



UNIVERSITE HASSIBA BENBOUALI DE CHLEF



Faculté des Science de la Nature et de la Vie

Département Eau, Environnement et Développement Durable

**Polycopié**

# Hydraulique générale

**License : Eau et Sol**

**Filière : Science Agronomique**

**Préparé par : Dr Habibi Brahim**

*Maitre de Conférences classe B*

**Département Eau, Environnement et Développement Durable**

*Année universitaire 2019-2020*

## Introduction

L'hydraulique générale c'est une partie de la mécanique des fluides qui concerne le comportement des liquides au repos ou en mouvement.

Au départ l'hydraulique était considérée beaucoup plus comme étant une technique plutôt qu'une science.

Le mot hydraulique désigne de nos jours deux domaines différents :

- Les sciences et les technologies de l'eau naturelle et ses usages : hydrologie, hydraulique et hydrogéologie, etc.
- Les sciences et les technologies de l'usage industriel des liquides sous -pression : machines, hydrauliques..... etc.

## Nomenclature

Symboles	
S	Section (m <sup>2</sup> )
<b>a, <math>\vec{a}</math></b>	Accélération (m . s <sup>-2</sup> )
C	Couple (N . m)
d	Densité
<b>F, <math>\vec{F}</math></b>	Force (N)
<b><math>\vec{g}</math></b>	Accélération de la pesanteur (m. s <sup>-2</sup> )
m	Masse (kg)
<b><math>\vec{M}</math></b>	Moment (N .m)
P, p	Pression (N. m <sup>-2</sup> ou Pa)
<b><math>Q_v, Q_m</math></b>	Débit volume (m <sup>3</sup> . s <sup>-1</sup> ) et débit masse (kg. s <sup>-1</sup> )
t	Temps (s)
T	Température (°C)
v	Vitesse (m. s <sup>-1</sup> )
V	Volume (m <sup>3</sup> )
<b><math>\gamma</math></b>	Poids volumique (ou spécifique) (N. m <sup>-3</sup> )
<b><math>\lambda</math></b>	Coefficient de pertes de charge linéaire
<b><math>\mu</math></b>	Viscosité dynamique (Pa.s)
<b><math>\nu</math></b>	Viscosité cinématique (m <sup>2</sup> . s <sup>-2</sup> )
<b><math>\rho</math></b>	Masse volumique (kg .m <sup>-3</sup> )

## Symboles grecs

$\alpha$ alpha	$\rho$ rho	$\beta$ beta
$\kappa$ kappa	$\lambda$ Lambda	$\zeta$ zeta
$\gamma$ gamma	$\mu$ mu	$\Upsilon$ upsilon
$\epsilon$ epsilon	$\Psi$ psi	$\xi$ Dzeta
$\Phi$ thêta	$\Omega$ oméga	$\nu$ nu

## Chapitre 1. Considérations générales

### 1.1. Systèmes d'unités des grandeurs physiques

#### 1.1.1. Le système d'unités SI

En mécanique des fluides, le système d'unités SI (système international) comporte trois unités primaires à partir desquelles toutes les autres quantités peuvent être décrites.

Grandeur de base	Nom de l'unité	symbole	dimension
Longueur	Mètre	m	L
Masse	Kilogramme	kg	M
Temps	Seconde	s	T

Les unités si des différents caractéristiques utilisées en mécanique des fluides :

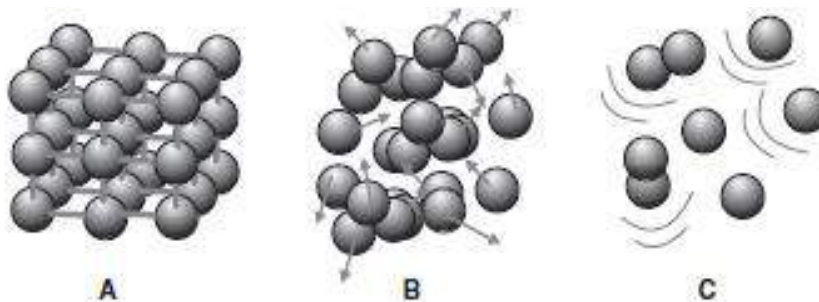
Caractéristique	Unité SI	Dimension
Vitesse	m/s, m.s <sup>-1</sup>	LT <sup>-1</sup>
Accélération	m/s <sup>2</sup> , m.s <sup>-2</sup>	LT <sup>-2</sup>
Force	Kg.m/s <sup>2</sup> , N (Newton), kg.m.s <sup>-2</sup>	MLT <sup>-2</sup>
Energie, travail	Kg.m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> , N.m, J (Joule), kg.m <sup>2</sup> .s <sup>-2</sup>	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>
Puissance	Kg.m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup> , N.m/s, W (Watt), kg.m <sup>2</sup> .s <sup>-3</sup>	ML <sup>2</sup> T <sup>-3</sup>
Pression	Kg/m.s <sup>2</sup> , N/m <sup>2</sup> , Pa (Pascal), kg.m <sup>-1</sup> .s <sup>-2</sup>	ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>
Masse volumique	Kg/m <sup>3</sup> , kg.m <sup>-3</sup>	ML <sup>-3</sup>
Poids spécifique	Kg/m <sup>2</sup> .s <sup>2</sup> , N/m <sup>3</sup> , kg.m <sup>-2</sup> .s <sup>-2</sup>	ML <sup>-2</sup> T <sup>-2</sup>
Viscosité dynamique	Kg/m.s, N.s/m <sup>2</sup> , kg.m <sup>-1</sup> .s <sup>-1</sup>	ML <sup>-1</sup> T <sup>-1</sup>

### 1.2. Propriété des fluides

#### 1.2.1. Définition d'un fluide

Généralement on comprend un fluide sous le thème fluide, les liquides et les gazes. La principale différence entre les liquides et les gazes réside dans le fait que les liquides sont pratiquement incompressibles. Tandis que les gaz le sont de plus les liquides occupent un volume défini alors que les gaz se répandent pour occuper toute la place disponible.

*Liquide* ≠ *structure moléculaire différente*  
*Gaz*



**Figure 1.1.** Structures moléculaires. A : solide, B : liquide, C : gaz

### 1.2.2. Masse volumique

La masse volumique est définie comme la masse par unité de volume :

$$\rho = \frac{M}{V} \text{Unité : kg/m}^3 \quad \text{Dimension : ML}^{-3}$$

On trouve aussi une relation proportionnelle entre la masse volumique et la température.

$$\rho = \rho_0 \frac{P(273 + t_0)}{P_0(273 + t)}$$

Où  $\rho_0$  et  $P_0$  sont la masse volumique initiale et la pression initiale

Valeurs particulières

$$\text{Eau : } \rho_w = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$\text{Mercure : } \rho_{Hg} = 13546 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$\text{Air : } \rho_G = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$$

La masse volumique d'un gaz change avec la pression mais celle d'un liquide peut être considérée comme constante en général. Par Application, la masse volumique de l'eau à 4 °C et 1 atm (101 325 Pa, pression dans les conditions standard) est d'environ 1000 kg.m<sup>-3</sup> alors celle de l'air dans les conditions standard est d'environ 1,2 kg.m<sup>-3</sup>.

### 1.2.3. La densité

La densité  $d$  est sans dimension et est définie comme la masse volumique du fluide étudié rapportée à la masse volumique de l'eau :

$$D = \frac{\rho}{\rho_w} \text{Unité : adimensionnelle (sans unité)}$$

Valeurs Particulières :

$$\text{Eau : } D_w = 1$$

$$\text{Mercure : } D_{Hg} = 13,6$$

$$\text{Air : } \rho_G = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$$

### 1.2.4. Poids spécifique

L'inverse de la masse volumique par unité de masse est appelé poids spécifique (ou poids volumique). Le poids volumique est en réalité la force qu'exerce le liquide contenu dans l'unité de volume, (m<sup>3</sup>) soumis à la pesanteur. Le poids volumique diminue si la température augmente et vice versa.

$$\gamma = \frac{W}{V} = \frac{Mg}{V} \Rightarrow \gamma = \rho g \text{Unité : N/m}^3 \quad \text{Dimension : ML}^{-2} \text{T}^{-2}$$

Valeurs particulières

$$\text{Eau : } \gamma_w = 9814 \text{ N/m}^3$$

Mercure :  $\gamma_{Hg}=132943\text{N/m}^3$

Air :  $\gamma_G =1,2 \text{ N/m}^3$

**Application :** Calculer le poids  $P_0$  d'un volume  $V=3$  litres d'huile d'olive ayant une densité  $d=0,918$ .

**Réponse :**

$$P_0 = d.V.\rho g = 0,918.1000.3. 10^{-3}. 9,81 = 27\text{N}$$

**Application :** Déterminer le poids volumique de l'essence sachant que sa densité  $d=0,7$ .

On donne :

- l'accélération de la pesanteur  $g=9,81 \text{ m/s}^2$

- la masse volumique de l'eau  $\rho =1000 \text{ kg /m}^3$

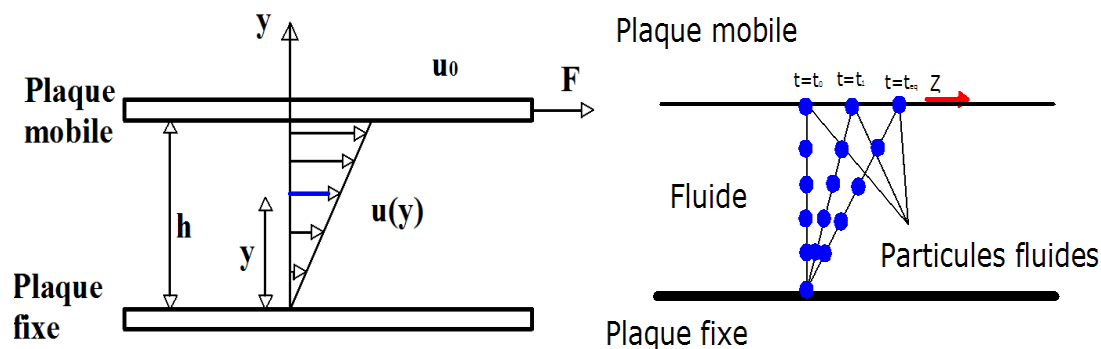
**Réponse :**

$$\gamma = d.\rho g = 0,7.1000.9,81 = 6867 \text{ N/m}^3$$

### 1.2.5. viscosité

Elle est définie par la résistance à une déformation ou un glissement (force tangentielle), elle est due principalement à l'interaction entre les molécules du fluide.

Newton en 1687 réalise une expérience simple démontrant l'influence de la viscosité des fluides sur sa mise en écoulement. L'expérience consiste à cisailer un matériau à l'état pâteux, fondu ou bien encore liquide entre deux plaques dont l'une est fixe et l'autre est animée d'un mouvement de translation à vitesse  $U$  sous l'action d'une force  $F$ .



**Figure 1.2.** Vue qualitative de la déformation d'un fluide après application d'une contrainte à la paroi supérieure.

#### 1.2.5.1. Définition d'une contrainte

Lorsque des solides sont soumis à des contraintes, ils vont initialement se déformer (déformation infinitésimale) mais pas de façon continue comme dans un écoulement. D'autres matériaux comme par Application de la boue, du goudron, du mastic ou du dentifrice ne sont pas facilement classifiables puisqu'ils se comportent comme des solides.

Qu'oppose un liquide au déplacement de l'une de ses couches par rapport aux autres. Elle est représentée par deux coefficients :

⇒ Une viscosité dite dynamique  $\mu$  qui représente la rigidité d'un liquide à une vitesse de déformation en cisaillement et s'exprime en Pa.s dans le système d'unité internationale (S.I).

⇒ Une viscosité dite cinématique  $\nu$  qui représente le temps d'écoulement d'un liquide et s'exprime en  $m^2/s$  dans le système d'unité internationale (S.I).

