.
Par exemple, la distance sur l'axe réel entre -2 et 3 vaut

$$|(-2) - 3| = 5$$

2.4.11 Un peu de vocabulaire : simplifier, développer, factoriser

Définitions

Il y a tout de même quelques termes techniques qu'il faut connaître comme :

Simplifier S'arranger pour que l'expression littérale soit la plus simple possible.
Par exemple, on simplifie l'expression $x + x + x$ pour obtenir $3x$.

Développer S'arranger pour remplacer un produit par une somme.
Par exemple, on écrit le produit $x(y + 1)$ en la somme $xy + x$.

Factoriser C'est l'opération inverse de développer. On s'arrange pour avoir un produit à la place d'une somme.
Par exemple, on écrit la somme $xy + x$ en le produit $x(y + 1)$.

Chapitre 3

Sommes, séries arithmétiques et géométriques

3.1 Le symbole somme

Ce symbole permet d'écrire de grandes sommes sans utiliser les points de suspension. Par exemple, on écrit

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

Cela permet d'avoir des expressions plus précises (il pourrait y avoir n'importe quoi à la place des points de suspension) et plus condensées.

Soit n_1, n_2 deux nombres entiers et des nombres réels a_k $(n_1 \leqslant k \leqslant n_2)$, on note

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} a_k = a_{n_1} + a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2-1} + a_{n_2}$$

Dans cette expression mathématique, l'*indice* k *de la somme* permet de décrire comment on additionne les éléments. Le nombre n_1 est la valeur de départ de l'indice et le nombre n_2 celle d'arrivée. L'indice k prend toutes les valeurs entières entre n_1 et n_2 y compris.

Lorsqu'on développe une somme, son indice disparaît !

Propriétés du symbole somme

Soit n_1, n_2, n_3 trois nombres entiers tels que $n_1 \leqslant n_2 < n_3$, des nombres réels a_k, b_k $(n_1 \leqslant k \leqslant n_3)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il y a trois propriétés fondamentales :

Propriétés	Justification rapide
$(\mathcal{P}_1)$ $\displaystyle\sum_{k=n_1}^{n_2} a_k + \sum_{k=n_2+1}^{n_3} a_k = \sum_{k=n_1}^{n_3} a_k$	L'addition de deux sommes est encore une somme.
$(\mathcal{P}_2)$ $\displaystyle\sum_{k=n_1}^{n_2} a_k + \sum_{k=n_1}^{n_2} b_k = \sum_{k=n_1}^{n_2} \Big(a_k + b_k\Big)$	On peut permuter les éléments d'une somme : $a + b = b + a$
$(\mathcal{P}_3)$ $\displaystyle\lambda \sum_{k=n_1}^{n_2} a_k = \sum_{k=n_1}^{n_2} \Big(\lambda a_k\Big)$	On peut distribuer la multiplication sur l'addition : $a(b + c) = ab + ac$

3.2 Séries arithmétiques

Une histoire sur Gauss (célèbre mathématicien allemand, 1777-1855)

On raconte que lorsque Gauss était élève, un de ses professeurs de mathématiques lui a infligé comme punition le calcul de la somme $1+2+3+4+5+\cdots+1000$. Gauss à trouvé la réponse en quelques minutes grâce à l'astuce décrite ci-dessous.

$$\begin{array}{rrcccccccccccccc}
 & S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 998 & + & 999 & + & 1000 \\
+ & S & = & 1000 & + & 999 & + & 998 & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
 & 2S & = & 1001 & + & 1001 & + & 1001 & + & \cdots & + & 1001 & + & 1001 & + & 1001
\end{array}$$

Puisque le terme 1001 apparaît 1000 fois dans la somme $2S$, on obtient :

$$2S = 1000 \cdot 1001 \iff S = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500'500$$

Définition

Une *série arithmétique* est une somme finie de termes

$$a_1 \overset{\overset{+r}{\curvearrowright}}{+} a_2 \overset{\overset{+r}{\curvearrowright}}{+} a_3 \overset{\overset{+r}{\curvearrowright}}{+} \cdots \overset{\overset{+r}{\curvearrowright}}{+} a_n$$

pour laquelle il existe un nombre r, $r \neq 0$, appelé *raison*, qui satisfait $\boxed{a_{k+1} = a_k + r}$.

Exemples

a) $1 \overset{\overset{+1}{\curvearrowright}}{+} 2 \overset{\overset{+1}{\curvearrowright}}{+} 3 \overset{\overset{+1}{\curvearrowright}}{+} 4 \overset{\overset{+1}{\curvearrowright}}{+} 5 \overset{\overset{+1}{\curvearrowright}}{+} 6 \overset{\overset{+1}{\curvearrowright}}{+} 7 \overset{\overset{+1}{\curvearrowright}}{+} 8 \overset{\overset{+1}{\curvearrowright}}{+} 9 \overset{\overset{+1}{\curvearrowright}}{+} 10$

b) $1 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 3 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 5 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 7 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 9 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 11 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 13 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 15 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 17 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 19$

c) $2 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 4 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 6 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 8 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 10 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 12 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 14 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 16 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 18 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 20 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 22 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 24 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 26 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 28 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 30$

d) $120 \overset{\overset{-5}{\curvearrowright}}{+} 115 \overset{\overset{-5}{\curvearrowright}}{+} 110 \overset{\overset{-5}{\curvearrowright}}{+} 105 \overset{\overset{-5}{\curvearrowright}}{+} 100 \overset{\overset{-5}{\curvearrowright}}{+} 95 \overset{\overset{-5}{\curvearrowright}}{+} 90 \overset{\overset{-5}{\curvearrowright}}{+} 85 \overset{\overset{-5}{\curvearrowright}}{+} 80 \overset{\overset{-5}{\curvearrowright}}{+} 75 \overset{\overset{-5}{\curvearrowright}}{+} 70 \overset{\overset{-5}{\curvearrowright}}{+} 65$

Écriture avec le symbole somme

Dans le cas d'une série arithmétique, on a :

$$a_1 \overset{\overset{+r}{\curvearrowright}}{+} a_2 \overset{\overset{+r}{\curvearrowright}}{+} a_3 \overset{\overset{+r}{\curvearrowright}}{+} \cdots \overset{\overset{+r}{\curvearrowright}}{+} a_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_1 + k \cdot r)$$

Théorème

Si $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ est une série arithmétique de raison r. Alors, on a :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Autrement dit, la valeur de la série est égale au nombre de termes de la somme multiplié par la moyenne du premier terme et du dernier terme.

Preuve

On note $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$. On peut utiliser l'astuce inventée par Gauss dont on a parlé au début de cette section. Cette astuce consiste à écrire la somme S une fois normalement et une fois inversée, puis à examiner la somme verticale (voir tableau ci-dessous) :

$$\begin{array}{rrcccccccccccc} & S & = & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & \cdots & + & a_{n-1} & + & a_n \\ + & S & = & a_n & + & a_{n-1} & + & a_{n-2} & + & \cdots & + & a_2 & + & a_1 \\ \hline & 2S & = & a_1+a_n & + & a_2+a_{n-1} & + & a_3+a_{n-2} & + & \cdots & + & a_{n-1}+a_2 & + & a_n+a_1 \end{array}$$

Or, comme S est une série arithmétique, on trouve grâce à la propriété $\boxed{a_{k+1} = a_k + r}$ que :

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_{n-1} + a_2 = a_n + a_1$$

> En effet, comme $a_2 = a_1 + r$ et que $a_{n-1} = a_n - r$ (car $a_n = a_{n-1} + r$), on a bien :
> $$a_2 + a_{n-1} = a_1 + r + a_n - r = a_1 + a_n$$
> De même, puisque $a_3 = a_2 + r$ et que $a_{n-2} = a_{n-1} - r$ (car $a_{n-1} = a_{n-2} + r$), on a aussi :
> $$a_3 + a_{n-2} = a_2 + r + a_{n-1} - r = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$$
> et ainsi de suite...

Donc :

$$2S = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ fois}} = n \cdot (a_1 + a_n)$$

Ainsi :

$$S = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

□

Application du théorème aux exemples précédents

a) $\underbrace{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}_{10 \text{ termes}} = 10 \cdot \dfrac{1+10}{2} = 55$

b) $\underbrace{1+3+5+7+9+11+13+15+17+19}_{10 \text{ termes}} = 10 \cdot \dfrac{1+19}{2} = 100$

c) $\underbrace{2+4+6+8+10+12+14+16+18+20+22+24+26+28+30}_{15 \text{ termes}} = 15 \cdot \dfrac{2+30}{2} = 240$

d) $\underbrace{120+115+110+105+100+95+90+85+80+75+70+65}_{12 \text{ termes}} = 12 \cdot \dfrac{120+65}{2} = 1'110$

3.3 Séries géométriques

Les rentes

Un généreux donateur a décidé de verser 100 CHF sur votre compte en banque tous les premiers janvier de 2001 à 2050. En supposant que le taux d'intérêts de 1% est constant jusqu'en 2050 et que personne n'a retiré d'argent sur ce compte, on peut déterminer le capital en date du premier janvier 2050 en capitalisant chacun des versements à l'aide de la formule de capitalisation des intérêts composés $C_n = C_0(1+i)^n$ (voir page 36).

$$\begin{aligned} C_{2050} &= \underbrace{\underbrace{100}_{\substack{\text{versement}\\ \text{daté du}\\ \text{01.2050}}} + \underbrace{100(1.01)}_{\substack{\text{versement}\\ \text{daté du}\\ \text{01.2049}}} + \underbrace{100(1.01)^2}_{\substack{\text{versement}\\ \text{daté du}\\ \text{01.2048}}} + \underbrace{100(1.01)^3}_{\substack{\text{versement}\\ \text{daté du}\\ \text{01.2047}}} + \cdots + \underbrace{100(1.01)^{48}}_{\substack{\text{versement}\\ \text{daté du}\\ \text{01.2002}}} + \underbrace{100(1.01)^{49}}_{\substack{\text{versement}\\ \text{daté du}\\ \text{01.2001}}}}_{\text{50 termes (1 par an)}} \\ &= 100\underbrace{\left(1 + 1.01 + 1.01^2 + 1.01^3 + \cdots + 1.01^{48} + 1.01^{49}\right)}_{\text{série géométrique}} \end{aligned}$$

Même si la réponse peut être calculée à la main (en additionnant les 50 termes, on trouve $C_{2050} \cong 6446.30$ CHF (arrondi à 5 centimes près)), il serait bien d'avoir une formule permettant de calculer cette série géométrique sans devoir additionner ces 50 termes.

Définition

Une *série géométrique* est une somme finie de termes

$$a_1 \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} a_2 \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} a_3 \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} \cdots \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} a_n$$

pour laquelle il existe un nombre r, $r \neq 1$, appelé *raison*, qui satisfait $\boxed{a_{k+1} = a_k \cdot r}$.

Quitte à effectuer une mise en évidence de a_1 comme dans l'exemple ci-dessus, on peut toujours écrire :

$$a_1 \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} a_2 \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} a_3 \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} \cdots \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} a_n = a_1 \cdot \left(1 \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} r \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} r^2 \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} r^3 \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} \cdots \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} r^{n-2} \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} r^{n-1}\right)$$

Exemples

a) $1 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{+} 2 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{+} 4 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{+} 8 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{+} 16 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{+} 32 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{+} 64 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{+} 128 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{+} 256 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{+} 512$

b) $1 \overset{\overset{\cdot \frac{1}{2}}{\curvearrowright}}{+} \frac{1}{2} \overset{\overset{\cdot \frac{1}{2}}{\curvearrowright}}{+} \frac{1}{4} \overset{\overset{\cdot \frac{1}{2}}{\curvearrowright}}{+} \frac{1}{8} \overset{\overset{\cdot \frac{1}{2}}{\curvearrowright}}{+} \frac{1}{16} \overset{\overset{\cdot \frac{1}{2}}{\curvearrowright}}{+} \frac{1}{32} \overset{\overset{\cdot \frac{1}{2}}{\curvearrowright}}{+} \frac{1}{64} \overset{\overset{\cdot \frac{1}{2}}{\curvearrowright}}{+} \frac{1}{128} \overset{\overset{\cdot \frac{1}{2}}{\curvearrowright}}{+} \frac{1}{256} \overset{\overset{\cdot \frac{1}{2}}{\curvearrowright}}{+} \frac{1}{512} \overset{\overset{\cdot \frac{1}{2}}{\curvearrowright}}{+} \frac{1}{1024} \overset{\overset{\cdot \frac{1}{2}}{\curvearrowright}}{+} \frac{1}{2048}$

c) $1 \overset{\overset{\cdot 1.1}{\curvearrowright}}{+} 1.1 \overset{\overset{\cdot 1.1}{\curvearrowright}}{+} 1.1^2 \overset{\overset{\cdot 1.1}{\curvearrowright}}{+} 1.1^3 \overset{\overset{\cdot 1.1}{\curvearrowright}}{+} 1.1^4 \overset{\overset{\cdot 1.1}{\curvearrowright}}{+} 1.1^5 \overset{\overset{\cdot 1.1}{\curvearrowright}}{+} 1.1^6 \overset{\overset{\cdot 1.1}{\curvearrowright}}{+} 1.1^7 \overset{\overset{\cdot 1.1}{\curvearrowright}}{+} 1.1^8 \overset{\overset{\cdot 1.1}{\curvearrowright}}{+} 1.1^9 \overset{\overset{\cdot 1.1}{\curvearrowright}}{+} 1.1^{10} \overset{\overset{\cdot 1.1}{\curvearrowright}}{+} 1.1^{11}$

d) $12 \overset{\overset{\cdot 3}{\curvearrowright}}{+} 36 \overset{\overset{\cdot 3}{\curvearrowright}}{+} 108 \overset{\overset{\cdot 3}{\curvearrowright}}{+} 324 \overset{\overset{\cdot 3}{\curvearrowright}}{+} 972 \overset{\overset{\cdot 3}{\curvearrowright}}{+} 2916 \overset{\overset{\cdot 3}{\curvearrowright}}{+} 8748 \overset{\overset{\cdot 3}{\curvearrowright}}{+} 26244 \overset{\overset{\cdot 3}{\curvearrowright}}{+} 78732 \overset{\overset{\cdot 3}{\curvearrowright}}{+} 236196$

Écriture avec le symbole somme

Dans le cas d'une série géométrique, on a :

$$a_1 \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} a_2 \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} a_3 \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} \cdots \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} a_n \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}(a_1 \cdot r^k) \;=\; a_1 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} r^k$$

Théorème

La formule permettant de calculer une série géométrique de raison r et dont le premier terme vaut 1 est :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} r^k \; = \; 1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-2}+r^{n-1} \; = \; \frac{r^n-1}{r-1}} \qquad \left(= \frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

Remarquons que n est le nombre de termes de cette série.

Preuve

On a en distribuant :

$$\begin{array}{l} \left(1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-2}+r^{n-1}\right)\left(r-1\right) \\ \begin{array}{ccccccccccccccc} = & & & r & + & r^2 & + & r^3 & + & r^4 & + & \cdots & + & r^{n-1} & + & r^n \\ & -1 & - & r & - & r^2 & - & r^3 & - & r^4 & - & \cdots & - & r^{n-1} & & \end{array} \\ = \; r^n - 1 \end{array}$$

On a ainsi montré que :

$$\left(1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-2}+r^{n-1}\right)\left(r-1\right) = r^n - 1$$

Par conséquent en divisant de chaque côté par $(r-1)$ on obtient la formule énoncée dans le théorème. $\square$

Application du théorème aux exemples précédents

a) $\underbrace{1+2+4+8+16+32+64+128+256+512}_{10 \text{ termes}} = \dfrac{2^{10}-1}{2-1} = 1023$

b) $\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\frac{1}{1024}+\frac{1}{2048}}_{12 \text{ termes}} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}-1}{\frac{1}{2}-1}$

$= \dfrac{4095}{2048} = 1.9995$

c) $\underbrace{1+1.1+1.1^2+1.1^3+1.1^4+1.1^5+1.1^6+1.1^7+1.1^8+1.1^9+1.1^{10}+1.1^{11}}_{12 \text{ termes}}$

$= \dfrac{1.1^{12}-1}{1.1-1} \cong 21.3843$

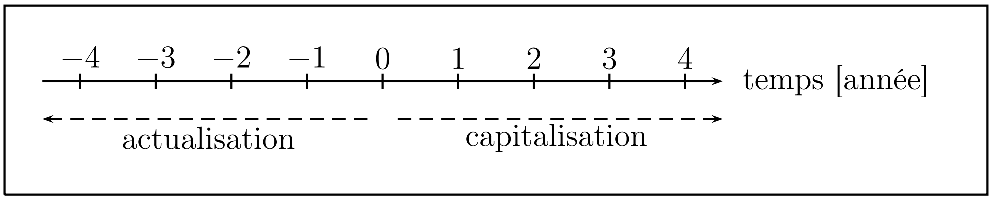
d) $\underbrace{12+36+108+324+972+2916+8748+26244+78732+236196}_{10 \text{ termes}}$

$= 12\cdot\left(1+3+9+27+81+243+729+2187+6561+19683\right) = 12\cdot\dfrac{3^{10}-1}{3-1}$

$= 354'288$

3.4 Application : calculs d'intérêts et capitalisation

Toute la difficulté de cette section consiste à bien comprendre comment on peut déplacer un capital dans le temps. Lorsqu'on déplace un capital en direction du futur, on le capitalise. Si on déplace un capital en direction du passé, on l'actualise. Lorsqu'aucune contrainte spécifique n'est précisée, on s'imaginera toujours disposer d'un capital en l'année zéro. Dans ce cas, on peut visualiser l'actualisation et la capitalisation.



3.4.1 Capitalisation

Notons C_n le capital à l'année n et t le *taux d'intérêt (effectif) annuel* (supposé constant).

Intérêts simples

Lorsqu'on capitalise un capital initial C_0 selon la méthode des intérêts simples, on ajoute à C_0 la proportion d'intérêt correspondante.

$$C_n = C_0 + C_0 \cdot t \cdot n \qquad \text{donc} \qquad \boxed{C_n = C_0(1 + t \cdot n)}$$

Cette formule est valable pour tout $n > 0$ (on peut parler de demi-année,...).

Intérêts composés

On calcule les intérêts année par année, en les ajoutant au capital. Ainsi, chaque année, le montant sur lequel les intérêts sont calculés change !

$$\begin{aligned}
&C_1 = C_0 + C_0 \cdot t = C_0(1+t)\\
&C_2 = C_1 + C_1 \cdot t = C_1(1+t) = C_0(1+t)^2\\
&C_3 = C_2 + C_2 \cdot t = C_2(1+t) = C_0(1+t)^3\\
&C_4 = C_3 + C_3 \cdot t = C_3(1+t) = C_0(1+t)^4\\
&\ldots\\
&\boxed{C_n = C_0(1+t)^n}
\end{aligned}$$

On a donc démontré que cette formule est valable lorsque $n \in \mathbb{N}$. Mais, elle est valable pour tout nombre n réel (même si on ne démontrera pas) !

Exemple

On place 1000 CHF à 5% pendant 40 ans.

1. Le capital final après les 40 ans si on applique la méthode des intérêts simples est donné par

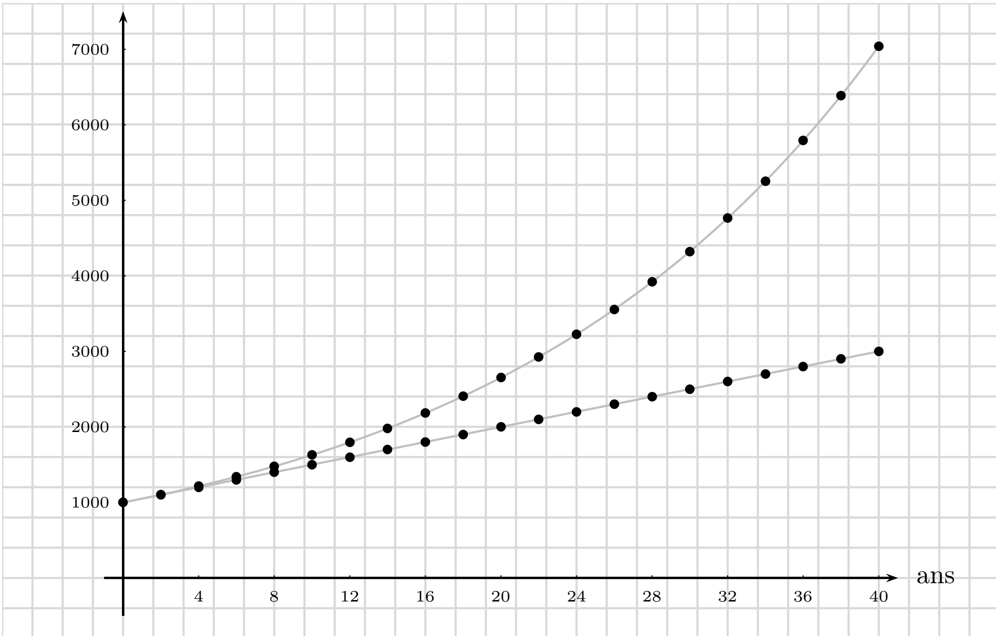
$$C_{40} = C_0(1 + t \cdot 40) = 1000(1 + 0.05 \cdot 40) = 1000 \cdot 3 = 3000 \text{ CHF}$$

2. Le capital final après les 40 ans si on applique la méthode des intérêts composés est donné par

$$C_{40} = C_0(1+t)^{40} = 1000(1+0.05)^{40} \cong 1'000 \cdot 7.03999 \cong 7'040.00 \text{ CHF}$$

Cela fait environ 4′040 CHF de plus qu'avec la méthode des intérêts simples !

3. Si on dessine les capitaux obtenus tous les deux ans pour des intérêts simples et composés (la période de placement reste l'année). On obtient le graphe suivant.



On voit que pour les intérêts simples, la courbe est une droite, tandis que pour les intérêts composés, il s'agit d'une courbe exponentielle !

Taux périodique (ou proportionnel ou relatif)

On peut désirer composer des intérêts m fois dans l'année selon des périodes égales (de longueur $\frac{1}{m}$). Pour cela, on introduit la notion d'un *taux d'intérêt périodique (ou proportionnel ou relatif)*, noté t_m.

Par exemple t_2 correspond à un taux semestriel, t_4 à un un taux trimestriel, t_{12} à un taux mensuel et t_{360} à un taux journalier, car en économie, il y a 360 jours par an.

On fixe ce taux de manière à ce que la capitalisation revienne au même que si cela avait été sur des périodes d'une année avec le taux d'intérêt (effectif) annuel. En termes mathématiques, en regardant comment on calcule le capital après une année, on trouve la condition suivante qui relie le taux (effectif) annuel avec le taux périodique.

$$C_1 = C_0(1+t) = C_0\,(1+t_m)^m \qquad \text{donc} \qquad \boxed{(1+t) = (1+t_m)^m}$$

$$\iff (1+t)^{\frac{1}{m}} = (1+t_m)$$

Exemple Si le taux d'intérêt annuel est de 3% pour un placement mensuel, alors le taux périodique est de $t_{12} = (1+0.03)^{\frac{1}{12}} - 1 \cong 0.247\%$. On remarque que ce taux n'est pas égal à 3% divisé par 12, qui ferait 0.25% !

3.4.2 Actualisation

Il s'agit cette fois d'aller dans le passé, en se demandant, par exemple, quel investissement C_0 on doit placer, à un taux d'intérêt annuel t, pour obtenir après n année un capital C_n. Les formules sont les mêmes que pour la capitalisation, si ce n'est que maintenant ce n'est pas C_0 qui est donné, mais C_n !

Exemple Si on souhaite avoir $50'000$ CHF dans 20 ans sur un compte en banque à un taux de 2%, on doit placer

$$C_0 = C_{20} \cdot \frac{1}{(1+t)^{20}} = 50'000 \cdot (1+0.02)^{-20} \cong 50'000 \cdot 0.67297 \cong 33'648.60 \text{ CHF}$$

3.4.3 Équivalence de capitaux et échéance moyenne

Définition

Deux capitaux sont dit *équivalents* s'ils sont égaux au même instant.

Exemples

1. Si on suppose que le taux d'intérêt est constant à 5%, alors $1'000$ CHF le premier janvier 2007 sont équivalents à $1'050$ CHF le premier janvier 2008.

   En effet, une année après, les $1'000$ CHF sont devenus $1'000 \cdot (1.05)^1 = 1'050$ CHF.
2. Verser $5'000$ CHF aujourd'hui sur un compte bancaire d'intérêts constants à 2% est équivalent à avoir versé $4'528.65$ CHF il y a 5 ans.

   En effet, on a $5'000 \cdot (1.02)^{-5} \cong 4'528.65$ CHF ou $4'528.65 \cdot (1.02)^5 \cong 5'000$ CHF.

Définition

L'*échéance moyenne* est l'unique date à laquelle plusieurs capitaux échéants à différentes dates sont réglés par un seul paiement équivalent à la somme de tous ces capitaux.

Exemple

Imaginons que l'on ait acheté 2 produits. Le premier a été acheté le premier juin 2006, il coûtait alors $1'500$ CHF. Quant au deuxième, il a été commandé et il coûtera $2'500$ CHF le jour de sa livraison le premier juin 2007. Pour ces deux achats, on considère que le taux d'intérêts est de 1%.

L'échéance moyenne correspond à la date où la somme des achats, qui vaut $4'000$ CHF, sera équivalente aux deux paiements. Cette échéance correspond au 16 janvier 2007 (autrement dit 7 mois et 15 jours après le premier juin 2006).

En effet, on commence par déplacer les deux valeurs au premier juin 2006 (on pourrait les déplacer à n'importe quelle date), la valeur totale vaut ainsi :

$$1'500 + 2'500 \cdot (1.01)^{-1} \cong 3975.25$$

On cherche dans combien d'années n ces 3975.25 CHF valent $1'500 + 2'500 = 4'000$ CHF.

$$3975.25 \cdot (1.01)^n = 4000 \iff (1.01)^n = \tfrac{4000}{3975.25} \iff n = \log_{1.01}(\tfrac{4000}{3975.25}) \cong 0.6238 \text{ ans}$$

Ainsi $n \cong 0.6238 \cdot 360 \cong 224.6$ jours, ce qui fait environ 7 mois et 15 jours.

Chapitre 4

Équations polynomiales

Définitions

1. Une *équation* est une égalité entre deux expressions mathématiques qui contiennent des variables, des lettres (représentant des valeurs fixes) et des nombres.
2. Une *variable* est une grandeur a priori inconnue. Par défaut, elle vit dans $\mathbb{R}$.
3. Une équation est *résolue* lorsqu'on a trouvé toutes les valeurs, qui mises à la place des variables correspondantes rendent la proposition (donnée par l'équation) vraie.
4. L'ensemble de ces valeurs est appelé l'*ensemble de solutions*, généralement noté S.
5. Une première équation *implique* une deuxième équation, lorsque les solutions de la première sont aussi solutions de la deuxième. Mais, il est possible qu'il y ait plus de solutions dans la deuxième que dans la première.
   Par exemple
   $$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4\,, \quad \text{mais} \quad x^2 = 4 \not\Rightarrow x = 2$$
6. Deux équations sont dites *équivalentes* si l'ensemble des solutions de chaque équation est le même.
   Par exemple
   $$|x| = 2 \iff x^2 = 4$$

Au début, on ne va travailler qu'avec des équations à une variable, notée x.

Quelques types d'équations

1. Les *équations du premier degré* sont de la forme
   $$ax + b = 0 \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0$$
2. Les *équations du deuxième degré* sont de la forme
   $$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{avec} \quad a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0$$
3. Les *équations de degré n* avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ sont de la forme
   $$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \text{avec} \quad a_k \in \mathbb{R} \text{ et } a_n \neq 0$$
4. Les *équations du deuxième degré camouflées* sont de la forme
   $$a \cdot y(x)^2 + b \cdot y(x) + c = 0 \quad \text{avec} \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ y(x) \text{ dépend de } x$$

4.1 Résolution des équations du premier degré

Dans ce cas, la méthode pour résoudre une telle équation consiste à trouver une équation équivalente pour laquelle la variable est *isolée* d'un côté de l'égalité. Pour cela, on effectue une succession d'OPÉRATIONS RÉVERSIBLES de chaque côté de l'égalité de l'équation.

Par exemple pour résoudre l'équation $5x+6=2x+4$, on peut procéder comme suit.

$$5x+6=2x+4 \overset{-6}{\iff} 5x=2x-2 \overset{-2x}{\iff} 3x=-2 \overset{:3}{\iff} x=-\frac{2}{3}$$

Par conséquent, l'ensemble de solutions de cette équation est $S=\{-\frac{2}{3}\}$.

Au-dessus de chaque équivalence, il peut être utile de noter l'opération que l'on fait pour passer de l'équation de gauche à celle de droite. Afin de pouvoir parler d'équivalence ($\Leftrightarrow$), il faut s'assurer que cette opération est réversible.

Il y a évidemment plusieurs façons de procéder. Ce qui compte, c'est d'avoir une équation équivalente où x est isolé !

4.2 La propriété du produit dans les nombres réels

Si a et b sont deux nombres réels, alors on a l'équivalence suivante.

$$a \cdot b = 0 \quad \iff \quad a=0 \ \text{ ou } \ b=0$$

Pour les OS maths-physique : l'implication '$\Longrightarrow$' traduit le fait que $\mathbb{R}$ est *anneau intègre*.

Application

On a l'équivalence : $\boxed{(x-x_1)(x-x_2)=0 \quad \iff \quad x=x_1 \ \text{ ou } \ x=x_2}$
En effet, on a

$$\begin{aligned}(x-x_1)(x-x_2)=0 \ &\underset{\text{du produit}}{\overset{\text{propriété}}{\iff}} \ x-x_1=0 \quad \text{ou} \quad x-x_2=0 \\ &\iff \quad x=x_2 \quad \text{ou} \quad x=x_2\end{aligned}$$

Ainsi, il est facile de résoudre l'équation $(x+1)(x-2)=0$ dans les nombres réels grâce à l'équivalence ci-dessus.

$$(x+1)(x-2)=0 \iff x=-1 \text{ ou } x=2$$

4.3 Lien entre factorisation et recherche de solutions

On a l'équivalence :

$$\boxed{ax^2+bx+c \text{ peut se factoriser} \iff ax^2+bx+c=0 \text{ admet 1 ou 2 solutions}}$$

La preuve de '$\Rightarrow$' se démontre de manière directe en utilisant la propriété du produit.
si $(p_1x+p_0)(q_1x+q_0)$ est une factorisation, la propriété du produit permet de résoudre $(p_1x+p_0)(q_1x+q_0)=0$.

La preuve de '$\Leftarrow$' se trouve en page 48.

La contraposée de l'équivalence est :

$$\boxed{ax^2+bx+c=0 \text{ n'admet pas de solution} \iff ax^2+bx+c \text{ ne se factorise pas}}$$

une équation du deuxième degré n'admet pas plus de 2 solutions, comme on le voit dans les pages qui suivent.

4.4 Résolution des équations du deuxième degré

Pour résoudre l'équation du deuxième degré $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$, on commence par examiner les deux cas particuliers suivants.

Premier cas particulier : $b = 0$

Dans ce cas, l'équation est $ax^2 + c = 0$ et peut être ramenée à l'équation équivalente suivante (en posant $d = -\frac{c}{a}$).

$$x^2 = d \quad \text{avec} \quad d \in \mathbb{R}$$

Une telle équation admet exactement :

- 0 solution si $d < 0$.

  En effet, comme x^2 est un nombre réel positif, il ne peut pas être égal à d qui est négatif.

- 1 solution si $d = 0$.

  En effet, on a les équivalences suivantes :

$$x^2 = 0 \iff x \cdot x = 0 \overset{\text{propriété}}{\underset{}{\overset{\text{du produit}}{\iff}}} x = 0$$

- 2 solutions si $d > 0$. Les solutions seront $\sqrt{d}$ et $-\sqrt{d}$ (ces racines carrées existent et ne sont pas égales car $d \neq 0$). En effet, on a :

$$x^2 = d \overset{-d}{\iff} x^2 - d = 0 \underset{d>0}{\overset{\substack{\text{identité}\\\text{remarq.}}}{\iff}} (x - \sqrt{d})(x + \sqrt{d}) = 0 \overset{\substack{\text{propriété}\\\text{du produit}}}{\iff} \begin{cases} x = \sqrt{d} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{d} \end{cases}$$

En résumé, on a l'équivalence :

$$\boxed{x^2 = d \iff x = \pm\sqrt{d}}$$

Cette équivalence livre bien deux solutions si d est positif, une solution si d est nul et aucune solution si d est négatif (puisque la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas).

Deuxième cas particulier : $c = 0$

Dans ce cas, l'équation est $ax^2 + bx = 0$. Pour trouver les valeurs de x, il suffit de mettre x en évidence et d'utiliser la propriété du produit.

$$ax^2 + bx = 0 \iff x(ax + b) = 0 \overset{\substack{\text{propriété}\\\text{du produit}}}{\iff} \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ ax + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Ainsi une telle équation admet toujours exactement 2 solutions dont 0.

Remarque cruciale : il est très important de ne pas apprendre par cœur les solutions de cette équation. Il suffit de se souvenir de la méthode utilisée.

La formule de Viète

On peut maintenant examiner le cas général, c'est-à-dire lorsque l'équation du deuxième degré est du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a, b, c \neq 0$.

Les calculs qui suivent sont aussi valables si $b = 0$ ou $c = 0$. Mais les méthodes précédentes sont plus efficaces (gain de temps et diminution du risque de faire une erreur de calcul).

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \iff a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$\iff a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = 0 \overset{a\neq 0}{\iff} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

Dans la zone grise, on a utilisé une technique de calcul qui consiste à écrire un polynôme de degré 2 en x de façon à ce que x n'apparaisse qu'une seule fois : on obtient ainsi *la forme canonique du polynôme de degré 2*. Cette technique sera aussi utile dans le chapitre suivant pour factoriser les polynômes de degré 2, dans le chapitre des fonctions pour trouver le sommet d'une parabole et dans le chapitre de géométrie pour les équations des cercles et des sphères.

Ainsi, on a

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Comme on l'a vu dans le premier cas de la page précédente, le nombre de solutions d'une telle équation est donné par le signe de l'expression $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Or, comme $4a^2$ est toujours positif, seul le signe de l'expression b^2-4ac détermine le nombre de solutions de l'équation.

Cette expression est ainsi appelée le *discriminant de l'équation* et est notée $\Delta = b^2 - 4ac$.

Ainsi l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ possède exactement :

- 0 solution si son discriminant est négatif (c'est-à-dire si $\Delta < 0$).
- 1 solution si son discriminant est nul (c'est-à-dire si $\Delta = 0$).
- 2 solutions si son discriminant est positif (c'est-à-dire si $\Delta > 0$).

On utilise l'équivalence du premier cas de la page précédente pour conclure.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \overset{(\bigstar)}{\iff} x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \iff x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

On pourrait penser que l'équivalence $(\bigstar)$ est fausse car $\sqrt{4a^2} = 2|a|$, mais ce qui compte c'est de mettre (après le symbole $\pm$) UNE racine carrée de $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ et ici, c'est bien le cas !
La conclusion serait la même si on avait utilisé $\sqrt{4a^2} = 2|a|$.

En résumé, on a démontré la *formule de Viète*.

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Cette équivalence livre bien deux solutions si le discriminant est positif, une solution si le discriminant est nul et aucune solution si le discriminant est négatif (puisque la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas).

Exemples

1. Résolvons l'équation $2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$.

   Comme le discriminant de cette équation est $\Delta = 4 - 4 = 0$, on sait qu'il se cache une identité remarquable (et qu'il n'y a qu'une solution).

   $$2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0 \iff 2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = 0 \iff 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$$

   Donc l'ensemble de solutions est $S = \{\frac{1}{2}\}$. Bien sûr, on aurait aussi pu utiliser la formule de Viète, mais c'est plus efficace avec l'identité remarquable.

2. Résolvons l'équation $x^2 + 2x + 2 = 0$.

   Comme le discriminant de cette équation est $\Delta = 4 - 8 < 0$, on sait qu'il n'y a pas de solution. Donc l'ensemble de solutions est vide : $S = \emptyset$.

3. Résolvons l'équation $2x^2 - x - 1 = 0$.

   Comme le discriminant de cette équation est $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$, on sait qu'il y a deux solutions et on utilise la formule de Viète pour trouver ces solutions :

   $$2x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = -\frac{1}{2} \text{ ou } 1$$

   Donc l'ensemble de solutions est $S = \{-\frac{1}{2}, 1\}$.

   On peut aussi reproduire la démarche de la démonstration.

   $$2x^2 - x - 1 = 0 \iff 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff 2\left(\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

   $$\iff \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \iff x - \frac{1}{4} = \pm\frac{3}{4} \iff x = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} = 1 \text{ ou } -\frac{1}{2}$$

4. Résolvons l'équation $3x^2 + 4x - 1 = 0$.

   Comme le discriminant de cette équation est $\Delta = 16 + 12 = 28 > 0$, on sait qu'il y a deux solutions et on utilise la formule de Viète pour trouver ces solutions :

   $$3x^2 + 4x - 1 = 0 \iff x = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{6} = -\frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

   Donc l'ensemble de solutions est $S = \left\{-\frac{2+\sqrt{7}}{3}, -\frac{2-\sqrt{7}}{3}\right\}$.

   On peut aussi reproduire la démarche de la démonstration.

   $$3x^2 + 4x - 1 = 0 \iff 3\left(x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right) = 0 \iff 2\left(\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} - \frac{1}{3}\right) = 0$$

   $$\iff \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{7}{9} \iff x + \frac{2}{3} = \pm\frac{\sqrt{7}}{3} \iff x = -\frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

4.4.1 Les équations du deuxième degré camouflées

Pour résoudre l'équation du deuxième degré en $y(x)$, $a \cdot y(x)^2 + b \cdot y(x) + c = 0$ (avec $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ et où $y(x)$ est une expression algébrique qui dépend de x), on utilise aussi la formule de Viète. On a :

$$a \cdot y(x)^2 + b \cdot y(x) + c = 0 \iff y(x) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ensuite, on termine la résolution en cherchant les valeurs de x qui sont solutions.

Exemples

1. Résolvons l'équation $2x^4 - x^2 - 1 = 0$. Il faut reconnaître une équation du deuxième degré en x^2 ! Une telle équation est aussi appelée *bicarrée*. On a :

   $$2x^4 - x^2 - 1 = 0 \iff 2(x^2)^2 - (x^2) - 1 = 0$$

   Ainsi, on a $y(x) = x^2$. Par Viète, on trouve que : $y(x) = -\frac{1}{2}$ ou 1

   Donc $x^2 = -\frac{1}{2}$ ou $x^2 = 1$. La première équation n'admettant pas de solution, il reste à résoudre $x^2 = 1$. Donc les solutions de l'équation bicarrée sont ± 1.

   Par conséquent, l'ensemble de solutions est $S = \{\pm 1\}$

2. Résolvons l'équation $2^{2x} - 2^{x+1} = 3$. Il faut reconnaître une équation du deuxième degré en 2^x ! On a :

   $$2^{2x} - 2^{x+1} = 3 \iff 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 3 = 0 \iff (2^x)^2 - 2(2^x) - 3 = 0$$

   Ainsi, on a $y(x) = 2^x$. Par Viète, on trouve que : $y(x) = -1$ ou 3

   Donc $2^x = -1$ ou $2^x = 3$. La première équation n'admettant pas de solution, il reste à résoudre $2^x = 3$. Il y a donc une seule solution qui est $x = \log_2(3) \cong 1.5850$.

   Par conséquent, l'ensemble de solutions est $S = \{\log_2(3)\}$.

4.5 Résolution des équations de degré supérieur à 2

Pour les équations du troisième degré et celles du quatrième degré, il existe des formules générales, appelées respectivement formule de Cardan et formule de Ferrari. Mais elles sont plus compliquées et plus difficiles à utiliser que la formule de Viète.

Le jeune Évariste Galois [1], mort en 1832, a permis de montrer, en 1843, qu'il n'y a aucune formule générale pour résoudre les équations de degré plus grand ou égal à 5.

On utilisera une méthode, consistant à trouver une solution b (le lemme de Gauss donne les solutions rationnelles) et à l'utiliser pour diminuer le degré de cette équation en factorisant par $(x - b)$ (grâce au schéma de Horner). On répète ce procédé jusqu'à ce que l'on obtienne une équation de degré 2 pour terminer par la formule de Viète. Cette méthode est décrite en détail dans le chapitre suivant.

1. Sur la page web `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Galois.html` (en anglais), le lecteur trouvera plus de précisions quant au contexte de sa mort et de son travail de mathématicien.

4.6 Systèmes d'équations polynomiales

Définition

Un *système d'équations* est composé de plusieurs équations. Dans ce cas, il peut aussi y avoir plusieurs variables, généralement appelées x, y, z ou encore x_1, x_2, x_3, etc.

Pour résoudre un système d'équations, on peut travailler équation par équation comme précédemment. Mais, on peut en plus, mélanger les équations. Voici deux techniques, parmi d'autres, qui sont souvent utilisées, voire mixées.

1. *Résolution par substitution.*

   On isole une variable dans une équation. Puis, chaque fois que cette variable apparaît dans les autres équations on la remplace par ce qu'on a trouvé.

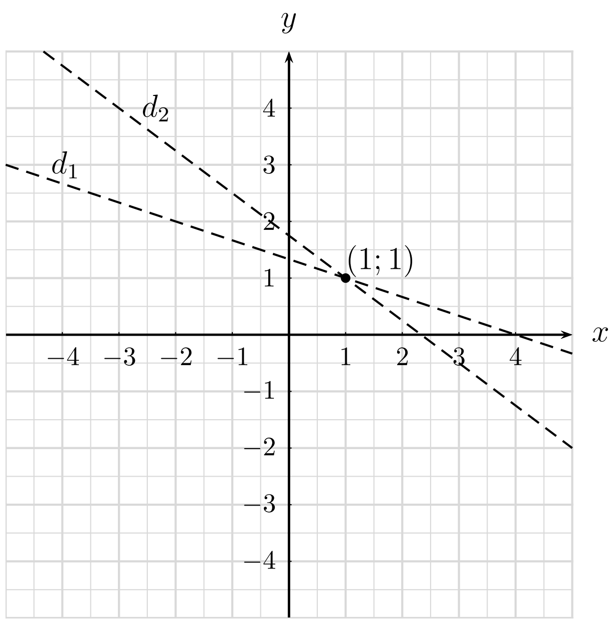
   Exemple :

$$\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 8 - 6y \\ 3x + 4y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 - 3y \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$$

$$\underset{\text{dans la 2e équation}}{\overset{\text{substitution de } x}{\iff}} \begin{cases} x = 4 - 3y \\ 3(4-3y) + 4y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 - 3y \\ -5y + 12 = 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 4 - 3y \\ y = 1 \end{cases} \underset{\text{dans la 1ère équation}}{\overset{\text{substitution de } y}{\iff}} \begin{cases} x = 4 - 3 \cdot 1 = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

   L'ensemble de solutions n'est plus un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, car on a trouvé que la seule solution de ce système d'équations est $x = 1$ et simultanément $y = 1$. Pour décrire l'ensemble de solutions, il faut se placer dans le plan $\mathbb{R}^2$. Ainsi, l'ensemble de solutions S est représenté par le point $(1;1)$ de la manière suivante.



   Donc l'ensemble de solutions $S = \{(1;1)\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.

   Pour les lecteurs avancés : en traitillés, on voit les droites $d_1 : 2x + 6y = 8$ et $d_2 : 3x + 4y = 7$. L'ensemble des solutions est ainsi l'ensemble des points d'intersection de ces deux droites. Il n'y a qu'un point d'intersection qui est $I(1;1)$.

2. *Résolution par combinaison.*

   On se débarrasse d'une variable dans une équation en additionnant à cette équation un multiple d'une autre équation (il s'agit d'une soustraction si le multiple est un nombre négatif). On obtient ainsi un système équivalent (puisqu'on conserve l'autre équation) au système de départ, mais qui est plus simple à résoudre, car une des équations est une équation à une inconnue, qu'on peut résoudre et ainsi utiliser par combinaison pour résoudre l'équation restante.

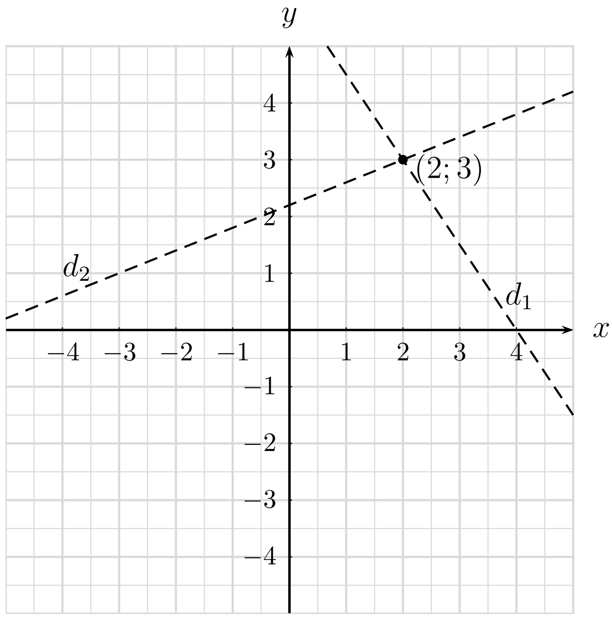
   Exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 12 \\ 2x & - & 5y & = & -11 \end{array}\right. \underset{\cdot 3}{\overset{\cdot 2}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcr} 6x & + & 4y & = & 24 \\ 6x & - & 15y & = & -33 \end{array}\right.$$

$$\underset{\text{on soustrait la première}}{\overset{\text{à la deuxième équation,}}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcr} 6x & + & 4y & = & 24 \\ & - & 19y & = & -57 \end{array}\right. \underset{\div(-19)}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} 6x & + & 4y & = & 24 \\ & & y & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\underset{\text{quatre fois la deuxième}}{\overset{\text{à la première équation, on soustrait}}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcr} 6x & & & = & 12 \\ & & y & = & 3 \end{array}\right. \overset{\div 6}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 2 \\ y & = & 3 \end{array}\right.$$

   On a donc l'ensemble de solutions $S = \{(2;3)\}$, qui est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ représenté graphiquement ci-dessous.



   Pour les lecteurs avancés : en traitillés, on voit les droites $d_1 : 3x + 2y = 12$ et $d_2 : 2x - 5y = -11$. L'ensemble des solutions est ainsi l'ensemble des points d'intersection de ces deux droites. Il n'y a qu'un point d'intersection qui est $I(2;3)$.

Remarques

Les équations et les systèmes d'équations sur lesquels on peut tomber lorsqu'on cherche à résoudre des problèmes sont en général plus difficiles à résoudre que les exemples que l'on vient de voir. Il est fréquent que le mathématicien utilise des méthodes numériques pour trouver une bonne approximation de la solution.

Tous les jours, un peu partout dans le monde, des milliers d'ordinateurs résolvent des systèmes d'équations qui comportent des milliers d'équations et de milliers de variables.

Chapitre 5

Factorisation de polynômes

5.1 Polynômes de degré n

Soit n un nombre naturel. Un *polynôme p en x de degré n* est une somme de la forme

$$p(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_2x^2 + p_1x + p_0 \quad \text{avec} \quad p_k \in \mathbb{R} \text{ et } p_n \neq 0$$

Les nombres réels p_k ($k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$) sont les *coefficients* du polynôme. Le nombre réel p_n est le *coefficient dominant* du polynôme et le nombre p_0 est le *terme constant*.

Polynômes de degré 2 et 3

Avec les mêmes notations que ci-dessus, un polynôme de degré 2 s'écrit

$$p(x) = p_2x^2 + p_1x + p_0$$

et un polynôme de degré 3 s'écrit de la manière suivante.

$$p(x) = p_3x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0$$

Exemples

Polynôme	Coefficient dominant	Terme constant	Degré
$p_1(x) = 3x^8 + 5x^7 - 7x^2 + 4$	3	4	8
$p_2(x) = 2x^4 - 3x^3 + 3x - 5$	2	-5	4
$p_3(x) = -x^3 + x^2 + 2$	-1	2	3
$p_4(x) = -2x^2 + x + 3$	-2	3	2
$p_5(x) = 5x + 6$	5	5	3
$p_6(x) = 4$	4	4	0
$p_7(x) = 0 \ \ (= 0x = 0x^2 = \ldots)$	0	0	pas défini

Les polynômes sont des expressions littérales. On peut donc les additionner, les soustraire et les multiplier. Le résultat d'une telle opération est encore un polynôme. Par contre, diviser un polynôme par un autre polynôme ne donne pas toujours un polynôme.

5.2 Factorisation des polynômes de degré 2

On reprend la technique de calcul utilisée dans la section 4.4, mais cette fois on travaille avec le polynôme plutôt qu'avec une équation. Cela fournit une autre démonstration de la formule de Viète que celle présentée dans la section 4.4.

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

Comme $4a^2$ est toujours positif, seul le signe du discriminant $\Delta = b^2-4ac$ permet de décider s'il est possible de factoriser ce polynôme.

- Si le discriminant Δ est négatif, alors la parenthèse est toujours positive, et ainsi le polynôme ne s'annule pas et donc il ne se factorise pas (on démontre cela par contraposée (voir section 4.3)) ! On dit que ax^2+bx+c est un polynôme *irréductible.*
- Si le discriminant Δ est nul, alors on a trouvé la factorisation
$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = a\left(x-\underbrace{\frac{-b}{2a}}_{\text{seule solution de } ax^2+bx+c=0}\right)^2$$
- Si le discriminant Δ est positif, on remarque que la grande parenthèse en haut de la page est une identité remarquable et on peut continuer de factoriser.
$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \\ &= a\Bigg(x-\underbrace{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}_{\substack{\text{première solution}\\ \text{de } ax^2+bx+c=0}}\Bigg)\Bigg(x-\underbrace{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}_{\substack{\text{deuxième solution}\\ \text{de } ax^2+bx+c=0}}\Bigg) \end{aligned}$$

Les solutions de $ax^2+bx+c=0$ indiquées lorsque $\Delta \geqslant 0$ sont évidemment des solutions par la propriété du produit !

En résumé

Lorsqu'on désire factoriser un polynôme de degré 2, noté $p(x) = ax^2+bx+c$, on regarde d'abord si on peut deviner la factorisation. Dans le cas où l'on n'y arrive pas, on cherche les solutions de l'équation $p(x) = 0$. Un des trois cas se produit.

- Le discriminant Δ est négatif.
  Dans ce cas, il n'y a pas de solution et le polynôme est irréductible.
- Le discriminant Δ est nul.
  Dans ce cas, il se cache une identité remarquable et le polynôme se factorise ainsi
$$p(x) = a(x-x_1)^2 \qquad \text{(la solution } x_1 \text{ peut être calculée par Viète)}$$
- Le discriminant Δ est positif. Dans ce cas, le polynôme se factorise ainsi
$$p(x) = a(x-x_1)(x-x_2) \qquad (x_1 \text{ et } x_2 \text{ peuvent être calculées par Viète})$$

5.3 Division euclidienne

La *division euclidienne* (dans $\mathbb{Z}$) permet de diviser deux nombres entiers, elle fait apparaître un *quotient* et un *reste*. En divisant un nombre entier a par un nombre entier non nul b, on obtient

$$\boxed{a = b \cdot q + r}$$

où q est le quotient et où r est le reste qui doit vérifier la relation

$$0 \leqslant r < |b| \qquad \text{la valeur absolue n'est utile que si } b < 0$$

On dit qu'un nombre entier a *est divisible par* un nombre entier b non nul si le reste de division de a par b est nul.

La division euclidienne pour les polynômes

La *division euclidienne pour les polynômes* permet de diviser deux polynômes, elle fait apparaître un *quotient* et un *reste*. En divisant un polynôme a par un polynôme non nul b, on obtient

$$\boxed{a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)}$$

où q est le quotient et où r est le reste qui doit vérifier

$$\begin{cases} 0 \leqslant \deg(r) < \deg(b) & \text{où } \deg(p) \text{ indique le degré du polynôme } p \\ \text{ou} \quad r(x) = 0 & \text{car le degré du polynôme nul n'est pas défini} \end{cases}$$

Définition

On dit qu'un polynôme a *est divisible par* un polynôme b non nul si le reste de division de a par b est le polynôme nul.

Exemples

Voici un exemple de division euclidienne de nombres entiers et un exemple de division euclidienne polynomiale. Ces deux divisions sont effectuées avec le même algorithme.

$$\begin{array}{rr|l} & 2785 & 131 \\ \cline{3-3} - & 2620 & 20+1 \\ \cline{2-2} & 165 & \\ - & 131 & \\ \cline{2-2} & 34 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr|l} & 2x^3 & +\ 7x^2 & +\ 8x & +\ 5 & x^2+3x+1 \\ \cline{6-6} -\ (& 2x^3 & +\ 6x^2 & +\ 2x &) & 2x+1 \\ \cline{1-4} & & x^2 & +\ 6x & +\ 5 & \\ & -\ (& x^2 & +\ 3x & +\ 1\ ) & \\ \cline{3-5} & & & 3x & +\ 4 & \end{array}$$

On a ainsi les résultats suivants. De plus, en posant $x = 10$, ces résultats sont identiques.

$$\boxed{131 \cdot \underbrace{(20+1)}_{\text{quotient}} + \underbrace{34}_{\text{reste}} = 2785} \qquad \boxed{(x^2+3x+1)\underbrace{(2x+1)}_{\text{quotient}} + \underbrace{(3x+4)}_{\text{reste}} = 2x^3+7x^2+8x+5}$$

Le lecteur prendra toujours le temps de vérifier la division en vérifiant les résultats obtenus (une faute de signe est si vite arrivée).

5.4 Factorisation des polynômes de degré 3

On considère un polynôme quelconque de degré 3, noté de la manière suivante.

$$p(x) = p_3x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0$$

Un nombre qui annule le polynôme est appelé *zéro du polynôme.*

Le schéma de Horner (version du troisième degré)

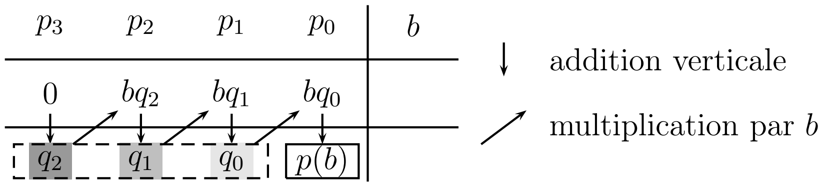
William G. Horner a inventé un algorithme qui permet, en au plus trois multiplications,

1. d'évaluer le polynôme en $x = b$, c'est-à-dire de calculer le nombre $p(b)$;
2. d'effectuer la division euclidienne de $p(x)$ par $(x - b)$.

Son idée est d'écrire $p(x) = \Big(\Big(\Big(0 + p_3\Big)x + p_2\Big)x + p_1\Big)x + p_0$

et donc $p(b) = \Big(\Big(\Big(0 + p_3\Big)b + p_2\Big)b + p_1\Big)b + p_0$.

Le *schéma de Horner* reproduit ce travail d'évaluation (observer les nuances de gris).



Ce schéma permet aussi d'obtenir la division euclidienne de $p(x)$ par $(x - b)$, car on a

$$\boxed{p(x) = (x-b)\underbrace{(q_2x^2 + q_1x + q_0)}_{\text{quotient}} + \underbrace{p(b)}_{\text{reste}}}$$

Preuve

Montrons que le membre de droite est égal au membre de gauche.

$$\begin{aligned}(x-b)(q_2x^2 + q_1x + q_0) + p(b) &= q_2x^3 + q_1x^2 + q_0x + p(b) \\ & - bq_2x^2 - bq_1x - bq_0 \\ &= q_2x^3 + \big(q_1 - bq_2\big)x^2 + \big(q_0 - bq_1\big)x + \big(p(b) - bq_0\big) \\ &\overset{(\bigstar)}{=} p_3x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0 = p(x)\end{aligned}$$

L'étape $(\bigstar)$ est vérifiée par contemplation du schéma ! □

Factorisation à l'aide d'un zéro

Supposons qu'on connaisse un zéro, noté b, de ce polynôme de degré 3. Le lemme de Gauss (section 5.7) permet de trouver tous les zéros rationnels de ce polynôme.

Le schéma de Horner permet de vérifier que b est bien un zéro (le nombre encadré du schéma est nul car $p(b) = 0$). C'est ainsi qu'on trouve un éventuel zéro rationnel à partir des candidats donné par le lemme de Gauss.

Puisque le reste est nul (car $p(b) = 0$), le schéma de Horner donne aussi une factorisation.

$$p(x) = (x - b)(q_2x^2 + q_1x + q_0)$$

Il ne reste plus qu'à factoriser le polynôme de degré 2 (section 5.2) !

5.5 Autre preuve que la racine de 2 est irrationnelle

Le lemme de Gauss (version du deuxième degré)

Soit un polynôme p de degré 2 à coefficients entiers et soit $\frac{a}{b}$ une fraction irréductible avec $a \in \mathbb{Z}$, et $b \in \mathbb{N}$, $b > 0$.

Si $\frac{a}{b}$ est un *zéro* du polynôme p (c'est-à-dire une solution de l'équation $p(x) = 0$), alors :

a) a divise le terme constant de p b) b divise le coefficient dominant de p

Preuve

On considère un polynôme de degré 2, à coefficients entiers, noté de la manière suivante.

$$p(x) = p_2x^2 + p_1x + p_0$$

Comme, par hypothèse, la fraction $\frac{a}{b}$ (avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$) est un zéro de p, on a

$$0 = p\left(\frac{a}{b}\right) = p_2\frac{a^2}{b^2} + p_1\frac{a}{b} + p_0$$

En multipliant chaque membre de l'équation par b^2, on voit que c'est équivalent à :

$$0 = p_2a^2 + p_1ab + p_0b^2$$

a) On montre que a divise le terme constant p_0 en isolant p_0b^2 et en factorisant par a.

$$p_0b^2 = a \cdot \underbrace{\Big(- p_2a - p_1b\Big)}_{\in\mathbb{Z}\text{ (hypothèses)}}$$

Ainsi, a divise p_0b^2.
Comme a et b n'ont pas de diviseurs communs (autres que ± 1), alors[1] a divise p_0.

b) On montre que b divise le coefficient dominant p_2 en isolant p_2a^2 et en factorisant par b.

$$p_2a^2 = b \cdot \underbrace{\Big(- p_1a - p_0b\Big)}_{\in\mathbb{Z}\text{ (hypothèses)}}$$

Ainsi, b divise p_2a^2.
Comme a et b n'ont pas de diviseurs communs (autres que ± 1), alors[1] b divise p_2.

$\square$

Application pour prouver l'irrationnalité de la racine de 2

On considère le polynôme $p(x) = x^2 - 2$. Comme ce polynôme est à coefficients entiers, on peut appliquer le lemme de Gauss qui dit que $Z \cap \mathbb{Q} \subset \{\pm 1, \pm 2\}$ (cela signifie que les candidats pour un éventuel zéro rationnel du polynôme p sont ± 1 et ± 2).

Or, aucune de ces valeurs n'est un zéro de p car $p(\pm 1) = -1$ et $p(\pm 2) = 2$.

Ainsi, si p a des zéros, ils sont irrationnels. Or, les zéros de ce polynôme p sont bien connus ! En effet :

$$p(x) = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \pm\sqrt{2}$$

Par conséquent $\pm\sqrt{2}$ sont des nombres irrationnels.

1. La preuve de ce résultat, intuitivement évident, appelé le lemme d'Euclide, est dans le cours OS.

5.6 Le schéma de Horner (version la plus générale)

William George Horner (1786-1837), mathématicien britannique, a eu l'idée d'écrire les polynômes autrement pour avoir moins de multiplications à faire pour les évaluer.

$$\begin{aligned} p(x) &= p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + p_{n-2}x^{n-2} + \cdots + p_2x^2 + p_1x + p_0 \\ &= ((((((0+p_n)x + p_{n-1})x + p_{n-2})x + \cdots)x + p_2)x + p_1)x + p_0 \end{aligned}$$

Ainsi, évaluer p en un nombre $b \in \mathbb{R}$ revient à calculer

$$p(b) = (\,(\,((\,(\,(\,0+p_n\,)b + p_{n-1}\,)b + p_{n-2}\,)b + \cdots)b + p_2\,)b + p_1\,)b + p_0$$

Ce calcul peut-être effectué grâce à un schéma itératif, appelé *schéma de Horner*.

$$\begin{array}{ccccccc|c} p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_2 & p_1 & p_0 & b \\ \hline 0 & & & & & & & \\ \hline q_{n-1} & q_{n-2} & q_{n-3} & \cdots & q_1 & q_0 & \boxed{p(b)} & \end{array}$$

$\downarrow$ addition verticale

$\nearrow$ multiplication par b

Exemple

On évalue $p(x) = 3x^6 - x^5 - 12x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 18x + 11$ en $x = 2$ (on a donc $b = 2$).
L'écriture ci-dessus donne $p(x) = ((((((0+3)\,x-1)\,x-12)\,x+4)\,x-3)\,x+18)\,x+11$.
En évaluant en $x = 2$, on a $p(2) = ((((((0+3)\,2-1)\,2-12)\,2+4)\,2-3)\,2+18)\,2+11$.

$$\begin{array}{ccccccc|c} 3 & -1 & -12 & 4 & -3 & 18 & 11 & 2 \\ \hline 0 & 6 & 10 & -4 & 0 & -6 & 24 & \\ \hline 3 & 5 & -2 & 0 & -3 & 12 & \boxed{35} & \end{array}$$

$\downarrow$ addition verticale

$\nearrow$ multiplication par 2

Ainsi, on trouve que l'évaluation du polynôme p en $x = 2$ vaut $p(2) = 35$.

Théorème

Le schéma de Horner permet aussi d'effectuer la division euclidienne d'un polynôme p de degré n par un polynôme de la forme $x - b$ où b est un nombre réel quelconque.

Les nombres trouvés dans la ligne du bas seront les coefficients du polynôme quotient $q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + q_{n-3}x^{n-3} + \cdots + q_1x + q_0$ et du polynôme reste $r(x) = r = p(b)$ (qui est de degré 0, donc un nombre, car on divise par un polynôme de degré 1).

On aura ainsi : $$p(x) = (x-b)q(x) + p(b)$$

Conséquence importante et immédiate du théorème

Soit p un polynôme et $b \in \mathbb{R}$, on a : $\boxed{p(b) = 0 \iff p(x) \text{ est divisible par } (x-b)}$

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus, la division euclidienne de p par le polynôme $x - 2$ donne

$$p(x) = (x-2)\underbrace{(3x^5 + 5x^4 - 2x^3 - 3x + 12)}_{=q(x) \text{ c'est le quotient}} + \underbrace{35}_{=r(x)=r=p(2) \text{ c'est le reste}}$$

Preuve du théorème

On écrit le polynôme p de degré n en utilisant la notation vue en page 47.

$$p(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + p_{n-2}x^{n-2} + \cdots + p_2x^2 + p_1x + p_0$$

On effectue le schéma de Horner pour évaluer le polynôme p en $x = b$:

$$\begin{array}{ccccccc|c}
p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_2 & p_1 & p_0 & b \\
\hline
0 & bq_{n-1} & bq_{n-2} & \cdots & bq_2 & bq_1 & bq_0 & \\
\hline
q_{n-1} & q_{n-2} & q_{n-3} & \cdots & q_1 & q_0 & \boxed{r} &
\end{array}$$

$\downarrow$ addition verticale

$\nearrow$ multiplication par b

La dernière ligne permet de construire le polynôme q qui est de degré $n-1$.

$$q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \cdots + q_2x^2 + q_1x + q_0$$

1. On commence par montrer que $p(x) = (x-b)q(x) + r$.

   Montrons que le membre de droite est égal au membre de gauche.

$$\begin{aligned}
(x-b)q(x) + r &= (x-b)\big(q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \cdots + q_2x^2 + q_1x + q_0\big) + r \\
&= \begin{array}{ccccccccccc} q_{n-1}x^n & + & q_{n-2}x^{n-1} & + & \cdots & + & q_1x^2 & + & q_0x & + & r \\ & - & bq_{n-1}x^{n-1} & - & \cdots & - & bq_2x^2 & - & bq_1x & - & bq_0 \end{array} \\
&= q_{n-1}x^n + (q_{n-2} - bq_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (q_1 - bq_2)x^2 + (q_0 - bq_1)x + (r - bq_0) \\
&\overset{(\star)}{=} p_nx^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_2x^2 + p_1x + p_0 = p(x)
\end{aligned}$$

   L'étape ($\bigstar$) est vérifiée par contemplation du schéma !

2. On termine en montrant que $r = p(b)$.

   Même si ce résultat a déjà été montré en utilisant l'écriture du polynôme avec les multiples parenthèses de la page précédente, on peut le démontrer à l'aide de la relation $p(x) = (x-b)q(x) + r$ en remplaçant x par b. Ainsi, on trouve que

$$p(b) = (b-b)q(b) + r = 0 + r = r$$

En conclusion, le polynôme q est bien le quotient et $p(b)$ le reste de la division de p par $x - b$ et on a la relation

$$p(x) = (x-b)q(x) + p(b)$$

$\square$

Preuve de la conséquence du théorème

«$\Rightarrow$» Le théorème dit que $p(x) = (x-b)q(x)+p(b)$, donc si $p(b) = 0$, on a immédiatement $p(x) = (x-b)q(x)$, ce qui signifie que $p(x)$ est divisible par $(x-b)$.

«$\Leftarrow$» Si $p(x)$ est divisible par $(x-b)$, alors la division euclidienne donne un reste nul et on a $p(x) = (x-b)q(x)$ où $q(x)$ est le polynôme quotient. En replaçant x par b, on obtient $p(b) = (b-b)q(b) = 0$ et donc $p(b) = 0$.

$\square$

5.7 Le lemme de Gauss (version la plus générale)

Soit un polynôme p de degré n à coefficients entiers et soit $\frac{a}{b}$ une fraction irréductible avec $a \in \mathbb{Z}$, et $b \in \mathbb{N}$, $b > 0$.

Si $\frac{a}{b}$ est un *zéro* du polynôme p (c'est-à-dire une solution de l'équation $p(x) = 0$), alors :

a) a divise le terme constant de p b) b divise le coefficient dominant de p

Preuve

On écrit le polynôme p de degré n en utilisant la notation vue en page 47.

$$p(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + p_{n-2}x^{n-2} + \cdots + p_2 x^2 + p_1 x + p_0$$

Par hypothèse, on a $p(\frac{a}{b}) = 0$. On a ainsi

$$0 = p\left(\frac{a}{b}\right) = p_n \frac{a^n}{b^n} + p_{n-1}\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + p_{n-2}\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} + \cdots + p_2 \frac{a^2}{b^2} + p_1 \frac{a}{b} + p_0$$

En multipliant chaque membre de l'équation par b^n, on voit que c'est équivalent à :

$$0 = p_n a^n + p_{n-1}a^{n-1}b + p_{n-2}a^{n-2}b^2 + \cdots + p_2 a^2 b^{n-2} + p_1 a b^{n-1} + p_0 b^n$$

a) On montre que a divise le terme constant p_0 en isolant $p_0 b^n$ et en factorisant par a.

$$p_0 b^n = a \cdot \underbrace{\Big(- p_n a^{n-1} - p_{n-1}a^{n-2}b - p_{n-2}a^{n-3}b^2 - \cdots - p_2 a b^{n-2} - p_1 b^{n-1}\Big)}_{\in\mathbb{Z} \quad \text{car } a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N} \text{ et } p \text{ est un polynôme à coefficients entiers}}$$

Ainsi, a divise $p_0 b^n$.
Comme a et b n'ont pas de diviseurs communs (autres que ± 1), alors [2] a divise p_0.

b) On montre que b divise le coefficient dominant p_n en isolant $p_n a^n$ et en factorisant par b.

$$p_n a^n = b \cdot \underbrace{\Big(- p_{n-1}a^{n-1} - p_{n-2}a^{n-2}b - \cdots - p_2 a^2 b^{n-3} - p_1 a b^{n-2} - p_0 b^{n-1}\Big)}_{\in\mathbb{Z} \quad \text{car } a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N} \text{ et } p \text{ est un polynôme à coefficients entiers}}$$

Ainsi, b divise $p_n a^n$.
Comme a et b n'ont pas de diviseurs communs (autres que ± 1), alors [2] b divise p_n.

$\square$

Conséquence

Si p est un polynôme à coefficients entiers de coefficient dominant 1, alors les seuls zéros de p possibles sont :

a) un diviseur entier du terme constant b) un nombre irrationnel

Preuve

En effet, soit le zéro est irrationnel, soit c'est une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ $(a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0)$. Dans ce dernier cas, par le lemme de Gauss, b divise 1, donc $b = 1$ et a divise le terme constant. Donc l'éventuel zéro rationnel $\frac{a}{b} = a$ divise le terme constant. $\square$

2. La preuve de ce résultat, intuitivement évident, appelé le lemme d'Euclide, est dans le cours OS.

5.8 Factorisation de polynômes de degré > 2

Méthode de factorisation

1. On tente de deviner une factorisation du polynôme p.

2. Si on échoue, on essaie de voir si ± 1 est un zéro du polynôme p.

   En effet, ± 1 est toujours dans la liste des candidats de zéros rationnels donnés par le lemme de Gauss.

3. Si ce n'est pas le cas et que le polynôme est à coefficients entiers, on utilise le lemme de Gauss pour trouver un zéro rationnel.

Si aux étapes 2 ou 3, on trouve un zéro de p, appelons-le b, on utilise le schéma de Horner pour factoriser le polynôme p par $x - b$.

$$p(x) = (x - b)q(x) + p(b) \overset{p(b)=0}{=} (x - b)q(x)$$

On obtient ainsi une étape de factorisation avec un polynôme q de degré $n - 1$. Si ce polynôme est du deuxième degré, alors on peut factoriser q à l'aide de la formule de Viète (voir page 48). Sinon, on recommence au point 1 de cette méthode pour le polynôme q.

Exemple de factorisation

Factorisons le polynôme $p(x) = 6x^3 - 17x^2 + 5$.

On ne voit pas de factorisation évidente et les nombres ± 1 ne sont pas des zéros de p.

Comme p est un polynôme à coefficients entiers, on peut appliquer le lemme de Gauss qui dit que $Z \cap \mathbb{Q} \subset \{\pm 1, \pm 5, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{5}{6}\}$. En fait, on a $p(-\frac{1}{2}) = 0$.

Pour avancer la factorisation, on utilise Horner avec $b = -\frac{1}{2}$.

6	-17	0	5	$-\frac{1}{2}$
0	-3	10	-5	
6	-20	10	$\boxed{0}$	

Ainsi, on a $p(x) = (x + \frac{1}{2})(6x^2 - 20x + 10) = (2x + 1)(3x^2 - 10x + 5)$. Il reste à factoriser le polynôme de degré 2. On utilise donc la formule de Viète pour factoriser ce polynôme de degré 2, et on obtient ainsi

$$p(x) = 3\Big(2x + 1\Big)\left(x - \frac{5 + \sqrt{10}}{3}\right)\left(x - \frac{5 - \sqrt{10}}{3}\right)$$

Remarquons que le lemme de Gauss ne permet pas de factoriser le polynôme $3x^2 - 10x + 5$, car ses zéros sont irrationnels ; il est donc essentiel d'utiliser la formule de Viète.

Exemple de recherche d'un zéro

On cherche les zéros du polynôme $p(x) = x^3+3x-2$ (c'est-à-dire les solutions de l'équation $x^3 + 3x - 2 = 0$).

Comme p est à coefficients entiers, on peut appliquer le lemme de Gauss.

Le lemme de Gauss dit que $Z \cap \mathbb{Q} \subset \big\{ \pm 1, \pm 2 \big\}$.

> Cela signifie que s'il existe un zéro rationnel (c'est-à-dire un élément de l'ensemble $Z \cap \mathbb{Q}$), alors il vaut ± 1 ou ± 2 (car il appartient à l'ensemble $\{\pm 1, \pm 2\}$).
>
> On trouve ces quatre valeurs en suivant l'énoncé du lemme de Gauss.
>
> > a est un diviseur du terme constant -2, donc $a \in \{-2, -1, 1, 2\}$.
> > b est un diviseur du coefficient dominant 1, donc $b = 1$.
>
> Et on combine a et b de manière à écrire toutes les fractions possibles avec a comme numérateur et b comme dénominateur.

Malheureusement, on a $p(-2) = -16$, $p(-1) = -6$, $p(1) = 2$ et $p(2) = 12$. Par conséquent, le lemme de Gauss permet d'affirmer que p n'a pas de zéro rationnel.

En fait, voici son seul zéro réel et on vient de prouver qu'il est irrationnel !

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} \quad \cong \quad 0.59607$$

Cette solution a été trouvée grâce à la formule de Cardan qui permet de résoudre n'importe quelle équation du troisième degré (voir le cours sur les nombres complexes donné aux options scientifiques).

Exemple de résolution d'une équation

On cherche à résoudre l'équation $x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$.

Afin de pouvoir appliquer le lemme de Gauss (il faut des coefficients entiers), on multiplie par 2 chaque membre de cette équation. On a ainsi l'équation équivalente :

$$2x^3 - x^2 - x - 3 = 0$$

On pose $p(x) = 2x^3 - x^2 - x - 3$ qui est un polynôme à coefficients entiers. On peut donc appliquer le lemme de Gauss.

Le lemme de Gauss dit que $Z \cap \mathbb{Q} \subset \big\{ \pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2} \big\}$.

On remarque que $\frac{3}{2}$ est solution et grâce au schéma de Horner, on peut factoriser le polynôme de la manière suivante.

$$p(x) = (x - \tfrac{3}{2})(2x^2 + 2x + 2) = 2(x - \tfrac{3}{2})(x^2 + x + 1) = (2x - 3)(x^2 + x + 1)$$

Par la propriété du produit, on a $p(x) = 0 \iff x = \frac{3}{2}$ ou $x^2 + x + 1 = 0$.

Comme $x^2 + x + 1 = 0$ n'admet pas de solution réelle (le discriminant est négatif), on constate que l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{\frac{3}{2}\}$.

Inconvénients de cette méthode de factorisation

1. Le lemme de Gauss ne permet que de trouver les éventuelles solutions rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers. S'il n'y a que des solutions irrationnelles, le lemme de Gauss sera totalement inefficace !

2. De plus, cette méthode ne permet pas de trouver la factorisation d'un polynôme p qui n'admet pas de polynômes de degré 1 dans sa factorisation. Par exemple, elle ne fonctionne pas pour le polynôme suivant qui se factorise pourtant aisément à l'aide d'une identité remarquable.

   $$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$$

   Ou encore le polynôme $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ dont la factorisation s'obtient en cherchant des nombres a et b tels que $p(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$.

   Voici la factorisation de ce polynôme :

   $$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \left(x^2 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,x + 1\right)\left(x^2 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,x + 1\right)$$

5.9 Polynômes irréductibles

Souvent, on écrit un polynôme de degré n en utilisant la notation vue en page 47.

$$p(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + p_{n-2}x^{n-2} + \cdots + p_2x^2 + p_1x + p_0$$

Mais, parfois, on a besoin d'écrire un polynôme sous la forme de produits de polynômes, c'est le principe de la *factorisation*.

Définition

Un polynôme p est un polynôme *irréductible* s'il ne peut pas se factoriser. Par exemple, les polynômes suivants sont irréductibles (sur $\mathbb{R}$).

$$x + 4 \qquad 2 - x \qquad x^2 + 1 \qquad x^2 + x + 1$$

Tandis que les polynômes suivants sont *réductibles*.

$$x^2 \qquad x^2 - 1 \qquad x^2 + 2x + 1 \qquad 2x^2 - 3x - 5 \qquad x^3 + x^2 + x + 1$$

Attention : bien que $x + 4 = \frac{1}{2}(2x + 8)$, il ne s'agit pas d'une *vraie* factorisation (sinon aucun polynôme n'aurait la possibilité d'être irréductible !).

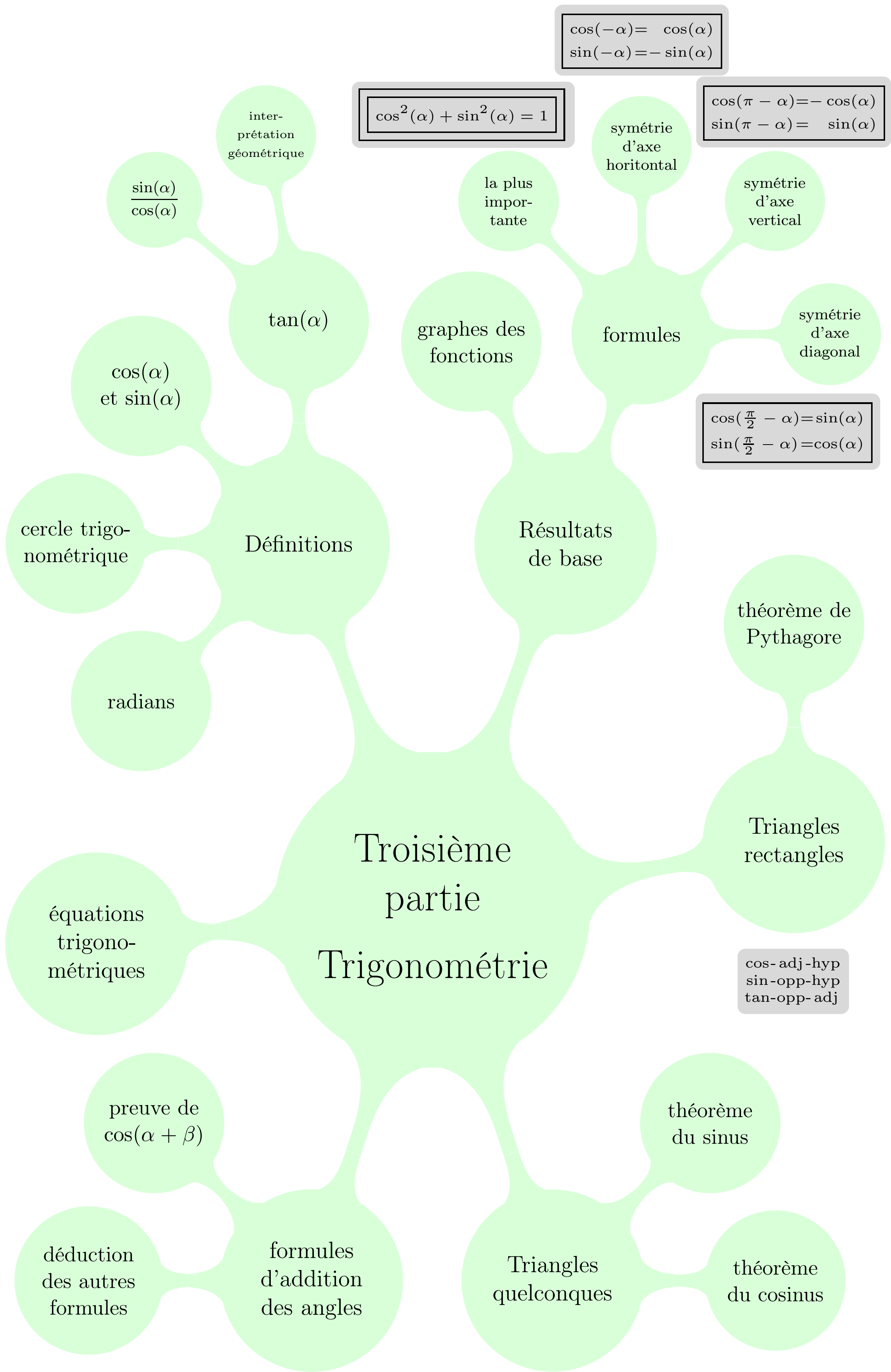
Voici les factorisations des polynômes réductibles ci-dessus en polynômes irréductibles.

$$x \cdot x \qquad (x - 1)(x + 1) \qquad (x + 1)^2 \qquad (2x - 5)(x + 1) \qquad (x^2 + 1)(x + 1)$$

Remarque (démontrable si on se place dans les nombres complexes)

Les seuls polynômes à coefficients réels irréductibles (dans $\mathbb{R}$) sont :

1. Les polynômes du premier degré.
2. Les polynômes du deuxième degré dont le discriminant est négatif.



Troisième partie
Trigonométrie
Définitions
tan(α)
$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
inter-prétation géométrique
cos(α) et sin(α)
cercle trigo-nométrique
radians
Résultats de base
graphes des fonctions
formules
la plus impor-tante
$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$
symétrie d'axe horitontal
$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
symétrie d'axe vertical
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
symétrie d'axe diagonal
$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$
$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha)$
Triangles rectangles
théorème de Pythagore
cos-adj-hyp
sin-opp-hyp
tan-opp-adj
équations trigono-métriques
formules d'addition des angles
preuve de $\cos(\alpha + \beta)$
déduction des autres formules
Triangles quelconques
théorème du sinus
théorème du cosinus

Chapitre 6

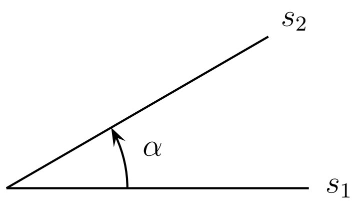
Trigonométrie

6.1 Le cercle trigonométrique

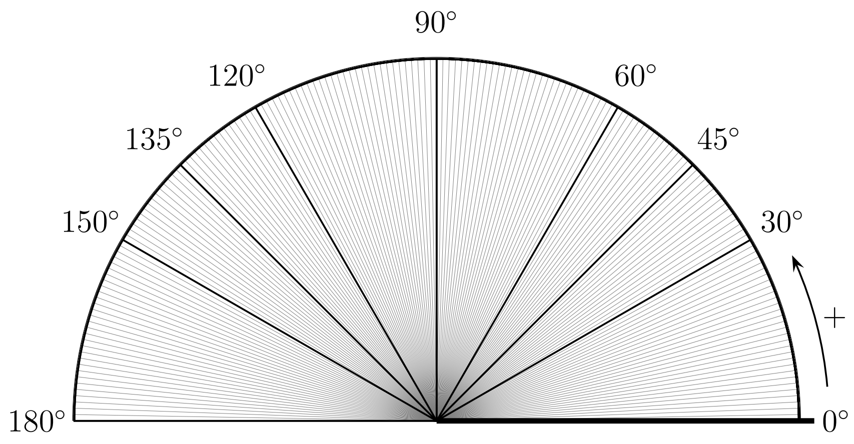
6.1.1 Les angles

Développée par les Grecs il y a plus de 2000 ans, la trigonométrie est une partie des mathématiques qui s'occupe des relations entre les longueurs et les angles des triangles. Le mot trigonométrie est dérivé des trois mots grecs *tri* (trois), *gonôs* (angles) et *metron* (mesure).

Un angle est une grandeur permettant de décrire l'amplitude d'une rotation. On utilise très souvent les lettres grecques α (alpha), β (bêta), γ (gamma), φ (phi), ψ (psi) ou θ (thêta) pour nommer les angles.

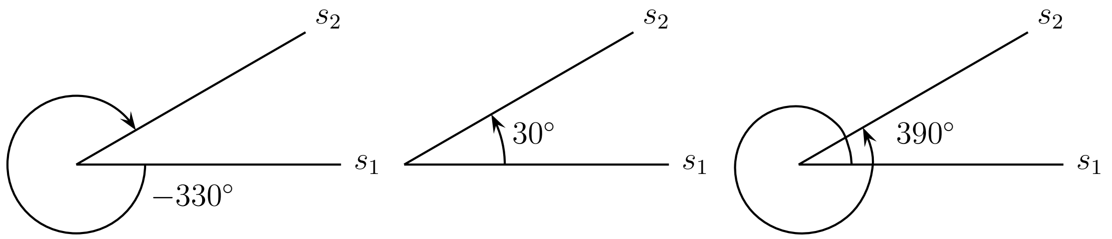


Afin de résoudre des problèmes ayant attrait à l'astronomie, les Babyloniens ont divisé le disque en 360 parties égales identifiant un *degré* [°]. On mesure le nombre de degrés depuis la demi-droite de référence du 0° dans le *sens trigonométrique* (sens contraire de celui des aiguilles d'une montre).



On peut mesurer les angles à l'aide d'un *rapporteur*.

Attention, à une même situation peuvent correspondre plusieurs angles (une infinité !). En effet, on peut faire autant de tours que l'on veut dans un sens comme dans l'autre. Par exemple, voici trois façons d'amener le segment s_1 sur le segment s_2 par une rotation.



Voici quelques uns des angles correspondant à la situation ci-dessus.

$$\ldots, -1050°, -690°, -330°, 30°, 390°, 750°, 1110°, \ldots$$

Ces angles sont les mêmes à un multiple de 360° près, ce qui correspond à un tour.

Définition

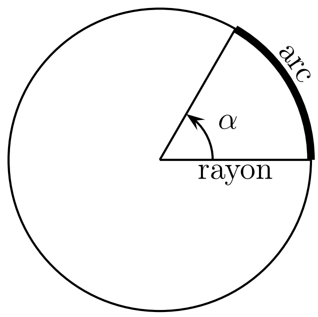
Un angle α est dit
c) *aigu* si $\alpha > 0°$ et $\alpha < 90°$;
d) *droit* si $\alpha = 90°$;
e) *obtus* si $\alpha > 90°$ et $\alpha < 180°$;
f) *plat* si $\alpha = 180°$.

Les radians

Lorsqu'on trace un arc de cercle comme montré ci-contre, les mathématiciens ont remarqué que le nombre

$$\alpha = \frac{\text{longueur d'arc}}{\text{rayon du cercle}}$$

est indépendant de la grandeur du rayon. En munissant ce nombre d'un signe selon le sens de parcours de l'arc de cercle, on obtient un angle en *radians*.



Cas particulier Lorsque le rayon du cercle vaut 1, le radian est exactement la longueur de l'arc de cercle (sans oublier le signe indiquant le sens de parcours).

Relation entre les degrés et les radians

Sur un cercle de rayon 1, 360° correspondent à un tour complet, donc à un arc de cercle de longueur 2π (c'est le périmètre du cercle de rayon 1). Ainsi 360° correspondent à 2π radians. De même, 180° correspondent à π radians et 90° correspondent à $\frac{\pi}{2}$ radians.

$$2\pi \longleftrightarrow 360° \qquad \boxed{\pi \longleftrightarrow 180°} \qquad \frac{\pi}{2} \longleftrightarrow 90°$$

Remarque

La mesure d'un angle en radians étant un rapport de longueurs, un radian est juste un nombre sans unités.

Attention

Sauf mention explicite (par le symbole °), un angle est toujours exprimé en radians.

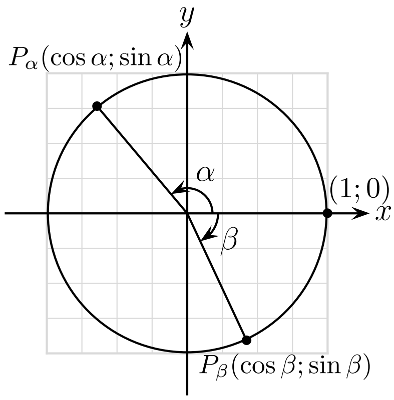
6.1.2 Le cercle trigonométrique

Définition

Dans le plan, le cercle centré à l'origine de rayon 1 est appelé *cercle trigonométrique.*

Le cosinus et le sinus d'un angle

À chaque angle α, on trouve un unique point P_α sur le cercle trigonométrique qui correspond à la rotation d'angle α du point extrême droit du cercle (dont les coordonnées sont $(1;0)$) centrée à l'origine (dont les coordonnées sont $(0;0)$). Ce point a deux coordonnées. On définit le *cosinus de l'angle* α, noté $\cos(\alpha)$, comme étant la première coordonnée de ce point P_α et le *sinus de* α, noté $\sin(\alpha)$, comme étant sa deuxième coordonnée.



Par exemple, pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (ou $\alpha = 90°$), on trouve $P_{\frac{\pi}{2}}(0;1)$. Ainsi, on a $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. On voit de même que $\cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$ et $\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$, car $P_{\frac{3\pi}{2}}(0;-1)$.

On peut donc déjà déterminer quelques valeurs pour $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos(\alpha)$	1	0	-1	0	1
$\sin(\alpha)$	0	1	0	-1	0

Relation fondamentale entre le cosinus et le sinus

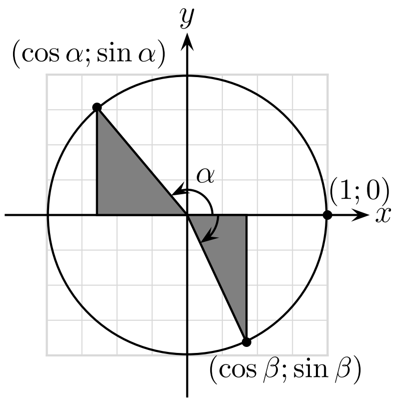
Quelque soit l'angle α, on a la formule suivante :

$$\boxed{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1}$$

Cette formule permet de déterminer le cosinus (au signe près) lorsque seul le sinus est connu, ou vice-versa.

Preuve

Pour n'importe quel angle α, on peut dessiner un triangle. S'il n'est pas dégénéré, il s'agit d'un triangle rectangle d'hypoténuse 1 dont le côté horizontal est de longueur $|\cos(\alpha)|$ et le côté vertical est de longueur $|\sin(\alpha)|$.



On trouve donc par Pythagore, la formule désirée :

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

Si le triangle est dégénéré, la relation ci-dessus est évidente. □

6.1.3 Formules de symétrie

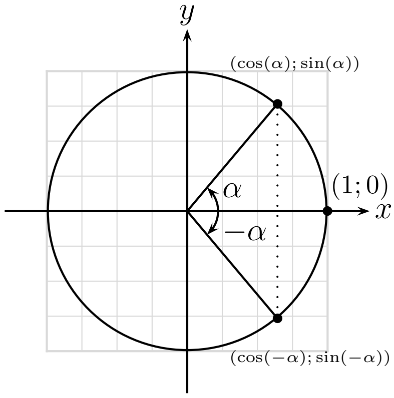
La symétrie d'axe horizontal $y = 0$

Lorsqu'à un angle α, on associe l'angle $-\alpha$, les points correspondants sur le cercle sont symétriques par rapport à l'axe horizontal.

Cette symétrie ne change pas la première coordonnée d'un point du plan, mais elle change le signe de la deuxième coordonnée.

D'où les *formules de symétrie pour l'axe horizontal* $y = 0$ suivantes.

$$\boxed{\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)}$$
$$\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)}$$



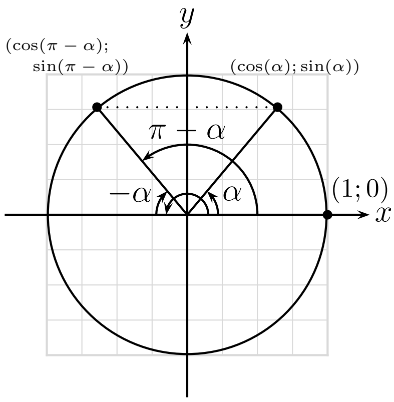
La symétrie d'axe vertical $x = 0$

Lorsqu'à un angle α, on associe l'angle $\pi - \alpha$, les points correspondants sur le cercle sont symétriques par rapport à l'axe vertical.

Cette symétrie change le signe de la première coordonnée d'un point du plan, mais elle ne change pas la deuxième coordonnée.

D'où les *formules de symétrie pour l'axe vertical* $x = 0$ suivantes.

$$\boxed{\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)}$$
$$\boxed{\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)}$$



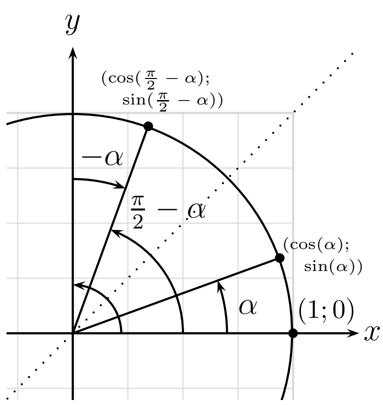
La symétrie d'axe diagonal $y = x$

Lorsqu'à un angle α, on associe l'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$, les points correspondants sur le cercle sont symétriques par rapport à l'axe diagonal.

Cette symétrie échange les coordonnées (la première devient la deuxième et vice-versa).

D'où les *formules de symétrie pour l'axe diagonal* $y = x$ suivantes.

$$\boxed{\sin(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha)}$$
$$\boxed{\cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)}$$



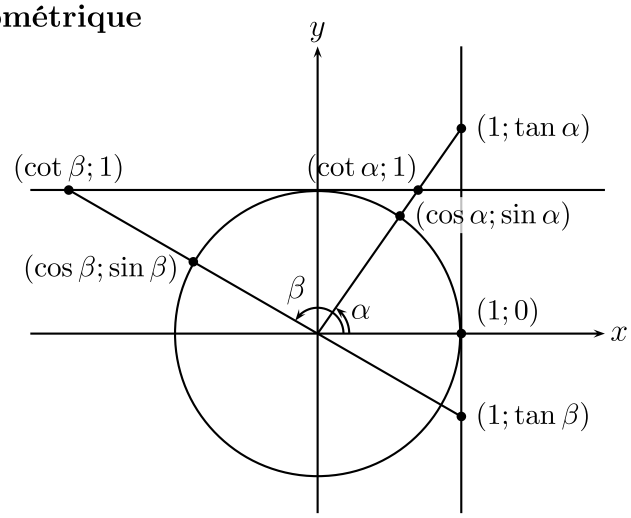
6.1.4 Les fonctions tangente et cotangente

Définition

On définit les fonctions réelles *tangente* et *cotangente* comme suit

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \qquad \text{et} \qquad \cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

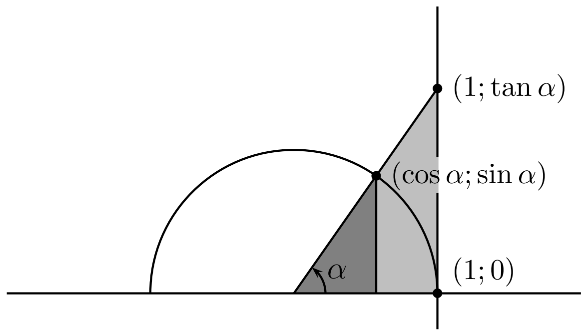
Interprétation géométrique



On remarque que $\tan(\alpha)$ est la hauteur du point d'intersection entre la droite passant par $(0,0)$ et $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ avec la droite verticale tangente au cercle trigonométrique au point $(1;0)$. D'où son appellation de tangente.

Preuve de l'interprétation géométrique pour la formule de la tangente

On exhibe à partir du dessin deux triangles semblables.



Les triangles gris foncé et gris clair (sous le gris foncé) sont semblables. Ainsi, en multipliant les longueurs des trois côtés du petit triangle par le même facteur, appelé *facteur d'homothétie*, on doit pouvoir trouver les longueurs des trois côtés du grand triangle. On voit que le facteur d'homothétie est $\frac{1}{\cos(\alpha)}$. Ainsi la hauteur du grand triangle vaut

$$\tan(\alpha) = \underbrace{\sin(\alpha)}_{\substack{\text{hauteur du}\\ \text{petit triangle}}} \cdot \overbrace{\frac{1}{\cos(\alpha)}}^{\text{facteur d'homothétie}} = \underbrace{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}_{\substack{\text{hauteur du}\\ \text{grand triangle}}}$$

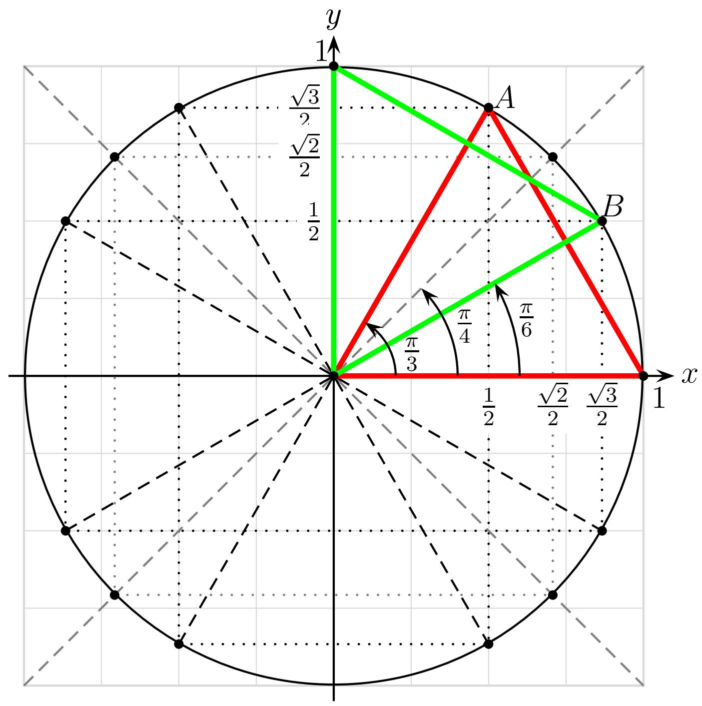
□

6.2 Valeurs des fonctions trigonométriques

Les colonnes grisées sont à savoir par cœur en toute circonstance !

α	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$	0
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$	1
$\tan(\alpha)$	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	↯

Pour s'en souvenir, le lecteur pourrait juger utile d'avoir en tête le schéma suivant.



Sur une montre, on voit

les angles multiples de $\frac{\pi}{6}$

Preuve des valeurs grisées

1. On considère le triangle rouge de sommets $(0,0)$, $A(\frac{1}{2};y)$ et $(1;0)$. Par symétrie d'axe vertical $x=\frac{1}{2}$, on affirme que le côté gauche est de même longueur que le côté droit ; cette longueur est égale au rayon du cercle trigonométrique qui vaut 1. Le triangle est donc équilatéral, et ses angles valent $\frac{\pi}{3}$. Grâce au théorème de Pythagore, on montre facilement que $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Par définition, on a $\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Grâce à la symétrie d'axe diagonal $y=x$, on passe du triangle rouge au triangle vert de sommets $(0,0)$, $B(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2})$ et $(0;1)$. Ainsi l'angle qui définit le point B sur le cercle trigonométrique vaut $\frac{\pi}{6}$ (car le triangle vert est équilatéral, donc ses angles valent $\frac{\pi}{3}$). Par définition, on a $\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$.
3. Quant à $\cos(\frac{\pi}{4})$ et à $\sin(\frac{\pi}{4})$, ils ont la même valeur, notée x, que l'on trouve grâce à la relation $\cos^2(\frac{\pi}{4})+\sin^2(\frac{\pi}{4})=1$ qui est équivalente à $x^2+x^2=1$, c'est-à-dire $x^2=\frac{1}{2}$ et ainsi, comme x est positif, on obtient $x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6.3 Les triangles rectangles

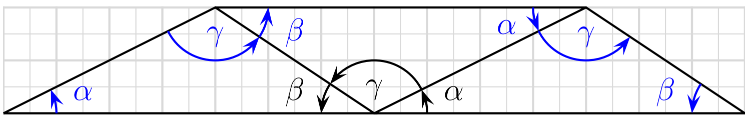
On va tout d'abord étudier dans quels cas on peut trouver toutes les longueurs des côtés des triangles rectangles sans s'occuper des angles. Ensuite, on fera de même, mais en utilisant l'information supplémentaire que les angles nous apportent.

Convention Les angles d'un triangle sont toujours compris entre 0 et π.

Théorème sur les triangles quelconques

La somme des angles d'un triangle quelconque vaut π.
Donc si on connaît deux angles d'un triangle, on peut en déduire le troisième angle.

Preuve par contemplation

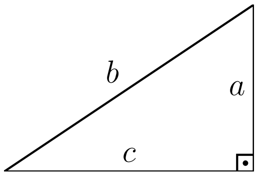


Définition Un triangle qui a un angle droit est appelé *triangle rectangle*.

Théorème de Pythagore

On considère le triangle rectangle ci-contre. Les longueurs des côtés de ce triangle satisfont la relation de Pythagore :

$$a^2 + c^2 = b^2$$

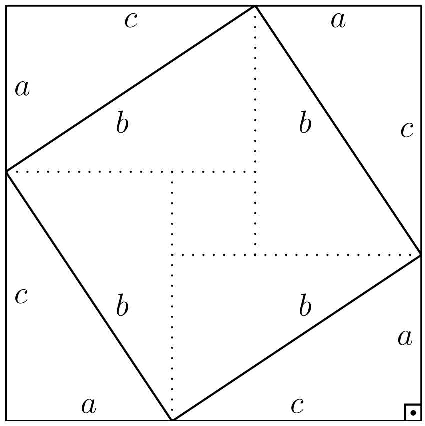


Preuve

On construit un grand carré en disposant le même triangle rectangle dans chaque coin. On obtient ainsi un grand carré de côté $a + c$ dans lequel se trouve un petit carré de côté b (puisque la somme des deux angles non droits du triangle rectangle vaut $\frac{\pi}{2}$).

L'aire de ce grand carré peut être calculée de deux façons différentes. On peut aussi dire qu'il s'agit de l'aire du petit carré plus l'aire des quatre triangles.

$$(a+c)^2 = b^2 + 4\cdot\frac{ac}{2} \iff a^2 + 2ac + c^2 = b^2 + 2ac$$
$$\iff a^2 + c^2 = b^2 \qquad \square$$



En résumé

Le théorème de Pythagore permet de déterminer les longueurs de tous les côtés d'un triangle rectangle si deux de ces longueurs sont déjà connues.

Néanmoins, si seulement une longueur d'un côté est connue, le théorème de Pythagore est inutilisable, même si un angle (différent de l'angle droit) est aussi connu.

On a donc besoin de mettre en relation les angles et les longueurs des côtés dans un triangle rectangle.

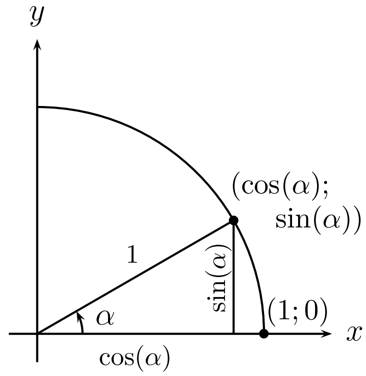
Les côtés d'un triangle rectangle et les fonctions trigonométriques

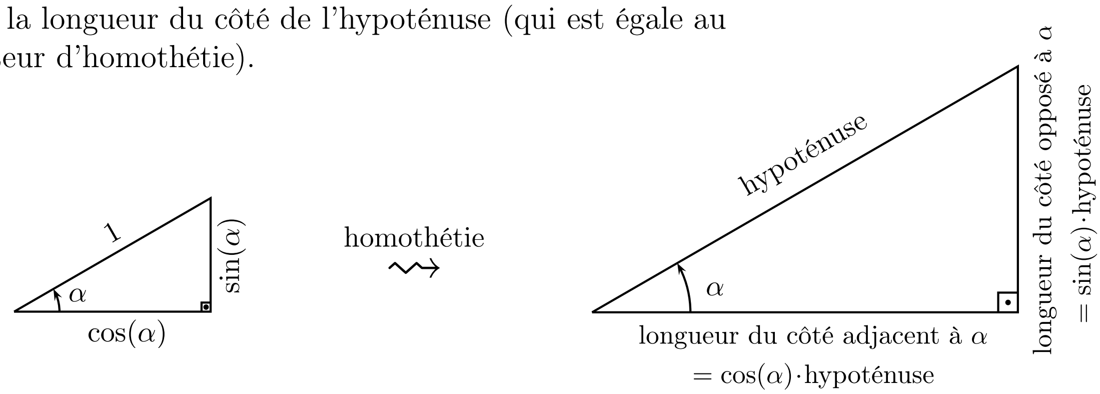
A chaque angle α entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on peut associer un triangle rectangle de côtés de longueur 1 (pour l'hypoténuse) et $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$ pour les deux cathètes.

Tout triangle rectangle est, à une homothétie (agrandissement ou rapetissement) près, un triangle rectangle pouvant se voir de la façon décrite ci-contre.

On a donc une méthode pour mettre en relation un angle d'un triangle rectangle avec la longueur de ses côtés.

Pour déterminer les longueurs des côtés lorsque l'hypoténuse ne vaut pas 1, on multiplie toutes les longueurs par la longueur du côté de l'hypoténuse (qui est égale au facteur d'homothétie).





On peut donc utiliser les fonctions cosinus et sinus pour établir des formules reliant les grandeurs des différents côtés d'un triangle rectangle. Mais avant, on va définir une nouvelle fonction trigonométrique sur laquelle on reviendra plus loin.

Définition Soit α un angle, on définit la *tangente* de cet angle α de la façon suivante.

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$

Relations entre les fonctions trigonométriques et les longueurs des côtés d'un triangle rectangle

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}}}$$ penser à « cos-adj-hyp »

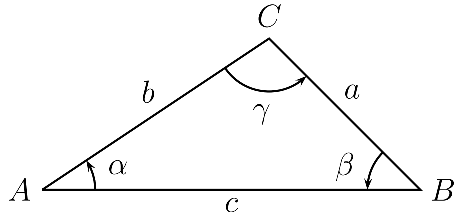
$$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}}}$$ penser à « sin-opp-hyp »

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \boxed{\tan(\alpha) = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \alpha}{\text{longueur du côté adjacent à } \alpha}}$$ penser à « tan-opp-adj »

Remarque

Grâce aux fonctions trigonométriques, il suffit maintenant de connaître
– la longueur d'au moins deux côtés d'un triangle rectangle, ou
– la longueur d'un côté d'un triangle rectangle et un angle (différent de l'angle droit),
pour pouvoir en déterminer toutes ses caractéristiques (angles et longueurs des côtés).

6.4 Les triangles quelconques

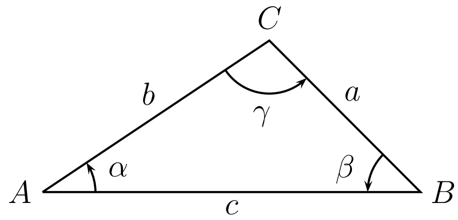


Convention On note les sommets dans le sens positif par A, B et C. Les angles associés aux sommets seront respectivement noté α, β et γ. Quant aux côtés opposés aux sommets, ils seront appelés a, b et c respectivement au nom du sommet opposé.

Cette convention est très importante et doit être RESPECTÉE dans le but de pouvoir appliquer les théorèmes qui suivent.

Lorsqu'on avait affaire à des triangles rectangles, la connaissance de deux caractéristiques (angle ou longueur de côté) nous permettait de trouver toutes ses caractéristiques. Dans le cas d'un triangle quelconque, c'est au moins trois caractéristiques qu'ils faut connaître pour pouvoir déterminer toutes les autres. Les mathématiciens ont trouvé deux théorèmes extrêmement utiles.

Théorème du sinus



Considérons un triangle quelconque.
On a la relation suivante.

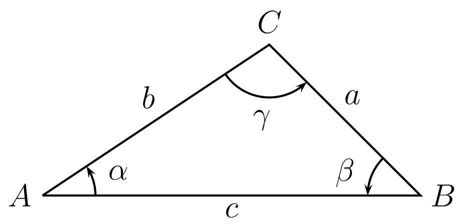
$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

ou, de manière équivalente

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Autrement dit : dans un triangle quelconque, le rapport du sinus d'un angle au côté opposé à cet angle est égal au rapport du sinus d'un autre angle au côté opposé à cet autre angle.

Théorème du cosinus



Considérons un triangle quelconque.
On a les relations suivantes.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

Autrement dit : le carré de la longueur d'un côté d'un triangle quelconque est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés moins deux fois le produit des longueurs des deux autres côtés multiplié par le cosinus de l'angle entre-eux.

Pour passer d'une relation à l'autre, on fait les permutations circulaires suivantes.

Cela nous permet de ne mémoriser qu'une seule relation.

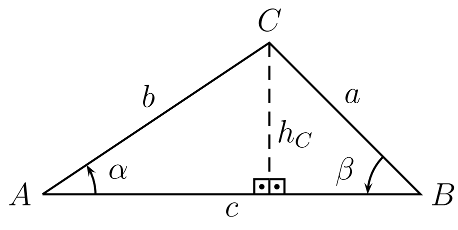
Preuve du théorème du sinus

Considérons un triangle ABC quelconque et utilisons la hauteur partant du sommet C.

Trois cas se produisent.

1. Premier cas : la hauteur 'tombe' à l'intérieur du triangle.

   La hauteur sépare le triangle ABC en deux triangles rectangles.

   Grâce à «sin-opp-hyp», on trouve

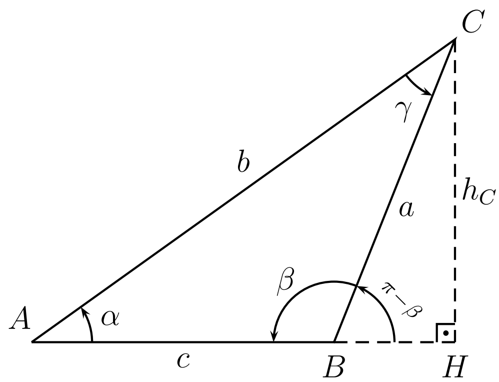
   $$\sin(\alpha) = \frac{h_C}{b} \quad \text{et} \quad \sin(\beta) = \frac{h_C}{a}$$

   Ainsi, on a $h_C = b\sin(\alpha)$ et $h_C = a\sin(\beta)$. Par conséquent $b\sin(\alpha) = a\sin(\beta)$.

   Donc
   $$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

2. Deuxième cas : la hauteur 'tombe' à l'extérieur du triangle.

   Grâce à la hauteur, on voit apparaître deux triangles rectangles, AHC et BHC.

   Grâce à «sin-opp-hyp», on trouve

   $$\sin(\alpha) = \frac{h_C}{b} \ \text{et} \ \sin(\pi - \beta) = \frac{h_C}{a}$$

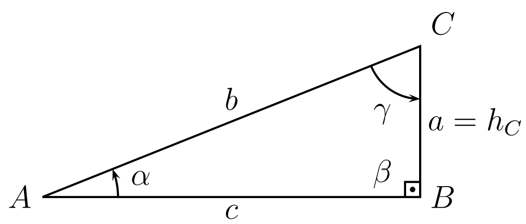
   Ainsi, on a $b \cdot \sin(\alpha) = h_C = a \cdot \sin(\pi - \beta)$.

   Donc
   $$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\pi - \beta)}{b} \overset{\text{page } 64}{=} \frac{\sin(\beta)}{b}$$

   Si la hauteur était tombée à gauche plutôt qu'à droite, le raisonnement aurait été similaire (échanger A et B, a et b, et α et β).

3. Troisième cas : la hauteur 'tombe' sur le sommet B.

   Le triangle ABC est rectangle. Le côté a correspond à la hauteur h_C.

   Grâce à «sin-opp-hyp» et à la relation $a = h_C$, on trouve

   $$\sin(\alpha) = \frac{h_C}{b} \quad \text{et} \quad \sin(\beta) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 = \frac{h_C}{a}$$

   Ainsi, on a $b \cdot \sin(\alpha) = h_C = a \cdot \sin(\beta)$.

   Donc
   $$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

   Si la hauteur était tombée sur le sommet A au lieu du sommet B, le raisonnement aurait été similaire (échanger A et B, a et b, et α et β).

Par conséquent, quelque soit le triangle ABC, on a (grâce à la hauteur partant de C)

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

En effectuant la même chose pour la hauteur partant du sommet A, on trouve

$$\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

Ainsi, on a la formule annoncée

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

qui est équivalente à

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

$\square$

Preuve du théorème du cosinus

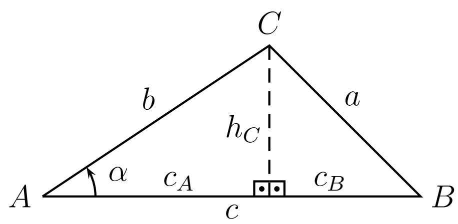
Considérons un triangle ABC quelconque et utilisons la hauteur partant du sommet C.

Montrons d'abord la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.

Cette formule n'étant pas symétrique en a et b (et en α et β), on doit distinguer 5 cas.

1. Premier cas : la hauteur 'tombe' à l'intérieur du triangle.

   La hauteur sépare le triangle ABC en deux triangles rectangles. Elle coupe aussi l'arête c en deux parties c_A et c_B.

   En appliquant le théorème de Pythagore, on voit que $a^2 = h_C^2 + c_B^2$. Puisque $c_B = c - c_A$, on a

   $$a^2 = h_C^2 + (c - c_A)^2$$

   Grâce à «cos-adj-hyp» et «sin-opp-hyp», on peut substituer h_C et c_A.

   En effet, on a

   $$\sin(\alpha) = \frac{h_C}{b} \quad \text{et} \quad \cos(\alpha) = \frac{c_A}{b}$$

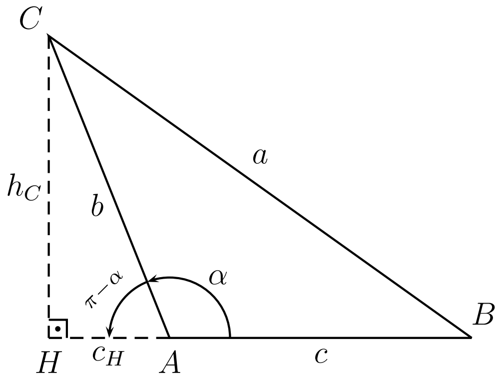
   Ainsi, on a $h_C = b \cdot \sin(\alpha)$ et $c_A = b \cdot \cos(\alpha)$. Donc

   $$\begin{aligned} a^2 &= \big(b \cdot \sin(\alpha)\big)^2 + \big(c - b \cdot \cos(\alpha)\big)^2 \\ &= b^2 \sin^2(\alpha) + c^2 + b^2\cos^2(\alpha) - 2bc\cos(\alpha) \\ &= b^2\big(\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)\big) + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ &\overset{\text{page 63}}{=} b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \end{aligned}$$

   On a donc montré la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.

2. Deuxième cas : la hauteur 'tombe' à l'extérieur du triangle sur la gauche.

   La hauteur fait apparaître un nouveau triangle rectangle, elle prolonge l'arête c en y ajoutant une arête c_H.

   En appliquant le théorème de Pythagore, on voit que $a^2 = h_C^2 + (c + c_H)^2$.

   Grâce à «cos-adj-hyp» et «sin-opp-hyp», on peut substituer h_C et c_H.

   En effet, on a

   $$\sin(\pi - \alpha) = \frac{h_C}{b} \overset{\text{page 64}}{=} \sin(\alpha) \quad \text{et} \quad \cos(\pi - \alpha) = \frac{c_H}{b} \overset{\text{page 64}}{=} -\cos(\alpha)$$

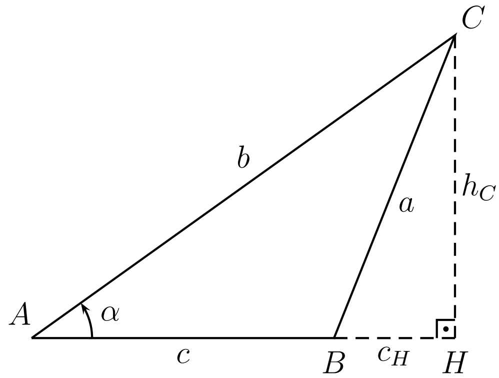
   Ainsi, on a $h_C = b \cdot \sin(\alpha)$ et $c_H = -b \cdot \cos(\alpha)$. Donc

   $$\begin{aligned} a^2 &= \big(b \cdot \sin(\alpha)\big)^2 + \big(c - b \cdot \cos(\alpha)\big)^2 \\ &= b^2 \sin^2(\alpha) + c^2 + b^2 \cos^2(\alpha) - 2bc\cos(\alpha) \\ &= b^2\big(\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)\big) + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ &\overset{\text{page 63}}{=} b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \end{aligned}$$

   On a donc montré la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.

3. Troisième cas : la hauteur 'tombe' à l'extérieur du triangle sur la droite.

   La hauteur fait apparaître un nouveau triangle rectangle, elle prolonge l'arête c en y ajoutant une arête c_H.

   En appliquant le théorème de Pythagore, on voit que $a^2 = h_C^2 + c_H^2$.

   Grâce à «cos-adj-hyp» et «sin-opp-hyp», on peut substituer h_C et c_H.

   En effet, on a

   $$\sin(\alpha) = \frac{h_C}{b} \quad \text{et} \quad \cos(\alpha) = \frac{c + c_H}{b}$$

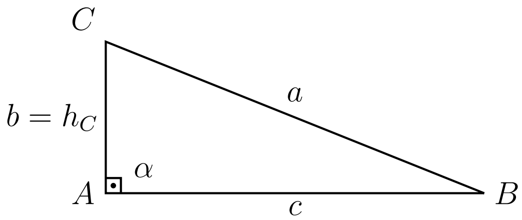
   Ainsi, on a $h_C = b \cdot \sin(\alpha)$ et $c_H = b \cdot \cos(\alpha) - c$. Donc

   $$\begin{aligned} a^2 &= \big(b \cdot \sin(\alpha)\big)^2 + \big(b \cdot \cos(\alpha) - c\big)^2 \\ &= b^2 \sin^2(\alpha) + b^2 \cos^2(\alpha) + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ &= b^2\big(\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)\big) + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ &\overset{\text{page 63}}{=} b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \end{aligned}$$

   On a donc montré la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.

4. Quatrième cas : la hauteur 'tombe' sur le sommet A.

   Le triangle ABC est rectangle. Le côté b correspond à la hauteur h_C. Ainsi, on peut appliquer Pythagore et remarquer que $\cos(\alpha) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

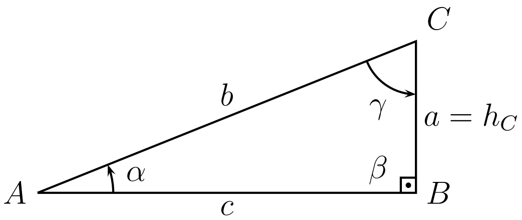
   

   Par Pythagore, on a $a^2 = b^2 + c^2$.

   Comme $\cos(\alpha) = 0$, on a ainsi la formule cherchée.
   $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

5. Cinquième cas : la hauteur 'tombe' sur le sommet B.

   Le triangle ABC est rectangle. Grâce à Pythagore, on a $a^2 = b^2 - c^2$. Or dans la formule finale, on veut $a^2 = b^2 + c^2 + \cdots$. Pour cette raison, on écrit

   $$\begin{array}{rcl} a^2 & = & b^2 - c^2 \\ & = & b^2 + c^2 - c^2 - c^2 \\ & = & b^2 + c^2 - 2c \cdot c \end{array}$$

   Comme $\cos(\alpha) = c/b$ on a $c = b\cos(\alpha)$. En remplaçant un des deux derniers c de l'expression ci-dessus par ce qu'on vient de trouver, il vient
   $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
   qui est bien la formule cherchée.

Par conséquent, quelque soit le triangle ABC, on a
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

Plutôt que de refaire cette preuve pour trouver les deux autres formules, remarquons que cette preuve résiste à une permutation circulaire des lettres A, B, C ; a, b, c et α, β, γ.

Après la permutation circulaire, le triangle est toujours réglementaire par rapport aux notations fixées en page 69. On peux donc reporter cette permutation circulaire sur la formule pour trouver
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\beta)$$

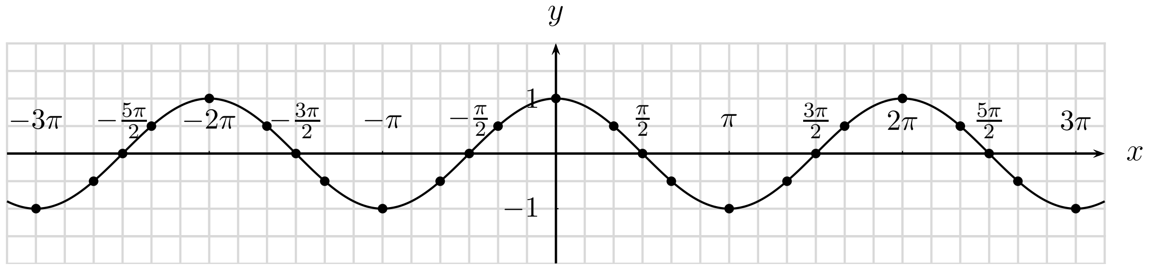
Une seconde permutation circulaire supplémentaire nous donne la troisième formule.
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$
□

6.5 Les fonctions trigonométriques

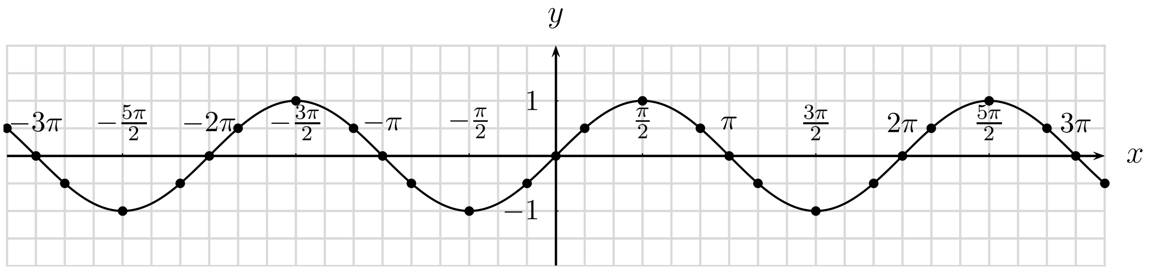
Voici les graphes des fonctions cosinus, sinus, tangente et cotangente. Grâce aux radians, on obtient des fonctions réelles (car les radians sont sans unités).

Graphe des fonctions cosinus, sinus et tangente

Voici le graphe de la fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Voici le graphe de la fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

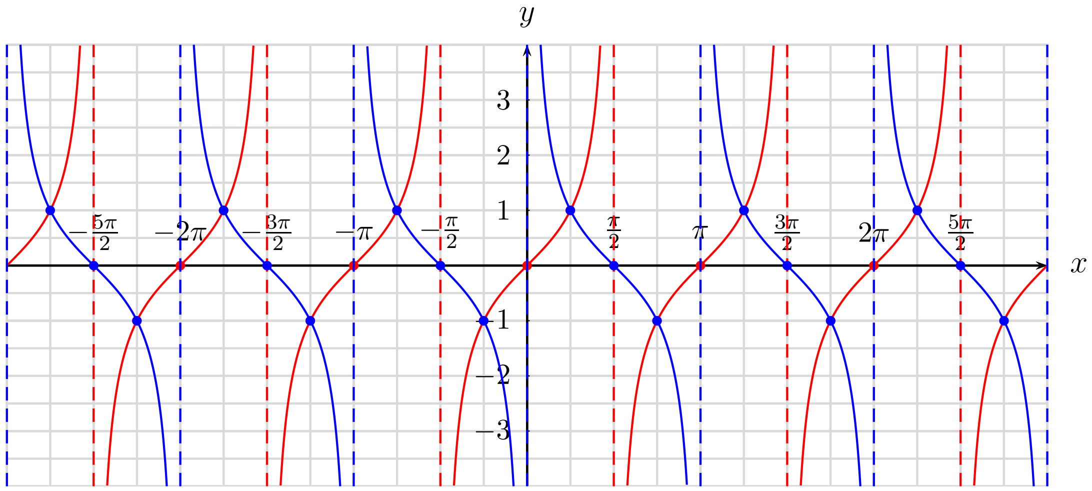


Rappelons que la tangente est définie de la manière suivante.

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \qquad \text{et} \qquad \cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

On voit ainsi qu'il y a une division par zéro lorsque le cosinus et le sinus s'annulent, il faut donc enlever au domaine de définition les ensembles de zéros des fonctions cosinus et sinus, respectivement $Z_{\cos} = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et $Z_{\sin} = \{x \in \mathbb{R} : x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Voici les graphes de $\tan : \mathbb{R} \setminus Z_{\cos} \to \mathbb{R}$ (en rouge) et de $\cot : \mathbb{R} \setminus Z_{\sin} \to \mathbb{R}$ (en bleu).



6.6 Équations trigonométriques

On a déjà résolu quelques équations trigonométriques en déterminant toutes les caractéristiques des triangles rectangles. Mais cette fois, on aborde le sujet de manière plus générale.

Définition

Une *équation trigonométrique* en la variable x (par exemple) est une équation dans laquelle apparaît une ou plusieurs fonctions trigonométriques dépendantes de x. Lorsqu'on résout une équation trigonométrique, on cherche TOUTES les valeurs de x qui la satisfont.

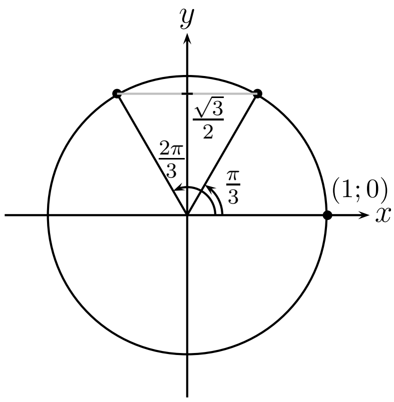
Exemple

On cherche à résoudre l'équation trigonométrique suivante.

$$\sin(5x+3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On se souvient que $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
De plus, grâce à la symétrie verticale (page 64), on a aussi

$$\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



On a donc l'équivalence suivante.

$$\sin(5x+3) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \begin{cases} 5x+3 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ \quad\text{ou} \\ 5x+3 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Le nombre entier k symbolise le nombre de tours dans un sens comme dans l'autre que l'on peut faire (rappelons qu'un tour de plus ne modifie ni le cosinus ni le sinus).

Il ne reste plus qu'à soustraire 3 et diviser par 5 pour obtenir x. Ces opérations sont réversibles, on a donc l'équivalence suivante.

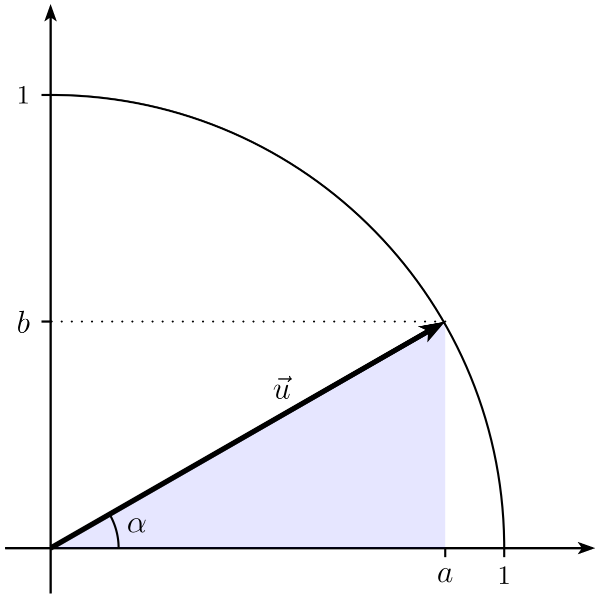
$$\sin(5x+3) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{15} - \frac{3}{5} + \frac{2\pi k}{5} \\ \quad\text{ou} \\ x = \frac{2\pi}{15} - \frac{3}{5} + \frac{2\pi k}{5} \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

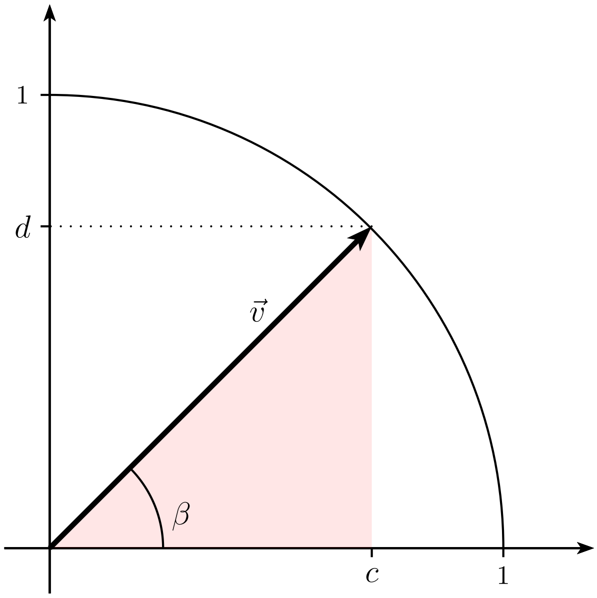
L'ensemble des solutions est donc

$$S = \left\{ \frac{\pi}{15} - \frac{3}{5} + \frac{2\pi k}{5},\ \frac{2\pi}{15} - \frac{3}{5} + \frac{2\pi k}{5} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

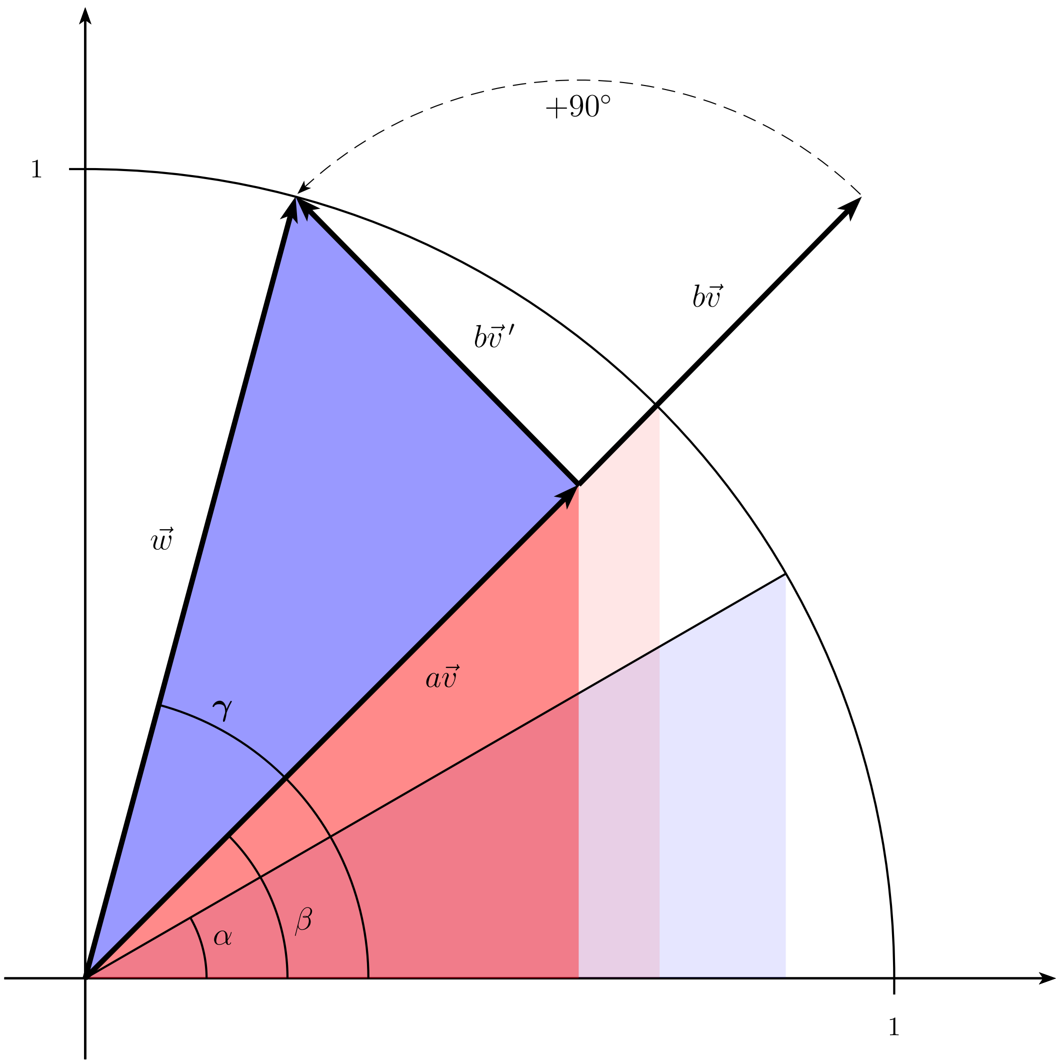
6.7 Formules trigonométriques d'additions des angles

On considère deux vecteurs de longueur 1, le premier, noté $\vec{u} = \binom{a}{b}$, est d'angle trigonométrique α et le deuxième, noté $\vec{v} = \binom{c}{d}$, est d'angle trigonométrique β.





On ajoute à a fois le vecteur $\vec{v}$, b fois le vecteur $\vec{v}\,'$ où $\vec{v}\,'$ est le vecteur $\vec{v}$ tourné de $+90°$.



Par rapport à la notation du vecteur croisé de la page 146, on a $\vec{v}\,' = -\vec{v}_\perp = \binom{-d}{c}$.
Ainsi, le vecteur obtenu, noté $\vec{w}$, est donné par

$$\vec{w} = a\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix} \qquad (\bigstar)$$

Le schéma montre que la longueur du vecteur $\vec{w}$ est exactement le produit des longueurs des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En effet, par Pythagore dans le triangle bleu foncé, la longueur de $\vec{w}$ vaut $\sqrt{a^2+b^2}$ fois la longueur de $\vec{v}$ (et $\sqrt{a^2+b^2}$ correspond à la longueur de $\vec{u}$).
Par conséquent, comme les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de longueur 1, celle de $\vec{w}$ vaut aussi 1.

On voit aussi que l'angle trigonométrique du vecteur $\vec{w}$, noté γ, est l'addition des angles trigonométriques des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En effet, le triangle bleu foncé est semblable au triangle bleu clair qui est construit à partir de $\vec{u}$, on a donc $\gamma = \alpha + \beta$.

Par définition de cosinus et de sinus, on a $\vec{u} = \binom{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$, $\vec{v} = \binom{\cos(\beta)}{\sin(\beta)}$, $\vec{w} = \binom{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$, et ainsi la relation ($\bigstar$) s'écrit

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \cos(\alpha)\begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} + \sin(\alpha)\begin{pmatrix} -\sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

En regardant composante par composante, on voit apparaître des formules de trigonométrie.

$$\begin{array}{rcccc} \cos(\alpha+\beta) & = & \cos(\alpha)\cos(\beta) & - & \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & = & \cos(\alpha)\sin(\beta) & + & \sin(\alpha)\cos(\beta) \end{array}$$

On a donc démontré le théorème suivant.

Théorème

Pour tout α, $\beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{array}{rcccc} \cos(\alpha+\beta) & = & \cos(\alpha)\cos(\beta) & - & \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & = & \sin(\alpha)\cos(\beta) & + & \cos(\alpha)\sin(\beta) \end{array}$$

Les formules trigonométriques d'addition et de soustraction d'angles

Une seule des deux formules ci-dessus permet de trouver les quatre formules suivantes.

$\cos(\alpha+\beta)$	$=$	$\cos(\alpha)\cos(\beta)$	$-$	$\sin(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha-\beta)$	$=$	$\cos(\alpha)\cos(\beta)$	$+$	$\sin(\alpha)\sin(\beta)$
$\sin(\alpha+\beta)$	$=$	$\sin(\alpha)\cos(\beta)$	$+$	$\cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\sin(\alpha-\beta)$	$=$	$\sin(\alpha)\cos(\beta)$	$-$	$\cos(\alpha)\sin(\beta)$

Remarque

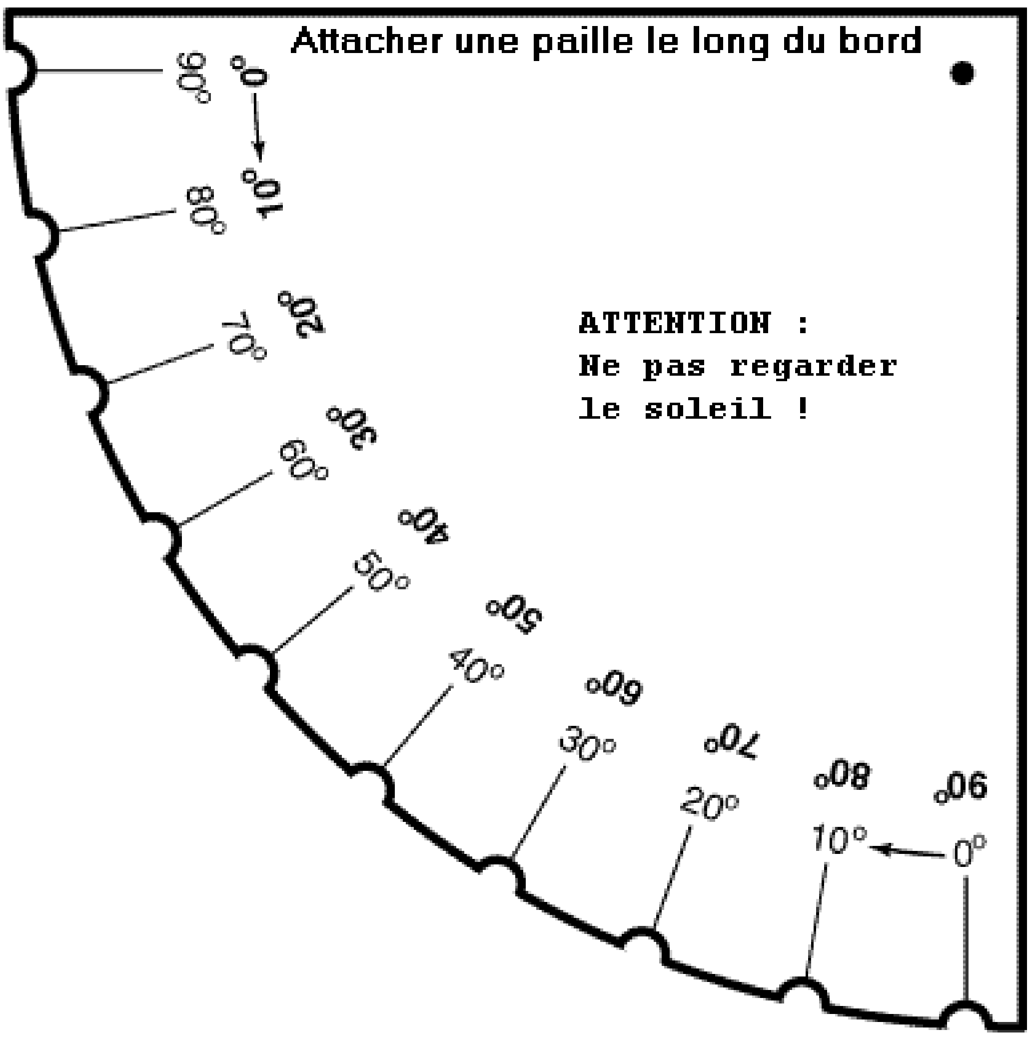
La construction géométrique vue précédemment fonctionne pour n'importe quels vecteurs. Les conclusions établies ci-dessus restent valables : la longueur de $\vec{w}$ est le produit des longueurs de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$; l'angle trigonométrique γ est la somme de α et de β.

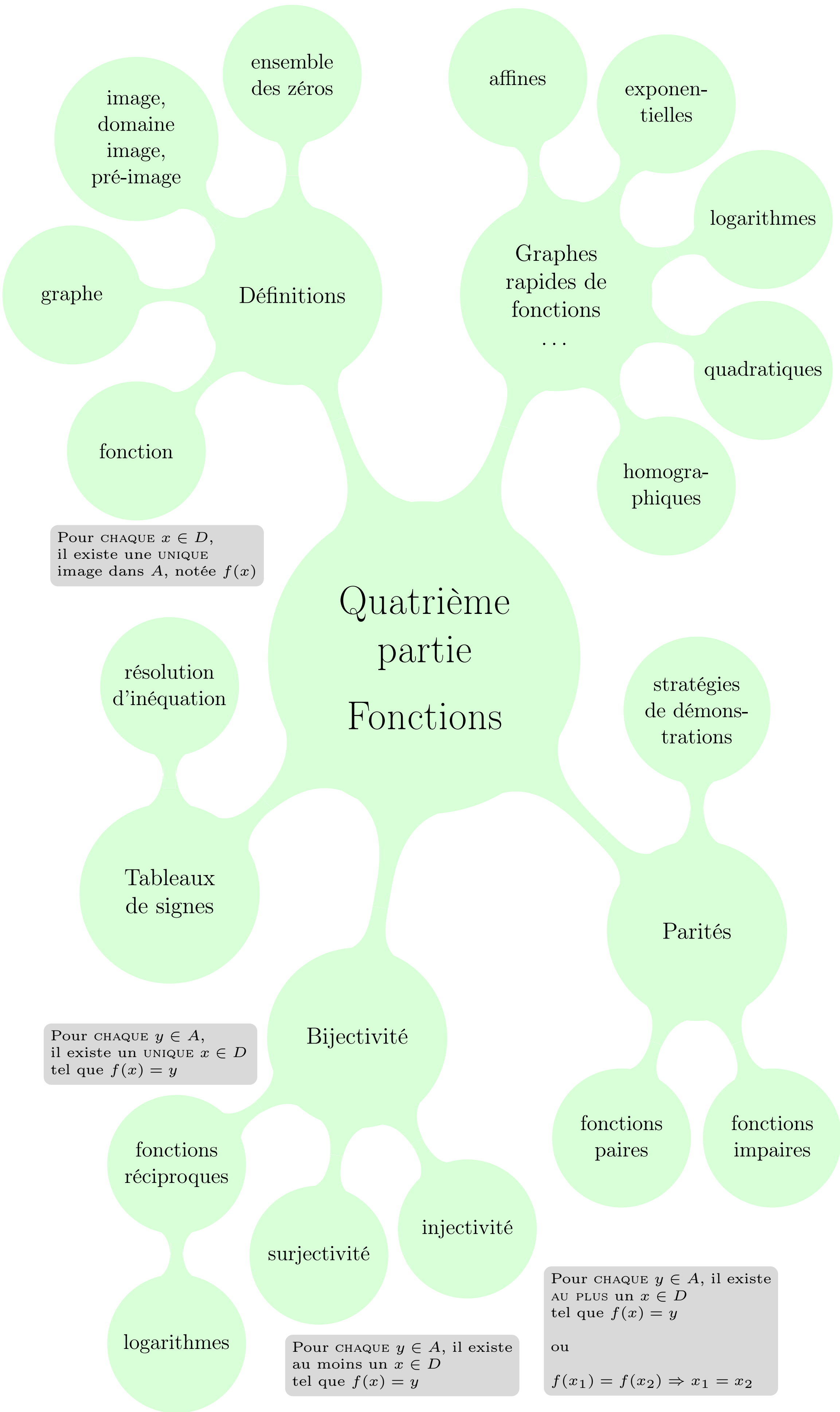
On retrouve cette construction dans le cours DF pour scientifiques lorsqu'on donnera une interprétation de la multiplication de deux nombres complexes.

Chapitre 7

Un astrolabe

Voici le modèle à découper (après avoir photocopié cette page) pour se fabriquer un astrolabe. Il s'agit d'un outil qui permet de mesurer les angles dans la nature. Pour cela, il faut une paille, un bout de ficelle que l'on noue dans le trou (dans le coin) et auquel on attache un objet pour qu'elle soit tendue. Ensuite, lorsqu'on regarde à travers la paille, la ficelle indique l'angle d'inclinaison.




Quatrième partie
Fonctions
Définitions
image, domaine image, pré-image
ensemble des zéros
graphe
fonction
Pour CHAQUE $x \in D$, il existe une UNIQUE image dans A, notée $f(x)$
Graphes rapides de fonctions …
affines
exponen-tielles
logarithmes
quadratiques
homogra-phiques
Tableaux de signes
résolution d'inéquation
stratégies de démons-trations
Parités
fonctions paires
fonctions impaires
Bijectivité
Pour CHAQUE $y \in A$, il existe un UNIQUE $x \in D$ tel que $f(x) = y$
fonctions réciproques
logarithmes
surjectivité
Pour CHAQUE $y \in A$, il existe au moins un $x \in D$ tel que $f(x) = y$
injectivité
Pour CHAQUE $y \in A$, il existe AU PLUS un $x \in D$ tel que $f(x) = y$
ou
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Chapitre 8

Fonctions

Les fonctions se cachent partout. La plupart des phénomènes de la vie de tous les jours peuvent être examinés du point de vue des fonctions : la température en fonction de l'heure, le prix du billet de train en fonction de la distance, le prix de l'entrecôte de cheval en fonction de la quantité achetée, etc.

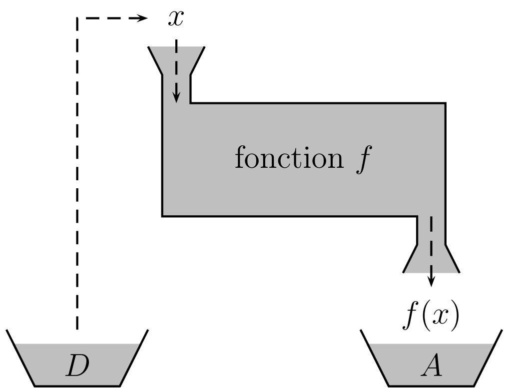
8.1 Les fonctions et leur représentations

Définition

Soit D et A deux ensembles.

Une *fonction* est une correspondance, souvent appelée f, qui assigne à CHAQUE $x \in D$ un UNIQUE élément de A, noté $f(x)$. On dit que $f(x)$ est *l'image de x par la fonction f*. D est appelé le *domaine de définition de f* et A est appelé le *domaine d'arrivée de f*.

Lorsque les ensembles D et A sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, on parle de *fonctions réelles*.



Notation mathématique $\quad f : D \to A;\ x \mapsto f(x)$

Le lecteur remarquera que la flèche qui associe à un élément de départ son image a un petit trait vertical au début !

Précision au sujet des mots 'CHAQUE' et 'UNIQUE'

Le mot 'CHAQUE' signifie que $f(x)$ existe quel que soit $x \in D$.

Le mot 'UNIQUE' signifie qu'un élément x ne peut pas avoir deux images différentes.
En termes d'implications :

$$x_1 = x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$$

«si les éléments de départs sont identiques, alors leurs images sont les mêmes»

ou (sa contraposée)

$$f(x_1) \neq f(x_2) \implies x_1 \neq x_2$$

«si les images de deux éléments sont différentes, alors ces éléments ne sont pas les mêmes»

Les trois principales façons de se représenter une fonction réelle f

1. *Le tableau de valeurs.*

   Voici un tableau de valeurs représentant la fonction f.

x	-2.5	-1	0	1	1.5	2	2.5	3	4	5.5
$f(x)$	14.25	3	-2	-5	-5.75	-6	-5.75	-5	-2	6.25

   Malheureusement, il ne permet pas de savoir quelles sont les valeurs de f en dehors de celles qui y sont inscrites. C'est donc la manière la moins pratique pour présenter une fonction.

2. *La représentation graphique.*

   La *représentation graphique* est la représentation du *graphe de* f, noté $\mathcal{G}_f$, qui est le sous-ensemble du plan suivant.

$$\boxed{\mathcal{G}_f = \big\{ \big(x; f(x)\big) : x \in D \big\}}$$

   On le dessine en deux étapes :

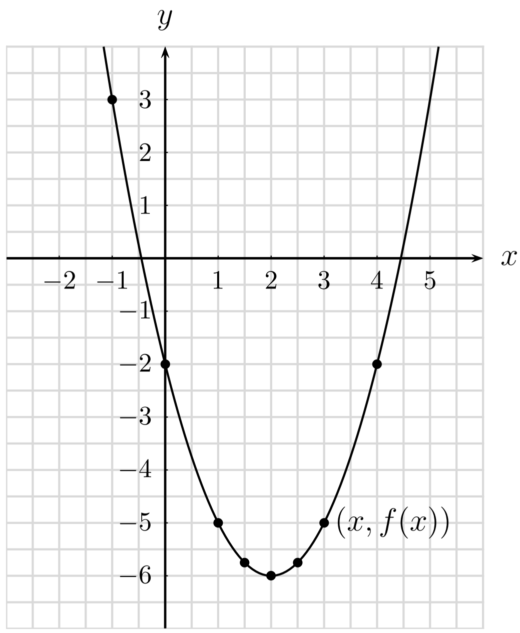
   a) *On dessine un certain nombre de points.*

   Pour dessiner un point, on choisit une valeur pour x (prise dans le domaine de définition D) et on calcule son image $f(x)$.

   x sera la première coordonnée du point et $f(x)$ sera sa deuxième. Autrement dit, le point sur la verticale correspondant à x sera à hauteur $f(x)$.

   b) *On relie ces points intelligemment.*

   Sauf si le graphe est une droite, on relie les points à la main en respectant les *deux principes de base* : 1) on n'attribue pas à un seul x plusieurs images ; 2) on n'attribue pas d'image à un élément x qui n'est pas dans le domaine de définition.



   Très pratique et relativement précise, la représentation graphique reste néanmoins restreinte à une région. Ici, par exemple, le graphe ne montre pas comment la fonction se comporte pour $x < -2$ et pour $x > 6$.

   Néanmoins, lorsqu'on dessine des graphes de fonctions, on s'arrange pour montrer tout ce qui est intéressant.

3. *L'expression mathématique.*

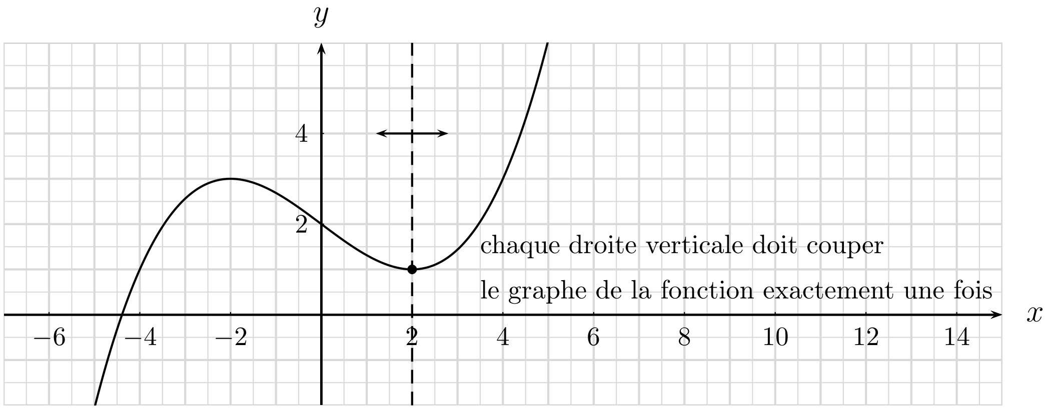
   Voici l'expression mathématique de la fonction f.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto f(x) = x^2 - 4x - 2$$

   L'expression mathématique est la meilleure façon de décrire une fonction, car en la connaissant on peut construire un tableau de valeurs et une représentation graphique. Alors que le contraire n'est pas possible (en tout cas pas de manière unique). L'expression mathématique contient TOUTE L'INFORMATION à propos de la fonction.

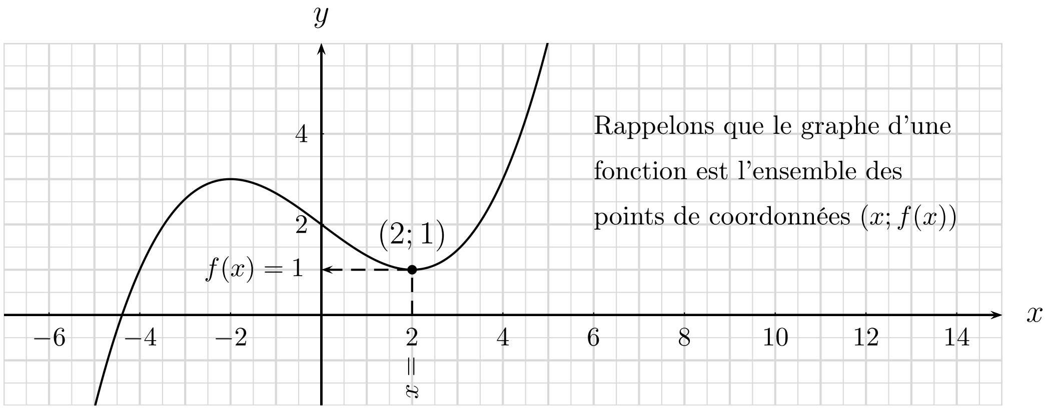
Le test de la droite verticale

Soit $f : D \to A$ une fonction réelle. Le *test de la droite verticale* consiste à vérifier, pour chaque $x \in D$, que la droite verticale touchant x sur l'axe des x (donc passant par le point $(x; 0)$) coupe la fonction exactement une fois.

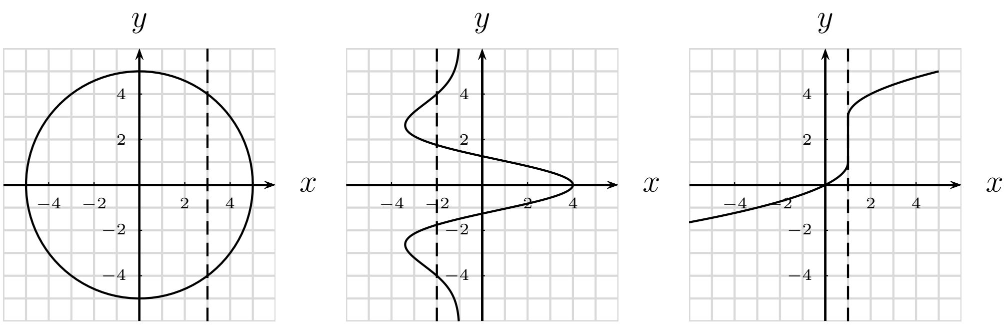


Ce test provient de la définition d'une fonction.

une fonction $f : D \to A$ assigne à CHAQUE $x \in D$ un UNIQUE élément de A, noté $f(x)$



Exemple de courbes qui ne sont pas le graphe d'une fonction réelle



Bien sûr, les mathématiciens ont trouvé la parade à ces difficultés. En définissant des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, appelées *courbes paramétrées*, ils ont réussi à obtenir de tels graphes. On le fera dans le cours de géométrie avec les équations paramétriques des droites. Les élèves qui suivent une option scientifiques étudieront en troisième années les courbes paramétrées dans une plus grande généralité.

8.2 Images, domaine image et pré-images

Soit f une fonction de domaine de définition D et de domaine d'arrivée A. Soient aussi B un sous-ensemble de A et C un sous-ensemble de D.

1. L'*image de* C, notée $f(C)$, est définie par :

$$\begin{aligned} f(C) &= \{y \in A : y = f(x) \text{ avec } x \in C\} \\ &= \{f(x) \in A : x \in C\} \end{aligned}$$

Il s'agit de l'ensemble des éléments de A qui sont images d'un élément (au moins) de l'ensemble C.

2. Le *domaine image de* f est défini par

$$\begin{aligned} f(D) &= \{y \in A : y = f(x) \text{ avec } x \in D\} \\ &= \{f(x) \in A : x \in D\} \end{aligned}$$

Il s'agit de l'ensemble des éléments de A qui sont images d'un élément (au moins) de l'ensemble de définition D. Le domaine image de f est égale à l'image de D.

3. La *pré-image de* B, notée $f^{-1}(B)$, est définie par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in D : f(x) \in B\}$$

Il s'agit de l'ensemble des éléments de D dont l'image appartient à l'ensemble B. On a toujours $f^{-1}(A) = D$ (quelque soit la fonction).

Exemples

Reprenons la fonction de la page précédente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto f(x) = x^2 - 4x - 2$.

1. À l'aide de la zone grisée (claire), on voit que :

$$f\big(]1.5, 2.5[\big) = [-6, -5.75[$$

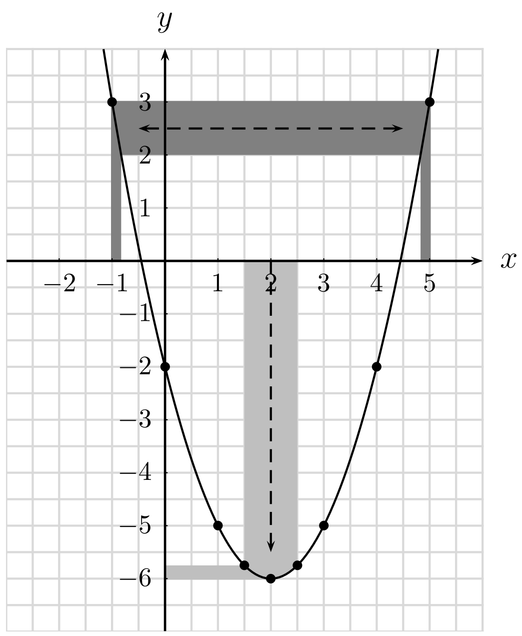
2. Le domaine image est :

$$f(\mathbb{R}) = [-6, +\infty[$$

En effet, la fonction a un minimum de hauteur -6, et monte jusqu'à une hauteur infinie.

3. À l'aide de la zone grisée (foncée) et la formule de Viète, on peut vérifier que :

$$f^{-1}\big(]2,3]\big) = \Big[-1, 2-\sqrt{8}\Big[\cup \Big]2+\sqrt{8}, 5\Big]$$



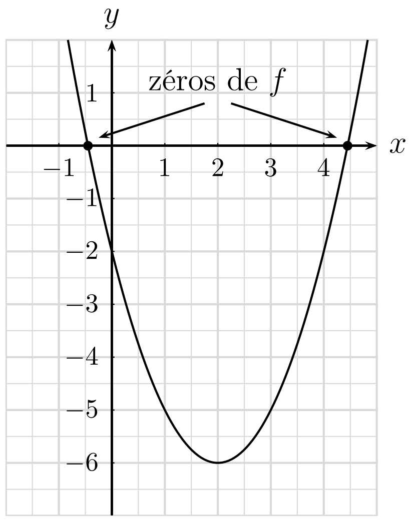
8.3 Les zéros d'une fonction

Définition

Soit $f : D \to A$ une fonction réelle ($D, A \subset \mathbb{R}$).

Les *zéros* de f sont les éléments de D qui sont envoyés sur 0 par la fonction f. L'*ensemble des zéros de* f est :

$$Z_f = \{x \in D : \underbrace{f(x) = 0}_{\text{équation à résoudre pour trouver les zéros de } f}\}$$



Exemple

L'ensemble des zéros de la fonction précédente, qui est donnée par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto f(x) = x^2 - 4x - 2$, est :

$$Z_f = \left\{2 - \sqrt{6}, 2 + \sqrt{6}\right\} \qquad \text{(merci à Viète)}$$

8.4 Graphes à savoir dessiner rapidement

8.4.1 Graphes des fonctions affines

Considérons une *fonction affine* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto ax + b$. On peut trouver un moyen d'identifier les paramètres a et b en évaluant la fonction.

En effet, on a $f(0) = b$. Ainsi b se trouve à l'intersection de la fonction avec l'axe vertical.

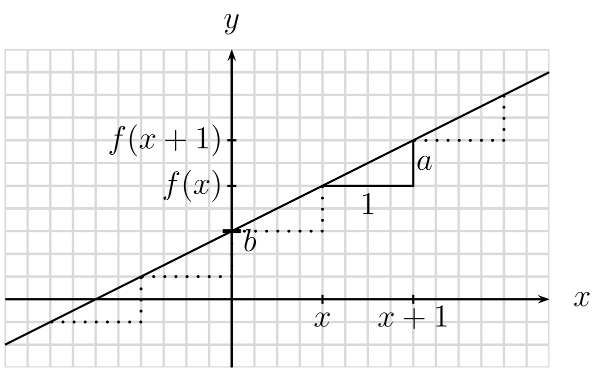
Pour découvrir quel est le rôle de a, on effectue le calcul suivant :

$$f(x+1) \;=\; a(x+1) + b \;=\; ax + a + b \;=\; ax + b + a \;=\; f(x) + a$$

Cela signifie que LORSQU'ON AVANCE HORIZONTALEMENT SUR LE GRAPHE DE 1 VERS LA DROITE, ON SE DÉPLACE VERTICALEMENT DE a.

On dit que a est la *pente* de f et que b est sa *hauteur*.

On peut ainsi voir a et b sur le graphe de la fonction.



La pente est aussi définie à l'aide du quotient

$$\boxed{\text{pente} = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}}$$

La notion de pente d'une droite est décrite plus en détail dans le cours de géométrie à la page 148.

Une droite est déterminée par un point et une pente

Dans le cours de géométrie, on décrit ce phénomène en utilisant la représentation paramétrique d'une droite. En page 148, on donne l'expression fonctionnelle d'une droite qui passe par le point $(x_0; y_0)$ et qui est de pente a à l'aide de la formule suivante.

$$\boxed{y = y_0 + a(x - x_0)}$$

8.4.2 Graphes des fonctions exponentielles

Soit $a > 0$, $a \neq 1$. On considère la *fonction exponentielle* $\exp_a : \mathbb{R} \to]0, +\infty[\,;\ x \mapsto a^x$. On peut trouver un moyen d'identifier le paramètre a en évaluant la fonction.

En effet, on a $\exp_a(0) = a^0 = 1$. Ainsi le graphe coupe l'axe vertical à hauteur 1.

On a les relations

$$\exp_a(x+1) = a^{x+1} = a^x \cdot a = a \cdot \exp_a(x) \quad \text{et} \quad \exp_a(x-1) = a^{x-1} = \frac{a^x}{a} = \frac{\exp_a(x)}{a}$$

Cela signifie que :

LORSQU'ON AVANCE HORIZONTALEMENT SUR LE GRAPHE DE 1 VERS LA DROITE, LA HAUTEUR EST MULTIPLIÉE PAR a.

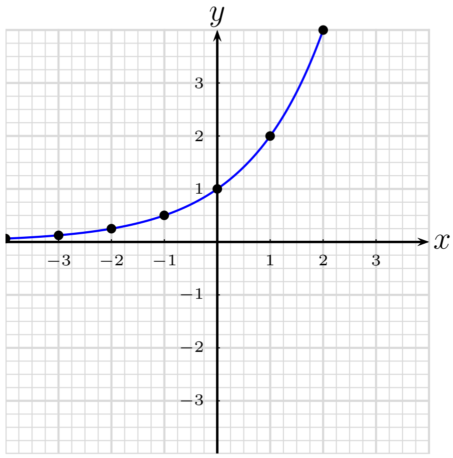
LORSQU'ON AVANCE HORIZONTALEMENT SUR LE GRAPHE DE 1 VERS LA GAUCHE, LA HAUTEUR EST DIVISÉE PAR a.

Exemples

1. Voici le graphe de

$$\exp_2 : \mathbb{R} \to]0, +\infty[\,;\ x \mapsto \exp_2(x) = 2^x$$

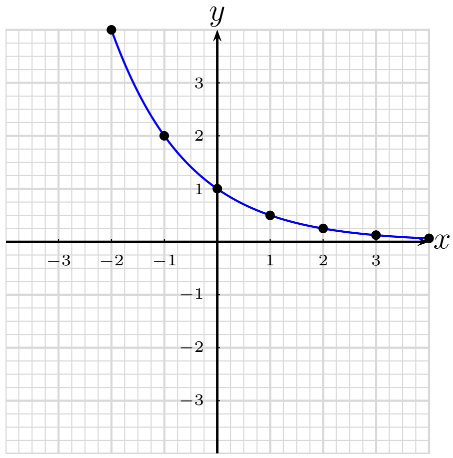
Pour cette fonction, on multiplie la hauteur par 2 lorsqu'on avance de 1 vers la droite et on divise la hauteur par 2 lorsqu'on avance de 1 vers la gauche.



2. Voici le graphe de

$$\exp_{\frac{1}{2}} : \mathbb{R} \to]0, +\infty[\,;\ x \mapsto \exp_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Pour cette fonction, on multiplie la hauteur par $\frac{1}{2}$ (on divise donc la hauteur par 2) lorsqu'on avance de 1 vers la droite et on divise la hauteur par $\frac{1}{2}$ (on multiplie donc la hauteur par 2) lorsqu'on avance de 1 vers la gauche.



Si le graphe de $\exp_{\frac{1}{2}}$ est obtenu par une symétrie d'axe Oy à partir du graphe de $\exp_2$, c'est parce qu'on a la relation :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$$

Autrement dit[1] :

$$\exp_{\frac{1}{2}}(x) = \exp_2(-x)$$

1. Voir aussi les fonctions paires en page 99.

8.4.3 Graphes des fonctions logarithmes

Soit $a > 0$, $a \neq 1$. On considère la *fonction logarithme* $\log_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R};\ x \mapsto a^x$. On peut trouver un moyen d'identifier le paramètre a en évaluant la fonction.

En effet, on a $\log_a(1) = 0$ car $a^0 = 1$. Ainsi le graphe coupe l'axe horizontal en $x = 1$.

Notons $c = \log_a(x)$. Par le slogan du logarithme, on a $a^c = x$. Si on multiplie cette identité par a, on obtient $a \cdot a^c = a \cdot x$. En se rappelant que $a = a^1$ et que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, l'identité devient $a^{c+1} = a \cdot x$. Par le slogan du logarithme, on a $c + 1 = \log_a(a \cdot x)$. En se souvenant que $c = \log_a(x)$, on a obtenu l'identité $\log_a(x) + 1 = \log_a(a \cdot x)$.

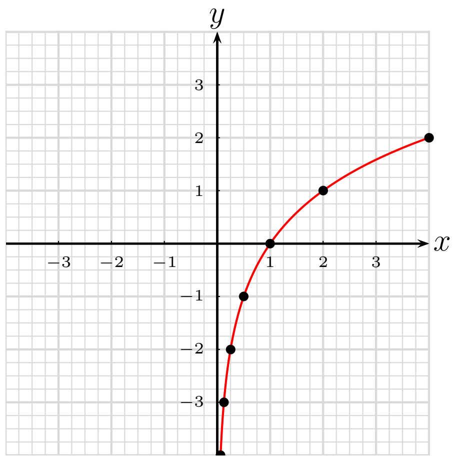
Cela signifie que :

> lorsqu'on avance verticalement sur le graphe de 1 vers le haut, on multiplie l'abscisse par a.
>
> lorsqu'on avance verticalement sur le graphe de 1 vers le bas, on divise l'abscisse par a.

Exemples

1. Voici le graphe de

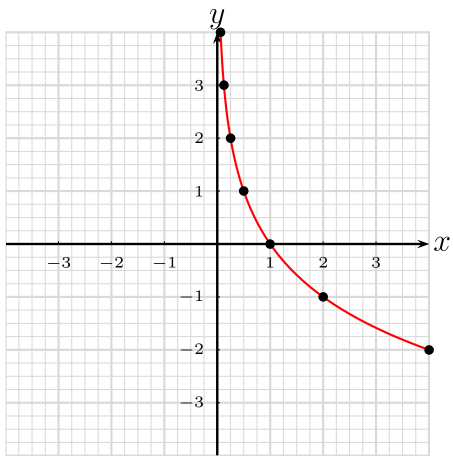
$$\log_2 :]0, +\infty[\to \mathbb{R};\ x \mapsto \log_2(x)$$



Pour cette fonction, on multiplie l'abscisse par 2 lorsqu'on monte de 1 et on divise l'abscisse par 2 lorsqu'on descend de 1.

2. Voici le graphe de

$$\log_{\frac{1}{2}} : \mathbb{R} \to]0, +\infty[;\ x \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(x)$$



Pour cette fonction, on multiplie l'abscisse par $\frac{1}{2}$ (on divise donc l'abscisse par 2) lorsqu'on monte de 1 et on divise l'abscisse par $\frac{1}{2}$ (on multiplie donc l'abscisse par 2) lorsqu'on descend de 1.

Si le graphe de $\log_{\frac{1}{2}}$ est obtenu par une symétrie d'axe Ox à partir du graphe de $\log_2$, c'est parce si on pose $\log_{\frac{1}{2}}(x) = c$, alors le slogan du logarithme nous dis que $(\frac{1}{2})^c = x$, c'est équivalent à $\frac{1}{2^c} = x$, qui est encore équivalent à $2^{-c} = x$, donc par le slogan, on a $\log_2(x) = -c$, et ainsi on a établi la relation :

$$\log_2(x) = -\log_{\frac{1}{2}}(x)$$

Autrement dit :

$$\log_{\frac{1}{2}}(x) = -\log_2(x)$$

8.4.4 Graphes des fonctions quadratiques

Considérons une *fonction quadratique* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On peut trouver un moyen d'identifier les paramètres a, b et c en examinant la fonction.

En effet, on a $f(0) = c$. Ainsi c se trouve à l'intersection de la fonction avec l'axe vertical.

Or, grâce à la technique de calcul vue en page 42 (pour démontrer Viète), on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Cela nous montre que le graphe de f est une parabole et que :

1. Le sommet de la parabole est le point $S\left(-\frac{b}{2a};\ f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
2. Il y a une symétrie d'axe vertical $x = -\frac{b}{2a}$ (passant par le sommet).
3. le paramètre a règle l'écartement et l'orientation de la parabole. On dit que a est la *demi-courbure de la parabole.*

$a < 0$ grand	$a < 0$ petit	$a > 0$ petit	$a > 0$ grand
			

Une parabole est déterminée par un sommet et une courbure

L'expression fonctionnelle d'une parabole qui passe par le sommet $(x_0; y_0)$ et qui est de demi-courbure a est donnée par la formule suivante.

$$\boxed{y = y_0 + a(x - x_0)^2}$$

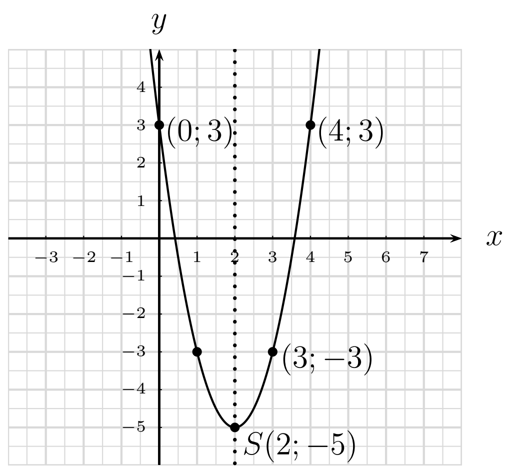
Si $(x_1; y_1)$ est un autre point de la parabole que le sommet, alors cette équation est vérifiée lorsqu'on remplace x par x_1 et y par y_1. On obtient ainsi une interprétation de la demi-courbure a.

$$y_1 = y_0 + a(x_1 - x_0)^2 \iff \boxed{a = \frac{y_1 - y_0}{(x_1 - x_0)^2} = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal au carré}}}$$

Procédure à suivre pour faire le graphe d'une fonction quadratique

Pour faire le graphe de la fonction d'expression $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$, on procède ainsi :

1. On calcule d'abord le sommet. Ici, on a $S(2; -5)$ car $-\frac{b}{2a} = 2$ et $f(2) = -5$.
2. Puis on place l'axe de symétrie.
3. Ensuite, on peut calculer un ou deux points et noter les points symétriques correspondant afin de pouvoir faire le graphe. Ici le fait que $f(0) = 3$ nous donne le point $(0; 3)$ et son symétrique $(4; 3)$.
4. Finalement, on relie les quelques points.
5. On vérifie que la courbure est la bonne.



8.4.5 Graphes des homographies

Une *homographie* est une fonction définie par

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad \text{avec} \qquad ad - bc \neq 0$$

Dans le cas où $c = 0$, la fonction est affine. Ce cas ayant déjà été examiné précédemment, regardons le cas où $c \neq 0$.

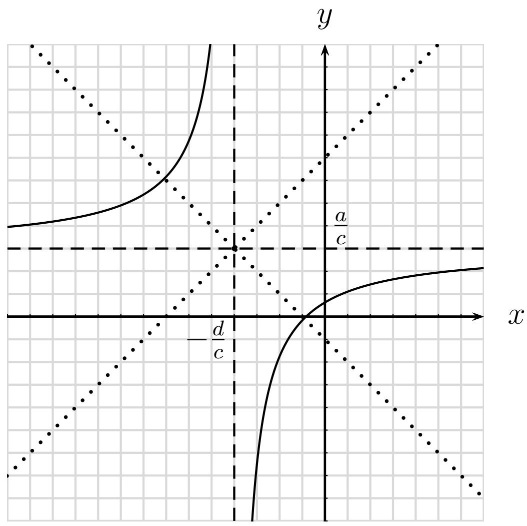
Dans le cas où $c \neq 0$, le domaine de définition est $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$. La condition $ad - bc \neq 0$ fait en sorte que la fonction soit injective[2] et la fonction sera surjective[2] si on prend le domaine d'arrivée $A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ (il s'agit du domaine image de la fonction).

On cherche donc à dessiner rapidement les fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{d}{c}\} \to \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{a}{c}\};\ x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \qquad \text{avec} \qquad \begin{array}{c} ad - bc \neq 0 \\ c \neq 0 \end{array}$$

Ces homographies (avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$) ont plusieurs propriétés graphiques.

- Il y a une asymptote horizontale $y = \frac{a}{c}$.
- Il y a une asymptote verticale $x = -\frac{d}{c}$.
- Il y a deux axes de symétries diagonaux comme indiqués sur le dessin ci-dessus (ils partent à 45° de l'intersection des deux asymptotes).

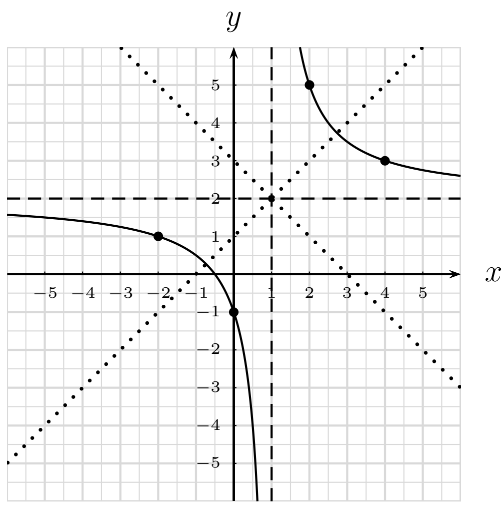


Ces axes de symétries sont très utiles pour tracer rapidement le graphe de la fonction. En effet, dès que l'on trouve un point du graphe, les axes nous permettent d'en trouver trois autres en faisant des symétries du premier point.

Procédure à suivre pour faire le graphe d'une homographie

Pour faire le graphe de l'homographie d'expression $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$, on procède ainsi :

1. On dessine d'abord les asymptotes horizontales et verticales. Ici $x = 1$ et $y = 2$.
2. Puis on place les axes de symétrie (partant à 45° de l'intersection des deux asymptotes).
3. Ensuite, on peut calculer un ou deux points et noter les points symétriques correspondant afin de pouvoir faire le graphe. Ici le fait que $f(0) = -1$ nous donne le point $(0; -1)$ et ses symétriques $(-2, 1)$, $(2, 5)$ et $(4, 3)$.
4. Finalement, on relie ces quatre points en s'arrangeant pour que la fonction s'approche de plus en plus des asymptotes.



2. voir la section 8.7 en page 101.

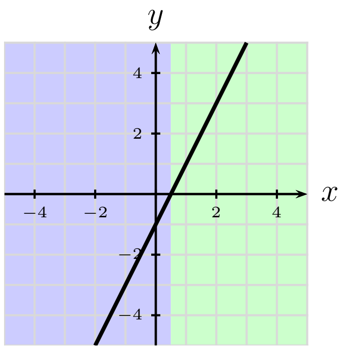
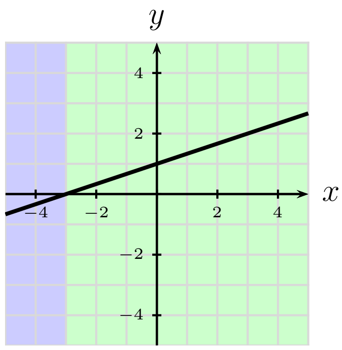
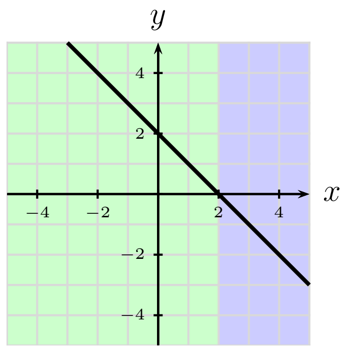
8.5 Tableau de signes d'une fonction continue

Définitions

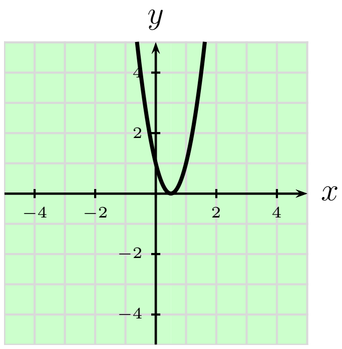
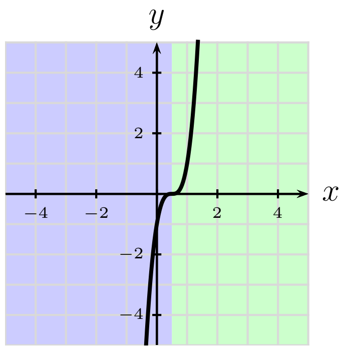
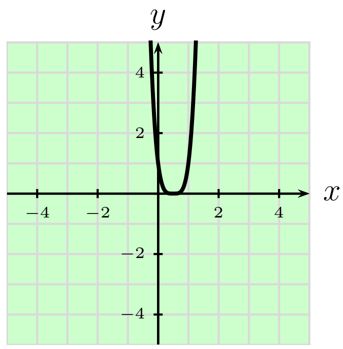
1. Une fonction f est *continue* si on peut dessiner son graphe (au-dessus de son domaine de définition) sans lever le crayon (la définition formelle est posée en deuxième année (voir page 191).
2. Un *tableau de signes* d'une fonction est un tableau qui indique lorsque la fonction est positive, nulle, négative ou pas définie. La première ligne représente les abscisses x, la deuxième les ordonnées $f(x)$.

Exemples élémentaires

Ci-dessous, on considère trois droites décrites par leurs expressions fonctionnelles, puis leurs représentations graphiques et finalement leurs tableaux de signes.

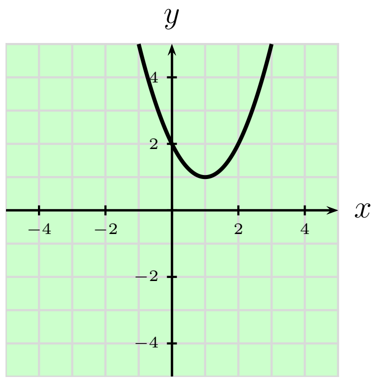
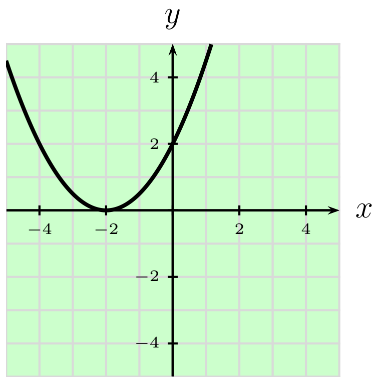
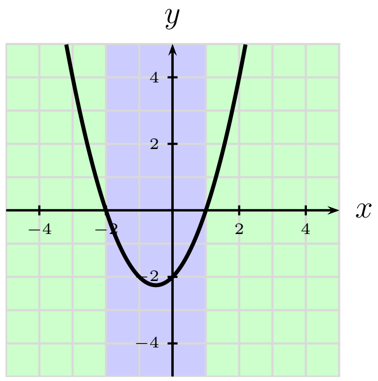
<table>
<tr><td>$d_1(x) = 2x - 1$</td><td>$d_2(x) = \frac{1}{3}x + 1$</td><td>$d_3(x) = 2 - x$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td><table><tr><td></td><td>$\frac{1}{2}$</td><td></td></tr><tr><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table></td><td><table><tr><td></td><td>-3</td><td></td></tr><tr><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table></td><td><table><tr><td></td><td>2</td><td></td></tr><tr><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr></table></td></tr>
</table>

On considère maintenant les tableaux de signes de puissance de droites.