### 1.2.5.2. Viscosité dynamique $\mu$

La force de frottement  $F$  qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit  $u_0$ , à leur surface  $S$  et inversement proportionnelle à  $h$  : Le facteur de proportionnalité  $\mu$  est le coefficient de viscosité dynamique du fluide.

$$\frac{u(y)}{v_0} = \frac{y}{h} \Rightarrow u(y) = u_0 \frac{y}{h}$$

Le fluide newtonien  $\rightarrow \frac{F}{A} = \mu \frac{u_0}{h}$

$$\frac{F}{A} = \zeta_{xy} \rightarrow \text{contrainte de cisaillement}$$

$$\frac{u_0}{h} = \frac{du_x}{dy} \Rightarrow \zeta_{xy} = \mu \frac{du_x}{dy}$$

La viscosité dynamique

$$\mu = \frac{\zeta_{xy}}{\frac{du_x}{dy}} = \frac{\frac{\text{Force}}{\text{Surface}}}{\frac{\text{Vitesse}}{\text{Distance}}} = \frac{\text{Force} \cdot \text{Temps}}{\text{Surface}} = N \cdot s \cdot m^{-2} = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$$

Remarque :  $\mu$  est généralement exprimée en Poise (Po)  $10\text{Po}=1\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$

1 Poiseuille(PI) = 1 NS/m<sup>2</sup>=1 pa.s

Eau:  $\mu = 1.14 \times 10^{-3} \text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$

Mercure:  $\mu = 1.552 \text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$

**Application** : On suppose que de l'huile ayant une viscosité  $\mu=0.29\text{Pa}\cdot\text{s}$  s'écoule entre les deux plaques dont l'une est soumise à la force  $F$  (Calculer la contrainte visqueuse dans l'huile si la vitesse de la plaque supérieure est de  $U=3\text{m/s}$  et que la distance entre plaque est de  $h = 2 \text{ cm}$ .)

**Réponse** : L'accélération est nulle et en supposant qu'il n'y a pas de variation de pression dans la direction de l'écoulement, on peut montrer (par un équilibre de force sur un élément de fluide) que la contrainte de cisaillement *est* constante à travers tout le fluide.

On peut donc calculer:

$$\zeta = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{U}{h} = \frac{0.29 \times 3}{0.02} = 43 \text{ N. s. m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} = 43 \text{ N. m}^{-2} = 43 \text{ Pa}$$

### 1.2.5.3. viscosité cinématique $\nu$

Elle représente le rapport entre la viscosité dynamique et la masse spécifique d'un fluide.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \text{ Unité : m}^2/\text{s} \quad \text{Dimension : L}^2 \text{ T}^{-1}$$

**Remarque:**  $\nu$  est généralement exprimée en Stokes (St) :  $10^4 \text{ St} = 1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

Eau:  $\nu = 1.14 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

Mercure:  $\nu = 1.145 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

**Application :** fuel porté à une température  $T=20^\circ\text{C}$  a une viscosité dynamique  $\mu = 95 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .

Calculer sa viscosité cinématique  $\nu$  en stokes sachant que sa densité est  $d=0,95$ .

On donne la masse volumique de l'eau est  $1000 \text{ kg /m}^3$

**Réponse :**

$$\nu = \frac{\mu}{\rho \cdot d} = \frac{95 \cdot 10^{-3}}{1000 \cdot 0,95} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} = 1 \text{ stokes}$$

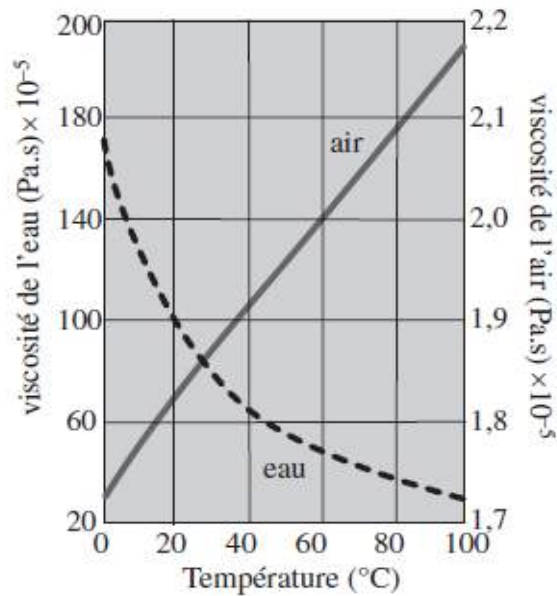
**Application :** Déterminer la viscosité dynamique de l'huile d'olive sachant que sa densité est  $0,918$  et sa viscosité cinématique est  $1,089$  Stockes.

**Réponse :**

$$\mu = \rho \cdot \nu = 981 \cdot 1,089 \cdot 10^{-4} = 0,1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

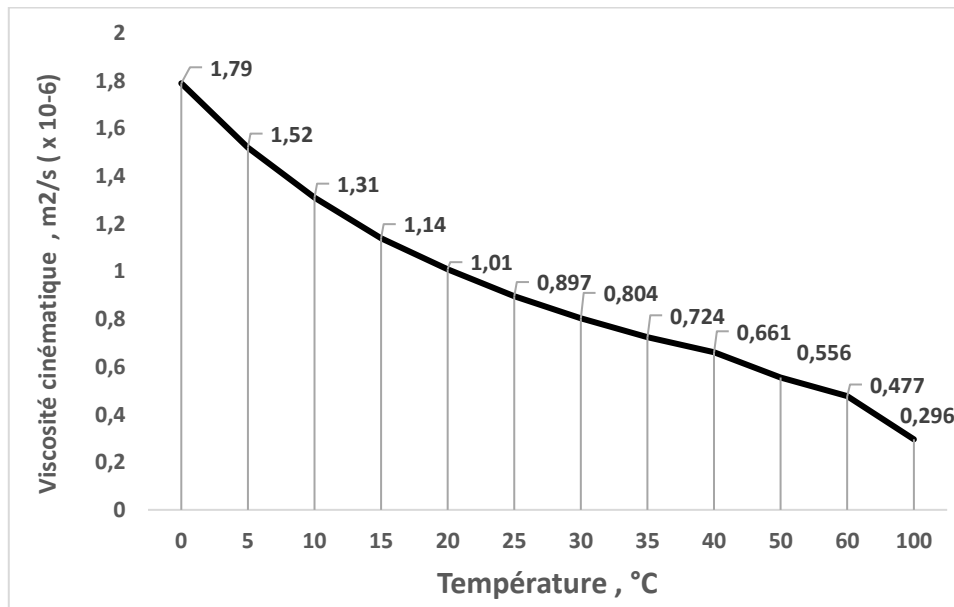
### 1.2.5.4. Variation de la viscosité en fonction de la température

Dans le cas des gaz, une augmentation de la température entraîne un mouvement plus intense des molécules et accroît le mélange moléculaire et donc la viscosité augmente. Dans le cas d'un liquide, lorsque la température augmente les molécules se séparent entre elles, décroissant l'attraction entre elles et donc la viscosité diminue. La relation entre la température et la viscosité est par conséquent inversée pour un gaz et un liquide. La Figure 1.3 montre la variation de la viscosité avec la température pour l'air et l'eau.



**Figure 1.3.** Variation de la viscosité en fonction de la température

La variation de viscosité des fluides peut être très importante en fonction de la température.



**Figure 1.4.** L'évolution de viscosité cinématique en fonction de la température (Eau)

La viscosité aussi varie également en fonction de la pression. Ces variations sont moins importantes que celles dues à la température dans la gamme d'utilisation classique en hydraulique industrielle (5 à 500 bars) et peuvent être négligées pour une première approche. Cette variation de la viscosité dynamique suit une loi sensiblement exponentielle. On peut les estimer avec la relation suivante :

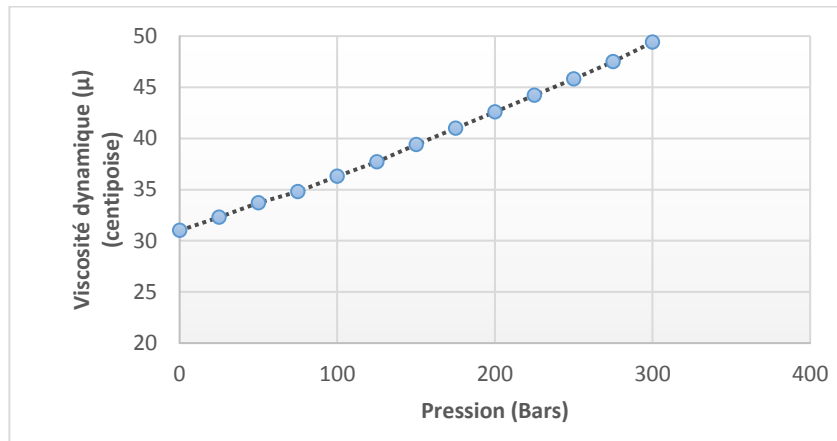
$$\mu = \mu_0 \cdot e^{\alpha \cdot P}$$

Avec  $\mu_0$  : viscosité dynamique à la pression atmosphérique et à la même température.

$\alpha$  : Coefficient variant avec la nature du fluide et sa température.

Pour la plupart des huiles utilisées comme fluide hydraulique, on a :  $1,5 \cdot 10^{-3} < \alpha < 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ bar}^{-1}$ .



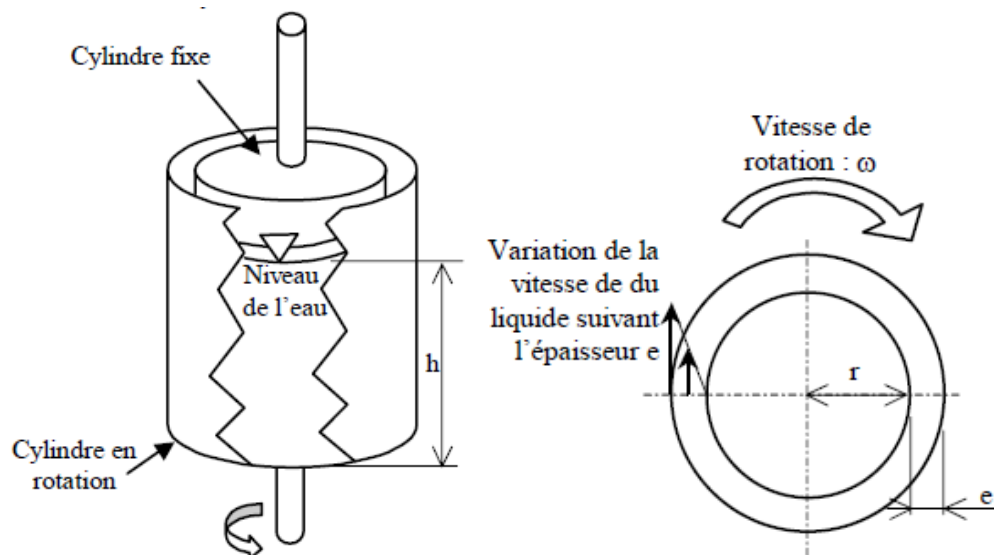


**Figure 1.5.** L'évolution de viscosité  $\mu$  en fonction de la pression ( $\theta=40^{\circ}\text{C}$ ) (fluide Eau)

### 1.2.5.5. Mesure de la viscosité

#### a- Le viscosimètre rotatif :

On considère deux cylindres coaxiaux séparés par un intervalle  $e$  dont l'espace entre eux est rempli par un liquide. On fait tourner le cylindre extérieur à vitesse constante ( $\omega$ ) et on maintient fixe le cylindre intérieur.



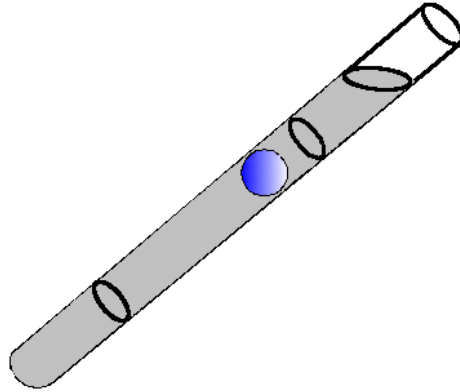
**Figure 1.7.** Viscosimètre rotatif

Le fluide en contact avec le cylindre extérieur va y adhérer et par conséquent va être animé de la vitesse  $V$  du cylindre extérieur. Le fluide en contact avec le cylindre fixe aura une vitesse nulle. La viscosité fait naître une force de frottement que l'on mesure par le couple  $M$ . Les expériences ont montré que : si  $e$  est faible par rapport au rayon intérieur  $r$ , la courbe représentative de la variation de la vitesse entre  $r$  et  $r+e$  est une droite, le couple ( $M$ ) varie proportionnellement à la vitesse et on a :

$$M = \mu \frac{(2\pi r h)r}{e} V$$

**b- Viscosimètre à chute de bille ou viscosimètre d'Hoepler :**

Une bille sphérique tombe lentement dans un tube bien calibré renfermant le liquide visqueux. On mesure la durée  $t$  que met la bille pour parcourir une certaine distance. On montre que la viscosité dynamique  $\mu$  est proportionnelle à la durée  $t$  :  $\mu = K \cdot t$



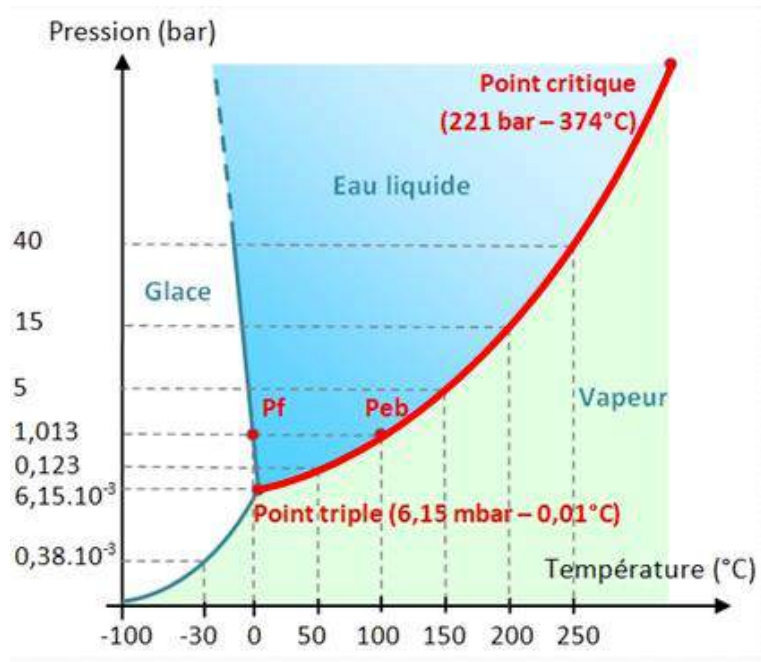
**Figure 1.8.** Viscosimètre d'Hoepler

**1.2.6. Pression de vapeur saturante**

Lors de l'évaporation de l'eau à l'intérieur d'une enceinte fermée, on appelle la tension partielle créée par les molécules de vapeurs, la pression de vapeur saturation. C'est la pression à laquelle la phase gazeuse de cette substance est en équilibre avec sa phase liquide ou solide. Elle est proportionnelle à la température et augmente avec celle-ci. Dans le cas de l'eau, la pression de vapeur ( $p_s$ ) croît avec une augmentation de la température ( $T$ ). La pression de vapeur saturante pour l'eau est donnée par la relation empirique suivante :

$$\log_{10}(P_s) = 22.435 - \frac{2795}{T + 273.15} - 3.868 \log_{10}(T + 273.15)$$

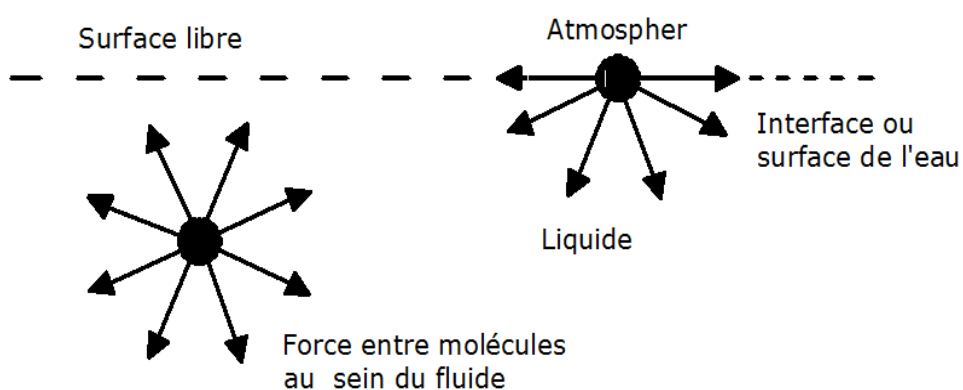
Avec  $P_s$  en  $P_a$  et  $T$  en  $^{\circ}\text{Celsius}$ .



**Figure 1.9.** Evolution de pression en fonction de température

### 1.2.7. Tension superficielle

Une molécule liquide au repos est soumise aux forces d'attractions que les molécules voisines exercent sur elle. Une molécule à la surface libre d'un liquide ou à la surface de séparation de deux liquides non miscibles n'est plus soumise à l'action de forces symétriques, puisqu'elle n'est plus entourée symétriquement par d'autres molécules de même nature. Ainsi la résultante des forces moléculaires n'est plus nulle. La surface de séparation se comporte comme une membrane tendue. La force d'attraction tangentielle à la surface nécessaire pour arracher des particules agissant le long d'un segment de longueur unitaire est appelée tension superficielle.



**Figure 1.10.** Forces d'attractions

La tension superficielle est définie par la relation :

$$T_s = \frac{F}{L}, (\text{en } N/m)$$

Avec  $L$ , la longueur virtuelle tracée à la surface du liquide au repos, sur laquelle agissant des forces  $F$  tangentielle à l'interface.

Les effets de tension superficielle ne sont pas importants dans les écoulements en eau potable ou en assainissement et ne sont donc pas pris en compte. Tension de surface : Air – eau à 20°C : 0,0724 N/m.

### 1.2.8. Capillarité (Loi de Jurin)

Un tube cylindrique de petit diamètre dans un liquide de masse volumique  $\rho_L$  est dite capillaire lorsque son diamètre intérieur  $2r$  n'existe pas quelque diamètre. On observe tout d'abord que la surface libre de fluide dans le capillaire forme un ménisque. On observe d'autre part une différence de niveau entre la surface libre de la colonne de liquide et la surface libre du fluide à l'extérieur du capillaire à l'interface avec le gaz de masse volumique  $\rho_G$ .

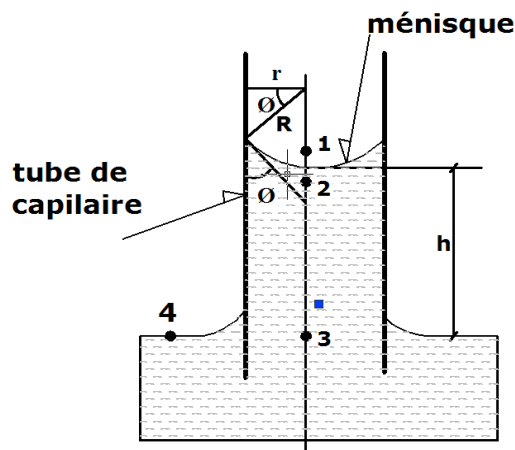


Figure 1.11. Expérience du phénomène de remontée capillaire.

$$r = R \cdot \cos\phi$$

Ou

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos\phi}{r}$$

La différence de pression qui existe entre les deux points 1 et 2 situés de part et d'autre de l'interface sphérique vaut, d'après la loi de Laplace :

$$p_1 - p_2 = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2\sigma \cdot \cos\phi}{r}$$

D'autre part, la différence de pression hydrostatique entre les points 2 et 3 vaut :

$$p_2 - p_3 = \rho_L g \cdot h$$

et la différence de pression qui existe dans le gaz entre les points 1 et 4 vaut :

$$p_1 - p_4 = \rho_G g \cdot h$$

Donc

$$p_1 - p_2 = (\rho_G - \rho_L) g \cdot h = \frac{2\sigma \cdot \cos\phi}{r}$$

La hauteur de remontée d'eau dans le capillaire :

$$h = \frac{2\sigma \cdot \cos\theta}{r(\rho_G - \rho_L)g}$$

### 1.3. D'autres propriétés physiques des fluides

#### 1.3.1.1. Compressibilité ( $\beta_p$ )

C'est la faculté d'un fluide de pouvoir changer de volume sous l'action de la variation de la pression. Elle s'écrit par la relation :

$$\beta_p = -\frac{1}{W} \frac{dW}{dP} \text{ en m}^2/\text{N}$$

$\frac{dW}{dP}$  : Gradient de volume (W)

Le signe (-) correspond à la formation du volume quand la pression augmente.

**Application :** On comprime un liquide dont les paramètres à l'état initial sont :  $p_1= 50\text{bar}$  et  $V_1= 30.5 \text{ dm}^3$  et les paramètres à l'état final sont :  $p_2= 250\text{bar}$  et  $V_2= 30\text{dm}^3$ . Calculer le coefficient de compressibilité  $\beta_p$  de ce liquide.

**Réponse :**

$$\beta_p = -\frac{1}{W} \frac{dW}{dP} = -\frac{(30.5 - 30)}{(250 - 50) \cdot 30.5} = -8.2 \cdot 10^{-5} \text{bar}^{-1}$$

#### 1.3.1.2. Elasticité E

C'est l'inverse de la Compressibilité

$$E = \rho \frac{dP}{d\rho} \text{ en N/m}^2$$

La valeur de E augmente sensiblement avec la température et la pression.

**Cas de l'eau:**

T=0°C et P = 5kgf/cm <sup>2</sup>	T=20°C et P = 5kgf/cm <sup>2</sup>
E=18900 kgf/cm <sup>2</sup>	E=22170 kgf/cm <sup>2</sup>

#### 1.3.1.3. La dilatation thermique ( $\beta_T$ )

Elle s'exprime par la variation relative du volume W correspondant à une augmentation de la température de 1 °C.

$$\beta_T = \frac{1}{W} \frac{dW}{dT} \text{ en } ^\circ\text{C}^{-1}$$

**Tableau1.1** coefficient de dilation de quelque corps

<b>Corps</b>	<b><math>\beta_T</math></b>
<b>Mercure</b>	$1,72 \cdot 10^{-3}$

<b>Alcool</b>	$1,10 \cdot 10^{-3}$
<b>Ether</b>	$1,60 \cdot 10^{-3}$
<b>Acétone</b>	$1,43 \cdot 10^{-3}$

**Application :** Un récipient rigide en acier est rempli d'un liquide à 15 atm. Le volume du liquide est de 1,232 litre. A une pression de 30 atm, le volume du liquide est de 1,231 litre. Trouver le module d'élasticité du liquide pour la gamme de pressions données dans le cas isotherme ?

- Quel est alors le coefficient de compressibilité ?

**Réponse :**

$$E = -\rho \frac{dP}{d\rho} = -w \frac{dP}{dw} = -\frac{(30 - 15) \cdot 101325}{(1.231 - 1.232) / 1.232} = 1.872 \text{ GPa}$$

et

$$\beta_p = \frac{1}{E} = \frac{1}{1.872} = 0.534 \text{ GPa}^{-1}$$

#### 1.4. Caractérisation des forces agissant dans un fluide

Les forces qui agissent sur un volume fini de fluide sont de deux types :

- ✓ Les forces de volumes
- ✓ Les forces de surfaces

##### 1.4.1. Les forces de volumes

Elles se composent des forces suivantes :

##### a- Les forces de pesanteur provenant de la gravité (force de pesanteur).

Les composantes de la force  $\vec{F}$  peuvent s'écrire, Dans le cas ou le fluide soumis qui a la pesanteur :

$$F_x=0$$

$$F_y=0$$

$$F_z=-g$$

##### b- Les forces d'accélération pure :

Elles proviennent de la variation de la vitesse (V) de la masse d'un fluide (M) dans le temps.

$$F_{\text{accélération pure}} = M \frac{\partial V}{\partial t}$$

##### c- Les forces d'accélération convective :

Elles proviennent de la variation de la vitesse ( $V_x, V_y, V_z$ ) dans l'espace (repère [x, y, z]).

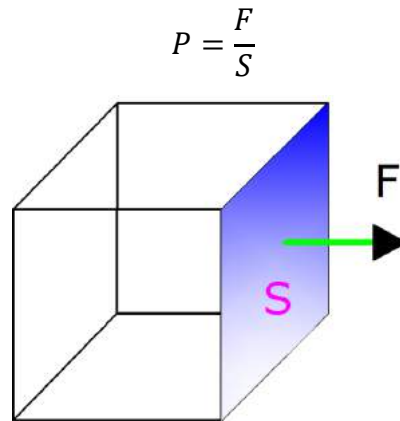
$$F_{\text{accélération convection}} = M \left( \frac{\partial V}{\partial X} \cdot V_x + \frac{\partial V}{\partial Y} \cdot V_y + \frac{\partial V}{\partial Z} \cdot V_z \right)$$

##### 1.4.2. Les forces de surfaces

Elles se composent des forces suivantes :

**a- Les forces de pression :**

Les particules qui forment un liquide sont en perpétuel mouvement ce qui provoque de nombreux chocs entre elles et avec les parois du récipient qui les contient. On dit alors que le liquide exerce une force de pression sur les parois. Cette force de pression est dirigée vers l'extérieur et perpendiculaire à la surface S sur laquelle elle agit. On peut ainsi définir la pression P comme étant la force qui s'exerce sur chaque unité de surface et la représenter par le rapport suivant :



**Figure 1.12 :** Force de pression sur une paroi

La pression est généralement donnée par Pa (N/m<sup>2</sup>) ou en bar

**b- Les forces de frottement de viscosité :**

Nous avons vu précédemment qu'un fluide, dont les particules sont en mouvement relatif, génèrent des forces de frottement dues à la viscosité. La force de frottement s'écrit:

$$F = \mu A \frac{\partial U}{\partial y} = \zeta \cdot A$$

**c- Les forces générées par la turbulence :**

La turbulence décrite au premier chapitre joue un rôle majeur dans l'écoulement des fluides. La turbulence a tendance à « freiner » l'écoulement. Une façon de les représenter mathématiquement consiste à les assimiler à des forces de frottement, ce qui est faux compte tenu de la nature même de la turbulence.