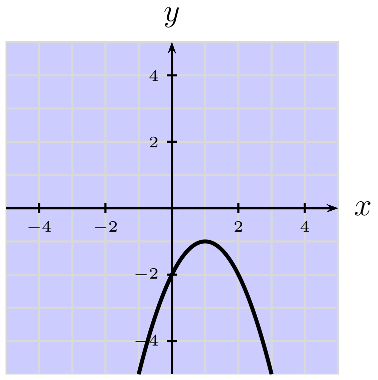
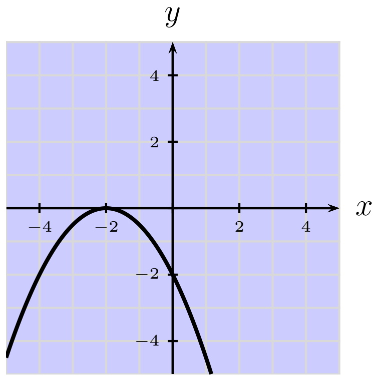
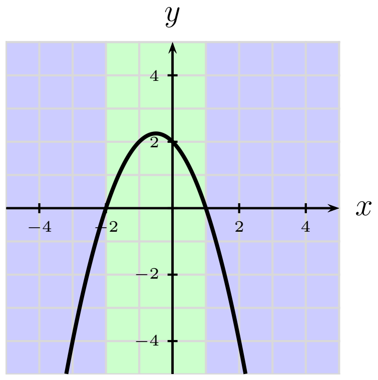
<table>
<tr><td>$d_1^2(x) = (2x-1)^2$</td><td>$d_1^3(x) = (2x-1)^3$</td><td>$d_1^4(x) = (2x-1)^4$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td><table><tr><td></td><td>$\frac{1}{2}$</td><td></td></tr><tr><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table></td><td><table><tr><td></td><td>$\frac{1}{2}$</td><td></td></tr><tr><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table></td><td><table><tr><td></td><td>$\frac{1}{2}$</td><td></td></tr><tr><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table></td></tr>
</table>

Ci-dessous, on considère trois paraboles décrites par leurs expressions fonctionnelles, leurs discriminants, leurs factorisations, leurs représentations graphiques et finalement leurs tableaux de signes.

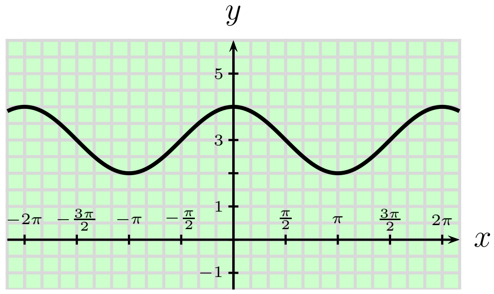
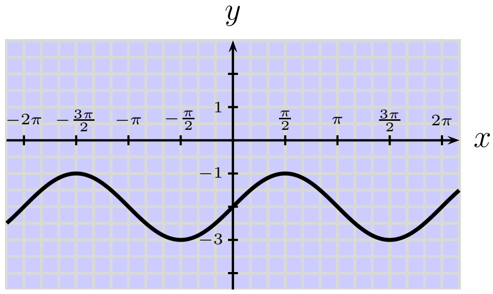
Ces paraboles sont toutes orientées vers le haut, car leur courbure (donnée par le coefficient dominant) est positive.

<table>
<tr><td>$p_1(x) = x^2 - 2x + 2$</td><td>$p_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$</td><td>$p_3(x) = x^2 + x - 2$</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 4 - 8 < 0$</td><td>$\Delta = 4 - 4 = 0$</td><td>$\Delta = 1 + 8 > 0$</td></tr>
<tr><td>p_1 est irréductible</td><td>$p_2(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2$</td><td>$p_3(x) = (x+2)(x-1)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td><table><tr><td></td></tr><tr><td>$+$</td></tr></table></td><td><table><tr><td></td><td>-2</td><td></td></tr><tr><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table></td><td><table><tr><td></td><td>-2</td><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table></td></tr>
</table>

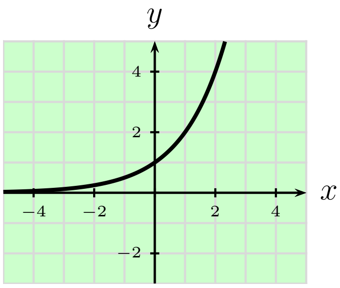
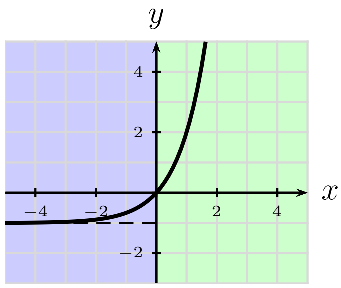
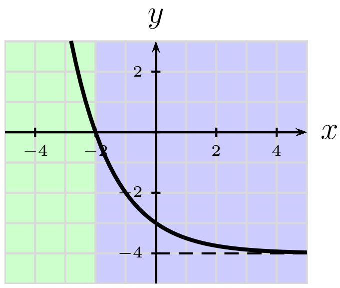
Voici les opposées des trois précédentes paraboles qui sont, cette fois, toutes orientées vers le bas, car leur courbure (donnée par le coefficient dominant) est négative.

<table>
<tr><td>$-p_1(x) = -x^2 + 2x - 2$</td><td>$-p_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$</td><td>$-p_3(x) = -x^2 - x + 2$</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 4 - 8 < 0$</td><td>$\Delta = 4 - 4 = 0$</td><td>$\Delta = 1 + 8 > 0$</td></tr>
<tr><td>$-p_1$ est irréductible</td><td>$-p_2(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2$</td><td>$-p_3(x) = (x+2)(1-x)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td><table><tr><td></td></tr><tr><td>$-$</td></tr></table></td><td><table><tr><td></td><td>-2</td><td></td></tr><tr><td>$-$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr></table></td><td><table><tr><td></td><td>-2</td><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr></table></td></tr>
</table>

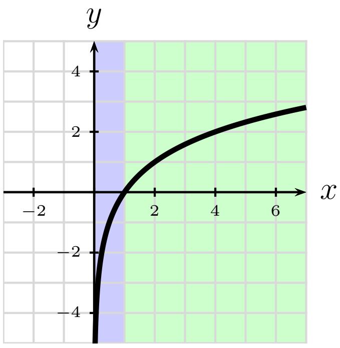
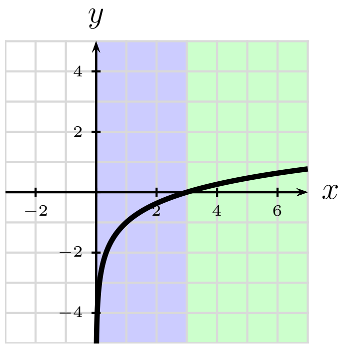
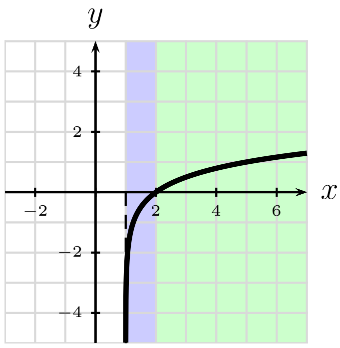
Voici deux graphes de fonctions trigonométriques qui ne s'annulent jamais (si cela devait arriver, alors cela arriverait une infinité de fois, car ces fonctions sont 2π-périodiques).

<table>
<tr><td>$\cos(x)+3$</td><td>$\sin(x)-2$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td><table><tr><td></td></tr><tr><td>$+$</td></tr></table></td><td><table><tr><td></td></tr><tr><td>$-$</td></tr></table></td></tr>
</table>

Voici trois exponentielles.

<table>
<tr><td>2^x</td><td>3^x-1</td><td>$2^{-x}-4$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td><table><tr><td></td></tr><tr><td>$+$</td></tr></table></td><td><table><tr><td></td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table></td><td><table><tr><td></td><td>-2</td><td></td></tr><tr><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr></table></td></tr>
</table>

Voici trois logarithmes (qui ne sont définis que lorsque leur argument est positif).

<table>
<tr><td>$\log_2(x)$</td><td>$\log_3(x)-1$</td><td>$\log_4(x-1)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td><table><tr><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>↯</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table></td><td><table><tr><td>0</td><td></td><td>3</td><td></td></tr><tr><td>↯</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table></td><td><table><tr><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td></tr><tr><td>↯</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table></td></tr>
</table>

Conclusion concernant les graphes élémentaires

1. Une droite de pente non nulle change de signe là où elle s'annule.
2. Élever une fonction à une puissance paire conserve les zéros de la fonction (et son domaine de définition) mais rend toutes les autres valeurs positives ; élever une fonction à une puissance impaire ne change pas son tableau de signes.
3. Pour les paraboles, on distingue trois cas :
   (a) Si le discriminant est négatif, la parabole ne s'annule pas, donc ne change pas de signe.
   (b) Si le discriminant est nul, la parabole s'annule mais ne change pas de signe.
   (c) Si le discrimant est positif, la parabole change de signe en chacun de ses zéros.

   Les signes vont dépendre de l'orientation de la parabole.

Remarque fondamentale

Pour faire un tableau de signes, on utilise le fait qu'une fonction CONTINUE ne peut changer de signe que lorsque l'un des deux cas suivants se produit.

1. La fonction a un zéro.
2. Un nombre réel n'est pas dans le domaine de définition de la fonction.

Ces deux situations sont illustrées par les exemples élémentaires des pages précédentes.

Méthode pour faire des tableaux de signes

Pour établir le tableau de signes d'une fonction CONTINUE, on procède en trois étapes :

1. On commence par FACTORISER l'expression fonctionnelle de la fonction. Il n'est pas nécessaire de factoriser f le plus possible, mais il faut pouvoir imaginer le graphe de chacun des facteurs.
2. Puis on cherche le domaine de définition et les zéros de la fonction. Ce qui permet de trouver les valeurs où un changement de signes peut se produire (par la remarque fondamentale ci-dessus un tel changement ne peut pas se produire ailleurs pour des fonctions continues). On note ces valeurs dans le tableau de signes en laissant une colonne vide à gauche et à droite de ces valeurs.
3. Il reste ensuite à trouver le signe de la fonction entre ces valeurs (deux méthodes sont décrites à la page suivante).

Premier exemple Construisons le tableau de signes de la fonction f déjà factorisée

$$f(x) \ = \ \frac{x^2\,(x+3)\,(x-4)}{(x+1)^2\,(x-2)}$$

On peut donc passer directement à l'étape 2 : on voit immédiatement que le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ et que l'ensemble des zéros de f est $Z_f = \{-3, 0, 4\}$. Avant de commencer l'étape 3 de la méthode, le tableau de signes est le suivant.

x		-3		-1		0		2		4	
$f(x)$	?	0	?	$\lightning$	?	0	?	$\lightning$	?	0	?

Il reste à déterminer si, à la place des points d'interrogation, on met + ou −.

Méthode longue pour effectuer l'étape 3

On fait un immense tableau en combinant les tableaux de signes de chaque facteur de la fonction. Illustrons cette manière de faire sur l'exemple de la page précédente.

$$f(x) \;=\; \frac{x^2\,(x+3)\,(x-4)}{(x+1)^2\,(x-2)}$$

x		-3		-1		0		2		4	
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	↯	$+$	0	$+$	↯	$-$	0	$+$

Pour trouver la dernière ligne, il n'y a qu'à penser à «la règle des signes» en n'oubliant pas que si on multiplie par 0, alors cela fait 0 ; et qu'on ne divise pas par zéro, car sinon on provoque le courroux de Zeus (symbolisé par ↯).

Plus simplement, on peut noter cela ainsi.

x		-3		-1		0		2		4	
$f(x)$	$-$	0	$+$	↯	$+$	0	$+$	↯	$-$	0	$+$
	$\frac{+\,-\,-}{+\,-}$		$\frac{+\,+\,-}{+\,-}$		$\frac{+\,+\,-}{+\,-}$		$\frac{+\,+\,-}{+\,-}$		$\frac{+\,+\,-}{+\,+}$		$\frac{+\,+\,+}{+\,+}$

Les signes sont placés aux endroits correspondant aux termes de la factorisation de f.

L'avantage de cette façon de faire est que le tableau prend moins de place et que les colonnes avec un zéro ou un problème de définition sont gérées plus aisément.

Méthode rapide pour effectuer l'étape 3

On se base sur le principe suivant que l'on peut observer en regardant les signes du tableau juste ci-dessus.

> DANS UN TABLEAU DE SIGNES, SEUL LE TERME RESPONSABLE DE LA PRÉSENCE DE LA VALEUR CORRESPONDANTE DANS LE TABLEAU EST RESPONSABLE D'UN ÉVENTUEL CHANGEMENT DE SIGNE !

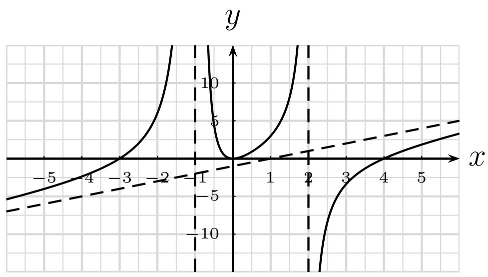
Plus simplement, on peut noter cela ainsi.

x		-3		-1		0		2		4	
$f(x)$	$-$	0	$+$	↯	$+$	0	$+$	↯	$-$	0	$+$
	$\frac{+\,-\,-}{+\,-}$	$(x+3)$ change de signe en $x=-3$		$(x+1)^2$ ne change pas de signe en $x=-1$		x^2 ne change pas de signe en $x=0$		$(x-2)$ change de signe en $x=2$		$(x-4)$ change de signe en $x=4$	$\frac{+\,+\,+}{+\,+}$

Il faut calculer tous les signes pour une colonne (par exemple, celle tout à gauche), puis on réfléchit uniquement à partir du principe ci-dessus (en visualisant les représentations de chaque facteur) pour déterminer s'il y a lieu de changer de signe. À la fin du processus, on peut calculer tous les signes pour une colonne (par exemple, celle tout à droite pour vérifier si on a fait un nombre pair d'erreurs (en espérant que ce nombre soit nul)).

À titre indicatif, voici le graphe de cette fonction (le lecteur devrait s'apercevoir que faire un tableau de signes est beaucoup plus rapide que d'esquisser le graphe de la fonction).

Cette fonction a deux asymptotes verticales et une asymptote oblique (ces notions seront décrites en deuxième année (voir page 192)).

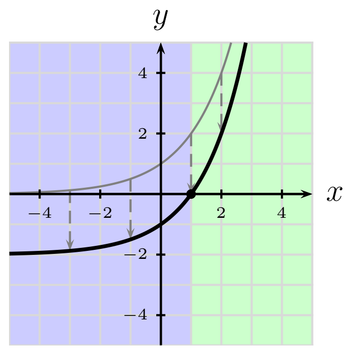
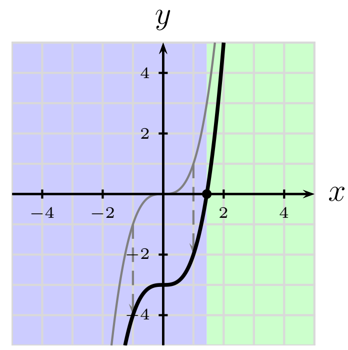


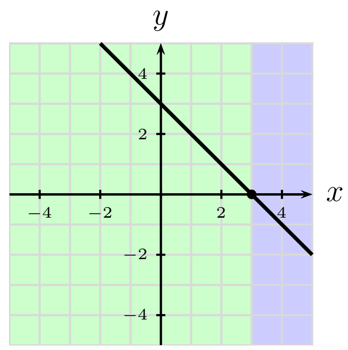
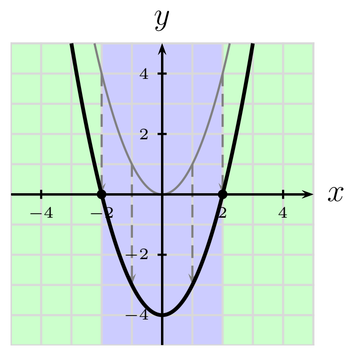
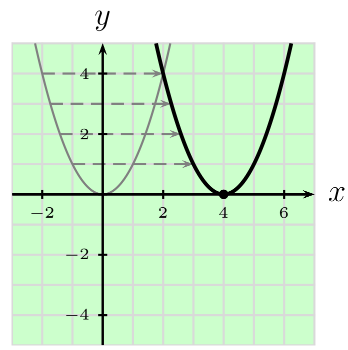
Deuxième exemple

On cherche à établir le tableau de signes de la fonction $\dfrac{(2^x-2)(x^2+x+1)(x^3-3)}{(3-x)(x^2-4)(x-4)^2}$.

1. La fonction est suffisamment factorisée pour visualiser le graphe de chacun des facteurs (on pourrait encore factoriser x^3-3 et x^2-4, mais ce n'est pas nécessaire).

   On peut maintenant visualiser les graphes de chaque facteur (normalement, on fait cela dans sa tête).

2^x-2	x^2+x+1	x^3-3
	Comme le discriminant est négatif $\Delta = 1-4 = -3 < 0$ la fonction ne s'annule pas et ainsi, x^2+x+1 est toujours positif.	

$3-x$	x^2-4	$(x-4)^2$
		

2. Le domaine de définition est $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2, 3, 4\}$. Les zéros sont $Z = \{1, \sqrt[3]{3}\}$.

3. Pour établir le tableau de signes, on utilise le fait que $1 = \sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{8} = 2$.

	-2		1		$\sqrt[3]{3}$		2		3		4	
$+$	↯	$-$	0	$+$	0	$-$	↯	$+$	↯	$-$	↯	$-$
$-+-$ $+++$	(x^2-4) change de signe en $x=-2$		(2^x-2) change de signe en $x=1$		(x^3-3) change de signe en $x=\sqrt[3]{3}$		(x^2-4) change de signe en $x=2$		$(3-x)$ change de signe en $x=3$		$(x-4)^2$ ne change pas de signe en $x=4$	$+++$ $-++$

En résumé, les signes changeront partout sauf en $x=4$ à cause du facteur $(x-4)^2$.

8.5.1 Comparaison des tableaux des différentes méthodes

Voici le tableau de signes de la fonction

$$\frac{(2^x-2)(x^2+x+1)(x^3-3)}{(3-x)(x^2-4)(x-4)^2}$$

présenté en suivant les deux méthodes présentées deux pages auparavant.

La méthode où l'on fait une ligne par facteur

x		-2		1		$\sqrt[3]{3}$		2		3		4	
2^x-2	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2+x+1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^3-3	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
x^2-4	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-4)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+$	$\lightning$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\lightning$	$+$	$\lightning$	$-$	$\lightning$	$-$

Même méthode, condensée en une seule ligne

x		-2		1		$\sqrt[3]{3}$		2		3		4	
$f(x)$	$+$	$\lightning$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\lightning$	$+$	$\lightning$	$-$	$\lightning$	$-$
	$-+-$ $+++$		$-+-$ $+-+$		$++-$ $+-+$		$+++$ $+-+$		$+++$ $+++$		$+++$ $-++$		$+++$ $-++$

La méthode où l'on observe le changement de signes des facteurs séparément

x		-2		1		$\sqrt[3]{3}$		2		3		4	
$f(x)$	$+$	$\lightning$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\lightning$	$+$	$\lightning$	$-$	$\lightning$	$-$
	$-+-$ $+++$	(x^2-4) change de signe en $x=-2$		(2^x-2) change de signe en $x=1$		(x^3-3) change de signe en $x=\sqrt[3]{3}$		(x^2-4) change de signe en $x=2$		$(3-x)$ change de signe en $x=3$		$(x-4)^2$ ne change pas de signe en $x=4$	$+++$ $-++$

Lorsque le lecteur désire faire un tableau de signes, il est libre de prendre la méthode qui lui convient.

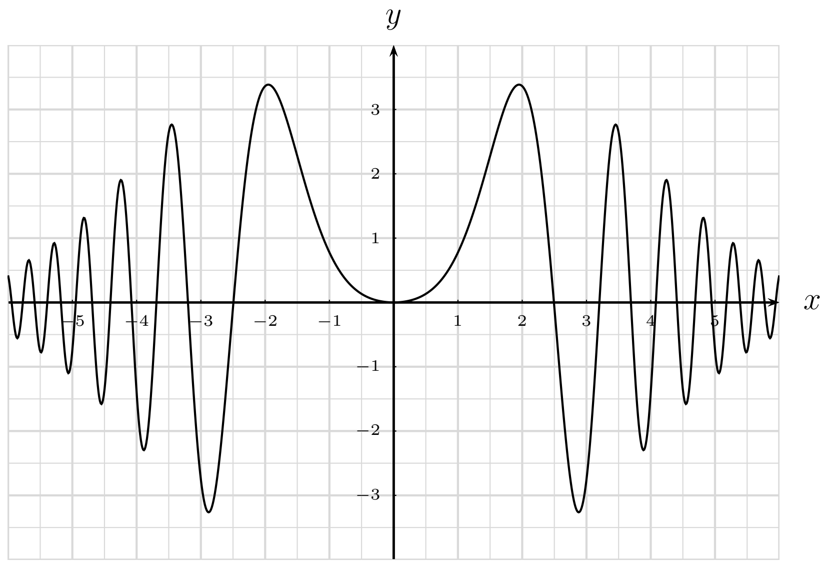
8.6 Les fonctions paires et impaires

Définition

Une fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}$ est une *fonction paire* si pour tout $x \in D$, on a

$$f(-x) = f(x)$$

Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe vertical $x = 0$.
Voici le graphe d'une fonction paire.

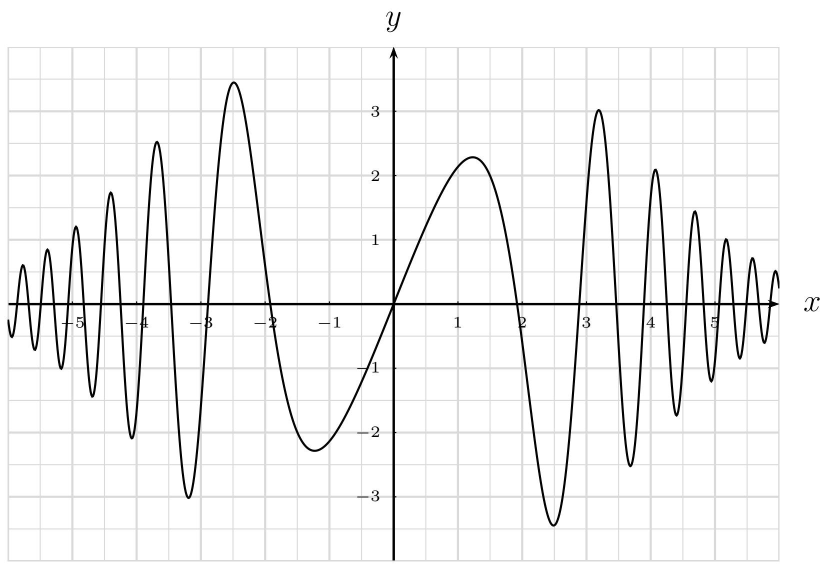


Définition

Une fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}$ est une *fonction impaire* si pour tout $x \in D$, on a

$$f(-x) = -f(x)$$

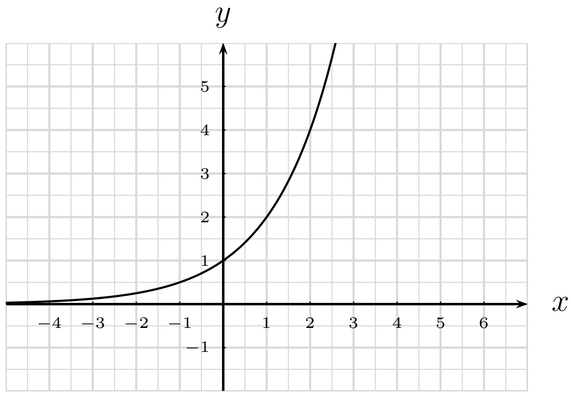
Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.
Voici le graphe d'une fonction impaire.



Remarques

1. Il existe beaucoup de fonctions ni paires, ni impaires.

   Par exemple $\exp_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 2^x$ n'est ni paire, ni impaire.



2. Il existe exactement une fonction réelle (définie sur $\mathbb{R}$) qui est paire et impaire en même temps. Il s'agit de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 0$.

   En effet, si f est une fonction paire et impaire de domaine de définition $D = \mathbb{R}$, alors $f(-x) = f(x)$ (car f est paire) et $f(-x) = -f(x)$ (car f est impaire) et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Donc, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = -f(x) \iff 2f(x) = 0 \iff f(x) = 0$$

Théorème

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction paire ou impaire.

1. Si x_0 est un zéro de f, alors $-x_0$ est aussi un zéro de f.
2. Si $x_0 \in D$, alors $-x_0 \in D$.

Preuve

1. Si x_0 est un zéro de f, cela signifie que $f(x_0) = 0$.

   Pour montrer que $-x_0$ est un zéro de f, on effectue le calcul suivant :

$$f(-x_0) \overset{f\ \text{(im)paire}}{=} \pm f(x_0) = 0$$

2. Si $x_0 \in D$, cela signifie que $f(x_0)$ existe.

   On montre que $-x_0 \in D$, grâce au fait que : $f(-x_0) \overset{f\ \text{(im)paire}}{=} \pm f(x_0)$ existe.

Conséquences

On trouve ces conséquences en prenant la contraposée de chacun des points du théorème.

1. Si l'ensemble des zéros d'une fonction contient un nombre x_0, mais pas son opposé $-x_0$, alors la fonction n'est ni paire, ni impaire.
2. Si le domaine de définition d'une fonction contient un nombre x_0, mais pas son opposé $-x_0$, alors la fonction n'est ni paire, ni impaire.

8.7 L'injectivité, la surjectivité et la bijectivité

Lecture de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité sur un graphe

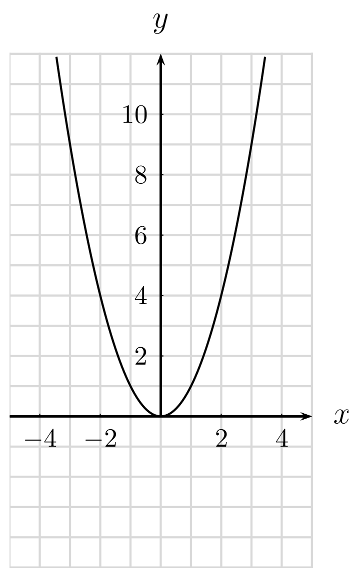
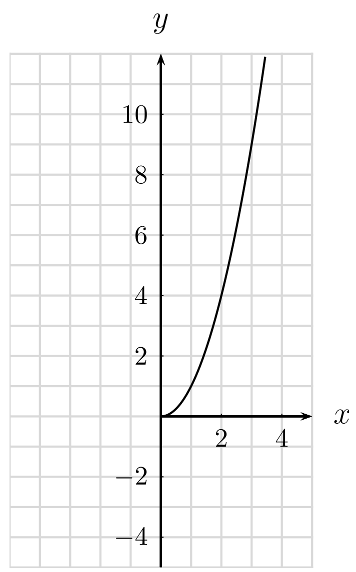
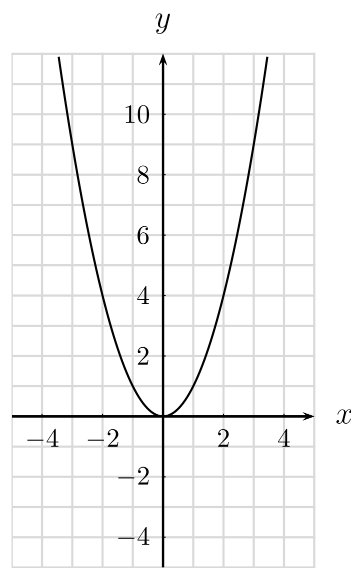
On dessine le graphe d'une fonction réelle $f : D \to A$.
Rappelons que le domaine de définition de f, noté D, et que le domaine d'arrivée de f, noté A sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ (car la fonction est réelle). C'est-à-dire D, $A \subset \mathbb{R}$.

Pour lire ces trois notions, on effectue *test de la droite horizontale*.

1. La fonction f est *injective* si CHAQUE droite horizontale (dont la hauteur est un nombre du domaine d'arrivée A) coupe le graphe AU PLUS une fois.
2. La fonction f est *surjective* si CHAQUE droite horizontale (dont la hauteur est un nombre du domaine d'arrivée A) coupe le graphe AU MOINS une fois.
3. La fonction f est *bijective* si elle est injective ET surjective.

   Autrement dit, si CHAQUE droite horizontale (dont la hauteur est un nombre du domaine d'arrivée A) coupe le graphe EXACTEMENT une fois.

Exemples

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0};\ x \mapsto x^2$	$g : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^2$	$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^2$
		

On voit que

- la fonction f est surjective (puisque toute droite horizontale de hauteur positive ou nulle coupe le graphe AU MOINS une fois), mais elle n'est pas injective car la droite horizontale de hauteur 4 coupe DEUX fois le graphe.

- la fonction g est injective (puisque toute droite horizontale de hauteur quelconque coupe le graphe AU PLUS une fois), mais elle n'est pas surjective car la droite horizontale de hauteur -2 ne coupe JAMAIS le graphe.

- la fonction h n'est ni injective, ni surjective.

- aucune de ces fonctions n'est bijective.

Définitions algébriques de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité

Soit f une fonction de domaine de définition D et de domaine d'arrivée A.

1. Voici plusieurs façons équivalentes de définir l'injectivité de f.

   On dit que f est *injective* lorsque

   a) Si un élément de A est image d'un élément de D, alors il ne l'est que d'un seul.
   b) Si pour tout x_1 et x_2 dans D tels que $x_1 \neq x_2$, alors $f(x_1) \neq f(x_2)$.
   c) Pour tout x_1 et x_2 dans D tels que $f(x_1) = f(x_2)$, on a $x_1 = x_2$.
   d) Pour chaque $y \in A$, il existe *au plus* un $x \in D$ tel que $f(x) = y$.

   f n'est pas injective s'il existe x_1 et x_2 dans D tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$.

2. Voici plusieurs façons équivalentes de définir la surjectivité de f.

   On dit que f est *surjective* lorsque

   a) Tout élément de A est image d'un élément (au moins) de D.
   b) $f(D) = A$ (autrement dit $A \subset f(D)$ car $f(D) \subset A$ est toujours vrai).
   c) Pour chaque $y \in A$, il existe *au moins* un $x \in D$ tel que $f(x) = y$.

   f n'est pas surjective s'il existe un $y \in A$ qui n'est image d'aucun élément $x \in D$.

3. Voici plusieurs façons équivalentes de définir la bijectivité de f.

   On dit que f est *bijective* lorsque

   a) f est injective et surjective.
   b) Pour chaque $y \in A$, il existe *exactement* un $x \in D$ tel que $f(x) = y$.

Pour les démonstrations

Lorsqu'on cherche à montrer que f est injective, il est habituel de montrer 1c). Néanmoins, la différence entre 1d), 2c) et 3b) venant du mot en italique (pour 1d), c'est *au plus* ; pour 2c), c'est *au moins* ; pour 3b), c'est *exactement*), on peut aussi montrer l'injectivité avec 1d), la surjectivité avec 2c) ou directement la bijectivité avec 3b).

Exemple. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 2x + 1$.

1. Montrons que f est injective avec 1c).

   Soit x_1 et x_2 dans $D = \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. À montrer $x_1 = x_2$.

   $$f(x_1) = f(x_2) \overset{\text{définition de } f}{\Longrightarrow} 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \overset{-1}{\Longrightarrow} 2x_1 = 2x_2 \overset{:2}{\Longrightarrow} x_1 = x_2$$

   Remarquons qu'ici, on n'a pas besoin du sens '$\Longleftarrow$'.

2. Montrons directement que f est bijective avec 3b).

   Pour chaque $y \in A = \mathbb{R}$, on cherche *exactement* un $x \in D = \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

   $$f(x) = y \overset{\text{définition de } f}{\Longleftrightarrow} 2x + 1 = y \overset{-1}{\Longleftrightarrow} 2x = y - 1 \overset{:2}{\Longleftrightarrow} x = \frac{y-1}{2}$$

   Remarquons qu'ici, on a vraiment besoin des équivalences '$\Longleftrightarrow$'.

8.7.1 Utilité de l'injectivité pour les équations

Si f est une fonction injective, alors on a, pour x_1 et x_2 dans D :

$$x_1 = x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$$

En effet, l'implication '$\Longrightarrow$' est due au fait que f est une fonction et l'implication '$\Longleftarrow$' au fait que cette fonction est injective.

Cela signifie que si, dans une équation, on applique une fonction injective de chaque côté de l'égalité, alors on obtient une équation équivalente. Les fonctions injectives correspondent aux OPÉRATIONS RÉVERSIBLES vues précédemment (voir page 40, section 4.1).

Exemples

1. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^2$ n'est pas injective. Ainsi, on a
$$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4, \quad \text{mais} \quad x^2 = 4 \not\Rightarrow x = 2$$
2. Par contre, la fonction $g : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \sqrt{x}$ est injective, donc
$$x^2 = 4 \iff \sqrt{x^2} = 2 \iff |x| = 2 \iff x = \pm 2$$
Cela aurait aussi pu se voir grâce à la factorisation $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.

8.8 Les fonctions réciproques

Lorsqu'on considère une fonction $f : D \to A;\ x \mapsto f(x)$, il est intéressant de savoir si on peut trouver une fonction qui fait l'opération inverse, que l'on noterait f^{-1} (ou ${}^{r}f$).

Faire l'opération inverse revient à résoudre, pour chaque $y \in A$, l'équation $f(x) = y$ (dont l'inconnue est x).

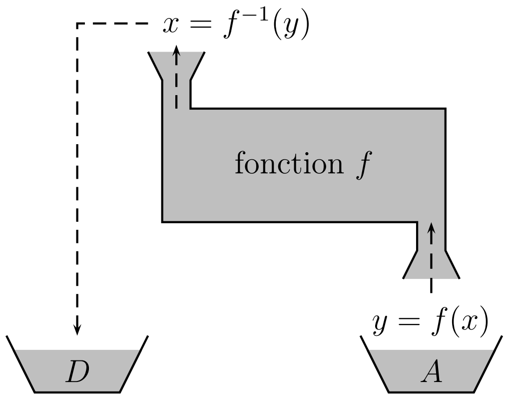
Théorème

Ces équations ont une UNIQUE solution en x pour CHAQUE y dans A si et seulement si f est une fonction bijective.

Définition. Si $f : D \to A$ est bijective, alors la *fonction réciproque de* f, notée f^{-1} (ou ${}^{r}f$), est définie par :

$$f^{-1} : A \to D;\ y \mapsto f^{-1}(y)$$

où, pour chaque $y \in A$, $f^{-1}(y)$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue x).

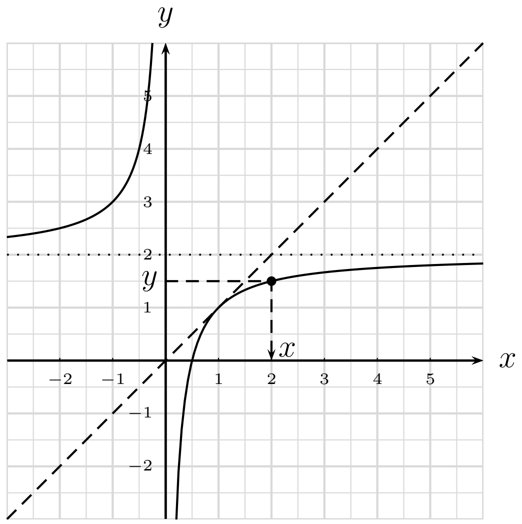


Preuve du théorème Elle tient en deux arguments :

- Dire que l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue x) admet au moins une solution pour chaque y dans A est équivalent à dire que f est surjective (par définition).
- Dire que l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue x) admet au plus une solution pour chaque y dans A est équivalent à dire que f est injective (par définition). □

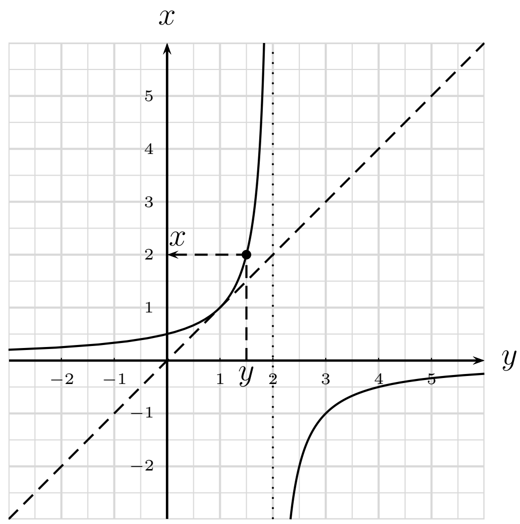
Illustration par un exemple (à lire comme une bande dessinée)

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$$
$$x \mapsto \frac{2x-1}{x}$$



Voir la réciproque f^{-1} sur le graphe de f, c'est lire le graphe à l'envers (en partant des y et en allant sur les x).

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$y \mapsto \frac{1}{2-y}$$



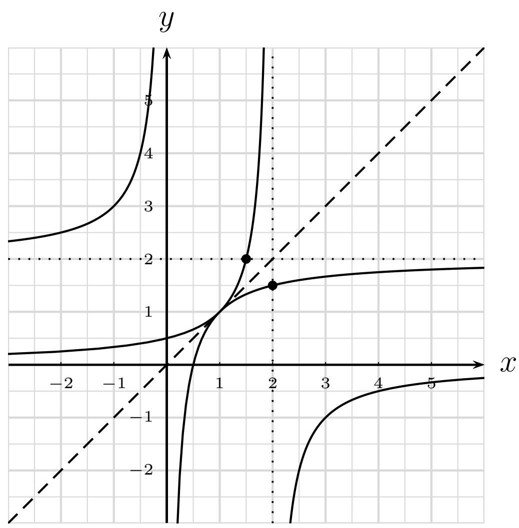
Il peut être plus pratique d'échanger les axes afin de la lire plus habituellement (l'axe des x devient celui des y)

Mais la coutume veut qu'on écrive la fonction réciproque en x (au lieu de y).

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\};\ x \mapsto \frac{2x-1}{x}$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\};\ x \mapsto \frac{1}{2-x}$$

Si on représente graphiquement les deux fonctions sur le même repère, on voit que ces graphes sont symétriques et que l'AXE DE SYMÉTRIE est la droite d'équation $y = x$ (qui coupe le plan à l'origine avec un angle de 45°).



Calcul algébrique de la réciproque de cet exemple

Pour CHAQUE $y \in A$, on cherche l'UNIQUE $x \in D$ tel que $f(x) = y$.

$$f(x) = y \iff \frac{2x-1}{x} = y \iff 2x - 1 = yx \iff 2x - yx = 1 \iff x(2-y) = 1$$

$$\iff x = \frac{1}{2-y} \qquad \text{Donc : } \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{2-y} \quad \text{ou mieux} \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2-x}$$

Le lecteur attentif remarquera que ce calcul est similaire à ceux de la page 102 (voir 1d) pour l'injectivité, 2c) pour la surjectivité et 3b) pour la bijectivité). Ici, on ne doit trouver qu'une seule valeur de x possible (ce qui montre directement que f est bijective).

Propriétés de la fonction réciproque

Soit $f : D \to A$ une fonction bijective et $f^{-1} : A \to D$ sa fonction réciproque.

1. On a $f^{-1}(f(x_0)) = x_0$ pour tout $x_0 \in D$.
2. On a $f(f^{-1}(y)) = y$ pour tout $y \in A$.
3. f^{-1} est bijective.

Les propriétés 1 et 2 montrent que la fonction définie est bien la fonction inverse de f.

Théorème de la fonction réciproque

Soit $f : D \to A$ une fonction.

Supposons qu'il existe une fonction $g : A \to D$ satisfaisant les propriétés suivantes.

1. $g(f(x)) = x$ pour tout x dans D.
2. $f(g(y)) = y$ pour tout y dans A.

Alors, f est bijective et $g = f^{-1}$ (donc g est bijective).

Moralité. Ce théorème montre que s'il existe une fonction g qui satisfait les mêmes propriétés que celles de la fonction inverse de f, alors cette fonction g est égale à la fonction réciproque. On peut ainsi trouver la réciproque d'une fonction f sans montrer qu'elle est bijective, seulement en vérifiant ses propriétés 1 et 2.

Conséquence du théorème

Soit $f : D \to A$ une fonction bijective. Alors $(f^{-1})^{-1} = f$.

Preuve des propriétés de la fonction réciproque

1. Soit $x_0 \in D$ (on utiliserait volontiers x, mais c'est déjà l'inconnue de l'équation ci-dessous).

   Par définition de f^{-1}, $f^{-1}(f(x_0))$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = f(x_0)$ (d'inconnue x). Mais on voit que x_0 est aussi solution de cette équation.
   Ainsi, comme cette équation n'admet qu'une unique solution, on doit avoir
   $$f^{-1}(f(x_0)) = x_0$$
2. Soit $y \in A$.

   Par définition de la fonction réciproque, $f^{-1}(y)$ est solution de l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue x). Ainsi, on a $f(f^{-1}(y)) = y$ (en remplaçant x par $f^{-1}(y)$).
3. Pour montrer que f^{-1} est bijective, on va montrer qu'elle est injective et surjective.
   (a) Pour montrer que f^{-1} est injective, il faut montrer que, pour tout y_1 et y_2 dans A, on a
   $$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) \Longrightarrow y_1 = y_2$$
   C'est le cas, car si $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$, alors en appliquant f à chaque terme de l'égalité on trouve $f(f^{-1}(y_1)) = f(f^{-1}(y_2))$. Par le point 2. de la preuve, on a
   $$y_1 = f(f^{-1}(y_1)) = f(f^{-1}(y_2)) = y_2$$

(b) Pour montrer que f^{-1} est surjective, il faut montrer que, pour tout x dans D (c'est le domaine d'arrivée de f^{-1}), on peut trouver y dans A (c'est le domaine de définition de f^{-1}) tel que $f^{-1}(y) = x$.

Choisissons un x quelconque dans D. Il faut trouver un y (au moins) dans A tel que $f^{-1}(y) = x$. Essayons $y = f(x)$ (on n'a pas trop le choix, car à partir des objets mathématiques x et f, il faut trouver un élément de A, il est donc naturel de tenter $y = f(x)$).

Pour vérifier que ce candidat est le bon, il faut montrer que $f^{-1}(f(x)) = x$. C'est le cas grâce au point 1. de la preuve.

□

Preuve du théorème de la fonction réciproque

1. Montrons que f est bijective en montrant qu'elle est injective et surjective.
   (a) Pour montrer que f est injective, il faut montrer que, pour tout x_1 et x_2 dans D, on a
   $$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$
   C'est le cas, car si $f(x_1) = f(x_2)$, alors en appliquant g à chaque terme de l'égalité on trouve $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Par l'hypothèse 1 de l'énoncé du théorème, on a
   $$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$$
   (b) Pour montrer que f est surjective, il faut montrer que, pour tout y dans A, on peut trouver x dans D tel que $f(x) = y$.

   Choisissons un y dans A. Il faut trouver un x dans D tel que $f(x) = y$. Essayons $x = g(y)$ (on n'a pas trop le choix, car à partir des objets mathématiques y et g, il faut trouver un élément de D, il est donc naturel de tenter $g(y)$).

   Pour vérifier que ce candidat est le bon, il faut montrer que $f(g(y)) = y$. C'est le cas grâce à l'hypothèse 2 de l'énoncé du théorème.
2. Montrons que $g = f^{-1}$.

   Pour montrer que les fonctions $g : A \to D$ et $f^{-1} : A \to D$ sont les mêmes, on doit montrer que
   $$g(y) = f^{-1}(y) \quad \text{pour tout } y \text{ dans } A$$
   Soit y dans A, pour montrer que $g(y) = f^{-1}(y)$, il faut montrer que $g(y)$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x (voir la définition de f^{-1}).
   On constate que $f(g(y)) = y$ par l'hypothèse 2 de l'énoncé du théorème. Donc $g(y)$ est solution de l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x. Comme cette équation admet une unique solution (car f est injective), notée $f^{-1}(y)$, on a $g(y) = f^{-1}(y)$.

□

Preuve de la conséquence du théorème

Comme f est bijective, alors on peut parler de la fonction réciproque $f^{-1} : A \to D$ dont les propriétés sont

1. On a $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in D$.
2. On a $f(f^{-1}(y)) = y$ pour tout $y \in A$.

En appliquant le théorème pour $g = f^{-1}$, on obtient $f = (f^{-1})^{-1}$. □

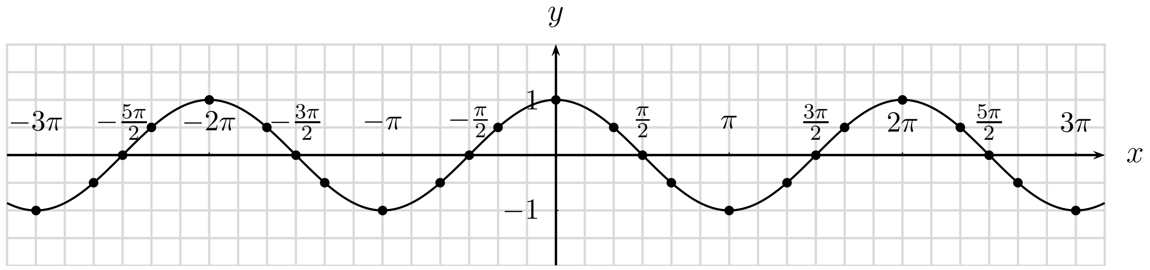
8.9 Fonctions transcendantes usuelles

8.9.1 Les fonctions trigonométriques

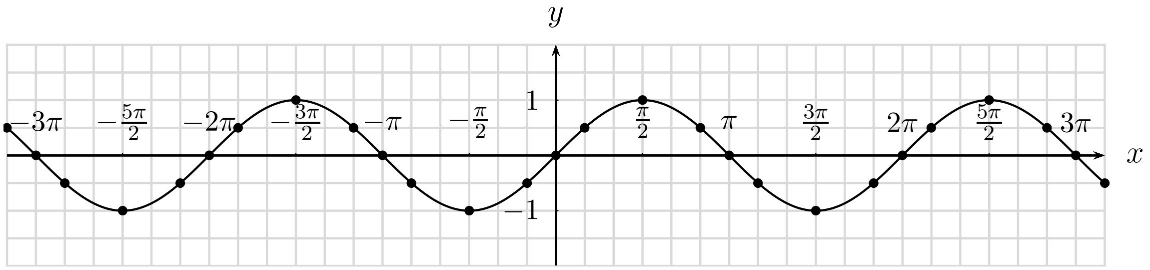
Voici les graphes des fonctions cosinus, sinus, tangente et cotangente (la définition de la cotangente se trouve à la page suivante). Grâce aux radians, on obtient des fonctions réelles (car les radians sont sans unités).

Graphe des fonctions cosinus, sinus et tangente

Voici le graphe de la fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Voici le graphe de la fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

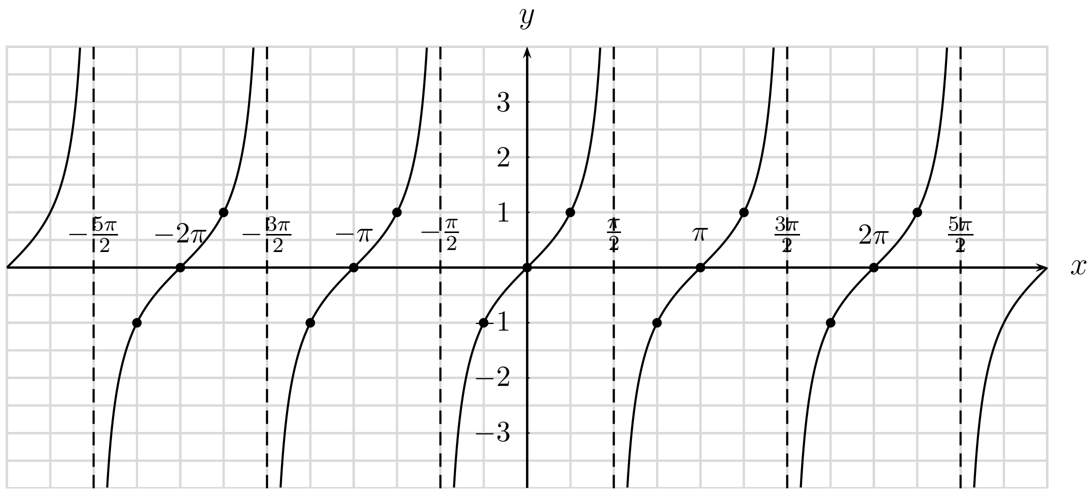


Rappelons que la tangente est définie de la manière suivante.

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

On voit ainsi qu'il y a une division par zéro lorsque le cosinus s'annule, il faut donc enlever au domaine de définition l'ensemble $Z_{\cos} = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Voici le graphe de la fonction $\tan : \mathbb{R} \setminus Z_{\cos} \to \mathbb{R}$.

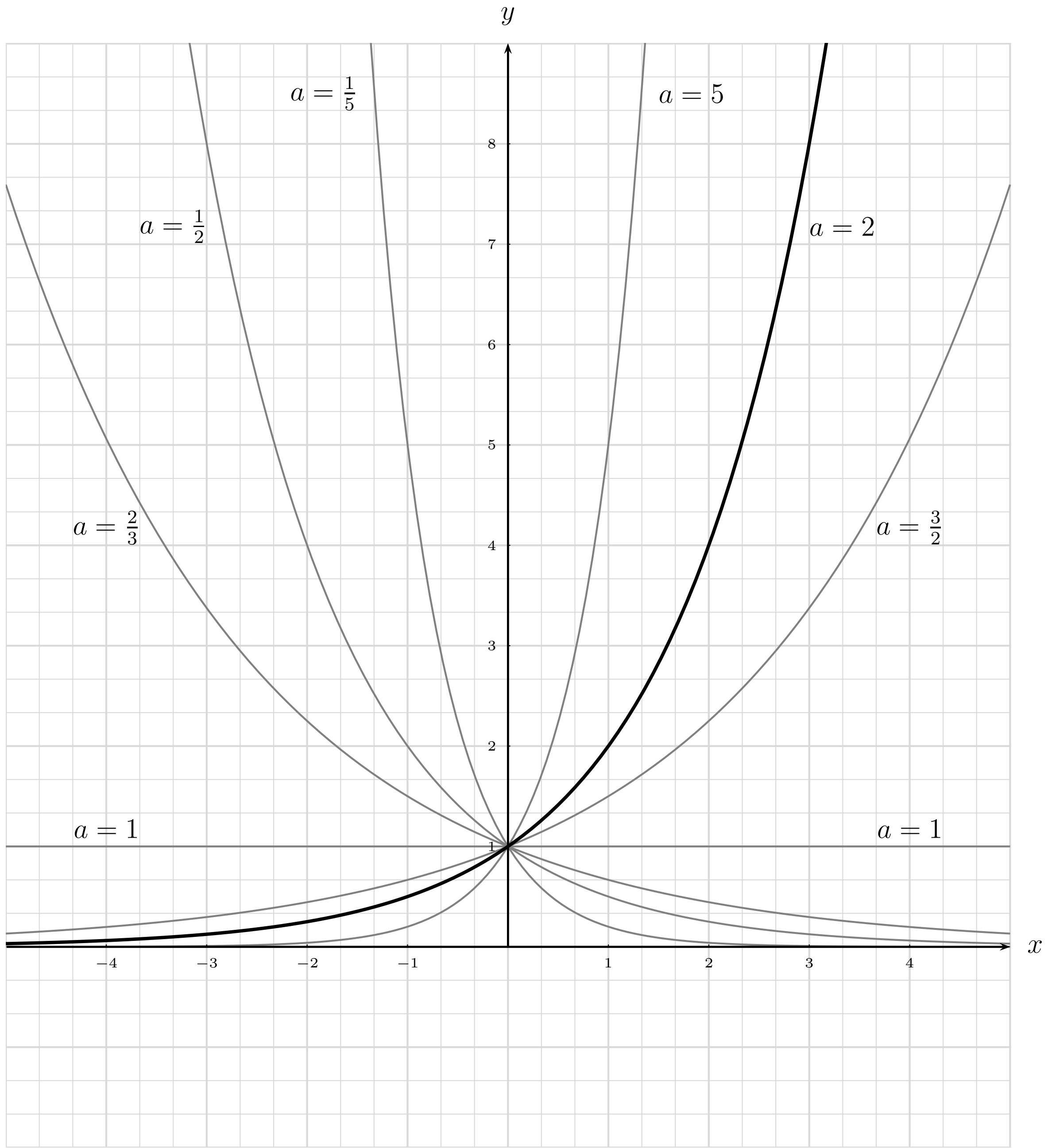


8.9.2 Les fonctions exponentielles

Soit a est un nombre strictement positif. Les fonctions exponentielles sont définies par :

$$\exp_a : \mathbb{R} \to]0, +\infty[\,;\ x \mapsto a^x$$

Voici les graphes de plusieurs *fonctions exponentielles*, dont $\exp_2$ (en gras).



On voit que pour $a > 0$ et $a \neq 1$, la fonction $\exp_a$ est bijective. Par conséquent, elle admet une fonction réciproque, baptisée le *logarithme en base* a et notée $\log_a$. On obtient ainsi une famille de fonctions pour $a > 0$ et $a \neq 1$:

$$\log_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R};\ x \mapsto \log_a(x)$$

8.9.3 Les fonctions logarithmes

D'un autre point de vue, le logarithme est juste une façon d'appeler la solution (lorsqu'elle existe) d'une équation en x de la forme suivante.

$$a^x = b$$

Lorsque $a > 0$ et $a \neq 1$, on voit sur le graphe de a^x que cette équation ne possède qu'une seule solution et ceci seulement si $b > 0$ (puisque les exponentielles sont strictement positives), cette solution s'appelle *le logarithme de b en base a* et est notée $\log_a(b)$.

$$\boxed{a^x = b \iff x = \log_a(b)}$$

D'où le *slogan du logarithme* :

$$\boxed{\log_a(b) \text{ est la puissance à laquelle on élève la base } a \text{ pour obtenir le nombre } b}$$

Le slogan livre les formules suivantes pour tout $x \in \left]0, +\infty\right[$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{a^{\log_a(x)} = x} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\log_a(a^y) = y}$$

Formules

Lorsque les expressions sont bien définies, on a les formules duales suivantes.

Pour les exponentielles		Pour les logarithmes
Ecriture a^x	Ecriture $\exp_a(x)$	
$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$	$\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$	$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$	$\exp_a(x-y) = \frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}$	$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$
$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$	$\exp_a(x \cdot y) = (\exp_a(x))^y$	$\log_a(x^y) = y \log_a(x)$
$a^0 = 1$	$\exp_a(0) = 1$	$\log_a(1) = 0$

Formules de changement de base

Soit a et b deux nombres positifs différents de 1. On peut changer les bases des exponentielles et des logarithmes. Lorsque les expressions sont bien définies, on a les formules

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}} \qquad \boxed{a^x = b^{\log_b(a)\,x}} \text{ car } a = b^{\log_b(a)}$$

La formule de changement de base pour le logarithme est essentielle pour pouvoir calculer, par exemple, $\log_3(2)$ à l'aide la calculatrice.

Pour résoudre les équations avec des exponentielles ou des logarithmes

Lorsqu'on a la même base $a > 0$ et $a \neq 1$, on peut utiliser les propriétés suivantes pour résoudre des équations.

$$\boxed{a^x = a^y \iff x = y}$$

si $x, y \in \mathbb{R}$ $\boxed{x = y \Longleftarrow \log_a(x) = \log_a(y)}$

si $x, y > 0$ $\boxed{x = y \iff \log_a(x) = \log_a(y)}$

Ces propriétés proviennent du fait que les fonctions $\exp_a$ et $\log_a$ sont bijectives sur leur domaine de définition et du fait que le domaine de définition de $\log_a$ est $\left]0, +\infty\right[$.

Preuve des formules

Pour démontrer les formules pour les logarithmes, on va utiliser les formules $a^{\log_a(x)} = x$, $\log_a(a^y) = y$ et les formules pour les exponentielles.

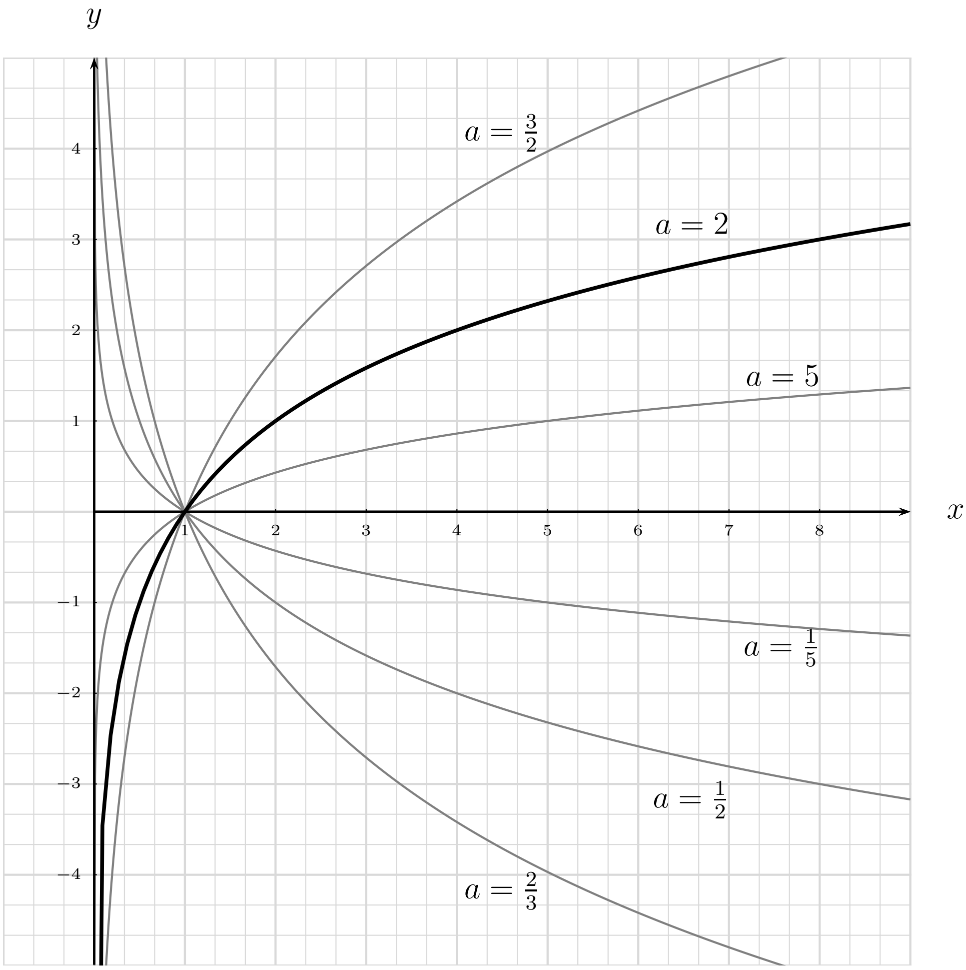
1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a(a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)}) = \log_a(a^{\log_a(x)+\log_a(y)}) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2. $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a\left(\frac{a^{\log_a(x)}}{a^{\log_a(y)}}\right) = \log_a(a^{\log_a(x)-\log_a(y)}) = \log_a(x) - \log_a(y)$
3. $\log_a(x^y) = \log_a\left((a^{\log_a(x)})^y\right) = \log_a\left(a^{\log_a(x)\cdot y}\right) = \log_a\left(a^{y\log_a(x)}\right) = y\log_a(x)$
4. $\log_b(x) = \log_b(a^{\log_a(x)}) \stackrel{3.}{=} \log_a(x)\log_b(a)$
   On a donc les formules équivalentes suivantes.
   $$\log_b(a)\log_a(x) = \log_b(x) \quad \text{et} \quad \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Les fonctions logarithmes

Soit a un nombre strictement positif, $a \neq 1$. Les fonctions logarithmes sont définies par :

$$\log_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R};\ x \mapsto \log_a(x)$$

Voici les graphes de plusieurs *fonctions logarithmes*, dont $\log_2$ (en gras).



La fonction $\log_a$ est la fonction réciproque de $\exp_a$. C'est pour cette raison que les graphes sont obtenus à partir de ceux des fonctions exponentielles par une symétrie d'axe $x = y$ (il s'agit de la droite passant par l'origine avec un angle de 45°).

8.10 Opérations sur les fonctions

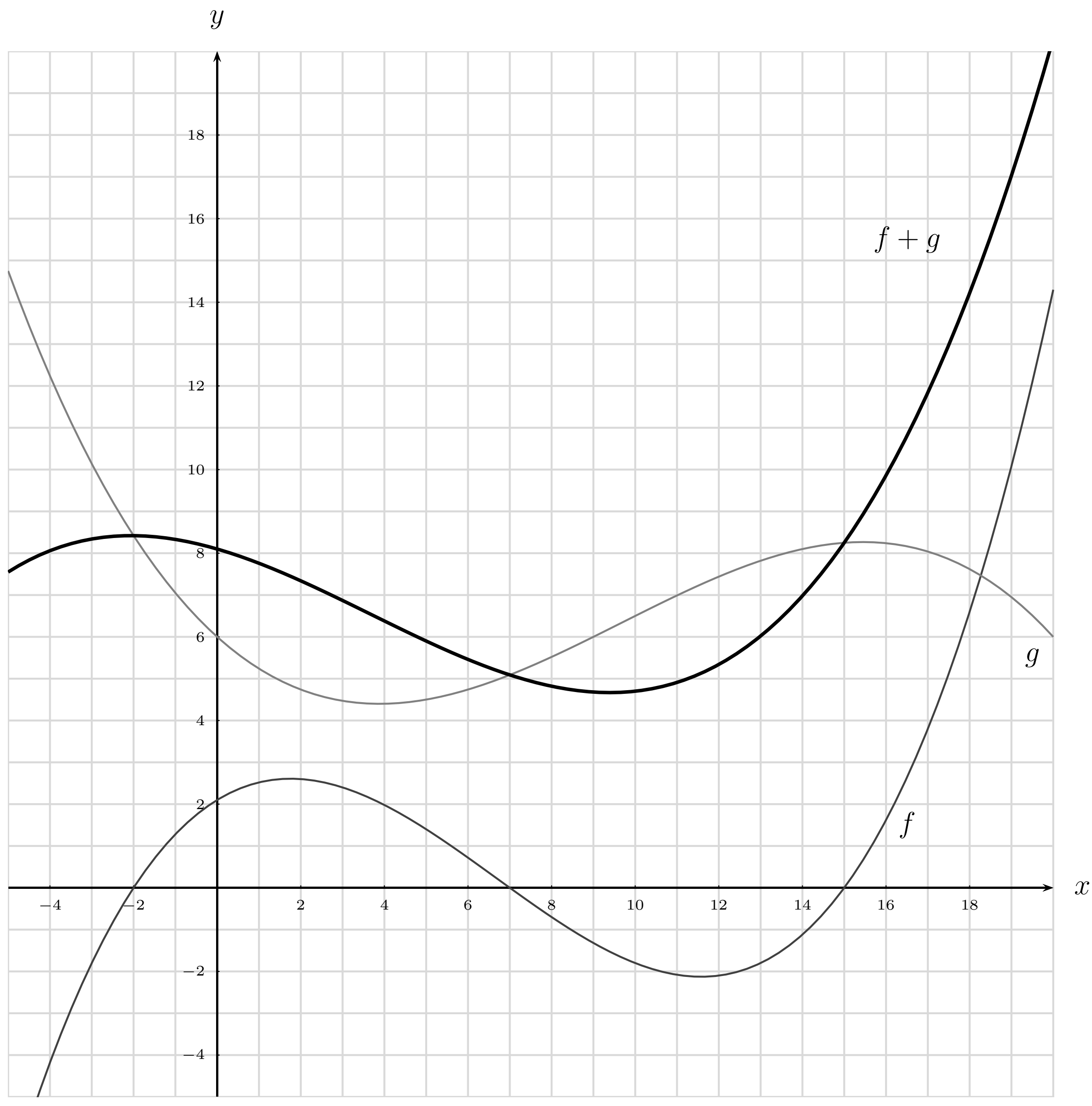
8.10.1 Addition de fonctions

Soit f et g deux fonctions réelles ayant le même domaine de définition D et le même domaine d'arrivée A. En d'autres termes, on a $f : D \to A$ et $g : D \to A$ avec A, $D \subset \mathbb{R}$.

On définit la *fonction somme*, notée $f + g : D \to A$, par

$$\boxed{(f+g)(x) = f(x) + g(x)}$$

Voici comment l'addition se comporte sur les graphes des fonctions.



Pour obtenir le graphe de $f + g$, on additionne, en chaque point, les hauteurs de f et de g.

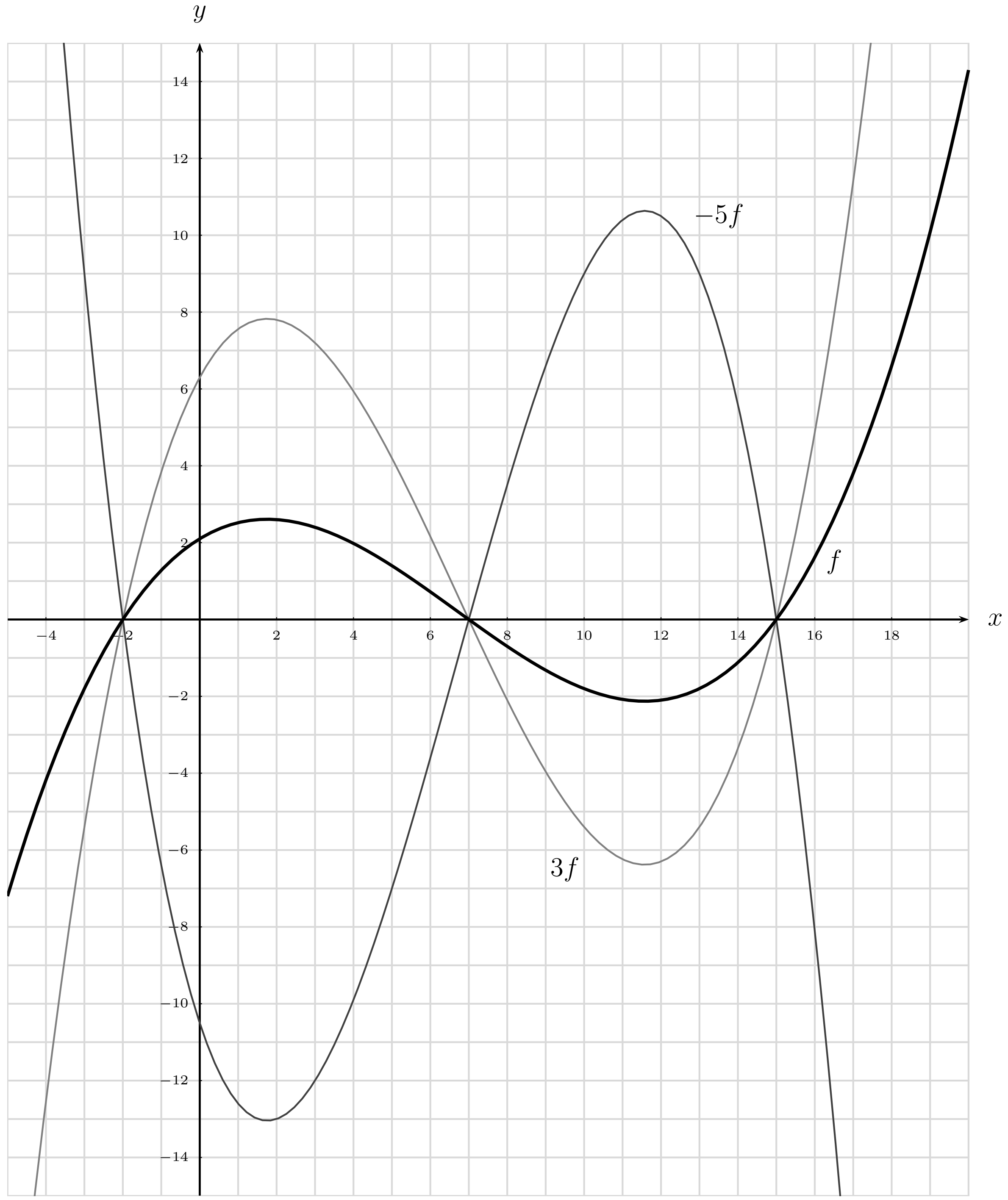
8.10.2 Multiplication d'une fonction par un nombre

Soit f une fonction réelle de domaine de définition D et de domaine d'arrivée A et λ un nombre réel. En d'autres termes, on a $f : D \to A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On définit la *fonction f multipliée par λ*, notée $\lambda f : D \to A$, par

$$\boxed{(\lambda f)(x) = \lambda f(x)}$$

Voici comment la multiplication d'une fonction f par un nombre modifie le graphe de f.



Pour obtenir le graphe de λf, on multiplie, en chaque point, la hauteur de la fonction f par λ.

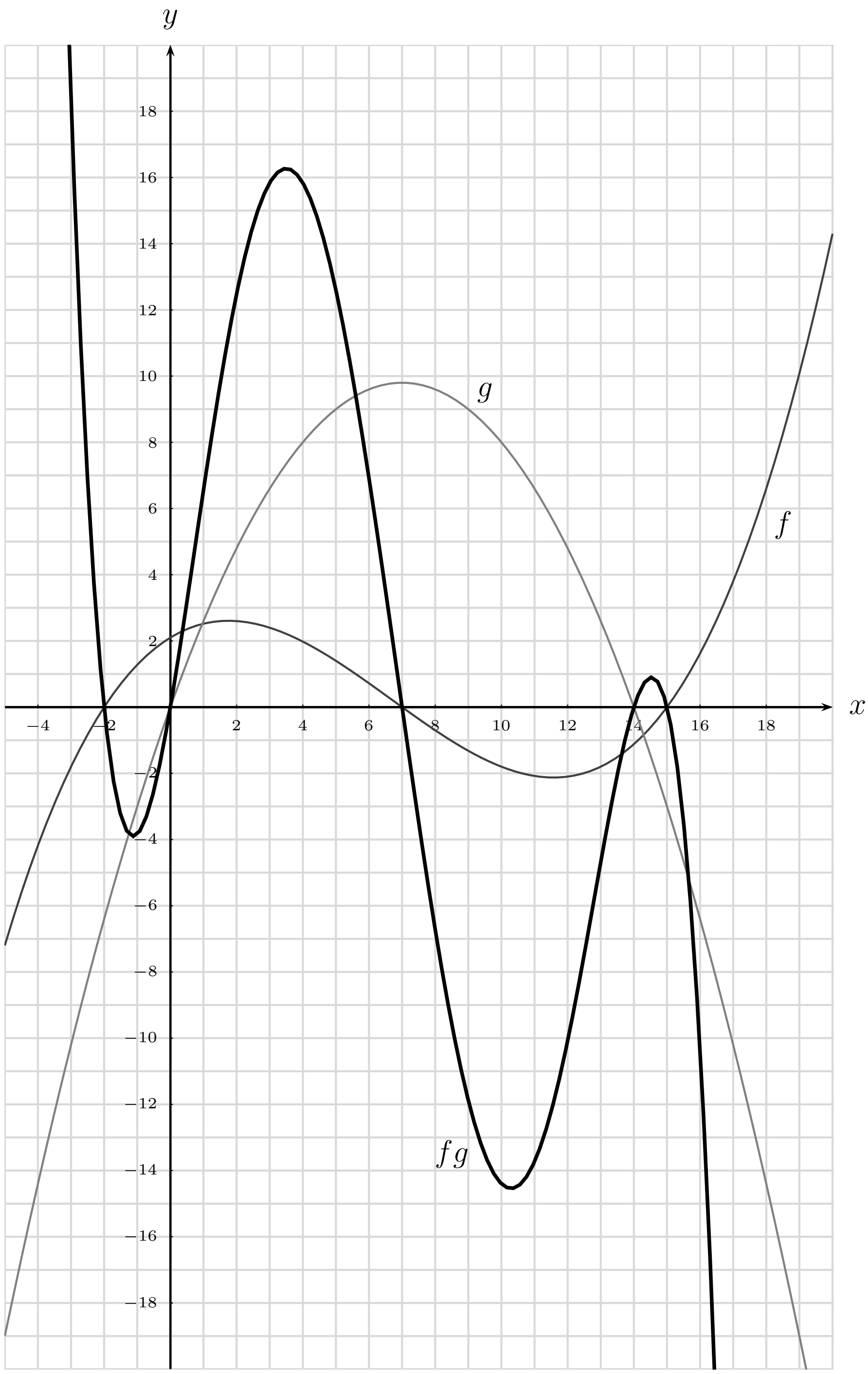
8.10.3 Multiplication de deux fonctions

Soit f et g deux fonctions réelles ayant le même domaine de définition D et le même domaine d'arrivée A. En d'autres termes, on a $f : D \to A$ et $g : D \to A$ avec A, $D \subset \mathbb{R}$.

On définit la *fonction multiplication*, notée $fg : D \to A$, par

$$\boxed{(fg)(x) = f(x)g(x)}$$

Voici comment la multiplication se comporte sur les graphes des fonctions.



Pour obtenir le graphe de fg, on multiplie, en chaque point, les hauteurs de f et de g.

On peut aussi remarquer que fg s'annule exactement là où f ou g s'annulent.

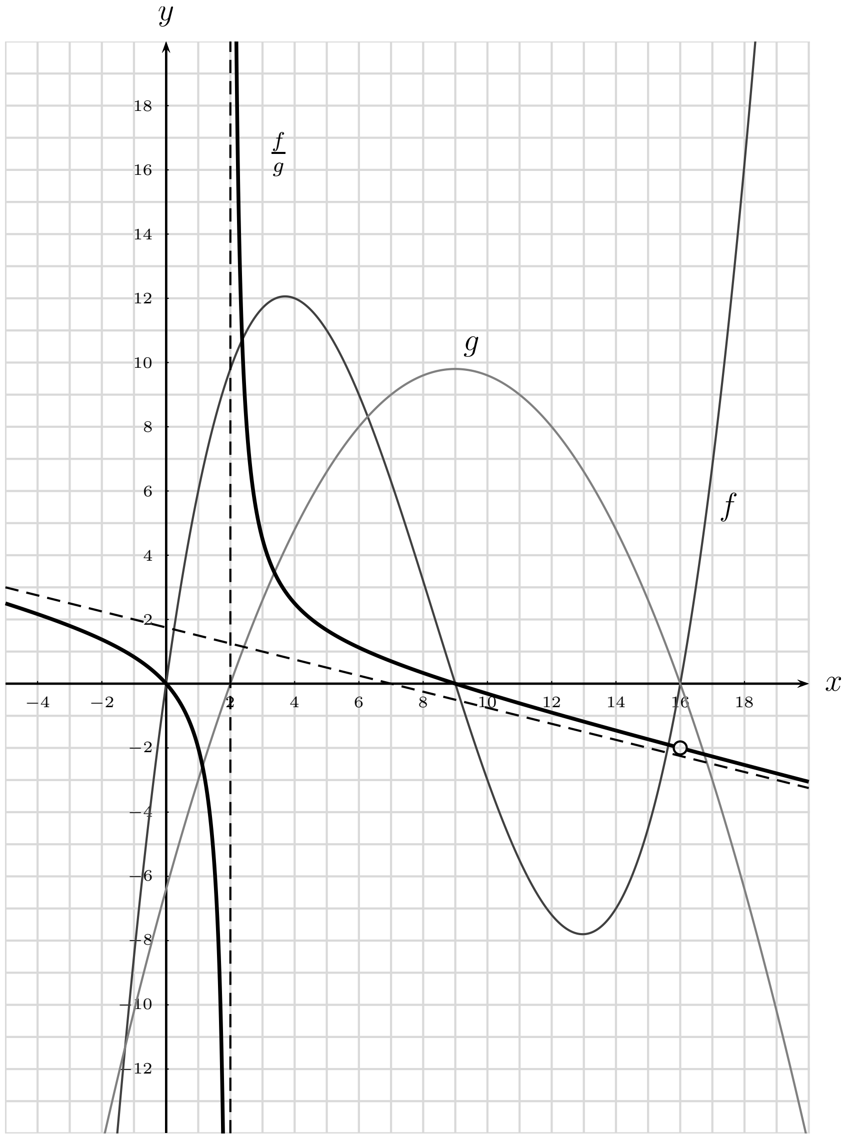
8.10.4 Division d'une fonction par une autre

Soit f et g deux fonctions réelles ayant le même domaine de définition D et le même domaine d'arrivée A. En d'autres termes, on a $f : D \to A$ et $g : D \to A$ avec $A, D \subset \mathbb{R}$. Rappelons que l'on note Z_g l'ensemble des zéros de g (ce sont les points x en lesquels la fonction g s'annule).

On définit la *fonction f divisée par g*, notée $\frac{f}{g} : D \setminus Z_g \to A$, par

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}}$$

Voici comment la multiplication se comporte sur les graphes des fonctions.



Pour obtenir le graphe de fg, on divise, en chaque point, la hauteur de f par celle de g.

Lorsque g s'annule, il peut se produire deux phénomènes pour la fonction f divisée par g. Une asymptote verticale peut apparaître (en $x = 2$ dans l'exemple ci-dessus), mais il peut y avoir un trou dans la fonction (en $x = 16$ dans l'exemple ci-dessus). Ces phénomènes seront étudiés plus en détails dans le chapitre sur les limites.

On voit aussi apparaître ce qu'on appelle une *asymptote oblique* : on y reviendra aussi dans le chapitre sur les limites.

8.10.5 Composition de fonctions

Soit f et g deux fonctions telles que le domaine d'arrivée de f soit le domaine de définition de g, disons $f : D_f \to D_g$ et $g : D_g \to A$ afin que l'on puisse appliquer une fonction après l'autre.

$$\begin{array}{ccccc} D_f & \xrightarrow{f} & D_g & \xrightarrow{g} & A \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Cela nous permet de définir *la fonction g composée avec f*, définie par

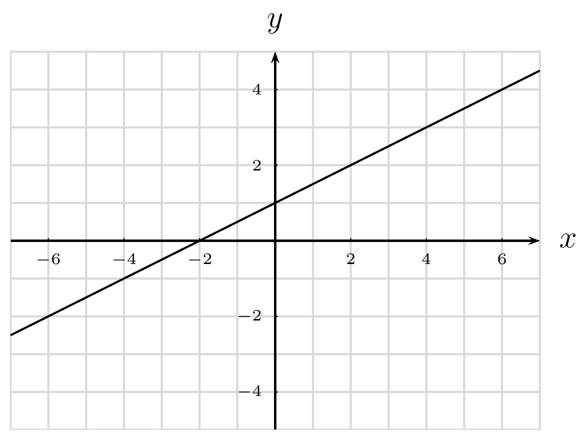
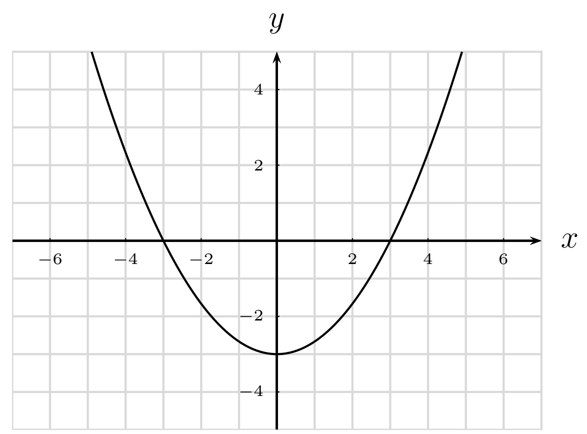
$$\begin{array}{ccccc} g \circ f & : & D_f & \longrightarrow & A \\ & & x & \longmapsto & \boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x))} \end{array}$$

Attention

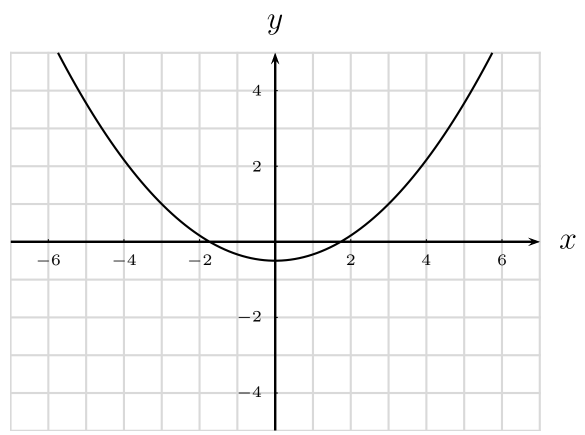
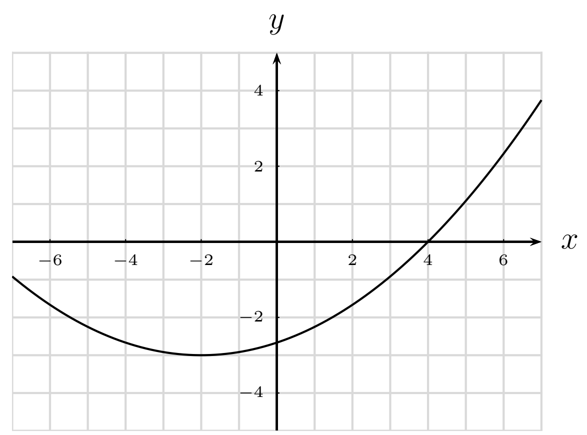
En général, la fonction $g \circ f$ n'est pas égale à la fonction $f \circ g$. Pour la fonction $g \circ f$, on fait d'abord f, puis g. Tandis que pour la fonction $f \circ g$, on fait d'abord g, puis f.

Illustration

Voici le graphe de deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$	$g(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 9)$
	

Voici le graphe des deux fonctions composées.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{6}(x^2 - 3)$	$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{12}(x^2 + 4x - 32)$
	

Chapitre 9

Résolution d'inéquations

Définition

Une *inéquation* est une équation où l'on a remplacé le symbole égal $=$ par une des quatre inégalités suivantes : $\leqslant$, $\geqslant$, $<$ ou $>$.

9.1 Résolution d'inéquations du premier degré

Les inéquations du premier degré sont de la forme : $\quad ax + b \leqslant cx + d$
où $\leqslant$ pourrait aussi être une des trois autres inégalités ($\geqslant$, $<$ ou $>$).

Pour résoudre une telle inéquation, on écrit une succession d'inéquations équivalentes jusqu'à ce que x soit isolé.

Par exemple pour résoudre l'équation $2x+4 \leqslant 5x+6$, on peut procéder de deux manières :

1. On isole x du côté droit :

$$2x + 4 \leqslant 5x + 6 \overset{-6}{\iff} 2x - 2 \leqslant 5x \overset{-2x}{\iff} -2 \leqslant 3x \overset{:3}{\iff} -\frac{2}{3} \leqslant x$$

2. On isole x du côté gauche :

$$2x + 4 \leqslant 5x + 6 \overset{-4}{\iff} 2x \leqslant 5x + 2 \overset{-5x}{\iff} -3x \leqslant 2 \overset{:(-3)}{\iff} x \geqslant -\frac{2}{3}$$

Dans les deux cas, on a trouvé que l'ensemble de solutions est $S = \left[-\frac{2}{3}, +\infty\right[$.

Néanmoins, on remarque un énorme danger :

> Multiplier ou diviser par un nombre négatif chaque membre d'une inéquation renverse l'inégalité !

9.2 Résolution d'inéquations : méthode générale

Multiplier par x les membres d'une inéquation ne donne pas une inéquation équivalente, comme le montre l'exemple suivant (même si on renverse l'inégalité) :

$$\frac{2x-1}{x} \geqslant 1 \overset{\cdot x}{\not\iff} 2x - 1 \geqslant x$$

En effet, l'inéquation de gauche admet $S = \left]-\infty, 0\right[\cup \left[1, +\infty\right[$ comme ensemble de solutions et celle de droite admet $S = \left[1, +\infty\right[$.

Ainsi, dans le cas général, le danger précédemment découvert devient plus effroyable :

> À moins de faire un raisonnement compliqué, on n'a plus aucun contrôle sur l'inégalité d'une inéquation lorsqu'on effectue une multiplication ou division par un terme qui dépend de l'inconnue x !

Il faut donc utiliser une méthode plus générale pour résoudre les inéquations :

ON UTILISE LES TABLEAUX DE SIGNES !

De ce fait, pour résoudre une inéquation, on va chercher une inéquation équivalente de la forme :

$$f(x) > 0\,, \qquad f(x) \geqslant 0\,, \qquad f(x) < 0 \qquad \text{ou} \qquad f(x) \leqslant 0$$

Finalement, on trouve l'ensemble des solutions de l'inéquation en lisant le tableau de signes de la fonction f. Cet ensemble de solutions sera décrit grâce aux intervalles.

Exemple

Cherchons à résoudre l'inéquation $\dfrac{2x^2(x+3)}{(x+1)^2} \leqslant \dfrac{x^3(x+3)}{(x+1)^2(x-2)}$

On commence par chercher une équation équivalente de la forme $f(x) \leqslant 0$:

$$\frac{2x^2(x+3)}{(x+1)^2} \leqslant \frac{x^3(x+3)}{(x+1)^2(x-2)} \overset{\text{soustraction}}{\Longleftrightarrow} \frac{2x^2(x+3)}{(x+1)^2} - \frac{x^3(x+3)}{(x+1)^2(x-2)} \leqslant 0$$

$$\underset{\text{de fractions}}{\overset{\text{amplification}}{\Longleftrightarrow}} \frac{2x^2(x+3)(x-2)}{(x+1)^2(x-2)} - \frac{x^3(x+3)}{(x+1)^2(x-2)} \leqslant 0$$

$$\underset{\text{de fractions}}{\overset{\text{soustraction}}{\Longleftrightarrow}} \frac{2x^2(x+3)(x-2) - x^3(x+3)}{(x+1)^2(x-2)} \leqslant 0$$

$$\underset{\text{par factorisation}}{\overset{\text{simplification}}{\Longleftrightarrow}} \frac{x^2(x+3)\big(2(x-2)-x\big)}{(x+1)^2(x-2)} \leqslant 0 \iff \overbrace{\frac{x^2(x+3)(x-4)}{(x+1)^2(x-2)}}^{f(x)} \leqslant 0$$

Afin de déterminer les solutions de cette inéquation, on établit le tableau de signes de la fonction f (c'est pour cette raison qu'on a factorisé la fonction f). Rappelons que le tableau de signes de la fonction

$$f(x) \;=\; \frac{x^2\,(x+3)\,(x-4)}{(x+1)^2\,(x-2)}$$

a déjà été établi en page 96. Le voici :

x		-3		-1		0		2		4	
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\lightning$	$+$	0	$+$	$\lightning$	$-$	0	$+$

On peut lire les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ sur le tableau de signes. L'ensemble des solutions, facilement exprimé à l'aide des intervalles, est donc le suivant.

$$S = \,]-\infty, -3] \cup \{0\} \cup \,]2, 4]$$

Notation : l'ensemble $\{0\}$ est le même que celui décrit à l'aide de l'intervalle $[0, 0]$.

Chapitre 10

Herbier de fonctions réelles

Rappelons que lorsque les domaines de définition et d'arrivée d'une fonction f sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, on parle de *fonctions réelles*.

Les mathématiciens ont classé les fonctions réelles en différentes catégories décrites ci-dessous.

Les fonctions continues

- **Les fonctions polynomiales**
  1. Les fonctions affines (ou fonctions polynomiales de degré $\leqslant 1$).
     (a) Les fonctions constantes.
     (b) Les fonctions linéaires.
  2. Les fonctions quadratiques (ou fonctions polynomiales de degré 2).
  3. Les fonctions cubiques (ou fonctions polynomiales de degré 3).
  4. Les fonctions polynomiales de degré $\geqslant 4$.
- **Les fonctions algébriques**
  1. Les fonctions polynomiales.
  2. Les homographies.
  3. Les fonctions rationnelles.
  4. Les racines carrées de fonctions rationnelles (racine carrée, valeur absolue, ...).
  5. Les mélanges entre fonctions rationnelles et racines n-ièmes.
- **Les fonctions transcendantes**
  1. Les fonctions trigonométriques et leur réciproque.
  2. Les fonctions exponentielles et les logarithmes.
  3. Les fonctions hyperboliques.
  4. ...

Herbier de fonctions réelles

Rappelons que lorsque les domaines de définition et d'arrivée d'une fonction f sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, on parle de *fonctions réelles*.

Les mathématiciens ont classé les fonctions réelles en différentes catégories décrites ci-dessous.

Les fonctions continues

Intuitivement, une fonction est *continue* lorsque son graphe au-dessus du domaine de définition se dessine sans lever le crayon. Voici 3 types de fonctions continues.