**Application** : On donne  $F_1 = 100 \text{ N}$  et  $D_1 = 10 \text{ cm}$  (diamètre du petit piston)

Le petit piston descend d'une hauteur  $h_1 = 1 \text{ m}$

1. Si le diamètre du grand piston est  $D_2 = 1 \text{ m}$ , quelle est l'intensité de la force  $F_2$  exercée sur le grand piston ?

2. De quelle hauteur  $h_2$  monte le grand piston ?

**Réponse** :

$$P_1 = \frac{F_1}{S_1} = \frac{100}{\frac{\pi \cdot (0.1)^2}{4}} = 12732 Pa$$

$$F_2 = P_2 \cdot S_2 \text{ or } P_2 = P_1$$

Soit

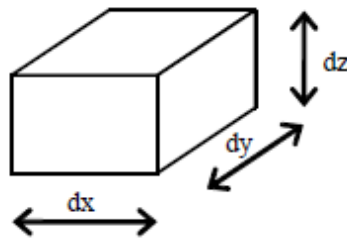
$$F_2 = 12732 \cdot \frac{\pi \cdot (1)^2}{4} = 10.000 N$$



La statique des fluides s'intéresse à l'étude des fluides au repos, lorsque le fluide n'est animé d'aucun mouvement. L'objectif est de calculer la pression en tout point du domaine fluide. Un deuxième objectif est le calcul des efforts exercés par ce fluide au repos sur des surfaces solides indéformables avec lequel il est en contact. Le champ d'applications est très large et concerne par Application le calcul de la force résultante appliquée sur un barrage ou sur un objet partiellement ou complètement immergé, ainsi que le calcul de la pression dans des réservoirs. Nous démontrerons dans un premier temps l'équation de l'hydrostatique en nous basant sur le principe fondamental de la statique appliqué à un petit élément du volume fluide. Nous introduirons ensuite le principe d'Archimède qui est un des outils indispensable au calcul des efforts exercés par un fluide sur un corps immergé ou partiellement immergé.

## 2.1. Notion mathématiques

Elément de volume :  $dv = dx.dy.dz$



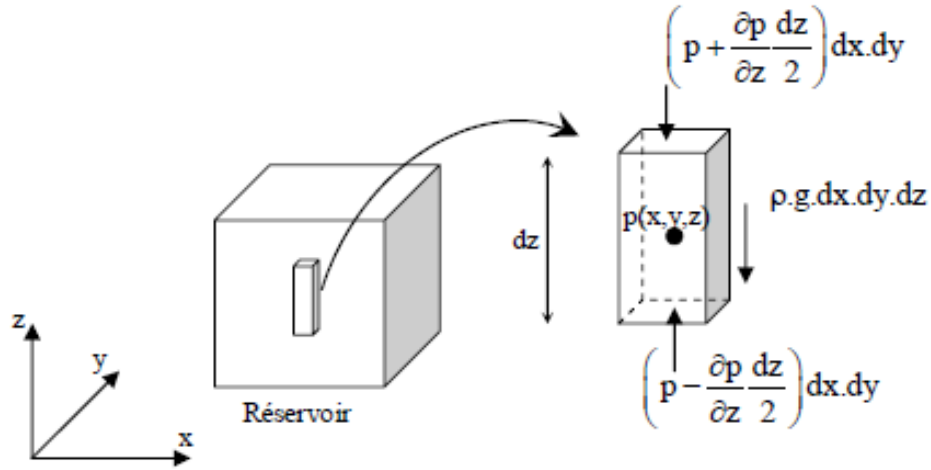
Dérivée partielle  $\frac{\partial}{\partial x}$

$$\text{Dérivée totale } dP = \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

## 2.2. Equations de l'hydrostatique

Considérons dans un réservoir un fluide au repos, dont on extrait un petit parallélépipède d'eau d'axe vertical z. Soit p la pression en son centre.

Il est soumis aux forces verticales suivantes :



**Figure 2.1.** Les forces de volume et les forces de pression

Les forces de volume, il n'en existe qu'une seule la force de pesanteur. Elle s'écrit de la façon suivante :

$$F_{\text{pesanteur}} = \rho g. dx. dy. dz$$

Les forces d'inertie n'existent pas puisque le fluide est au repos (vitesse nulle).

Les forces de surface, la pression agit sur la face supérieure et inférieure de l'élément. Ces forces s'écrivent de la façon suivante :

Force de pression sur la surface inférieure :

$$F_{\text{pression inf}} = \left[ p - \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{dz}{2} \right) \right] dy. dz$$

Force de pression sur la surface supérieure :

$$F_{\text{pression sup}} = - \left[ p + \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{dz}{2} \right) \right] dy. dz$$

Les forces de viscosité et de turbulence n'existent pas puisqu'il n'y a pas de vitesse relative entre les particules de fluide.

L'équation de l'hydrostatique est déterminé en écrivant l'équilibre de l'ensemble des forces :  $\Sigma F = \text{Forces d'inertie}$ . En projetant cette equation suivant la verticale, on a:

$$-\rho g(dx. dy. dz) + \left( p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx. dy - \left( p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx. dy = 0$$

soit:

$$-\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

On peut écrire de façon analogue les équations d'équilibre dans les autres directions :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Ces trois équations montrent que la pression est indépendante de  $x$  et de  $y$ , c'est-à-dire que la pression ne varie pas dans les directions  $x$  et  $y$  ou encore qu'elle est constante dans un plan horizontale. Cela est vérifié tant que l'on reste dans un même fluide ( $\rho$  constante). La pression ne dépend que de  $z$ , ce qu'on écrit :

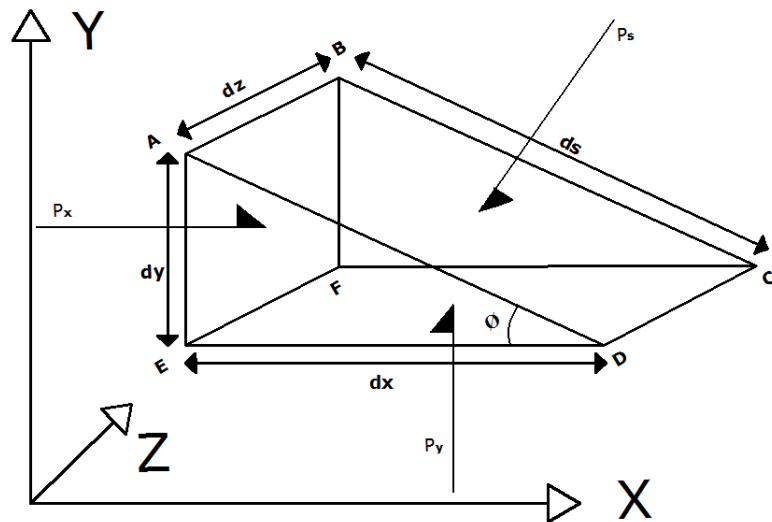
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \text{ ou } dp = -\rho g dz$$

**Conclusion :**

La pression augmente donc linéairement en fonction de la profondeur

**2.3. Loi de pascal**

Considérons un élément d'un fluide ABCDEF (prisme triangulaire) et soient  $P_x, P_y$  et  $P_s$  les pressions dans les 3 directions  $x, y$  et  $s$ .



**Figure 2.2.** Les forces de pression sur un prisme triangulaire

Selon la direction  $x$  :

- Force due à  $P_x$  :  $F_{xx} = P_x(ABFE) = P_x dydz$

- Force due à  $P_y$  :  $F_{yx} = 0$

Composante due à  $P_s$  :  $F_{sx} = -P_s(ABCD \cdot \sin\phi) = -P_s dsdz \cdot \frac{dy}{ds}$  car  $\sin\phi = \frac{dy}{ds}$

Donc :  $F_{sx} = -P_s dydz$

et puisque le fluide est en équilibre:  $F_{xx} + F_{yx} + F_{sx} = 0$

d'où :  $P_x \cdot dydz - P_s dydz = 0 \Rightarrow P_x = P_s$

Selon la direction  $y$  :

- Force due à  $P_y$  :  $F_{yy} = P_y(DCFE) = P_y dx dz$

- Force due à  $P_x$  :  $F_{xy} = 0$

Composante due à  $P_s$  :  $F_{sy} = -P_s(ABCD \cdot \cos\phi) = -P_s ds \cdot dz \cdot \frac{dx}{ds}$  car  $\cos\phi = \frac{dx}{ds}$

Donc :  $F_{sy} = -P_s dx dz$

et puisque le fluide est en équilibre:  $F_{yy} + F_{xy} + F_{sy} = 0$

d'où :  $P_y \cdot dx dz - P_s dy dz = 0 \Rightarrow P_y = P_s$

et finalement :  $P_x = P_y = P_s$

### Conclusion

La pression d'un fluide en un point est la même dans toutes les directions (loi de Pascal).

### 2.4. Pression absolue et pression relative

On désigne par pression atmosphérique, la pression de l'air ambiant. Elle est souvent mesurée à l'aide d'un baromètre. Sa valeur fluctue en fonction des conditions météorologiques et de la zone géographique et oscille autour d'une valeur moyenne de 101325 Pa appelée pression atmosphérique et notée  $P_{atm}$ . Lorsque la pression d'un liquide est supérieure à la pression atmosphérique on dit que ce liquide est sous pression. Dans le cas contraire, on dit que le liquide est sous vide.

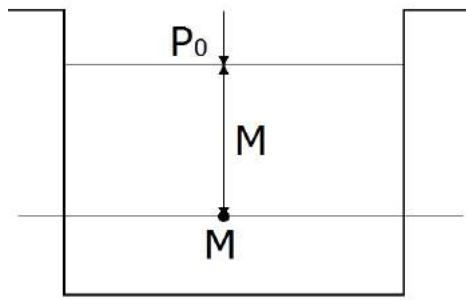
La pression relative (relative ou réelle) qui représente la différence entre la pression du liquide  $P$  dite pression absolue et la pression atmosphérique et c'est justement la pression que mesurent les manomètres.

La pression absolue est la pression mesurée par rapport au vide absolu. Elle est toujours positive. A la surface libre du fluide, la pression est généralement représentée par la pression atmosphérique  $P_{atm}$ , d'où :

**$P_{ab} = \rho gh + P_{atm}$**  : Pression Absolue

Et si l'on néglige l'influence de la pression atmosphérique ( $P_{atm} = 0$ )

**$P_{eff} = \rho gh$**  : Pression effective



**Figure 2.3.** Pression absolue et pression relative

### 2.5. Charge piézométrique, hauteur piézométrique :

L'équation de l'hydrostatique par rapport à un plan de référence, on a :

$$Z + \frac{P}{\rho g} = C^{ste}$$

Avec :

$Z[L]$ : Hauteur de position ou côte géométrique

$\frac{P}{\rho g} [L]$ : Hauteur piézométrique

$$Z + \frac{P}{\rho g} : \text{Hauteur ou charge totale}$$

### 2.6. Notion de hauteur du vide :

Dans certains cas, la pression absolue est inférieure à la pression atmosphérique :

$$P_M = P_{atm} + \rho gh < P_{atm}$$

Il se crée alors une dépression dont la hauteur correspondante, appelée ‘ ‘ Hauteur du Vide ‘ ‘, est égale à :

$$h_{vide} = \frac{P_{atm} + P_{Abs}}{\rho g}$$

### 2.7. Signification énergétique de l'équation de la statique des fluides :

$$\text{On a vu que : } Z + \frac{P}{\rho g} = C^{ste} = E_p$$

On multiplie les 2 cotes de cette équation par le poids élémentaire  $mg$ , on aura :

Si l'on multiplie les 2 termes de cette équation par le poids élémentaire  $mg$ , on aura :

$$mgZ + mg \frac{P}{\rho g} = mgE_p$$

Avec :

$mgZ[Nm]$ : Energie potentielle de position

$mg \frac{P}{\rho g} [Nm]$  : Energie potentielle de pression

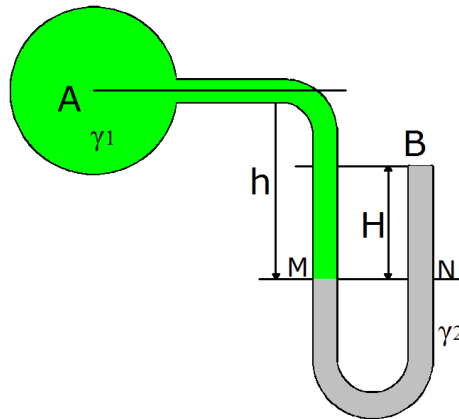
$mgE_p[Nm]$  : Energie potentielle totale

## 2.8. Mesure de la pression

### 2.8.1. Manomètres

La mesure de pression statique dans un liquide est obtenue à partir d'un manomètre. Le dispositif le plus simple est le manomètre en U tel que celui représenté sur la Figure 2.4. Ce manomètre est raccordé à une enceinte contenant un fluide à la pression  $P_A$ . Il est composé de 2 fluides de poids spécifiques  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  respectivement.

La relation de l'hydrostatique nous permet d'écrire des relations entre les pressions aux points  $A$ ,  $M$ ,  $N$  et  $B$  :



**Figure 2.4.** Tube manométrique en U

On a :  $P_M = P_N$

$$P_M = P_A + \gamma_1 h$$

$$P_N = P_B + \gamma_2 H$$

Ceci conduit donc à la valeur de la pression effective en  $A$  (la pression au point  $B$  étant à la pression atmosphérique) :

$$P_A = P_{\text{atm}} + \gamma_2 H - \gamma_1 h$$

Puisque l'on mesure une pression manométrique, on soustrait donc  $P_{\text{atm}}$  :

$$P_N = \gamma_2 H$$

$$P_A = \gamma_2 H - \gamma_1 h$$

**Remarque :**

- Si le fluide de densité  $\rho$  est un gaz, sa densité est négligeable devant celle du liquide manométrique :

$$\rho_m \ll \rho \quad P_A = \gamma_2 H$$

## 2.8.2. Mesure des pressions par les tubes manométriques

### 2.8.2.1. Le tube manométrique simple ou piézomètre :

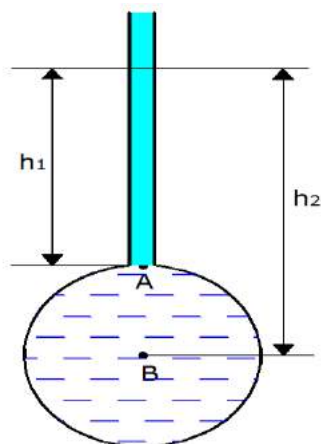


Figure 2.5. Tube piézométrique

$$P_A = \rho g h_1$$

$$P_B = \rho g h_2$$

$$P_B - P_A = \rho g h_2 - \rho g h_1$$

### 2.8.2.2. Mesure de la différence de pression par un manomètre en U

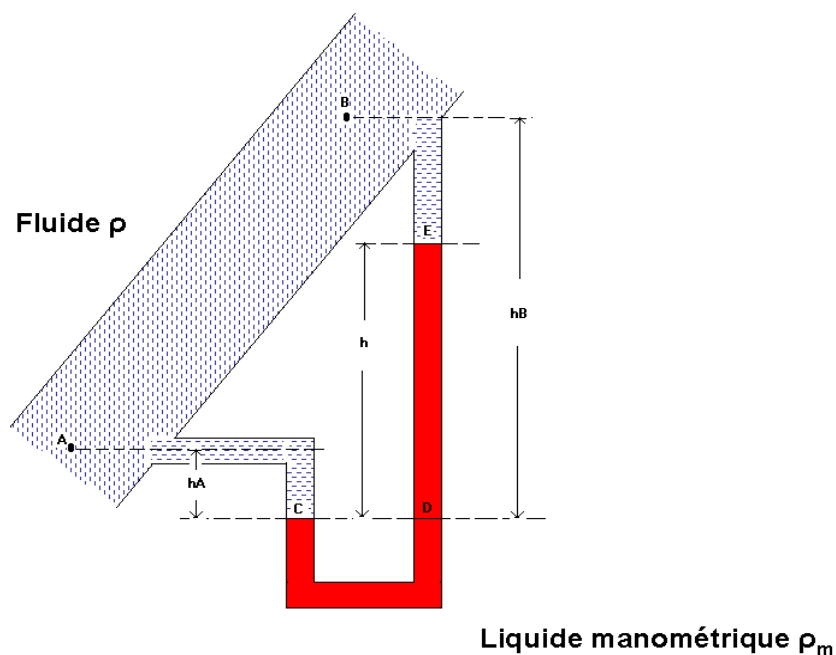


Figure 2.5. Tube piézométrique

Problème : Calcul de la différence de pression ( $P_A - P_B$ ) :

On sait que :  $P_C = P_D$

- Branche de Gauche :  $P_C = P_A + \rho g h_A$

- Branche de Droite :  $P_D = P_B + \rho g (h_B - h) + \rho_m g h$

et comme  $P_C = P_D \Rightarrow P_A + \rho g h_A = P_B + \rho g(h_B - h) + \rho_m g h \Rightarrow P_A - P_B = \rho g(h_B - h_A) + (\rho_m - \rho)gh$

et si le fluide est un gaze  $\rho_m \ll \rho : P_A - P_B = \rho_m g h$

### 2.8.2.3. Manomètre à Eau et manomètre à Mercure

Les manomètres à eau sont utilisés pour mesurer des pressions relativement faibles car leur utilisation pour les fortes pressions conduirait à l'élaboration de tubes de dimensions trop exagérées. C'est pour cela, et compte tenu de sa densité élevée, que l'on préfère utiliser du Mercure comme liquide manométrique.

**Application:** Quelle serait la hauteur manométrique donnée pour mesurer une pression  $P = 120 \text{ KN/m}^2$  :

- a.- Dans le cas d'un manomètre à eau
- b.- Dans le cas d'un manomètre à Mercure

**Réponse :**

*Cas de l'Eau:*

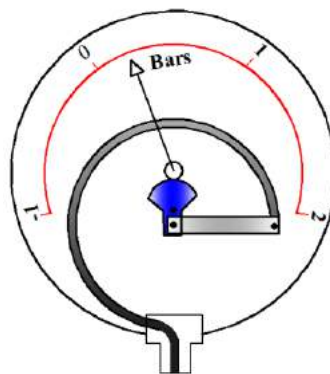
$$P = \rho_w g h \Rightarrow h = \frac{P}{\rho_w g} = \frac{120 \cdot 10^3}{9.81 \cdot 10^3} = 12.23 \text{ m}$$

*Cas du Mercure:*

$$P = \rho_{\text{Hg}} g h \Rightarrow h = \frac{P}{\rho_{\text{Hg}} g} = \frac{120 \cdot 10^3}{9.81 \cdot 13546} = 0.9 \text{ m}$$

### 2.8.2.4. Les manomètres mécaniques

Utilise pour la mesure de pressions relativement plus élevées (1 à 2 kg/cm<sup>2</sup>)



**Figure 2.7.** Tube Manomètre mécanique



## Chapitre 3. Force de pression d'un liquide sur une surface

### 3.1. Forces hydrostatiques sur les parois

Les forces hydrostatiques sur une surface proviennent des forces de pressions du fluide agissant sur cette surface.

Il convient, donc dans un premier temps, de caractériser la pression du fluide sur une surface. Pour cela, on a besoin de :

- la pression dépend de la profondeur d'eau  $h$ . Elle est calculée par la relation :  $P = \rho gh$ ,
  - ❖ La pression s'applique sur une surface ( $ds$ ),
  - ❖ La pression est toujours perpendiculaire à la surface d'application.

### 3.2. Force une paroi plane inclinée

Soit une surface plane AB inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale et immergée dans un fluide de densité massique  $\rho$  et C son centre de gravité.

Etablissons l'expression de la force Résultante  $F$  des forces exercées par le fluide sur la surface AB (voir diagramme des forces exercées) :

Considérons pour cela la force élémentaire  $dF$  s'exerçant sur une surface élémentaire  $dS$  :

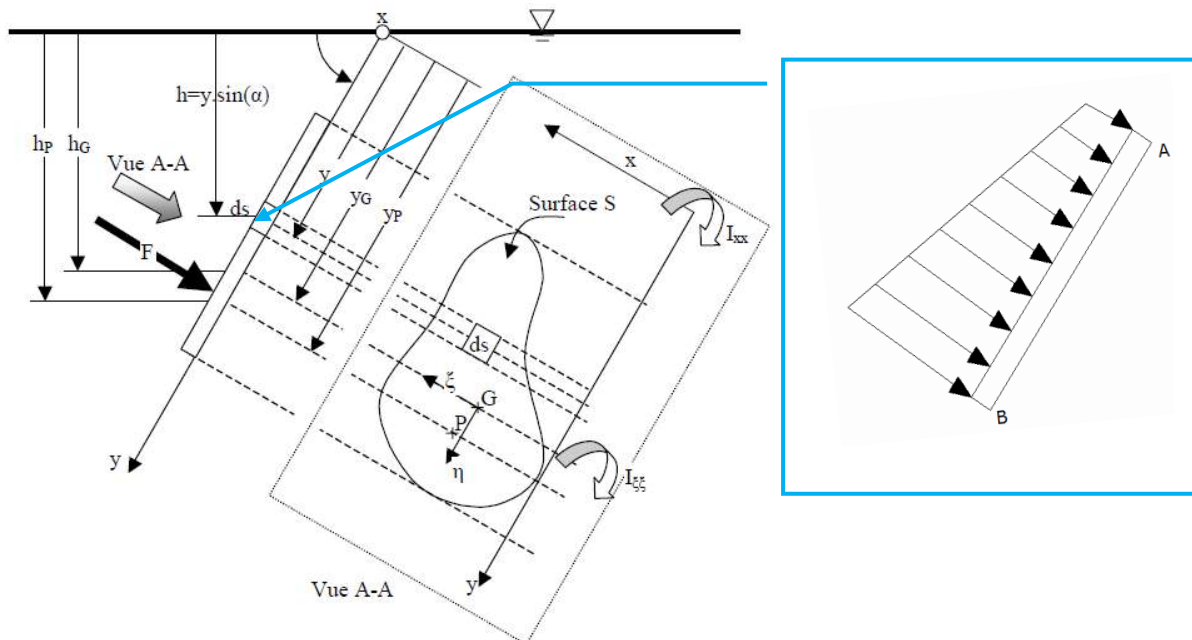


Figure.3.1 Force une paroi plane inclinée

$$dF = PdS = (P_{atm} + \rho gh)dS = P_{atm}dS + \rho gh dS$$

La force  $F$  résultante est égale à l'intégrale de  $dF$  sur toute la surface AB :

$$F = \int_S P dS = \int_S P_{atm} dS + \int_S \rho g h dS$$

Or,  $h = y \sin \alpha$  d'où:

$$F = P_{atm} dS + \int_S \rho g y \sin \alpha dS = P_{atm} dS + \rho g \sin \alpha \int_S y dS$$

Le terme  $\int_S y dS$  représente le moment statique de la surface AB par rapport à ox

$$\int_S y dS = y_G S$$

Avec  $y_c$  : ordonnée du centre de gravité de la surface AB :

L'expression de F devient :  $F = P_{atm} dS + \rho g \sin \alpha y_G S$

et comme  $y_G \sin \alpha = h_G$  : Profondeur du centre de gravité de la surface AB :

$$F = P_{atm} S + \rho g h_G S$$

En général, la pression  $P_{atm}$  est négligée et donc l'expression finale de F devient :

$$F = \rho g h_G S$$

**Remarque :** En hydrostatique,  $\rho = \rho_w$  (Eau) :  $F = \rho_w g h_G S$

### 3.2.1. Point d'application

Le point d'application de la force résultante des pressions P ( $x_p, y_p$ ) est appelé : centre de pression ou de poussée.

La position de ce point est définie par la position du barycentre des surfaces élémentaires (ds) pondérées par la pression sur chaque surface, ce qui revient à calculer le moment équivalent des forces de pression, c'est-à-dire :

$$M_0 F = \sum_{AB} M_i \text{ et } \sum_{AB} M_i = \int_{AB} y dF = \int_{AB} y \rho g y \sin \alpha dS =$$

$$\int_{AB} \rho g y^2 \sin \alpha dS = \rho g \sin \alpha \int_{AB} y^2 dS$$

Le terme  $\int_S y dS$  représente le moment d'inertie de la surface AB par rapport à ox =  $I_{OX}$

On aura donc :  $\rho g y_G \sin \alpha y_p S = \rho g \sin \alpha I_{OX}$

$$\text{Donc : } y_p = \frac{I_{OX}}{y_G S}$$

Le théorème de Huygens nous permet d'écrire que :  $I_{OX} = I_{GG} + y_G^2 S$

Avec

$I_{GG}$  : Moment d'inertie de la surface AB par rapport à un axe passant par son centre de gravité G.