Premier type de fonctions : les fonctions polynomiales

1. **Les fonctions affines (ou fonctions polynomiales de degré $\leqslant 1$)**
   Les *fonctions affines* ont l'expression fonctionnelle suivante

$$f(x) = a_1 x + a_0 \quad \text{avec} \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

   Parmi les fonctions affines, on trouve :

   (a) Les *fonctions constantes* d'expression fonctionnelle

$$f(x) = a_0 \quad \text{avec} \quad a_0 \in \mathbb{R}$$

   (b) Les *fonctions linéaires* d'expression fonctionnelle

$$f(x) = a_1 x \quad \text{avec} \quad a_1 \in \mathbb{R}$$

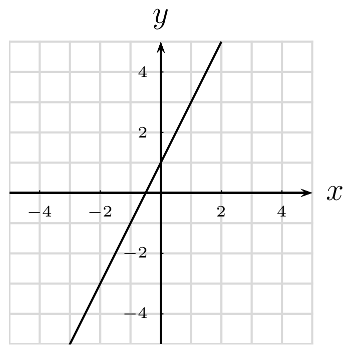
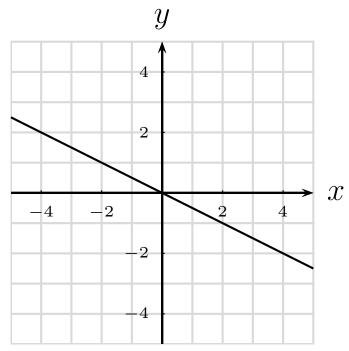
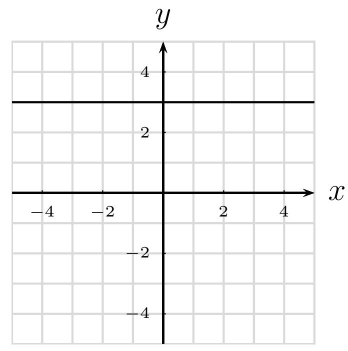
   Le graphe des fonctions affines est une *droite*. Le nombre a_1 représente la *pente* de la droite (quand on avance de 1 sur l'axe horizontal, la fonction monte ou descend de a_1) et le nombre a_0 représente la *hauteur* de la droite (l'image de $x = 0$).

   Ainsi

   (a) La droite est horizontale lorsque la fonction est constante.

   (b) La droite passe par l'origine lorsque la fonction est linéaire.

   Voici des exemples de graphes de fonctions affines.

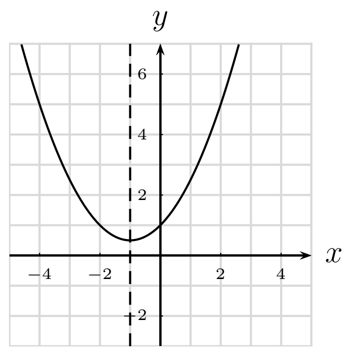
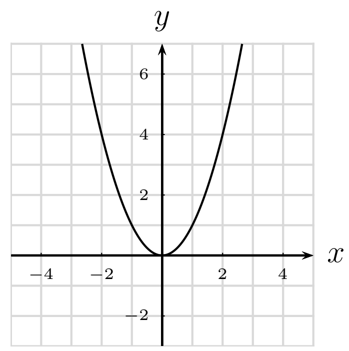
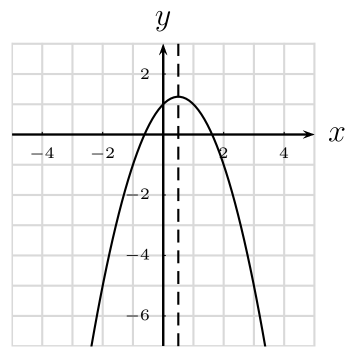
$f(x) = 2x + 1$ (affine)	$f(x) = -\frac{1}{2}x$ (linéaire)	$f(x) = 3$ (constante)
		

2. **Les fonctions quadratiques (ou fonctions polynomiales de degré** 2**)**
Les *fonctions quadratiques* ou *fonctions polynomiales du deuxième degré* ont l'expression fonctionnelle suivante

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{avec} \quad a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0$$

Le graphe des fonctions quadratiques est une *parabole*.

Voici des exemples de graphes de fonctions quadratiques.

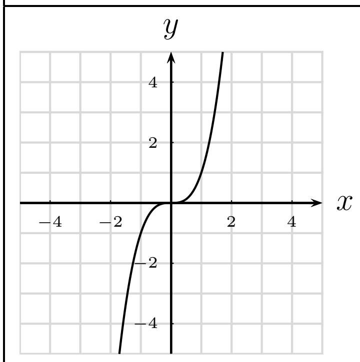
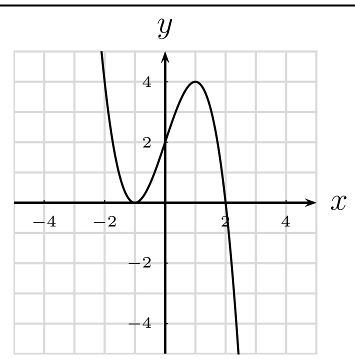
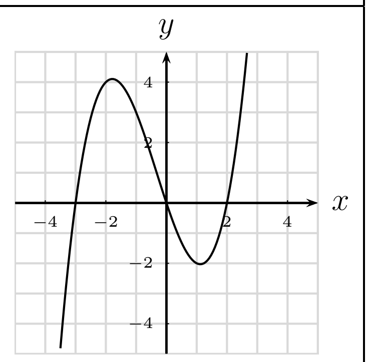
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$	$f(x) = x^2$	$f(x) = -x^2 + x + 1$
$= \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2}$	$= (x-0)^2 + 0$	$= -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}$
		

On voit sur ces graphes que les fonctions quadratiques peuvent avoir 0, 1 ou 2 zéros !

3. **Les fonctions cubiques (ou fonctions polynomiales de degré** 3**)**
Les *fonctions cubiques* ou *fonctions polynomiales du troisième degré*.
Les fonctions cubiques ont l'expression fonctionnelle suivante.

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{avec} \quad a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, a_3 \neq 0$$

Voici des exemples de graphes de fonctions cubiques.

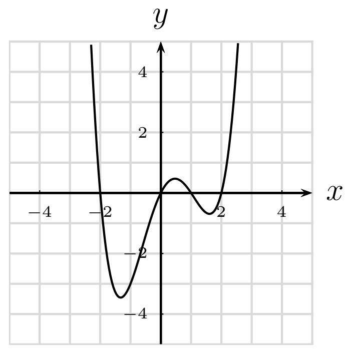
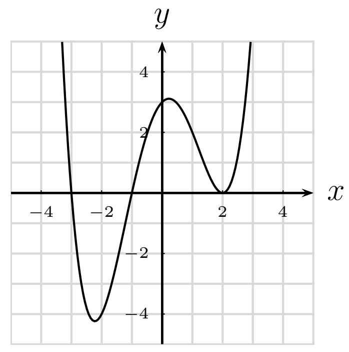
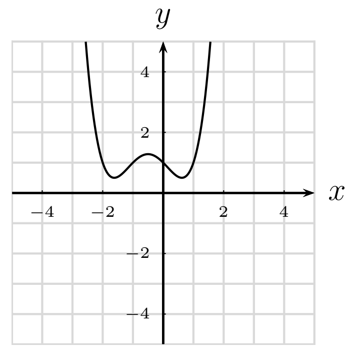
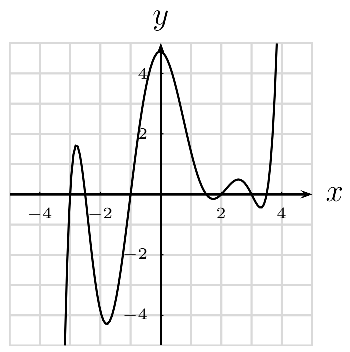
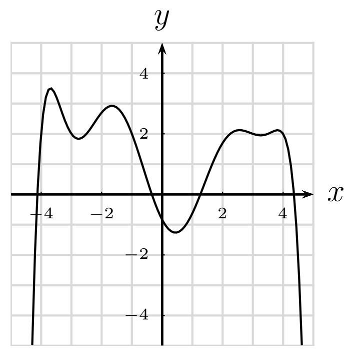
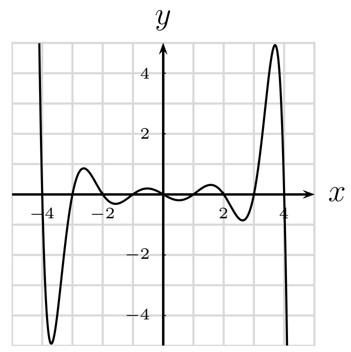
$f(x) = x^3$	$f(x) = -x^3 + 3x + 2$	$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x$
		

Les fonctions cubiques ont toujours au moins 1 zéro et au plus 3 zéros.

4. **Les fonctions polynomiales de degré** $\geqslant 4$
Par exemple :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + 3x^2 - \sqrt{2}\,x + \pi \\ g(x) &= x^6 - x^3 + 1 \\ h(x) &= x^{15} - 1 \end{aligned}$$

Voici des exemples de graphes de fonctions polynomiales de degré $\geqslant 4$.

<table>
<tr><th colspan="3">Voici trois graphes de fonctions polynomiales de degré 4.</th></tr>
<tr><td>$f(x) = \frac{1}{2}\,x^4 - \frac{1}{2}\,x^3 - 2x^2 - 2x$</td><td>$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{4}x^2 + x + 3$</td><td>$f(x) = \frac{1}{2}\,x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 1$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><th colspan="3">Voici trois graphes de fonctions polynomiales de degré $\geqslant 5$.</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Deuxième type de fonctions : les fonctions algébriques

Une fonction algébrique est une fonction qui peut être exprimée par un nombre fini de sommes, de différences, de multiplications, de quotients ou de racines de fonctions polynomiales.

Par exemple :

1. Les fonctions polynomiales (voir ci-dessus).

2. Les *homographies* ou fonctions dont le graphe est une hyperbole ou une droite (non horizontale) ont l'expression fonctionnelle suivante.

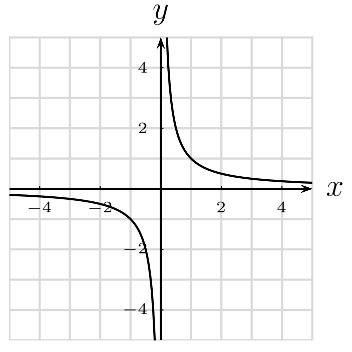
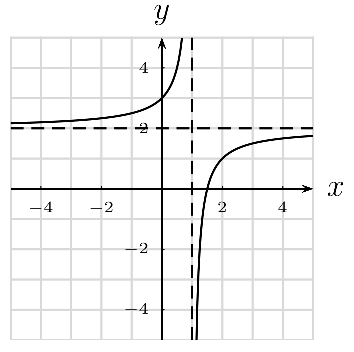
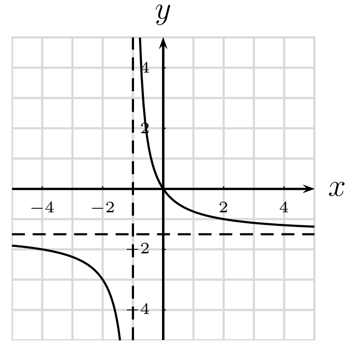
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad \text{avec } ad - bc \neq 0$$

   Le domaine de définition d'une telle fonction est $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ si $c \neq 0$ (cas où le graphe est une hyperbole) et $D = \mathbb{R}$ si $c = 0$ (cas où le graphe est une droite).

   La condition $ad - bc \neq 0$ est présente afin que cette fonction soit injective. Si on avait $ad - bc = 0$, le graphe de f serait une droite horizontale, car la fraction pourrait se simplifier et le x disparaîtrait. Par exemple, si $a = 2$, $b = 1$, $c = 6$ et $d = 3$, la fraction est simplifiable car

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{2x+1}{6x+3} = \frac{2x+1}{3(2x+1)} = \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad x \neq -\frac{1}{2}$$

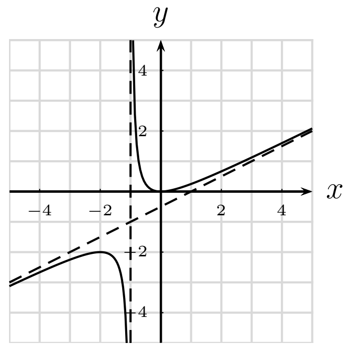
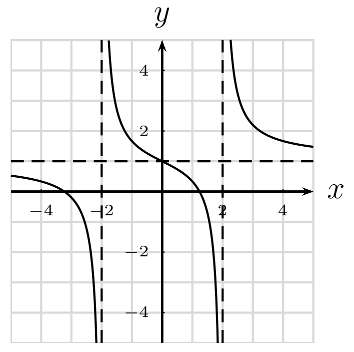
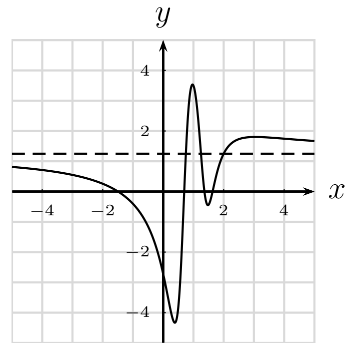
Voici des exemples de graphes d'homographies.

$f(x) = 1/x$	$f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$	$f(x) = -\frac{3x}{2x+2}$
		

3. Les *fonctions rationnelles*, qui sont des quotients de fonctions polynomiales. Par exemple

$$f(x) = \frac{x^2}{2x+2} \qquad g(x) = \frac{x^2+2x-4}{x^2-4} \qquad h(x) = \frac{x^4+3x^2+\pi}{x^6-x^3+1}$$

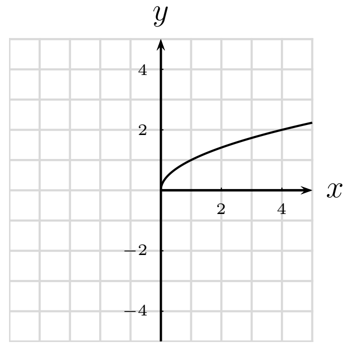
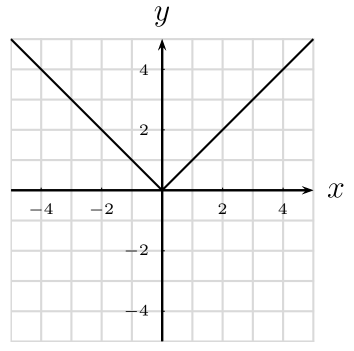
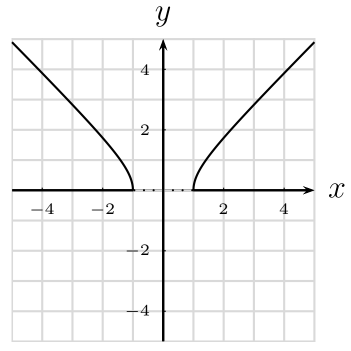
Voici des exemple de graphes de fonctions rationnelles.

Voici trois graphes de fonctions rationnelles.		
		

4. La *racine carrée* et la *valeur absolue* sont des racines de fonctions rationnelles.

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad g(x) = |x| = \sqrt{x^2} \qquad h(x) = \sqrt{x^2-1}$$

Voici les graphes des fonctions ci-dessus.

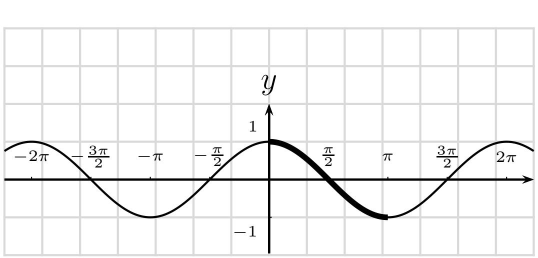
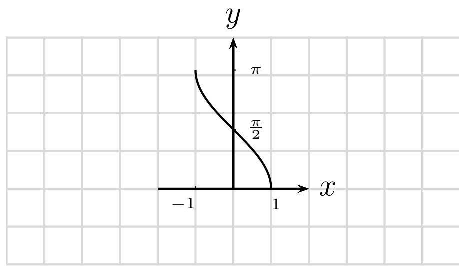
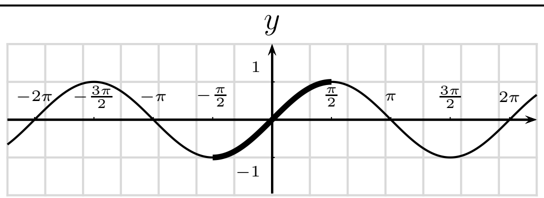
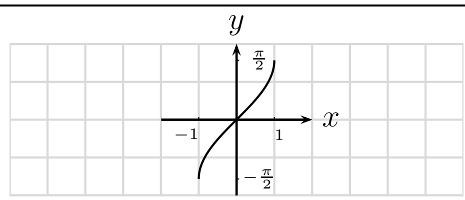
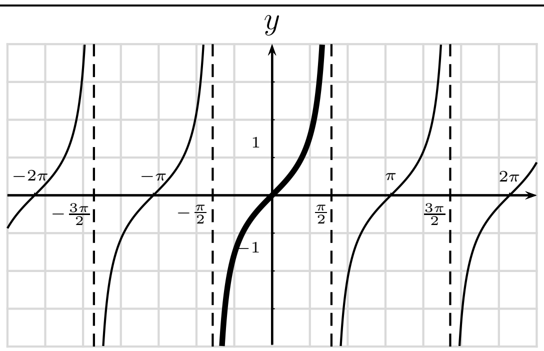
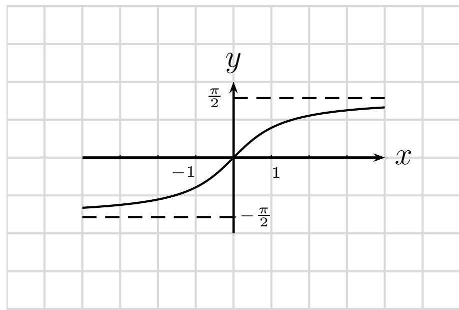
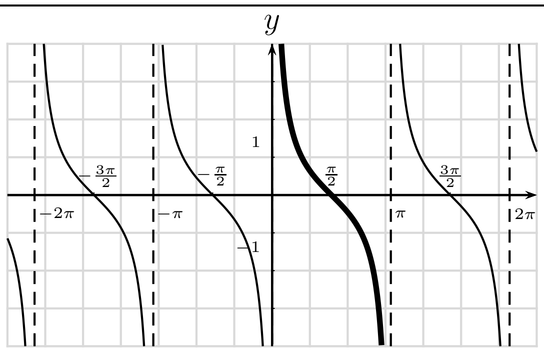
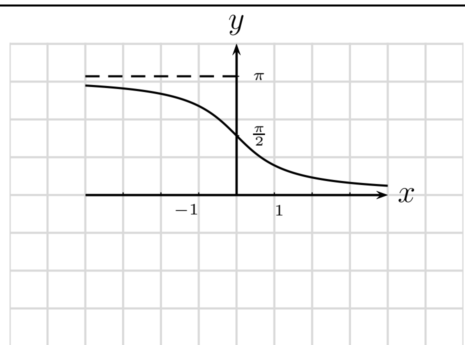
$f(x) = \sqrt{x}$	$g(x) = \lvert x\rvert$	$h(x) = \sqrt{x^2-1}$
		

5. Un mélange de fonctions rationnelles et de racines n-ièmes. Par exemple
$$f(x) = \sqrt{\frac{1+|x|}{\sqrt{x}}} - (4x+1)\frac{x^2 + \frac{1}{x} + 5\sqrt[3]{x^2+5}}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x}}$$

Troisième type de fonctions : les fonctions transcendantes

Les fonctions qui ne sont pas algébriques sont *transcendantes*.
Voici quelques types de fonctions transcendantes importantes.

1. **Les fonctions trigonométriques** et leur réciproque.

$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$\arccos = \cos^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$
	
$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$\arcsin = \sin^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
	
$\tan : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$	$\arctan = \tan^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
	
$\cot : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$	$\text{arccot} = \cot^{-1} : \mathbb{R} \to]0,\pi[$
	

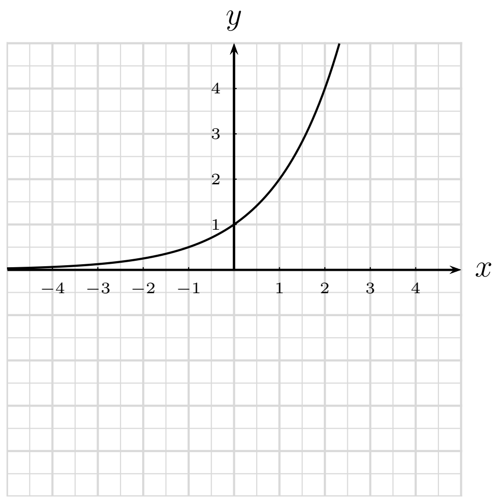
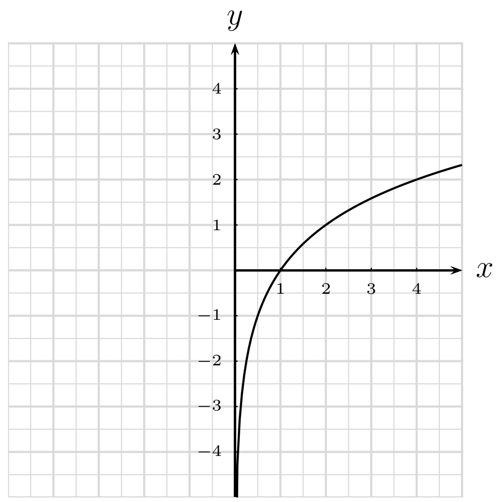
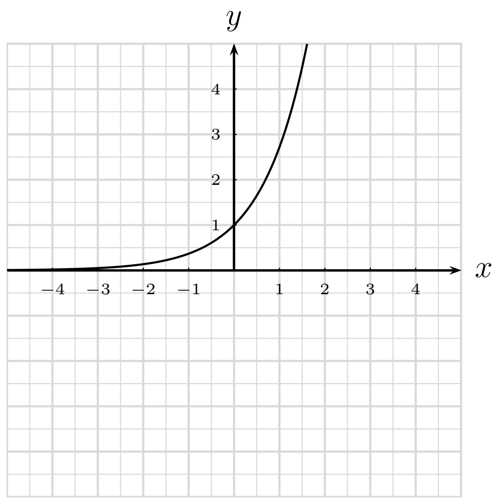
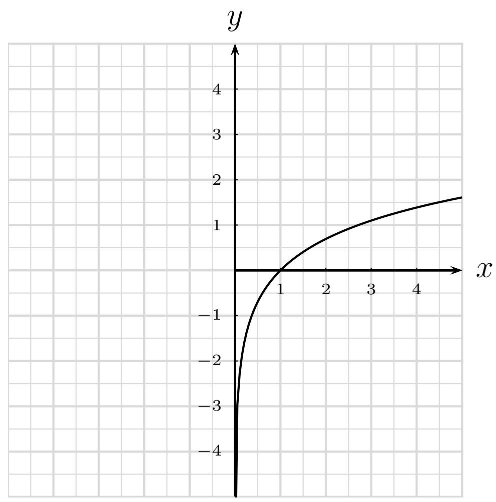
2. **Les fonctions exponentielles et logarithmes.**
Les *fonctions exponentielles* ont l'expression fonctionnelle suivante.

$$f(x) = \exp_a(x) = a^x \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}, a > 0$$

Les *fonctions logarithmes* ont l'expression fonctionnelle suivante.

$$f(x) = \log_a(x) \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

Voici des exemples de graphes de fonctions exponentielles et logarithmes.

<table>
<tr><td>$\exp_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0};\ x \mapsto 2^x$</td><td>$\exp_2^{-1} = \log_2 : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\exp_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0};\ x \mapsto e^x$</td><td>$\exp_e^{-1} = \log_e = \ln : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Il existe un nombre irrationnel pour lequel les fonctions exponentielles et logarithmes ont de bonnes propriétés. Ce nombre est le nombre d'Euler

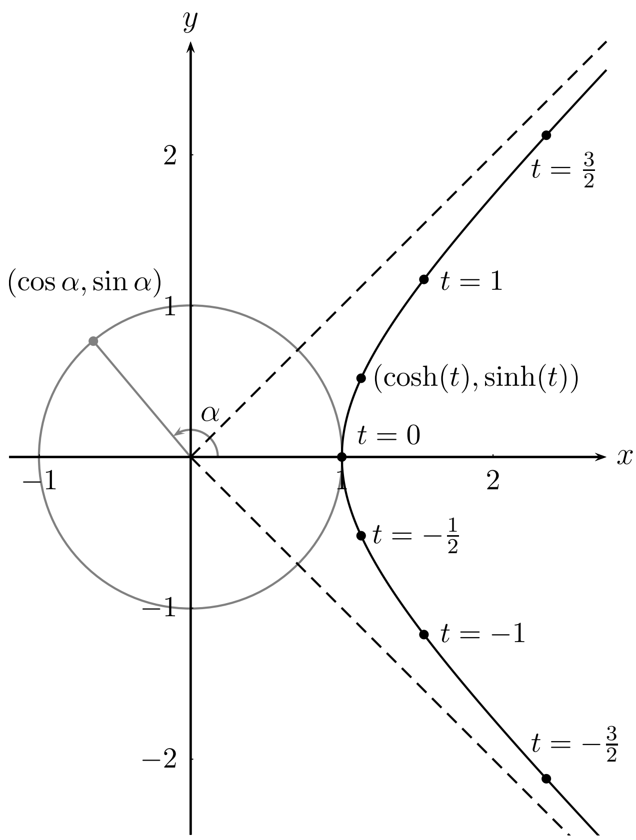
$$e \cong 2.718281828459045$$

Ce nombre est présenté dans le courant de la deuxième année. Lorsque l'on travaille dans cette base, le logarithme change de nom : il devient le *logarithme népérien* ou *logarithme naturel* et il s'écrit

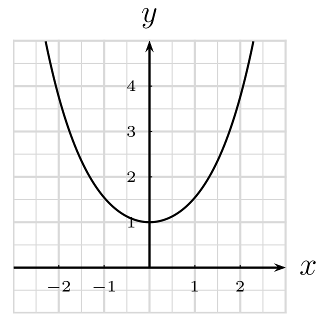
$$\log_e(x) = \ln(x)$$

3. **Les fonctions hyperboliques.**
(à ne pas confondre avec les homographies dont le graphe est une hyperbole.)
Tandis que les fonctions trigonométriques parcourent le cercle trigonométrique d'équation $x^2+y^2=1$, les fonctions hyperboliques parcourent l'hyperbole d'équation $x^2-y^2=1$ avec $x \geqslant 1$. On peut les exprimer grâce à la fonction exponentielle.

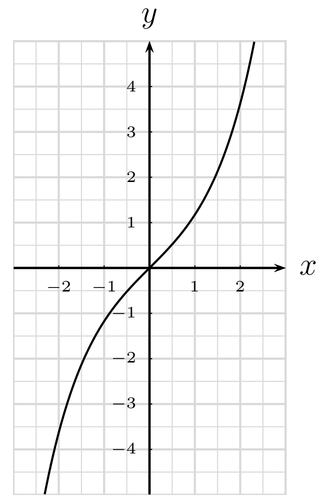
$$\boxed{\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}}$$



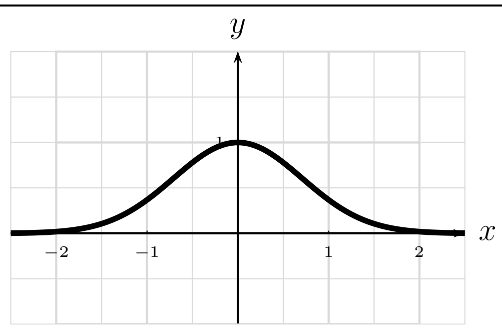
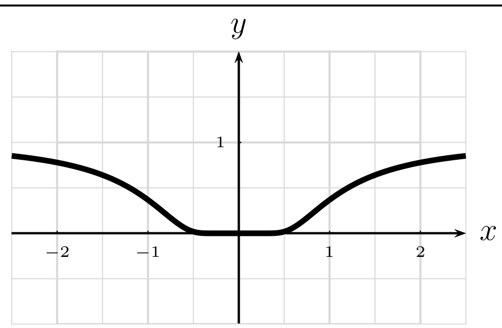
$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 1};\ x \mapsto \cosh(x)$



$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \sinh(x)$

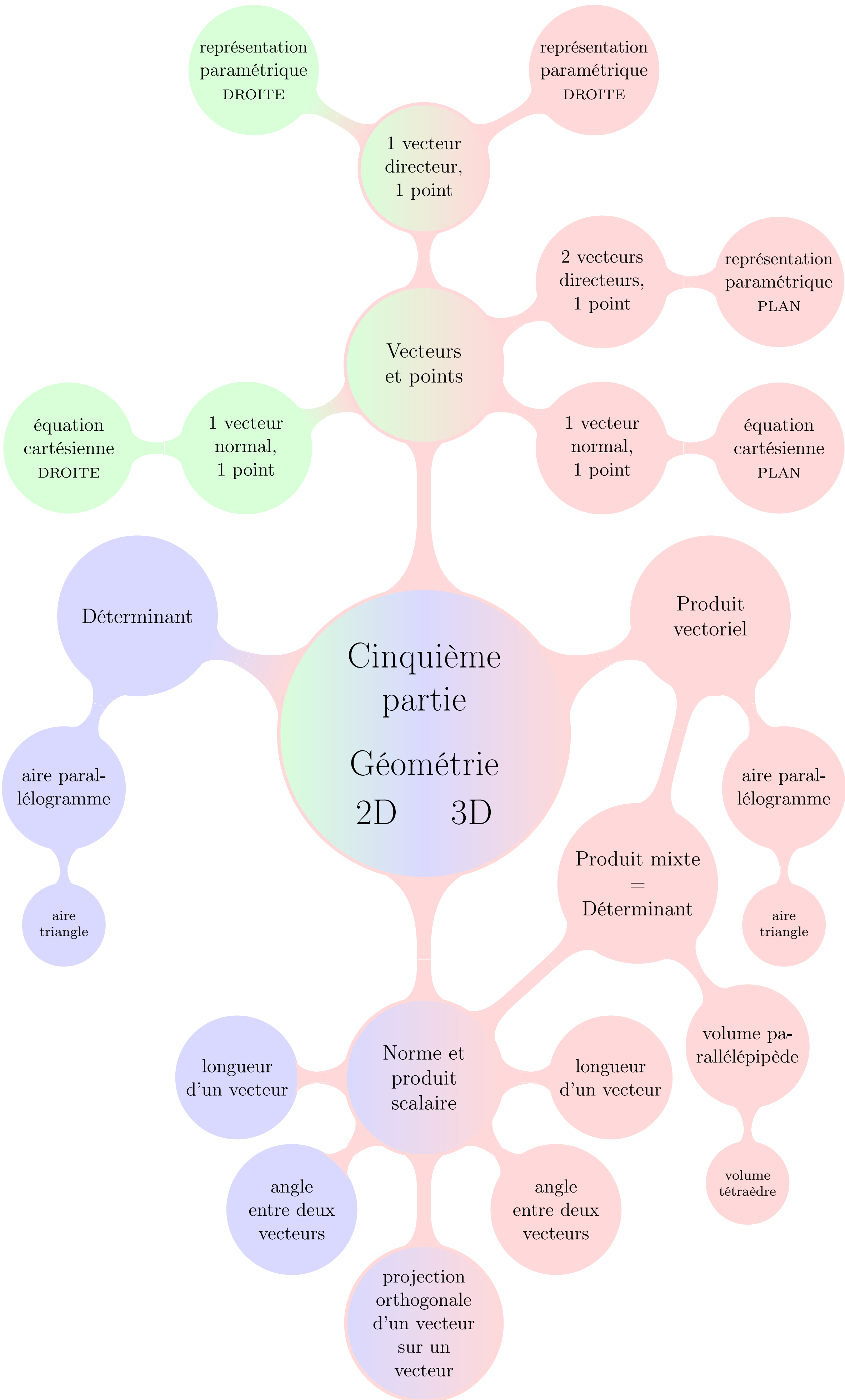


4. **Deux fonctions intéressantes**.
Voici deux fonctions que les mathématiciens aiment bien !

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0};\ x \mapsto e^{-x^2}$	$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0};\ x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$
	

La deuxième fonction, surnommée la casserole, peut-être prolongée par continuité en 0 par $g(0)=0$ (cela se voit sur le dessin : on a envie de dire $g(0)=0$).

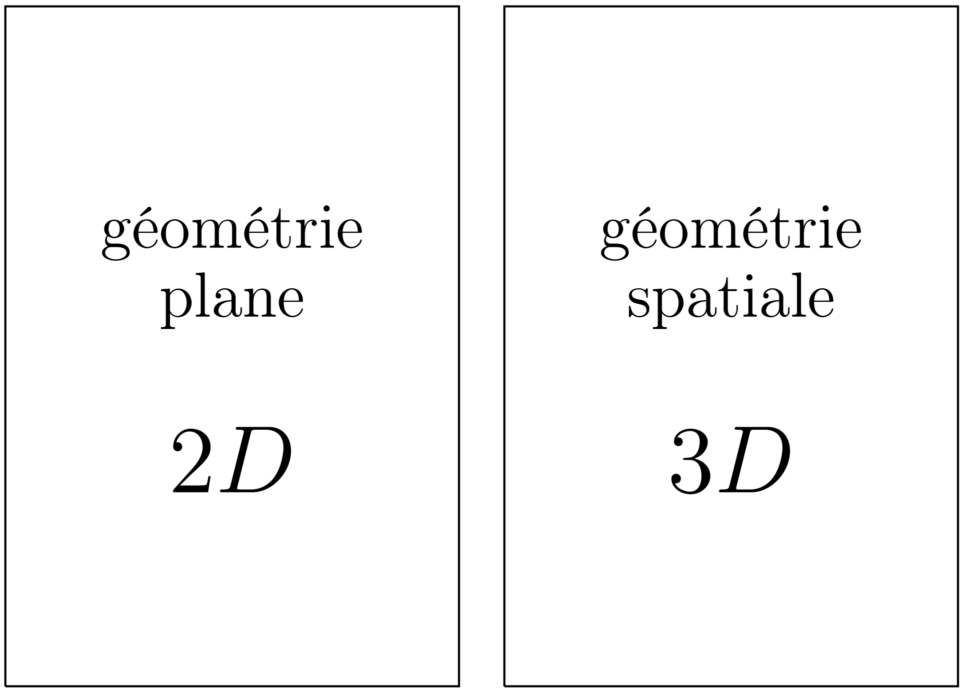
5. **Et bien d'autres...**


Cinquième partie
Géométrie
2D 3D
Vecteurs et points
1 vecteur directeur, 1 point
représentation paramétrique DROITE
représentation paramétrique DROITE
2 vecteurs directeurs, 1 point
représentation paramétrique PLAN
1 vecteur normal, 1 point
équation cartésienne PLAN
1 vecteur normal, 1 point
équation cartésienne DROITE
Déterminant
aire parallélogramme
aire triangle
Produit vectoriel
aire parallélogramme
aire triangle
Produit mixte = Déterminant
volume parallélépipède
volume tétraèdre
Norme et produit scalaire
longueur d'un vecteur
longueur d'un vecteur
angle entre deux vecteurs
angle entre deux vecteurs
projection orthogonale d'un vecteur sur un vecteur

Chapitre 11

Les géométries plane et spatiale

Ce cours de géométrie est construit de telle façon que tout ce qui concerne la géométrie plane se situe sur les pages de gauche et tout ce qui concerne la géométrie spatiale sur les pages de droite.



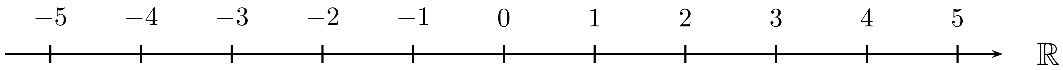
Ainsi le lecteur pourra bien mieux

1. avoir un aperçu de ce qui se passe en 3 dimensions lors de l'apprentissage de la géométrie plane ;
2. apprendre la géométrie spatiale en ayant sous les yeux la géométrie plane en rappel ;
3. distinguer les différences entre la géométrie à 2 dimensions et celle à 3 dimensions ;
4. repérer les analogies entre la géométrie à 2 dimensions et celle à 3 dimensions.

11.1 Plan

Droite réelle

On représente les nombres réels par une droite, appelée la *droite réelle*.



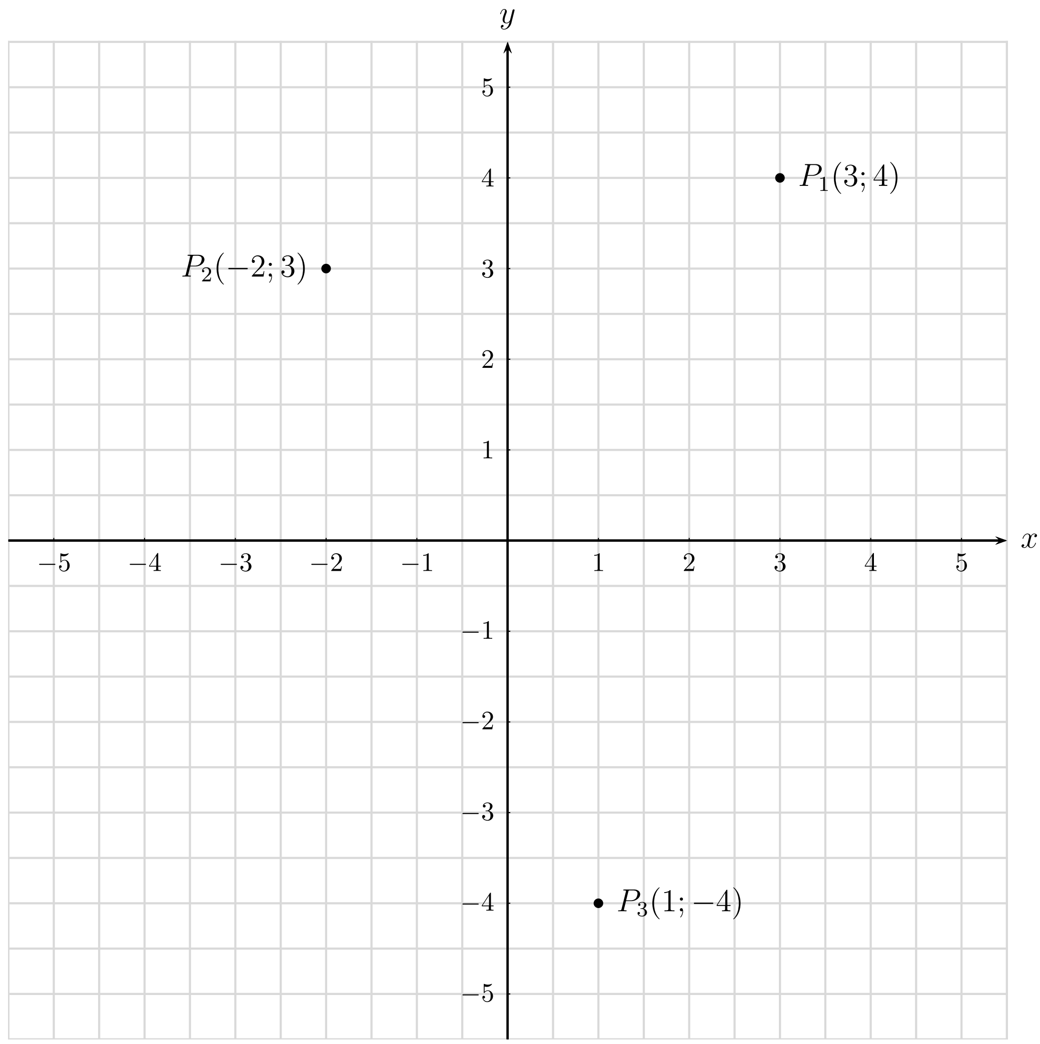
Plan

Lorsqu'on veut représenter des objets mathématiques composés de deux nombres et que l'ordre a de l'importance, on utilise des *points* dans le *plan*. Plutôt que de mettre $\mathbb{R}$ à la fin de chaque axe, les mathématiciens préfèrent noter x et y.

Le plan est constitué de points à 2 coordonnées $P(x;y)$. On dit que x est l'*abscisse* du point P et que y est l'*ordonnée* du point P.

De plus, la coutume veut que les axes soient perpendiculaires afin de former ce qu'on appelle un *repère orthogonal*.

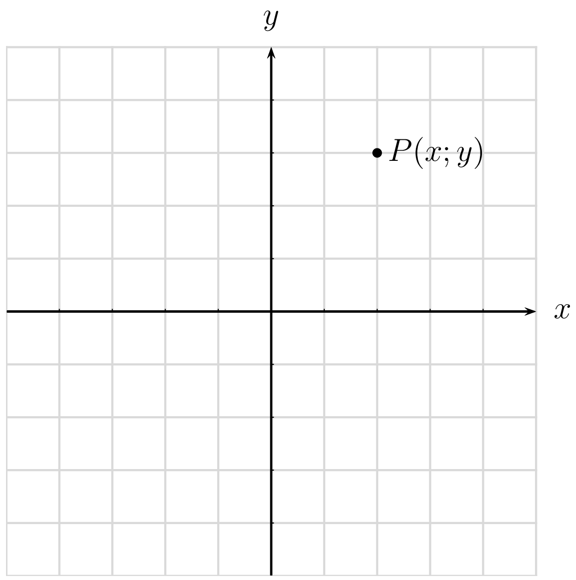
Convention Le plan se note $\mathbb{R}^2$ (car de dimension 2).

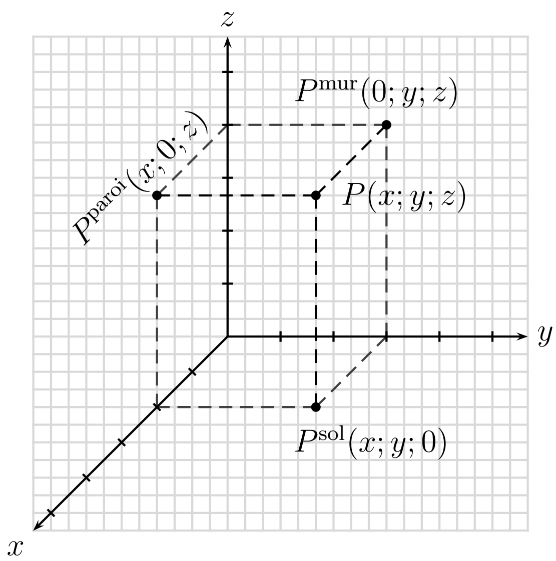


11.2 Espace

Pour passer du plan (à deux dimensions) à l'espace, on ajoute une troisième dimension. Techniquement, on pose le plan par terre et on ajoute une droite réelle verticalement afin de former un *repère orthogonal*.

Malheureusement, le support sur lequel on écrit est bidimensionnel. Afin que l'espace puisse être représenté sur une feuille, on met l'axe des x en perspective.





L'espace est constitué de points à 3 coordonnées $P(x; y; z)$. On dit que x est l'*abscisse* du point P, que y est l'*ordonnée* du point P et que z est la *cote* du point P.

Convention L'espace se note $\mathbb{R}^3$ (car de dimension 3).

Lorsqu'on dessine un point dans l'espace, on est obligé, pour le situer, de dessiner au moins une de ses trois *projections* sur le sol, la paroi ou le mur.

Le sol est l'ensemble

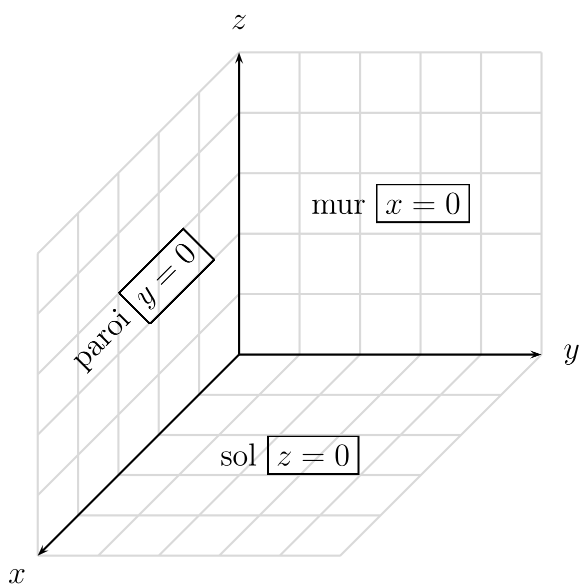
$$\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$$

La paroi est l'ensemble

$$\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}$$

Le mur est l'ensemble

$$\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$$



11.3 Vecteurs dans le plan

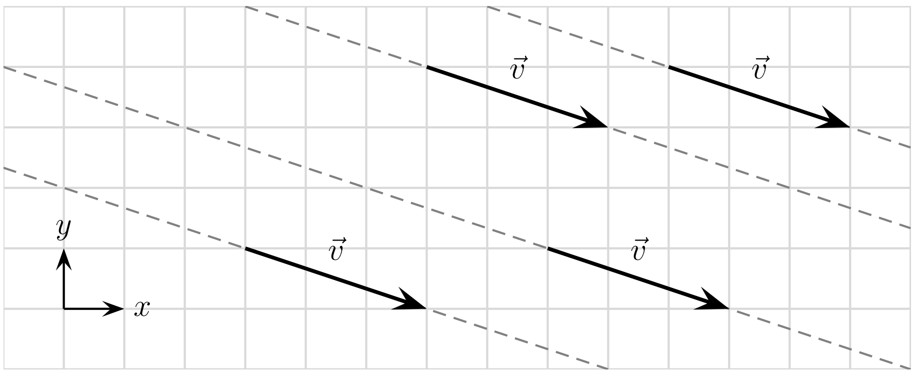
Intuitivement, en mathématiques, un vecteur est un objet utilisé dans le plan pour représenter un déplacement, un mouvement [1].

Définition

Un *vecteur* est un objet mathématique qui a trois caractéristiques. Ce sont les caractéristiques d'un déplacement.

1. Une *direction*.
2. Un *sens*.
3. Une *longueur*.

On représente un vecteur par une flèche. Voici un exemple de vecteur dans le plan.



La direction est donnée par une droite (ce n'est pas la position de la droite qui compte mais son orientation !), le sens est donné par une flèche (chaque direction a deux sens possibles) et la longueur du vecteur est donnée par la longueur de la flèche.

Tant que les trois caractéristiques (direction, sens, longueur) sont exactement les mêmes, le vecteur est le même. Peu importe là où il est représenté [2].

Notation Un vecteur est symbolisé par une petite flèche. Ici : $\vec{v}$.

Composantes d'un vecteur dans le plan

Dans le plan, un vecteur a *deux composantes* [3], une pour chaque axe du repère orthogonal ci-dessus. La *première composante* indique le déplacement horizontal (nombre positif pour un déplacement vers la droite et négatif pour la gauche) et la *deuxième composante* indique le déplacement vertical (nombre positif pour un déplacement vers le haut et négatif vers le bas).

Dans l'exemple ci-dessus, le vecteur représenté est $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. En physique, les vecteurs permettent de représenter les vitesses, les forces et les accélérations.
2. En physique, on dit que la force est la même, mais que les *points d'application* sont différents.
3. pour définir proprement les composantes d'un vecteur, on utilise la notion de base (voir en page 136) ; ici, on utilise implicitement la base canonique.

11.4 Vecteurs dans l'espace

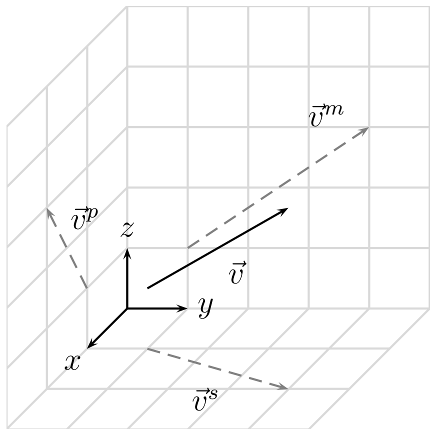
Intuitivement, en mathématiques, un vecteur est un objet utilisé dans l'espace pour représenter un déplacement, un mouvement [4].

Définition

Un *vecteur* est un objet mathématique qui a trois caractéristiques. Ce sont les caractéristiques d'un déplacement.

1. Une *direction*.
2. Un *sens*.
3. Une *longueur*.

On représente un vecteur par une flèche. Voici un exemple de vecteur dans l'espace (on voit ses projections sur le sol, la paroi et le mur).



La direction est donnée par une droite (ce n'est pas la position de la droite qui compte mais son orientation !), le sens est donné par une flèche (chaque direction a deux sens possibles) et la longueur du vecteur est donnée par la longueur de la flèche.

Tant que les trois caractéristiques (direction, sens, longueur) sont exactement les mêmes, le vecteur est le même. Peu importe là où il est représenté [5].

Notation Un vecteur est symbolisé par une petite flèche. Ici : $\vec{v}$.

Composantes d'un vecteur dans l'espace

Dans l'espace, un vecteur a *trois composantes* [6], une pour chaque axe du repère orthogonal ci-dessus. La *première composante* indique le déplacement avant-arrière (nombre positif pour un déplacement contre le lecteur et négatif pour s'éloigner du lecteur), la *deuxième composante* indique le déplacement latéral (nombre positif pour un déplacement vers la droite et négatif vers la gauche) et la *troisième composante* indique le déplacement vertical (nombre positif pour un déplacement vers le haut et négatif vers le bas).

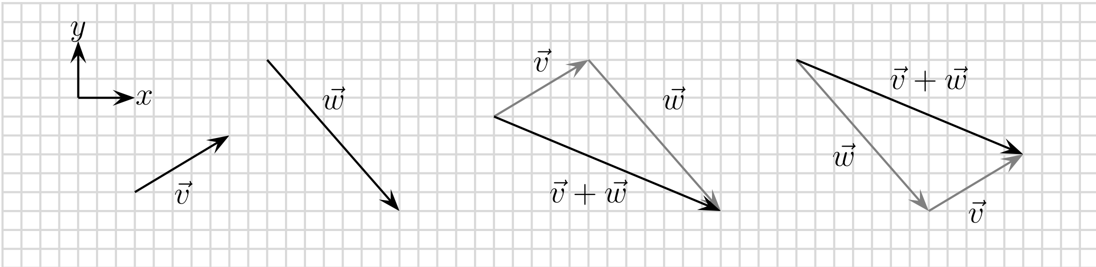
Dans l'exemple ci-dessus, le vecteur représenté est $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. En physique, les vecteurs permettent de représenter les vitesses, les forces et les accélérations.
5. En physique, on dit que la force est la même, mais que les *points d'application* sont différents.
6. pour définir proprement les composantes d'un vecteur, on utilise la notion de base (voir en page 137) ; ici, on utilise implicitement la base canonique.

11.5 Opérations sur les vecteurs dans le plan

Il y a principalement deux opérations possibles sur les vecteurs.

1. Addition de deux vecteurs.
   Intuitivement, cela consiste à faire un déplacement après un autre.



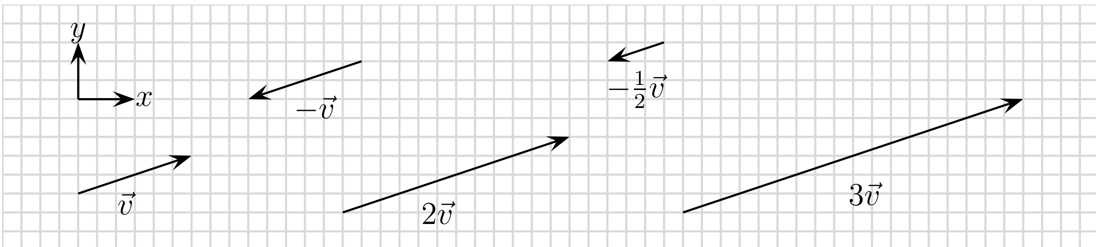
   Du point du vue des composantes, on a la règle évidente suivante.

$$\text{Si } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \text{ alors } \vec{v}+\vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$$

   De plus, on peut additionner deux vecteurs dans n'importe quel ordre :

$$\vec{v}+\vec{w} = \vec{w}+\vec{v}$$

2. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel.
   Intuitivement, cela revient à modifier la longueur ou le sens (si le nombre est négatif) d'un déplacement.



   Du point du vue des composantes, on a la règle évidente suivante.

$$\text{Si } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ alors } \lambda\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$$

Vecteurs parallèles ou colinéaires

Tout multiple d'un vecteur $\vec{d}$ par un nombre quelconque est *parallèle* ou *colinéaire* à $\vec{d}$. Lorsqu'on cherche des vecteurs parallèles, il est inutile d'utiliser un vecteur dont les composantes peuvent être *simplifiées*.

Par exemple, les vecteurs suivants sont parallèles.

$$\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{d_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\vec{d_1} \qquad \vec{d_3} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} \\ -10\sqrt{2} \end{pmatrix} = 5\sqrt{2}\ \vec{d_1}$$

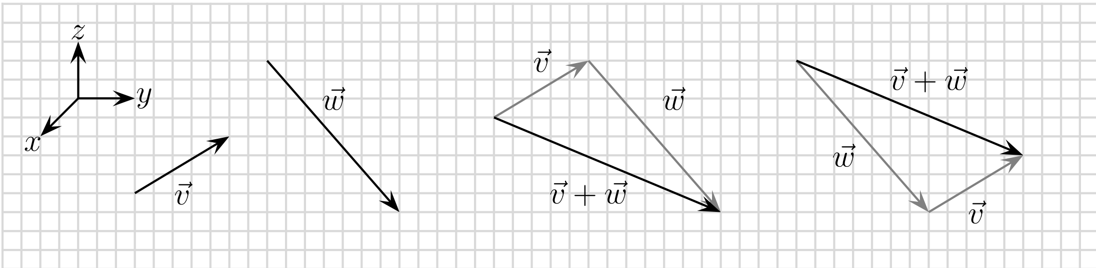
Notation $\vec{d_1} \parallel \vec{d_2}$, $\vec{d_2} \parallel \vec{d_3}$ et $\vec{d_1} \parallel \vec{d_3}$.

Ainsi, si l'on veut décrire une droite ayant ce vecteur comme vecteur directeur, on peut prendre $\vec{d_1}$ ou $\vec{d_2}$ (selon notre envie). Par contre, il n'est pas recommandé d'utiliser $\vec{d_3}$ (pourquoi compliquer quand on peut faire simple).

11.6 Opérations sur les vecteurs dans l'espace

Il y a principalement deux opérations possibles sur les vecteurs.

1. Addition de deux vecteurs.
   Intuitivement, cela consiste à faire un déplacement après un autre.



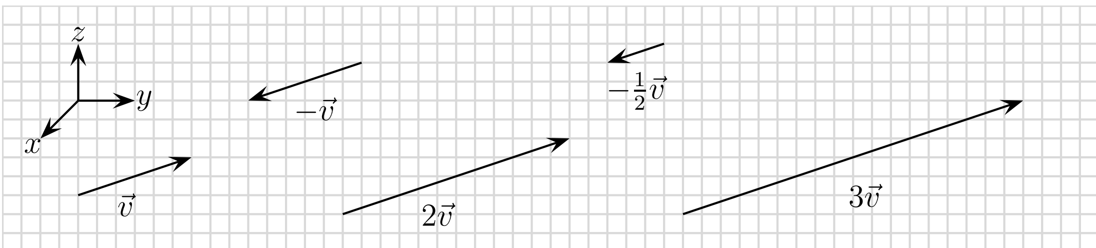
   Du point du vue des composantes, on a la règle évidente suivante.

$$\text{Si } \vec{v}=\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} \text{ et } \vec{w}=\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\\ w_3\end{pmatrix}, \text{ alors } \vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix} v_1+w_1\\ v_2+w_2\\ v_3+w_3\end{pmatrix}$$

   De plus, on peut additionner deux vecteurs dans n'importe quel ordre :

$$\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$$

2. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel.
   Intuitivement, cela revient à modifier la longueur ou le sens (si le nombre est négatif) d'un déplacement.



   Du point du vue des composantes, on a la règle évidente suivante.

$$\text{Si } \vec{v}=\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} \text{ et } \lambda\in\mathbb{R}, \text{ alors } \lambda\vec{v}=\begin{pmatrix} \lambda v_1\\ \lambda v_2\\ \lambda v_3\end{pmatrix}$$

Vecteurs parallèles ou colinéaires

Tout multiple d'un vecteur $\vec{d}$ par un nombre quelconque est *parallèle* ou *colinéaire* à $\vec{d}$. Lorsqu'on cherche des vecteurs parallèles, il est inutile d'utiliser un vecteur dont les composantes peuvent être *simplifiées*.

Par exemple, les vecteurs suivants sont parallèles.

$$\vec{d_1}=\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 3\end{pmatrix} \qquad \vec{d_2}=\begin{pmatrix} -1\\ 2\\ -3\end{pmatrix}=-\vec{d_1} \qquad \vec{d_3}=\begin{pmatrix} 5\sqrt{2}\\ -10\sqrt{2}\\ 15\sqrt{2}\end{pmatrix}=5\sqrt{2}\,\vec{d_1}$$

Notation $\vec{d_1}\parallel\vec{d_2}$, $\vec{d_2}\parallel\vec{d_3}$ et $\vec{d_1}\parallel\vec{d_3}$.

Ainsi, si l'on veut décrire une droite ayant ce vecteur comme vecteur directeur, on peut prendre $\vec{d_1}$ ou $\vec{d_2}$ (selon notre envie). Par contre, il n'est pas recommandé d'utiliser $\vec{d_3}$ (pourquoi compliquer quand on peut faire simple).

11.7 Combinaisons linéaires et bases dans le plan

Combinaison linéaire

On considère n vecteurs dans le plan, notés $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, …, $\vec{v}_n$.

Le vecteur $\vec{v}$ est une *combinaison linéaire* de ces n vecteurs lorsqu'il existe des nombres réels λ_1, λ_2, …, λ_n, appelés *coefficients* de la combinaison linéaire, tels que

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n$$

Base du plan

On dit que deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ du plan forment *une base du plan* lorsqu'aucun de ces vecteurs ne peut être exprimé comme combinaison linéaire de l'autre.

En géométrie plane, c'est le cas lorqu'ils ne sont pas colinéaires.

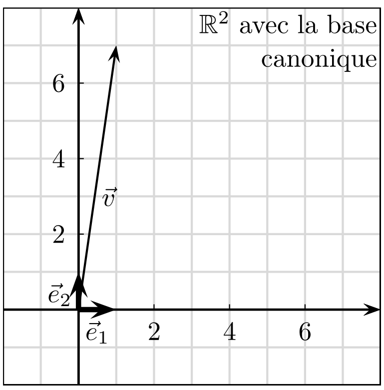
Exemples

1. Les vecteurs $\vec{e}_1 = \binom{1}{0}$ et $\vec{e}_2 = \binom{0}{1}$ forment la base dite *canonique*.
2. Les vecteurs $\vec{v}_1 = \binom{1}{1}$ et $\vec{v}_2 = \binom{-1}{2}$ forment une base, notée temporairement B.
3. Les vecteurs $\vec{v}_1 = \binom{6}{4}$ et $\vec{v}_2 = \binom{9}{6}$ ne forment pas une base, car $\vec{v}_1 = \frac{2}{3}\vec{v}_2$.

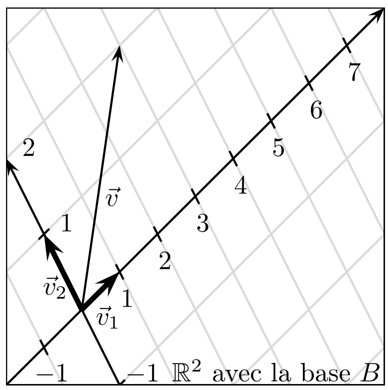
Théorème (la preuve se trouve dans le cours d'algèbre linéaire)

Lorsqu'on munit le plan d'une base, on peut exprimer n'importe quel vecteur du plan comme une unique combinaison linéaire des vecteurs de cette base.

Illustration Exprimons le vecteur $\vec{v} = \binom{1}{7}$ dans la base B. On cherche λ_1 et λ_2 tels que



$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix}\lambda_1 - \lambda_2\\ \lambda_1 + 2\lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr}\lambda_1 & - & \lambda_2 & = & 1\\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & = & 7\end{array}\right.$$
$$\iff \cdots \iff \left\{\begin{array}{rcr}\lambda_1 & = & 3\\ \lambda_2 & = & 2\end{array}\right.$$



Ainsi, dans la base B, le vecteur $\vec{v}$ s'écrit $\binom{3}{2}_B$ (dans la base canonique, $\vec{v}$ s'écrit $\binom{1}{7}$).

Théorème (voir les définition et propriété du déterminant présentées en page 178)

Les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ forment une base si et seulement si $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \neq 0$.

Règle générale

Sauf indication du contraire, nous utiliserons toujours la base canonique, qui est une *base orthonormée*. Cela signifie que ses vecteurs sont tous de longueur 1 (ou de *norme* 1) et deux de ses vecteurs sont toujours perpendiculaires (ou *orthogonaux*).

11.8 Combinaisons linéaires et bases dans l'espace

Combinaison linéaire

On considère n vecteurs dans l'espace, notés $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_n$.

Le vecteur $\vec{v}$ est une *combinaison linéaire* de ces n vecteurs lorsqu'il existe des nombres réels λ_1, λ_2, ..., λ_n, appelés *coefficients* de la combinaison linéaire, tels que

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n$$

Base de l'espace

On dit que trois vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ de l'espace forment *une base de l'espace* lorsqu'aucun de ces vecteurs ne peut être exprimé comme combinaison linéaire des deux autres.

En géométrie spatiale, c'est le cas lorqu'ils ne sont pas coplanaires.

Exemples

1. Les vecteurs $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ forment la base dite *canonique*.
2. Les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ forment une base, notée temp. B.
3. Les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}$ ne forment pas une base, car $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Théorème (la preuve se trouve dans le cours d'algèbre linéaire)

Lorsqu'on munit l'espace d'une base, on peut exprimer n'importe quel vecteur de l'espace comme une unique combinaison linéaire des vecteurs de cette base.

Illustration

Exprimons le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ dans la base B. On cherche λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3\\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3\\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & -1\\ \lambda_1 & + & 3\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 2\\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 1\end{array}\right. \iff \cdots \iff \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & 3\\ \lambda_2 & = & -1\\ \lambda_3 & = & -2\end{array}\right.$$

Ainsi, dans la base B, le vecteur $\vec{v}$ s'écrit $\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}_B$ (dans la base canonique, $\vec{v}$ s'écrit $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$).

Théorème (voir les définition et propriété du déterminant présentées en page 179)

Les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ forment une base si et seulement si $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \neq 0$.

Règle générale

Sauf indication du contraire, nous utiliserons toujours la base canonique, qui est une *base orthonormée*. Cela signifie que ses vecteurs sont tous de longueur 1 (ou de *norme* 1) et deux de ses vecteurs sont toujours perpendiculaires (ou *orthogonaux*).

11.9 Vecteurs et points dans le plan

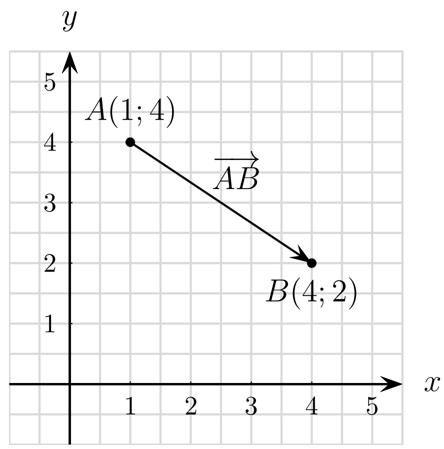
Dans le plan, pour indiquer un déplacement d'un point A à un point B, on utilise un vecteur appelé $\overrightarrow{AB}$. Ce vecteur a deux *composantes*, la première indique le déplacement horizontal (nombre positif pour un déplacement vers la droite et négatif vers la gauche) et la deuxième indique le déplacement vertical (nombre positif pour un déplacement vers le haut et négatif vers le bas).

Dans l'exemple ci-contre, les points sont $A(1;4)$ et $B(4;2)$. La première composante du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est ainsi 3 et la deuxième -2.

Notation

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

A nouveau, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut être placé n'importe où ! Dans ce contexte, cela n'a aucune importance.



Relation entre un vecteur et un point

L'*origine du plan* est un point appelé $O(0;0)$. Si P est un point quelconque du plan, alors on a l'équivalence.

$$\boxed{P = P(x;y) \iff \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

Règle de Chasles

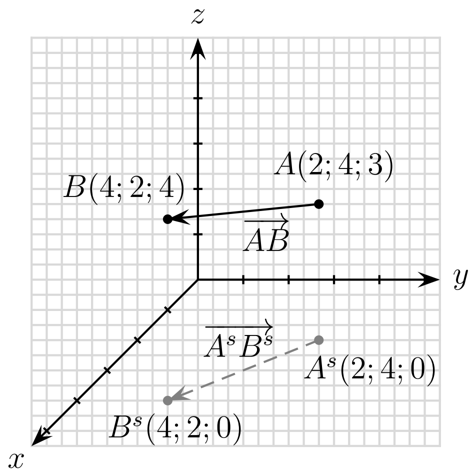
Considérons A, B et C trois points dans le plan. On a les formules évidentes suivantes.

1. Si l'on se déplace de A à B, puis de B à C, alors cela revient au même que d'aller directement de A à C. Par conséquent
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$
2. Les déplacements de A à B et de B à A ont la même direction et la même longueur, mais ils sont de sens opposés.
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$
3. Ces deux formules montrent que
$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}} \quad \textit{Règle de Chasles}$$
En effet, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

11.10 Vecteurs et points dans l'espace

Dans l'espace, pour indiquer un déplacement d'un point A à un point B, on utilise un vecteur appelé $\overrightarrow{AB}$. Ce vecteur a trois *composantes*, la première indique le déplacement avant-arrière (nombre positif pour un déplacement contre le lecteur et négatif pour s'éloigner du lecteur), la deuxième indique le déplacement latéral (nombre positif pour un déplacement vers la droite et négatif vers la gauche) et la troisième indique le déplacement vertical (nombre positif pour un déplacement vers le haut et négatif vers le bas).

Dans l'exemple ci-contre, les points sont $A(2;4;3)$ et $B(4;2;4)$. La première composante du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est ainsi 2, la deuxième -2 et la troisième 1.



Notation

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{A^sB^s} = \overrightarrow{AB}^s = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A nouveau, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut être placé n'importe où ! Dans ce contexte, cela n'a aucune importance.

Relation entre un vecteur et un point

L'*origine de l'espace* est un point appelé $O(0;0;0)$. Si P est un point quelconque de l'espace, alors on a l'équivalence.

$$\boxed{P = P(x;y;z) \iff \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

Règle de Chasles

Considérons A, B et C trois points dans l'espace. On a les formules évidentes suivantes.

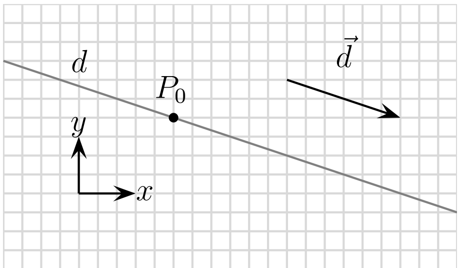
1. Si l'on se déplace de A à B, puis de B à C, alors cela revient au même que d'aller directement de A à C. Par conséquent
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$
2. Les déplacements de A à B et de B à A ont la même direction et la même longueur, mais ils sont de sens opposés.
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$
3. Ces deux formules montrent que
$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}} \quad \textit{Règle de Chasles}$$
En effet, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

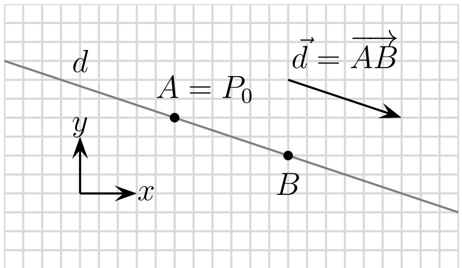
11.11 Représentations paramétriques dans le plan

Les représentations paramétriques utilisent un paramètre, souvent appelé λ (ou t en physique), afin de décrire des objets tels que les droites et les segments.

Droite dans le plan (1 point et 1 vecteur directeur)

Une *droite* d est un objet géométrique à une dimension (car décrit par un paramètre). On construit une droite à l'aide d'un *point de départ*, noté P_0, et d'une direction, représentée par un *vecteur directeur* $\vec{d}$.





$$\boxed{\text{Point de départ } P_0(x_0; y_0) \qquad \text{Vecteur directeur } \vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}}$$

L'idée pour décrire la droite d est de donner la position de chaque point situé sur la droite. On utilise pour cela un *point courant* appelé $P_\lambda(x; y)$ dépendant d'un *paramètre* $\lambda \in \mathbb{R}$. Le vecteur $\overrightarrow{OP_\lambda}$ donne la position du point courant $P_\lambda(x; y)$.

Ainsi la *représentation paramétrique de la droite* d est

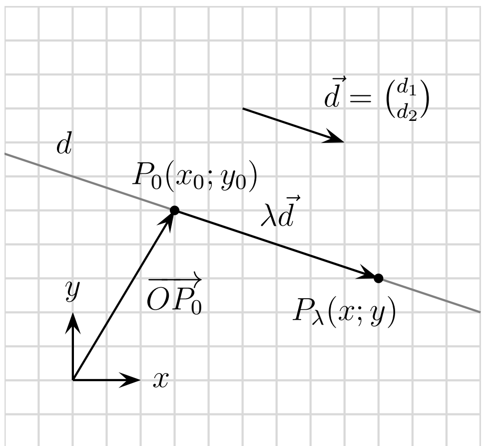
$$\boxed{d : \overrightarrow{OP_\lambda} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\vec{d} \ \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$

En écrivant les vecteurs, on obtient

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Sous la forme d'un système d'équations, on a

$$\boxed{d : \begin{cases} x = x_0 + d_1\lambda \\ y = y_0 + d_2\lambda \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$



Le point courant P_λ du dessin à droite est réalisé pour $\lambda = 2$. En faisant varier λ dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, on parcourt ainsi tous les points de la droite.

Slogans

À chaque point de la droite correspond un unique λ (le même pour les deux équations).
À chaque valeur de λ correspond un unique point de la droite.

Remarque

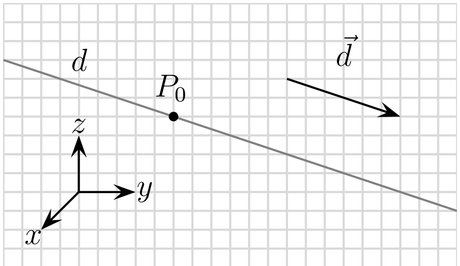
Une droite est infinie (car $\lambda \in \,]-\infty, +\infty[$).

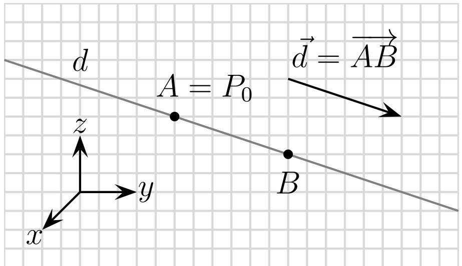
11.12 Représentations paramétriques dans l'espace

Les représentations paramétriques utilisent un ou deux paramètres, souvent appelé λ ou μ (ou t en physique), afin de décrire des objets tels que les droites, les segments et les plans.

Droite dans l'espace (1 point et 1 vecteur directeur)

Une *droite* d est un objet géométrique à une dimension (car décrit par un paramètre). On construit une droite à l'aide d'un *point de départ*, noté P_0, et d'une direction, représentée par un *vecteur directeur* $\vec{d}$.





$$\boxed{\text{Point de départ } P_0(x_0; y_0; z_0) \qquad \text{Vecteur directeur } \vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}}$$

L'idée pour décrire la droite d est de donner la position de chaque point situé sur la droite. On utilise pour cela un *point courant* appelé $P_\lambda(x; y; z)$ dépendant d'un *paramètre* $\lambda \in \mathbb{R}$. Le vecteur $\overrightarrow{OP_\lambda}$ donne la position du point courant $P_\lambda(x; y; z)$.

Ainsi la *représentation paramétrique de la droite* d est

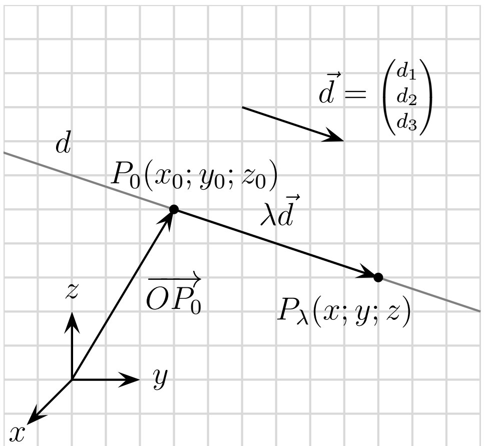
$$\boxed{d : \overrightarrow{OP_\lambda} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\vec{d} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$

En écrivant les vecteurs, on obtient

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Sous la forme d'un système d'équations, on a

$$\boxed{d : \begin{cases} x = x_0 + d_1\lambda \\ y = y_0 + d_2\lambda \\ z = z_0 + d_3\lambda \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$



Le point courant P_λ du dessin à droite est réalisé pour $\lambda = 2$. En faisant varier λ dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, on parcourt ainsi tous les points de la droite.

Slogans

À chaque point de la droite correspond un unique λ (le même pour les trois équations).
À chaque valeur de λ correspond un unique point de la droite.

Remarque

Une droite est infinie (car $\lambda \in \,]-\infty, +\infty[$).

Segments dans le plan (2 points)

Un avantage des représentations paramétriques est que l'on peut décrire des segments. Un *segment* est un bout de droite joignant deux points et ne les dépassant pas.

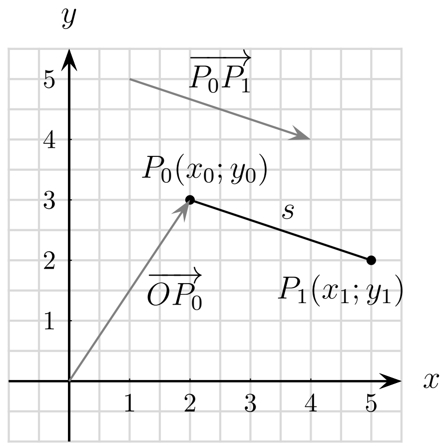
La *représentation paramétrique du segment s qui joint $P_0(x_0; y_0)$ et $P_1(x_1; y_1)$* est

$$\boxed{s : \overrightarrow{OP_\lambda} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\overrightarrow{P_0P_1} \quad \text{avec } \lambda \in [0, 1]}$$

Ou encore, si $\overrightarrow{P_0P_1} = \binom{v_1}{v_2}$

$$\boxed{s : \begin{cases} x = x_0 + v_1\lambda \\ y = y_0 + v_2\lambda \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \in [0, 1]}$$

Seul le domaine dans lequel le paramètre varie est modifié. Ici λ varie dans l'intervalle $[0, 1]$ au lieu de varier dans l'ensemble des nombres réels.



Deux remarques importantes

1. Il est important d'utiliser le vecteur $\overrightarrow{P_0P_1}$ pour la représentation paramétrique, car si on prenait un vecteur parallèle, alors il faudrait changer l'intervalle dans lequel le paramètre varie.
2. On ne peut pas décrire un segment à l'aide d'une simple équation cartésienne (voir page 146). En effet, comme le paramètre λ est restreint à un domaine, il ne peut pas être éliminé, car on perdrait de l'information.

Milieu d'un segment

En regardant l'équation paramétrique ci-dessus, on s'aperçoit que le milieu $M(x; y)$ du segment qui joint $P_0(x_0; y_0)$ à $P_1(x_1; y_1)$ est donné par $\lambda = \frac{1}{2}$. Ainsi, en utilisant la règle de Chasles, on trouve

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP_0} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{OP_0} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OP_0} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OP_1} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OP_1}\right)$$

Donc, le point milieu entre $P_0(x_0; y_0)$ et $P_1(x_1; y_1)$ est

$$\boxed{M\left(\frac{x_0 + x_1}{2}; \frac{y_0 + y_1}{2}\right)}$$

Centre de gravité d'un triangle

On considère un triangle ABC de sommets $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$.
Le centre de gravité G (voir page 150) est

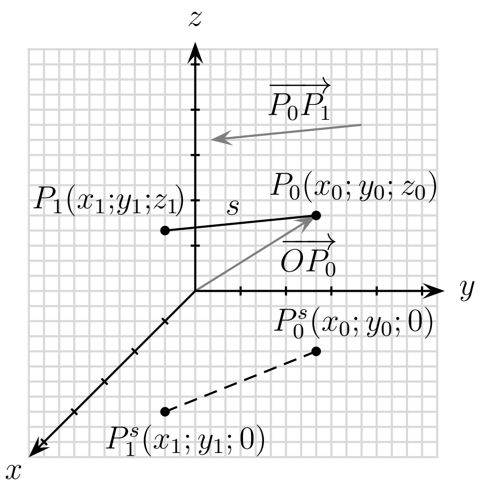
$$\boxed{G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)}$$

Segments dans l'espace (2 points)

Un avantage des représentations paramétriques est que l'on peut décrire des segments. Un *segment* est un bout de droite joignant deux points et ne les dépassant pas.

La *représentation paramétrique du segment s qui joint $P_0(x_0;y_0;z_0)$ et $P_1(x_1;y_1;z_1)$* est

$$\boxed{s : \overrightarrow{OP_\lambda} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\overrightarrow{P_0P_1} \quad \text{avec } \lambda \in [0,1]}$$



Ou encore, si $\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{s : \begin{cases} x = x_0 + v_1\lambda \\ y = y_0 + v_2\lambda \\ z = z_0 + v_3\lambda \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \in [0,1]}$$

Seul le domaine dans lequel le paramètre varie est modifié. Ici λ varie dans l'intervalle $[0,1]$ au lieu de varier dans l'ensemble des nombres réels.

Deux remarques importantes

1. Il est important d'utiliser le vecteur $\overrightarrow{P_0P_1}$ pour la représentation paramétrique, car si on prenait un vecteur parallèle, alors il faudrait changer l'intervalle dans lequel le paramètre varie.
2. Puisqu'en géométrie dans l'espace, une droite n'admet pas d'équation cartésienne (voir page 147), un segment n'en admet pas non plus.

Milieu d'un segment

En regardant l'équation paramétrique ci-dessus, on s'aperçoit que le milieu $M(x;y;z)$ du segment qui joint $P_0(x_0;y_0;z_0)$ à $P_1(x_1;y_1;z_1)$ est donné par $\lambda = \frac{1}{2}$. Ainsi, en utilisant la règle de Chasles, on trouve

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP_0} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{OP_0} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OP_0} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OP_1} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OP_1}\right)$$

Donc, le point milieu entre $P_0(x_0;y_0;z_0)$ et $P_1(x_1;y_1;z_1)$ est

$$\boxed{M\left(\frac{x_0+x_1}{2}; \frac{y_0+y_1}{2}; \frac{z_0+z_1}{2}\right)}$$

Centre de gravité d'un triangle

On considère un triangle ABC de sommets $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$ et $C(x_C;y_C;z_C)$. Le centre de gravité G (voir page 151) est

$$\boxed{G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}; \frac{y_A+y_B+y_C}{3}; \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)}$$

Plan dans l'espace (1 point et 2 vecteurs directeurs)

Un *plan* π est un objet géométrique à deux dimensions (car décrit par deux paramètres). On construit un plan à l'aide d'un *point de départ*, noté $P_{0,0}$, et de deux directions, représentées par deux *vecteurs directeurs non parallèles* $\vec{v}$ et $\vec{w}$. On peut ainsi effectuer une *représentation paramétrique du plan* π.

$$\boxed{\text{Point de départ } P_{0,0}(x_0;y_0;z_0) \qquad \text{Vecteurs directeurs } \vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} \text{ et } \vec{w}=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}}$$

L'idée pour décrire le plan π est de donner la position de chaque point situé sur la plan. On utilise pour cela un point courant appelé $P_{\lambda,\mu}(x;y;z)$ dépendant de deux *paramètres* $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Le vecteur $\overrightarrow{OP_{\lambda,\mu}}$ donne la position du point courant $P_{\lambda,\mu}(x;y;z)$. Ainsi la *représentation paramétrique du plan* π est

$$\boxed{\pi : \overrightarrow{OP}_{\lambda,\mu} = \overrightarrow{OP}_{0,0} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \quad \text{avec } \lambda,\mu \in \mathbb{R}}$$

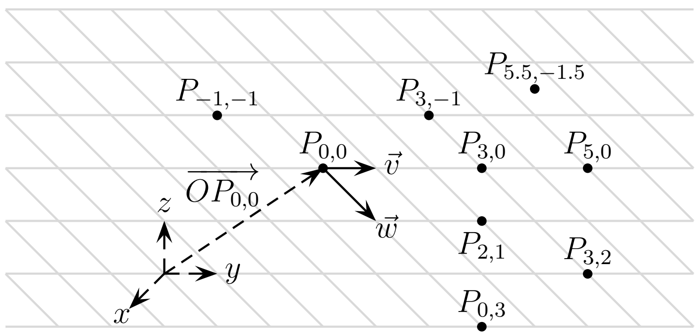
En écrivant les vecteurs sous forme de colonne, on a

$$\pi : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

On peut aussi voir l'équation paramétrique sous forme d'un système d'équations

$$\boxed{\pi : \begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z = z_0 + \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases} \quad \text{avec } \lambda,\mu \in \mathbb{R}}$$

Voici ce que cela donne géométriquement.



Par exemple, le point courant $P_{2,1}$ est réalisé pour $\lambda = 2$ et $\mu = 1$. En faisant varier λ et μ dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, on parcourt ainsi tous les points du plan.

Remarque importante

La représentation paramétrique d'un plan n'est pas la plus pratique.
Nous utiliserons de manière **prioritaire** les équations cartésiennes décrites en page 147.

Slogans

À chaque point du plan correspond un unique λ et μ (les mêmes pour les trois équations).
À chaque valeur de λ et μ correspond un unique point du plan.

Remarque

Un plan est infini (car λ, $\mu \in]-\infty,+\infty[$).

11.13 Équations cartésiennes dans le plan

Droite dans le plan (1 point et 1 vecteur normal)

Pour une droite, puisqu'on a un paramètre et deux équations paramétriques, on peut se débarrasser du paramètre en combinant les deux équations. En reprenant les notations de la page 140 et en supposant que $d_2 \neq 0$ (ce qu'on peut faire sans nuire à la généralité, car si $d_2 = 0$, alors $d_1 \neq 0$ et on obtient la même conclusion par un calcul similaire).

$$d : \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + d_1\lambda \\ y = y_0 + d_2\lambda \end{array} \right. , \ \lambda \in \mathbb{R} \quad \overset{d_2 \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{c} d_2 x = d_2 x_0 + d_1 d_2 \lambda \\ y = y_0 + d_2\lambda \end{array} \right. , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\overset{①-d_1\cdot②}{\Longleftrightarrow} \quad d_2 x - d_1 y = d_2 x_0 - d_1 y_0$$

Ainsi la droite d est donnée par l'ensemble des points $P(x;y)$ qui satisfont l'équation suivante, appelée *équation cartésienne*

$$\boxed{d : ax + by = c} \qquad \text{où } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_2 \\ -d_1 \end{pmatrix}$$

et où le nombre c se trouve en remplaçant $(x;y)$ par un point de la droite.

Le vecteur croisé

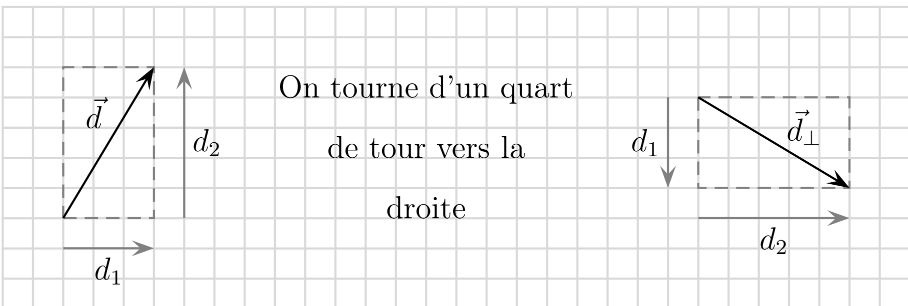
On définit le *vecteur croisé du vecteur* $\vec{d}$, noté $\vec{d}_\perp$, par

$$\boxed{\vec{d}_\perp = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}_\perp = \begin{pmatrix} +d_2 \\ -d_1 \end{pmatrix}}$$

On croise les composantes et on change le signe de la deuxième composante

Théorème Le vecteur croisé $\vec{d}_\perp$ est un vecteur perpendiculaire à $\vec{d}$.

Preuve



Si on avait tourné vers la gauche, on aurait dû changer le signe de la première composante.

Vecteur normal d'une droite

- Un vecteur $\vec{n}$ est dit *normal à la droite* d si $\vec{n}$ est perpendiculaire à cette droite.
- Si $\vec{d}$ est un vecteur directeur de la droite d, alors $\vec{n} = \vec{d}_\perp$ est un vecteur normal de la droite d.

Remarque concernant les dimensions Une équation cartésienne donne une condition qui réduit d'un degré de liberté la dimension du plan, qui vaut 2. Comme $2 - 1 = 1$, une équation cartésienne dans le plan décrit une droite (objet de dimension 1).

11.14 Équations cartésiennes dans l'espace

Il n'y a pas d'équation cartésienne d'une droite dans l'espace

En géométrie plane, on a réussi à se débarrasser du paramètre parce qu'on avait deux équations paramétriques (une pour x, et une pour y). En géométrie spatiale, comme on a aussi une équation paramétrique pour z, on ne peut pas totalement s'en débarrasser.

Plan dans l'espace (1 point et 1 vecteur normal)

Pour un plan, puisqu'on a deux paramètres et trois équations paramétriques, on peut se débarrasser des paramètres en combinant les trois équations (voir page 153). En reprenant les notations précédentes (voir page 145), voici ce qu'on obtient.

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + v_1\lambda + w_1\mu \\ y = y_0 + v_2\lambda + w_2\mu \\ z = z_0 + v_3\lambda + w_3\mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\iff \quad (v_2w_3 - v_3w_2)x - (v_1w_3 - v_3w_1)y + (v_1w_2 - v_2w_1)z \\ = (v_2w_3 - v_3w_2)x_0 - (v_1w_3 - v_3w_1)y_0 + (v_1w_2 - v_2w_1)z_0$$

Ainsi le plan π est donné par l'ensemble des points $P(x; y; z)$ qui satisfont l'équation suivante, appelée *équation cartésienne*

$$\boxed{\pi : ax + by + cz = d} \qquad \text{où} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +(v_2w_3 - v_3w_2) \\ -(v_1w_3 - v_3w_1) \\ +(v_1w_2 - v_2w_1) \end{pmatrix}$$

et où le nombre d se trouve en remplaçant $(x; y; z)$ par un point du plan.

Le produit vectoriel

On définit le *produit vectoriel des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$*, noté $\vec{v} \wedge \vec{w}$, par

$$\boxed{\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +(v_2w_3 - v_3w_2) \\ -(v_1w_3 - v_3w_1) \\ +(v_1w_2 - v_2w_1) \end{pmatrix}}$$

Théorème Le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{w}$ est un vecteur perpendiculaire à $\vec{v}$ et à $\vec{w}$.

Preuve

Contrairement à la géométrie plane, la preuve la plus simple requiert le produit scalaire et se trouve en page 159.

Vecteur normal d'un plan

- Un vecteur $\vec{n}$ est dit *normal au plan* π si $\vec{n}$ est perpendiculaire à ce plan.
- Si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont les deux vecteurs directeurs non parallèles du plan π, alors $\vec{n} = \vec{v} \wedge \vec{w}$ est un vecteur normal du plan π.

Remarque concernant les dimensions Une équation cartésienne donne une condition qui réduit d'un degré de liberté la dimension de l'espace, qui vaut 3. Comme $3-1 = 2$, une équation cartésienne dans l'espace décrit un plan (objet de dimension 2).

11.15 Notion de pente pour les droites dans le plan

Les droites du plan qui ne sont pas verticales ont une pente.

On considère une droite non verticale d passant par le point $P_0(x_0;y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \binom{d_1}{d_2}$. Comme la droite est non verticale, on sait que $d_1 \neq 0$.

On peut éliminer le paramètre de l'équation paramétrique de la façon suivante.

$$\left\{\begin{array}{lcrcl} x & = & x_0 & + & d_1\lambda \\ y & = & y_0 & + & d_2\lambda \end{array}\right., \lambda \in \mathbb{R} \overset{d_1\neq 0}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{lcrcl} \lambda & = & \multicolumn{3}{l}{\frac{1}{d_1}(x-x_0)} \\ y & = & y_0 & + & d_2\lambda \end{array}\right., \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\overset{① \text{ dans } ②}{\Longleftrightarrow} \boxed{y = y_0 + \frac{d_2}{d_1}(x-x_0)}\ (\bigstar)$$

Le quotient $\frac{d_2}{d_1}$ est indépendant du choix du vecteur directeur de la droite

En effet, soit $\vec{d} = \binom{d_1}{d_2}$ et $\vec{d'} = \binom{d'_1}{d'_2}$ deux vecteurs directeurs de la droite non verticale d. On démontrera en exercice que :

$$\vec{d} \parallel \vec{d'} \iff \frac{d_2}{d_1} = \frac{d'_2}{d'_1}$$

Définition

La *pente de la droite non verticale* d est égale au quotient $\frac{d_2}{d_1}$. La pente d'une droite est généralement, notée m.

Deux interprétations géométriques de la pente

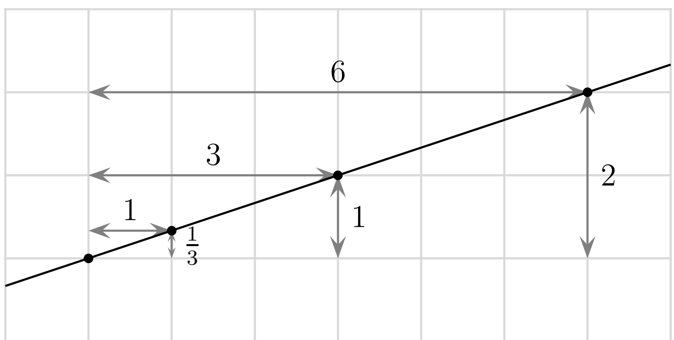
1. Par définition, la pente est donnée par la fraction $\dfrac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$.
2. La pente est le déplacement vertical lorsqu'on se déplace horizontalement de 1 vers la droite (cas où $d_1 = 1$).

Illustration

Ici, on voit trois manières de visualiser la pente.

$$\frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

Dans les trois cas, la pente vaut $m = \frac{1}{3}$.



Une équation d'une droite de pente m passant par $P_0(x_0;y_0)$

L'équation $(\bigstar)$ permet ainsi de décrire une droite de pente m passant par $P_0(x_0;y_0)$.

$$\boxed{y = y_0 + m(x-x_0)}$$

En deuxième année, dans le cours d'analyse, on utilisera la notion de pente et cette équation pour décrire la droite tangente[7] au point $(x_0;f(x_0))$ à une fonction f.

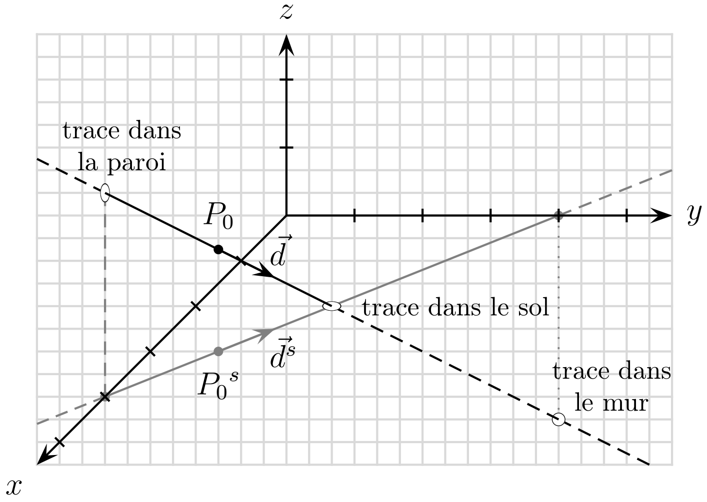
7. L'équation de la tangente à f en x_0 est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ où $f'(x_0)$ est la dérivée de f en x_0.

11.16 Traces de droite et de plan dans l'espace

Traces d'une droite et représentation graphique

Dans l'espace, les *traces* d'une droite sont définies comme étant les intersections entre la droite et le sol, la paroi ou le mur. Il y a donc la *trace dans le sol*, la *trace dans la paroi* et la *trace dans le mur*. On dessine une droite en trait continu lorsqu'elle est visible et en traitillés lorsqu'elle est cachée par le sol, la paroi ou le mur.

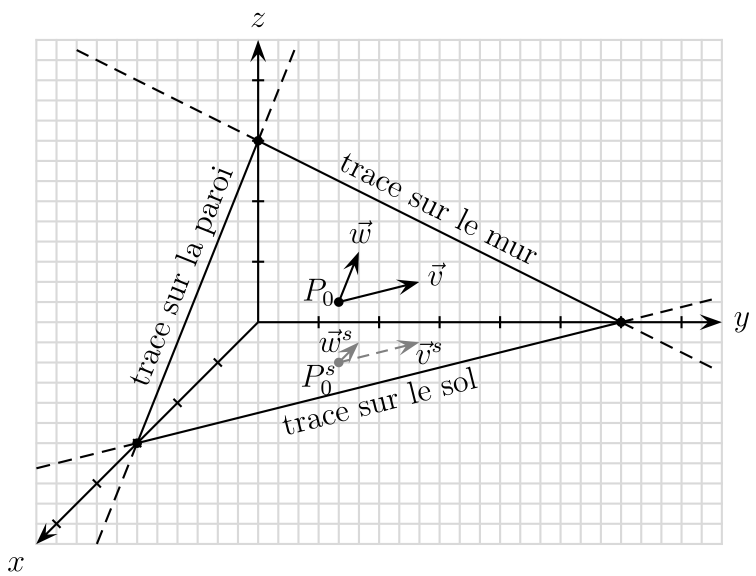
Par exemple, la droite passant par le point $P_0(3;1;\frac{3}{2})$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2\\2\\-3\end{pmatrix}$ se dessine ainsi :



Traces d'un plan et représentation graphique

Dans l'espace, les *traces* d'un plan sont définies comme étant les intersections entre le plan et le sol, la paroi ou le mur. Il y a donc la *trace sur le sol*, la *trace sur la paroi* et la *trace sur le mur*. On dessine ces traces en trait continu lorsqu'elles sont visibles et en traitillés lorsqu'elles sont cachées par le sol, la paroi ou le mur.

Par exemple, le plan passant par le point $P_0(1;2;1)$ et ayant $\vec{v} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ comme vecteurs directeurs se dessine ainsi :

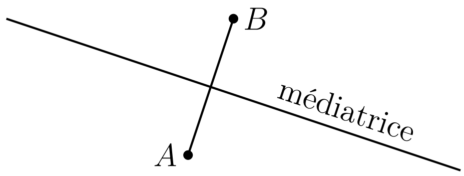


11.17 Droites remarquables dans le plan

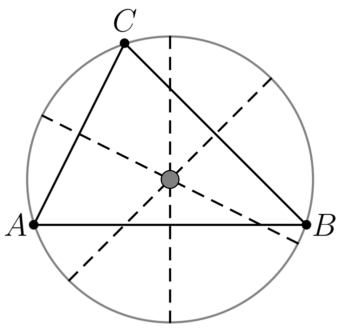
Voici quelques types de droites que l'on retrouve aussi en géométrie spatiale.

Médiatrice d'un segment

La *médiatrice* du segment $[AB]$ est l'axe de symétrie qui échange le point A et le point B.

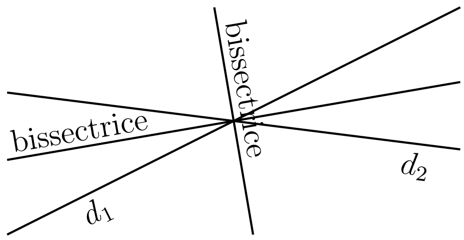


Dans un triangle, le point d'intersection des trois médiatrices est le centre du *cercle circonscrit*.

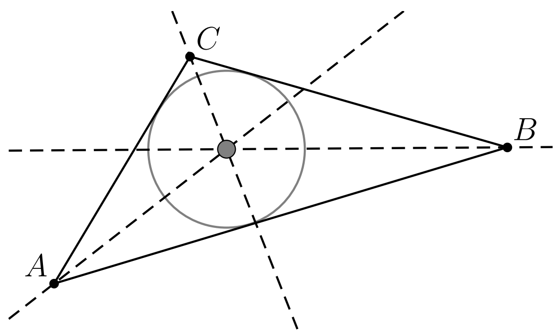


Bissectrices de 2 droites

Les *bissectrices* des droites d_1 et d_2 sont les axes de symétrie qui échangent la droite d_1 et la droite d_2.



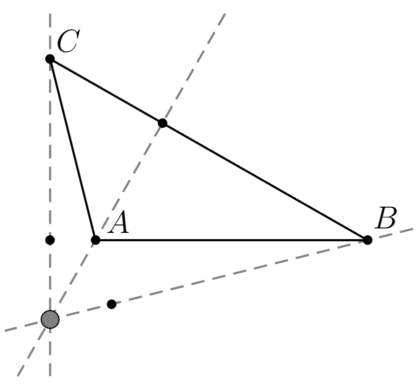
Dans un triangle, le point d'intersection des trois bissectrices intérieures est le centre du *cercle inscrit*.



Droites issues d'un sommet dans un triangle

Hauteur

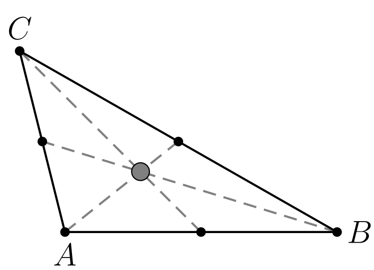
Une *hauteur* est une droite qui passe par un sommet du triangle, perpendiculairement au côté opposé.



Le point d'intersection des trois hauteurs est appelé l'*orthocentre* du triangle.

Médiane

Une *médiane* est une droite qui passe par un sommet du triangle et le milieu du côté opposé.



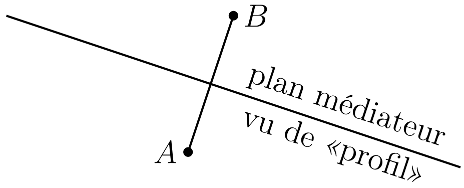
Le point d'intersection des 3 médianes est appelé le *centre de gravité* du triangle.

11.18 Droites et plans remarquables dans l'espace

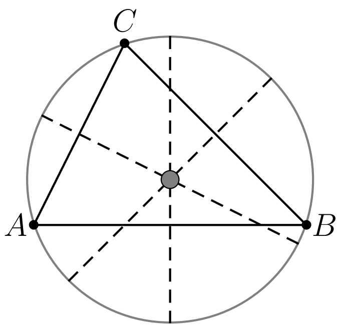
Bien évidemment, il y a toujours les droites remarquables décrites en page 150.

Plan médiateur d'un segment

Le *plan médiateur* du segment $[AB]$ est le plan de symétrie qui échange le point A et le point B.

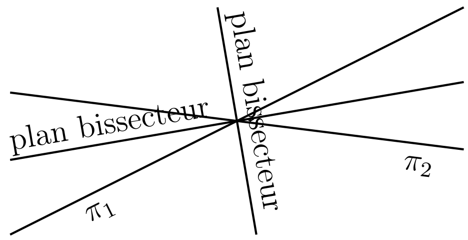


Dans un triangle, le point d'intersection des trois plans médiateurs et du plan ABC est le centre du *cercle circonscrit*.

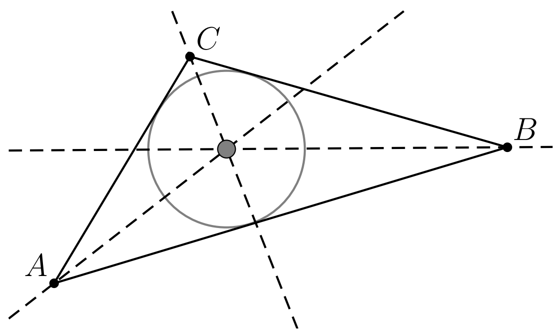


Plans bissecteurs de 2 plans

Les *plans bissecteurs* des plans π_1 et π_2 sont les plans de symétrie qui échangent le plan π_1 et le plan π_2.



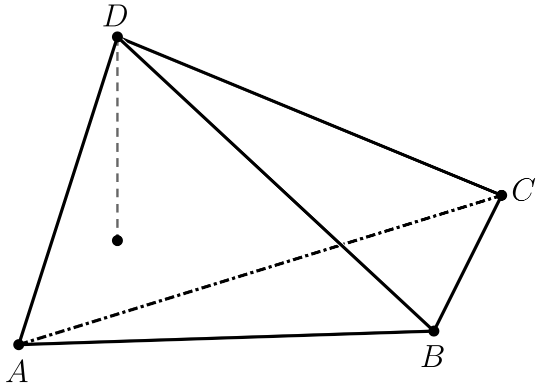
Dans un triangle, le point d'intersection des trois plans bissecteurs intérieurs et du plan ABC est le centre du *cercle inscrit*.



Droites issues d'un sommet dans un tétraèdre

Hauteur

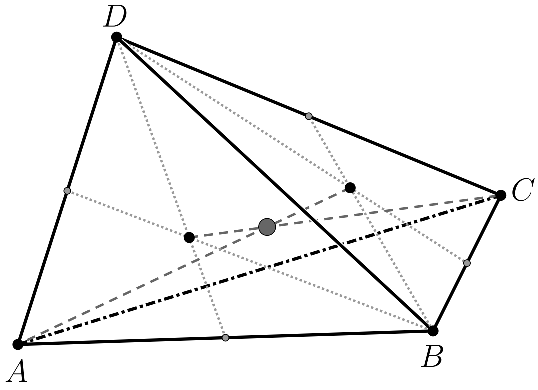
Une *hauteur* est une droite qui passe par un sommet du tétraèdre, perpendiculairement au triangle opposé.



Les quatre hauteurs ne se coupent pas forcément.

Médiane

Une *médiane* est une droite qui passe par un sommet du tétraèdre et le centre de gravité du triangle opposé.



Le point d'intersection des 4 médianes est appelé le *centre de gravité* du triangle.

Plans dans l'espace : de la représentation paramétrique à l'équation cartésienne

Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $v_1 \neq 0$. Ainsi, on commence par multiplier les deux dernières équations par v_1.

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + v_1\lambda + w_1\mu \\ y = y_0 + v_2\lambda + w_2\mu \\ z = z_0 + v_3\lambda + w_3\mu \end{cases}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \overset{v_1 \neq 0}{\Longleftrightarrow} \ \begin{cases} x = x_0 + v_1\lambda + w_1\mu \\ v_1 y = v_1 y_0 + v_1 v_2\lambda + v_1 w_2\mu \\ v_1 z = v_1 z_0 + v_1 v_3\lambda + v_1 w_3\mu \end{cases}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

On peut ainsi se débarrasser du paramètre λ

$$\underset{③ - v_3 \cdot ①}{\overset{② - v_2 \cdot ①}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} v_1 y - v_2 x = v_1 y_0 - v_2 x_0 + v_1 w_2 \mu - v_2 w_1 \mu \\ v_1 z - v_3 x = v_1 z_0 - v_3 x_0 + v_1 w_3 \mu - v_3 w_1 \mu \end{cases}, \ \mu \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \begin{cases} (v_1 y - v_2 x) = (v_1 y_0 - v_2 x_0) + (v_1 w_2 - v_2 w_1)\mu \\ (v_1 z - v_3 x) = (v_1 z_0 - v_3 x_0) + (v_1 w_3 - v_3 w_1)\mu \end{cases}, \ \mu \in \mathbb{R}$$

$$\overset{\star}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} (v_1 y - v_2 x) = (v_1 y_0 - v_2 x_0) + (v_1 w_2 - v_2 w_1)\mu \\ (v_1 w_2 - v_2 w_1)(v_1 z - v_3 x) = (v_1 w_2 - v_2 w_1)(v_1 z_0 - v_3 x_0) + (v_1 w_2 - v_2 w_1)(v_1 w_3 - v_3 w_1)\mu \end{cases}, \ \mu \in \mathbb{R}$$

On peut ainsi se débarrasser du paramètre μ

$$\Longleftrightarrow \quad (v_1 w_2 - v_2 w_1)(v_1 z - v_3 x) - (v_1 w_3 - v_3 w_1)(v_1 y - v_2 x) = \overbrace{(v_1 w_2 - v_2 w_1)(v_1 z_0 - v_3 x_0) - (v_1 w_3 - v_3 w_1)(v_1 y_0 - v_2 x_0)}^{\text{pareil qu'à gauche en remplaçant } x \text{ par } x_0,\ y \text{ par } y_0 \text{ et } z \text{ par } z_0}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (v_1 w_2 - v_2 w_1)v_1 z - (v_1 w_3 - v_3 w_1)v_1 y - v_1 v_3 w_2 x + v_2 v_3 w_1 x + v_1 v_2 w_3 x - v_2 v_3 w_1 x = \text{pareil, mais avec } x_0,\ y_0 \text{ et } z_0$$

Miraculeusement, deux termes se simplifient

$$\Longleftrightarrow \quad (v_1 w_2 - v_2 w_1)v_1 z - (v_1 w_3 - v_3 w_1)v_1 y - v_1 v_3 w_2 x + v_1 v_2 w_3 x = \text{pareil, mais avec } x_0,\ y_0 \text{ et } z_0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (v_1 w_2 - v_2 w_1)v_1 z - (v_1 w_3 - v_3 w_1)v_1 y + (v_2 w_3 - v_3 w_2)v_1 x = \text{pareil, mais avec } x_0,\ y_0 \text{ et } z_0$$

$$\overset{:v_1}{\Longleftrightarrow} \quad (v_1 w_2 - v_2 w_1)z - (v_1 w_3 - v_3 w_1)y + (v_2 w_3 - v_3 w_2)x = \text{pareil, mais avec } x_0,\ y_0 \text{ et } z_0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (v_2 w_3 - v_3 w_2)x - (v_1 w_3 - v_3 w_1)y + (v_1 w_2 - v_2 w_1)z = \text{pareil, mais avec } x_0,\ y_0 \text{ et } z_0$$

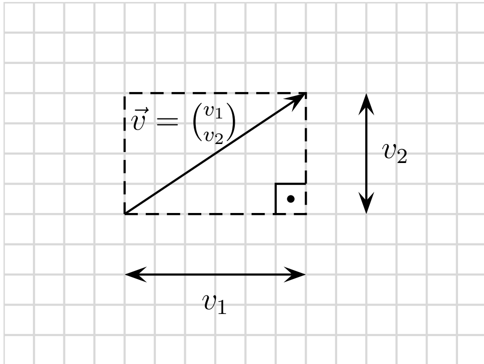
$\bigstar$ Si $\binom{v_1}{v_2} \parallel \binom{w_1}{w_2}$ et $\binom{v_1}{v_3} \parallel \binom{w_1}{w_3}$, alors $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$. Donc par contraposée, on peut sans nuire à la généralité supposer que $\binom{v_1}{v_2} \nparallel \binom{w_1}{w_2}$, c'est-à-dire que $\det\left(\binom{v_1}{v_2}, \binom{w_1}{w_2}\right) = v_1 w_2 - v_2 w_1 \neq 0$. On peut ainsi multiplier la deuxième équation par $(v_1 w_2 - v_2 w_1)$.

11.19 Norme et produit scalaire dans le plan

La norme d'un vecteur

Définition

La longueur d'un vecteur $\vec{v}$ est appelée la *norme de* $\vec{v}$ et est notée $\|\vec{v}\|$.



Formule $\boxed{\|\vec{v}\| = \left\|\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$

En effet, il s'agit d'une application directe du théorème Pythagore.

Le produit scalaire

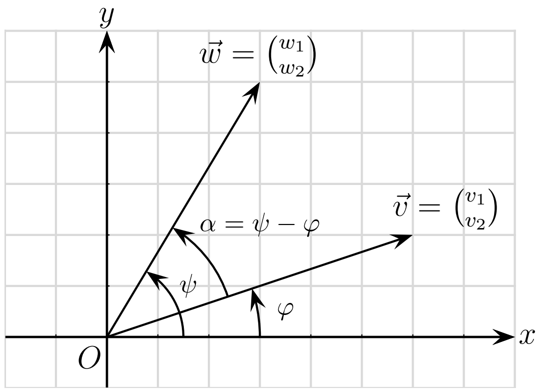
On peut aussi exprimer les composantes d'un vecteur grâce à la trigonométrie.

On a

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \|\vec{v}\|\cos(\varphi) \\ \|\vec{v}\|\sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} \|\vec{w}\|\cos(\psi) \\ \|\vec{w}\|\sin(\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$



Grâce à la trigonométrie, on peut exprimer le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs ainsi

$$\cos(\psi - \varphi) = \cos(\varphi)\cos(\psi) + \sin(\varphi)\sin(\psi)$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cos(\psi - \varphi) &= \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \big(\cos(\varphi)\cos(\psi) + \sin(\varphi)\sin(\psi)\big) \\ &= \|\vec{v}\|\cos(\varphi) \cdot \|\vec{w}\|\cos(\psi) + \|\vec{v}\|\sin(\varphi) \cdot \|\vec{w}\|\sin(\psi) \\ &= v_1 w_1 + v_2 w_2 \end{aligned}$$

Définitions

Le *produit scalaire* des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est défini comme suit

$$\boxed{\vec{v} \bullet \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2}$$

L'*angle* α entre les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ se calcule grâce à la relation

$$\boxed{\vec{v} \bullet \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\alpha)}$$

Propriétés du produit scalaire

Pour tout vecteurs du plan $\vec{v}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{w}$ et pour tout nombre α, $\beta \in \mathbb{R}$, on a

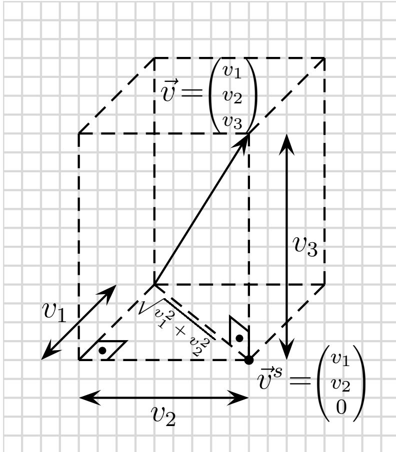
1. $\vec{v} \bullet \vec{w} = 0 \iff \vec{v} \perp \vec{w}$ le produit scalaire est un DÉTECTEUR D'ORTHOGONALITÉ
2. $\vec{v} \bullet \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$ on peut définir la norme à l'aide du produit scalaire
3. $\vec{v} \bullet \vec{w} = \vec{w} \bullet \vec{v}$
4. $(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) \bullet \vec{w} = \alpha(\vec{v}_1 \bullet \vec{w}) + \beta(\vec{v}_2 \bullet \vec{w})$
5. $\vec{v} \bullet \vec{w} > 0 \iff$ l'angle $\angle(\vec{v}, \vec{w})$ est aigu ; $\vec{v} \bullet \vec{w} < 0 \iff$ l'angle $\angle(\vec{v}, \vec{w})$ est obtus

11.20 Norme et produit scalaire dans l'espace

La norme d'un vecteur

Définition

La longueur d'un vecteur $\vec{v}$ est appelée la *norme de* $\vec{v}$ et est notée $\|\vec{v}\|$.



Formule $\boxed{\|\vec{v}\| = \left\|\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$

En effet, grâce au théorème de Pythagore, on montre que la longueur de $\vec{v}^s$ est $\sqrt{v_1^2+v_2^2}$. On conclut en utilisant le théorème de Pythagore une deuxième fois.

$$\sqrt{\left(\sqrt{v_1^2+v_2^2}\right)^2+v_3^2} = \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$$

Le produit scalaire

On veut conserver les propriétés du produit scalaire en géométrie plane (voir page 154). Les propriétés 1 et 2, impliquent que

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=1 \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=0 \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0 \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=1 \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0 \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=1$$

Par conséquent, en utilisant les propriétés 3 et 4, on trouve que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} &= \left(x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\bullet\left(x_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\\ &= x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\end{aligned}$$

Définitions

Le *produit scalaire* des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est défini comme suit

$$\boxed{\vec{v}\bullet\vec{w} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix} = v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3}$$

L'*angle* α entre les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ se calcule grâce à la relation

$$\boxed{\vec{v}\bullet\vec{w} = \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\cos(\alpha)}$$

cette formule est encore vraie en 3D
car les deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dans un plan

Propriétés du produit scalaire

Pour tout vecteurs de l'espace $\vec{v}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{w}$ et pour tout nombre α, $\beta \in \mathbb{R}$, on a

1. $\vec{v}\bullet\vec{w}=0 \iff \vec{v}\perp\vec{w}$ le produit scalaire est un DÉTECTEUR D'ORTHOGONALITÉ
2. $\vec{v}\bullet\vec{v}=\|\vec{v}\|^2$ on peut définir la norme à l'aide du produit scalaire
3. $\vec{v}\bullet\vec{w}=\vec{w}\bullet\vec{v}$
4. $(\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2)\bullet\vec{w}=\alpha(\vec{v}_1\bullet\vec{w})+\beta(\vec{v}_2\bullet\vec{w})$
5. $\vec{v}\bullet\vec{w}>0 \iff$ l'angle $\angle(\vec{v},\vec{w})$ est aigu ; $\vec{v}\bullet\vec{w}<0 \iff$ l'angle $\angle(\vec{v},\vec{w})$ est obtus

Calcul rapide d'un vecteur perpendiculaire à un vecteur donné

Grâce au produit scalaire, on peut rapidement donner un vecteur perpendiculaire à un vecteur donné.

En effet, par ce qui précède, trouver un vecteur perpendiculaire au vecteur

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

revient à trouver un vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{v} \bullet \vec{w} = 0$. Pour cela, on échange les composantes de $\vec{v}$ en changeant le signe de l'une d'entre-elles. On obtient deux vecteurs perpendiculaires possibles (parmi une infinité) qui sont

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad -\vec{w} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

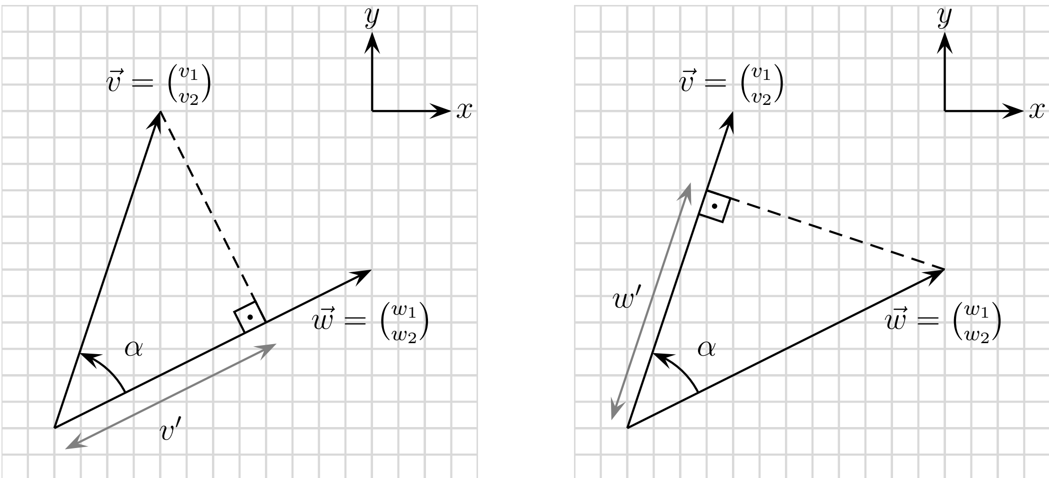
Le lecteur vérifiera à l'aide du produit scalaire que ces vecteurs sont perpendiculaires à $\vec{v}$. On retrouve le vecteur croisé décrit en page 146.

Remarque

Cette technique est très utile en géométrie plane, car elle permet de trouver l'unique direction perpendiculaire à un vecteur donné $\vec{v}$.

Produit scalaire et projection orthogonale

Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs. On projette $\vec{v}$ sur $\vec{w}$ de manière à obtenir un angle droit : on obtient le nombre v'. On peut aussi projeter $\vec{w}$ sur $\vec{v}$ pour obtenir le nombre w'.



On vient de voir que $\vec{v} \bullet \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\alpha)$.

De plus, grâce à la trigonométrie, on a $v' = \|\vec{v}\| \cos(\alpha)$ et $w' = \|\vec{w}\| \cos(\alpha)$. Par conséquent, on a les projections orthogonales[8] suivantes.

$$\boxed{v' = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{w}\|}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{w' = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|}}$$

8. On utilise ces formules pour définir le produit scalaire lorsque la base n'est pas orthonormée.

Calcul rapide d'un vecteur perpendiculaire à un vecteur donné

Grâce au produit scalaire, on peut rapidement donner un vecteur perpendiculaire à un vecteur donné.

En effet, par ce qui précède, trouver un vecteur perpendiculaire au vecteur

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

revient à trouver un vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{v} \bullet \vec{w} = 0$. Pour cela, on annule une composante et on échange les autres composantes de $\vec{v}$ en changeant le signe de l'une d'entre-elles. On obtient, a priori, 6 vecteurs perpendiculaires à $\vec{v}$ possibles (parmi une infinité) qui sont

$$\vec{w_1} = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \parallel \vec{w_2} = \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{w_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix} \parallel \vec{w_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix}; \quad \vec{w_5} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \parallel \vec{w_6} = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

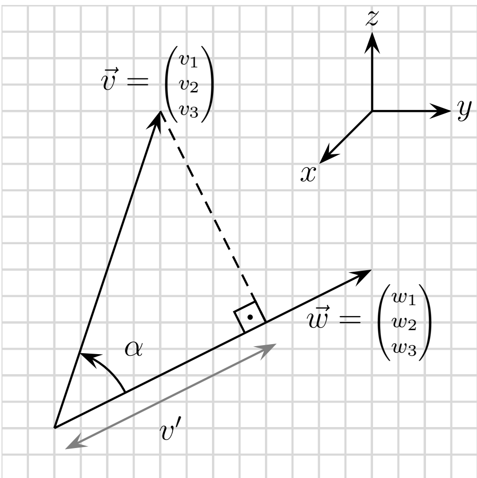
Le lecteur vérifiera à l'aide du produit scalaire que ces vecteurs sont perpendiculaires à $\vec{v}$.

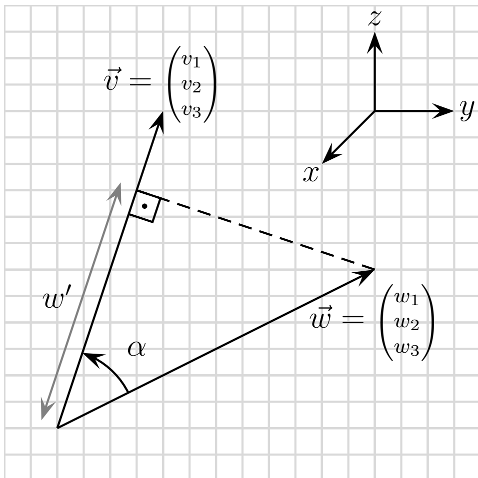
Remarque

Cette technique n'est pas très utile en géométrie spatiale, car elle permet de trouver 3 directions perpendiculaire à un vecteur donné $\vec{v}$. Malheureusement, il existe une infinité de telles directions.

Produit scalaire et projection orthogonale

Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs. On projette $\vec{v}$ sur $\vec{w}$ de manière à obtenir un angle droit : on obtient le nombre v'. On peut aussi projeter $\vec{w}$ sur $\vec{v}$ pour obtenir le nombre w'.





On vient de voir que $\vec{v} \bullet \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\alpha)$.

De plus, grâce à la trigonométrie, on a $v' = \|\vec{v}\| \cos(\alpha)$ et $w' = \|\vec{w}\| \cos(\alpha)$. Par conséquent, on a les projections orthogonales[9] suivantes.

$$\boxed{v' = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{w}\|}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{w' = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|}}$$

9. On utilise ces formules pour définir le produit scalaire lorsque la base n'est pas orthonormée.

11.21 Droite dans le plan et produit scalaire

Dans le plan, une droite d admet une unique direction perpendiculaire. Notons $\vec{n}$ un vecteur qui va dans cette direction. Un tel vecteur $\vec{n}$ est dit *normal à la droite* d.

Notons $P_0(x_0; y_0)$ un point de la droite d et $\vec{n} = \binom{a}{b}$ un vecteur normal à d. La droite d est définie par la condition.

$$d = \left\{ P(x;y) \in \mathbb{R}^2 : \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \right\}$$

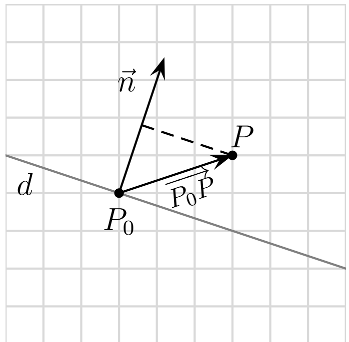
Cherchons des expressions équivalentes à la condition ci-dessus.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \iff \overrightarrow{P_0P} \bullet \vec{n} = 0 &\iff \binom{x-x_0}{y-y_0} \bullet \binom{a}{b} = 0 \\ &\iff a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0 \\ &\iff \boxed{d : ax + by = ax_0 + by_0} \end{aligned}$$

Surprise : c'est une équation cartésienne de la droite d.

Sur le schéma ci-contre, on voit une droite d et son vecteur normal $\vec{n}$.

On constate qu'un point P est sur la droite si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{P_0P}$ est perpendiculaire au vecteur normal (sur le schéma, ce n'est pas le cas).



Rappel

Notons $P_0(x_0; y_0)$ un point de la droite d et $\vec{d} = \binom{d_1}{d_2}$ un vecteur directeur de d.

On avait obtenu en page 146 l'équation cartésienne suivante.

$$\boxed{d : d_2x - d_1y = d_2x_0 - d_1y_0}$$

Résultat (démonstration en exercice)

Si deux équations cartésiennes décrivent la même droite, alors elles sont multiples l'une de l'autre (par un nombre non nul). Et réciproquement.

Conséquence

Comme la droite d admet les deux équations cartésiennes encadrées ci-dessus, alors on retrouve le vecteur croisé de la page 146.

$$\vec{n} \parallel \vec{d}_\perp \quad \text{où} \quad \vec{d}_\perp = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}_\perp = \begin{pmatrix} +d_2 \\ -d_1 \end{pmatrix}$$

11.22 Plan dans l'espace et produit scalaire

Dans l'espace, un plan π admet une unique direction perpendiculaire. Notons $\vec{n}$ un vecteur qui va dans cette direction. Un tel vecteur $\vec{n}$ est dit *normal au plan* π.

Notons $P_0(x_0; y_0; z_0)$ un point du plan π et $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à π. Le plan π est défini par la condition.

$$\pi = \left\{ P(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \right\}$$

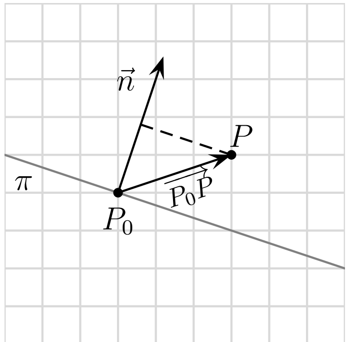
Cherchons des expressions équivalentes à la condition ci-dessus.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \quad &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P} \bullet \vec{n} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \boxed{\pi : ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0} \end{aligned}$$

Surprise : c'est une équation cartésienne du plan π.

Sur le schéma ci-contre, on voit un plan π (vu de «profil») et son vecteur normal $\vec{n}$.

On constate qu'un point P est sur le plan si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{P_0P}$ est perpendiculaire au vecteur normal (sur le schéma, ce n'est pas le cas).



Rappel

Notons $P_0(x_0; y_0; z_0)$ un point du plan π et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs directeurs de π (non parallèles).

On avait obtenu en page 147 l'équation cartésienne suivante.

$$\boxed{\begin{aligned} \pi : \ &(v_2w_3 - v_3w_2)x - (v_1w_3 - v_3w_1)y + (v_1w_2 - v_2w_1)z \\ &= (v_2w_3 - v_3w_2)x_0 - (v_1w_3 - v_3w_1)y_0 + (v_1w_2 - v_2w_1)z_0 \end{aligned}}$$

Résultat (démonstration en exercice)

Si deux équations cartésiennes décrivent le même plan, alors elles sont multiples l'une de l'autre (par un nombre non nul). Et réciproquement.

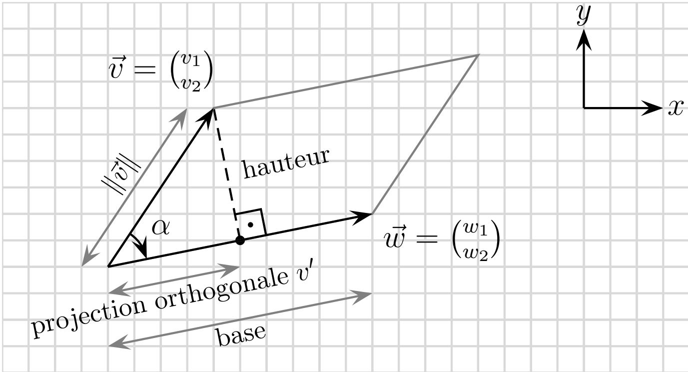
Conséquence

Comme le plan π admet les deux équations cartésiennes encadrées ci-dessus, alors on retrouve le produit vectoriel de la page 147.

$$\vec{n} \parallel \vec{v} \wedge \vec{w} \quad \text{où} \quad \vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +(v_2w_3 - v_3w_2) \\ -(v_1w_3 - v_3w_1) \\ +(v_1w_2 - v_2w_1) \end{pmatrix}$$

11.23 Aire d'un parallélogramme dans le plan

Ci-dessous, on voit que deux vecteurs engendrent un parallélogramme.



Pour calculer l'aire de ce parallélogramme, on multiplie la hauteur par la base. Pour trouver la hauteur, on utilise le théorème de Pythagore à partir de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{w}$, notée v'. Afin que le calcul soit plus élégant, calculons d'abord l'aire au carré.

$$\begin{aligned}
\text{Aire}^2 &= \text{hauteur}^2 \cdot \text{base}^2 = \left(\|\vec{v}\|^2 - \left(\frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{w}\|}\right)^2\right) \cdot \|\vec{w}\|^2 \\
&= \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 - \frac{(\vec{v} \bullet \vec{w})^2}{\|\vec{w}\|^2}\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 - (\vec{v} \bullet \vec{w})^2 \\
&= (v_1^2 + v_2^2)(w_1^2 + w_2^2) - (v_1w_1 + v_2w_2)^2 \\
&= v_1^2w_1^2 + v_1^2w_2^2 + v_2^2w_1^2 + v_2^2w_2^2 - (v_1^2w_1^2 + 2v_1v_2w_1w_2 + v_2^2w_2^2) \\
&= v_1^2w_2^2 - 2v_1v_2w_1w_2 + v_2^2w_1^2 = (v_1w_2 - v_2w_1)^2
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\text{Aire} = \sqrt{(v_1w_2 - v_2w_1)^2} = |v_1w_2 - v_2w_1|$$

Pour plus de simplicité, on dit que $v_1w_2 - v_2w_1$ est l'*aire signée.*

Définition

Le *déterminant* des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est défini comme suit

$$\boxed{\det(\vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = v_1w_2 - v_2w_1}$$

Résultat

Dans le plan, l'aire *signée* du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est donnée par le déterminant des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

$$\boxed{\text{Aire } \textit{signée} \text{ du parallélogramme engendré par les vecteurs } \vec{v} \text{ et } \vec{w} \ = \ \det(\vec{v}, \vec{w})}$$

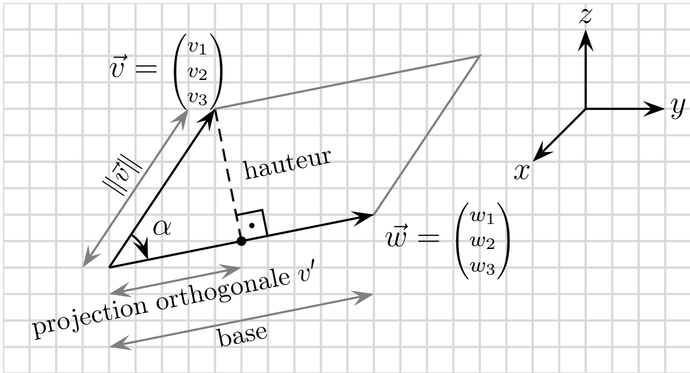
Une autre formule

Si on connaît l'angle α, on voit que grâce à la trigonométrie on a

$$\boxed{\text{Aire } \textit{signée} \text{ du parallélogramme engendré par les vecteurs } \vec{v} \text{ et } \vec{w} \ = \ \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin(\alpha)}$$

11.24 Aire d'un parallélogramme dans l'espace

Ci-dessous, on voit que deux vecteurs engendrent un parallélogramme.



Pour calculer l'aire de ce parallélogramme, on multiplie la hauteur par la base. Pour trouver la hauteur, on utilise le théorème de Pythagore à partir de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{w}$, notée v'. Afin que le calcul soit plus élégant, calculons d'abord l'aire au carré.

$$\begin{aligned}
\text{Aire}^2 &= \text{hauteur}^2 \cdot \text{base}^2 = \left(\|\vec{v}\|^2 - \left(\frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{w}\|}\right)^2\right) \cdot \|\vec{w}\|^2 \\
&= \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 - \frac{(\vec{v} \bullet \vec{w})^2}{\|\vec{w}\|^2}\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 - (\vec{v} \bullet \vec{w})^2 \\
&= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3)^2 \\
&= v_1^2w_1^2 + v_1^2w_2^2 + v_1^2w_3^2 + v_2^2w_1^2 + v_2^2w_2^2 + v_2^2w_3^2 + v_3^2w_1^2 + v_3^2w_2^2 + v_3^2w_3^2 \\
&\quad -(v_1^2w_1^2 + 2v_1v_2w_1w_2 + v_2^2w_2^2 + 2v_1v_3w_1w_3 + 2v_2v_3w_2w_3 + v_3^2w_3^2) \\
&= v_2^2w_3^2 - 2v_2v_3w_2w_3 + v_3^2w_2^2 \\
&\quad +v_1^2w_3^2 - 2v_1v_3w_1w_3 + v_3^2w_1^2 \\
&\quad +v_1^2w_2^2 - 2v_1v_2w_1w_2 + v_2^2w_1^2 \\
&= (v_2w_3 - v_3w_2)^2 + (v_1w_3 - v_3w_1)^2 + (v_1w_2 - v_2w_1)^2
\end{aligned}$$

À un signe près, on reconnaît les composantes du produit vectoriel (voir page 147) ! Ainsi

$$\text{Aire} = \sqrt{\big(v_2w_3 - v_3w_2\big)^2 + \big(-(v_1w_3 - v_3w_1)\big)^2 + \big(v_1w_2 - v_2w_1\big)^2}$$

Résultat

Dans l'espace, l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est donnée par la norme du produit vectoriel des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

$$\boxed{\text{Aire du parallélogramme engendré par les vecteurs } \vec{v} \text{ et } \vec{w} = \|\vec{v} \wedge \vec{w}\|}$$

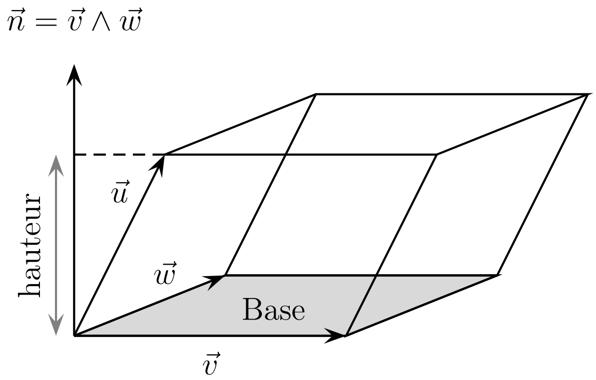
Une autre formule

Si on connaît l'angle α, on voit que grâce à la trigonométrie on a

$$\boxed{\text{Aire } \textit{signée} \text{ du parallélogramme engendré par les vecteurs } \vec{v} \text{ et } \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin(\alpha)}$$

11.26 Volume d'un parallélépipède

Ci-dessous, on voit que trois vecteurs engendrent un parallélépipède.



Le traitillé correspond à la projection orthogonale du vecteur $\vec{u}$ sur le vecteur $\vec{v} \wedge \vec{w}$.
Ce trait appartient au plan contenant le 'couvercle'.

On sait que

$$\begin{aligned} \text{Volume du parallélépipède} &= \text{Base du parallélépipède} \cdot \text{Hauteur du parallélépipède} \\ &= \text{Aire du parallélogramme} \cdot \text{Hauteur du parallélépipède} \end{aligned}$$

La hauteur *signée* est obtenue en projetant orthogonalement le vecteur $\vec{u}$ sur $\vec{v} \wedge \vec{w}$. On prend la valeur absolue pour ne pas avoir de signe. Ainsi,

$$\text{Hauteur du parallélépipède} = \frac{|\vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})|}{\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|}$$

De plus, on a

$$\text{Aire du parallélogramme} = \|\vec{v} \wedge \vec{w}\|$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \text{Volume du parallélépipède} &= \text{Aire du parallélogramme} \cdot \text{Hauteur du parallélépipède} \\ &= \|\vec{v} \wedge \vec{w}\| \cdot \frac{|\vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})|}{\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|} \\ &= |\vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})| \end{aligned}$$

Définition

Le *produit mixte* des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est défini par $\vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

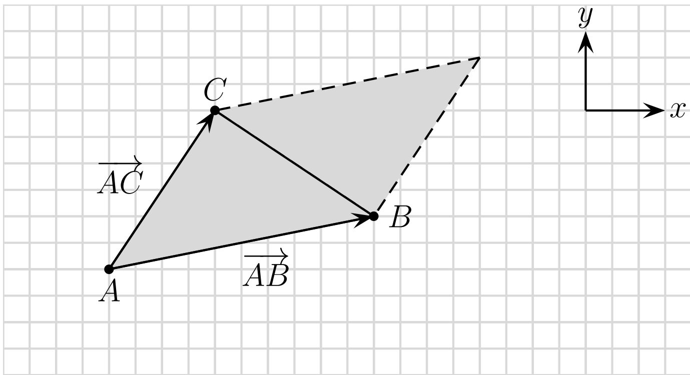
Résultat

Dans l'espace, le volume *signé* du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est donné par le produit mixte des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

$$\boxed{\text{Volume } \textit{signé} \text{ du parallélépipède engendré par les vecteurs } \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \ = \ \vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})}$$

11.27 Aire d'un triangle dans le plan

On considère le triangle ABC de sommets A, B et C.

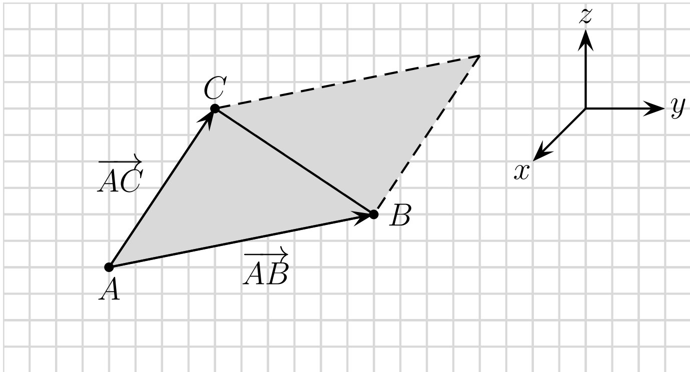


On remarque que l'aire du triangle ABC est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\boxed{\text{Aire } \textit{signée} \text{ du triangle } ABC \;=\; \tfrac{1}{2}\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}$$

11.28 Aire d'un triangle dans l'espace

On considère le triangle ABC de sommets A, B et C.

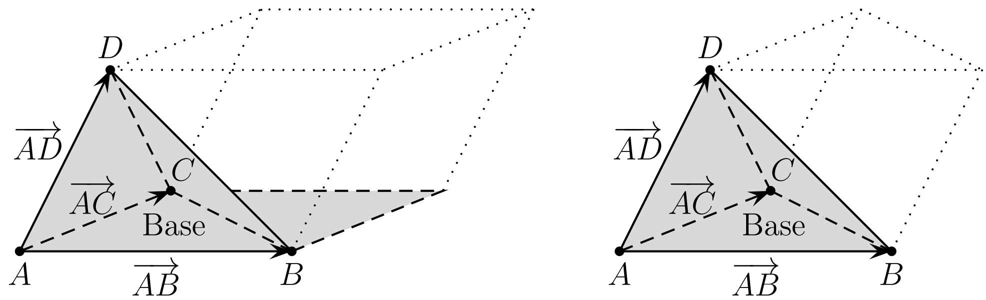


On remarque que l'aire du triangle ABC est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\boxed{\text{Aire du triangle } ABC \;=\; \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$$

11.30 Volume d'un tétraèdre

On considère le tétraèdre $ABCD$ de sommets A, B, C et D.



Le tétraèdre est une pyramide à base triangulaire inscrit dans le prisme (voir le schéma de droite) qui est la moitié du parallélépipède engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Donc,

$$\text{Volume pyramide} = \tfrac{1}{3} \cdot \text{Volume prisme} = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \text{Volume parallélépipède}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Volume } \textit{signé} \text{ du tétraèdre } ABCD \;=\; \tfrac{1}{6}\big(\overrightarrow{AD} \bullet (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\big)}$$

Grâce aux propriétés du produit scalaire (page 155) et du produit vectoriel (page 167), le volume signé ne dépend pas de l'ordre dans lequel on écrit les vecteurs. Néanmoins, il est nécessaire que chaque vecteur ait le même point de départ. Autrement dit, au signe près, les produits mixtes suivants sont les mêmes.

$$\overrightarrow{AD} \bullet (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}),\quad \overrightarrow{BA} \bullet (\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}),\quad \overrightarrow{CB} \bullet (\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CD}),\quad \overrightarrow{DB} \bullet (\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DA}),\ \ldots$$

11.31 Propriétés du déterminant dans le plan

1. L'aire A du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ et $\vec{w} = \binom{w_1}{w_2}$ est égale à la valeur absolue du déterminant, autrement dit :

$$A = |\det(\vec{v}, \vec{w})|$$

2. Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs du plan. On a l'équivalence suivante :

$$\vec{v} \parallel \vec{w} \iff \det(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

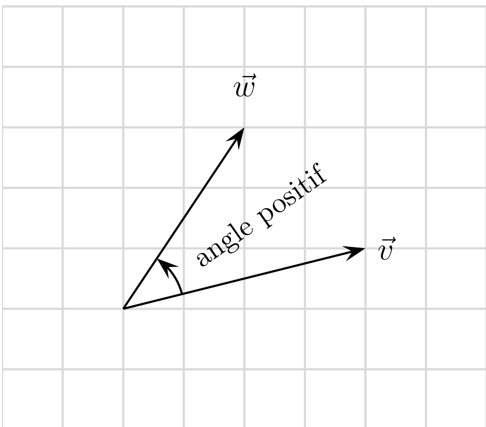
   En effet, l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est nulle si et seulement si les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont parallèles.

   Ainsi, le déterminant à 2 dimensions est un DÉTECTEUR DE PARALLÉLISME.

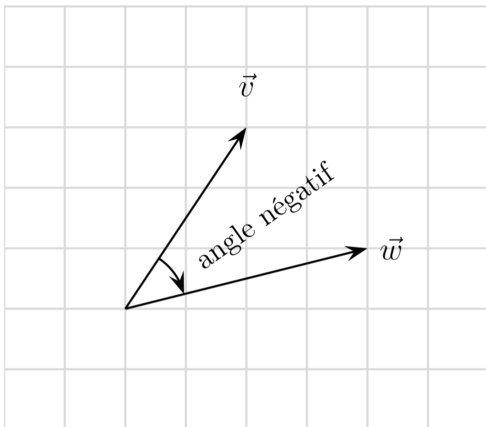
3. Pour tout vecteurs du plan $\vec{v}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{w}$ et pour tout nombre α, $\beta \in \mathbb{R}$, on a
   (a) $\det(\vec{v}, \vec{w}) = -\det(\vec{w}, \vec{v})$
   (b) $\det(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2, \vec{w}) = \alpha\det(\vec{v}_1, \vec{w}) + \beta\det(\vec{v}_2, \vec{w})$

4. Le déterminant $\det(\vec{v}, \vec{w})$ est un nombre.

   Son signe est donné par l'orientation des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Le déterminant est positif si l'angle le plus petit entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$ (partant de $\vec{v}$) est positif, il est négatif dans le cas contraire.

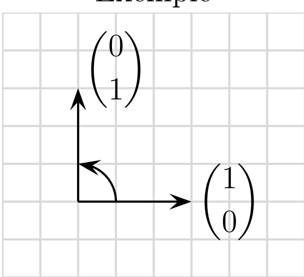


Dans ce cas, $\det(\vec{v}, \vec{w}) > 0$



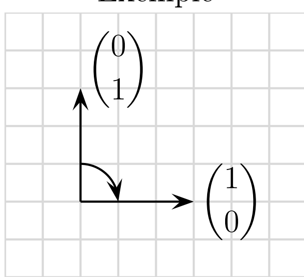
Dans ce cas, $\det(\vec{v}, \vec{w}) < 0$

Exemple



$\det\left(\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right) = 1 > 0$

Exemple



$\det\left(\binom{0}{1}, \binom{1}{0}\right) = -1 < 0$

11.32 Propriétés du produit vectoriel dans l'espace

1. L'aire A du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ est égale à la norme du produit vectoriel, autrement dit :

$$A = \|\vec{v} \wedge \vec{w}\|$$

2. Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs de l'espace. On a l'équivalence suivante :

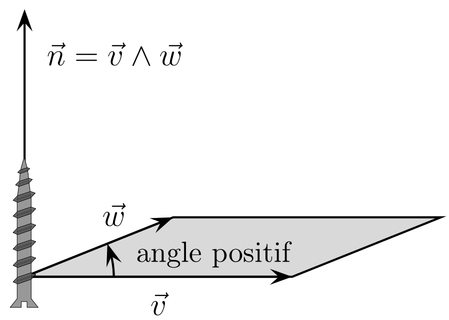
$$\vec{v} \parallel \vec{w} \iff \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0}$$

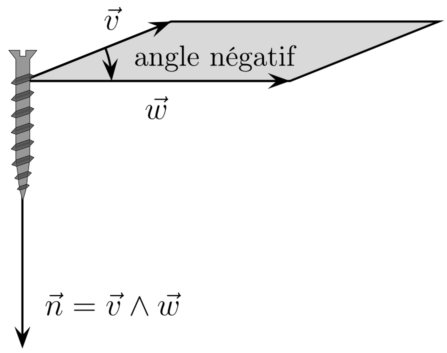
   En effet, l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est nulle si et seulement si les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont parallèles.

   Ainsi, le produit vectoriel est un DÉTECTEUR DE PARALLÉLISME.

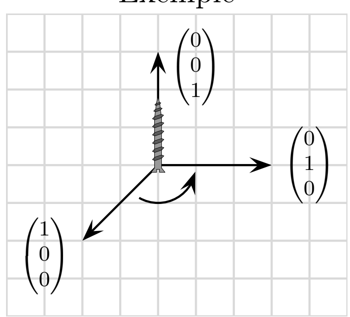
3. Pour tout vecteurs de l'espace $\vec{v}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{w}$ et pour tout nombre α, $\beta \in \mathbb{R}$, on a
   (a) $\vec{v} \wedge \vec{w} = -\,\vec{w} \wedge \vec{v}$
   (b) $(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) \wedge \vec{w} = \alpha(\vec{v}_1 \wedge \vec{w}) + \beta(\vec{v}_2 \wedge \vec{w})$

4. Le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{w}$ est un vecteur.
   (a) Sa direction est la direction perpendiculaire aux directions données par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
   (b) Son sens est donné de telle manière que les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{v}\wedge\vec{w}$ se positionnent selon l'orientation donnée par les axes x, y et z. C'est la règle du tournevis.



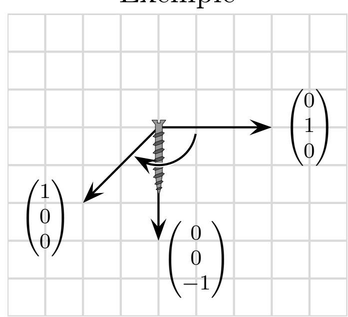


Exemple



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple



$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   (c) Sa longueur est égale à l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

11.33 Distances dans le plan

Distance d'un point à un point

Soit P_1 et P_2 deux points dans le plan. La *distance entre les points P_1 et P_2* est donnée par

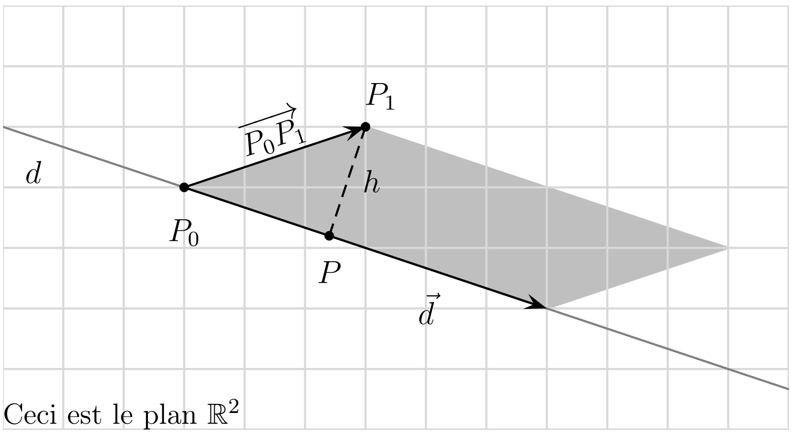
$$\boxed{d(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\|}$$

Distance d'un point à une droite (vecteur directeur)

Soit d une droite passant par P_0 et de vecteur directeur $\vec{d}$, et P_1 un point dans le plan.

La *distance entre le point P_1 et la droite d* est la plus courte distance parmi toutes les distances possibles entre le point P_1 et un point P sur la droite. On voit, grâce au théorème de Pythagore, que la plus courte distance est donnée lorsque le segment reliant P_1 à P est perpendiculaire à la droite d.

Cette distance $d(P_1, d)$ est donnée par la hauteur du parallélogramme engendré par les vecteurs $\overrightarrow{P_0P_1}$ et $\vec{d}$.



Comme l'aire du parallélogramme est égale à la base fois la hauteur, on peut exprimer la hauteur du parallélogramme comme suit.

$$\text{Hauteur du parallélogramme} = \frac{\text{Aire du parallélogramme}}{\text{base du parallélogramme}} = \frac{\det(\overrightarrow{P_0P_1}, \vec{d})}{\|\vec{d}\|}$$

Ainsi :

$$\boxed{\delta(P_1, d) = \frac{\det(\overrightarrow{P_0P_1}, \vec{d})}{\|\vec{d}\|}}$$

On note δ au lieu de d parce qu'il s'agit d'une *distance signée*

Bien sûr, cette formule est aussi valable si le point P_1 est dans la droite. Dans ce cas, la distance sera évidemment nulle.

11.34 Distances dans l'espace

Distance d'un point à un point

Soit P_1 et P_2 deux points dans l'espace. La *distance entre les points P_1 et P_2* est donnée par

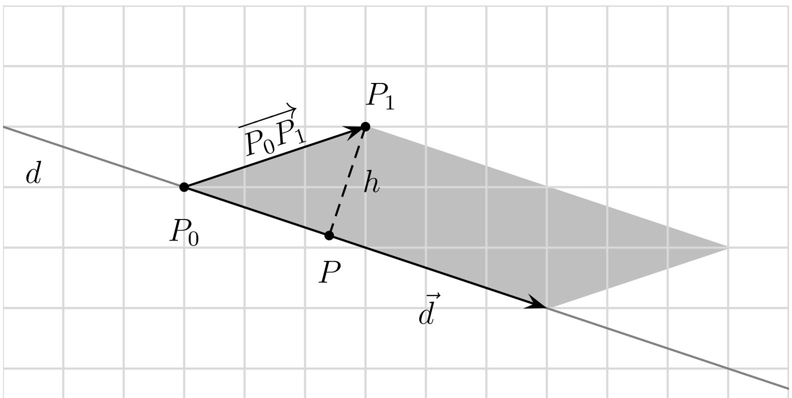
$$\boxed{d(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\|}$$

Distance d'un point à une droite (vecteur directeur)

Soit d une droite passant par P_0 et de vecteur directeur $\vec{d}$, et P_1 un point dans l'espace.

La *distance entre le point P_1 et la droite d* est la plus courte distance parmi toutes les distances possibles entre le point P_1 et un point P sur la droite. On voit, grâce au théorème de Pythagore, que la plus courte distance est donnée lorsque le segment reliant P_1 à P est perpendiculaire à la droite d.

Cette distance $d(P_1, d)$ est donnée par la hauteur du parallélogramme engendré par les vecteurs $\overrightarrow{P_0P_1}$ et $\vec{d}$.



Ceci est le plan contenant la droite d et le point P_1

Comme l'aire du parallélogramme est égale à la base fois la hauteur, on peut exprimer la hauteur du parallélogramme comme suit.

$$\text{Hauteur du parallélogramme} = \frac{\text{Aire du parallélogramme}}{\text{base du parallélogramme}} = \frac{\|\overrightarrow{P_0P_1} \wedge \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$$

Ainsi :

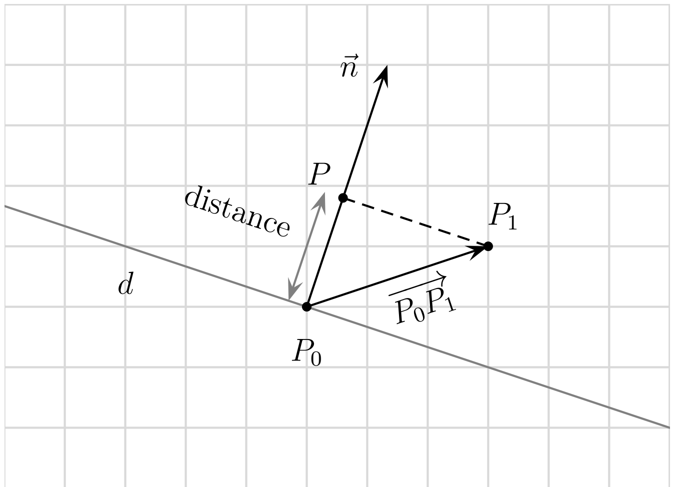
$$\boxed{d(P_1, d) = \frac{\|\overrightarrow{P_0P_1} \wedge \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}}$$

Bien sûr, cette formule est aussi valable si le point P_1 est dans la droite. Dans ce cas, la distance sera évidemment nulle.

Distance d'un point à une droite (vecteur normal)

Soit d une droite passant par P_0 et de vecteur normal $\vec{n}$, et P_1 un point dans le plan.

La *distance entre le point* P_1 *et la droite* d est égale à la distance entre le point P_0 et la projection orthogonale P du point P_1 sur la droite perpendiculaire à la droite d, passant par P_0 (grâce à Pythagore).



Ainsi, la distance *signée*, notée $\delta(P_1, d)$, du point P_1 à la droite d est la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{P_0P_1}$ sur le vecteur normal $\vec{n}$.

$$\boxed{\delta(P_1, d) = \frac{\overrightarrow{P_0P_1} \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|}}$$

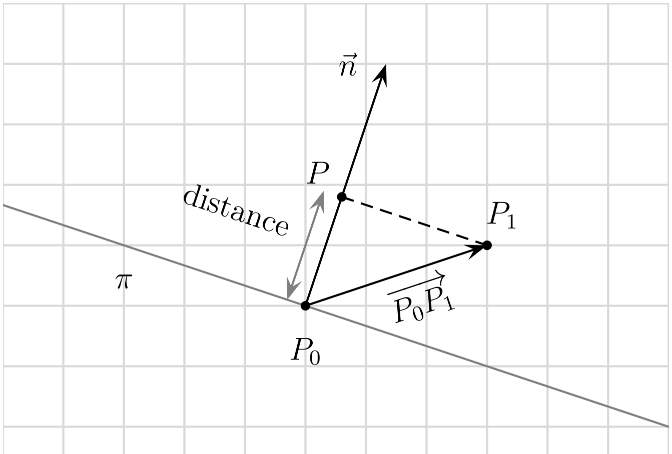
On note δ au lieu de d parce qu'il s'agit d'une *distance signée*

Bien sûr, cette formule est aussi valable si le point P_1 est dans la droite. Dans ce cas, la distance sera évidemment nulle.

Distance d'un point à un plan (vecteur normal)

Soit π un plan passant par P_0 et de vecteur normal $\vec{n}$, et P_1 un point dans l'espace.

La *distance entre le point P_1 et le plan π* est égal à la distance entre le point P_0 et la projection orthogonale P du point P_1 sur la droite perpendiculaire au plan π, passant par P_0 (grâce à Pythagore).



On regarde le plan de «profil»

Ainsi, la distance *signée*, notée $\delta(P_1, \pi)$, du point P_1 au plan π est la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{P_0P_1}$ sur le vecteur normal $\vec{n}$.

$$\boxed{\delta(P_1, \pi) = \frac{\overrightarrow{P_0P_1} \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|}}$$

On note δ au lieu de d parce qu'il s'agit d'une *distance signée*

Bien sûr, cette formule est aussi valable si le point P_1 est dans le plan. Dans ce cas, la distance sera évidemment nulle.

Distance d'une droite à une droite

Soit d_1 une droite passant par P_1 et de vecteur directeur $\vec{d_1}$. Soit aussi d_2 une droite passant par P_2 et de vecteur directeur $\vec{d_2}$.

La *distance entre deux droites* est la plus courte distance parmi toutes les distances entre un point de la première droite et un point de la deuxième droite.

On distingue deux cas.

1. Les vecteurs directeurs $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ sont parallèles.

   Par conséquent, les droites sont soit confondues, soit parallèles.

   La distance entre les deux droites est donnée par la distance du point P_1 (qui est un point de d_1) à la droite d_2 (et on utilise une formule vue précédemment).

   $$d(d_1, d_2) = d(P_1, d_2)$$

   On est donc ramené au problème du calcul de la distance d'un point à une droite.

2. Les vecteurs directeurs $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ ne sont pas parallèles.

   Par conséquent, les droites sont forcément sécantes. Ainsi la distance est nulle.

   $$d(d_1, d_2) = 0$$

Distance d'une droite à une droite

Soit d_1 une droite passant par P_1 et de vecteur directeur $\vec{d_1}$. Soit aussi d_2 une droite passant par P_2 et de vecteur directeur $\vec{d_2}$.

La *distance entre deux droites* est la plus courte distance parmi toutes les distances entre un point de la première droite et un point de la deuxième droite.

On distingue deux cas.

1. Les vecteurs directeurs $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ sont parallèles.

   Par conséquent, les droites sont soit confondues, soit parallèles.

   La distance entre les deux droites est donnée par la distance du point P_1 (qui est un point de d_1) à la droite d_2 (et on utilise une formule vue précédemment).

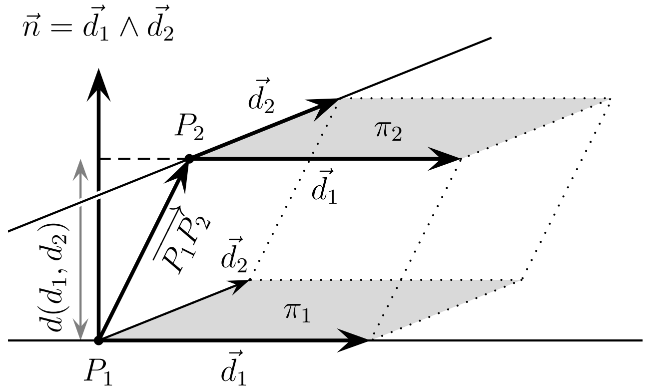
   $$d(d_1, d_2) = d(P_1, d_2)$$

   On est donc ramené au problème du calcul de la distance d'un point à une droite.

2. Les vecteurs directeurs $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ ne sont pas parallèles.

   Par conséquent, les droites sont gauches ou sécantes.

   Considérons les plans π_1 et π_2 dont les deux vecteurs directeurs sont $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ et passant respectivement par P_1 et P_2. Ces plans sont bien définis, car $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ ne sont pas parallèles. On a donc la situation suivante :



   Ainsi la distance *signée* entre les deux droites est donnée par la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ sur le vecteur $\vec{d_1} \wedge \vec{d_2}$. D'où la formule suivante.

   $$\boxed{\delta(d_1, d_2) = \frac{\overrightarrow{P_1P_2} \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|} \quad \text{où} \quad \vec{n} = \vec{d_1} \wedge \vec{d_2}}$$

   On note δ au lieu de d parce qu'il s'agit d'une *distance signée*

   Remarques :

   (a) Comme $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ sont non parallèles, le produit vectoriel $\vec{d_1} \wedge \vec{d_2}$ n'est pas égal au vecteur nul. On ne divise donc pas par zéro !

   (b) Le dessin correspond à la situation de deux droites gauches. si les droites étaient sécantes, les deux plans π_1 et π_2 serait confondus et la méthode décrite ci-dessus resterait valide. En effet, dans ce cas le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ serait perpendiculaire à $\vec{n}$ et ainsi la distance entre les droites serait nulle.

Distance d'une droite à un plan

Soit d une droite passant par P_1 et de vecteur directeur $\vec{d}$. Soit aussi π un plan passant par P_2 et de vecteur normal $\vec{n}$.

La *distance entre une droite et un plan* est la plus courte distance parmi toutes les distances entre un point de la droite et un point du plan.

On distingue deux cas.

1. Les vecteurs $\vec{d}$ et $\vec{n}$ sont perpendiculaires.

   Par conséquent, la droite et le plan sont parallèles ou confondus.

   La distance entre la droite et le plan est donnée par la distance du point P_1 (qui est un point de d) au plan π (et on utilise une formule vue précédemment).

   $$d(d, \pi) = d(P_1, \pi)$$

   On est donc ramené au problème du calcul de la distance d'un point à un plan.

   Attention à ne pas calculer la distance d'un point quelconque du plan à la droite d, car cela ne donnera pas forcément la bonne distance.

2. Les vecteurs $\vec{d}$ et $\vec{n}$ ne sont pas perpendiculaires.

   Par conséquent, la droite coupe forcément le plan. Ainsi la distance est nulle.

   $$d(d, \pi) = 0$$

Distance d'un plan à un plan

Soit π_1 un plan passant par P_1 et de vecteur directeur $\vec{n}_1$. Soit aussi π_2 un plan passant par P_2 et de vecteur normal $\vec{n}_2$.

La *distance entre deux plans* est la plus courte distance parmi toutes les distances entre un point du premier plan et un point du deuxième plan.

On distingue deux cas.

1. Les vecteurs normaux $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont parallèles.

   Par conséquent, les plans sont soit confondus, soit parallèles.

   La distance entre les deux plans est donnée par la distance du point P_1 (qui est un point de π_1) au plan π_2 (et on utilise une formule vue précédemment).

   $$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2)$$

   On est donc ramené au problème du calcul de la distance d'un point à un plan.

2. Les vecteurs normaux $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas parallèles.

   Par conséquent, les plans sont forcément sécants. Ainsi la distance est nulle.

   $$d(\pi_1, \pi_2) = 0$$

11.35 Cercle dans le plan

Définition

Un *cercle* est l'ensemble des points du plan qui sont à une même distance r, $r > 0$, appelée *rayon*, d'un point $C(x_c; y_c)$, appelé *centre*.

En notation ensembliste
$$\mathcal{C} = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(C, P) = r\}$$

Équation cartésienne d'un cercle

En notant $P(x; y)$ les points sur le cercle, on peut transformer la condition $d(C, P) = r$.
$$d(C,P) = r \iff \|\overrightarrow{CP}\| = r \iff \left\|\begin{pmatrix} x - x_c \\ y - y_c \end{pmatrix}\right\| = r \iff \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} = r$$

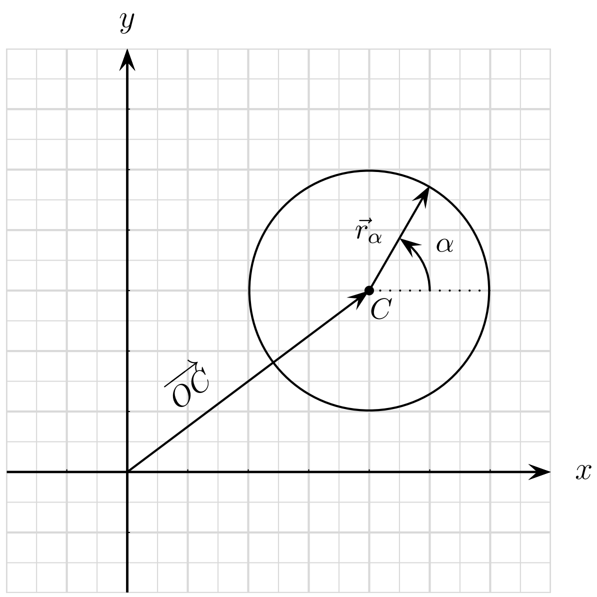
Puisque le rayon r est positif, on conserve l'équivalence en élevant au carré. Ainsi
$$d(C,P) = r \iff (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

On voit donc que l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ centré en $C(x_c, y_c)$ et de rayon r est :
$$\boxed{\mathcal{C} : (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2}$$

*Équation paramétrique d'un cercle

Une équation paramétrique possible pour un cercle $\mathcal{C}$ centré en $C(x_c, y_c)$ et de rayon r est :
$$\boxed{\mathcal{C} : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \vec{r}_\alpha \quad \text{où} \quad \vec{r}_\alpha = r\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha \in [0, 2\pi]}$$

$$\boxed{\mathcal{C} : \left\{\begin{array}{rcrcl} x & = & x_c & + & r\,\cos(\alpha) \\ y & = & y_c & + & r\,\sin(\alpha) \end{array}\right. \quad \text{avec } \alpha \in [0, 2\pi]}$$



11.36 Sphère dans l'espace

Définition

Une *sphère* est l'ensemble des points de l'espace qui sont à une même distance r, $r > 0$, appelée *rayon*, d'un point $C(x_c; y_c; z_c)$, appelé *centre*.

En notation ensembliste

$$\mathcal{S} = \{P \in \mathbb{R}^3 : d(C, P) = r\}$$

Équation cartésienne d'une sphère

En notant $P(x; y; z)$ les points sur le cercle, on peut transformer la condition $d(C, P) = r$.

$$d(C,P) = r \iff \|\overrightarrow{CP}\| = r \iff \left\| \begin{pmatrix} x - x_c \\ y - y_c \\ z - z_c \end{pmatrix} \right\| = r \iff \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2} = r$$

Puisque le rayon r est positif, on conserve l'équivalence en élevant au carré. Ainsi

$$d(C, P) = r \iff (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2$$

On voit donc que l'équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ centré en $C(x_c; y_c; z_c)$ et de rayon r est :

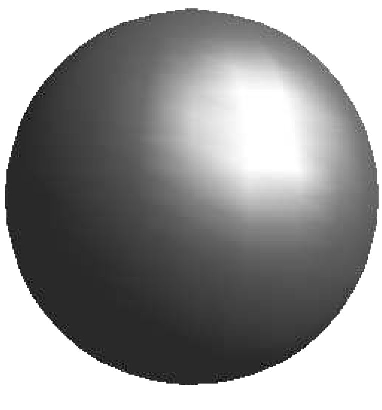
$$\boxed{\mathcal{S} : (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2}$$

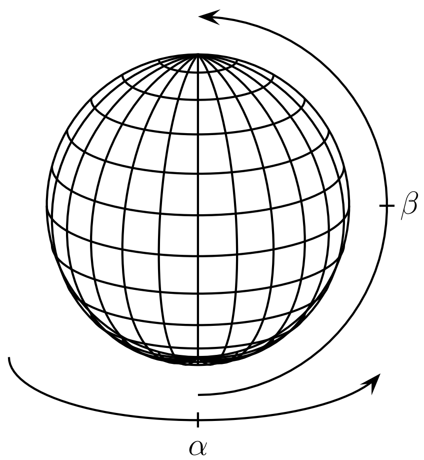
*Équation paramétrique d'une sphère

Une équation paramétrique possible pour une sphère $\mathcal{S}$ centrée en $C(x_c; y_c; z_c)$ et de rayon r est :

$$\boxed{\mathcal{S} : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \vec{r}_\alpha \quad \text{où} \quad \vec{r}_\alpha = r \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha \in [0, 2\pi],\ \beta \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]}$$

$$\boxed{\mathcal{S} : \begin{cases} x = x_c + r\cos(\alpha)\cos(\beta) \\ y = y_c + r\sin(\alpha)\cos(\beta) \\ z = z_c + r\sin(\beta) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \alpha \in [0, 2\pi],\ \beta \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]}$$





11.37 Rappel : déterminant en dimension 2

Afin de pouvoir généraliser la notion de déterminant en dimension 2, le déterminant entre les deux vecteurs du plan

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

peut être conçu ainsi.

$$\begin{aligned} \det(\vec{v}, \vec{w}) \;=\; \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \\ &= \quad v_1 w_2 \quad - \quad v_2 w_1 \end{aligned}$$

Une propriété du déterminant en dimension 2

En dimension 2, le déterminant détecte si deux vecteurs sont *colinéaires* (c'est-à-dire parallèles à une même droite).

$$\boxed{\det(\vec{v}, \vec{w}) = 0 \iff \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont colinéaires}}$$

11.38 Complément : déterminant en dimension 3

Il s'agit d'une généralisation de la technique vue en dimension 2. Le déterminant entre les trois vecteurs de l'espace

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

est défini comme suit.

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

Une propriété du déterminant en dimension 3

En dimension 3, le déterminant détecte si deux vecteurs sont *coplanaires* (c'est-à-dire parallèles à un même plan).

$$\boxed{\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0 \iff \vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires}}$$

Le produit mixte et le déterminant en dimension 3

On considère les trois vecteurs suivants.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

La formule suivante permet de constater qu'un déterminant en dimension 3 est un produit mixte.

$$\boxed{\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})}$$

Preuve

En effet : $$\vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} +(v_2w_3 - v_3w_2) \\ -(v_1w_3 - v_3w_1) \\ +(v_1w_2 - v_2w_1) \end{pmatrix}$$

$$= u_1(v_2w_3 - v_3w_2) - u_2(v_1w_3 - v_3w_1) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)$$

$$= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

□

Déterminant en dimension plus grande que 3

Un cours plus complet sur les déterminants se trouve à l'adresse Internet suivante.

`http://www.vive-les-maths.net`

11.39 Sur le cercle inscrit à un triangle

Théorème

On considère le cercle inscrit à un triangle ABC. Notons a, b, c les longueurs respectives des côtés opposés aux sommets A, B, C et $P = a + b + c$ le périmètre du triangle. Alors le centre Ω et le rayon r du cercle inscrit sont donnés par

$$\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{P}\left(a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC}\right) \quad \text{et} \quad r = 2\cdot\frac{\text{aire du triangle}}{\text{périmètre du triangle}}$$

Preuve

L'unicité du cercle inscrit vient du fait que le centre Ω est à l'intersection des bissectrices intérieures au triangle.

Montrons que le cercle est soit inscrit, soit exinscrit[10] au triangle en montrant que la distance de Ω à n'importe quelle droite contenant une arête du triangle vaut bien le rayon annoncé. Comme Ω est une moyenne pondérée des sommets du triangle, alors Ω est bien à l'intérieur du triangle et il s'agit du centre du cercle inscrit.

Commençons par écrire le vecteur $\overrightarrow{A\Omega}$ à l'aide de la règle de Chasles en utilisant le fait que $a - P = -b - c$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A\Omega} &= \overrightarrow{O\Omega} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{P}\left((a-P)\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC}\right)\\
&= \frac{1}{P}\left((-b-c)\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC}\right)\\
&= \frac{1}{P}\left(b\,\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + c\,\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)\right)\\
&= \frac{1}{P}\left(b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC}\right)
\end{aligned}$$

On peut maintenant calculer la distance signée entre le point Ω et la droite (AB) en utilisant les propriétés du déterminant (voir page 166).

$$\begin{aligned}
\delta(\Omega,(AB)) &= \frac{\det(\overrightarrow{A\Omega},\overrightarrow{AB})}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\det\left(\frac{1}{P}\left(b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC}\right),\overrightarrow{AB}\right)}{c}\\
&= \frac{b}{Pc}\underbrace{\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB})}_{=0} + \frac{c}{Pc}\det(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})\\
&= \frac{1}{P}\det(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) = \frac{2}{P}\cdot\text{Aire signée du triangle } ABC
\end{aligned}$$

Ainsi, la distance est égale à $2\frac{\text{aire du triangle}}{\text{périmètre du triangle}}$. Et, comme la conclusion est indépendante de la droite utilisée (ici (AB)), on aura exactement la même réponse pour les deux autres droites. Ainsi, on a le rayon et le centre désiré. $\square$

10. La définition de cercle exinscrit dépasse le cadre de ce cours ; le lecteur intéressé pourra se référer à wikipédia `http://fr.wikipedia.org/wiki/Cercles_inscrit_et_exinscrits_d'un_triangle`. Il y trouvera notamment une image très explicite.

11.40 Sur le cercle inscrit à un triangle

On retrouve exactement le même énoncé qu'en géométrie plane. La preuve change un petit peu, car on doit utiliser la norme du produit vectoriel au lieu du déterminant, ce qui ne change rien car les propriétés du déterminant utilisées dans la preuve sont aussi vérifiées pour le produit vectoriel en géométrie spatiale (comparer les pages 166 et 167).

11.42 Sur la sphère inscrite à un tétraèdre

Théorème

On considère la sphère inscrite à un tétraèdre $ABCD$. Notons S_a, S_b, S_c, S_d les surfaces respectives des faces opposées aux sommets A, B, C, D et $S = S_a + S_b + S_c + S_d$ la surface du tétraèdre. Alors le centre Ω et le rayon r de la sphère inscrite sont donnés par

$$\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{S}\left(S_a\,\overrightarrow{OA} + S_b\,\overrightarrow{OB} + S_c\,\overrightarrow{OC} + S_d\,\overrightarrow{OD}\right) \quad \text{et} \quad r = 3\cdot\frac{\text{volume du tétraèdre}}{\text{surface du tétraèdre}}$$

Preuve

L'unicité de la sphère inscrite vient du fait que le centre Ω est à l'intersection des plans bissecteurs intérieurs au tétraèdre.

Montrons que la sphère est soit inscrite, soit exinscrite au tétraèdre en montrant que la distance de Ω à n'importe quel plan contenant une face du tétraèdre vaut bien le rayon annoncé. Comme Ω est une moyenne pondérée des sommets du tétraèdre, alors Ω est bien à l'intérieur du tétraèdre et il s'agit du centre de la sphère inscrite.

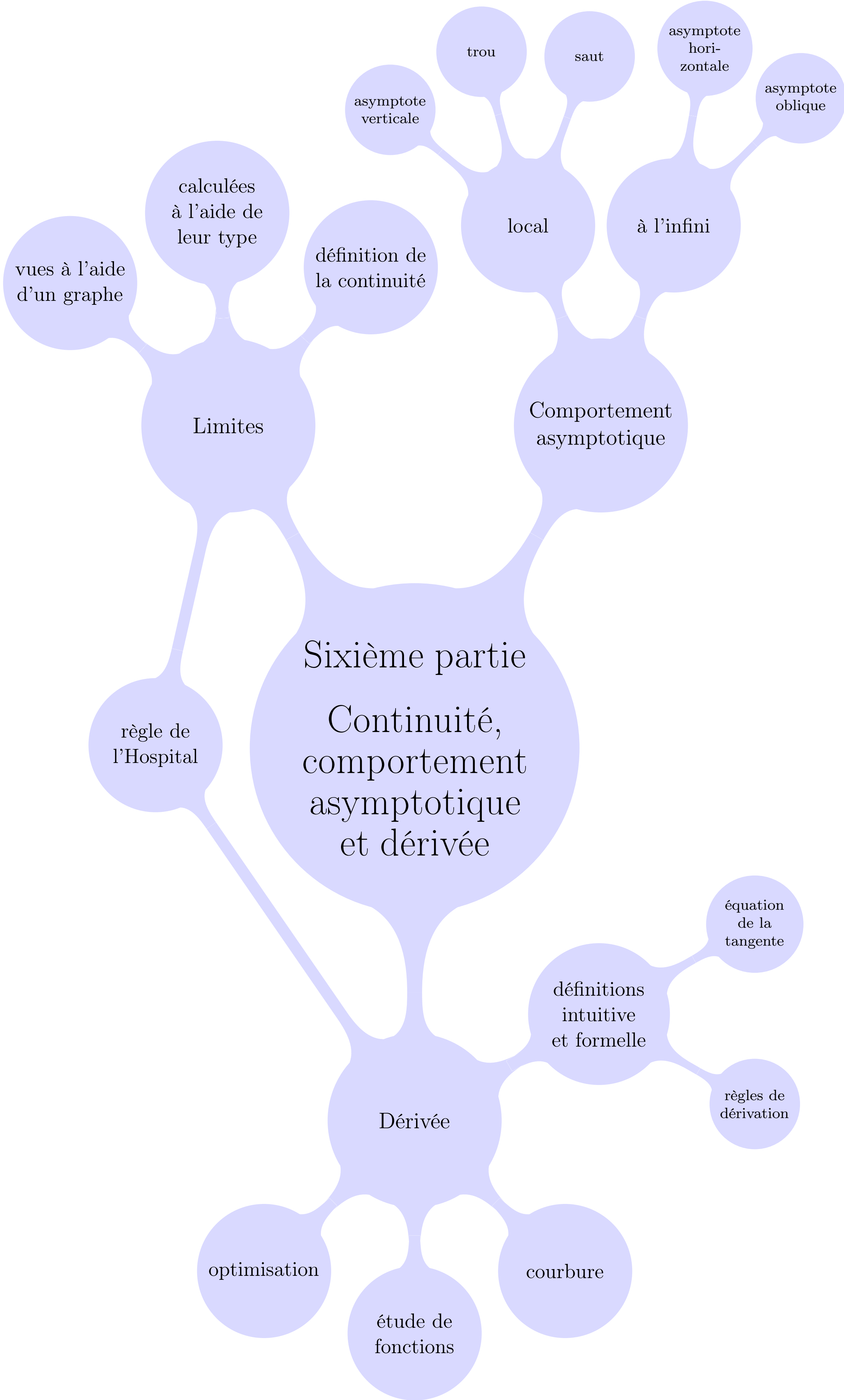
Commençons par écrire le vecteur $\overrightarrow{A\Omega}$ à l'aide de la règle de Chasles en utilisant le fait que $S_a - S = -S_b - S_c - S_d$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A\Omega} &= \overrightarrow{O\Omega} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{S}\left((S_a - S)\,\overrightarrow{OA} + S_b\,\overrightarrow{OB} + S_c\,\overrightarrow{OC} + S_d\,\overrightarrow{OD}\right) \\
&= \frac{1}{S}\left((-S_b - S_c - S_d)\,\overrightarrow{OA} + S_b\,\overrightarrow{OB} + S_c\,\overrightarrow{OC} + S_d\,\overrightarrow{OD}\right) \\
&= \frac{1}{S}\left(S_b\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + S_c\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right) + S_d\left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}\right)\right) \\
&= \frac{1}{S}\left(S_b\,\overrightarrow{AB} + S_c\,\overrightarrow{AC} + S_d\,\overrightarrow{AD}\right)
\end{aligned}$$

On peut maintenant calculer la distance signée entre le point Ω et le plan (ABC) en utilisant les propriétés du produit scalaire (voir page 154).

$$\begin{aligned}
\delta(\Omega, (ABC)) &= \frac{\overrightarrow{A\Omega}\bullet\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|} = \frac{\frac{1}{S}\left(S_b\,\overrightarrow{AB} + S_c\,\overrightarrow{AC} + S_d\,\overrightarrow{AD}\right)\bullet\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}}{2S_d} \\
&= \frac{S_b}{S\ 2S_d}\underbrace{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}}_{=0} + \frac{S_c}{S\ 2S_d}\underbrace{\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}}_{=0} + \frac{S_d}{S\ 2S_d}\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{2S}\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \frac{6}{2S}\cdot\text{Volume signé du tétraèdre } ABCD
\end{aligned}$$

Ainsi, la distance est égale à $3\frac{\text{volume du tétraèdre}}{\text{surface du tétraèdre}}$. Et, comme la conclusion est indépendante du plan utilisé (ici (ABC)), on aura exactement la même réponse pour les trois autres plans. On a donc le rayon et le centre désiré. $\square$


Sixième partie
Continuité, comportement asymptotique et dérivée
Limites
vues à l'aide d'un graphe
calculées à l'aide de leur type
définition de la continuité
règle de l'Hospital
Comportement asymptotique
local
asymptote verticale
trou
saut
à l'infini
asymptote hori- zontale
asymptote oblique
Dérivée
définitions intuitive et formelle
équation de la tangente
règles de dérivation
optimisation
étude de fonctions
courbure

Chapitre 12

Notions de limite

12.1 Le nombre d'Euler

On examine ce que rapporte plusieurs placements de 1 CHF à des rendements différents.

1. Le premier placement est à 100% sur une période d'une année.
2. Le deuxième placement est à un taux périodique de $\frac{100}{2}\%$ sur une période de 6 mois.
3. Le troisième placement est à un taux périodique de $\frac{100}{3}\%$ sur une période de 4 mois.
4. Le quatrième placement est à un taux périodique de $\frac{100}{4}\%$ sur une période de 3 mois.

...

n. Le n-ième placement est à un taux périodique de $\frac{100}{n}\%$ sur une période de $\frac{1}{n}$ année.

...

Notons c_n (avec minuscule) le capital récupéré, pour le n-ième placement, après une année. En capitalisant (voir page 36) en utilisant le taux périodique, on trouve la formule suivante

$$c_n = \left(1 + \tfrac{100}{n}\%\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Voici un tableau présentant quelques valeurs de c_n.

n	1	2	3	4	5	10	25
c_n	2.000	2.250	2.370	2.441	2.488	2.594	2.666

n	50	100	500	1000	2000	4000	8000
c_n	2.692	2.705	2.716	2.717	2.718	2.718	2.718

On remarque que lorsque n devient grand, le nombre c_n a tendance à se rapprocher d'un certain nombre. Le premier à avoir pressenti l'existence de ce nombre mystérieux est l'Écossais John Napier (1550-1617), qui inventa les logarithmes (d'où le logarithme népérien après que son nom soit francisé en Néper). Malgré cela, ce nombre est appelé *nombre d'Euler*, d'après un mathématicien suisse du 18e siècle : Leonhard Euler (1707-1783). Le nombre d'Euler est défini par la limite

$$\boxed{e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cong 2.71828}$$

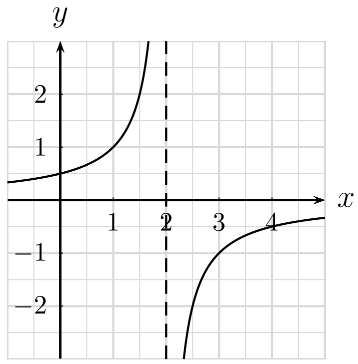
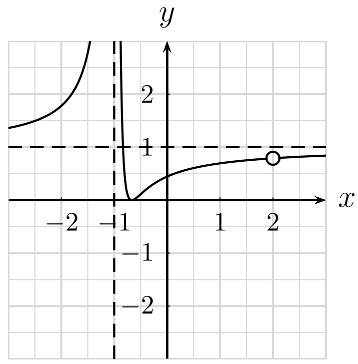
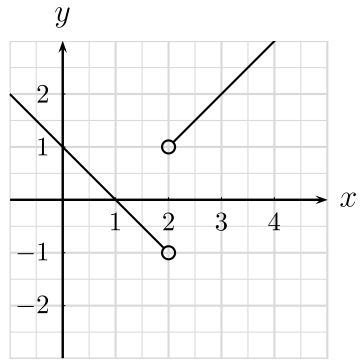
Le nombre e est irrationnel. Cela signifie qu'il ne peut pas s'écrire comme une fraction et qu'il n'y a aucune période dans son écriture décimale. Les premières décimales du nombre e sont 2.7182818284590452. En novembre 1999, le mathématicien Xavier Gourdon a établi un record (pour l'époque) en calculant ses 1'250'000'000 premières décimales.