Dans ce cas, la formule précédente devient :

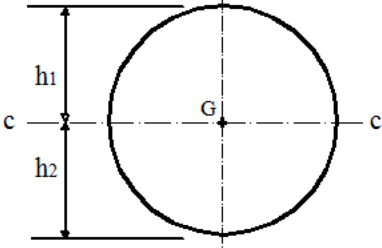
$$y_p = y_c + \frac{I_{GG}}{y_G S} \text{ Ou bien } h_p = h_G + \frac{I_{GG}}{y_G S}$$

**Conclusion :**

Le point d'application de la résultante F se trouve toujours plus bas que le centre de gravité  $y_p < y_g$

**Le tableau 3.1.** Les moments d'inertie de quelques surfaces particulières :

Forme	surface	I <sub>cc</sub>
	$h_1 = \frac{2h}{3}$ $h_2 = \frac{h}{3}$ $S = \frac{bh}{2}$	$I_{cc} = \frac{bh^3}{36}$
	$h_1 = \frac{h}{2}$ $h_2 = \frac{h}{2}$ $S = b \cdot h$	$I_{cc} = \frac{bh^3}{12}$
	$h_1 = \frac{h}{3} \left( \frac{2b+a}{b+a} \right)$ $h_2 = \frac{h}{3} \left( \frac{b+2a}{b+a} \right)$ $S = \frac{h}{2} (b+a)$	$I_{cc} = \frac{h^3(b^3 + 4ba + b^2)}{36(b+a)}$
	$h_1 = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $h_2 = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $S = \frac{d^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$I_{cc} = \frac{5d^4}{48\sqrt{3}} = \frac{5a^4\sqrt{3}}{16}$
	$h_1 = R \left( 1 - \frac{4\sin^3(\theta)}{3(2\theta - \sin(2\theta))} \right)$ $h_2 = R(1 - \cos(\theta)) - h_1$ $S = \frac{R^2}{2} (2\theta - \sin(2\theta))$	$I_{cc} = \frac{R^4}{16} (4\theta - \sin(4\theta)) - \frac{R^4 (1 - \cos(2\theta))^3}{9 (2\theta - \sin(2\theta))}$

	$h_1 = R$ $h_2 = R$ $S = \pi R^2$	$I_{cc} = \frac{\pi R^4}{4}$
---	-----------------------------------	------------------------------

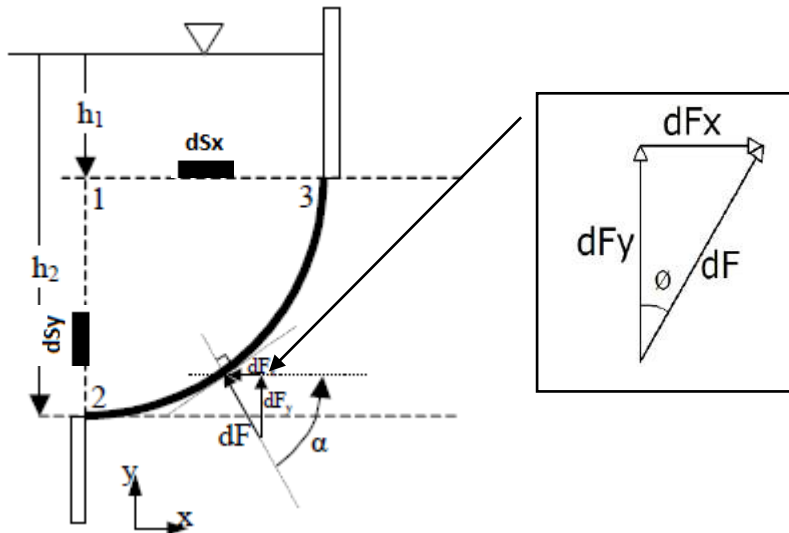
### 3.3. Force de pression sur une surface courbe

La première méthode permettant le calcul de la force résultante  $F$  sur une paroi gauche

Consiste à décomposer la force élémentaire  $d\vec{F}$  suivant les axes  $x$  et  $y$  :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_x \cdot \vec{x} + d\vec{F}_y \cdot \vec{y}$$

- une force  $dF_x$ , agissant sur la surface  $dS_y$  projection de  $dS$  sur l'axe  $y$ .
- une force  $dF_y$ , agissant sur la surface  $dS_x$  projection de  $dS$  sur l'axe  $x$ .



**Figure 3.2.** Force une paroi plane inclinée courbe

On sait que :

$$dF = \rho g h dS \text{ d'où :}$$

$$h = h_2 - h_1$$

$$dF_x = dF \cdot \sin\phi = \rho g h dS \cdot \sin\phi = \rho g h dS_y \text{ car } dA \sin\phi = dS_y$$

$$dF_y = dF \cdot \cos\phi = \rho g h dS \cdot \cos\phi = \rho g h dS_x \text{ car } dA \cos\phi = dS_x$$

D'où

$$\int_{2-3} dF_x = F_H = \rho g \int_{2-3} h dS_y = \rho g h_c S_y \rightarrow F_H = \rho g h_c S_y$$

$S_y$ : Projection verticale de la surface courbe 2-3.

**Conclusion :** Le calcul de la composante horizontale  $F_H$  est ramené au calcul d'une force de pression sur une surface plane verticale.

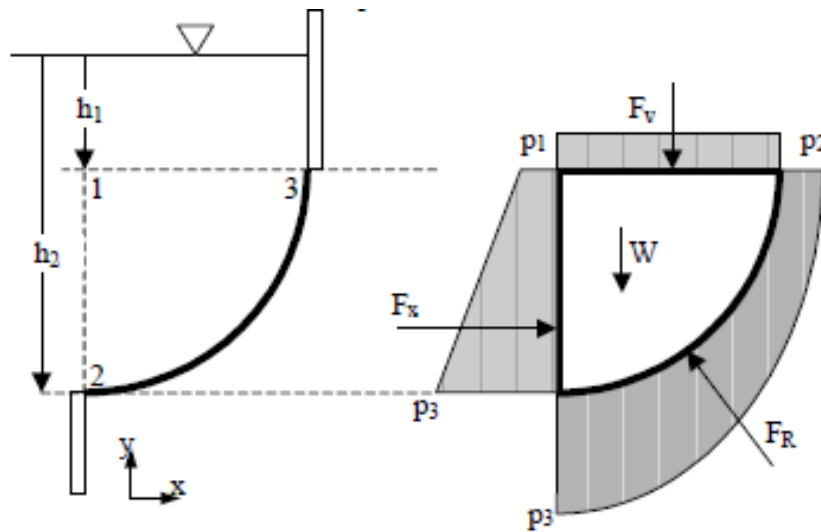
De même  $\int dF_x = F_V = \rho g \int h dS_x = \rho g \int_w dw \rightarrow F_V = \rho g w$

Avec  $W$  : Volume délimité par :

- La surface courbe 2-3
- La surface du fluide 1-3

**Conclusion :** Le calcul de la composante horizontale  $F_V$  se résume donc au calcul du poids du fluide représenté par le volume déplacé par la surface 2-3.

Le calcul des 2 composantes  $F_H$  et  $F_V$  permet ensuite de déterminer la résultante  $F$  par l'expression suivante :



**Figure 3.3.** Diagramme de pression

**b.- Position du point d'application de la Force de Pression :**

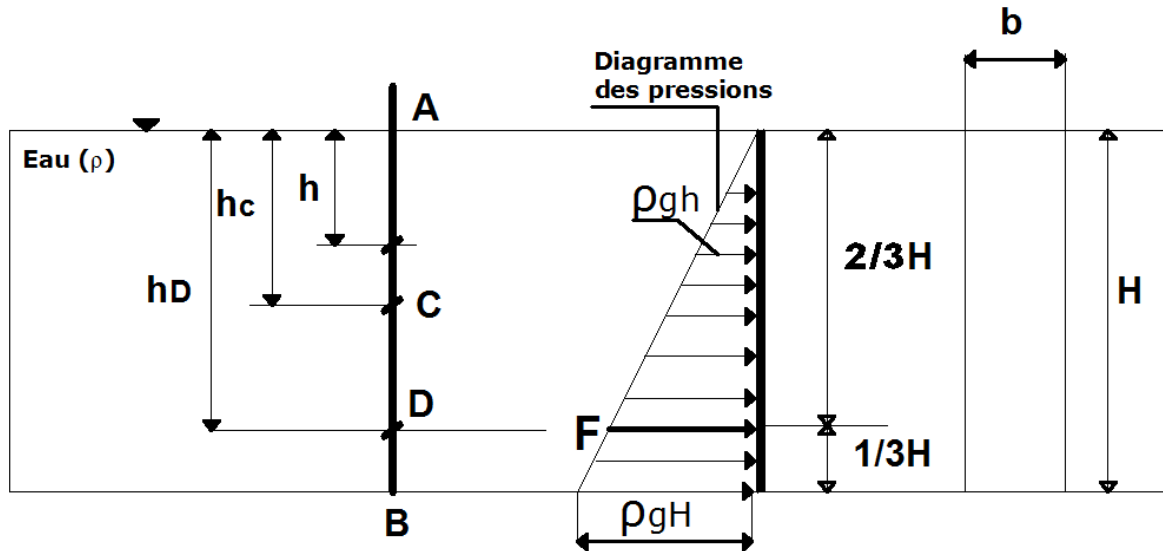
Le point d'application de la résultante  $F$  est obtenu si l'on connaît les composantes  $F_H$  et  $F_V$ .

Dans le cas général, il faudra établir l'équation de la courbe  $AB$  et celle du segment représentant la force  $F$  (équation d'une droite) en tenant compte que l'angle d'inclinaison de la force résultante  $F$  par rapport à l'horizontale est obtenu par la formule suivante :

$$\phi = \arctg \frac{F_V}{F_H}$$

**3.4. Cas d'une surface verticale**

Soit une plaque  $AB$  plane verticale retenant une hauteur d'eau  $H$ . Le diagramme des pressions est représenté par un triangle dont la surface est égale à la résultante des forces de pressions. Les forces que l'on calcule ne concernent que les parois mouillées.



**Figure 3.4.** Force de pression .Cas d'une surface verticale

D'après les formules de l'hydrostatique :

$$F = \rho g h_c S$$

Avec  $h_c = \frac{H}{2}$  et  $S = b \cdot H$

$$F = \frac{1}{2} \rho g H^2 \cdot b \text{ et pour } b=1 \text{ ml}$$

donc

$$F = \frac{1}{2} \rho g H^2$$

et F passe par le centre de gravité du triangle, d'où

$$h_D = h_c + \frac{I_{CC}}{h_c A} = \frac{H}{2} + \frac{1 \cdot H^3}{12 \frac{H}{2} \cdot 1} = \frac{H}{2} + \frac{H}{6} = \frac{2}{3} H$$

### 3.5. Cas d'une surface verticale immergée de profondeur h

La même paroi est immergée d'une profondeur h dans le liquide comme le schéma suivant.