12.2 Les limites

12.2.1 Définition intuitive des limites

La *limite* est un outil permettant de savoir comment une fonction se comporte “au bord” de son domaine de définition (ou dans son domaine de définition).

Voici plusieurs fonctions ayant toutes des comportements différents.

$f_1(x) = \dfrac{1}{2-x}$	$f_2(x) = \dfrac{9x^3-6x^2-20x-8}{9x^3-27x-18}$	$f_3(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{\lvert x-2\rvert}$
		

Comportement à l’infini

On peut regarder comment $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ se comportent lorsque x devient très grand (positivement ou négativement). Par exemple, on voit que :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_1(x) = 0 \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f_2(x) = 1 \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f_3(x) = +\infty$$

Comportement local

Les domaines de définition de ces fonctions sont

$$D_{f_1} = \mathbb{R}\setminus\{2\} \qquad D_{f_2} = \mathbb{R}\setminus\{-1,2\} \qquad D_{f_3} = \mathbb{R}\setminus\{2\}$$

Ainsi, on ne peut pas parler de $f_1(2)$, de $f_2(-1)$, de $f_2(2)$, ni de $f_3(2)$. On peut par contre indiquer comment ces fonctions se comportent autour de ces nombres qui ne sont pas dans les domaines de définition à l’aide des limites. Les graphes permettent de voir que :

$$\lim_{x\to 2} f_1(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to -1} f_2(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2} f_2(x) = \tfrac{64}{81} \qquad \lim_{x\to 2} f_3(x) \text{ n'existe pas}$$

Mais attention, lorsqu’on dit que x tend vers un nombre a et que l’on note $x \to a$, il faut penser que x s’approche de plus en plus de a par la gauche ou/et par la droite. Ainsi :

$$\lim_{x\to 2} f_3(x) \text{ n'existe pas}$$

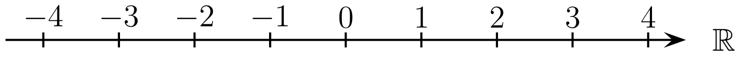
Par contre, on peut regarder les limites à gauche (lorsque x tend vers le nombre a par la gauche, c’est-à-dire en étant toujours plus petit) ou à droite (lorsque x tend vers a par la droite en étant toujours plus grand que a). Ces limites existent[1] et sont les suivantes :

$$\lim_{x\overset{<}{\to}2} f_3(x) = -1 \qquad \lim_{x\overset{>}{\to}2} f_3(x) = 1$$

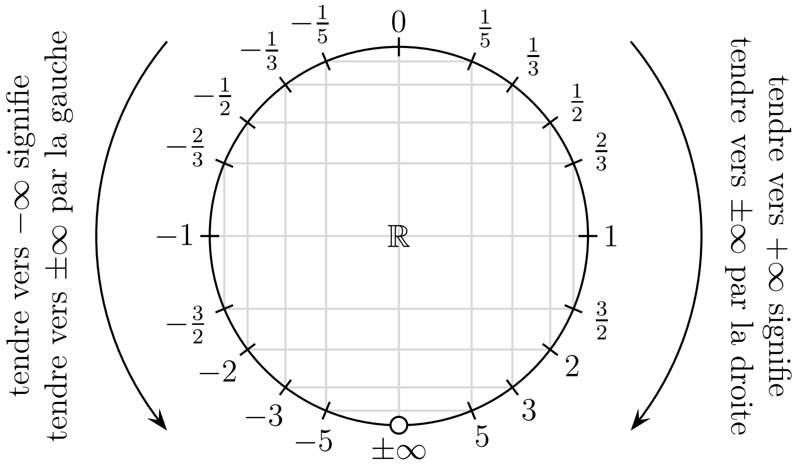
1. Il existe des fonctions pas très sympathiques pour lesquelles aucune limite à gauche ou à droite n’existe ! Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

12.2.2 La droite réelle vue par Alexandrov

Un mathématicien appelé Alexandrov avait la vision suivante des nombres réels[2]. Plutôt que de s'imaginer la droite réelle présentée en première année,



Alexandrov a pensé à plier[3] la droite réelle et à y 'ajouter' un point, noté $\pm\infty$, afin de pouvoir représenter les nombres réels sur un cercle dont un point est $\pm\infty$.



C'est ainsi que l'on peut se permettre de noter $\pm\infty$ quand on n'est pas sûr du signe. C'était le cas pour trois des limites de la page précédente qui peuvent maintenant s'écrire comme suit :

$$\lim_{x\to 2} f_1(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to -1} f_2(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to \pm\infty} f_3(x) = \pm\infty$$

12.2.3 Lien entre les limites et les limites à gauche et à droite

On peut démontrer le résultat suivant.

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) \text{ existe} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\overset{<}{\to}a} f(x) = \lim_{x\overset{>}{\to}a} f(x) \left(= \lim_{x\to a} f(x)\right)}$$

Cela signifie que si une des limites à gauche et à droite n'existe pas ou qu'elles ne sont pas égales, alors la limite n'existe pas (c'est la contraposée de l'implication ci-dessus).

Réciproquement

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\overset{<}{\to}a} f(x) \;\text{ et }\; \lim_{x\overset{>}{\to}a} f(x) \text{ existent et valent toutes les deux le même nombre } b \\[2ex] \displaystyle\quad\Longrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = b \text{ (et donc existe)} \end{array}}$$

Cela signifie que si la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a n'existe pas, alors une des limites à gauche et à droite n'existe pas ou elles ne sont pas égales.

2. En topologie générale, on parle du compactifié d'Alexandrov. Il s'agit de l'ensemble $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ muni de la topologie induite par la topologie usuelle du cercle à travers une projection stéréographique.

3. la sphère de Riemann suit le même principe pour représenter le plan $\mathbb{R}^2$ (ou les nombres complexes $\mathbb{C}$). Elle est aussi décrite à travers une projection stéréographique.

12.2.4 Calculs de limites et types de limites

Les limites permettent de donner une information sur le comportement de la fonction, et par conséquent sur son graphe. De plus, dans la plupart des cas, il est plus simple de calculer directement les limites que de faire le graphe de la fonction afin de les visualiser.

La façon de calculer une limite dépend du *type de la limite*. C'est la valeur brute que l'on obtient en remplaçant la variable par la valeur vers laquelle tend cette variable : le type d'une limite n'est pas toujours un nombre et il sera noté entre parenthèses.

Quelques types de limites que l'on peut rencontrer :

Pour l'instant, on va se restreindre aux fonctions f qui sont rationnelles (c'est-à-dire $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes), tout simplement parce qu'on n'a pas encore établi la règle de l'Hospital (voir page 228).

Les exemples qui suivent concernent les fonctions rationnelles f_1, f_2 et f_3 définies en page 186 et ne fournissent pas une liste exhaustive des types de limites que l'on va étudier durant cette deuxième année.

1. Les limites du type $(\frac{b}{c})$ avec $b, c \in \mathbb{R}$ et $c \neq 0$.

   Dans ce cas la limite vaut : $\lim\limits_{x\to a} f(x) \overset{(\frac{b}{c})}{=} \frac{b}{c}$.

   En effet, lorsque x s'approche de a, le numérateur s'approche de b et le dénominateur s'approche de c, donc $f(x)$ s'approche de $\frac{b}{c}$ (cette fraction donne un nombre car $b, c \in \mathbb{R}$ et $c \neq 0$).

   Par exemple :

   (a) $\lim\limits_{x\to 3} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{2-x} \overset{(\frac{1}{-1})}{=} \dfrac{1}{-1} = -1.$

   (b) $\lim\limits_{x\to 1} f_2(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{9x^3 - 6x^2 - 20x - 8}{9x^3 - 27x - 18} \overset{(\frac{-25}{-36})}{=} \dfrac{-25}{-36} = \dfrac{25}{36} \cong 0.6944.$

2. Les limites du type $(\frac{b}{0})$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $b \neq 0$.

   Dans ce cas la limite vaut : $\lim\limits_{x\to a} f(x) \overset{(\frac{b}{0})}{=} \pm\infty$.

   En effet, lorsque x s'approche de a, le numérateur s'approche de b, qui est non nul, et le dénominateur s'approche de 0. Or, si on divise un nombre non nul par un nombre qui devient de plus en plus petit (proche de zéro), on obtient un nombre de plus en plus grand. Donc $f(x)$ s'approche de $\pm\infty$ lorsque x tend vers a.

   Par exemple :

   (a) $\lim\limits_{x\to 2} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{2-x} \overset{(\frac{1}{0})}{=} \pm\infty.$

   (b) $\lim\limits_{x\to -1} f_2(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{9x^3 - 6x^2 - 20x - 8}{9x^3 - 27x - 18} \overset{(\frac{-3}{0})}{=} \pm\infty.$

   Remarquons que pour établir les limites à droite et à gauche dans ce cas, il suffit de faire un tableau de signes des fonctions f_1 et f_2.

3. Les limites du type $(\frac{b}{\pm\infty})$ avec $b \in \mathbb{R}$.

   Dans ce cas la limite vaut : $\lim\limits_{x\to a} f(x) \overset{(\frac{b}{\pm\infty})}{=} 0$.

   En effet, lorsque x s'approche de a, le numérateur s'approche de b et le dénominateur s'approche de $\pm\infty$. Or, si on divise un nombre par un nombre qui devient de plus en plus grand (négativement ou positivement), on obtient un nombre de plus en plus petit (proche de zéro). Donc $f(x)$ s'approche de 0 lorsque x tend vers a.

   Par exemple :

   (a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{2-x} \overset{(\frac{1}{\pm\infty})}{=} 0.$

4. Les limites du type $(\frac{0}{0})$.

   Dans ce cas, on ne peut rien dire immédiatement : C'est la pire situation possible !

   Pour une fonction rationnelle, on peut factoriser le numérateur et le dénominateur (puisqu'on sait depuis la première année que si un polynôme s'annule en a alors il se factorise par Horner par $x-a$). Cela permet de se ramener à un autre type de limite et de pouvoir conclure le calcul.

   Par exemple :

   (a)
   $$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} f_2(x) &= \lim_{x\to 2}\frac{9x^3-6x^2-20x-8}{9x^3-27x-18} \underset{\text{Horner}}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x\to 2}\frac{(9x^2+12x+4)(x-2)}{(9x^2+18x+9)(x-2)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{9x^2+12x+4}{9x^2+18x+9} \overset{(\frac{64}{81})}{=} \frac{64}{81}\end{aligned}$$

   (b) $\lim\limits_{x\to 2} f_3(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{|x-2|} \underset{\text{Horner}}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x-2)}{|x-2|}.$

   Ici, à cause de la valeur absolue, il faut examiner la limite à gauche et la limite à droite. Pour cela, on utilise la simplification suivante :

   $$\frac{(x-1)(x-2)}{|x-2|} = \begin{cases} -(x-1) & \text{si} \quad x<2 \\ x-1 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

   On peut donc calculer les limites à gauche et à droite et affirmer que la limite n'existe pas.

   $$\lim_{x\overset{<}{\to}2} f_3(x) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\overset{>}{\to}2} f_3(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 2} f_3(x) \text{ n'existe pas}$$

5. Les limites du type $(\frac{\pm\infty}{\pm\infty})$.

   Pour les fonctions rationnelles, ces types de limites seront étudiés dans la section sur les comportements à l'infini en page 193.

12.3 Propriétés des limites

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a, a et λ deux nombres réels. Le lecteur pourra aussi remplacer a par $+\infty$ ou par $-\infty$ dans les écritures ci-dessous.

Addition et soustraction de fonctions

Si toutes les limites ci-dessous existent, alors on a la propriété suivante.

$$\boxed{\lim_{x\to a}\Big(f(x)\pm g(x)\Big)=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)}$$

Multiplication d'une fonction par un nombre

Si toutes les limites ci-dessous existent, alors on a la propriété suivante.

$$\boxed{\lim_{x\to a}\Big(\lambda f(x)\Big)=\lambda\cdot\lim_{x\to a}f(x)}$$

Multiplication de deux fonctions

Si toutes les limites ci-dessous existent, alors on a la propriété suivante.

$$\boxed{\lim_{x\to a}\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)}$$

Division d'une fonction par une autre

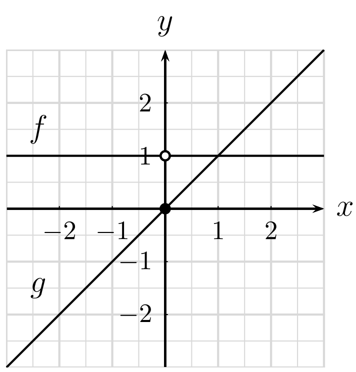
Si toutes les limites ci-dessous existent, alors on a la propriété suivante.

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)}{\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)}\qquad\text{si }\lim_{x\to a}g(x)\neq 0\text{ et si }g(x)\neq 0\text{ pour }x\text{ proche de }a}$$

Remarque pour la composition de fonction

Même si les limites existent et que les fonctions peuvent être composées, IL N'Y A PAS DE PROPRIÉTÉ DES LIMITES POUR LA COMPOSITION DE FONCTIONS. En effet, il existe des exemples qui montrent que

$$\lim_{x\to a}f\big(g(x)\big)\neq f\Big(\lim_{x\to a}g(x)\Big)$$



La fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

et la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x\mapsto x$ donnent un tel exemple car

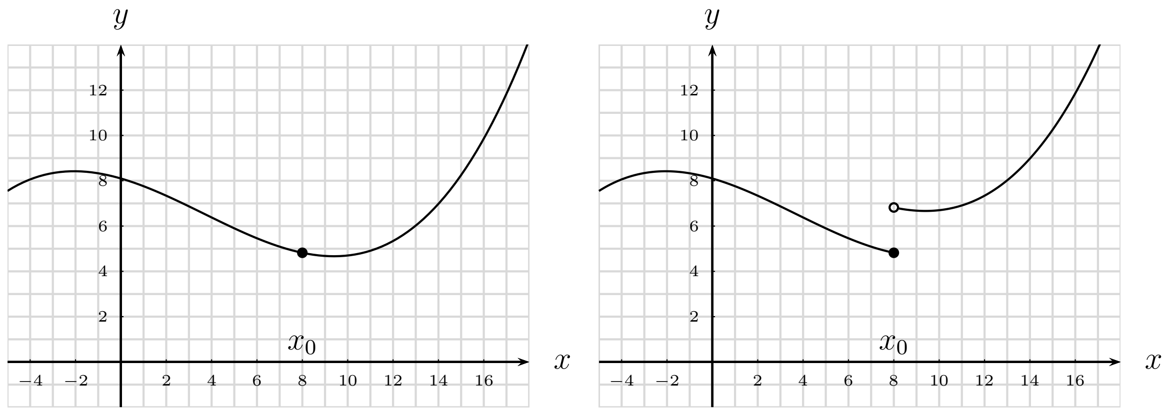
$$1=\boxed{\lim_{x\to 0}f(g(x))\neq f\Big(\lim_{x\to 0}g(x)\Big)}=f(0)=0$$

Il y a néanmoins un moyen d'avoir une propriété des limites pour la composition de fonctions si les fonctions sont continues et si a est choisi dans le domaine de définition des fonctions dont on calcule la limite. La continuité est définie dans la section suivante.

12.4 Continuité d'une fonction

Intuitivement, on dit qu'une fonction réelle est continue si on peut dessiner son graphe (au dessus de son domaine de définition) sans lever le crayon. Mais on peut définir formellement la continuité[4] grâce aux limites.

Voici le graphe d'une fonction continue et le graphe d'une fonction non continue.



On voit que sur le graphe de gauche la fonction est continue, tandis qu'elle ne l'est pas sur le graphe de droite. En effet, en $x_0 = 8$, la fonction effectue un saut.

La limite est une notion permettant de vérifier si une fonction saute ou non en un point.

Définitions

Ci-dessous, le symbole Δx signifie «petite différence pour x». Δx est analoque au prénom «Jean-Pierre» : ils sont non séparables ! Il ne faut pas comprendre Δx comme «Δ fois x».

1. On dit que *la fonction f est continue en $x_0 \in D$* lorsque

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\big(\lim_{x\to x_0} x\big) \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{ou} \quad \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0)$$

2. On dit que *la fonction f est continue à gauche de $x_0 \in D$* lorsque

$$\lim_{x\overset{<}{\to} x_0} f(x) = f\big(\lim_{x\overset{<}{\to} x_0} x\big) \quad \text{ou} \quad \lim_{x\overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{ou} \quad \lim_{\Delta x\overset{<}{\to} 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0)$$

3. On dit que *la fonction f est continue à droite de $x_0 \in D$* lorsque

$$\lim_{x\overset{>}{\to} x_0} f(x) = f\big(\lim_{x\overset{>}{\to} x_0} x\big) \quad \text{ou} \quad \lim_{x\overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{ou} \quad \lim_{\Delta x\overset{>}{\to} 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0)$$

On voit ci-dessus que la fonction de gauche est continue (à gauche et à droite) en $x_0 = 8$. La fonction de droite, quant à elle, est continue à gauche, mais pas à droite.

Définition

On dit qu'une fonction $f : D \to A$ est *continue* lorsqu'elle est continue en tout point de son domaine de définition D.

4. La définition qui suit est en fait la définition de la continuité séquentielle. Mais, dans les espaces métriques (l'ensemble $\mathbb{R}$ est un espace métrique), cette définition est équivalente à celle en ε-δ (bien plus complexe à comprendre) que l'on peut trouver dans certains livres.

12.5 Comportement asymptotique des fonctions continues (par morceaux)

12.5.1 Comportement local

1. Lorsqu'on étudie le comportement local d'une fonction continue, seul le bord du domaine de définition est important !
2. Lorsqu'on étudie le comportement local d'une fonction définie par morceaux, continue sur chaque morceau, seule la réunion des bords des domaines de définition de chaque morceau est importante !

Définitions : les asymptotes verticales, les trous et les sauts

On considère une fonction réelle $f : D \to A$ (avec D, $A \subset \mathbb{R}$).

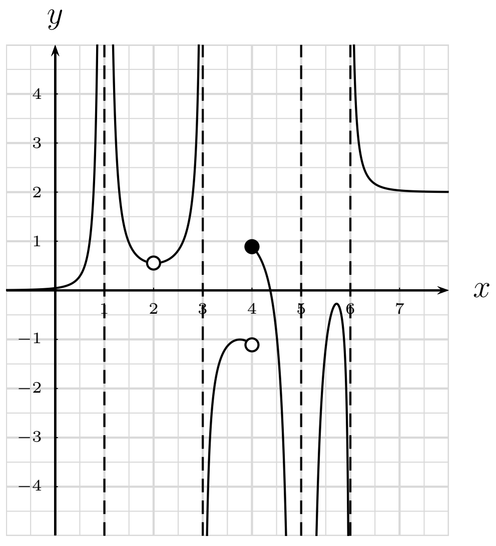
On suppose que la fonction f n'est pas continue en x_0 (x_0 n'est pas forcément dans D).

1. On dit que f a une *asymptote verticale* d'équation $x = x_0$ si
$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \pm\infty$$
2. On dit que f a un *trou* en $(x_0; a)$ si $x_0 \notin D$ et s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$
3. On dit que f a un *saut* en x_0 dans tous les autres cas.

Illustration

Voici le graphe d'une fonction qui n'est pas continue sur son domaine de définition ($D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, 5, 6\}$), mais qui est continue sur chacun de ses deux morceaux. Elle est définie comme suit :

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1,2,3,5,6\} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \begin{cases} \frac{20(x-2)}{(x-1)^2(x-2)(x-3)(x-5)^2(x-6)} & \text{si } x < 4 \\ \frac{20(x-2)}{(x-1)^2(x-2)(x-3)(x-5)^2(x-6)} + 2 & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$



Dans cette illustration, on voit quatre asymptotes verticales (qui ont toute un comportement différent) dont les équations sont $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$ et $x = 6$.

On a aussi un trou en $(2; \frac{5}{9})$, puisque les limites à gauche et à droite existent et valent les deux $\frac{5}{9}$.

On remarque encore un saut en $x = 4$, puisque la limite à gauche n'est pas égale à $f(4)$. La fonction n'est donc pas continue en $x = 4$.

12.5.2 Comportement à l'infini des fonctions rationnelles

Constatations

Lorsque x devient très grand (négativement ou positivement), autrement dit lorsque $x \to \pm\infty$. Alors :

$$\begin{array}{rll} x & \text{devient négligeable par rapport à} & x^2,\, x^3,\, \ldots \\ x^2 & \text{devient négligeable par rapport à} & x^3,\, x^4,\, \ldots \\ x^3 & \text{devient négligeable par rapport à} & x^4,\, x^5,\, \ldots \\ & \text{etc}\ldots & \end{array}$$

Par conséquent

On peut donc calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{12x^3 \overbrace{+15x^2 - 103}^{\text{devient négligeable par rapport à } 12x^3}}{3x^4 \underbrace{-21x^2 + 55}_{\text{devient négligeable par rapport à } 3x^4}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{12x^3}{3x^4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{7x^4 + 16x^3 - 2}{2x^4 + x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{7x^4}{2x^4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^5 + 19x^4 - 7}{4x^4 + 4x^3 + 3x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^5}{4x^4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{4} = \pm\infty$$

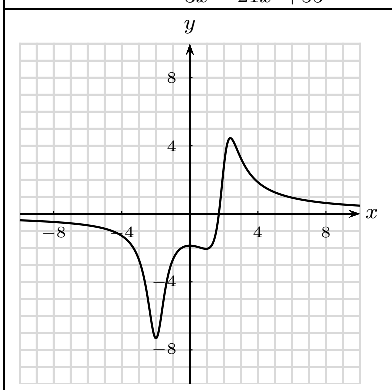
En résumé

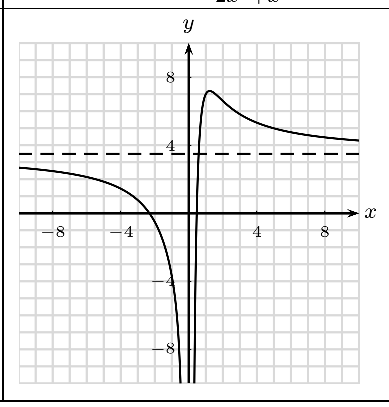
On a

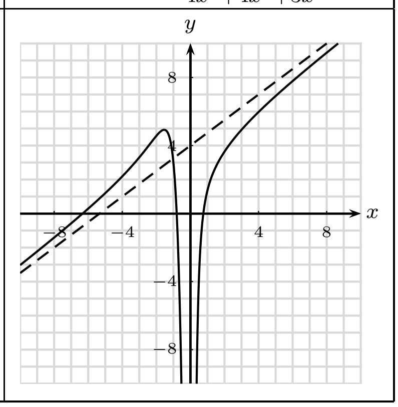
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n}$$

Voici les graphes de ces trois fonctions où l'on découvre les trois types de comportement qui vont nous intéresser.

$f_1(x) = \frac{12x^3+15x^2-103}{3x^4-21x^2+55}$	$f_2(x) = \frac{7x^4+16x^3-2}{2x^4+x^2}$	$f_3(x) = \frac{3x^5+19x^4-7}{4x^4+4x^3+3x^2}$





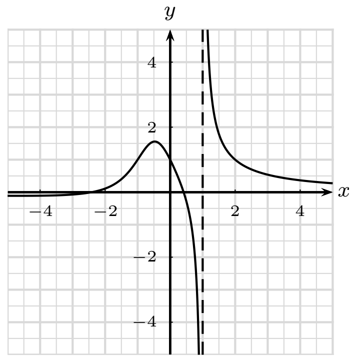
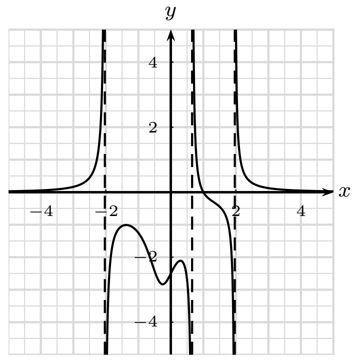
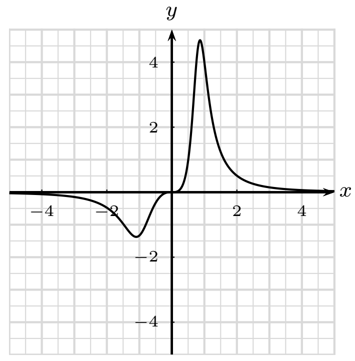


On a donc trois possibilités pour une fonction rationnelle.

1. **Le degré du numérateur est plus petit que celui du dénominateur.**
   C'est le cas pour les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^3-1} \qquad f_2(x) = \frac{x^3+4x-5}{2x^5-8x^3+2} \qquad f_3(x) = \frac{4x^4}{x^7-x^2+x}$$

   Pour toutes ces fonctions, on a $\lim_{x\to\pm\infty} f_i(x) = 0$. Cela signifie que lorsque x devient très grand, la fonction se rapproche de 0. En termes techniques, on dit que la fonction admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

$f_1(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^3-1}$	$f_2(x) = \frac{x^3+4x-5}{2x^5-8x^3+2}$	$f_3(x) = \frac{4x^4}{x^7-x^2+x}$
		

2. **Le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur.**
   C'est le cas pour les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^2+1} \qquad f_2(x) = \frac{7x^3+4x^2-3}{3x^3-5x^2+3x} \qquad f_3(x) = \frac{-5x^7+x^4-1}{2x^7+x^2-2x}$$

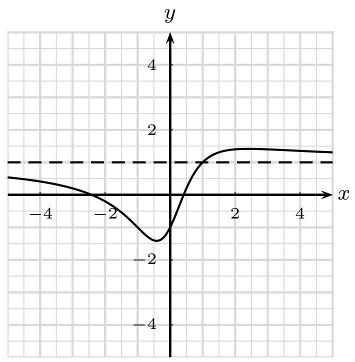
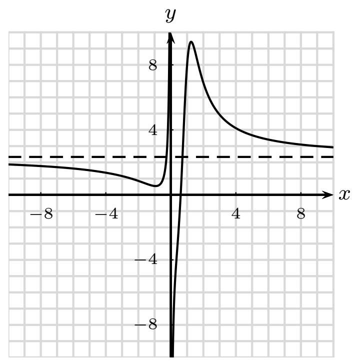
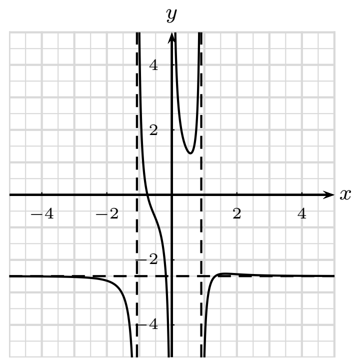
   On a

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_1(x) = 1 \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f_2(x) = \frac{7}{3} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f_3(x) = -\frac{5}{2}$$

   Pour toutes ces fonctions, on a

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_i(x) = \text{nombre non nul}$$

   Cela signifie que lorsque x devient très grand, la fonction se rapproche d'un nombre h non nul. En termes techniques, on dit que la fonction admet une asymptote horizontale d'équation $y = h$.

$f_1(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^2+1}$	$f_2(x) = \frac{7x^3+4x^2-3}{3x^3-5x^2+3x}$	$f_3(x) = \frac{-5x^7+x^4-1}{2x^7+x^2-2x}$
		

3. **Le degré du numérateur est plus grand que celui du dénominateur.**

   (a) **Le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur plus 1.**

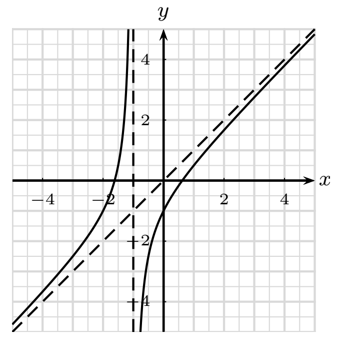
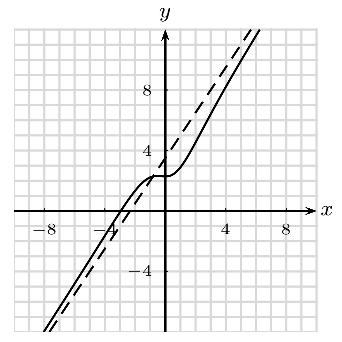
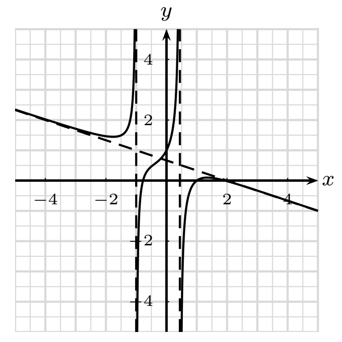
   C'est le cas pour les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x^2+x-1}{x+1} \qquad f_2(x) = \frac{3x^3+7x^2+16}{2x^2+7} \qquad f_3(x) = \frac{-x^5+2x^4-1}{3x^4+2x-1}$$

On a

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_1(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f_2(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{2} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f_3(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{3}$$

Cela signifie que lorsque x devient très grand, la fonction se comporte comme une droite. En termes techniques, on dit que la fonction admet une asymptote oblique d'équation $y = mx + h$. C'est une droite de pente m et de hauteur h.

$f_1(x) = \frac{x^2+x-1}{x+1}$	$f_2(x) = \frac{3x^3+7x^2+16}{2x^2+7}$	$f_3(x) = \frac{-x^5+2x^4-1}{3x^4+2x-1}$
		

Dans ce cas, on peut écrire la fonction différemment en faisant une division euclidienne.

La division euclidienne de x^2+x-1 par $x+1$ donne :

$$x^2+x-1 = (x+1)x - 1$$

En divisant cette expression par $(x+1)$, cela permet d'écrire $f_1(x)$ autrement :

$$f_1(x) = \frac{x^2+x-1}{x+1} = \overbrace{x}^{\text{asymptote oblique}} - \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\text{tend vers 0 lorsque } x\to\pm\infty}$$

Ainsi, lorsque $x \to \pm\infty$, $f_1(x)$ s'approche de son asymptote oblique $y = x$.

Pour f_2, on trouve par division euclidienne que :

$$f_2(x) = \frac{3x^3+7x^2+16}{2x^2+7} = \overbrace{\tfrac{3}{2}x+\tfrac{7}{2}}^{\text{asymptote oblique}} - \underbrace{\frac{21x+17}{2(2x^2+7)}}_{\text{tend vers 0 lorsque } x\to\pm\infty}$$

Pour f_3, on trouve par division euclidienne que :

$$f_3(x) = \frac{-x^5+2x^4-1}{3x^4+2x-1} = \overbrace{-\tfrac{1}{3}x+\tfrac{2}{3}}^{\text{asymptote oblique}} + \underbrace{\frac{2x^2-5x-1}{3(3x^4+2x-1)}}_{\text{tend vers 0 lorsque } x\to\pm\infty}$$

On peut aussi trouver l'asymptote oblique avec une méthode plus générale, en utilisant les formules suivantes pour trouver la pente m et la hauteur h de l'asymptote oblique ($y = mx + h$).

$$\boxed{m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad h = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - mx\big)}$$

Pour f_1, on trouve l'asymptote $y = x$ en effectuant le calcul suivant :

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x-1}{x^2+x} = 1$$

et

$$\begin{aligned}
h &= \lim_{x\to\pm\infty} (f_1(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+x-1}{x+1} - x\right) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+x-1}{x+1} - \frac{x(x+1)}{x+1}\right) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x-1-x(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1}{x+1} = 0
\end{aligned}$$

Pour f_2, on trouve l'asymptote $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$ en effectuant le calcul suivant :

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3+7x^2+16}{2x^3+7x} = \frac{3}{2}$$

et

$$\begin{aligned}
h &= \lim_{x\to\pm\infty} (f_2(x) - \tfrac{3}{2}x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3x^3+7x^2+16}{2x^2+7} - \tfrac{3}{2}x\right) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3x^3+7x^2+16}{2x^2+7} - \frac{\frac{3}{2}x(2x^2+7)}{2x^2+7}\right) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3+7x^2+16-\frac{3}{2}x(2x^2+7)}{2x^2+7} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{7x^2-\frac{21}{2}x+16}{2x^2+7} = \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Pour f_3, on trouve l'asymptote $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ en effectuant le calcul suivant :

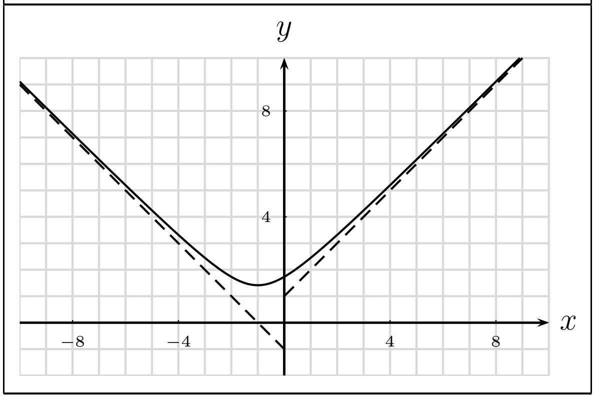
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f_3(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^5+2x^4-1}{3x^5+2x^2-x} = -\frac{1}{3}$$

et

$$\begin{aligned}
h &= \lim_{x\to\pm\infty} (f_3(x) + \tfrac{1}{3}x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{-x^5+2x^4-1}{3x^4+2x-1} + \tfrac{1}{3}x\right) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{-x^5+2x^4-1}{3x^4+2x-1} + \frac{\frac{1}{3}x(3x^4+2x-1)}{3x^4+2x-1}\right) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^5+2x^4-1+\frac{1}{3}x(3x^4+2x-1)}{3x^4+2x-1} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3}x-1}{3x^4+2x-1} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

L'avantage de ces deux formules est qu'elles s'appliquent aussi lorsque la fonction n'est pas rationnelle. Par exemple, pour la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

$f_1(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$



Pour trouver les asymptotes obliques de cette fonction, il faut utiliser les formules

$$\boxed{m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}}$$

et

$$\boxed{h = \lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - mx\big)}$$

Cette fonction admet une asymptote oblique à gauche d'équation $y = -x - 1$ et une asymptote oblique à droite d'équation $y = x + 1$.

(b) **Le degré du numérateur est plus grand que celui du dénominateur plus 1.** Dans ce cas, il n'y a pas d'asymptote oblique. Néanmoins, il y a une asymptote polynomiale de degré $\geqslant 2$ (en fait le degré est égal au degré du numérateur moins celui du dénominateur). Par curiosité, examinons le comportement de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{x^3(x-3)}{2(x-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{2x^2 - 4x + 2}$$

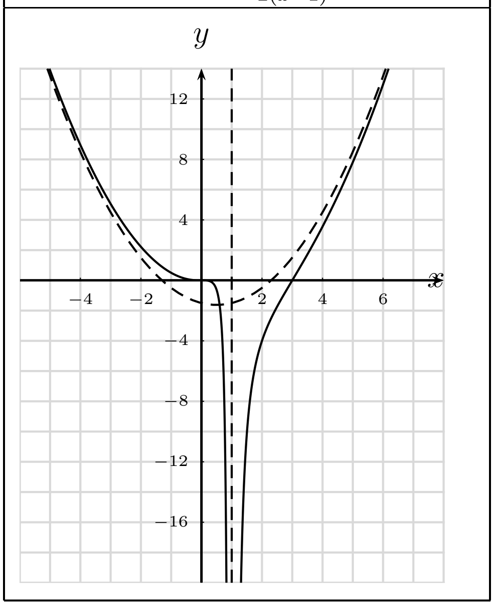
Pour cette fonction, on a :

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$$

Cela signifie que lorsque x devient très grand, la fonction se comporte comme une parabole. En termes techniques, on dit que la fonction admet une asymptote parabolique d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

Cette fonction admet l'asymptote parabolique $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

$f(x) = \frac{x^3(x-3)}{2(x-1)^2}$



Pour trouver l'asymptote parabolique de cette fonction, il faut utiliser les formules (ces formules sont données à titre culturel, il n'y a pas besoin de les connaître)

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x^2}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x) - ax^2}{x}$$

et

$$c = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (ax^2 + bx))$$

On aurait aussi pu effectuer une division euclidienne.

12.5.3 Comportement à l'infini des fonctions non rationnelles

La plupart du temps, il faudra séparer l'étude du comportement à l'infini en deux.

1. Cas où $x \to -\infty$ (à n'effectuer que si $-\infty$ est dans le bord du domaine de définition).

   Il y a principalement deux cas à distinguer.

   (a) S'il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$
   Alors, il y a une asymptote horizontale à gauche d'équation $y = a$.

   (b) Si
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$$
   Alors il *est possible qu'il y ait une asymptote oblique à gauche*, mais ce n'est pas forcément le cas. Il faut alors utiliser les formules suivantes pour décider s'il y a une asymptote oblique à gauche d'équation $y = mx + h$.
   $$\boxed{m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad h = \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - mx\big)}$$
   En effet, si la fonction n'est pas rationnelle, alors on ne peut pas effectuer de division euclidienne et on est donc obligé d'utiliser ces formules.

   Dans le cas où l'asymptote serait parabolique, on utiliserait les formules de la page précédente.

2. Cas où $x \to +\infty$ (à n'effectuer que si $+\infty$ est dans le bord du domaine de définition).

   Il y a principalement deux cas à distinguer.

   (a) S'il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$$
   Alors, il y a une asymptote horizontale à droite d'équation $y = a$.

   (b) Si
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$$
   Alors il *est possible qu'il y ait une asymptote oblique à droite*, mais ce n'est pas forcément le cas. Il faut alors utiliser les formules suivantes pour décider s'il y a une asymptote oblique à droite d'équation $y = mx + h$.
   $$\boxed{m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad h = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big)}$$
   En effet, si la fonction n'est pas rationnelle, alors on ne peut pas effectuer de division euclidienne et on est donc obligé d'utiliser ces formules.

   Dans le cas où l'asymptote serait parabolique, on utiliserait les formules de la page précédente.

Or, la plupart des calculs de ces limites nécessitent l'utilisation de la règle de l'Hospital (voir page 228).

12.5.4 Compléments sur le comportement asymptotique à l'infini

Définition

On dit que f et g ont le *même comportement asymptotique à l'infini* lorsque

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-g(x)\big)=0$$

Si tel est le cas et que g est une droite définie par $y=mx+h$ avec $m\neq 0$, alors on dit que la droite $y=mx+h$ est une *asymptote oblique* de f. Lorsque $m=0$, on parle d'*asymptote horizontale.*

Remarque Lorsque $x\to+\infty$, on parle de *comportement asymptotique à droite* ou d'*asymptote oblique ou horizontale à droite.* Lorsque $x\to-\infty$, on parle de *comportement asymptotique à gauche* ou d'*asymptote oblique ou horizontale à gauche.*

Les formules pour les asymptotes horizontales, obliques et paraboliques

Lorsqu'il y a une asymptote oblique ou horizontale d'équation $y=mx+h$, on peut trouver un moyen de la détecter même si la fonction f n'est pas une fonction rationnelle. Il en va de même dans le cas d'une asymptote parabolique d'équation $y=ax^2+bx+c$.

On obtient ainsi une méthode plus générale que la division euclidienne puisqu'elle fonctionne aussi pour les fonctions qui ne sont pas rationnelles.

Théorème de l'asymptote horizontale

La droite $y=h$ est une asymptote horizontale de f si et seulement si la limite suivante qui donne h existe dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{h=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)}$$

Preuve

"$\Rightarrow$" On suppose que la droite $y=h$ est une asymptote horizontale de f. On doit montrer qu'on a bien la formule donnée pour h.

Par hypothèse, on peut écrire

$$f(x)=h+d(x)\quad\text{avec}\quad\lim_{x\to\pm\infty}d(x)=0\ (\bigstar)$$

où $d(x)$ est la distance verticale signée en x qui sépare f de son asymptote.

En effet,

$$\lim_{x\to\pm\infty}d(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-h\big)\overset{\text{hypothèse}}{=}0$$

On a ainsi

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)\ =\ \lim_{x\to\pm\infty}\big(h+d(x)\big)\overset{(\bigstar)}{=}h+0\ =\ h$$

"$\Leftarrow$" On suppose que la limite donnée existe dans $\mathbb{R}$ et on montre que $y=h$ est une asymptote horizontale.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-h\big)=\overbrace{\lim_{x\to\pm\infty}f(x)}^{=h}-h=0$$

□

Théorème de l'asymptote oblique

La droite $y = mx + h$ est une asymptote oblique de f si et seulement si les limites suivantes qui donnent m et h existent dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}} \quad \text{et} \quad \boxed{h = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - mx\big)}$$

Dans le cas particulier où $m = 0$, on retombe sur l'énoncé du théorème de l'asymptote horizontale (si h existe).

Preuve

"$\Rightarrow$" On suppose que la droite $y = mx + h$ est une asymptote oblique de f. On doit montrer qu'on a bien les formules données pour m et h.

Par hypothèse, on peut écrire

$$f(x) = mx + h + d(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to\pm\infty} d(x) = 0 \ (\bigstar)$$

où $d(x)$ est la distance verticale signée en x qui sépare f de son asymptote.

En effet,
$$\lim_{x\to\pm\infty} d(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - (mx + h)\big) \overset{\text{hypothèse}}{=} 0$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{mx + h + d(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(m + \frac{h}{x} + \frac{d(x)}{x}\right) \\ &= m + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{h}{x} + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{d(x)}{x} \overset{(\bigstar)}{=} m + 0 + 0 = m\end{aligned}$$

En effet, la limite $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{d(x)}{x}$ est du type $(\frac{0}{\pm\infty})$, elle vaut bien 0.

On a aussi

$$\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \big(mx + h + d(x) - mx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \big(h + d(x)\big) \overset{(\bigstar)}{=} h + 0 = h$$

"$\Leftarrow$" On suppose que les limites données existent dans $\mathbb{R}$ et on montre que $y = mx + h$ est une asymptote oblique.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - (mx + h)\big) = \overbrace{\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - mx\big)}^{=h} - h = 0$$

Même si on a l'impression de n'avoir eu besoin que de la limite qui définit h, on a aussi implicitement utilisé l'existence de m. $\square$

Théorème de l'asymptote parabolique

La parabole $y = ax^2 + bx + c$ est une asymptote parabolique de f si et seulement si les limites suivantes qui donnent a, b et c existent dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x^2}}, \quad \boxed{b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x) - ax^2}{x}} \quad \text{et} \quad \boxed{c = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - (ax^2 + bx)\big)}$$

Dans le cas particulier où $a = 0$, on retombe sur l'énoncé du théorème de l'asymptote oblique (si b et c existent).

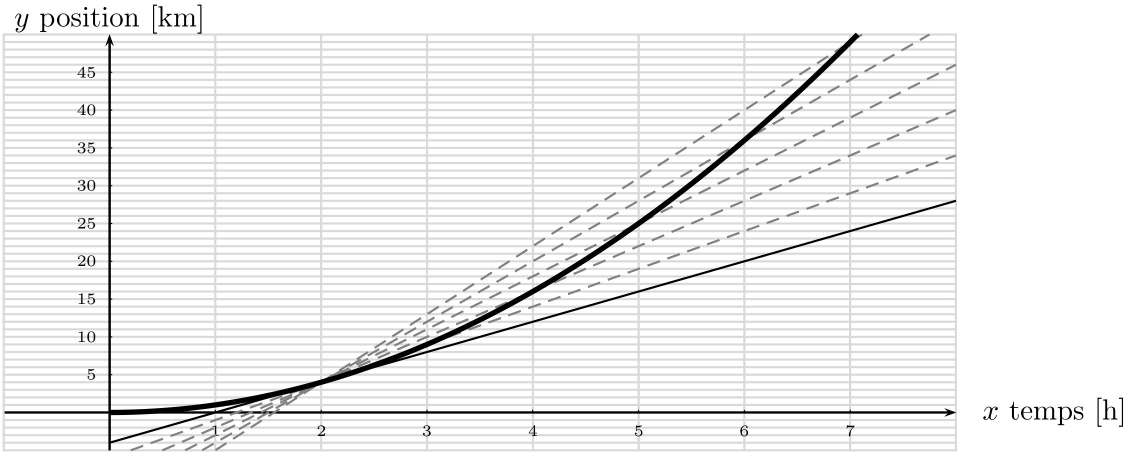
Chapitre 13

Dérivation

13.1 La dérivée en un point d'une fonction

De la vitesse instantanée en physique...

Lorsqu'on désire calculer la vitesse instantanée d'un objet, on calcule la vitesse moyenne de cet objet entre deux instants de plus en plus proche.



Sur le dessin ci-dessus, la position de l'objet est donnée par la fonction $f(x) = x^2$.

La vitesse moyenne entre 2 heures et 7 heures est indiquée par la pente de la sécante passant par les deux points $(2; 4)$ et $(7; 49)$. Cette pente vaut $\frac{45}{5} = 9$, ce qui donne une vitesse moyenne de 9 km/h.

Rappelons que la vitesse moyenne (ou pente de la sécante) est calculée ainsi

$$\frac{\text{variation de la position [km]}}{\text{variation du temps [h]}} = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}} = \frac{49-4}{7-2} = 9$$

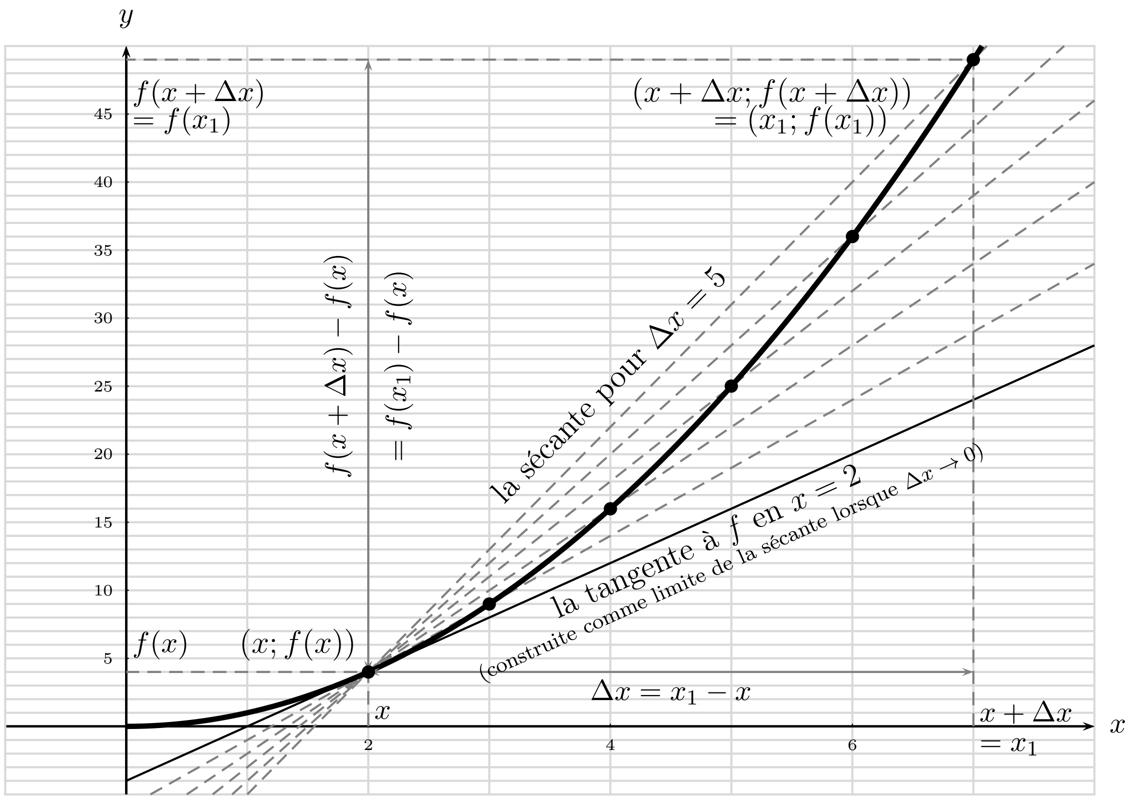
Mais si on est intéressé par la vitesse instantanée en $x = 2$ heures, il faut glisser le deuxième point vers le premier point (correspondant à 2 heures).

> De 2 à 6 heures, la vitesse moyenne est de $\frac{32}{4} = 8$ km/h ; de 2 à 5 heures, elle est de $\frac{21}{3} = 7$ km/h ; de 2 à 4 heures, elle est de $\frac{12}{2} = 6$ km/h ; de 2 à 3 heures, elle est de $\frac{5}{1} = 5$ km/h (voir droites en traitillés).

Plus on prend le deuxième temps proche de 2 heure, plus la vitesse moyenne va se rapprocher de la vitesse instantanée qui, on le devine, vaut 4 km/h.

...à la dérivée en mathématique

Dans le contexte mathématique, les expressions «vitesse moyenne» et «vitesse instantanée» sont remplacées par «pente de la sécante» et «pente de la tangente».
On retrouve aussi le symbole «Δx» présenté en page 191.



Idée principale : la tangente à f en x est construite comme la limite de la sécante qui passe par les points $(x; f(x))$ et $(x+\Delta x; f(x+\Delta x)) = (x_1; f(x_1))$ lorsque Δx tend vers 0 (ou x_1 tend vers x). Ainsi le deuxième point glisse vers le point $(x; f(x))$ qui est fixe.

$$\begin{array}{c}\text{pente de}\\ \text{cette sécante}\end{array} = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

En prenant la limite lorsque Δx tend vers 0 (ou x_1 tend vers x), on trouve la *pente de la tangente à f en x*. Cette pente est appelée la *dérivée de f au point x* et est notée $f'(x)$.

$$\boxed{f'(x) \text{ est la pente de la tangente au graphe de la fonction } f \text{ en } x}$$

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \qquad \boxed{f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}}$$

Appliquons cette formule pour calculer la pente de la tangente en $x = 2$.
D'abord, on cherche $f'(x)$ et ensuite on remplace x par 2. Rappelons qu'ici $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Big(2x + \Delta x\Big) = 2x$$

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{x_1^2 - x^2}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{(x_1 - x)(x_1 + x)}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \to x} \Big(x_1 + x\Big) = 2x$$

En général, avec la formule en Δx, il faut distribuer ; avec celle en x_1, il faut factoriser.
Ainsi, la vitesse instantanée en $x = 2$ heures vaut $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ km/h.

13.2 La dérivée d'une fonction

Soit $f : D \to A$ une fonction. On dit que f est *dérivable* si la dérivée de f en chaque point $x \in D$ existe. Dans ce cas, on peut parler de la *(fonction) dérivée de* f. C'est la fonction définie par $f' : D \to \mathbb{R}; x \mapsto f'(x)$ où

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \qquad \left(= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x \ - \ x}\right)$$

Remarquons que si cette limite existe, alors

$$\lim_{\Delta x \to 0} \big(f(x + \Delta x) - f(x)\big) = 0$$

En effet, puisque le dénominateur, Δx tend vers 0 (lorsque Δx tend vers 0), il faut que la limite du numérateur existe et soit nulle pour que la limite existe (car sinon, la limite est de la forme $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}$).

La condition ci-dessus est équivalente à la condition suivante.

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$$

C'est la continuité de f au point x.

On vient donc de montrer que

$$f \text{ est dérivable en } x \implies f \text{ est continue en } x$$

Donc

$$\boxed{f : D \to \mathbb{R} \text{ est dérivable} \implies f : D \to \mathbb{R} \text{ est continue}}$$

La réciproque n'est pas vraie, car toute fonction continue n'est pas forcément dérivable. En d'autres termes :

$$\boxed{f : D \to \mathbb{R} \text{ est dérivable} \not\Longleftarrow f : D \to \mathbb{R} \text{ est continue}}$$

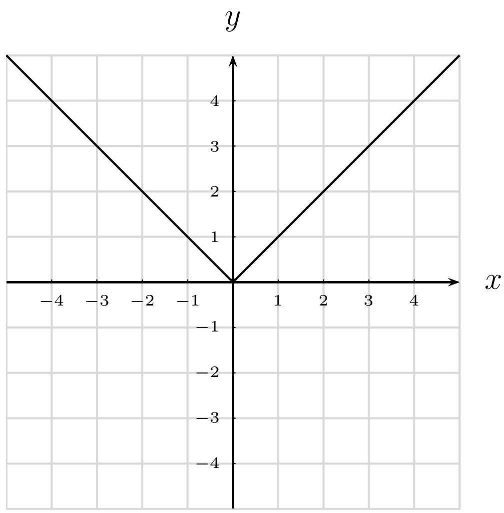
En effet, la valeur absolue est continue en tout point, mais elle n'est pas dérivable en 0 !

En regardant ce qui se passe en 0 depuis la gauche, on trouve

$$\lim_{\Delta x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \overset{<}{\to} 0} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \overset{<}{\to} 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

Tandis que depuis la droite, on a

$$\lim_{\Delta x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \overset{>}{\to} 0} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \overset{>}{\to} 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$



Ainsi, la limite $f'(0)$ n'existe pas (elle ne peut pas être égale à -1 et à 1 en même temps !).

En fait, toutes les fonctions avec des pointes (lieu où la pente instantanée passe d'un extrême à un autre) ne sont pas dérivables (en ces points).

13.2.1 Premiers exemples

La dérivée de la fonction $f(x) = x^2$ vient d'être vue. Cherchons la dérivée d'autres fonctions.

1. La dérivée de la fonction $f(x) = x$ est $f'(x) = 1$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{x_1 - x}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \to x} 1 = 1$$

2. La dérivée de la fonction constante $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, est nulle : $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{c - c}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \to x} 0 = 0$$

Deux résultats démontrés en exercice

Si $f(x) = x^3$ et $g(x) = \frac{1}{x}$, alors

$$f'(x) = 3x^2 \quad \text{et} \quad g'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

13.3 Équation de la tangente au graphe d'une fonction

Soit D et A des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On considère une fonction réelle $f : D \to A$ qui est dérivable sur un intervalle contenant $x_0 \in D$.

L'équation de la *tangente au graphe de f en x_0* est donné par l'équation cartésienne

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)} = \underbrace{f'(x_0)}_{=m}\, x + \underbrace{\Big(f(x_0) - f'(x_0)x_0\Big)}_{=h}$$

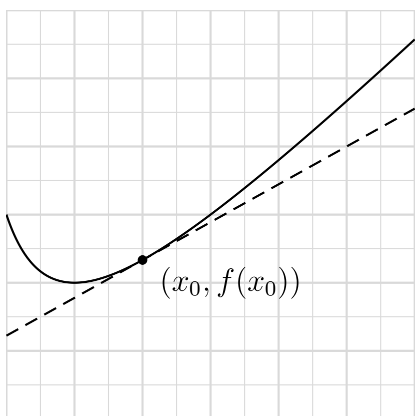
Preuve

1. La tangente est une droite passant par $\big(x_0; f(x_0)\big)$.

   Ainsi, son expression est $y = f(x_0) + m(x - x_0)$ (voir la page 148).

2. La pente de la tangente en $x = x_0$ est, par définition, la dérivée $f'(x_0)$.

   Ainsi, dans l'expression $y = f(x_0) + m(x - x_0)$, m représente la pente (car c'est le coefficient de x). Ainsi $m = f'(x_0)$.



Par conséquent, l'équation de la tangente est bien

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

□

13.4 Règles de dérivations

13.4.1 Règle de la somme et de la soustraction

Soit f et g deux fonctions dérivables dont les domaines de définition et d'arrivée sont les mêmes. Il est naturel de définir les fonctions $f+g$ et $f-g$ comme suit

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

Cherchons à exprimer la dérivée de $(f+g)$ ou de $(f-g)$ en fonction de la dérivée de f et de celle de g. Pour cela, on utilise la définition de la dérivée.

$$\begin{aligned}
(f \pm g)'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f \pm g)(x+\Delta x) - (f \pm g)(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x) - (f(x) \pm g(x))}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x) \pm \big(g(x+\Delta x) - g(x)\big)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) \\
&= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}_{=f'(x)} \pm \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}_{=g'(x)} \\
&= f'(x) \pm g'(x) \ = \ (f' \pm g')(x)
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{(f \pm g)' = f' \pm g'} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)}$$

13.4.2 Règle de la multiplication par un nombre

Soit f une fonction dérivable et λ un nombre réel. Il est naturel de définir la fonction λf comme suit

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Cherchons à exprimer la dérivée de (λf) en fonction de la dérivée de f. Pour cela, on utilise la définition de la dérivée.

$$\begin{aligned}
(\lambda f)'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\lambda f)(x+\Delta x) - (\lambda f)(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\lambda f(x+\Delta x) - \lambda f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\lambda\big(f(x+\Delta x) - f(x)\big)}{\Delta x} = \lambda \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}_{=f'(x)} \\
&= \lambda f'(x) \ = \ (\lambda f')(x)
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{(\lambda f)' = \lambda f'} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)}$$

13.4.3 Règle du produit

Soit f et g deux fonctions dérivables dont les domaines de définition et d'arrivée sont les mêmes. Il est naturel de définir la fonction fg comme suit

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

Cherchons à exprimer la dérivée de (fg) en fonction de la dérivée de f et de celle de g. Pour cela, on utilise la définition de la dérivée.

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(fg)(x+\Delta x)-(fg)(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)\ \overbrace{-f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)}^{=0}-f(x)g(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\big(f(x+\Delta x)-f(x)\big)g(x+\Delta x)+f(x)\big(g(x+\Delta x)-g(x)\big)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x)\ +\ f(x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)\\
&= \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}_{=f'(x)}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)}_{=g(x)\text{ (car } g \text{ est continue)}}+f(x)\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}_{=g'(x)}\\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{(fg)' = f'g + fg'} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

13.4.4 Règle de la composition ou de la dérivation en cascade

Soit f et g deux fonctions dérivables telles que le domaine d'arrivée de g soit le domaine de définition de f afin que l'on puisse parler de la fonction composée $f \circ g$ qui est définie comme suit.

$$(f\circ g)(x) = f(g(x))$$

La règle est la suivante :

$$\boxed{(f\circ g)' = (f'\circ g)\cdot g'} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\Big(f(g(x))\Big)' = f'(g(x))\cdot g'(x)}$$

Dans ce contexte, la dérivée $g'(x)$ est appelé *dérivée interne*, car dans $(f\circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$, g est à l'intérieur de f.

Par exemple, pour calculer la dérivée de $\frac{1}{x^2}$, on remarque que la fonction f correspond à la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ (car la dernière opération que l'on fait pour calculer $\frac{1}{x^2}$ c'est une inversion (touche $\boxed{x^{-1}}$ sur la calculatrice)) et que la fonction g correspond à $g(x) = x^2$, de sorte que

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2) = \frac{1}{x^2}$$

Ainsi

$$(f \circ g)'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = \underbrace{-\frac{1}{(x^2)^2}}_{=f'(g(x))} \cdot \underbrace{2x}_{=g'(x)} = -\frac{2}{x^3}$$

Preuve de la formule annoncée

Montrons cette formule de dérivation en chaîne à l'aide de la définition de la dérivée.

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= \lim_{x_1 \to x} \frac{(f \circ g)(x_1) - (f \circ g)(x)}{x_1 - x} \\ &= \lim_{x_1 \to x} \frac{f\big(g(x_1)\big) - f\big(g(x)\big)}{x_1 - x}\end{aligned}$$

Ici, pour se décoincer, on a besoin d'une astuce : afin de faire apparaître la dérivée de g, on va amplifier la fraction ci-dessus par $g(x_1)-g(x)$ (à condition que lorsque x_1 est proche de x (mais pas égal à x), $g(x_1) - g(x)$ ne s'annule pas ; dans le cas contraire, le lecteur est prié de se référer à la remarque de la page suivante).

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= \lim_{x_1 \to x} \left(\frac{f\big(g(x_1)\big) - f\big(g(x)\big)}{x_1 - x} \cdot \frac{g(x_1) - g(x)}{g(x_1) - g(x)}\right) \\ &= \lim_{x_1 \to x} \left(\frac{f\big(g(x_1)\big) - f\big(g(x)\big)}{g(x_1) - g(x)} \cdot \frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x}\right) \\ &= \lim_{x_1 \to x} \frac{f\big(g(x_1)\big) - f\big(g(x)\big)}{g(x_1) - g(x)} \cdot \lim_{x_1 \to x} \frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x} \\ &= \lim_{x_1 \to x} \frac{f\big(g(x_1)\big) - f\big(g(x)\big)}{g(x_1) - g(x)} \cdot g'(x)\end{aligned}$$

Posons maintenant $y_1 = g(x_1)$, comme g est continue alors $\lim\limits_{x_1 \to x} g(x_1) = g(x)$, et donc ainsi $y_1 \to g(x)$ lorsque $x_1 \to x$.

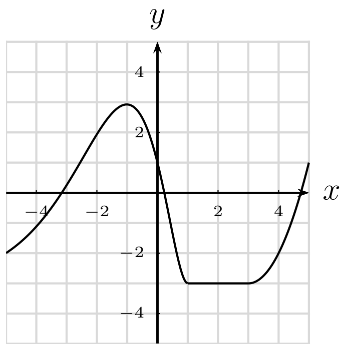
$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= \lim_{x_1 \to x} \frac{f\big(g(x_1)\big) - f\big(g(x)\big)}{g(x_1) - g(x)} \cdot g'(x) \\ &= \lim_{y_1 \to g(x)} \frac{f(y_1) - f\big(g(x)\big)}{y_1 - g(x)} \cdot g'(x) \\ &= f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\end{aligned}$$

Ce qui est bien le résultat annoncé. □

Remarque

Dans la preuve, on a amplifié une fraction par un terme qui peut s'annuler, ce qui est interdit !

Or, la seule condition pour que $g(x_1) - g(x)$ s'annule lorsque x_1 est proche de x, sans être égal à x, est que g soit *localement constante*. Autrement dit, un bout du graphe de g est plat. Par exemple, sur le graphe ci-contre, $g(x)$ est localement constante autour de $x = 2$. Dans ce cas, l'amplification de la preuve est illégale. Il faut donc faire autrement.



Si g est constante autour de x, alors $f \circ g$ l'est aussi ! Donc la pente de la tangente en x est nulle pour le graphe de g ET pour le graphe de $f \circ g$. Par conséquent, $g'(x) = 0$ et $(f \circ g)'(x) = 0$, donc la formule

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

est encore valable (elle sera de la forme $0 = 0$).

13.4.5 Règle de la puissance

Pour un nombre réel r, on a le résultat suivant, appelé *règle de la puissance.*

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1}}$$

La démonstration de cette règle nécessite de connaitre les dérivées du logarithme et de l'exponentielle établies en pages 213 et 214. Heureusement, pour établir ces dérivées, on n'a pas utilisé la règle de la puissance, il n'y a donc aucun paradoxe qui va émerger.

Pour démontrer la règle de la puissance, on distingue trois cas.

1. On suppose que $x > 0$. Ainsi
$$\big(x^r\big)' = \big(e^{\ln(x^r)}\big)' = \big(e^{r\ln(x)}\big)' \overset{13.4.4}{=} e^{r\ln(x)} \cdot \frac{r}{x} = x^r \cdot \frac{r}{x} = rx^{r-1}$$
2. On suppose que $x < 0$. Ainsi, pour autant que x^r existe (penser à $\sqrt{x}$), on a
$$\begin{aligned} \big(x^r\big)' &= \big((-1)^r(-x)^r\big)' = \big((-1)^r e^{\ln((-x)^r)}\big)' = \big((-1)^r e^{r\ln(-x)}\big)' \\ &\underset{13.4.4}{\overset{13.4.2}{=}} (-1)^r e^{r\ln(-x)} \cdot \frac{r}{-x} \cdot (-1) = (-1)^r(-x)^r \cdot \frac{r}{x} = rx^{r-1} \end{aligned}$$
3. On suppose que $x = 0$. Par définition de la dérivée, on a
$$(0^r)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(0 + \Delta x)^r - 0^r}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{r-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } r > 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } r < 1 \end{cases}$$
Cela correspond à l'évaluation de la fonction d'expression rx^{r-1} en $x = 0$. Le problème d'existence pour $r < 1$, provient du fait que dans ce cas, on est face à une division par zéro (penser à la dérivée de $\sqrt{x}$ qui est $\frac{1}{2\sqrt{x}}$).

13.4.6 Règle du quotient

Soit f et g deux fonctions dérivables dont les domaines de définition et d'arrivée sont les mêmes. Afin de pouvoir diviser la fonction f par la fonction g, on suppose que la fonction g ne s'annule pas sur son domaine de définition. Il est naturel de définir la fonction $\frac{f}{g}$ comme suit

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Cherchons à exprimer la dérivée de $\frac{f}{g}$ en fonction de la dérivée de f et de celle de g en utilisant les règles du produit, de la composition et de la puissance.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \Big(f(x)\cdot\big(g(x)\big)^{-1}\Big)' \\
&\overset{\substack{13.4.2\\13.4.3\\13.4.5}}{=} f'(x)\cdot\big(g(x)\big)^{-1} + f(x)\cdot(-1)\big(g(x)\big)^{-2}\cdot g'(x) \\
&\overset{\text{cascade}}{=} f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(-\frac{1}{\big(g(x)\big)^2}\right)\cdot g'(x) = \frac{f'(x)g(x)}{g^2(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser la définition de la dérivée.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\frac{f}{g})(x+\Delta x) - (\frac{f}{g})(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x)\ \overbrace{-f(x)g(x)+f(x)g(x)}^{=0} - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\big(f(x+\Delta x) - f(x)\big)g(x) - f(x)\big(g(x+\Delta x) - g(x)\big)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\overbrace{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}^{\to f'(x)}\cdot g(x)\ -\ f(x)\cdot\overbrace{\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}^{\to g'(x)}\right)}{\underbrace{g(x+\Delta x)}_{\to g(x)\text{ (car } g \text{ est continue)}}g(x)} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}$$

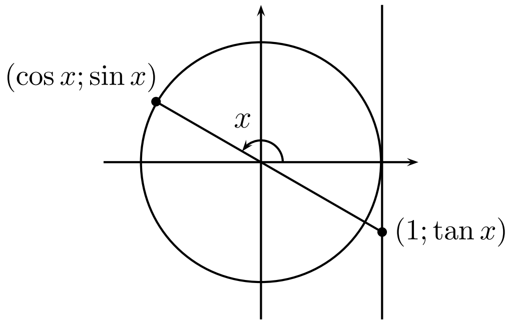
Donc

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}}$$

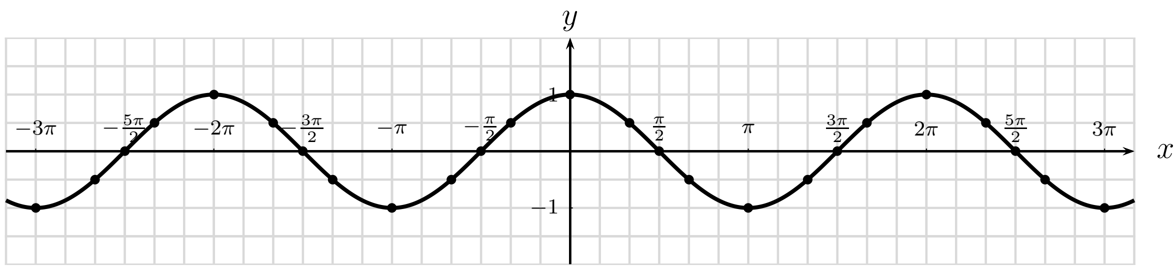
13.5 Dérivées des fonctions transcendantes usuelles

13.5.1 Dérivée de la fonction sinus

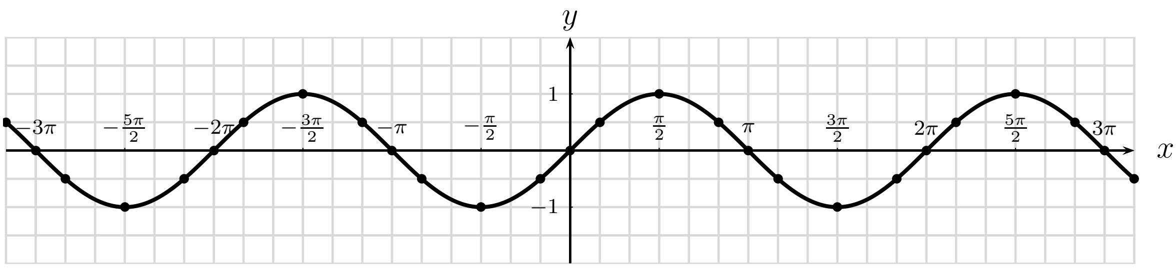
À chaque nombre réel $x \in \mathbb{R}$, on peut faire correspondre un point P_x sur le cercle de rayon 1 centré en l'origine : on imagine que l'on enroule un fil de longueur $|x|$ autour du cercle, l'origine du fil est fixée en $(1;0)$, le signe de x décide du sens d'enroulement et l'extrémité du fil définit le point P_x. Ce point admet deux coordonnées : le *cosinus* de x (en abscisse) et le *sinus* de x (en ordonnée).



Voici le graphe de la fonction $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$.



Voici le graphe de la fonction $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$.



Résultat intermédiaire

Pour établir la dérivée de la fonction sinus, on aura besoin de la limite de $\frac{\sin(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0. On peut voir évoluer cette limite avec le tableau suivant.

x	0.3	0.2	0.1	0.01	0.001
$\frac{\sin(x)}{x}$	$\cong 0.98507$	$\cong 0.99335$	$\cong 0.99833$	$\cong 0.99998$	$\cong 0.99999$

Ce tableau nous donne l'impression que cette limite vaut 1. Mais cela ne constitue en rien une preuve. Néanmoins, on a le résultat suivant.

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

Preuve du résultat intermédiaire

Tout d'abord, on montre que f est paire, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x} = f(x)$$

alors

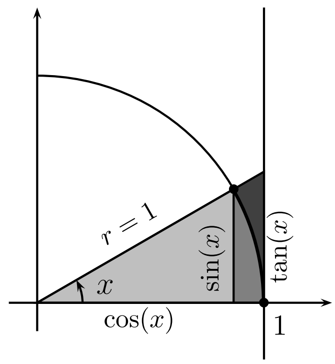
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\sin(x)}{x}$$

Cela signifie qu'au lieu de faire tendre x vers 0 de n'importe quelle façon, on peut se contenter de faire tendre x vers 0 depuis la droite, c'est-à-dire avec $x > 0$.

Ensuite, on examine la situation sur le cercle trigonométrique : pour x proche de 0 (à vrai dire x entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ radians), on a la situation décrite dans le dessin ci-dessous.

En comparant les aires des triangles et du secteur de cercle, on a

$$\begin{array}{ccccc} \text{Aire du} & & \text{Aire du} & & \text{Aire du} \\ \text{petit triangle} & \leqslant & \text{secteur} & \leqslant & \text{grand triangle} \\ \dfrac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{2} & \leqslant & \underbrace{\pi\cdot r^2\cdot\dfrac{x}{2\pi}}_{=\dfrac{x}{2}} & \leqslant & \dfrac{1\cdot\tan(x)}{2} \end{array}$$



En multipliant chaque terme par 2, il vient

$$\sin(x)\cdot\cos(x) \leqslant x \leqslant \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

On divise par $\sin(x)$ qui est positif (donc les signes ne s'inversent pas !) pour obtenir

$$\cos(x) \leqslant \frac{x}{\sin(x)} \leqslant \frac{1}{\cos(x)}$$

En passant à l'inverse (on fait $\frac{1}{(\cdot)}$ de chaque côté des inégalités), les signes s'inversent (si $2 \leqslant 3$, alors $\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{3}$). On obtient donc

$$\frac{1}{\cos(x)} \geqslant \frac{\sin(x)}{x} \geqslant \cos(x)$$

En prenant la limite lorsque x tend vers 0 (avec $x > 0$), on obtient

$$\underbrace{\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{\cos(x)}}_{=1} \geqslant \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\sin(x)}{x} \geqslant \underbrace{\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \cos(x)}_{=1}$$

Ainsi, on a coincé la limite cherchée. Cela montre que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$\square$

Théorème

La dérivée de la fonction sinus est $\boxed{\sin' = \cos}$ ou $\boxed{\sin'(x) = \cos(x)}$.

Preuve du théorème

La formule trigonométrique

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\sin'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\big(\sin(x)\cdot\cos(\Delta x) + \cos(x)\cdot\sin(\Delta x)\big) - \sin(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \left(\sin(x)\,\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x} \;+\; \cos(x)\,\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right) \\
&= \sin(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\cos(\Delta x)-1)}{\Delta x} \;+\; \cos(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \sin(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos^2(\Delta x)-1}{\Delta x(\cos(\Delta x)+1)} \;+\; \cos(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \sin(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0} \frac{-\sin^2(\Delta x)}{\Delta x(\cos(\Delta x)+1)} \;+\; \cos(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \sin(x)\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\sin(\Delta x)}{\cos(\Delta x)+1}}_{=\frac{0}{2}=0} \;+\; \cos(x)\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}}_{=1} \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

□

Conséquences

On a les dérivées suivantes.

$$\boxed{\cos'(x) = -\sin(x)} \qquad \boxed{\tan'(x) = 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}}$$

Indications sur les démonstrations

Pour établir la dérivée de la fonction cosinus, on peut procéder d'une manière similaire à la preuve ci-dessus, mais on peut aussi faire plus simple en se souvenant des formules

$$\cos(x) = \sin(\tfrac{\pi}{2}-x) \qquad \sin(x) = \cos(\tfrac{\pi}{2}-x) \qquad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

On trouve les dérivées annoncées grâce aux règles de dérivations et aux faits que $\sin'(x) = \cos(x)$ et que $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$.

13.5.2 La dérivée des logarithmes

Rappelons deux propriétés des logarithmes.

$$\boxed{\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)} \qquad \boxed{n\log_a(x) = \log_a(x^n)}$$

Ces propriétés vont nous permettre d'établir, à l'aide de la définition, la dérivée de la fonction $\log_a(x)$ avec $x > 0$.

En effet,

$$\begin{aligned}\log_a'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right)\end{aligned}$$

On a maintenant besoin de deux astuces pour pouvoir avancer. La première consiste à s'arranger pour avoir $\frac{x}{\Delta x}$ au lieu de $\frac{1}{\Delta x}$ comme exposant de la manière suivante.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)$$

et la deuxième consiste à réaliser que

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{x} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} \quad \text{ou encore} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{\Delta x} = \lim_{n\to+\infty} n$$

Ainsi, en remplaçant $\frac{\Delta x}{x}$ par $\frac{1}{n}$, on obtient

$$\begin{aligned}\log_a'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x}\log_a\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)\\ &= \frac{1}{x}\lim_{n\to+\infty}\log_a\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right) \overset{\bigstar}{=} \frac{1}{x}\log_a\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)\end{aligned}$$

L'étape ★ est justifiée grâce à la continuité de la fonction $\log_a(x)$.
On a donc montré que

$$\log_a'(x) = \frac{1}{x}\cdot\log_a\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)$$

Mais on se rappelle que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e \qquad \text{où } e \text{ est le nombre d'Euler (voir page 185)}$$

Ainsi, on a

$$\log_a'(x) = \frac{1}{x}\cdot\log_a(e)$$

En utilisant la formule de changement de base, on peut écrire

$$\log_a(e) = \frac{\log_e(e)}{\log_e(a)} = \frac{1}{\log_e(a)}$$

Ainsi, on a une meilleure expression de la dérivée de la fonction $\log_a(x)$.

$$\boxed{\log'_a(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log_e(a)}}$$

13.5.3 Le logarithme népérien et sa dérivée

Lorsque la base du logarithme est égal au nombre d'Euler e, on parle de *logaritme népérien* ou de *logarithme naturel* et on note

$$\boxed{\log_e(x) = \ln(x)}$$

La dérivée de $\ln(x)$ (cas où $a = e$)

La dérivée de la fonction $\ln(x)$ est

$$\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

13.5.4 La dérivée des fonctions exponentielles

Une formule pour la dérivée des fonctions réciproques

La formule suivante permet d'établir la dérivée d'une fonction réciproque.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Preuve

On se souvient que $f(f^{-1})(x) = x$ pour tout x dans le domaine de la fonction réciproque. En dérivant de chaque côté (on peut le faire car la relation est vraie pour tout x), on obtient

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \iff (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Conséquences de cette formule

Puisque la fonction e^x est la fonction réciproque de la fonction $\ln(x)$, on peut montrer que la dérivée de e^x est

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Quant aux dérivées des autres exponentielles en base a ($a > 0$, $a \neq 1$), on se ramène à l'exponentielle e^x

$$a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{x\ln(a)}$$

Puis on utilise la dérivée en cascade.

$$(a^x)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = e^{x\ln(a)} \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x$$

Finalement, on a trouvé

$$\boxed{(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x}$$

13.6 Table de dérivées

Voici une table qui résume les dérivées que nous avons établies et de certaines qui seront établies en exercices.

$f(x)$	$f'(x)$
$\dots$	$\dots$
x^n	nx^{n-1}
$\dots$	$\dots$
x^2	$2x$
x	1
1	0
$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{2}{x^3}$
$\dots$	$\dots$
$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\dots$	$\dots$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$
$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	e^x
$\log_a\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{\ln(a)}\cdot\dfrac{1}{x}$
a^x	$\ln(a)\cdot a^x$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin^{-1}(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1}(x)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1}(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\dfrac{1}{\cosh^2(x)} = 1-\tanh^2(x)$
$\sinh^{-1}(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\cosh^{-1}(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\tanh^{-1}(x)$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

Chapitre 14

Quelques applications des dérivées

14.1 Problèmes d'optimisation

Dans la pratique, il est fréquent de vouloir optimiser une certaine *quantité* sous certaines conditions, appelées *contraintes*.

Pour que l'on puisse y arriver, il faut qu'il y ait assez de contraintes pour pouvoir exprimer la quantité à optimiser en fonction d'une seule variable ou *paramètre*.

Exemples d'utilisation

a) On cherche à minimiser le périmètre d'un rectangle dont l'aire est fixée.
b) On cherche à maximiser l'aire d'un rectangle dont le périmètre est fixé.
c) On cherche à minimiser la quantité de métal utilisé pour fabriquer une boîte de conserve de volume fixé.

Technique de résolution générale

1. On exprime la quantité Q à optimiser en fonction d'un paramètre x en utilisant les contraintes. On obtient ainsi une fonction $Q(x)$ dont on cherche les maxima ou minima.

   On précise le domaine d'intérêt I qui correspond au problème.

2. Afin de trouver les maxima ou minima de la fonction $Q(x)$, on recherche les points à tangente horizontale (symptôme d'un maximum ou d'un minimum). En d'autres termes, on résout l'équation

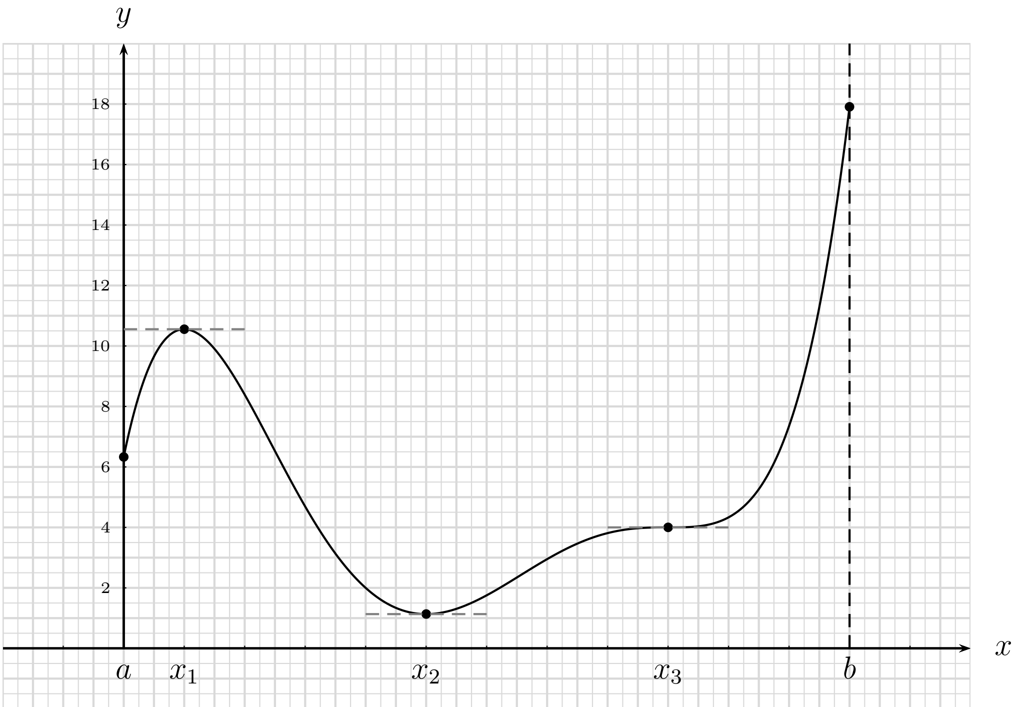
$$Q'(x) = 0 \qquad \text{pour } x \in I$$

3. On vérifie si les solutions de l'équation ci-dessus correspondent bien à des maxima ou des minima en faisant un tableau de signes de la dérivée $Q'(x)$ en prenant le domaine d'intérêt I au lieu du domaine de définition.

   Cette étape est importante car une fonction peut admettre des points à tangentes horizontales qui ne correspondent ni à un maximum ni à un minimum (par exemple un point d'inflexion). De plus, il ne faut pas oublier de regarder ce qu'il se passe au bord du domaine d'intérêt I, car un maximum ou minimum pourrait se produire au bord du domaine d'intérêt I.

Exemple théorique

Imaginons que le graphe de la quantité $Q(x)$ sur le domaine d'intérêt $[a, b]$ soit le suivant.



Ainsi, le comportement de $Q(x)$ obtenu à l'aide du tableau de signes de $Q'(x)$ est

x	a		x_1		x_2		x_3		b
$Q'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	$+$
comportement de $Q(x)$		↗	⌢	↘	⌣	↗		↗	
			maximum local		minimum local		palier		

Si on fait abstraction du graphe pour tirer les conclusions, le tableau de comportement nous indique que

1. le maximum (sur le domaine d'intérêt) est soit en x_1, soit en b ;
2. le minimum (sur le domaine d'intérêt) est soit en a, soit en x_2.

Pour savoir où se trouve le maximum, on calcule $Q(x_1)$ et $Q(b)$.

Si	$Q(x_1) < Q(b)$	$Q(x_1) = Q(b)$	$Q(x_1) > Q(b)$
Alors	le maximum est en b	il y a deux maxima	le maximum est en x_1

Pour savoir où se trouve le minimum, on calcule $Q(a)$ et $Q(x_2)$.

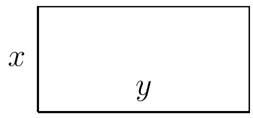
Si	$Q(a) < Q(x_2)$	$Q(a) = Q(x_2)$	$Q(a) > Q(x_2)$
Alors	le minimum est en a	il y a deux minima	le minimum est en x_2

Dans notre exemple, on constate que le maximum est en b et que le minimum est en x_2.

Un exemple concret (résolution)

On cherche à minimiser le périmètre d'un rectangle dont l'aire vaut 9.

1. On commence par dessiner un rectangle et on baptise les quantités inconnues.



   On cherche à minimiser le périmètre. On peut exprimer le périmètre à l'aide des deux paramètres x et de y comme suit.

$$P(x, y) = 2x + 2y$$

   Mais on veut arriver à exprimer P en fonction d'un seul paramètre. Or, on a une information sur l'aire du rectangle : l'aire vaut 9.

$$\text{Aire} = x \cdot y = 9 \iff y = \frac{9}{x}$$

   On substitue donc y dans la fonction du périmètre afin que le périmètre soit une fonction à un paramètre

$$P(x) = 2x + 2 \cdot \frac{9}{x} = 2\left(x + \frac{9}{x}\right)$$

   Le domaine d'intérêt est $I =]0, +\infty[$!

2. On résout $P'(x) = 0$ pour trouver les points à tangente horizontale.

   On a

$$P'(x) = 2\left(1 - \frac{9}{x^2}\right) = \frac{2(x^2 - 9)}{x^2} = \frac{2(x-3)(x+3)}{x^2}$$

   Les solutions de $P'(x) = 0$ sont -3 et 3. Le domaine d'intérêt étant $]0, +\infty[$, la seule solution qui est intéressante est $x = 3$.

3. Mais est-ce bien un minimum comme demandé ?

   Pour le vérifier, on fait le tableau de signes de la dérivée. On a

$$P'(x) = \frac{2(x-3)(x+3)}{x^2}$$

   Le tableau de signes sur le domaine d'intérêt $I =]0, +\infty[$ est

x	0		3	
$P'(x)$	$\lightning$	$-$	0	$+$
comportement de $P(x)$		$\searrow$	$\smile$	$\nearrow$

   Le tableau de comportement montre que, au bord du domaine d'intérêt, il n'y a pas de minimum possible. Ainsi, la fonction $P(x)$ a un minimum en $x = 3$.

14.2 La courbure (l'accélération en physique)

Imaginons que l'on décrit un mouvement rectiligne (disons en hauteur) par une fonction f qui dépend du temps. $f(x)$ décrit donc la position verticale (en mètres) d'un objet au temps x (en secondes).

En regardant le graphe de f, on voit qu'au temps $x = -2$ l'objet se trouve à hauteur 0. Il est en train de monter jusqu'à atteindre une hauteur de 2 au temps $x = 0$, il va ensuite redescendre (il aura de nouveau atteint la hauteur 0 en $x = 2$).

La fonction f' décrit la variation (instantanée) de la position : ainsi $f'(x)$ est la vitesse instantanée de l'objet au temps x.

Dans notre cas, on constate qu'en $x = -2$ la vitesse de l'objet est relativement grande (elle est de 2 mètres par secondes vers le haut). En $x = 0$, la vitesse s'annule et change de signe (puisque l'objet arrête de monter pour commencer à redescendre). On retrouvera une vitesse de 2 mètres par secondes vers le bas au temps $x = 2$.

La fonction $f'' = (f')'$ exprime la variation (instantanée) de la vitesse. En physique, cette notion s'appelle l'accélération (dans ce contexte un freinage est aussi une accélération).

Ici l'accélération est constante et négative. Par conséquent, l'objet est toujours attiré vers le bas (par une force telle que la gravitation par exemple [1]).

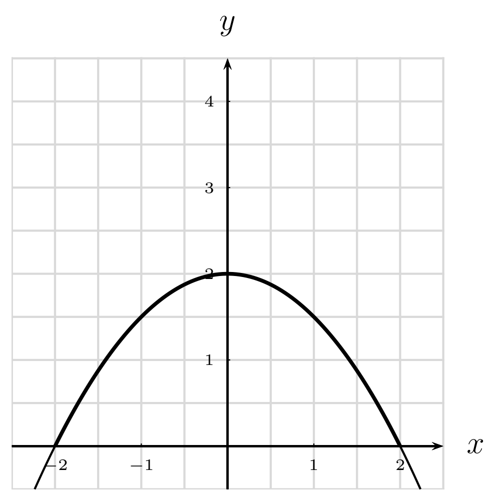
En maths, la dérivée est une généralisation de la vitesse (car x ne représente pas toujours une unité de temps et $f(x)$ n'est pas toujours une distance).

La fonction f'' s'appelle la *courbure* de la fonction f. La courbure est une généralisation de l'accélération.

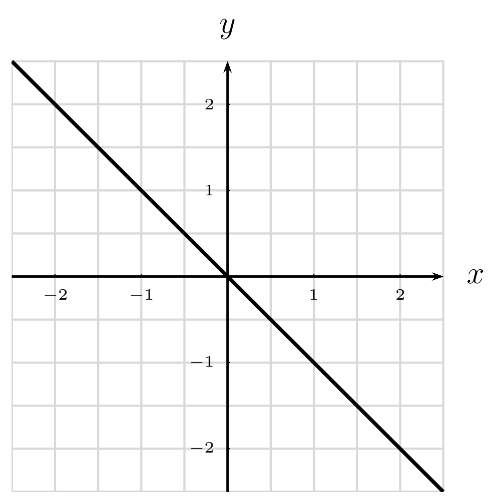
Une fonction qui 'tourne' vers le bas (comme la fonction f ci-contre) est dite de *courbure négative.*

On parle de *courbure positive* lorsque la fonction 'tourne' vers le haut.

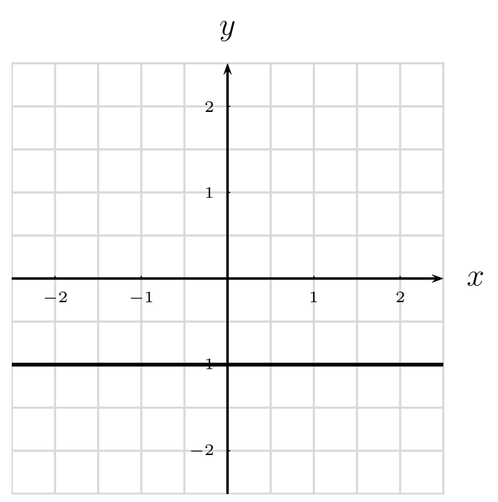
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$



$f'(x) = -x$



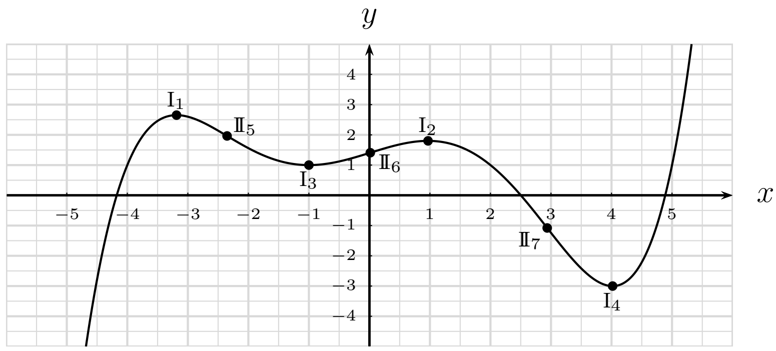
$f''(x) = -1$



1. En physique, l'accélération d'un objet est proportionnelle à la somme des forces agissant sur cet objet. D'où la célèbre formule $\vec{f} = m\vec{a}$.