On a par définition la relation de la force

$$F = \rho g h_c S$$

On calcule  $h_c$ , A et h et on les remplace dans l'expression

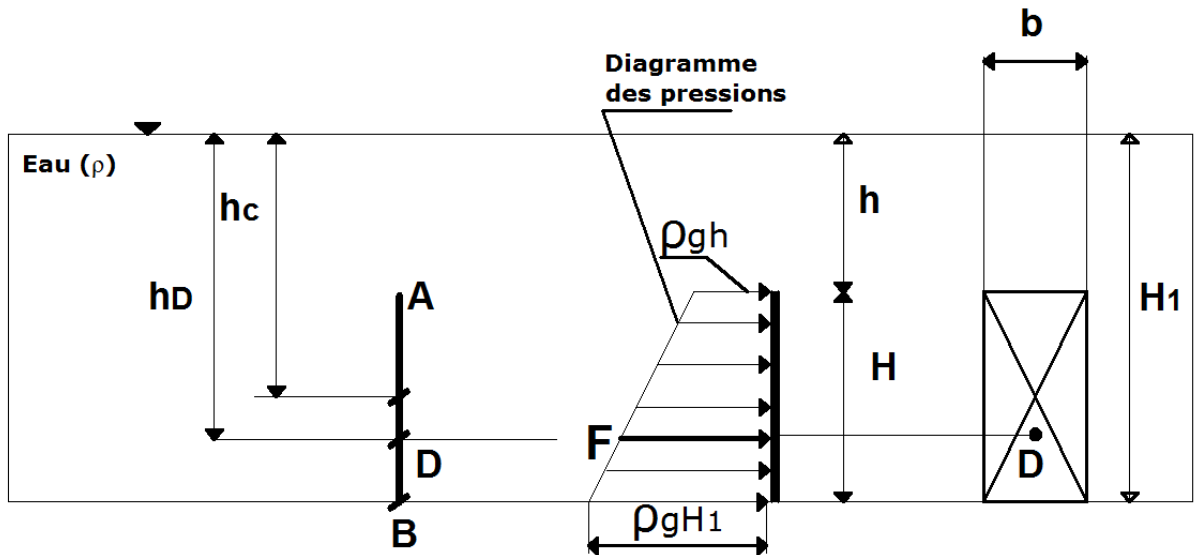
$$A = Hb; h_c = \frac{H}{2} + h \text{ et } h = H_1 - H$$

On retrouve :

$$F = \rho g \left( H_1 - \frac{H}{2} \right) Hb$$

et

$$h_D = \left( \frac{H}{2} + h \right) + \frac{H^3 b}{12} \left( \frac{H}{2} + h \right) Hb$$

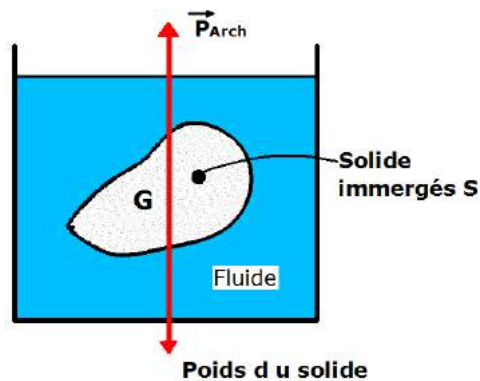


**Figure 3.5.** Force de pression .Cas d'une surface verticale immergée de profondeur **h**

### 3.6. Principe d'Archimède

Dans une situation d'équilibre, tout corps plongé dans un fluide au repos subit une poussée verticale ascendante qui est égale au volume de fluide déplacé.

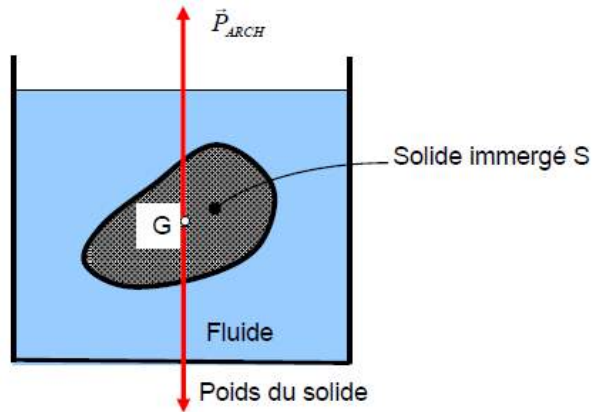
$$P_{\text{Arch}} = \rho_{\text{fluide}} \cdot V_{\text{imm}} \cdot g$$



**Figure 3.6.** Application de la poussée d'Archimède sur un corps immergé

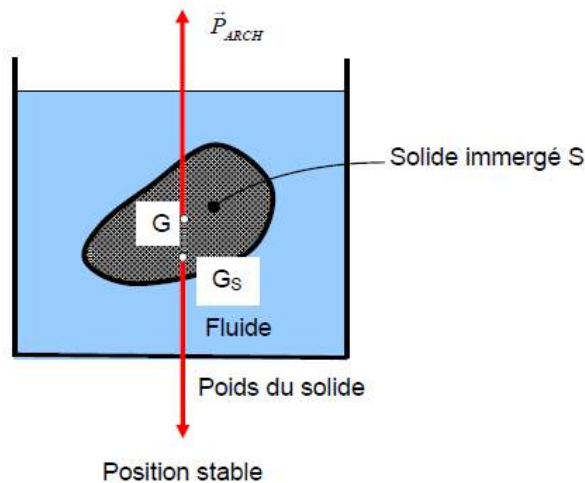
#### Remarque :

- **1<sup>er</sup> cas** : Si le solide immergé est homogène alors le centre de poussée G, point d'application de la poussée d'Archimède sera confondu avec le centre de gravité du solide. L'équilibre du solide est indifférent.



**Figure 3.7.** Principe d'Archimède (solide immergé est homogène)

- **2<sup>ème</sup> cas** : Si le solide immergé est hétérogène alors le centre de poussée G, point d'application de la poussée d'Archimède n'est pas confondu avec le centre de gravité  $G_S$  du solide. L'équilibre du solide est stable si G est au-dessus de  $G_S$ . L'équilibre du solide est instable si G est au-dessous de  $G_S$ .



**Figure 3.8.** Principe d'Archimède (solide immergé est hétérogène)

**Application** : Un cube en acier de côté  $a=50$  cm flotte sur du mercure.

On donne les masses volumiques :

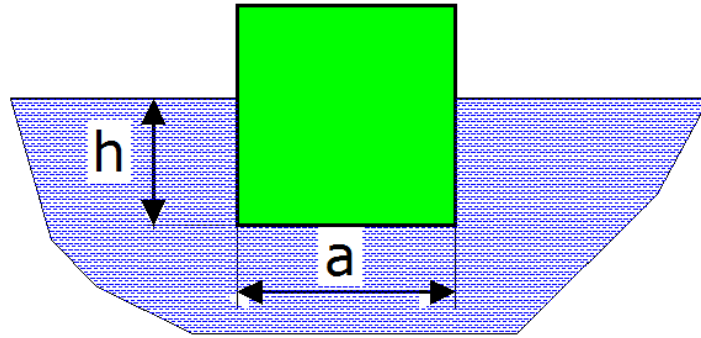
- de l'acier  $\rho_1= 7800$  kg/m<sup>3</sup>

- du mercure  $\rho_2= 13600$  kg/m<sup>3</sup>

1) Appliquer le théorème d'Archimède,

2) Déterminer la hauteur h immergée.





**Réponse :**

1) Théorème d'Archimède : la poussée d'Archimède est égale au poids du volume déplacé :

$$P_{\text{Arch}} = a^2 \cdot h \cdot \rho_2 \cdot g$$

2) Equation d'équilibre :

$$P_{\text{Arch}} = \text{Poids}$$

Donc

$$a^2 \cdot h \cdot \rho_2 \cdot g = a^3 \cdot \rho_1 \cdot g$$

Équivaut à  $h = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot a$

$$h = \frac{7800}{13600} \cdot 50 = 28.676 \text{ cm}$$

## Chapitre 4. Hydrodynamique

Lorsque le fluide est en mouvement, la pression en tout point du fluide est dépendante de l'altitude et de la masse volumique du fluide mais aussi de la vitesse du fluide. La pression est donc la somme d'une pression motrice et d'une pression dynamique. La pression et la vitesse dans un écoulement de fluide parfait et réel sont liées par la relation de Bernoulli. Le fluide réel par opposition au fluide parfait est un fluide dont la viscosité se manifeste lors du déplacement, on dit qu'il est newtonien.

### 4.1. Ecoulement Permanent

L'écoulement d'un fluide est dit permanent si le champ des vectrices vitesses des particules fluides est constant dans le temps.

### 4.2. Principes de Base

#### 4.10.1 Principe de Conservation de Masse ou Equation de Continuité

Le principe de continuité exprime la conservation de masse, ce qui signifie qu'aucun fluide ne peut être créé ni disparaître dans un volume donné :

Soit une veine fluide de diamètre (D) située entre les sections  $S_1$  et  $S_2$  d'un écoulement permanent. Pendant le temps (dt), les sections  $S_1$  et  $S_2$  se déplacent respectivement de  $dl_1$  et  $dl_2$  aux vitesses moyennes débitantes  $V_1$  et  $V_2$ .

La masse se conserve entre le temps (t) et le temps (t+dt) :

$$dm_1 = dm_2$$

$$\rho_1 S_1 dl_1 = \rho_2 S_2 dl_2$$

En divisant par dt :

$$\frac{dl_1}{dt} = V_1 \text{ et } \frac{dl_2}{dt} = V_2$$

On obtient

$$\rho_1 S_1 V_1 = \rho_2 S_2 V_2$$

Le principe de conservation de masse conduit l'expression :

$$\rho S V = Q = C^{ste}$$

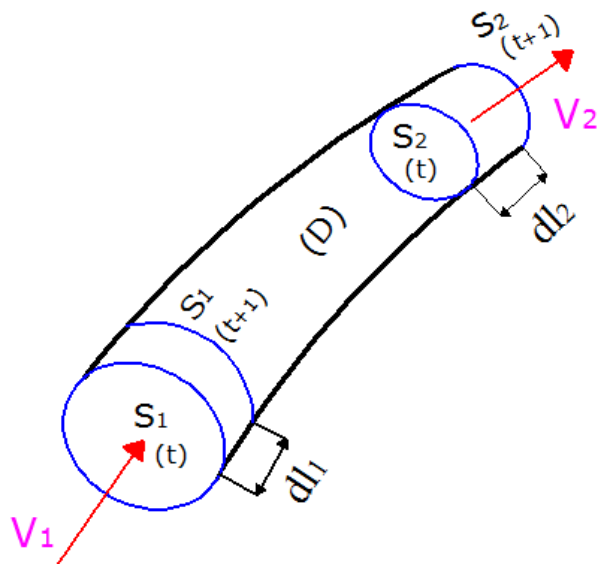
Puisque le fluide est incompressible :

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho$$

On peut simplifier et aboutir

l'équation de continuité suivante :

$$S_1 V_1 = S_2 V_2$$



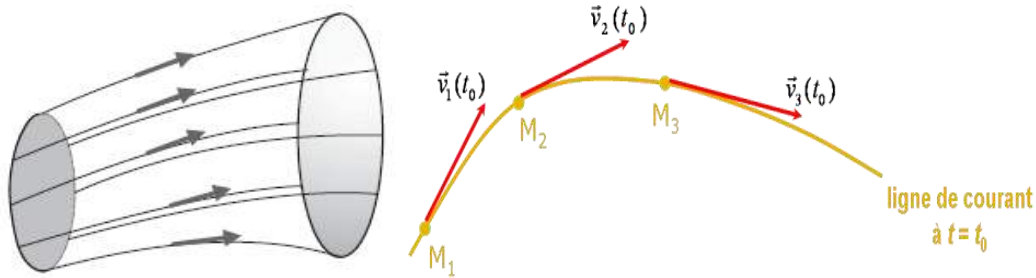
à

### 4.3. Lignes de courant et tube de courant

Pour un instant fixé, lorsqu'une ligne est tracée de façon à ce que le vecteur vitesse soit tangent à cette ligne, en chacun de ses points, alors cette courbe est appelée ligne de courant.

- **Une ligne de courant** est une courbe de l'espace décrivant un fluide en mouvement et qui, à tout instant, possède en tout point une tangente parallèle à la vitesse des particules du fluide.

- **Un tube de courant** est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.



**Figure 4.1.** Tube de courant et ligne de courant

#### 4.4. Notion de débit d'écoulement :

Le **débit** est le quotient de la quantité de fluide qui traverse une section droite de la conduite par la durée de cet écoulement. Le débit d'écoulement s'exprime par les relations suivantes

##### - Débit-masse

Si  $dm$  est la masse de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps  $dt$ , par définition le débit-masse est : unité :  $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$

$$q_m = \frac{dm}{dt}$$

##### - Débit-volume

Si  $dV$  est le volume de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps  $dt$ , par définition le débit-volume est : unité :  $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

$$q_v = \frac{dV}{dt}$$

$Q = AV$ : Débit volumique (volume par unité de temps), Unité SI =  $\text{m}^3/\text{s}$

##### - Relation entre $q_m$ et $q_v$

$q_m = \rho q_v \rightarrow Q_m = \rho Q$ : Débit massique, Unité SI =  $\text{Kg}/\text{s}$

#### 4.5. Théorème de Bernoulli

La relation de Bernoulli permet de calculer la pression et la vitesse sur une ligne de courant dans la configuration d'un fluide parfait et les fluides visqueux.

#### 4.6. Représentation graphique de l'équation de Bernoulli pour un fluide parfait

On appelle fluide parfait est un fluide de viscosité nulle don n'ayant aune adhérence sur la paroi d'une conduite (fluide inexistant dans la nature).

L'équation fondamentale de l'hydrodynamique pour un fluide parfait est représentée graphiquement par la figure.