14.3 Extrema locaux et points d'inflexion

Regardons le graphe d'une fonction f continue dont la première et deuxième dérivées sont aussi continues (donc la fonction est deux fois dérivable).



On voit deux types de points émerger :

I. **Les extrema (minima ou maxima) locaux** (voir les points I_1, I_2, I_3 et I_4).
En ces points, la tangente à la courbe est de pente nulle. On a donc une condition pour les identifier.

$$x_0 \text{ est un extremum local (minimum ou maximum)} \implies f'(x_0) = 0$$

Malheureusement, la réciproque est fausse (voir les points d'inflexion à tangente horizontale ci-dessous).

On le voit : en un extremum local, la dérivée doit s'annuler ET changer de signe !

x		x_0			x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
comp. de $f(x)$						
	maximum local			minimum local		

II. **Les points d'inflexion** (voir les points II_5, II_6, II_7).
Un *point d'inflexion* est un point où la courbure f'' s'annule ET change de signe. On a un point d'inflexion en x_0 lorsque le tableau de signes de f'' se comporte ainsi.

	dérivée positive						dérivée négative					
x		x_0			x_0			x_0			x_0	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
comp. de $f(x)$												

On peut aussi localiser les *points d'inflexion à tangente horizontale*[2] avec le tableau de signes de f' (on trouve les deux situations qui ne sont pas apparues ci-dessus).

x		x_0			x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$-$	0	$-$
comp. de $f(x)$						

2. le tableau de signes de f'' les localisera, mais comme, en général, on établit le tableau de signes de f' avant celui de f'', on les aura identifiés gratuitement juste avant.

14.4 Étude de fonction

Le but d'une étude de fonction est de pouvoir dessiner son graphe le plus précisément possible sans l'aide d'un ordinateur.

1. **Parité de la fonction**
   On détermine si la fonction est paire ou impaire (en cas de doute, on peut commencer par factoriser la fonction et examiner le domaine de définition ou l'ensemble des zéros de f). Cela permet d'identifier d'éventuelles symétries du graphe de f.

2. **Comportement de la fonction au bord de son domaine de définition**
   Il s'agit de trouver le plus grand domaine de définition possible de la fonction f. Puis, on calcule les limites pour tous les x qui sont au bord du domaine de définition : cela permet de déterminer :
   (a) les éventuelles asymptotes verticales ;
   (b) les éventuels trous ou sauts ;
   (c) le comportement à l'infini de la fonction.

   Les sauts en x_0 tels que $x_0 \in D$ ne se voient pas sur le domaine de définition (mais heureusement, la plupart du temps ils n'existent que si f est définie par morceaux comme c'est le cas pour la fonction de la page 192).

3. **Tableau de signes, de croissance, de courbure et de comportement**
   Pour cela, il faut d'abord :
   (a) factoriser $f(x)$;
   (b) calculer et factoriser la dérivée $f'(x)$, puis chercher son domaine de définition et ses zéros (utiles pour le tableau de croissance) ;
   (c) calculer et factoriser la dérivée seconde $f''(x)$, puis chercher son domaine de définition et ses zéros (utiles pour le tableau de courbure).

   On fait un tableau de signes pour les fonctions f, f' et f'' (le tableau de signes de f' donne des informations sur la croissance de f ; celui de f'' donne des informations sur la courbure de f). Ce tableau de signes comporte 5 lignes (une pour x, une pour $f(x)$, une pour $f'(x)$, une pour $f''(x)$ et une pour une esquisse locale du comportement de f).

   Ce tableau nous permet de trouver les minima locaux, les maxima locaux et les points d'inflexion qui sont des informations capitales pour dessiner un graphe de qualité.

4. **Calcul de la tangente ou de la pente en chaque point d'inflexion**
   Selon la fonction, il est possible qu'il soit demandé de calculer la tangente ou la pente en chaque point d'inflexion. Si tel est le cas, alors il est utile d'indiquer dans le tableau de croissance les pentes correspondantes à chaque point d'inflexion.

5. **Graphe de la fonction**
   On dessine le graphe de la fonction à l'aide de toutes les informations trouvées ci-dessus. On peut aussi ajouter quelques points (par exemple $(0; f(0))$ si $0 \in D$).

Quelques points supplémentaires parfois utiles à calculer

Lorsqu'il y a une asymptote oblique (ou horizontale) d'équation $y = mx + h$ (elle est horizontale si $m = 0$), on peut chercher lorsque la fonction coupe l'asymptote. On trouve les premières coordonnées de ces points d'intersection en résolvant l'équation suivante :

$$f(x) = mx + h$$

Cela peut permettre de déterminer la présence de points d'inflexion sans calculer f''.

Exemple d'étude de fonction

On étudie la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+3)^2}{(x+1)^2}$$

1. **Parité de la fonction**

   Cette fonction n'est ni paire, ni impaire. En effet, elle s'annule en $x = 1$, mais elle ne s'annule pas en $x = -1$ (pire, elle n'est même pas définie en $x = -1$).

2. **Comportement de la fonction au bord de son domaine de définition**

   Le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Son bord est $\{\pm\infty\} \cup \{-1\}$. Il y a donc deux comportements à examiner :

   - **Comportement local en $x = -1$**

     On a $\lim_{x\to-1} f(x) = \pm\infty$ car la limite est du type $(\frac{-8}{0})$. On a donc une asymptote verticale d'équation $x = -1$ (le tableau de signes qui suit montre clairement que les limites à gauche et à droite sont $-\infty$).

   - **Comportement asymptotique à l'infini**

     Ici, comme la fonction est rationnelle, et que le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur plus 1, on sait qu'on a affaire à une asymptote oblique de pente m et de hauteur h.

     $$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)(x+3)^2}{x(x+1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+\cdots}{x^3+\cdots} = 1$$

     Le calcul de h est le suivant :

     $$\begin{aligned} h &= \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - m\cdot x) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)(x+3)^2}{(x+1)^2} - \frac{x(x+1)^2}{(x+1)^2} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)(x^2+6x+9)}{x^2+2x+1} - \frac{x(x^2+2x+1)}{x^2+2x+1} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+5x^2+3x-9-(x^3+2x^2+x)}{x^2+2x+1} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+2x-9}{x^2+2x+1} = 3 \end{aligned}$$

     Ainsi, la fonction f a une asymptote oblique d'équation $y = x + 3$.

3. **Tableau de signes, de croissance et de courbure**

(a) On commence par calculer et factoriser la dérivée de f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{(x-1)(x+3)^2}{(x+1)^2}\right)' \\ &= \frac{\big(1\cdot(x+3)^2+(x-1)\cdot 2(x+3)\big)\cdot(x+1)^2 \;-\; (x-1)(x+3)^2\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} \end{aligned}$$

C'est ici qu'il faut se montrer le plus malin : on peut mettre en évidence $(x+3)$ et simplifier la fraction par $(x+1)$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+3)\Big(\big((x+3)+2(x-1)\big)(x+1) \;-\; 2(x-1)(x+3)\Big)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{(x+3)\Big((3x+1)(x+1) \;-\; 2(x^2+2x-3)\Big)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{(x+3)\Big(3x^2+4x+1 \;-\; (2x^2+4x-6)\Big)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{(x+3)\overbrace{(x^2+7)}^{\text{toujours positif}}}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

Ainsi -3 et -1 seront dans le tableau de croissance de f

(b) Puis, on calcule et on factorise la dérivée seconde de f :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{(x+3)(x^2+7)}{(x+1)^3}\right)' \\ &= \frac{\big(1\cdot(x^2+7)+(x+3)\cdot(2x)\big)\cdot(x+1)^3 \;-\; (x+3)(x^2+7)\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} \end{aligned}$$

Cette fois, on ne peut rien mettre en évidence, mais on peut simplifier la fraction par $(x+1)^2$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\big((x^2+7)+2x(x+3)\big)(x+1) \;-\; 3(x+3)(x^2+7)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(3x^2+6x+7)(x+1) \;-\; 3(x+3)(x^2+7)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{3x^3+9x^2+13x+7 \;-\; 3(x^3+3x^2+7x+21)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{-8x-56}{(x+1)^4} = \frac{-8(x+7)}{(x+1)^4} \end{aligned}$$

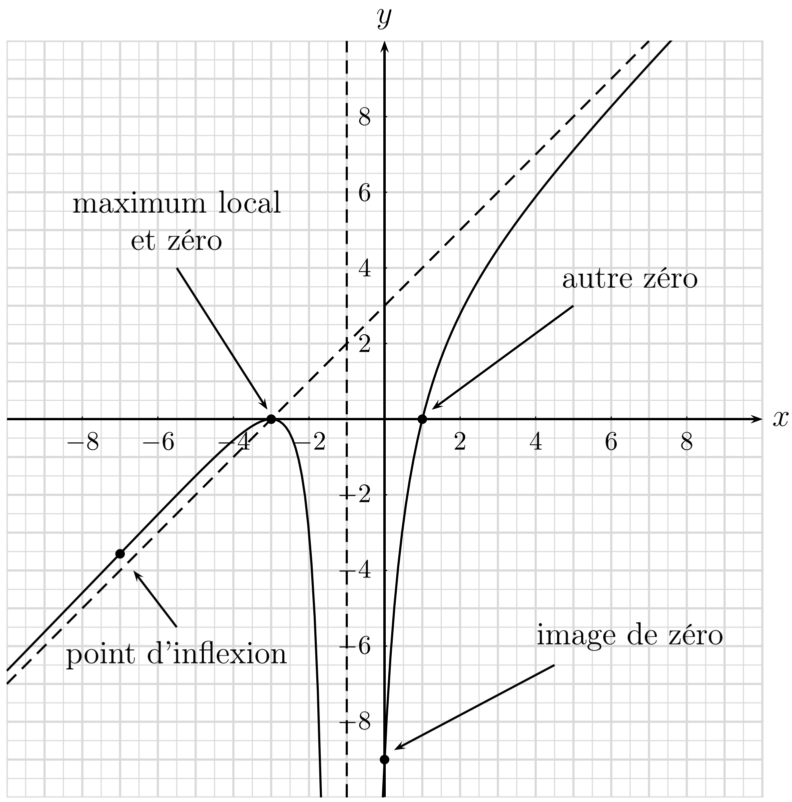
Ainsi -7 et -1 seront dans le tableau de courbure de f

Maintenant, on est prêt pour le tableau de signes, de croissance et de courbure de la fonction f.

x		-7		-3		-1		1	
$f(x)$	$-$	$-\frac{32}{9}$	$-$	0	$-$	↯	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	$\frac{28}{27}$	$+$	0	$-$	↯	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	↯	$-$	$-$	$-$
comportement de $f(x)$									

4. **Tangente au point d'inflexion**
   La pente au point d'inflexion est $f'(-7) = \frac{28}{27}$. L'équation de la tangente est
   $$y = f(-7) + f'(-7)(x - (-7)) \iff y = -\tfrac{32}{9} + \tfrac{28}{27}(x + 7)$$

5. **Graphe de la fonction**



Intersection avec l'asymptote oblique

Recherchons les éventuelles intersections entre la fonction f et l'asymptote oblique d'équation $y = x + 3$. On cherche les premières coordonnées de ces éventuels points :

$$f(x) = x + 3 \iff \frac{(x-1)(x+3)^2}{(x+1)^2} = x + 3 \iff (x-1)(x+3)^2 = (x+3)(x+1)^2$$
$$\iff (x-1)(x+3)^2 - (x+3)(x+1)^2 = 0 \iff (x+3)\Big((x-1)(x+3) - (x+1)^2\Big) = 0$$
$$\iff (x+3)\Big(x^2 + 2x - 3 - (x^2 + 2x + 1)\Big) = 0 \iff (x+3)(-4) = 0 \iff x = -3$$

Le seul point d'intersection de la fonction et son asymptote est le point $(-3; 0)$.

14.5 Théorème de Rolle

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On considère une fonction dérivable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui satisfait

$$f(a) = f(b)$$

Alors, il existe (au moins) un nombre ξ tel que $a < \xi < b$ et $f'(\xi) = 0$.

Preuve

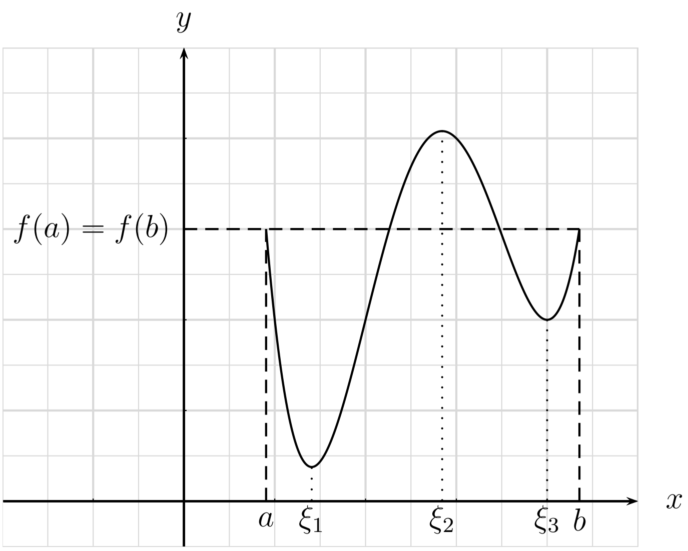
On distingue deux cas :

1. La fonction est constante (dans ce cas son graphe est horizontal) et on a $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Ainsi le ξ cherché peut être n'importe quel nombre entre a et b.

2. La fonction n'est pas constante. Dans ce cas, puisque $f(a) = f(b)$, alors la fonction admet (au moins) un maximum ou (au moins) un minimum entre a et b. Notons ξ la première coordonnée de cet extremum (un extremum est soit un minimum soit un maximum). La tangente en ξ est forcément horizontale, c'est-à-dire $f'(\xi) = 0$.

$\square$

Illustration



14.6 Le théorème des accroissements finis

Ce théorème souvent utilisé en mathématiques peut se déduire du théorème de Rolle. Il permet de démontrer le théorème de l'Hospital et il est utilisé dans le cours de troisième année afin de pouvoir calculer la longueur d'une courbe.

Théorème

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On considère une fonction dérivable $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Alors, il existe (au moins) un nombre $\xi \in \,]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

Preuve

On contemple la fonction

$$F(x) = (b-a)\big(f(b)-f(x)\big) - (b-x)\big(f(b)-f(a)\big)$$

Pour mieux visualiser cette fonction, on peut l'écrire comme un déterminant

$$F(x) \;=\; \begin{vmatrix} f(b)-f(x) & f(b)-f(a) \\ b-x & b-a \end{vmatrix}$$

Cette fonction est dérivable sur $[a,b]$ et on a $F(b) = F(a) = 0$.
Par le théorème de Rolle (appliqué à la fonction F), il existe un nombre ξ entre a et b tel que

$$F'(\xi) = 0$$

Or, en dérivant F, on trouve

$$F'(x) = -(b-a)f'(x) + (f(b)-f(a))$$

Donc

$$0 = F'(\xi) = -(b-a)f'(\xi) + (f(b)-f(a))$$

Et ainsi

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

□

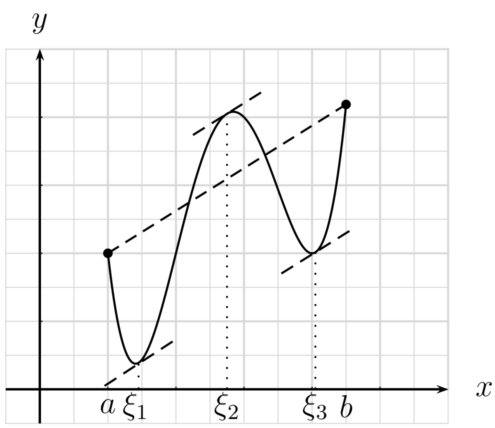
Interprétation

On peut interpréter ce théorème de la manière suivante.

La pente moyenne entre les points

$$(a; f(a)) \quad \text{et} \quad (b; f(b))$$

est réalisée au moins une fois comme pente instantanée entre a et b.



14.7 Règle de l'Hospital

Il existe une règle très pratique faisant appel à la dérivée pour calculer certaines limites.

Règle de l'Hospital

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soit f et g deux fonctions qui sont dérivables au voisinage de a (même si elles ne le sont pas en a). On suppose aussi que f, g, f' et g' ne s'annulent pas au voisinage de a (même si elles s'annulent en a).

Si la limite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ on a

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}} \qquad \text{à condition que la limite de droite existe}$$

Exemples d'utilisation

1. On a
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} \overset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2x+2}{1} = 4$$
2. On a
$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0$$
3. On a
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x)}{\sin(x)} \overset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)+1}{\cos(x)} = -\infty$$
4. On a
$$\lim_{x\to +\infty} x\cdot e^{-x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Version light de la règle de l'Hospital et sa preuve

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f et g deux fonctions dérivables en a telles que

$$f(a) = 0, \quad g(a) = 0 \quad \text{et} \quad g'(a) \neq 0$$

Alors

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}} \quad \left(= \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$$

Preuve

Partons du terme de droite et utilisons la définition de la dérivée. On peut écrire ce terme puisque f et g sont dérivables en a et que $g'(a) \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\tfrac{f'(a)}{g'(a)} &= \frac{\lim\limits_{x_1\to a} \dfrac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}}{\lim\limits_{x_1\to a} \dfrac{g(x_1)-g(a)}{x_1-a}} = \lim_{x_1\to a} \frac{\dfrac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}}{\dfrac{g(x_1)-g(a)}{x_1-a}} \\
&= \lim_{x_1\to a} \frac{f(x_1)-f(a)}{g(x_1)-g(a)} \underset{g(a)=0}{\overset{f(a)=0}{=}} \lim_{x_1\to a} \frac{f(x_1)}{g(x_1)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}
\end{aligned}$$

$\square$

14.8 Problèmes de taux d'accroissement

Introduction

Exemple introductif

Une voiture roule à vitesse constante sur une autoroute. Elle consomme 0.08 litres par heure. Le prix du trajet est de 2 francs par litre consommé.

On peut en déduire le prix du trajet par heure.

$$\begin{aligned} \text{prix par heure} &= \text{prix par litre} \cdot \text{consommation} \\ &= 2\ {}^{\text{francs}}/_{\text{litre}} \cdot 0.08\ {}^{\text{litres}}/_{\text{heure}} = 0.16\ {}^{\text{francs}}/_{\text{heure}} \end{aligned}$$

Deux exemples sur le carré

1. Les côtés d'un carré de 2 cm de côté croissent de 5 ${}^{\text{cm}}/_{\text{min}}$. Comment croit l'aire ?

   On travaille sous l'hypothèse que la longueur des côtés $c(t)$ (en fonction du temps t) est une fonction dérivable.

   L'aire s'écrit en fonction de la longueur des côtés, $A(c) = c^2$, mais aussi en fonction de t.
   $$A(c) = c^2 \overset{c=c(t)}{\Longrightarrow} A\big(c(t)\big) = c^2(t) \Longrightarrow A(t) = c^2(t)$$

   On cherche la vitesse de croissance de l'aire, c'est-à-dire la dérivée de l'aire. Par la règle de la dérivée en cascade, on a
   $$A'(t) = 2 \cdot c(t) \cdot c'(t)$$

   On reformule la donnée : en un instant t_0, on a $c(t_0) = 2$ cm et $c'(t_0) = 5\ {}^{\text{cm}}/_{\text{min}}$. Ainsi
   $$A'(t_0) = 2 \cdot c(t_0) \cdot c'(t_0) = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20\ {}^{\text{cm}^2}/_{\text{min}}$$

2. Un carré de 4 cm^2 d'aire croît de 5 ${}^{\text{cm}^2}/_{\text{min}}$. Comment croissent les côtés ?

   On travaille sous l'hypothèse que l'aire du carré $A(t)$ (en fonction du temps t) est une fonction dérivable.

   La longueur des côtés s'écrit en fonction de l'aire, $c(A) = \sqrt{A}$, mais aussi en fonction de t
   $$c(A) = \sqrt{A} \overset{A=A(t)}{\Longrightarrow} c\big(A(t)\big) = \sqrt{A(t)} \Longrightarrow c(t) = \sqrt{A(t)}$$

   On cherche la vitesse de croissance des côtés, c'est-à-dire la dérivée de la longueur des côtés. Par la règle de la dérivée en cascade, on a
   $$c'(t) = \frac{1}{2\sqrt{A(t)}} \cdot A'(t)$$

   On reformule la donnée : en un instant t_0, on a $A(t_0) = 4$ cm^2 et $A'(t_0) = 5\ {}^{\text{cm}^2}/_{\text{min}}$. Ainsi
   $$c'(t_0) = \frac{1}{2\sqrt{A(t_0)}} \cdot A'(t_0) = \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 5 = \frac{5}{4}\ {}^{\text{cm}}/_{\text{min}}$$

Recherche d'une notation plus efficace

Revenons à l'exemple introductif :

> Une voiture roule à vitesse constante sur une autoroute. Elle consomme 0.08 litres par heure. Le prix du trajet est de 2 francs par litre consommé.

Notons P pour la fonction qui donne le prix du trajet et L pour le nombre de litres consommés (L est un nombre ou une fonction selon le point de vue), et t pour le nombre d'heures du trajet.

La fonction P peut s'exprimer en fonction de L ou de t. La donnée permet d'affirmer que $P(L) = 2L$ et, en considérant L comme une fonction de t, on a $L(t) = 0.08t$. Ainsi

$$P\big(L(t)\big) = 2L(t) = 2 \cdot 0.08t = 0.16t = P(t)$$

En reprenant le calcul ci-dessus, on remarque l'apparition de dérivées.

$$\begin{array}{ccccc}
2\ ^{\text{francs}}/_{\text{litre}} & \cdot & 0.08\ ^{\text{litres}}/_{\text{heure}} & = & 0.16\ ^{\text{francs}}/_{\text{heure}} \\[1ex]
\begin{array}{c}\text{dérivée de } P\\ \text{en fonction de } L\end{array} & \cdot & \begin{array}{c}\text{dérivée de } L\\ \text{en fonction de } t\end{array} & = & \begin{array}{c}\text{dérivée de } P\\ \text{en fonction de } t\end{array} \\[1ex]
\dfrac{dP}{dL} & \cdot & \dfrac{dL}{dt} & = & \dfrac{dP}{dt}
\end{array}$$

La dernière ligne correspond à la *notation de Leibniz* (la notation f' pour la dérivée n'est pas très pratique, car il y a deux variables différentes : L et t). On y reviendra.

Dans cet exemple, on a deux fonctions de t, $P(t)$ et $L(t)$, et l'une peut s'exprimer en fonction de l'autre, $P(L) = 2L$.

14.8.1 Notation de Leibniz et dérivation en cascade

Gardons la notation utilisée dans l'introduction avec les fonctions A et c (peut importe leur nom et ce qu'elles représentent, mais le lecteur pourra ainsi garder en tête l'exemple du carré où A est son aire, et c la longueur de ses côtés).

On a deux fonctions A et c qui s'expriment toutes les deux en fonction d'une variable t.

$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto A(t) \qquad c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto c(t)$$

On a aussi une fonction qui permet d'exprimer A en fonction de c. Notons cette fonction A_c pour bien exprimer le fait que la variable de départ est c.

$$A_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; c \mapsto A_c(c)$$

On peut faire une composition de fonction (voir section 8.10.5 en page 115).

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R} & \xrightarrow{c} & \mathbb{R} & \xrightarrow{A_c} & \mathbb{R} \\
t & \longmapsto & c(t) & \longmapsto & A_c(c(t))
\end{array}$$

On réalise que cette fonction décrit l'aire en fonction du temps, c'est donc la fonction A.

$$\begin{array}{rcccc}
A = A_c \circ c & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & & t & \longmapsto & \boxed{(A_c \circ c)(t) = A_c(c(t)) = A(t)}
\end{array}$$

Quand on écrit $A'(t)$, on pense à la dérivée de A en fonction de la variable t. Quand on écrit $c'(t)$, on pense à la dérivée de c en fonction de la variable t. Quand on écrit $A_c'(c)$, on pense à la dérivée de A_c en fonction de la variable c.

Revenons à la définition de la dérivée.

$$\begin{aligned} A'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} \\ c'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{\Delta t} \\ A_c'(c) &= \lim_{\Delta c \to 0} \frac{A_c(c+\Delta c) - A_c(c)}{\Delta c} \end{aligned}$$

Ces fractions (sans la limite) correspondent à la pente de la sécante (donnée par un déplacement vertical sur un déplacement horizontal). L'idée de Leibniz est de noter le déplacement vertical de la même manière que le déplacement horizontal.

$$\Delta A = A(t+\Delta t) - A(t) \qquad \Delta c = c(t+\Delta t) - c(t) \qquad \Delta A_c = A_c(c+\Delta c) - A_c(c)$$

Ainsi, on peut réécrire les dérivées comme suit et présenter la notation de Leibniz.

$$\begin{aligned} A'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} \underset{\text{de Leibniz}}{\overset{\text{notation}}{=}} \frac{dA}{dt}(t) \\ c'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta c}{\Delta t} \underset{\text{de Leibniz}}{\overset{\text{notation}}{=}} \frac{dc}{dt}(t) \\ A_c'(c) &= \lim_{\Delta c \to 0} \frac{A_c(c+\Delta c) - A_c(c)}{\Delta c} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A_c}{\Delta c} \underset{\text{de Leibniz}}{\overset{\text{notation}}{=}} \frac{dA_c}{dc}(c) \end{aligned}$$

Maintenant, on dérive en cascade pour voir comment la notation de Leibniz s'utilise.

$$A(t) = A_c(c(t)) \underset{\text{en cascade}}{\overset{\text{dérivée}}{\Longrightarrow}} A'(t) = A_c'(c(t)) \cdot c'(t) \underset{\text{de Leibniz}}{\overset{\text{notation}}{\Longrightarrow}} \frac{dA}{dt}(t) = \frac{dA_c}{dc}(c(t)) \cdot \frac{dc}{dt}(t)$$

Plus souvent, on note simplement

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA_c}{dc} \cdot \frac{dc}{dt}$$

Et comme les fonctions A et c représentent généralement des grandeurs physiques (le lecteur se souviendra de l'exemple du carré où A représente l'aire d'un carré et c la longueur des côtés de ce carré), que la fonction A_c représente la même grandeur physique que la fonction A, on fait souvent l'abus de langage en notant aussi A pour la fonction A_c. Le lecteur remarquera que cet abus de langage avait déjà été effectué dans les deux pages précédentes.

Ainsi, en utilisant la notation le Leibiz, la dérivée en cascade s'écrit ainsi

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dc} \cdot \frac{dc}{dt}} \ (\bigstar)$$

Attention : ce ne sont pas de vraies «fractions», car il y a une limite qui se cache dans chacune de ces «fractions».

Vision géométrique de cette relation

La relation (★) peut aussi s'observer en regardant les vecteurs directeurs de la tangente (on se rappelle la méthode qui permet d'établir l'équation de la tangente dans l'OB19).

Le vecteur $\binom{\Delta c}{\Delta A}$ est le vecteur directeur de la sécante. Quand la sécante glisse vers la tangente (on se rappelle la définition de la dérivée en page 202), ce vecteur se comporte ainsi

$$\begin{pmatrix}\Delta c\\ \Delta A\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

C'est un problème car le vecteur nul n'est pas utilisable comme vecteur directeur de la tangente

Pour résoudre ce problème, une première idée est de diviser le vecteur par Δc. On a ainsi

$$\begin{pmatrix}\Delta c\\ \Delta A\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\ \frac{\Delta A}{\Delta c}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1\\ \frac{dA}{dc}\end{pmatrix}$$

On retrouve ainsi le vecteur directeur de la tangente qu'on a passablement utilisé dans les problèmes d'analyse, notamment pour calculer l'angle entre deux fonctions en un de leurs points d'intersection.

$$\begin{pmatrix}1\\ A'(c)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \frac{dA}{dc}\end{pmatrix}$$

Une deuxième idée est de diviser ce vecteur directeur par Δt. On a ainsi

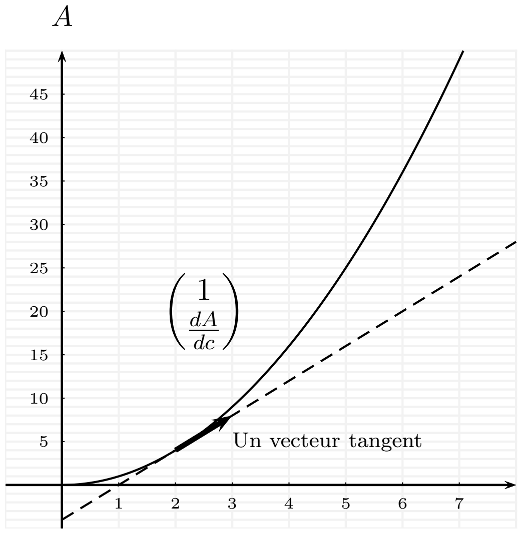
$$\begin{pmatrix}\Delta c\\ \Delta A\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}\frac{\Delta c}{\Delta t}\\ \frac{\Delta A}{\Delta t}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\frac{dc}{dt}\\ \frac{dA}{dt}\end{pmatrix}$$

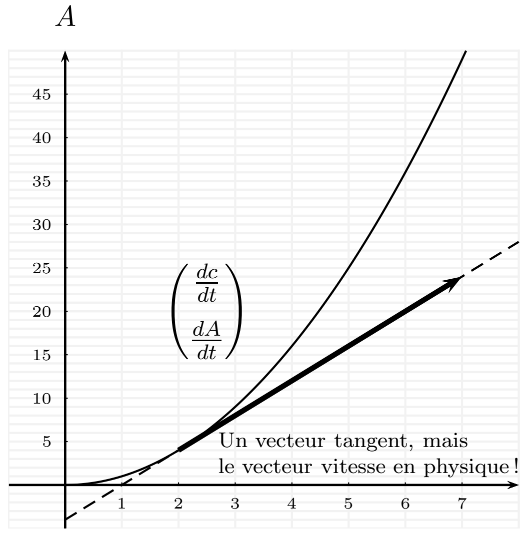
Ainsi les vecteurs suivants sont parallèles.

$$\begin{pmatrix}1\\ \frac{dA}{dc}\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}\frac{dc}{dt}\\ \frac{dA}{dt}\end{pmatrix}$$

On voit le multiple qui permet de passer du vecteur de gauche au vecteur de droite et cela démontre la relation (★).

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dc}\cdot\frac{dc}{dt}} \quad (\bigstar)$$

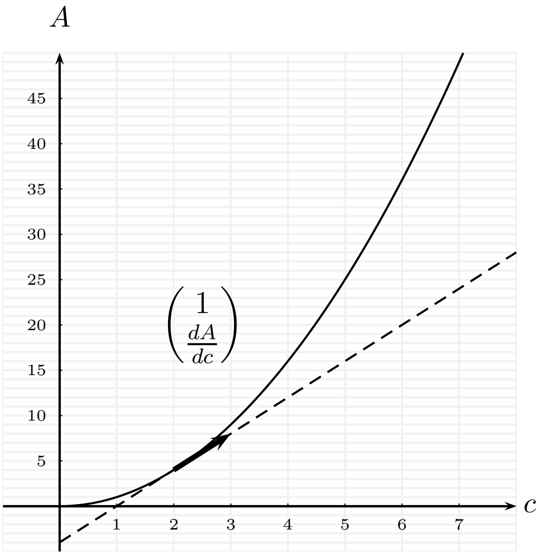


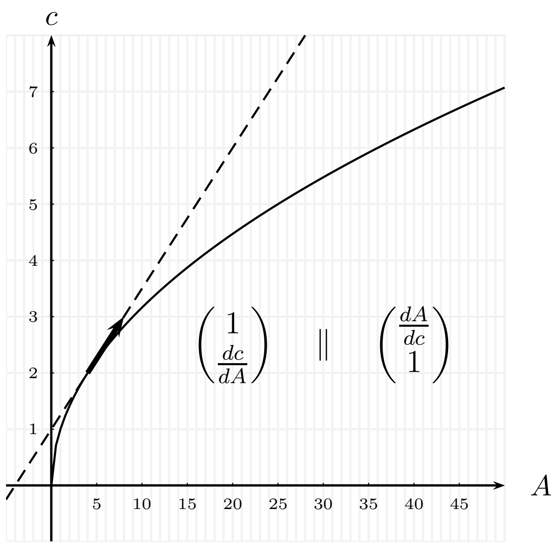


La relation (★) permet de montrer que les deux vecteurs représentés ci-dessus sont parallèles. Ainsi, les deux dérivées par rapport à t permettent de trouver un vecteur tangent à une courbe paramétrée en un instant t : en physique, c'est le vecteur vitesse !

Une autre formule intéressante

Si on utilise les fonctions réciproques, c'est-à-dire on exprime c en fonction de A au lieu d'exprimer A en fonction de c. les graphes sont symétriques (par la symétrie d'axe $y = x$).





Les vecteurs tangents sont ainsi car la pente de la tangente du repère de gauche vaut $\frac{dA}{dc}$, alors que pour celle du repère de droite, elle vaut $\frac{dc}{dA}$ (la réciproque échange les rôles de c et de A). Mais cette symétrie échange aussi les composantes des vecteurs, ainsi en utilisant la propriété des vecteurs parallèles, on a la relation suivante.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{dc}{dA} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} \frac{dA}{dc} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underset{\text{est } \frac{dA}{dc}}{\overset{\text{Le multiple}}{\Longrightarrow}} \quad \boxed{\frac{dA}{dc} \cdot \frac{dc}{dA} = 1}$$

Moralité : ce ne sont pas de vraies «fractions», mais elles obéissent aux mêmes règles de multiplication et de division que les «vraies» fractions.

Application basée sur les deux exemples sur le carré

On considère un carré de côté c et d'aire A.

1. On peut exprimer l'aire du carré en fonction de la longueur de ses côtés à l'aide de la fonction
$$A(c) = c^2$$

2. On peut exprimer la longueur des côtés du carré en fonction de son aire à l'aide de la fonction
$$c(A) = \sqrt{A}$$

On a les dérivées suivantes.

$$\frac{dA}{dc} = 2c = 2\sqrt{A} \qquad \text{et} \qquad \frac{dc}{dA} = \frac{1}{2\sqrt{A}} = \frac{1}{2c}$$

Que l'on prenne c ou A comme variable, on retrouve bien la relation

$$\frac{dA}{dc} \cdot \frac{dc}{dA} = 1$$

Résolution plus élégante des deux exemples du carré

On note $A(t)$ pour l'aire exprimée en fonction du temps, $c(t)$ pour la longueur des côtés en fonction du temps et $A(c) = c^2$ pour l'aire exprimée en fonction de la longueur des côtés.

1. On résout le problème «Les côtés d'un carré de 2 cm de côté croissent de 5 $^{\text{cm}}/_{\text{min}}$. Comment croit l'aire ?» ainsi :

$$\begin{array}{ccccc} \begin{array}{c}\text{taux d'accroissement}\\ \text{de l'aire en fonction}\\ \text{du temps}\end{array} & = & \begin{array}{c}\text{dérivée de } A\\ \text{en fonction de } c\end{array} & \cdot & \begin{array}{c}\text{taux d'accroissement}\\ \text{des côtés en fonction}\\ \text{du temps}\end{array} \\ \dfrac{dA}{dt} & = & \dfrac{dA}{dc} & \cdot & \dfrac{dc}{dt} \\ & = & 2c & \cdot & \dfrac{dc}{dt} \end{array}$$

   Lorsque $c = 2$, on a $\dfrac{dc}{dt} = 5\ ^{\text{cm}}/_{\text{min}}$ et ainsi, on a $\dfrac{dA}{dt} = 20\ ^{\text{cm}^2}/_{\text{min}}$.

   Si on veut être un peu plus pointilleux, il faudrait plutôt écrire

$$\frac{dA}{dt}(t_0) = \frac{dA}{dc}(c(t_0)) \cdot \frac{dc}{dt}(t_0) = 4 \cdot 5 = 20\ ^{\text{cm}^2}/_{\text{min}}$$

   où t_0 correspond à l'instant où les côtés du carré font 2 cm, c'est-à-dire $c(t_0) = 2$.

2. On résout le problème «Un carré de 4 cm^2 d'aire croît de 5 $^{\text{cm}^2}/_{\text{min}}$. Comment croissent les côtés ?» ainsi :

   Il n'y a pas besoin de savoir dériver la racine carrée, car on peut réutiliser la dérivée calculée au point précédent, puisqu'on a la relation

$$\frac{dA}{dc} \cdot \frac{dc}{dA} = 1$$

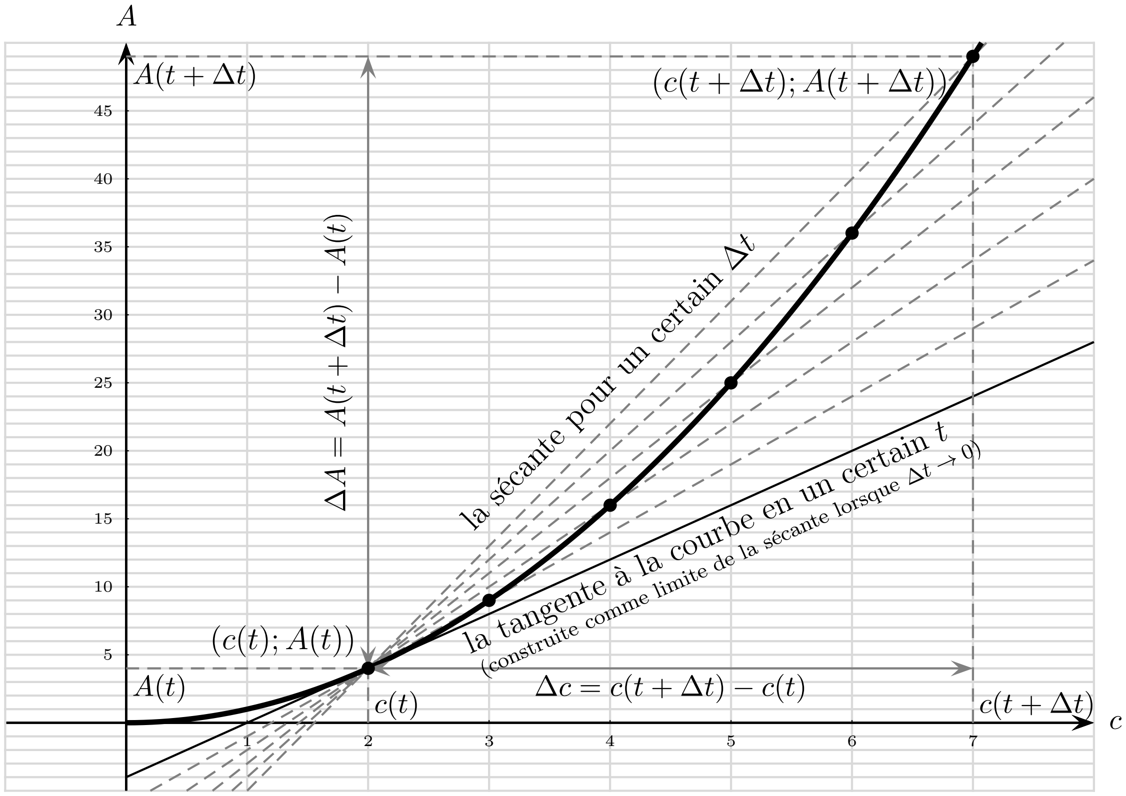
   On a ainsi

$$\begin{array}{ccccc} \begin{array}{c}\text{taux d'accroissement}\\ \text{des côtés en fonction}\\ \text{du temps}\end{array} & = & \begin{array}{c}\text{dérivée de } c\\ \text{en fonction de } A\end{array} & \cdot & \begin{array}{c}\text{taux d'accroissement}\\ \text{de l'aire en fonction}\\ \text{du temps}\end{array} \\ \dfrac{dc}{dt} & = & \dfrac{dc}{dA} & \cdot & \dfrac{dA}{dt} \\ \dfrac{dc}{dt} & = & \dfrac{1}{\frac{dA}{dc}} & \cdot & \dfrac{dA}{dt} \\ & = & \dfrac{1}{2c} & \cdot & \dfrac{dA}{dt} \end{array}$$

   Lorsque $A = 4$ cm^2, on a $c = 2$ cm et $\dfrac{dA}{dt} = 5\ ^{\text{cm}^2}/_{\text{min}}$. Ainsi, on a $\dfrac{dc}{dt} = \dfrac{5}{4}\ ^{\text{cm}}/_{\text{min}}$.

Autre vision de la démonstration de la dérivée en cascade

On représente les fonctions A et c comme une courbe paramétrée[3] et on revient à la définition de la dérivée.



On voit sur la représentation de la courbe paramétrée que pour Δt fixé, on a

$$\begin{cases} \Delta c = c(t+\Delta t) - c(t) \\ \Delta A = A(t+\Delta t) - A(t) \end{cases} \iff \begin{cases} c(t) + \Delta c = c(t+\Delta t) \\ A(t) + \Delta A = A(t+\Delta t) \end{cases}$$

Sous ces notations, on a

$$\lim_{\Delta c \to 0} \frac{A_c(c+\Delta c) - A_c(c)}{\Delta c} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{\Delta t}$$

la fonction A peut aussi s'exprimer en fonction de t
car la fonction c s'exprime en fonction de t

$$\downarrow$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A_c(c(t+\Delta t)) - A_c(c(t))}{c(t+\Delta t) - c(t)} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{A_c(c(t+\Delta t)) - A_c(c(t))}{c(t+\Delta t) - c(t)} \cdot \frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{\Delta t} \right)$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A_c(c(t+\Delta t)) - A_c(c(t))}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t}$$

Ainsi, sous la notation de Leibniz, on a montré (à nouveau) la dérivation en cascade

$$\boxed{\frac{dA}{dc} \cdot \frac{dc}{dt} = \frac{dA}{dt}}$$

3. Voir le chapitre 5 du supplément pour scientifiques du cours DF ; mais pour ce qui suit, les deux exemples sur le carré suffisent.

14.8.2 Les dérivées implicites

On considère un point $P(x;y)$ sur le cercle trigonométrique d'ordonnée positive ($y > 0$). Calculons la pente de la tangente au cercle en ce point P. On procède de manière classique par les points 1, 2 ; le but de cette section est d'observer qu'on peut faire de même sur une équation implicite comme on le montre en 3 et surtout en 4 ; le point 5 est juste un clin d'œil à la géométrie.

1. On peut écrire y en fonction de x, $y(x) = \sqrt{1-x^2}$, la pente est égale à la dérivée de y en fonction de x.

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{y}$$

2'. On peut écrire x en fonction de y, $x(y) = \pm\sqrt{1-y^2}$ ($+$ si $x > 0$, $-$ si $x < 0$). La pente cherchée est

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'(y)}$$

On a ainsi

$$x'(y) = \pm\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} \cdot (-2y) = \pm\frac{-y}{\sqrt{1-y^2}} = \pm\frac{-y}{\pm x} = -\frac{y}{x} \implies y'(x) = -\frac{x}{y}$$

2". On peut isoler x de l'équation $x^2 + y^2 = 1$ en considérant y comme une fonction de x. On obtient $x = \pm\sqrt{1-y^2(x)}$ ($+$ si $x > 0$, $-$ si $x < 0$).

On dérive chaque partie de l'équation par rapport à x.

$$1 = \pm\frac{1}{2\sqrt{1-y^2(x)}} \cdot \big(-2y(x)\big) \cdot y'(x) \iff y'(x) = \frac{1}{\pm\frac{1}{\pm 2x} \cdot (-2y)} = -\frac{x}{y}$$

3. On définit le cercle par l'équation paramétrée *implicite*[4] $x^2(t) + y^2(t) = 1$ (avec, par exemple, $x(t) = \cos(t)$ et $y(t) = \sin(t)$). On dérive à gauche et à droite.

$$2x(t)\frac{dx}{dt}(t) + 2y(t)\frac{dy}{dt}(t) = 0 \overset{:\frac{dx}{dt}(t)}{\iff} 2x(t) + 2y(t)\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}(t) = 0$$

Comme l'ordonnée du point P est positive, elle peut s'écrire en fonction de x.

$$\iff 2x(t) + 2y(t)\frac{dy}{dx}(x(t)) = 0 \iff 2x + 2y(x)y'(x) = 0 \iff y'(x) = -\frac{x}{y}$$

4. On sait que le cercle trigonométrique est défini par l'équation $x^2+y^2 = 1$ qui est une équation *implicite*. Comme le point P est d'abscisse positive, on peut exprimer y en fonction de x (sans avoir besoin de donner la fonction de manière explicite). Ainsi, l'équation devient $x^2 + y^2(x) = 1$. On dérive à gauche et à droite.

$$2x + 2y(x)\frac{dy}{dx}(x) = 0 \iff 2x + 2y(x)y'(x) = 0 \iff y'(x) = -\frac{x}{y}$$

5. Le vecteur normal à la tangente en P est $\binom{x}{y}$, ainsi le vecteur directeur est $\binom{y}{-x}$ qui est parallèle au vecteur $\binom{1}{-\frac{x}{y}}$. Ainsi la pente de la tangente est $-\frac{x}{y}$.

4. On dit que l'équation est implicite car x et y ne sont pas isolés.

Chapitre 15

Démonstration de la règle de l'Hospital

Théorème de Cauchy

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On considère deux fonctions dérivables $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose de plus que $g(b) - g(a) \neq 0$ et que g ne s'annule pas sur $]a, b[$.
Alors, il existe (au moins) un nombre ξ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Remarque

Ce n'est pas une application directe du théorème des accroissements finis car même si on peut transformer le terme de gauche de la manière suivante,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}}$$

on ne peut pas en déduire le théorème de Cauchy puisqu'on aurait à priori pas le même ξ comme argument de f' et de g'.

Règle de l'Hospital (première partie)

On suppose qu'il existe un voisinage V de $a \in \mathbb{R}$ et deux fonctions f et g telles que

1. f et g sont dérivables sur $V \setminus \{a\}$.
2. g et g' ne s'annulent pas sur $V \setminus \{a\}$.
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.

De plus, on suppose que la limite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe. Alors, on a : $\boxed{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$

Remarques

1. La preuve de cette règle nécessite la connaissance du théorème de Cauchy.
2. La règle de l'Hospital fonctionne aussi lorsqu'on remplace a par $+\infty$ ou $-\infty$. La preuve reste rigoureusement la même. Ce sont les voisinages qui changent.

Preuve du théorème de Cauchy

La preuve est très similaire, il suffit de contempler la fonction

$$F(x) \;=\; \big(g(b)-g(a)\big)\big(f(b)-f(x)\big)-\big(g(b)-g(x)\big)\big(f(b)-f(a)\big)$$

Pour mieux visualiser cette fonction, on peut aussi l'écrire comme un déterminant

$$F(x) \;=\; \begin{vmatrix} f(b)-f(x) & f(b)-f(a) \\ g(b)-g(x) & g(b)-g(a) \end{vmatrix}$$

Cette fonction est dérivable sur $[a, b]$ et on a $F(b) = F(a) = 0$.
Par le théorème de Rolle (appliqué à la fonction F), il existe un nombre ξ entre a et b tel que

$$F'(\xi) = 0$$

Or, en dérivant F, on trouve

$$F'(x) = -(g(b)-g(a))f'(x) + g'(x)(f(b)-f(a))$$

Donc

$$0 = F'(\xi) = -(g(b)-g(a))f'(\xi) + g'(\xi)(f(b)-f(a))$$

Par conséquent

$$(g(b)-g(a))f'(\xi) = g'(\xi)(f(b)-f(a))$$

Et ainsi

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

□

Preuve de la première partie de la règle de l'Hospital

Le théorème de Cauchy dit que pour tout x et y dans $V \setminus \{a\}$ tels que[1] $g(x)-g(y) \neq 0$, il existe $\xi_{x,y}$ entre x et y tel que

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})}$$

Si on fait tendre y vers a, on obtient par l'hypothèse 3, que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to a}\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \lim_{y\to a}\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})}$$

Si on fait ensuite tendre x vers a, on obtient

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x,y\to a}\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})} \overset{\bigstar}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

L'opération $\bigstar$ est extrêmement délicate, car bien que $\xi_{x,y}$ (qui se trouve entre x et y) se rapproche de a lorsque x et y tendent vers a, il se pourrait que $\lim_{x,y\to a} f'(\xi_{x,y})/g'(\xi_{x,y})$ existe alors que $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ n'existe pas (voir l'exemple qui suit). C'est pour cela que l'on a supposé que cette dernière existe, car dans ce cas on peut montrer (mais il faut utiliser des outils mathématiques bien plus fins) que l'on a bien l'égalité $\bigstar$. □

1. Cette condition ne pose pas de problème : d'abord on choisit x, puis y dans un sous-voisinage V_x de V tel que $|z| < |x|$ pour tout $z \in V_x$. C'est possible puisque $\lim_{x\to a} g(x) = 0$.

Avantage de cette version par rapport à la version light

On peut utiliser cette règle dans bien plus de cas, puisqu'ici les fonctions f et g peuvent très bien ne pas être définies en a, contrairement à la version light. La limite ci-dessous en est un exemple. On montre plus loin que $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$.

La règle de l'hospital nous montre que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x)}{\sin(x)} \overset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)+1}{\cos(x)} = -\infty$.

Un cas où la règle de l'Hospital n'est pas applicable

On se propose de calculer la limite : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$.

Le lecteur attentif aura tout de suite remarqué que cette limite est calculable facilement.

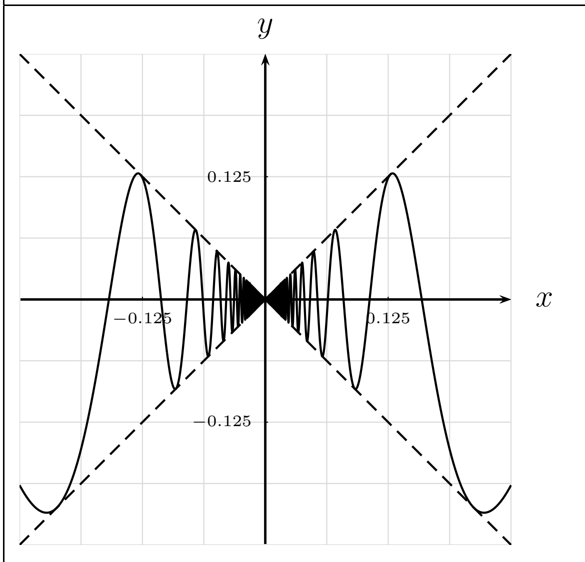
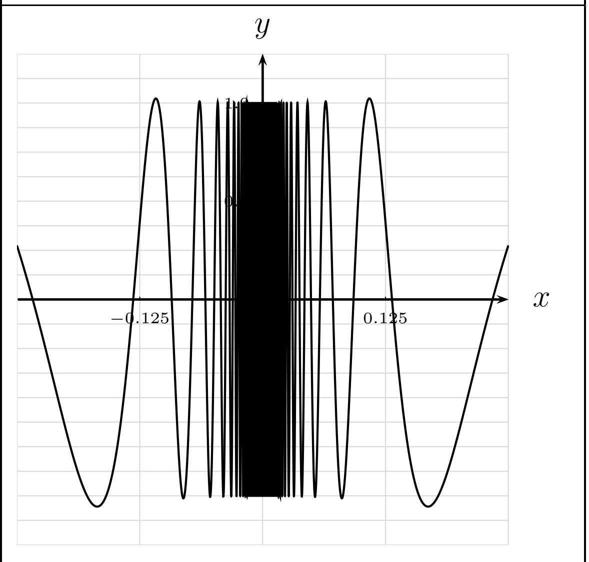
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Par contre la règle de l'Hospital ne s'applique pas pour cette fonction car la limite suivante n'existe pas.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1}$$

En effet, la fonction $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet aucune limite, puisqu'en se rapprochant de 0 elle va osciller verticalement entre -1 et 1 une infinité de fois...

Pour mieux se rendre compte de ce qu'il se passe dans cet exemple, voici les graphes des fonctions $\frac{f(x)}{g(x)}$ et $\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Graphe de $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	Graphe de $2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
	

En regardant le passage délicat de la preuve ★ suivant.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x,y\to a} \frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})} \overset{\star}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

On se rend compte que les $\xi_{x,y}$ sont tels que la limite $\lim_{x,y\to a} \frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})}$ soit nulle, comme celle de la fonction de gauche. Cette limite forme une sous-suite de la suite (généralisée) de droite qui admet, en termes techniques, une infinité de valeurs d'adhérence entre -1 et 1, mais qui ne converge pas.

Règle de l'Hospital (deuxième partie)

On suppose qu'il existe un voisinage V de a ($a \in \mathbb{R}$ ou $a \in \{-\infty, +\infty\}$) et deux fonctions f et g telles que

1. f et g sont dérivables sur $V \setminus \{a\}$.
2. f' et g' ne s'annulent pas sur $V \setminus \{a\}$.
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

De plus, on suppose que :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existe et appartient à } \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existe}$$

Alors, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$

Preuve

On se ramène à la première partie de la règle de l'Hospital.

Précisons que puisque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, on peut prendre un voisinage suffisamment petit pour que ni f, ni g ne s'annulent sur ce voisinage.

On peut donc écrire sans arrière pensée l'égalité suivante.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \quad \text{où} \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ et } \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = 0$$

Ici, on se retrouve avec les hypothèses de la première partie de la règle de l'Hospital. On peut donc l'appliquer.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \overset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to a} \frac{-\frac{1}{g(x)^2}\cdot g'(x)}{-\frac{1}{f(x)^2}\cdot f'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)^2}{g(x)^2}\cdot\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

On a supposé que les limites existent, on peut donc écrire

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}\right)^2 \cdot \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

On remarque une simplification, puisque le terme de gauche est non nul. On a ainsi

$$1 = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

Donc

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

Règle de l'Hospital (troisième et dernière partie)

On suppose qu'il existe un voisinage V de a ($a \in \mathbb{R}$ ou $a \in \{-\infty, +\infty\}$) et deux fonctions f et g telles que

1. f et g sont dérivables sur $V \setminus \{a\}$.
2. f' et g' ne s'annulent pas sur $V \setminus \{a\}$.
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

De plus, on suppose que les limites suivantes existent.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Alors, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$

Preuve

Un des deux seuls cas n'ayant pas été démontré dans la deuxième partie est celui où

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ (donc existe)}$$

Dans ce cas, on va éviter le problème en ajoutant 1. On a

$$1 = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} + 1 = \lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)}{g(x)}$$

On constate que

$$\lim_{x\to a} \frac{(f(x)+g(x))'}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)+g'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} + 1 \text{ existe}$$

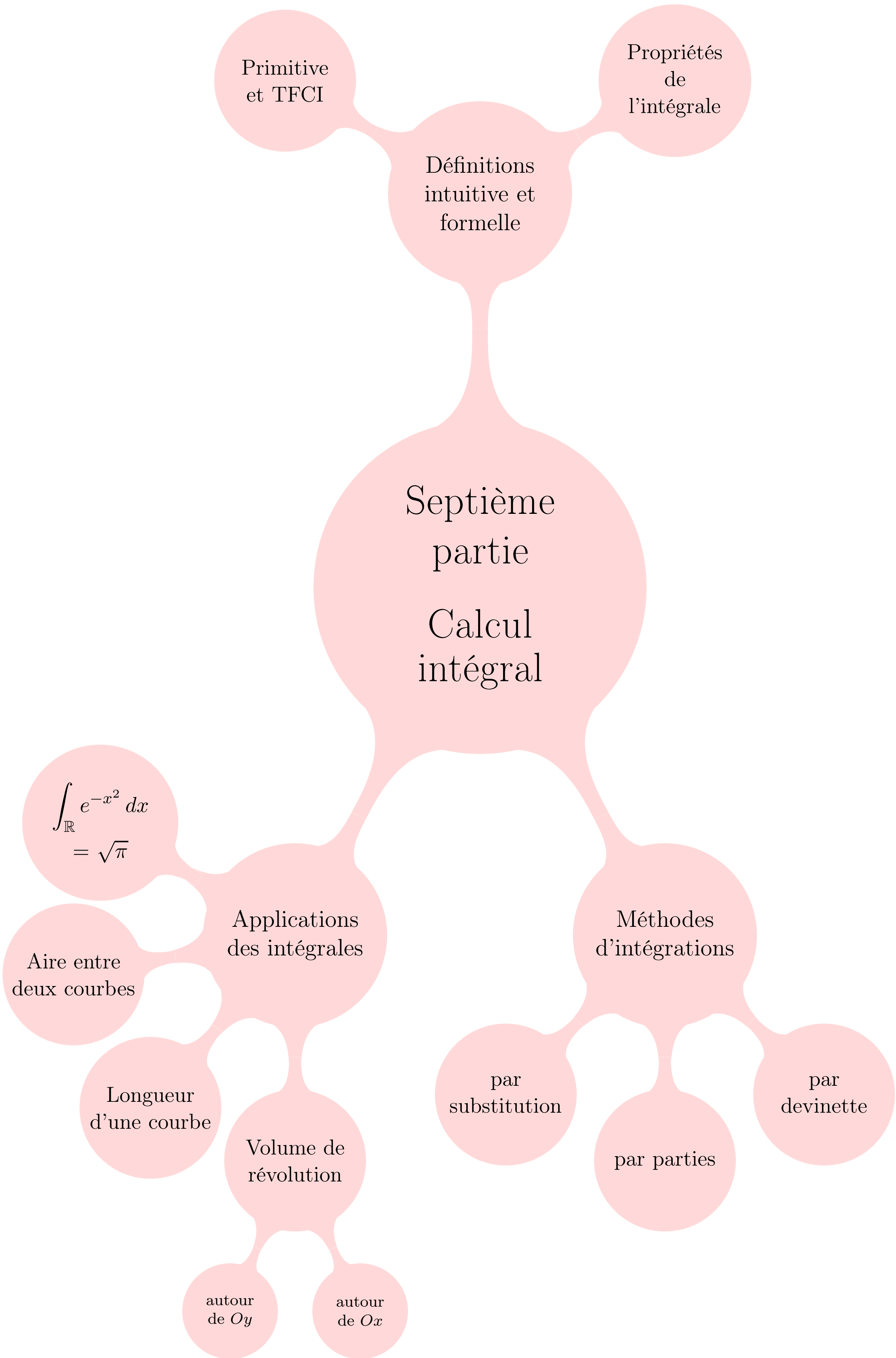
Grâce à cette astuce, on est dans les hypothèses de la deuxième partie de la règle de l'Hospital (en prenant la fonction $f(x)+g(x)$ à la place de la fonction f). On a ainsi

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} + 1 = \lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{(f(x)+g(x))'}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} + 1$$

Donc

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ (= 0)$$

Il faudrait encore regarder le cas où la limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$, mais cela ne pose pas de problème, car dans ce cas, on a $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ (en échangeant les rôles de f et de g) et on conclut grâce à ce qu'on vient de faire. $\square$

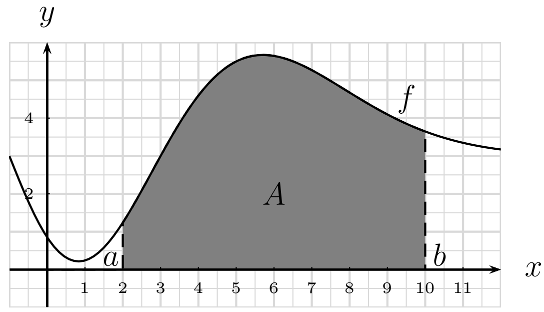

Septième partie
Calcul intégral
Définitions intuitive et formelle
Primitive et TFCI
Propriétés de l'intégrale
Applications des intégrales
$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$
Aire entre deux courbes
Longueur d'une courbe
Volume de révolution
autour de Oy
autour de Ox
Méthodes d'intégrations
par substitution
par parties
par devinette

Chapitre 16

Intégrales et primitives

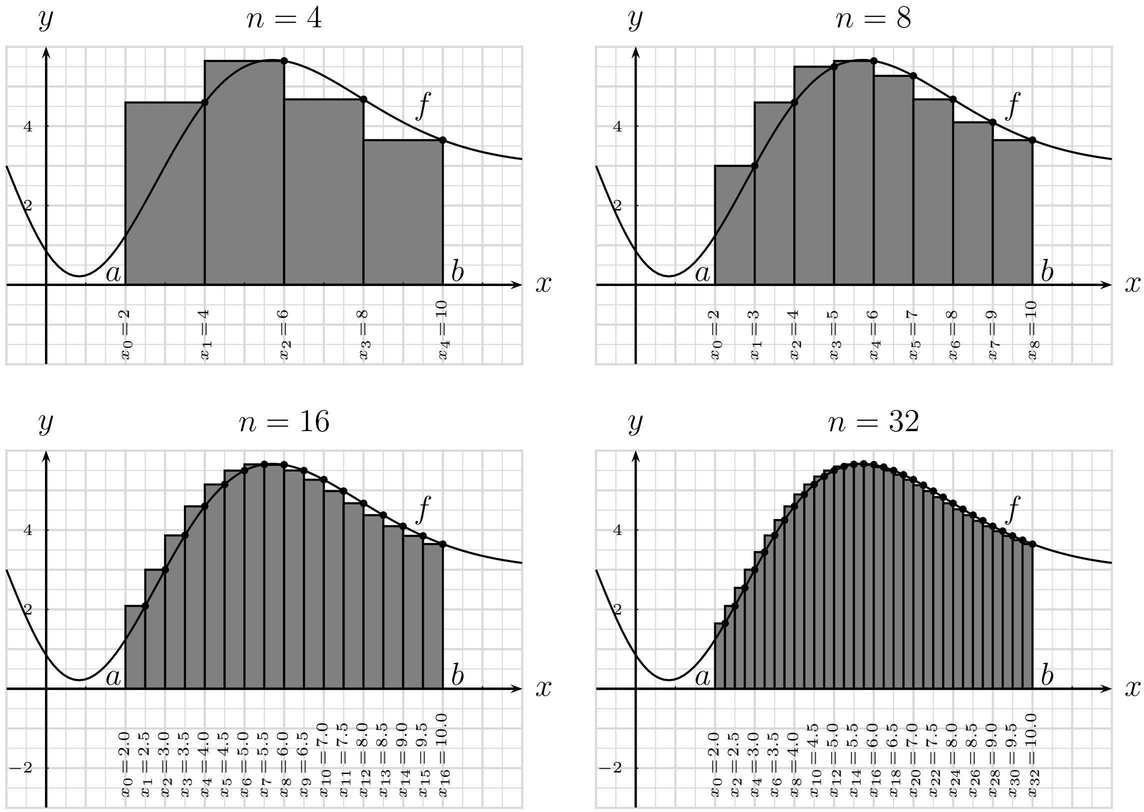
16.1 Définition intuitive

L'*intégrale de la fonction f entre les bornes a et b* est l'aire signée entre la fonction, l'axe des x et les axes verticaux $x = a$ et $x = b$.



16.2 Définition formelle

Commençons par supposer que $a < b$.
Pour calculer cette aire, on découpe l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles.



Ainsi, lorsque $n \to +\infty$, alors la somme des aires des rectangles tend vers l'intégrale A.

Formellement, on procède ainsi :

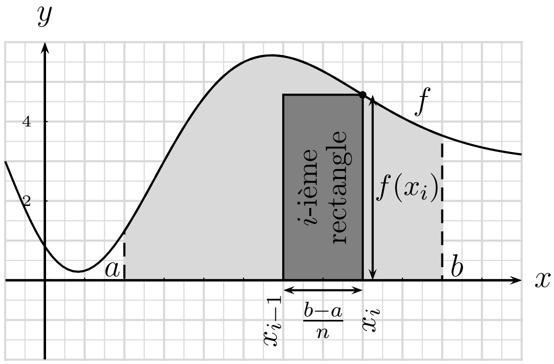
1. On commence par subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ avec $i \in \{1, \ldots, n\}$. Cela permet d'approcher l'aire cherchée en calculant l'aire des n rectangles dont le coin droit touche le graphe de la fonction, donc la hauteur du i-ième rectangle est $f(x_i)$.

   L'aire du i-ième rectangle est donnée par la célèbre formule "hauteur fois base", ainsi

   $$\text{Aire du } i\text{-ième rectangle } = f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n}$$

   De ce fait, l'aire de tous les rectangles vaut :

   $$\sum_{i=1}^{n} \overbrace{\Big(\underbrace{f(x_i)}_{\substack{\text{hauteur}\\ \text{du } i\text{-ème}\\ \text{rectangle}}} \cdot \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\substack{\text{base}\\ \text{du } i\text{-ème}\\ \text{rectangle}}} \Big)}^{\text{Aire du } i\text{-ième rectangle}}$$



2. On fait ensuite tendre n vers l'infini (et par conséquent la longueur des intervalles de la subdivision vers 0), l'aire totale de tous les rectangles va tendre vers l'aire A cherchée.

On peut donc écrire :

$$A = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right)$$

Comme la longueur de chaque intervalle de la subdivision tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, on peut la remplacer par Δx (le lecteur se rappellera le chapitre de la dérivée où Δx symbolisait un nombre étant sensé être très petit). Autrement dit, la formule devient

$$A = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x \right) \quad \text{si on note } \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Notation

De nos jours, on note l'aire sous le graphe de la fonction f entre les points a et b de la façon suivante.

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\, dx}$$

a, b	*bornes d'intégration*
x	*variable d'intégration*

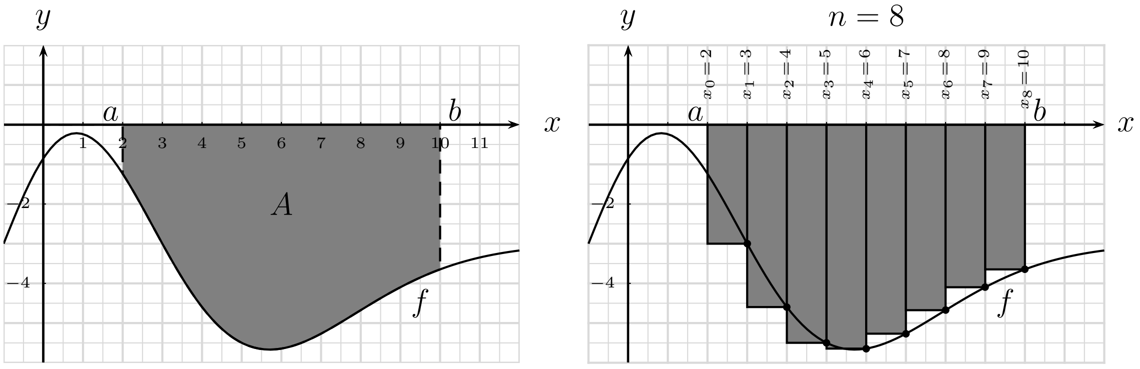
Il s'agit de l'*intégrale (définie) de la fonction f de a à b.*

C'est une transformation visuelle de l'écriture ci-dessus, on remplace Δx par dx et la limite de la somme par un S déformé en $\int$. On bascule aussi les bornes a et b en dessous et en dessus de ce symbole afin de ne pas les oublier.

16.3 Pourquoi l'intégrale est une aire signée

Première possibilité d'avoir un signe négatif

La même technique de calcul que celle vue ci-dessus pour la fonction dessinée ci-dessous, ne donne pas une aire positive.



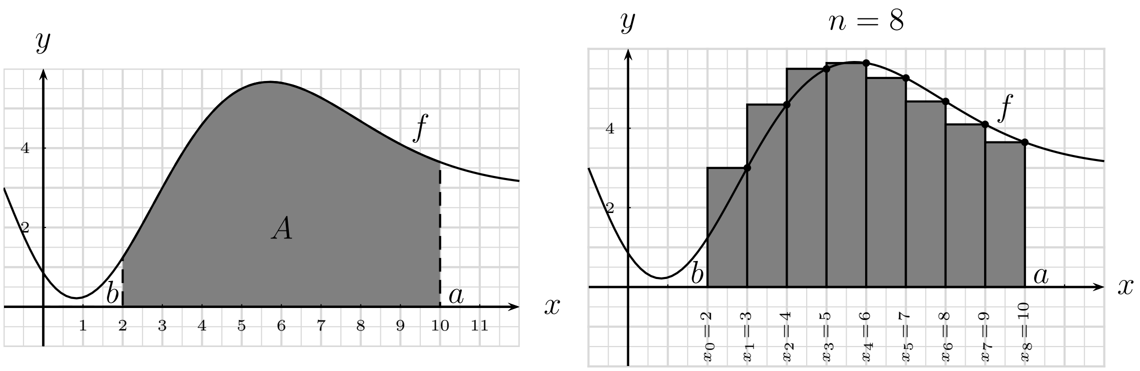
En effet, si on regarde l'expression

$$A = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

On voit que $f(x_i)$ est négatif et qu'ainsi chaque terme de la somme est négatif. L'aire sera donc calculée au signe près.

Deuxième possibilité d'avoir un signe négatif

Une autre possibilité d'avoir une intégrale négative est d'inverser les bornes d'intégration.



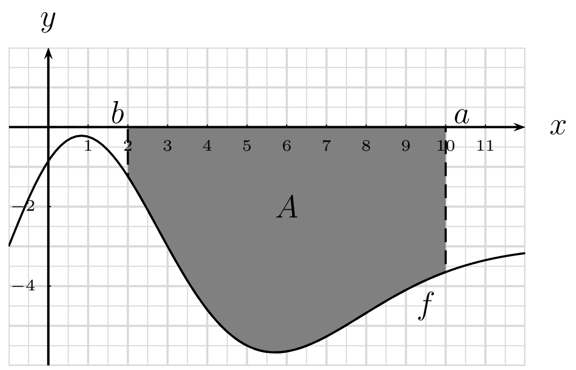
En effet, si on regarde l'expression

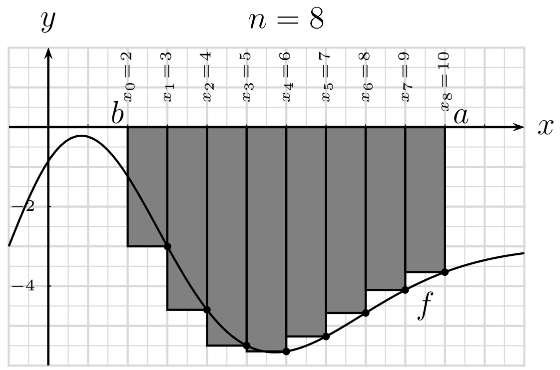
$$A = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

On voit que $\frac{b-a}{n}$ est négatif et qu'ainsi chaque terme de la somme est négatif. L'aire sera donc calculée au signe près.

Ces deux cas peuvent se produire en même temps

Si la fonction est négative et que les bornes d'intégration sont inversées, la règle des signes s'applique et l'intégrale est positive.





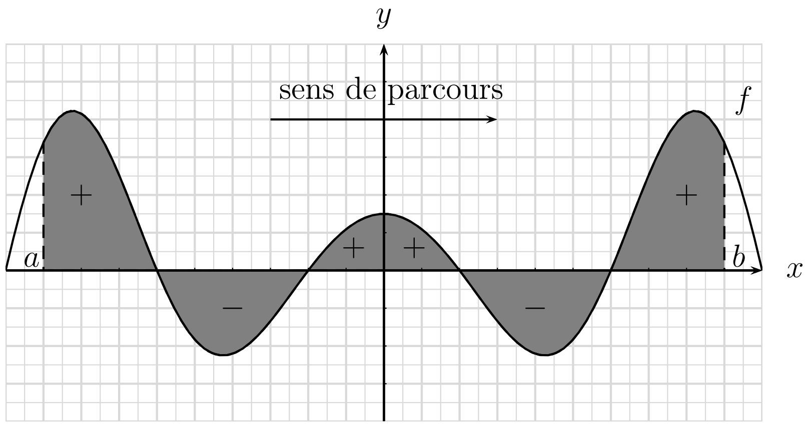
En effet, si on regarde l'expression

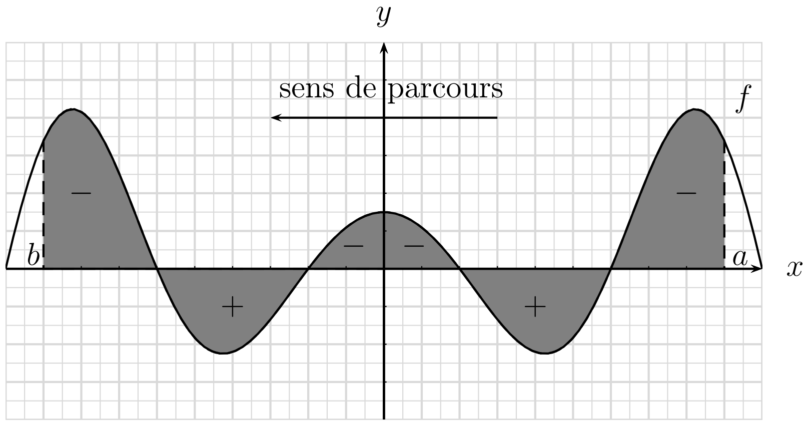
$$A = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right)$$

On voit que $f(x_i)$ et que $\frac{b-a}{n}$ sont négatifs et qu'ainsi chaque terme de la somme est positif (règle des signes). Le résultat sera vraiment égal à l'aire.

En résumé

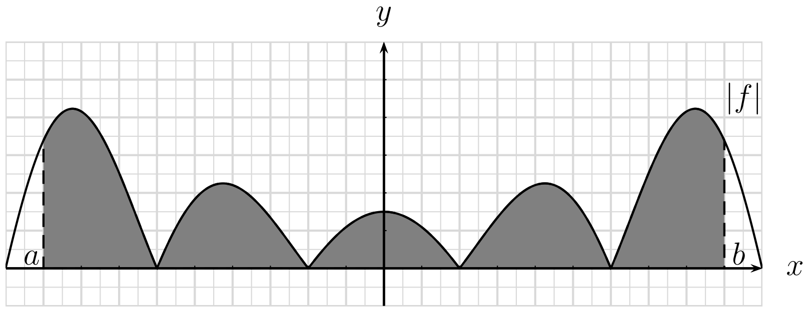
Lorsque la fonction change de signe, l'intégrale ne donne pas l'aire entre le graphe et l'axe horizontal. En effet, d'après ce qui précède, l'aire sur chaque morceau sera comptée avec un signe. On a un deuxième changement de signe lorsque $a > b$ (au lieu de $a < b$).





16.3.1 Pour être sûr d'avoir l'aire

Si on désire vraiment calculer la surface entre le graphe et l'axe, on utilise la valeur absolue pour passer tout le graphe au dessus de l'axe horizontal.



On peut réaliser cela grâce à la valeur absolue[1]. Il faut donc calculer

$$\int_a^b |f(x)|\, dx$$

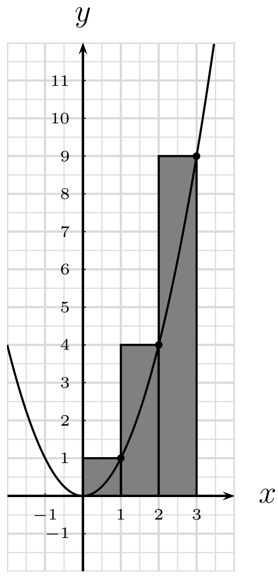
et s'assurer que a est bien plus petit que b.

1. On peut aussi intégrer sur chaque morceau et tenir compte des signes 'à la main'.

16.4 Exemples

Aire sous une parabole

Calculons l'aire sous la parabole $f(x) = x^2$ entre 0 et $b > 0$.



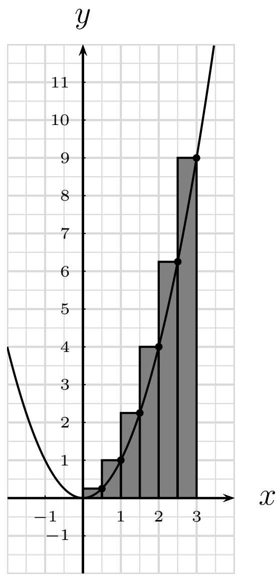
On commence par subdiviser l'intervalle $[0, b]$ en n morceaux (ci-contre, l'intervalle $[0, 3]$ est subdivisé en 3, puis en 6 morceaux).

Les x_i sont ici donnés par $x_i = \frac{b}{n} \cdot i$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$. Ainsi, le i-ième rectangle est de hauteur $f(x_i)$ et de base $\frac{b}{n}$. On calcule l'aire de tous les rectangles, notée A_n, comme suit :

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) \cdot \frac{b}{n} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 \cdot \frac{b}{n} \right)$$

En substituant x_i, on obtient :

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{b}{n} \right)^3 i^2 \right) = \left(\frac{b}{n} \right)^3 \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \left(\frac{b}{n} \right)^3 \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \right) \end{aligned}$$



On peut faire progresser le calcul en utilisant la formule (qui peut se démontrer par récurrence) suivante :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} A_n &= \left(\frac{b}{n} \right)^3 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \\ &= \frac{b^3}{6} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{n \cdot n \cdot n} \\ &= \frac{b^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

Lorsqu'on fait tendre le nombre de tranches n vers l'infini, on obtient l'aire suivante

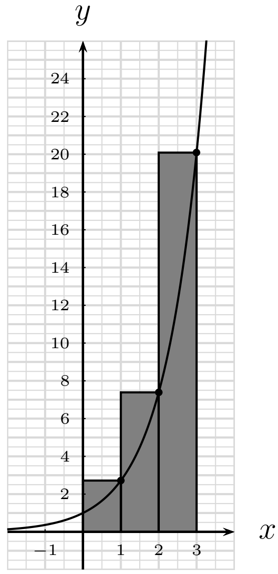
$$A = \lim_{n \to +\infty} A_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{b^3}{6} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n} \right)}_{\to 1} \underbrace{\left(2 + \frac{1}{n} \right)}_{\to 2} = \frac{b^3}{3}$$

Ainsi, on a montré que :

$$\int_0^b x^2 \, dx = \frac{b^3}{3}$$

Aire sous une exponentielle

Calculons l'aire sous l'exponentielle $f(x) = e^x$ entre 0 et $b > 0$.



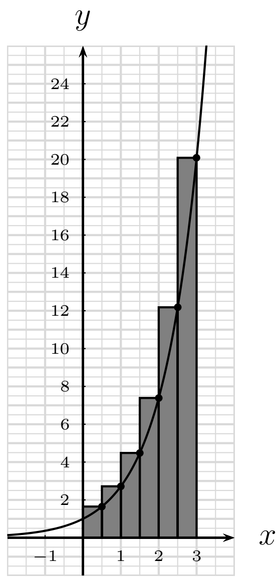
On commence par subdiviser l'intervalle $[0, b]$ en n morceaux (ci-contre, l'intervalle $[0, 3]$ est subdivisé en 3, puis en 6 morceaux).

Les x_i sont aussi donnés par $x_i = \frac{b}{n} \cdot i$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ainsi, le i-ième rectangle est de hauteur $f(x_i)$ et de base $\frac{b}{n}$. On calcule l'aire de tous les rectangles, notée A_n, comme suit :

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) \cdot \frac{b}{n} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(e^{x_i} \cdot \frac{b}{n} \right)$$

En substituant x_i, on obtient :

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{b}{n} i} \frac{b}{n} \right) = \frac{b}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{b}{n} i} \\ &= \frac{b}{n} \left(e^{\frac{b}{n}} + \left(e^{\frac{b}{n}}\right)^2 + \left(e^{\frac{b}{n}}\right)^3 + \cdots + \left(e^{\frac{b}{n}}\right)^n \right) \\ &= e^{\frac{b}{n}} \frac{b}{n} \left(1 + \left(e^{\frac{b}{n}}\right) + \left(e^{\frac{b}{n}}\right)^2 + \cdots + \left(e^{\frac{b}{n}}\right)^{n-1} \right) \end{aligned}$$



Il s'agit d'une progression géométrique dont la formule est

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad \left(= \frac{1 - r^n}{1 - r} \right)$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} A_n &= e^{\frac{b}{n}} \frac{b}{n} \cdot \frac{\left(e^{\frac{b}{n}}\right)^n - 1}{e^{\frac{b}{n}} - 1} \\ &= e^{\frac{b}{n}} \frac{b}{n} \cdot \frac{e^b - 1}{e^{\frac{b}{n}} - 1} \end{aligned}$$

Pour obtenir l'aire sous la courbe, on utilise le théorème de l'Hospital pour calculer la limite de l'aire A_n lorsque le nombre de tranches n tend vers l'infini (ici, n est la variable).

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \to +\infty} A_n = \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{b}{n}} \frac{b}{n} \cdot \frac{e^b - 1}{e^{\frac{b}{n}} - 1} = \lim_{n \to +\infty} (e^b - 1)\, e^{\frac{b}{n}} \cdot \frac{\frac{b}{n}}{e^{\frac{b}{n}} - 1} \\ &= (e^b - 1) \cdot \underbrace{\lim_{n \to +\infty} e^{\frac{b}{n}}}_{\to 1} \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{b}{n}}{e^{\frac{b}{n}} - 1} \overset{\text{Hospital}}{=} (e^b - 1) \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{-\frac{b}{n^2}}{e^{\frac{b}{n}} \cdot \left(-\frac{b}{n^2}\right)} \\ &= (e^b - 1) \cdot \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e^{\frac{b}{n}}}}_{\to 1} = e^b - 1 \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que :

$$\int_0^b e^x \, dx = e^b - 1$$

16.5 Propriétés de l'intégrale

En considérant l'intégrale comme une aire signée, on voit que l'intégrale satisfait les propriétés suivantes.

1. **Propriétés de linéarité**

   (a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \Big(f(x)+g(x)\Big)\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

2. **Sens de parcours**

   $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

3. **Contiguïté**

   $$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

4. **Préservation d'inégalité**

   Si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

16.6 La valeur moyenne d'une fonction

L'intégrale permet de définir la *moyenne d'une fonction f sur un intervalle* $[a;b]$.

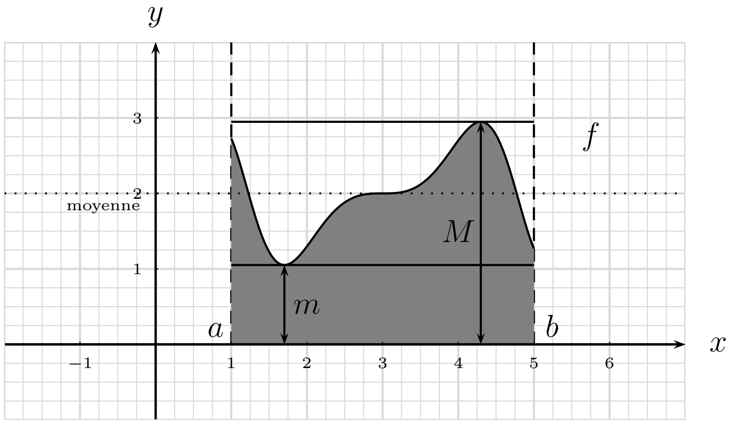
On peut définir la moyenne d'une fonction f entre a et b de la façon suivante.

$$\boxed{\text{moyenne}(f;a,b) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

Cette formule est analogue au cas non continu du calcul de la moyenne des notes d'un élève.

$$\text{moyenne} = \frac{1}{\text{nombre de notes}} \cdot \sum \text{notes}$$

Illustration



Sur ce dessin, la moyenne est évidemment 2 puisque la fonction est symétrique par rapport au point (3 ;2).

Théorème

Soit f une fonction continue définie sur l'intervalle $[a;b]$.
Alors, il existe (au moins) un nombre $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = \text{moyenne}(f;a,b)$.

Preuve

En effet, il est évident que la moyenne satisfait

$$m \leqslant \text{moyenne}(f;a,b) \leqslant M$$

où m est la valeur minimale atteinte par f sur l'intervalle $[a;b]$, tandis que M est la valeur maximale atteinte par f sur ce même intervalle.

Comme f est continue, elle va atteindre toutes les valeurs entre m et M, dont la moyenne. $\square$

Remarque

Ce théorème n'est valable que pour une fonction continue. Dans l'exemple des notes d'un élève, la moyenne de ses notes n'est pas forcément égale à l'une des notes.

16.7 Primitives

16.7.1 Le théorème fondamental du calcul intégral

Ingrédient 1

Soit f une fonction continue définie sur l'intervalle $[a;b]$.
Posons

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Alors, F_a est une fonction définie sur $[a;b]$ qui satisfait $F_a'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a;b]$.

Remarque

Dans l'énoncé ci-dessus, on est obligé d'écrire $\int_a^x f(t)\,dt$ au lieu de $\int_a^x f(x)\,dx$.
En effet, ceci est dû au fait que la variable de F_a est x et que x est une des deux bornes de l'intégrale. Ainsi, le nom de la variable d'intégration ne peut pas être x.

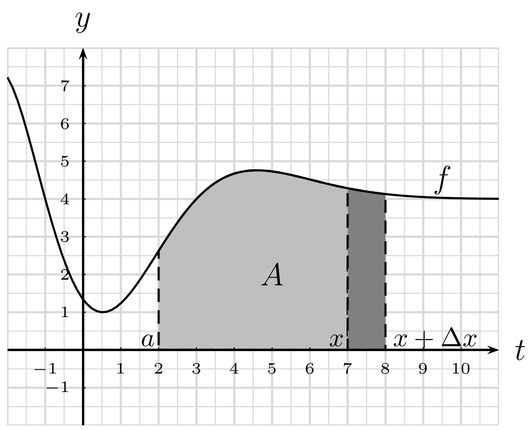
Preuve

Dérivons la fonction $F_a(x)$. Par définition de la dérivée, on a

$$F_a'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_a(x+\Delta x) - F_a(x)}{\Delta x}$$

On remarque que $F_a(x+\Delta x) - F_a(x)$ correspond à l'aire en gris foncé. On peut ainsi écrire

$$F_a(x+\Delta x) - F_a(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$



Donc, par définition de la moyenne, on a

$$\frac{F_a(x+\Delta x) - F_a(x)}{\Delta x} = \text{moyenne}(f; x, x+\Delta x)$$

On voit que lorsque Δx tend vers 0, alors la moyenne ci-dessus va se rapprocher de $f(x)$.
On a ainsi démontré que $F_a'(x) = f(x)$. $\square$

Définition

Si f et F sont des fonctions réelles telle que $F' = f$.
Alors, on dit que F *est une primitive de* f.

Ingrédient 2

Soit F_1 et F_2 deux primitives d'une même fonction f définie sur un intervalle.
Alors, il existe un nombre $C \in \mathbb{R}$, appelé *constante*, tel que

$$F_1(x) = F_2(x) + C$$

Preuve

Comme F_1 et F_2 sont des primitives de f, on a $F_1'(x) = f(x)$ et $F_2'(x) = f(x)$. Par conséquent, on a

$$(F_1 - F_2)'(x) = (F_1' - F_2')(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Cela signifie que la fonction $(F_1 - F_2)$ est une fonction constante (puisque sa dérivée est nulle et que l'on travaille sur un intervalle [2]).

Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $C = (F_1 - F_2)(x) = F_1(x) - F_2(x)$. $\square$

Théorème fondamental du calcul intégral

Soit f une fonction réelle continue définie sur l'intervalle $[a, b]$.
Alors on a

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\Big|_a^b} \qquad \text{où} \qquad F(x)\Big|_a^b \overset{\text{Notation}}{=} F(b) - F(a)$$

et où F est une primitive quelconque de f (c'est-à-dire une fonction telle que $F' = f$).

Preuve

Soit F une primitive quelconque de f. Par l'ingrédient 1 : $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est aussi une primitive de f. Donc, par l'ingrédient 2, on a

$$F_a(x) = F(x) + C \iff \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$$

1. En prenant $x = a$, on trouve la valeur de C.

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C \iff 0 = F(a) + C \iff C = -F(a)$$

   Donc, on a
$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

2. En prenant $x = b$, on conclut la preuve.

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

$\square$

Remarque

À la dernière ligne de la preuve, on a écrit $\int_a^b f(t)\,dt$. C'est une aire signée, donc un nombre. Ainsi le nom de la variable d'intégration n'a aucune importance (sauf si une borne contient une variable, comme dans l'énoncé de l'ingrédient 1, mais pas ici).

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$$

2. Si la fonction f était définie sur deux intervalles disjoints, alors la fonction $(F_1 - F_2)$ pourrait être constante sur chaque intervalle sans pour autant être constante sur son domaine de définition.

Notation

Lorsque f est une fonction continue, on utilise la notation de l'*intégrale indéfinie* pour noter une primitive de f.

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C \text{ où } C \text{ est une constante}}$$

Remarques

1. Cette notation est compatible avec les ingrédients et le théorème fondamental.
2. Cette notation implique que

$$\boxed{\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\int f'(x)\,dx = f(x) + C}$$

16.8 Trois façons de résoudre une intégrale

16.8.1 Intégration par devinette

On devine une primitive de la fonction. Pour cela, on peut se référer à une table de dérivation (qui se trouve à la page 215) ou faire appel à sa mémoire. Il s'agit d'une application directe du théorème fondamental du calcul intégral.

Exemples

1. Pour calculer, l'intégrale définie

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx$$

on se souvient que la fonction $\cos(x)$ à pour dérivée la fonction $-\sin(x)$, ainsi $-\cos(x)$ est une primitive de $\sin(x)$. Par le théorème fondamental du calcul intégral, on a

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^\pi = (-\cos(\pi)) - (-\cos(0)) = 1 + 1 = 2$$

2. Pour calculer, l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

on se souvient que la fonction $\sqrt{x}$ à pour dérivée la fonction $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, ainsi $2\sqrt{x}$ est une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Ainsi, on a

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C \text{ où } C \text{ est une constante}$$

On peut même vérifier le résultat en dérivant la réponse, $2\sqrt{x} + C$, pour retrouver l'expression à l'intérieur de l'intégrale, $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

16.8.2 Intégration par parties : intégrale définie

Théorème

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et g une fonction dont la dérivée est continue sur l'intervalle $[a, b]$. Notons F une primitive de f. Alors

$$\boxed{\int_a^b \overset{\uparrow}{f}(x)\overset{\downarrow}{g}(x)\,dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx}$$

On note avec «↑» la fonction dont on prend une primitive et avec «↓» celle qu'on dérive.

Preuve

Commençons par préciser que la primitive F existe et est définie sur $[a, b]$ car f est continue sur $[a, b]$. La règle du produit dit que

$$\Big(F(x)g(x)\Big)' = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

Ainsi (en notant TFCI pour le théorème fondamental du calcul intégral), on a

$$F(x)g(x)\Big|_a^b \overset{\text{TFCI}}{=} \int_a^b \Big(F(x)g(x)\Big)'\,dx \overset{\substack{\text{propriété de}\\ \text{l'intégrale}}}{=} \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

On peut donc isoler l'intégrale de $f(x)g(x)$.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx \qquad \square$$

Exemples

1. Pour cette intégration par parties, le bon choix est de prendre une primitive de $2x$ et de dériver $\ln(x)$.

$$\int_1^e \overset{\uparrow}{2x} \cdot \ln(\overset{\downarrow}{x})\,dx = x^2 \cdot \ln(x)\Big|_1^e - \int_1^e x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx = x^2 \cdot \ln(x)\Big|_1^e - \int_1^e x\,dx$$
$$= x^2\ln(x)\Big|_1^e - \tfrac{1}{2}x^2\Big|_1^e = \Big(e^2\ln(e) - 1\ln(1)\Big) - \Big(\tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{2}\Big) = \tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{1}{2}$$

2. Pour cette intégration par parties, le bon choix est de dériver x et de prendre une primitive de e^{3x}.

$$\int_0^1 \overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\uparrow}{e^{3x}}\,dx = x \cdot \tfrac{1}{3}e^{3x}\Big|_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \tfrac{1}{3}e^{3x}\,dx = x \cdot \tfrac{1}{3}e^{3x}\Big|_0^1 - \tfrac{1}{3}\int_0^1 e^{3x}\,dx$$
$$= \tfrac{1}{3}xe^{3x}\Big|_0^1 - \tfrac{1}{9}e^{3x}\Big|_0^1 = \Big(\tfrac{1}{3}e^3 - 0\Big) - \Big(\tfrac{1}{9}e^3 - \tfrac{1}{9}\Big) = \tfrac{2}{9}e^3 + \tfrac{1}{9}$$

16.8.3 Intégration par parties : intégrale indéfinie

Théorème

Soit f une fonction continue et g une fonction dont la dérivée est continue. Notons F une primitive de f. Alors, si C est une constante, on a

$$\boxed{\int \overset{\uparrow}{f}(x)\overset{\downarrow}{g}(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx + C}$$

On note avec «↑» la fonction dont on prend une primitive et avec «↓» celle qu'on dérive.

Preuve

Commençons par préciser que la primitive F existe car f est continue. La règle du produit dit que

$$\Big(F(x)g(x)\Big)' = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

Ainsi, à l'aide de la notation de l'intégrale indéfinie, on a

$$F(x)g(x) + C \overset{\text{notation}}{=} \int \Big(F(x)g(x)\Big)'\,dx \overset{\substack{\text{propriété des}\\\text{primitives}}}{=} \int f(x)g(x)\,dx + \int F(x)g'(x)\,dx$$

On peut donc isoler l'intégrale de $f(x)g(x)$.

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx + C$$

□

Exemples

1. Pour cette intégration par parties, le bon choix est de prendre une primitive de $2x$ et de dériver $\ln(x)$.

$$\int \overset{\uparrow}{2x} \cdot \ln\overset{\downarrow}{(x)}\,dx \;=\; x^2 \cdot \ln(x) \;-\; \int x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx + C \;=\; x^2 \cdot \ln(x) \;-\; \int x\,dx + C$$

$$=\; x^2 \ln(x) \;-\; \tfrac{1}{2}x^2 \;+\; D \quad \text{où } D \text{ est une constante}$$

On peut vérifier le calcul en dérivant.

$$\Big(x^2 \ln(x) \;-\; \tfrac{1}{2}x^2 + D\Big)' = 2x\ln(x) + x^2\frac{1}{x} - x = 2x\ln(x)$$

2. Pour cette intégration par parties, le bon choix est de dériver x et de prendre une primitive de e^{3x}.

$$\int \overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\uparrow}{e^{3x}}\,dx \;=\; x \cdot \tfrac{1}{3}e^{3x} \;-\; \int 1 \cdot \tfrac{1}{3}e^{3x}\,dx + C \;=\; x \cdot \tfrac{1}{3}e^{3x} \;-\; \tfrac{1}{3}\int e^{3x}\,dx + C$$

$$=\; \tfrac{1}{3}xe^{3x} \;-\; \tfrac{1}{9}e^{3x} \;+\; D \quad \text{où } D \text{ est une constante}$$

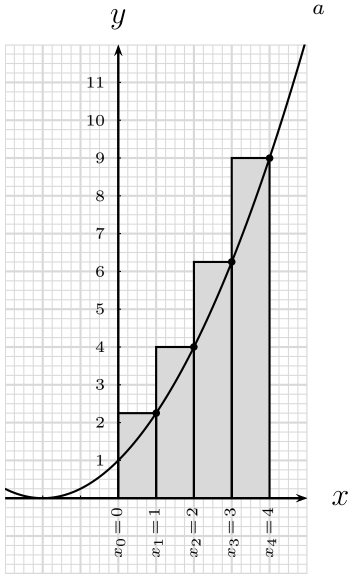
On peut vérifier le calcul en dérivant.

$$\Big(\tfrac{1}{3}xe^{3x} \;-\; \tfrac{1}{9}e^{3x} + D\Big)' = \tfrac{1}{3}e^{3x} + xe^{3x} - \tfrac{1}{3}e^{3x} = xe^{3x}$$

16.8.4 Intégration par substitution : à partir de la définition

On considère la fonction $f(x) = (\frac{1}{2}x + 1)^2$ et les bornes d'intégration $a = 0$ et $b = 4$.

On considère aussi l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$

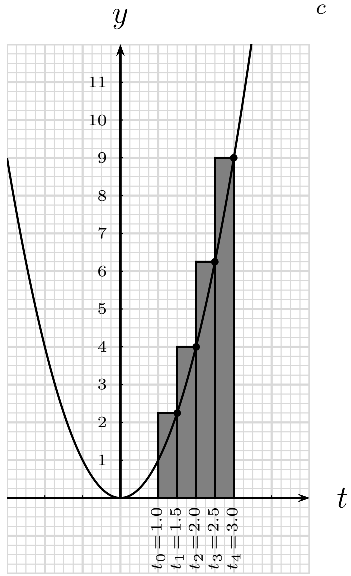


Par définition de l'intégrale, en utilisant la subdivision en n tranches $[x_{i-1}, x_i]$ de l'intervalle $[a, b]$, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

On considère la fonction $g(t) = t^2$ et les bornes d'intégration $c = 1$ et $d = 3$.

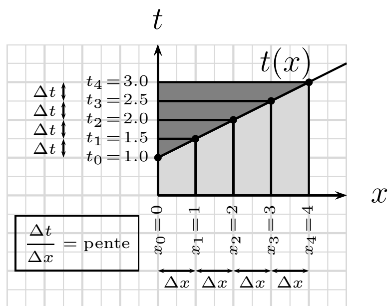
On considère aussi l'intégrale $\int_c^d g(t)\,dt$



Par définition de l'intégrale, en utilisant la subdivision en n tranches $[t_{i-1}, t_i]$ de l'intervalle $[c, d]$, on a

$$\int_c^d g(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} g(t_i)\Delta t$$

On passe de droite à gauche en posant $\boxed{t = t(x)} = \frac{1}{2}x + 1$.



Sur le graphe ci-contre de la fonction $t(x) = \frac{1}{2}x + 1$, on voit comment la subdivision de l'intervalle $[a, b]$ se transforme en la subdivision de l'intervalle $[c, d]$.

Sur notre exemple, $a = 0$ et $c = 1 = t(a)$. De même, $b = 4$ et $d = 3 = t(b)$. On voit sur les graphes que la hauteur des tranches est la même : $f(x_i) = g(t_i)$.

Par contre la largeur des tranches change : $\Delta t = \frac{1}{2}\Delta x$

Ce changement se justifie ainsi : lorsque $n \to +\infty$, avec la notation de l'intégrale, on a

$$\frac{dt}{dx} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(t + \Delta t) - t}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{t(x + \Delta x) - t(x)}{\Delta x} \overset{\text{def}}{=} t'(x) \overset{\text{ici}}{=} \frac{1}{2}$$

On a donc $\boxed{dt = t'(x)dx}$ et la relation entre les deux intégrales est :

$$\int_c^d g(t)\,dt = \int_{t(a)}^{t(b)} g(t)\,dt \;\underset{}{\overset{\boxed{\begin{array}{c} t = t(x) \\ dt = t'(x)dx \end{array}}}{=}}\; \int_a^b g(t(x)) \cdot t'(x)\,dx \;\underset{\text{ici}}{\overset{\boxed{\begin{array}{c} g(t(x)) = f(x) \\ t'(x) = \frac{1}{2} \end{array}}}{=}}\; \frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,dx$$

16.8.5 Intégration par substitution : intégrale définie

Théorème

Soit t une fonction dont la dérivée est continue sur $[a,b]$. Soit f une fonction dont la dérivée est continue sur $[t(a),t(b)]$. Alors

$$\boxed{\int_a^b f(t(x))\cdot t'(x)\,dx \overset{\boxed{\begin{array}{c}t=t(x)\\dt=t'(x)\,dx\end{array}}}{=} \int_{t(a)}^{t(b)} f(t)\,dt}$$

Preuve

Commençons par préciser que la primitive F existe et est définie sur $[a,b]$ car f est continue sur $[a,b]$. La règle de la dérivation en cascade dit que

$$\big(F(t(x))\big)' = f(t(x))\cdot t'(x)$$

Ainsi, à l'aide de la notation de l'intégrale indéfinie, on a

$$\int_{t(a)}^{t(b)} f(t)\,dt \overset{\text{TFCI}}{=} F(t)\Big|_{t(a)}^{t(b)} \overset{t=t(x)}{=} F\big(t(x)\big)\Big|_a^b \overset{\text{TFCI}}{=} \int_a^b \Big(F\big(t(x)\big)\Big)'\,dx = \int_a^b f(t(x))\cdot t'(x)\,dx$$

$\square$

Exemples

1. Pour le calcul suivant, on lit la formule du théorème de droite à gauche.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_{\sin(0)}^{\sin(\frac{\pi}{2})} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \overset{\boxed{\begin{array}{c}t=\sin(x)\\dt=\cos(x)\,dx\end{array}}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}\cdot\cos(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos^2(x)}}\cdot\cos(x)\,dx \overset{\substack{\cos(x)>0\\ \text{entre } 0 \text{ et } \frac{\pi}{2}}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$$

On aurait aussi pu utiliser directement le théorème fondamental en regardant la table de dérivation (qui se trouve à la page 215).

2. Pour le calcul suivant, on lit la formule du théorème de gauche à droite.

$$\int_2^3 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int_2^3 \frac{1}{\underbrace{1+x^2}_{t(x)}}\cdot\underbrace{2x}_{t'(x)}\,dx \overset{\boxed{\begin{array}{c}t=1+x^2\\dt=2x\,dx\end{array}}}{=} \int_5^{10}\frac{1}{t}\,dt = \ln(t)\Big|_5^{10}$$

La réponse est ainsi $\ln(10)-\ln(5)=\ln(2)$.

16.8.6 Intégration par substitution : intégrale indéfinie

Théorème

Soit f et t deux fonctions dont la dérivée est continue. Alors on a un lien entre deux «mondes» (ci-dessous C est une constante).

$$\overbrace{\boxed{\int f(t(x))\cdot t'(x)\,dx \;=\; F(t(x))+C}}^{\text{«monde des fonctions en } x\text{»}} \quad \underset{dt\,=\,t'(x)\,dx}{\overset{t\,=\,t(x)}{=}} \quad \overbrace{\boxed{\int f(t)\,dt \;=\; F(t)+C}}^{\text{«monde des fonctions en } t\text{»}}$$

Preuve

Commençons par préciser que la primitive F existe car f est continue. La règle de la dérivation en cascade dit que

$$\big(F(t(x))\big)' = f(t(x))\cdot t'(x)$$

Ainsi, par la notation de l'intégrale indéfinie, on a

$$\int f(t)\,dt \overset{\text{notation}}{=} F(t)+C \overset{t=t(x)}{=} F\big(t(x)\big)+C \overset{\text{notation}}{=} \int \Big(F\big(t(x)\big)\Big)'\,dx = \int f(t(x))\cdot t'(x)\,dx$$

$\square$

Exemples

1. Pour le calcul suivant, on part du «monde des fonctions en t», on passe dans le «monde des fonctions en x» on avance le calcul et on termine en revenant dans le «monde de départ».

$$\begin{aligned}
\overbrace{\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt}^{\substack{\text{définie seulement}\\ \text{pour } t\,\in\,]-1,1[}} &= \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \overset{\boxed{\substack{t\,=\,\sin(x)\\ dt\,=\,\cos(x)\,dx}}}{=} \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}\cdot\cos(x)\,dx\\
&= \int \frac{1}{\sqrt{\cos^2(x)}}\cdot\cos(x)\,dx \overset{(\bigstar)}{=} \int 1\,dx\\
&= x+C \overset{\boxed{\substack{t\,=\,\sin(x)\\ x\,=\,\sin^{-1}(t)}}}{=} \sin^{-1}(t)+C \text{ où } C \text{ est une constante}
\end{aligned}$$

On peut vérifier en regardant la table de dérivation (qui se trouve à la page 215).

Concernant ($\bigstar$), on sait que si $t=\sin(x)$, alors $x=\sin^{-1}(t)$, ainsi $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Sur cet intervalle, $\cos(x)>0$ et ainsi la simplification ($\bigstar$) peut avoir lieu.

2. Pour le calcul suivant, on part du «monde des fonctions en x», on passe dans le «monde des fonctions en t» on avance le calcul et on termine en revenant dans le «monde de départ».

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx &= \int \frac{1}{\underbrace{1+x^2}_{t(x)}}\cdot\underbrace{2x}_{t'(x)}\,dx \overset{\boxed{\substack{t\,=\,1+x^2\\ dt\,=\,2x\,dx}}}{=} \int \frac{1}{t}\,dt\\
&= \ln(t)+C \overset{\boxed{t\,=\,1+x^2}}{=} \ln(1+x^2)+C \text{ où } C \text{ est une constante}
\end{aligned}$$

On peut vérifier le calcul en dérivant.

$$\Big(\ln(1+x^2)+C\Big)' = \frac{1}{1+x^2}\cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}$$

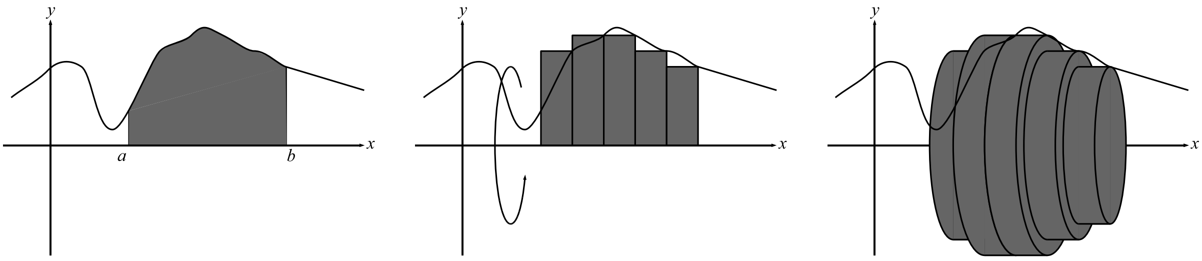
Chapitre 17

Quelques applications des intégrales

17.1 Volumes de révolutions

17.1.1 Autour du premier axe

Dans ce cas, on veut décrire le volume V_x construit à partir d'une courbe que l'on fait tourner le long de l'axe des x entre les bornes a et b.



On procède de la même façon que pour l'aire sous une courbe. On commence par subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ pour i allant de 1 à n (sur l'exemple ci-dessus, on a pris $n = 5$). On construit ainsi n rectangles dont le coin droit touche le graphe de la fonction (comme montré sur le dessin), puis on les fait tourner autour de l'axe des x afin de former des rondelles cylindriques. Enfin en faisant tendre le nombre de subdivisions n vers l'infini (et par conséquent la longueur des intervalles de la subdivision vers 0), on trouve le volume V_x cherché.

Le volume de la i-ième rondelle est donné par la formule "base fois hauteur" où la base est le disque de rayon $f(x_i)$ et où la hauteur est la largeur de la subdivision $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

$$\pi\big(f(x_i)\big)^2 \cdot \Delta x$$

De ce fait, le volume de toutes les rondelles vaut

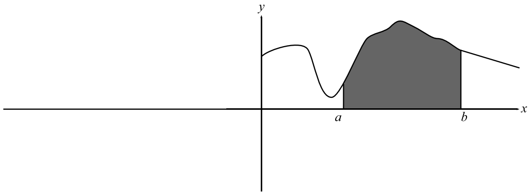
$$\sum_{i=1}^{n} \big(\pi f^2(x_i) \cdot \Delta x\big) \;=\; \pi \sum_{i=1}^{n} f^2(x_i)\Delta x$$

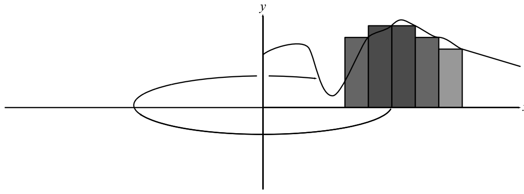
En prenant la limite, on peut utiliser la notation de l'intégrale pour obtenir :

$$V_x \;=\; \lim_{n\to+\infty} \pi \sum_{i=1}^{n} f^2(x_i)\Delta x \;=\; \pi \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f^2(x_i)\Delta x \overset{\text{not.}}{=} \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

17.1.2 Autour du deuxième axe

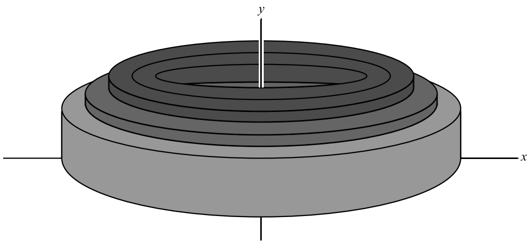
Dans ce cas, on veut décrire le volume V_y construit à partir d'une courbe que l'on fait tourner le long de l'axe des y entre les bornes a et b.



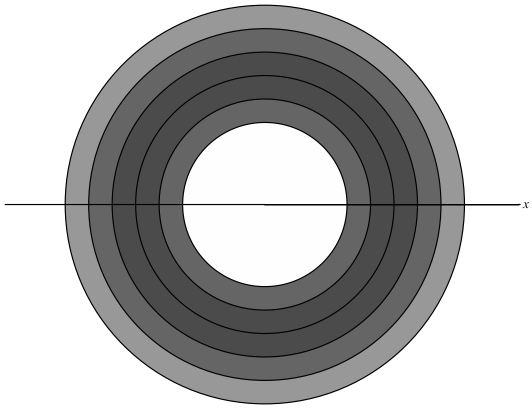


Voici deux façons de voir comment on tourne autour de l'axe des y.

Vue de côté



Vue de dessus



On procède de la même façon que précédemment. On commence par subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ pour i allant de 1 à n (sur l'exemple ci-dessus, on a pris $n = 5$). On construit ainsi n rectangles dont le coin droit touche le graphe de la fonction (comme montré sur le dessin), puis on les fait tourner autour de l'axe des y afin de former cylindres creux. Enfin en faisant tendre le nombre de subdivisions n vers l'infini (et par conséquent la longueur des intervalles de la subdivision vers 0), on trouve le volume V_y cherché.

On trouve le volume du i-ième cylindre creux en soustrayant au volume du cylindre plein de rayon x_i celui de rayon $x_{i-1} = x_i - \Delta x$. Ce volume est ainsi

$$\overbrace{\underbrace{\pi x_i^2}_{\text{base}}\underbrace{f(x_i)}_{\text{hauteur}}}^{\substack{\text{volume du cylindre}\\ \text{de rayon } x_i}} \;-\; \overbrace{\underbrace{\pi(x_i-\Delta x)^2}_{\text{base}}\underbrace{f(x_i)}_{\text{hauteur}}}^{\substack{\text{volume du cylindre}\\ \text{de rayon } x_{i-1}=x_i-\Delta x}} \;=\; \pi 2x_i\Delta x f(x_i) \;-\; \pi(\Delta x)^2 f(x_i)$$

De ce fait, le volume de tous les cylindres creux vaut

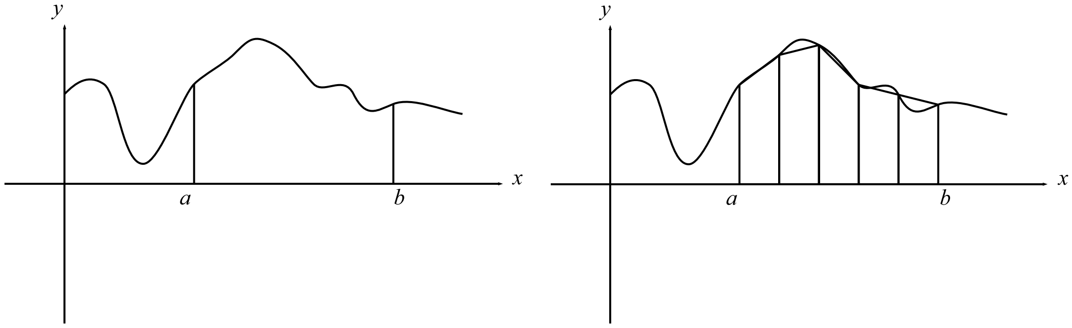
$$\sum_{i=1}^{n}\big(\pi 2x_i\Delta x f(x_i) - \pi(\Delta x)^2 f(x_i)\big) \;=\; 2\pi\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)\Delta x \;-\; \pi\,\overbrace{\tfrac{b-a}{n}}^{=\Delta x}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

En prenant la limite, on peut utiliser la notation de l'intégrale pour obtenir :

$$V_y \;=\; 2\pi\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)\Delta x \;-\; \pi\,\overbrace{\underbrace{\lim_{n\to+\infty}\tfrac{b-a}{n}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x}_{=\int_a^b f(x)\,dx}}^{\longrightarrow 0} \;\overset{\text{not.}}{=}\; 2\pi\int_a^b x f(x)\,dx$$

17.2 Longueur d'une courbe

Dans ce cas, on veut décrire la longueur L d'une courbe donnée par le graphe d'une fonction entre les bornes a et b.



On procède de la même façon que précédemment. On commence par subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ pour i allant de 1 à n (sur l'exemple ci-dessus, on a pris $n = 5$). Pour chaque intervalle de la subdivision, on remplace la courbe par un segment dont on calcule la longueur. Enfin en faisant tendre le nombre de subdivisions n vers l'infini (et par conséquent la longueur des intervalles de la subdivision vers 0), on trouve la longueur L cherchée.

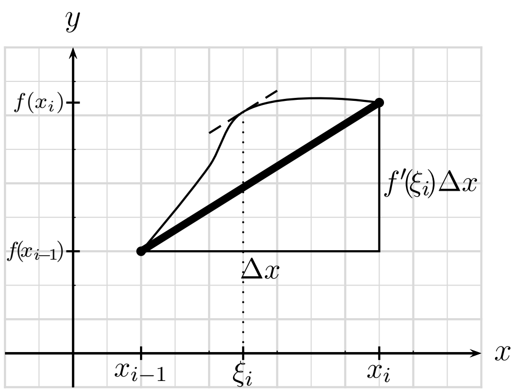
La longueur du i-ième segment (au-dessus du i-ième intervalle) est donnée par Pythagore et le théorème des accroissements finis.

Rappel : le théorème des accroissements finis et son interprétation

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On considère une fonction dérivable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Alors, il existe (au moins) un nombre $\xi \in \,]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$



Interprétation adaptée à notre cas

La pente moyenne entre les points

$$(x_{i-1}, f(x_{i-1})) \quad \text{et} \quad (x_i, f(x_i))$$

est égale à $f'(\xi_i)$ (pente instantanée en ξ_i) pour un ξ_i entre x_{i-1} et x_i (non compris).

Par Pythagore, et comme $\Delta x > 0$, la longueur du segment est donnée par :

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(\xi_i)\Delta x)^2} = \sqrt{1 + (f')^2(\xi_i)}\,\Delta x$$

De ce fait, le longueur de tous les segments vaut

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{1 + (f')^2(\xi_i)}\,\Delta x\right)$$

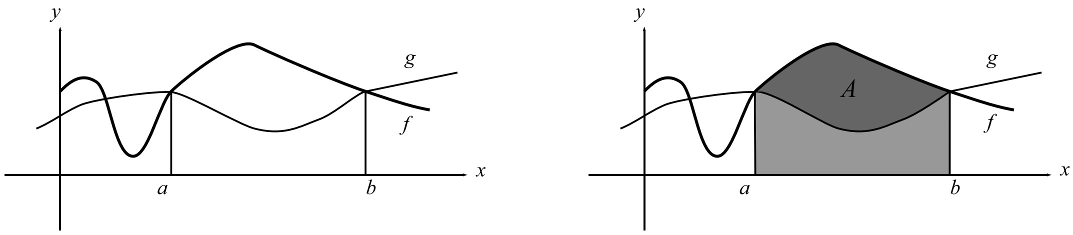
En prenant la limite, on peut utiliser la notation de l'intégrale pour obtenir :

$$L = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{1 + (f')^2(\xi_i)}\,\Delta x\right)\right) \overset{\text{not.}}{=} \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2(x)}\,dx$$

Le fait que l'on ait ξ_i à la place de x_i ne pose aucun problème si f' est continue.

17.3 L'aire entre deux courbes

Dans ce cas, on veut calculer l'aire A entre deux courbes données respectivement par les fonctions f et g entre les bornes a et b.



Dans le cas où les fonctions sont toutes deux positives, on obtient A de la manière suivante.

$$A = \text{“Aire sous la fonction la plus grande”} - \text{“Aire sous la fonction la plus petite”}$$

Ainsi, si $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Cette formule est aussi valable lorsque les fonctions ne sont pas forcément positives, tant que $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ est toujours valable. En effet, on translate les deux fonctions vers le haut jusqu'à ce qu'elles soit toutes deux positives (par chance, l'amplitude de la translation se simplifie lorsqu'on écrit la formule).

$$\boxed{A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \quad \text{si } f(x) \geqslant g(x) \text{ pour tout } x \in [a, b]}$$

Résumé

1. Le volume V_x construit à partir d'une courbe f que l'on fait tourner le long de l'axe des x entre les bornes a et b est donné par la formule suivante.

$$\boxed{V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx}$$

2. Le volume V_y construit à partir d'une courbe f que l'on fait tourner le long de l'axe des y entre les bornes a et b est donné par la formule suivante.

$$\boxed{V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx}$$

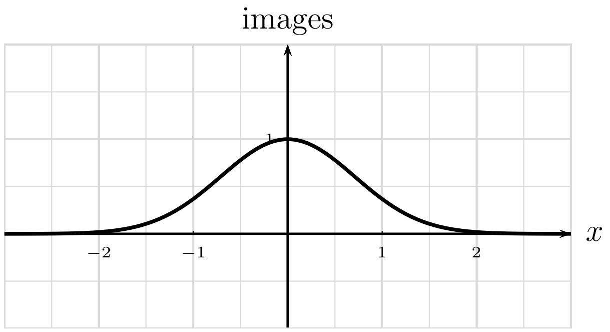
3. La longueur L de la courbe f entre les bornes a et b est donné par la formule suivante.

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2(x)}\,dx}$$

17.4 Un calcul d'intégrale sophistiqué

On considère la fonction $f(x) = e^{-x^2}$. Cette fonction n'admet pas de primitive qui s'écrit comme combinaisons ($+, -, \cdot, \div, \circ$) de fonctions élémentaires (monômes, racines n-ièmes, fonctions trigonométriques, exponentielles et logarithmes).

Voici le graphe de cette fonction qui ne s'annule jamais (même si elle a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$).



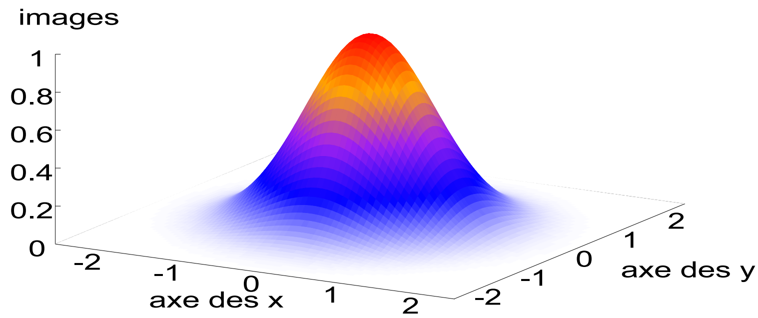
Puisque cette fonction n'admet pas de primitive, on ne peut pas directement utiliser le théorème fondamental du calcul intégral (TFCI) pour calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$.

L'astuce consiste à faire tourner la fonction autour de l'axe vertical. Cela transforme la fonction $f(x)$ en une fonction à deux variables qui est $g(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

En effet, lorsqu'on fait tourner la fonction, on remplace x par le rayon r du cercle centré à l'origine passant par le point $(x;y)$. Par Pythagore, on a $r = \sqrt{x^2+y^2}$, ainsi

$$g(x,y) = f(r) = e^{-\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = e^{-(x^2+y^2)}$$

On obtient le graphe suivant pour $f(x,y)$.



On calcule le volume V sous la fonction de deux manières différentes.

1. Par les applications de l'intégrale, on peut faire tourner le graphe de f autour de l'axe vertical de 0 à x. On a ainsi

$$V = 2\pi \int_0^{+\infty} x f(x)\,dx = \pi \int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2}\,dx$$

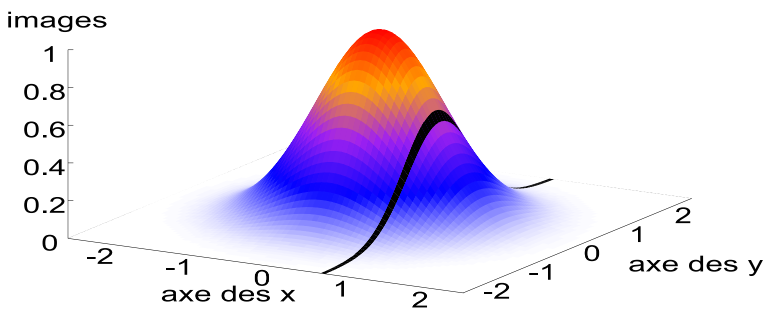
En effectuant la substitution $t = x^2$, on a $dt = 2x\,dx$ (on n'oublie pas de calculer les nouvelles bornes d'intégration) et on obtient ainsi

$$V = \pi \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt \overset{\text{TFCI}}{=} \pi\Big(-e^{-t}\Big|_0^{+\infty}\Big) = \pi\Big(\lim_{t\to+\infty} -e^{-t} - (-1)\Big) = \pi\cdot 1 = \pi$$

2. On calcule le volume V à l'aide d'une intégrale double (même principe qu'une intégrale simple, mais au lieu d'estimer l'aire sous la fonction à l'aide de rectangles, on utilise des parallélépipèdes rectangles).

$$V = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dxdy$$

On voit que grâce à la formule sur les puissances, on peut «casser » $f(x,y)$ en un produit de fonctions à une variable. On peut donc calculer cette intégrale pour x, puis pour y comme le montre le graphe suivant (en noir, on voit une épaisseur dx, bien sûr il faut penser que la partie noire descend jusqu'au plan horizontal à hauteur 0, mais qu'elle est cachée par le reste de la fonction).



$$V = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\right)dx$$

Mais l'intégrale en y ne dépend pas de x (le résultat est un nombre), on peut donc la sortir de l'intégrale en x.

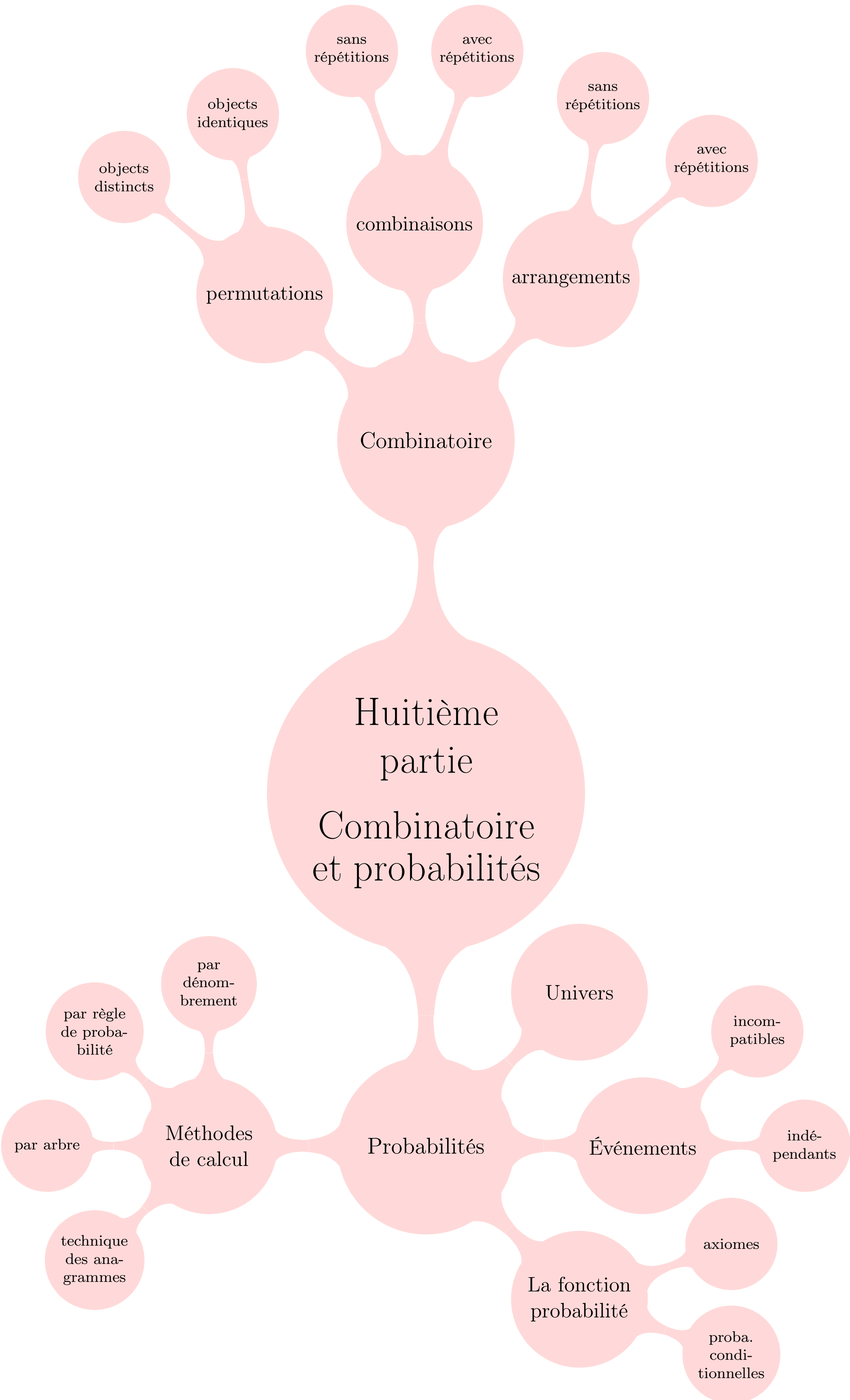
$$V = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)$$

Ainsi, en changeant le nom de la variable y en x, on obtient

$$V = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

On a donc montré que le carré de l'intégrale qu'on cherche à calculer vaut π. Par conséquent, on a

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}}$$


Huitième partie
Combinatoire et probabilités
Combinatoire
permutations
objects distincts
objects identiques
combinaisons
sans répétitions
avec répétitions
arrangements
sans répétitions
avec répétitions
Probabilités
Univers
Événements
incompatibles
indépendants
La fonction probabilité
axiomes
proba. conditionnelles
Méthodes de calcul
par dénombrement
par règle de probabilité
par arbre
technique des anagrammes

Chapitre 18

Dénombrement : permutations, arrangements et combinaisons

18.1 Les permutations

Notations

1. Le produit des n premiers nombres entiers positifs est appelé n *factoriel* et se note :
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$
Exemples On a $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $5! = 120$, $10! = 3\,628\,800$, $20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$ (2 trillions 432 billiards 902 billions).
Convention On a $0! = 1$.
2. Un ensemble de n objets $a_1, \ldots, a_n$ où l'ordre ne compte pas est noté $\{a_1, \ldots, a_n\}$.
3. Lorsque l'ordre compte, on parle de *suite* et on note $(a_1; \ldots; a_n)$.

18.1.1 Permutations d'objets distincts

Soit $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble de n objets distincts. Une *permutation* consiste à donner un ordre à ces n objets. Autrement dit une permutation est une suite.

Exemple Voici toutes les permutations des objets de l'ensemble $\{a, b, c\}$.

$$(a; b; c) \qquad (a; c; b) \qquad (b; a; c) \qquad (b; c; a) \qquad (c; a; b) \qquad (c; b; a)$$

Théorème Le nombre de permutations de n objets, noté P_n est donné par : $\boxed{P_n = n!}$

Preuve

Il y a n choix pour placer le premier objet, il y aura ensuite $n-1$ choix pour le deuxième, $n-2$ choix pour le troisième objet et ainsi de suite... Dans le tableau suivant, on indique le nombre d'objets que l'on peut mettre dans la position indiquée dans le coin supérieur.

1	2	3	4	5	6	7	8	···	n-2	n-1	n
n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	$n-4$	$n-5$	$n-6$	$n-7$	$\cdots$	3	2	1

On a ainsi $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ possibilités. Il s'agit bien de multiplications car chaque choix influence le choix suivant. $\square$

18.1.2 Permutations d'objets identiques

On considère maintenant des objets qui ne sont pas forcément tous distincts. Ainsi, on parle de type d'objets et le nombre d'objets de chaque type est appelé *multiplicité*.

Par exemple. Parmi l'ensemble de types d'objets $\{a, b\}$, la multiplicité de a est 3 et celle de b est 2. On a donc 5 objets. Les permutations de ces 5 objets sont

$$\begin{array}{llll} (a; a; a; b; b) & & & \\ (a; a; b; b; a) & (a; a; b; a; b) & & \\ (a; b; b; a; a) & (a; b; a; b; a) & (a; b; a; a; b) & \\ (b; b; a; a; a) & (b; a; b; a; a) & (b; a; a; b; a) & (b; a; a; a; b) \end{array}$$

Cela fait en tout 10 possibilités. Si les 5 objets avaient été distincts, on aurait eu $5! = 120$ possibilités.

On explique cette différence de la façon suivante : en notant $a^{(1)}$, $a^{(2)}$ et $a^{(3)}$ les trois objets de type a, on voit que les permutations

$$\begin{array}{lll} (a^{(1)}; a^{(2)}; a^{(3)}; b; b) & (a^{(1)}; a^{(3)}; a^{(2)}; b; b) & (a^{(2)}; a^{(1)}; a^{(3)}; b; b) \\ (a^{(2)}; a^{(3)}; a^{(1)}; b; b) & (a^{(3)}; a^{(1)}; a^{(2)}; b; b) & (a^{(3)}; a^{(2)}; a^{(1)}; b; b) \end{array}$$

sont les mêmes, puisqu'on ne distingue pas les objets du type de a. Ainsi, on compte 6 fois trop de suites lorsque les a apparaissent au même endroit. Cela correspond aux permutations des 3 objets de type a, puisque $6 = 3!$. Il en va de même pour les suites où les deux b apparaissent au même endroit : on en compte 2! fois trop.

Ainsi, le nombre de permutations cherché vaut 5! (pour les 5 objets considérés distincts) divisé par 3! (pour les 3 objets de type a) et par 2! (pour les 2 objets de type b). On a

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10 \text{ permutations.}$$

Cas général. Disons que l'ensemble de type d'objets est $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ et appelons n_k la multiplicité de a_k (pour $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$). Il y a donc $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ objets. Le nombre de permutations de ces objets, noté $P_{(n_1,\ldots,n_m)}$, est donné par la formule

$$\boxed{P_{(n_1,\ldots,n_m)} = \frac{(n_1 + n_2 + \cdots + n_m)!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_m!}}$$

Exemples

1. Sur une corde, on suspend 2 chandails, 4 chemises, 1 tablier et 5 caleçons. De combien de manières peut-on suspendre cette lessive s'il est impossible de distinguer les habits du même type ?

   Réponse : Il y a $\dfrac{12!}{2!\ 4!\ 1!\ 5!} = 83'160$ manières.

2. À l'aide des lettres E, M, M, A, R, G, A, N, A, combien de mots (ou suites de lettres) peut-on former ?

   Réponse : Il y a $\dfrac{9!}{3!\ 2!} = 30'240$ mots.

18.2 Les arrangements

18.2.1 Arrangements sans répétitions

Soit $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble de n objets (distincts) et k un nombre entre 1 et n. Un *arrangement des n objets pris k à k sans répétitions* est un choix ordonné de k objets distincts parmi les n objets.

Exemple. Voici tous les arrangement 2 à 2 sans répétitions de l'ensemble $\{a, b, c\}$.

$$(a; b) \qquad (a; c) \qquad (b; a) \qquad (b; c) \qquad (c; a) \qquad (c; b)$$

On choisit un objet dans l'ensemble d'objets, puis un deuxième qui doit être différent. L'ordre de sélection est important !

Théorème

Le nombre d'arrangements de n objets pris k à k sans répétitions, noté A_k^n ou P_k^n, est donné par la formule suivante :

$$\boxed{A_k^n = P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Preuve en utilisant la formule des permutations

On veut choisir k objets parmi n et tenir compte de l'ordre de choix. On imagine qu'on colle des étiquettes sur les n objets (exactement une étiquette par objet). Il y a k étiquettes qui indiquent que l'objet à été choisi et sera placé à la i-ème position (de la première position à la k-ième), et $n-k$ étiquettes qui indiquent que l'objet ne sera pas choisi. À chaque permutation distincte de ces n étiquettes, on a un arrangement différent.

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{c_1 \mid c_2 \mid \cdots \mid c_{k-1} \mid c_k}}_{\text{les } k \text{ objets choisis}}\ \underbrace{\boxed{r \mid r \mid \cdots \mid r \mid r}}_{\text{les } n-k \text{ objets non choisis}}}^{n \text{ étiquettes}}$$

Donc, le nombre d'arrangements sans répétitions est donné par : $A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$. $\square$

Exemples

1. Un comité se compose de 7 membres. De combien de manières peut-on nommer le bureau comprenant le président, le vice-président, le secrétaire et le trésorier si les fonctions ne peuvent pas être cumulées ?

   Réponse : Il y a $A_4^7 = \dfrac{7!}{(7-4)!} = 840$ manières.

2. On considère les chiffres 0, 4, 2, 3, 1 et 7.
   (a) Combien de nombres peut-on créer si on utilise tous les chiffres disponibles une seule fois ?
   (b) Combien de nombres à 4 chiffres peut-on créer si on utilise une seule fois les chiffres ci-dessus ?

   Réponses : (a) $A_6^6 = \dfrac{6!}{(6-6)!} = \dfrac{6!}{1} = 6! = 720.$ (b) $A_4^6 = \dfrac{6!}{(6-4)!} = \dfrac{6!}{2!} = 360.$

18.2.2 Arrangements avec répétitions

Soit $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble de n objets (distincts) et k un nombre naturel.
Un *arrangement des n objets pris k à k avec répétitions* est un choix ordonné de k objets parmi les n objets. Il est possible de choisir plusieurs fois le même objet.

Exemple.

Voici tous les arrangements 2 à 2 avec répétitions de l'ensemble d'objets $\{a, b, c\}$.

$$(a; a) \quad (a; b) \quad (a; c) \quad (b; a) \quad (b; b) \quad (b; c) \quad (c; a) \quad (c; b) \quad (c; c)$$

On choisit deux objets, pas forcément distincts, dans l'ensemble d'objets. L'ordre de sélection est important !

Théorème

Le nombre d'arrangements de n objets pris k à k avec répétitions, noté $\overline{A}_k^n$ ou $\overline{P}_k^n$, est donné par la formule suivante :

$$\boxed{\overline{A}_k^n = \overline{P}_k^n = n^k}$$

Preuve

Il y a n choix pour placer le premier objet, mais comme on peut reprendre le premier objet, il y aura ensuite n choix pour le deuxième, n choix pour le troisième objet et ainsi de suite... Dans le tableau suivant, on indique le nombre d'objets que l'on peut mettre dans la position indiquée dans le coin supérieur.

1	2	3	4	...	k-2	k-1	k
n	n	n	n	$\cdots$	n	n	n

Le nombre de possibilités est ainsi $\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k \text{ termes}} = n^k$. □

Exemples

1. Au sport-toto, on doit pronostiquer le résultat de 13 matches (gagné, perdu ou nul). Combien de pronostics différents existe-t-il ?

   Réponse : Il y a $\overline{A}_{13}^3 = 3^{13} = 1'594'323$ différents pronostics.

2. On considère les chiffres 0, 4, 2, 3, 1 et 7.
   (a) Combien de nombres à 5 chiffres peut-on créer si on utilise les chiffres ci-dessus autant de fois que l'on veut ?
   (b) Combien de nombres à 8 chiffres peut-on créer si on utilise les chiffres ci-dessus autant de fois que l'on veut ?

   Réponses : (a) $\overline{A}_5^6 = 6^5 = 7'776$. (b) $\overline{A}_8^6 = 6^8 = 1'679'616$.

18.3 Les combinaisons

18.3.1 Combinaisons sans répétitions

Soit $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble de n objets (distincts) et k un nombre entre 1 et n. Une *combinaison de n objets pris k à k sans répétitions* est un choix non ordonné de k objets distincts parmi les n objets.

Exemple. Voici toutes les combinaisons 2 à 2 sans répétitions de l'ensemble $\{a, b, c\}$.

$$\{a, b\} \qquad \{a, c\} \qquad \{b, c\}$$

On choisit un objet dans l'ensemble d'objets, puis un deuxième qui doit être différent. L'ordre de sélection n'est pas important !

Théorème

Le nombre de combinaisons de n objets pris k à k sans répétitions, noté C_k^n, est donné par la formule suivante :

$$\boxed{C_k^n = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$$

Preuve en utilisant la formule des permutations

On veut choisir k objets parmi n sans tenir compte de l'ordre de choix. On imagine qu'on colle des étiquettes sur les n objets (exactement une étiquette par objet). Il y a k étiquettes qui indiquent que l'objet à été choisi (sans tenir compte de l'ordre), et $n-k$ étiquettes qui indiquent que l'objet ne sera pas choisi. À chaque permutation distincte de ces n étiquettes, on a une combinaison différente.

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{c \mid c \mid \cdots \mid c \mid c}}_{\text{les } k \text{ objets choisis}} \; \underbrace{\boxed{r \mid r \mid \cdots \mid r \mid r}}_{\text{les } n-k \text{ objets non choisis}}}^{n \text{ étiquettes}}$$

Donc, le nombre de combinaisons sans répétitions est donné par : $C_k^n = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. □

Définition.

On note aussi ce nombre de combinaisons sans répétitions à l'aide du *coefficient binomial* :

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!} & \text{si } \ 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemples

1. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de sous-ensembles de k éléments que l'on peut former dans un ensemble à n éléments.

2. Dans la première partie du Swiss Loto, on doit choisir 6 numéros parmi 42. Combien y a-t-il de choix possibles ?

   Réponse : Il y a $C_6^{42} = \binom{42}{6} = \frac{42!}{6!\ (42-6)!} = 5\,245\,786$ choix.
   Il faut encore trouver le bon numéro chance pour gagner le gros lot. Comme il y a 6 numéros chance possibles, cela donne 31 474 716 *choix !*

18.3.2 Combinaisons avec répétitions

Soit $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble de n objets (distincts) et k un nombre naturel.
Une *combinaison des n objets pris k à k avec répétitions* est un choix non ordonné de k objets parmi les n objets. Il est possible de choisir plusieurs fois le même objet.

Exemple. Voici toutes les combinaisons 2 à 2 avec répétitions de l'ensemble $\{a, b, c\}$.

$$\{a,a\} \qquad \{a,b\} \qquad \{a,c\} \qquad \{b,b\} \qquad \{b,c\} \qquad \{c,c\}$$

On choisit deux objets, pas forcément distincts, dans l'ensemble d'objets. L'ordre de sélection n'est pas important !

Théorème

Le nombre de combinaisons de n objets pris k à k avec répétitions, noté $\overline{C}_k^n$, est donné par la formule suivante :

$$\boxed{\overline{C}_k^n = \binom{n+k-1}{k}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\overline{C}_k^n = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}}$$

Preuve

Pour décrire une telle combinaison, on peut choisir plusieurs fois le même objet, mais l'ordre de sélection ne doit pas être important. On va placer des étiquettes E sur les objets choisis (le nombre d'étiquettes collées sur un objet correspond au nombre de fois qu'il est choisi), comme le montre le schéma ci-dessous :

$$\begin{array}{l|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
\text{étiquettes} & E \;| & \;| & EE \;| & E \;| & \;| & \cdots \;| & EE \;| & \;| & \;| & E \\
\hline
\text{objets} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 & n
\end{array}$$

Avec cette façon de voir, le nombre de combinaisons avec répétitions est égal au nombre de permutations des étiquettes E et des barres verticales $|$ qui séparent les différents objets dans le schéma ci-dessus.

Il y a k étiquettes et $n-1$ barres verticales $|$ à permuter. Le nombre de combinaisons avec répétition est ainsi donné par le nombre de permutations de $k+n-1$ objets (les k étiquettes et les $n-1$ barres verticales). Donc :

$$\overline{C}_k^n = \frac{(k+n-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n+k-1\, -\, k)!} = \binom{n+k-1}{k} \qquad \square$$

Exemples

1. On lance deux dés à 6 faces à partir d'un goblet à dés. Combien y a-t-il de possibilités ?

   Réponse : Il y a $\overline{C}_2^6 = \binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = \dfrac{7!}{2!\ (7-2)!} = 21$ possibilités.

2. On lance dix dés à 6 faces à partir d'un goblet à dés. Combien y a-t-il de possibilités ?

   Réponse : Il y en a $\overline{C}_{10}^6 = \binom{6+10-1}{10} = \binom{15}{10} = \dfrac{15!}{10!\ (15-10)!} = 3'003.$

18.4 Tableau récapitulatif

Voici un tableau récapitulatif des différentes formules vues précédemment.

L'ordre est important	
Nombre de **permutations** de n objets distincts (file indienne).	$P_n = n!$
Nombre de **permutations** de m types d'objets dont les multiplicités sont n_1, ..., n_m (anagrammes).	$P_{(n_1,\ldots,n_m)} = \dfrac{(n_1 + \cdots + n_m)!}{n_1! \cdots n_m!}$
Nombre d'**arrangements** de n objets pris k à k **sans répétitions** (tiercé).	$A_k^n = P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
Nombre d'**arrangements** de n objets pris k à k **avec répétitions** (sport-toto).	$\overline{A}_k^n = \overline{P}_k^n = n^k$
L'ordre n'est pas important	
Nombre de **combinaisons** de n objets pris k à k **sans répétitions** (loterie à numéro).	$C_k^n = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
Nombre de **combinaisons** de n objets pris k à k **avec répétitions** (yahtzee, 421).	$\overline{C}_k^n = \dbinom{n+k-1}{k} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

18.5 Triangle de Pascal des coefficients binomiaux

Formule du binôme de Newton

Voici la formule du binôme de Newton :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Preuve

On a

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n \text{ termes}}$$

On trouve le coefficient de $x^k y^{n-k}$ en développant le polynôme. Or, pour trouver ce coefficient, il faut en développant choisir k fois le x et $n-k$ fois le y. Un tel choix est effectué en choisissant le numéro de la parenthèse où l'on choisit de développer le x. Pour de tels choix l'ordre n'a pas d'importance. Le nombre de tels choix est exactement le coefficient de $x^k y^{n-k}$ (car si on choisit exactement k fois le x, on est obligé de choisir $n-k$ fois le y). Ce coefficient est donc $C_k^n = \binom{n}{k}$. □

Relation entre les coefficients binomiaux

On a la formule suivante :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \qquad \text{pour tout} \;\; 0 \leqslant k \leqslant n$$

Preuve

On sait que $\binom{n+1}{k+1}$ est le choix de $k+1$ objets parmi $n+1$ objets (sans ordre et sans répétitions). Mettons un objet de côté parmi les $n+1$ objets et décrivons le choix précédent de deux façons suivantes.

1. On choisit d'abord l'objet mis de côté.
   Il reste donc k objets à choisir parmi les n restants. Il y a $\binom{n}{k}$ tels choix.
2. On ne choisit pas l'objet mis de côté.
   On dont donc choisir $k+1$ objets à choisir parmi les n restants. Il y a $\binom{n}{k+1}$ tels choix.

On a donc la formule annoncée :

$$\binom{n+1}{k+1} = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{\text{si on choisit}\\ \text{l'objet mis}\\ \text{de côté}}} + \underbrace{\binom{n}{k+1}}_{\substack{\text{si on ne choisit}\\ \text{pas l'objet mis}\\ \text{de côté}}} \qquad \text{pour tout} \;\; 0 \leqslant k \leqslant n$$

$\square$

Le triangle de Pascal

La formule du binôme de Newton permet de calculer relativement aisément toute puissance du polynôme $x+y$. Pour cela, on construit le triangle de Pascal à l'aide de la relation entre les coefficients binomiaux.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

À chaque ligne correspond un polynôme de la forme $(x+y)^n$, la première ligne correspond à $n=0$, la deuxième ligne correspond à $n=1$, la troisième à $n=2$, etc...

Sur chaque ligne, on trouve les coefficients du polynôme $(x+y)^n$ correspondant. Par exemple, de la troisième ligne ($n=2$) à la cinquième ligne ($n=4$), on voit que :

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
(x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4
\end{aligned}$$

Chapitre 19

Probabilités

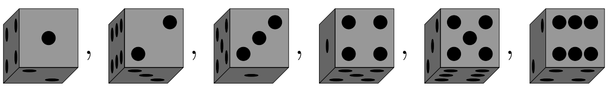
19.1 Univers, événements et probabilités

19.1.1 Univers

Lorsqu'on parle d'une expérience quelconque possédant différentes issues possibles, on appelle *univers* l'ensemble Ω de toutes les *issues élémentaires* ω possibles.

Exemples

1. Si on lance un dé, l'univers est donné par

   $\Omega = \Big\{$  $\Big\}$

   Que l'on peut se permettre de noter

   $$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2. Si on lance deux dés simultanément (l'ordre ne compte pas), l'univers est donné par

   $$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} \{1,1\}, & \{1,2\}, & \{1,3\}, & \{1,4\}, & \{1,5\}, & \{1,6\}, \\ & \{2,2\}, & \{2,3\}, & \{2,4\}, & \{2,5\}, & \{2,6\}, \\ & & \{3,3\}, & \{3,4\}, & \{3,5\}, & \{3,6\}, \\ & & & \{4,4\}, & \{4,5\}, & \{4,6\}, \\ & & & & \{5,5\}, & \{5,6\}, \\ & & & & & \{6,6\} \end{array} \right\}$$

3. Si on lance deux dés l'un après l'autre (l'ordre compte), l'univers est donné par

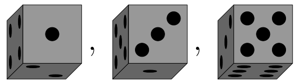
   $$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1;1), & (1;2), & (1;3), & (1;4), & (1;5), & (1;6), \\ (2;1), & (2;2), & (2;3), & (2;4), & (2;5), & (2;6), \\ (3;1), & (3;2), & (3;3), & (3;4), & (3;5), & (3;6), \\ (4;1), & (4;2), & (4;3), & (4;4), & (4;5), & (4;6), \\ (5;1), & (5;2), & (5;3), & (5;4), & (5;5), & (5;6), \\ (6;1), & (6;2), & (6;3), & (6;4), & (6;5), & (6;6) \end{array} \right\}$$

19.1.2 Événements

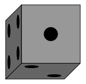
Un *événement* est un sous-ensemble de l'univers Ω. Un *événement élémentaire* est un sous-ensemble à un élément de l'univers Ω (c'est un singleton).

Exemples

1. Si on lance un dé :
   (a) L'événement «le résultat est un nombre impair» correspond au sous-ensemble de Ω suivant.

   $P = \Big\{$  $\Big\}$ ou $P = \{1, 3, 5\}$

   (b) L'événement «le résultat est un 1» correspond au sous-ensemble de Ω suivant.

   $T = \Big\{$  $\Big\}$ ou $T = \{1\}$

2. Si on lance deux dés simultanément (l'ordre ne compte pas) :
   (a) L'événement «il y a (au moins) un 1 qui apparait» correspond à :
   $$U = \{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}\}$$
   (b) L'événement «la somme des nombres vaut au moins 11» correspond à :
   $$S = \{\{5, 6\}, \{6, 6\}\}$$

3. Si on lance deux dés l'un après l'autre (l'ordre compte) :
   (a) L'événement «le premier dé tombe sur 1» correspond à :
   $$D_1 = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6)\}$$
   (b) L'événement «le deuxième dé tombe sur 1» correspond à :
   $$D_2 = \{(1; 1), (2; 1), (3; 1), (4; 1), (5; 1), (6; 1)\}$$

Définitions

1. On dit qu'un événement A *a lieu* si l'une des issues de A se produit lors du déroulement de l'expérience.
2. Chaque univers Ω admet un *événement impossible*, il s'agit de l'ensemble vide $\emptyset$.
3. Chaque univers Ω admet un *événement certain*, il s'agit de l'ensemble Ω.
4. Chaque événement A ($\subset \Omega$), admet son *événement complémentaire*, noté $\overline{A}$ et défini par
   $$\overline{A} = \complement_\Omega A \ (= \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\})$$
5. Deux événements A et B sont dit *incompatibles* s'ils s'excluent mutuellement. Autrement dit si $A \cap B = \emptyset$.
6. Deux événements A et B sont dit *indépendants* si le fait que l'un ait lieu n'influence pas la possibilité que l'autre ait lieu (et vice-versa).

Ici, on remarque que l'événement T est un événement élémentaire, que les événements U et S sont incompatibles et que les événements D_1 et D_2 sont indépendants.

Remarque.
Soit A et B deux événements indépendants de probabilités non nulles, alors on peut montrer que A et B ne sont pas incompatibles.

19.1.3 Probabilités : la fonction probabilité

On définit une fonction $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ où $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements. En d'autres termes, pour CHAQUE événement A d'une expérience aléatoire ($A \subset \Omega$), on associe un UNIQUE nombre, appelé *probabilité*, noté $\mathbb{P}(A)$. Cette fonction probabilité obéi aux règles de base suivantes appelées *axiomes*.

1. $\boxed{\mathbb{P}(A) \geqslant 0}$.
2. $\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$.
3. $\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \text{ si } A \text{ et } B \text{ sont des événements incompatibles}}$.

Conséquences

Les règles suivantes peuvent se déduire des trois axiomes précédents.

1. $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$.
2. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
3. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, et sa conséquence directe $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
4. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

Slogan La probabilité associée à A mesure la proportion de A dans l'univers Ω.

C'est comme si on disait que Ω avait une aire de 1. On peut retrouver rapidement toutes ces règles par des considérations sur les aires.

Remarque

Lorsque Ω est un ensemble fini, il suffit d'attribuer un nombre entre 0 et 1 à chaque événement élémentaire de manière à ce que la somme des probabilités associées aux événements élémentaires soit égale à 1.

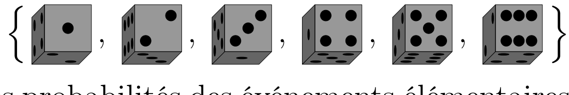
Par abus de langage, on note $\mathbb{P}(\omega)$ la probabilité d'une issue élémentaire (au lieu de $\mathbb{P}(\{\omega\})$ qui est aussi accepté). Dans ce cas, on a

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega)}$$

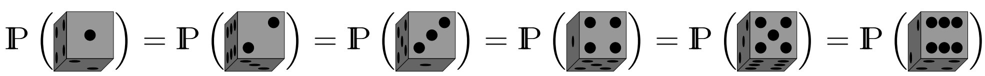
Cela signifie que la probabilité de A est la somme des probabilités des issues élémentaires de A

Exemples

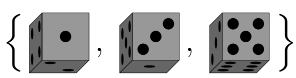
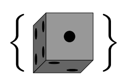
1. Si on lance un dé, l'univers est le suivant.

   $\Omega =$ 

   Pour un dé non pipé, les probabilités des événements élémentaires sont les suivantes.

    $= \dfrac{1}{6}$

   On avait considéré les événements suivants.

   $P =$  et $T =$ 

   Ces événements ont donc les probabilités suivantes.

$$\mathbb{P}(P) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T) = \frac{1}{6}$$

2. Si on lance deux dés simultanément (l'ordre ne compte pas), l'univers est donné par

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} \{1,1\}, & \{1,2\}, & \{1,3\}, & \{1,4\}, & \{1,5\}, & \{1,6\}, \\ & \{2,2\}, & \{2,3\}, & \{2,4\}, & \{2,5\}, & \{2,6\}, \\ & & \{3,3\}, & \{3,4\}, & \{3,5\}, & \{3,6\}, \\ & & & \{4,4\}, & \{4,5\}, & \{4,6\}, \\ & & & & \{5,5\}, & \{5,6\}, \\ & & & & & \{6,6\} \end{array} \right\}$$

Pour des dés non pipés, les probabilités des événements élémentaires ne sont pas les mêmes.

(a) Lorsque les deux dés tombent sur le même nombre.

$$\mathbb{P}(1,1) = \mathbb{P}(2,2) = \mathbb{P}(3,3) = \mathbb{P}(4,4) = \mathbb{P}(5,5) = \mathbb{P}(6,6) = \frac{1}{36}$$

(b) Lorsque les deux dés n'ont pas la même valeur (il y a deux possibilités d'avoir $\{1,2\}$: soit on fait $(1;2)$, soit on fait $(2;1)$).

$$\mathbb{P}(1,2) = \cdots = \mathbb{P}(1,6) = \mathbb{P}(2,3) = \cdots = \mathbb{P}(2,6) = \cdots = \mathbb{P}(5,6) = \frac{2}{36}$$

On a bien un total de 1 pour les probabilités des événements élémentaires.

$$6 \cdot \frac{1}{36} + 15 \cdot \frac{2}{36} = \frac{6+30}{36} = 1$$

On avait considéré les événements suivants.

$$U = \{\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\}\} \quad \text{et} \quad S = \{\{5,6\},\{6,6\}\}$$

Ces événements ont donc les probabilités suivantes.

$$\mathbb{P}(U) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{11}{36} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(S) = \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

3. Si on lance deux dés l'un après l'autre (l'ordre compte), l'univers est donné par

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1;1), & (1;2), & (1;3), & (1;4), & (1;5), & (1;6), \\ (2;1), & (2;2), & (2;3), & (2;4), & (2;5), & (2;6), \\ (3;1), & (3;2), & (3;3), & (3;4), & (3;5), & (3;6), \\ (4;1), & (4;2), & (4;3), & (4;4), & (4;5), & (4;6), \\ (5;1), & (5;2), & (5;3), & (5;4), & (5;5), & (5;6), \\ (6;1), & (6;2), & (6;3), & (6;4), & (6;5), & (6;6) \end{array} \right\}$$

Pour des dés non pipés, les probabilités des événements élémentaires sont les suivantes.

$$\mathbb{P}(i,j) = \frac{1}{36} \text{ pour tout } i,j \in \{1,\ldots,6\}$$

On avait considéré les événements suivants.

$$D_1 = \{(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6)\}$$
$$\text{et } D_2 = \{(1;1),(2;1),(3;1),(4;1),(5;1),(6;1)\}$$

Ces événements ont donc les probabilités suivantes.

$$\mathbb{P}(D_1) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(D_2)$$

19.1.4 Événements équiprobables

Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on parle d'*événements élémentaires équiprobables*.

Théorème

On considère une expérience pour laquelle Ω est fini et les événements élémentaires sont équiprobables. Si A est un événement, alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas totaux}}$$

Preuve

En effet, on a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) \overset{(\bigstar)}{=} \sum_{\omega \in A} \frac{1}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}$$

car les événements élémentaires sont équiprobables ($\bigstar$). $\square$

Exemples (voir page précédente)

1. Lorsqu'on lance un dé non pipé, le théorème s'applique.
2. Lorsqu'on lance deux dés simultanément, le théorème ne s'applique pas.
3. Lorsqu'on lance deux dés en tenant compte de l'ordre, le théorème s'applique.

19.2 Probabilités conditionnelles

19.2.1 Probabilités conditionnelles

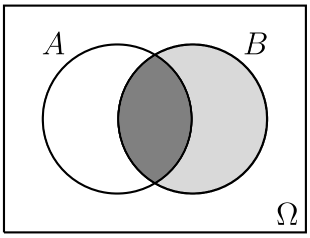
Définition

Soit A et B deux événements d'un univers Ω. On suppose que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
La *probabilité conditionnelle d'un événement A, sachant qu'un événement B de probabilité non nulle a eu lieu*, aussi appelée *probabilité de A sachant B*, est le nombre noté $\mathbb{P}(A|B)$.

Résultat

On calcule cette probabilité grâce à la formule

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$



Preuve. Comme une probabilité est une proportion, on doit calculer la proportion de l'événement A dans l'*univers restreint* B (la condition «B a eu lieu» modifie l'univers). Cette proportion s'obtient en divisant la probabilité $\mathbb{P}(A \cap B)$ (moralement, c'est l'aire de la partie de A qui est dans B) par $\mathbb{P}(B)$ (moralement, c'est l'aire de B). $\square$

On a la formule équivalente suivante qui est aussi valable sans l'hypothèse $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)}$$

19.2.2 Événements indépendants

Définitions

Soit A et B deux événements d'un univers Ω.

1. On dit que A *est indépendant de* B lorsque

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)}$$

   Autrement dit, le fait de savoir si B a eu lieu ne change pas la probabilité que A ait lieu.

2. On dit que A *et* B *sont indépendants* lorsque
   (a) A est indépendant de B ;
   (b) B est indépendant de A.

Conséquences

1. Soit A et B deux événements d'un univers Ω. Alors on a

$$\boxed{A \text{ est indépendant de } B \iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}$$

   En effet,

   "$\Rightarrow$" Comme A est indépendant de B, on a $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, ainsi on a

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

   "$\Leftarrow$" La formule $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)$ est toujours vraie. L'hypothèse dit que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

   Par conséquent on a $\mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

   En divisant par $\mathbb{P}(B)$ de chaque côté, on obtient $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, ce qui signifie que A est indépendant de B.

2. La formule $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ est symétrique, donc on a les équivalences

$$\boxed{\begin{aligned} A \text{ est indépendant de } B &\iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \\ &\iff \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A) \iff B \text{ est indépendant de } A \end{aligned}}$$

3. Ainsi, on a évidemment les équivalences

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} A \text{ est indépendant de } B & \iff & A \text{ et } B \text{ sont indépendants} & \iff & B \text{ est indépendant de } A \\ \Updownarrow & & & & \Updownarrow \\ \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) & \iff & \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) & \iff & \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B) \end{array}}$$

   C'est pour cette raison que les auteurs qui désirent éviter de définir l'indépendance à l'aide d'une probabilité conditionnelle utilisent l'équivalence suivante.

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}$$

Exemples

1. L'expérience aléatoire consiste à lancer un dé bien équilibré.
   On considère les deux événements

   A : le résultat est un nombre pair.

   B : le résultat est plus grand ou égal à 5.

			B
	1	3	5
A	2	4	6

   On a

   $$\mathbb{P}(A) = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(B) = \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{3}$$

   $$\mathbb{P}(A|B) = \tfrac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \tfrac{1}{6} \qquad \mathbb{P}(B|A) = \tfrac{1}{3}$$

   On voit ainsi que

   $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \qquad \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \qquad \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

   Ainsi, A et B sont indépendants.

2. L'expérience aléatoire consiste à lancer un dé bien équilibré.
   On considère les deux événements

   A : le résultat est plus petit que 3.

   B : le résultat est plus grand que 4.

A		B
1	3	5
2	4	6

   On a

   $$\mathbb{P}(A) = \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{3} \qquad \mathbb{P}(B) = \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{3}$$

   $$\mathbb{P}(A|B) = 0 \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = 0 \qquad \mathbb{P}(B|A) = 0$$

   On voit ainsi que

   $$\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \qquad \mathbb{P}(A|B) \neq \mathbb{P}(A) \qquad \mathbb{P}(B|A) \neq \mathbb{P}(B)$$

   Ainsi, A et B ne sont pas indépendants.

19.3 Méthodes de calcul de probabilités

19.3.1 Par dénombrement

Cette méthode utilise directement la formule vue précédemment et appliquée lors des premiers exemples.

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega)}$$

Cela signifie que la probabilité de A est la somme des probabilités des issues élémentaires de A

Pour appliquer cette formule il faut connaître la probabilité de chaque issue élémentaire.

19.3.2 Par arbre

Cette méthode est utile pour calculer des probabilités lorsque l'expérience aléatoire consiste en des *épreuves successives*. Dans ce cas, les issues élémentaires sont des n-uplets $(E_1; E_2; \dots; E_n)$ représentés par les branches d'un arbre.

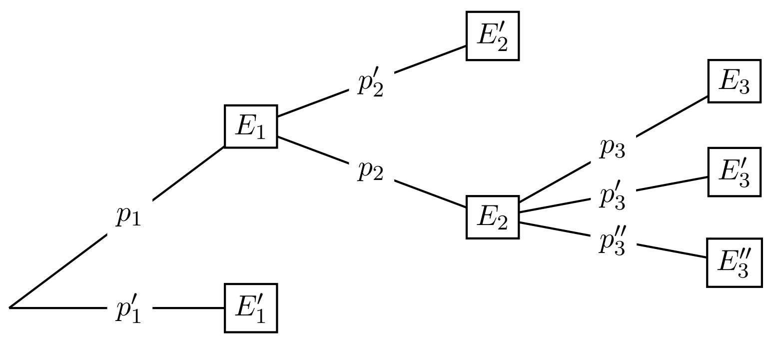
La probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités de chaque épreuve de la branche associée.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) \\ &= \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2|E_1) \cdot \mathbb{P}(E_3|E_1 \cap E_2) \cdots \mathbb{P}(E_n|E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{n-1}) \end{aligned}$$

Si les épreuves successives sont indépendantes, on a $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2) \cdots \mathbb{P}(E_n)$.

Preuve partielle illustrée

Voici un arbre. Dans les cases, on note les issues ; sur les bouts de branches, on note la probabilité de passer d'une issue à une autre (c'est une probabilité conditionnelle associée à une épreuve).



On a :

$$p_1 + p_1' = 1$$
$$p_2 + p_2' = 1$$
$$p_3 + p_3' + p_3'' = 1$$

La formule de probabilité conditionnelle donne la probabilité du couple $(E_1; E_2')$.

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2') = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2'|E_1) = p_1 \cdot p_2'$$

Pour le triplet $(E_1; E_2; E_3)$, on a

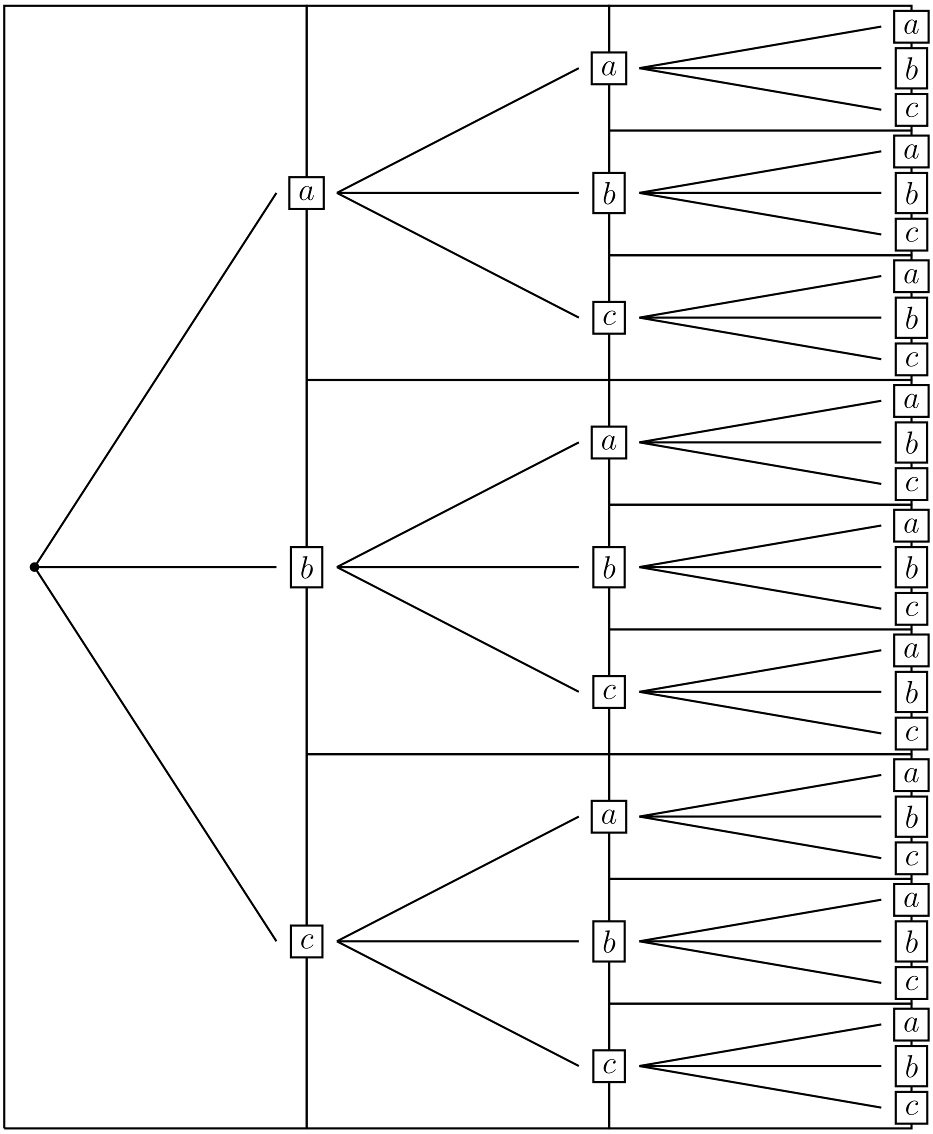
$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbb{P}\big((E_1 \cap E_2) \cap E_3\big) = \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) \cdot \mathbb{P}\big(E_3|E_1 \cap E_2\big)$$

$$= \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2|E_1) \cdot \mathbb{P}\big(E_3|E_1 \cap E_2\big) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$$

Une preuve complète nécessite une preuve par récurrence (aisée en OS scientifique).

19.3.3 Par la technique des anagrammes

Imaginons une expérience avec trois issues possibles a, b et c de probabilité p_a, p_b et p_c. Imaginons encore que l'on répète cette expérience trois fois de manière indépendante.



La probabilité d'obtenir une fois a, une fois b et une fois c est donnée par :

$$\mathbb{P}\left(\overset{\text{perm.}}{\boxed{\text{a} \mid \text{b} \mid \text{c}}}\right) = p_a \cdot p_b \cdot p_c \cdot \text{nombre d'anagrammes de } \boxed{\text{a} \mid \text{b} \mid \text{c}} = p_a p_b p_c \cdot 3! = 6 p_a p_b p_c$$

La probabilité d'obtenir deux fois a et une fois c est donnée par :

$$\mathbb{P}\left(\overset{\text{perm.}}{\boxed{\text{a} \mid \text{a} \mid \text{c}}}\right) = p_a \cdot p_a \cdot p_c \cdot \text{nombre d'anagrammes de } \boxed{\text{a} \mid \text{a} \mid \text{c}} = p_a p_a p_c \cdot \tfrac{3!}{2!} = 3 p_a^2 p_c$$

La probabilité d'obtenir trois fois a est donnée par :

$$\mathbb{P}\left(\overset{\text{perm.}}{\boxed{\text{a} \mid \text{a} \mid \text{a}}}\right) = p_a \cdot p_a \cdot p_a \cdot \text{nombre d'anagrammes de } \boxed{\text{a} \mid \text{a} \mid \text{a}} = p_a p_a p_a \cdot \tfrac{3!}{3!} = p_a^3$$

En fait le nombre d'anagrammes correspond à chaque fois au nombre de chemins sur l'arbre correspondant au problème voulu. Cette technique est très efficace et se généralise aisément à de multiples cas d'épreuves successives. Elle permet aussi une rédaction plus condensée qu'un arbre puisqu'on n'écrit que les branches concernées.

19.4 Formule de Bayes

On peut trouver un résultat très intéressant en utilisant les formules de probabilité conditionnelle.

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A|B)\cdot\mathbb{P}(B)$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|B) &= \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}\big((B\cap A)\cup(B\cap\overline{A})\big)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B\cap A)+\mathbb{P}(B\cap\overline{A})} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B|\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})}\end{aligned}$$

On a donc démontré la *formule de Bayes*.

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B|\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})}}$$

Application

Un élève répond à une question à choix multiple. De deux choses l'une : soit il connaît la réponse, soit il la devine. Soit p la probabilité que l'élève connaisse la réponse et donc $1-p$ celle qu'il la devine. On admet que l'élève qui devine répondra correctement avec probabilité $\frac{1}{m}$ où m est le nombre de réponses proposées. Quelle est la probabilité qu'un élève connaisse la réponse à une question s'il y a répondu correctement ?

Soient E et F respectivement les événements «il connaît vraiment la réponse» et «l'étudiant répond correctement à la question». Alors

$$\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(F|E)\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(F|E)\mathbb{P}(E)+\mathbb{P}(F|\overline{E})\mathbb{P}(\overline{E})} = \frac{1\cdot p}{1\cdot p+\frac{1}{m}(1-p)} = \frac{m\cdot p}{1+(m-1)p}$$

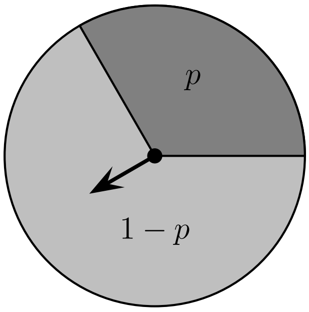
En prenant par exemple $m=5$ (cinq réponses possibles pour chaque question) et $p=\frac{1}{2}$ (une chance sur deux de répondre juste), la probabilité qu'un élève connaisse la réponse à une question sachant qu'il a répondu correctement sera ainsi $\frac{5}{6}$.

19.5 Une application des probabilités conditionnelles

Parfois on effectue des sondages à propos de questions sensibles (avortement, maladie, informations confidentielles, informations privées protégées par la loi, etc.). Prenons ici l'exemple de la tricherie lors d'épreuves à l'école. Il faut trouver une méthode permettant de déterminer la proportion des personnes questionnées qui ont triché lors d'une épreuve sans pour autant savoir ce qu'il en est de chaque personne interrogée (afin que chacune puisse se confier sans crainte).

Pour cela, on construit un disque scindé en deux parties, l'une de proportion p et l'autre de proportion $1-p$. Disons que la partie en gris foncé correspond à l'événement T «J'ai triché» et que la partie en gris clair correspond à l'événement $\overline{T}$ «Je n'ai pas triché». Sur ce disque on installe une aiguille, on le cache dans une boîte afin que seule la personne interrogée puisse le voir. L'aiguille est actionnée et s'arrête aléatoirement sur une partie du disque. La personne répond «vrai» (événement V) ou «faux» (événement F) selon ce que montre l'aiguille.

Voici à quoi ressemble ce disque (qui doit être caché dans une boîte).



On combine l'axiome 3 et la formule de probabilité conditionnelle.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V) &= \mathbb{P}((V\cap T)\cup(V\cap\overline{T})) = \mathbb{P}(V\cap T)+\mathbb{P}(V\cap\overline{T})\\ &= \mathbb{P}(V|T)\cdot\mathbb{P}(T)+\mathbb{P}(V|\overline{T})\cdot\mathbb{P}(\overline{T})\end{aligned}$$

Cette formule est équivalente à

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V|T)\cdot\mathbb{P}(T)+\mathbb{P}(V|\overline{T})\cdot\mathbb{P}(\overline{T})\\ \iff\quad & \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V|T)\cdot\mathbb{P}(T)+\mathbb{P}(V|\overline{T})\cdot(1-\mathbb{P}(T))\\ \iff\quad & \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V|T)\cdot\mathbb{P}(T)+\mathbb{P}(V|\overline{T})-\mathbb{P}(V|\overline{T})\mathbb{P}(T)\\ \iff\quad & \mathbb{P}(V) = \big(\mathbb{P}(V|T)-\mathbb{P}(V|\overline{T})\big)\cdot\mathbb{P}(T)+\mathbb{P}(V|\overline{T})\\ \iff\quad & \mathbb{P}(V)-\mathbb{P}(V|\overline{T}) = \big(\mathbb{P}(V|T)-\mathbb{P}(V|\overline{T})\big)\cdot\mathbb{P}(T)\end{aligned}$$

On peut ainsi isoler la probabilité à calculer.

$$\mathbb{P}(T) = \frac{\mathbb{P}(V)-\mathbb{P}(V|\overline{T})}{\mathbb{P}(V|T)-\mathbb{P}(V|\overline{T})}$$

Lorsque le nombre de personnes interrogées est très grand, la proportion des personnes qui ont dit «vrai», notée c, permet d'estimer [1] $\mathbb{P}(V)$. Cela permet d'estimer $\mathbb{P}(T)$ qui livre la proportion de personnes ayant triché lors d'une épreuve. Or, la manière dont le disque est construit nous dit que $\mathbb{P}(V|T)=p$ (car une personne qui a triché ne peut répondre vrai que si l'aiguille s'arrête dans la zone grise foncée de proportion p) et $\mathbb{P}(V|\overline{T})=1-p$ (car une personne qui n'a pas triché ne peut répondre vrai que si l'aiguille s'arrête dans la zone grise claire de proportion $1-p$). On peut ainsi estimer la proportion cherchée.

$$\mathbb{P}(T) = \frac{\mathbb{P}(V)-\mathbb{P}(V|\overline{T})}{\mathbb{P}(V|T)-\mathbb{P}(V|\overline{T})} = \frac{\mathbb{P}(V)-(1-p)}{p-(1-p)} \overset{\mathbb{P}(V)\cong c}{\cong} \frac{c+p-1}{2p-1}$$

On remarque que $p=\frac{1}{2}$ ne convient pas. En effet cela reviendrait à scinder le disque en deux parties égales. On ne pourrait plus en déduire quoi que ce soit.

1. Il s'agit de la loi des grands nombres (voir cours de statistique).

19.6 La loi binomiale et la loi multinomiale

La loi binomiale

On considère une expérience composées de n épreuves successives. Supposons de plus que chaque épreuve admette 2 issues possibles (succès ou échec) et que les épreuves successives ainsi obtenues sont indépendantes. Notons p la probabilité d'un succès et q $(= 1 - p)$ la probabilité d'un échec lors d'une épreuve. On dit qu'une telle expérience suit une *loi binomiale.*

La probabilité d'avoir k succès (ou $n - k$ échecs par symétrie), notée $\mathbb{P}(n, k)$, parmi les n épreuves est donnée par la formule suivante.

$$\mathbb{P}(n,k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Preuve de la formule grâce à la technique des anagrammes

L'arbre correspondant à l'expérience possède 2^n branches. Pour calculer $\mathbb{P}(n, k)$, il suffit de compter les branches qui correspondent exactement à k succès. Ce nombre correspond au nombre d'anagrammes de

$$\underbrace{\boxed{s}\boxed{\cdots}\boxed{s}}_{k \text{ termes}}\underbrace{\boxed{e}\boxed{\cdots}\boxed{e}}_{n-k \text{ termes}}$$

Il y a donc $\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ telles branches et chacune a une probalilité $p^k q^{n-k}$ de se réaliser. D'où la formule ci-dessus. $\square$

La loi multinomiale

On considère une expérience composées de n épreuves successives. Supposons de plus que chaque épreuve admette m issues possibles, notées $i_1, \ldots, i_m$, et que les épreuves successives ainsi obtenues sont indépendantes. Notons $p_1, \ldots, p_m$ la probabilité de chaque issue lors d'une épreuve. On dit qu'une telle expérience suit une *loi multinomiale.*

La probabilité d'obtenir k_1 fois la première issue, k_2 fois la deuxième issues, $\ldots$, k_m fois la m-ième issue est donnée par la formule suivante.

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_m!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$$

Preuve de la formule grâce à la technique des anagrammes

L'arbre correspondant à l'expérience possède m^n branches. Pour calculer la probabilité cherchée, il suffit de compter les branches qui correspondent exactement à k succès. Ce nombre correspond au nombre d'anagrammes de

$$\underbrace{\boxed{i_1}\boxed{\cdots}\boxed{i_1}}_{k_1 \text{ termes}}\underbrace{\boxed{i_2}\boxed{\cdots}\boxed{i_2}}_{k_2 \text{ termes}}\cdots\underbrace{\boxed{i_m}\boxed{\cdots}\boxed{i_m}}_{k_m \text{ termes}}$$

Il y a donc $\dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_m!}$ telles branches et chacune a une probalilité $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$ de se réaliser. D'où la formule ci-dessus. $\square$

19.7 L'espérance de gain

Lorsqu'on effectue une expérience aléatoire et qu'on décide d'associer une somme d'argent à chaque issue élémentaire, on peut se demander quel est le gain moyen qu'on est en droit d'espérer à chaque partie. L'*espérance de gain* est la moyenne des gains pondérés par leur probabilité.

Premier exemple

Albert et Béatrice jouent à pile ou face. Si la pièce tombe sur pile, alors Albert donne 1 CHF à Béatrice ; si la pièce tombe sur face, alors Béatrice donne 2 CHF à Albert.

Les issues élémentaires sont : *pile* ou *face*. L'espérance de gain d'Albert est :

$$\text{espérance de gain} = \underbrace{-1}_{\substack{\text{Albert perd}\\ \text{1 CHF si la}\\ \text{pièce tombe}\\ \text{sur pile}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\text{probabilité}\\ \text{que la pièce}\\ \text{tombe sur}\\ \text{pile}}} + \underbrace{2}_{\substack{\text{Albert gagne}\\ \text{2 CHF si la}\\ \text{pièce tombe}\\ \text{sur face}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\text{probabilité}\\ \text{que la pièce}\\ \text{tombe sur}\\ \text{face}}} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, EN MOYENNE, Albert peut espérer gagner 0.50 CHF à chaque partie. C'est une espérance théorique, puisque cela n'arrivera jamais en une seule partie. Néanmoins, sur 1000 parties les gains qu'Albert peut espérer se montent à 500 CHF. Il faut considérer l'espérance comme une MOYENNE THÉORIQUE. Si Albert est malchanceux, son gain sera en-dessous de son espérance, s'il est chanceux, son gain sera en-dessus de son espérance. Néanmoins, plus le nombre de parties devient grand, plus son gain se rapprochera de son espérance (c'est un théorème mathématique que l'on appelle *loi des grands nombres*).

Deuxième exemple

À l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés, on associe à chaque issue la somme d'argent correspondant à la somme des nombres montrés par ces deux dés.

Issue	CHF	Issue	CHF	Issue	CHF	Issue	CHF	Issue	CHF	Issue	CHF
⚀ ⚀	2	⚀ ⚁	3	⚀ ⚂	4	⚀ ⚃	5	⚀ ⚄	6	⚀ ⚅	7
⚁ ⚀	3	⚁ ⚁	4	⚁ ⚂	5	⚁ ⚃	6	⚁ ⚄	7	⚁ ⚅	8
⚂ ⚀	4	⚂ ⚁	5	⚂ ⚂	6	⚂ ⚃	7	⚂ ⚄	8	⚂ ⚅	9
⚃ ⚀	5	⚃ ⚁	6	⚃ ⚂	7	⚃ ⚃	8	⚃ ⚄	9	⚃ ⚅	10
⚄ ⚀	6	⚄ ⚁	7	⚄ ⚂	8	⚄ ⚃	9	⚄ ⚄	10	⚄ ⚅	11
⚅ ⚀	7	⚅ ⚁	8	⚅ ⚂	9	⚅ ⚃	10	⚅ ⚄	11	⚅ ⚅	12

Si on suppose que les dés sont bien équilibrés, alors chaque issue a autant de chances de se produire (c'est pour cela qu'on a tenu compte de l'ordre). On trouve ainsi le tableau des probabilités suivant :

gain (en CHF)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
probabilité	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

L'espérance de gain, notée E, associée à cette expérience est donnée par :

$$E = 2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+5\cdot\frac{4}{36}+6\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{6}{36}+8\cdot\frac{5}{36}+9\cdot\frac{4}{36}+10\cdot\frac{3}{36}+11\cdot\frac{2}{36}+12\cdot\frac{1}{36} = 7 \text{ CHF}$$

Donc, en moyenne, le gain d'un tel jeu est de 7 CHF.