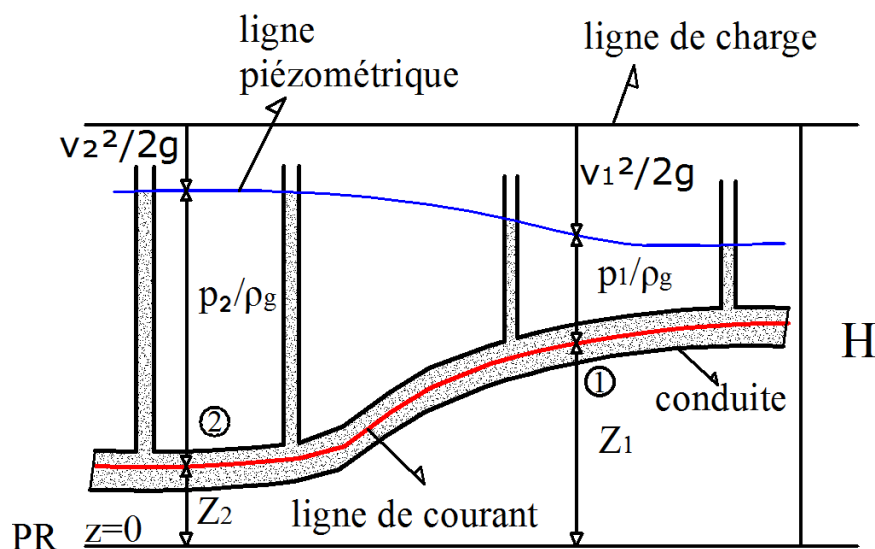


Figure 4.2.Représentation graphique de théorème de Bernoulli (fluide parfait)

L'équation de Bernoulli exprime que, tout le long d'un filet liquide en mouvement permanent, l'énergie totale par unité de poids du liquide reste constante ( $dH/dl = 0$ , perte de charge qui se produit le long de  $dl$ ). D'après le schéma, on peut donc écrire que :

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + Z_2 = H = C^{ste}$$

Cette équation s'écrit donc dans le cas général :

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + Z = H = \frac{p_t}{\rho g} = C^{ste} = \frac{W}{mg} = \frac{E}{g}$$

$\frac{v^2}{2g}$ :Hauteur due à la vitesse

$\frac{p}{\rho g}$ : Hauteur due à la pression

$Z$  : Cote du point

$H = \frac{P_t}{\rho g}$ :Charge totale

❖ **En terme de pression :**

$$\rho gh + p + \rho \frac{v^2}{2} = p_t = C^{ste} = \frac{W}{V_{volume}}$$

$\rho \frac{v^2}{2}$  : Pression dynamique

$\rho gh + p$  : Pression statique pression totale

$p_t$  : Pression totale

❖ **Interprétation énergétique**

$$p^* + \rho \frac{v^2}{2} = p_t = C^{ste} = \frac{W}{V_{volume}}$$

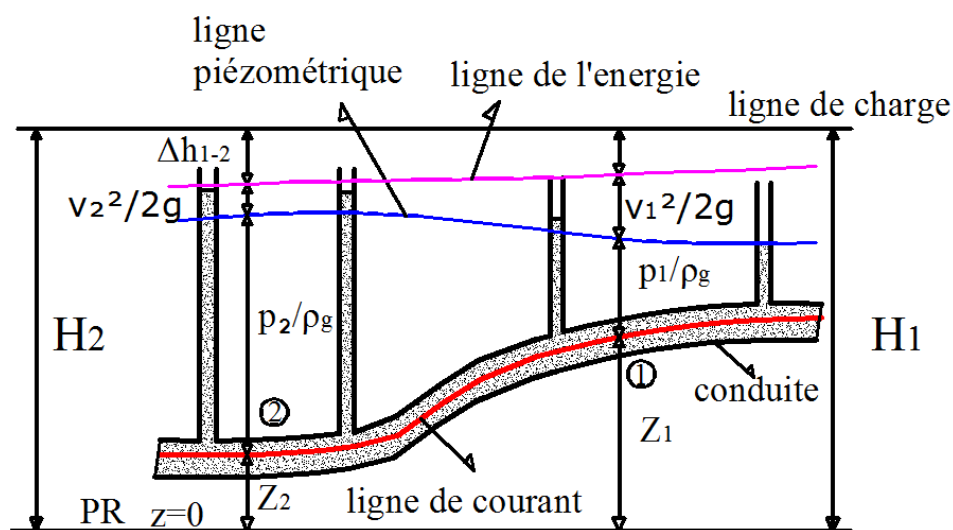
$\rho \frac{v^2}{2}$  : Energie cinétique

$p^*$  : Energie potentielle

$p_t$  : Energie mécanique totale

**4.7. Représentation graphique de l'équation de Bernoulli pour un fluide réel (visqueux)**

L'équation fondamentale de l'hydrodynamique pour un fluide réel est représentée graphiquement par la figure.



**Figure 4.3.** Représentation graphique de théorème de Bernoulli (fluide réel)

La charge  $H$  pour un fluide réel visqueux diminue dans la direction de l'écoulement ( $dH/dx=H1-H2/dl < 0$  = perte de charge qui se produit le long de  $dl$ , due principalement à la viscosité, ou pente hydraulique). D'après le schéma, on peut donc écrire que:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + Z_1 = H_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + Z_2 + \Delta h_{1-2} = H_2$$

Le terme  $\Delta h_{1-2}$  représente la somme des pertes de charge,  $\Delta H_L$ , linéaires ou uniformément réparties, dues à la viscosité (fonction de la température), aux frottements et  $\Delta H_s$  singulières ou locales provoquées par les changements et obstacles le long de l'itinéraire.

#### 4.8. Théorème de Bernoulli – cas d'un écoulement avec échange de travail

On suppose en plus qu'une machine hydraulique est placée entre les sections S1 et S2. Cette machine est caractérisée par une puissance nette  $P_{net}$  échangée avec le fluide, une puissance sur l'arbre  $P_a$  et un certain rendement  $\eta$ . Cette machine peut être soit une turbine soit une pompe.

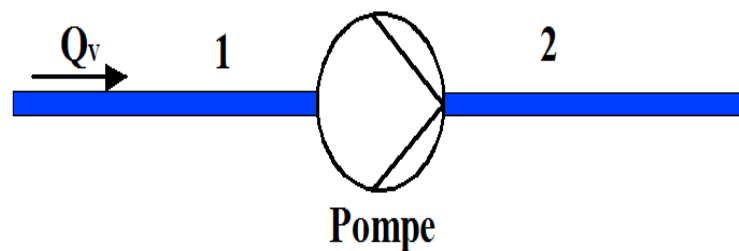


Figure 4.5. Écoulement avec échange de Travail

Si l'échange d'énergie se fait des parois de la machine vers le fluide nous avons affaire à une pompe, si au contraire, l'échange d'énergie se fait du fluide à la paroi de la machine, nous avons affaire à une turbine. L'équation d'énergie est modifiée par le terme  $E$ , qui représente l'augmentation par une pompe ou la diminution par une turbine de l'énergie mécanique totale par unité de masse de liquide en mouvement.

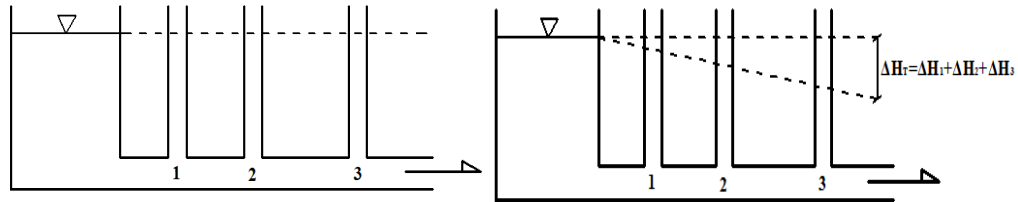
Ainsi l'expression de l'équation de Bernoulli s'écrit :

$P > 0$  si l'énergie est reçue par le fluide (ex. : pompe) ;

$P < 0$  si l'énergie est fournie par le fluide (ex. : turbine).

$$\frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(Z_2 - Z_1) + (p_2 - p_1) = \frac{P}{Q_v}$$

#### 4.9. Différence entre fluide parfait et un fluide réel



1) Fluide parfait 2) Fluide réel

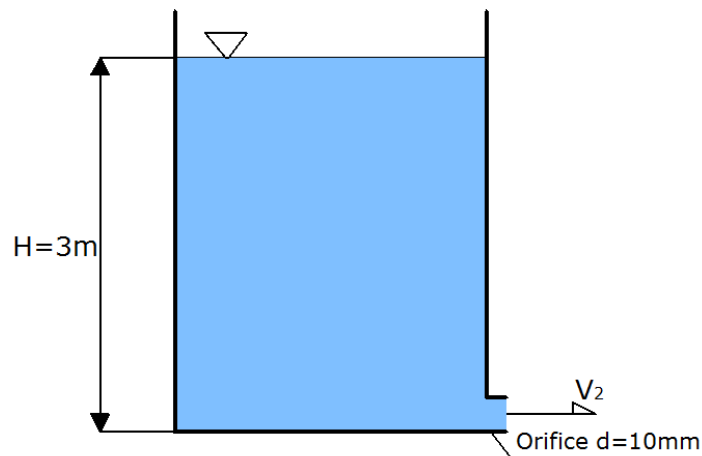
**Figure 4.6.** Différence entre fluide parfait et un fluide réel

Ce terme  $\Delta H$  est celui qui fait la différence entre un écoulement de fluide parfait et un écoulement d'un fluide réel.

**Application :** On considère un réservoir remplie d'eau à une hauteur  $H = 3$  m, muni d'un petit orifice à sa base de diamètre  $d = 10$  mm.

1) En précisant les hypothèses prises en compte, appliquer le théorème de Bernoulli pour calculer la vitesse  $V_2$  d'écoulement d'eau.

2) En déduire le débit volumique  $Q_v$  en (l/s) en sortie de l'orifice. On suppose que  $g = 9,81$  m/s.



**Réponse :** On applique le théorème de Bernoulli avec les hypothèses suivantes :  $V_1 \approx 0$  car le niveau dans le réservoir varie lentement et  $P_1 = P_2 = P_{atm}$ ,

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 \text{ on obtient}$$

$$V_2 = \sqrt{2g(Z_2 - Z_1)} = \sqrt{2gH}$$

$$\text{A.N } V_2 = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 3} = 7,67 \text{ m/s}$$

2- Débit volumique  $Q_v$

$$Q_v = V_2 \cdot S = 7,67 \cdot \frac{\pi(10 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 0,6 \text{ l/s}$$

#### 4.10. Application de l'équation de Bernoulli à la mesure de débit

##### 4.10.1 Tube de venturi

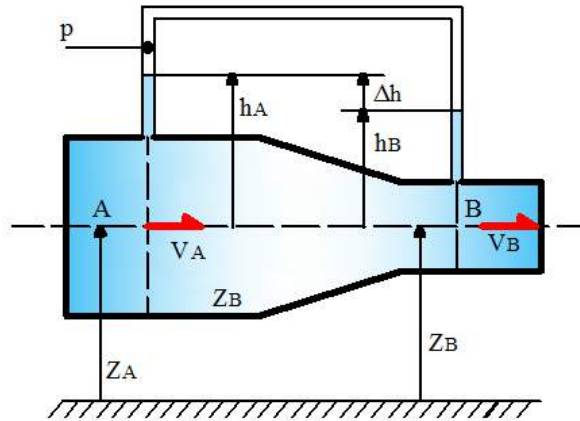


Figure 4.7. Venturi

Equation de continuité

$$Q_v = S_A V_A = S_B V_B$$

Theoreme de bernoulli de plan A - B

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + Z_A = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + Z_B$$

si le venturi est horizontale  $Z_A = Z_B$

Theoreme de Pascal :

$$p_A = p + \rho g h_A$$

$$p_B = p + \rho g h_B$$

$$P_A - P_B = \rho g (h_A - h_B) = \rho g \Delta h$$

et comme

$$V_B = \frac{Q_v}{S_B} \text{ et } V_A = \frac{Q_v}{S_A} \rightarrow V_B^2 - V_A^2 = \frac{Q_v^2}{S_A^2} \left[ \left( \frac{S_A}{S_B} \right)^2 - 1 \right]$$

$$\frac{1}{2} \frac{Q_v^2}{S_A^2} \left[ \left( \frac{S_A}{S_B} \right)^2 - 1 \right] - g \Delta h = 0 \rightarrow Q_v = S_A \sqrt{\frac{2g \Delta h}{\left( \frac{S_A}{S_B} \right)^2 - 1}} \text{ en } m^3/s$$

Avec un venturi , il donc possible de calculer le debit volumique dans un circuit hydraulique.

#### 4.10.2 Vitesse moyenne pour le dimensionnement des conduites

La connaissance des vitesses moyennes est indispensable pour la détermination des diamètres des conduites. Les valeurs moyennes maximales dépendent de la position des conduites dans le circuit hydraulique :

- conduites d'**aspiration** :  $V < 1,2 \text{ m/s}$
- Conduites de **travail (refoulement)** avec transmission de puissance :  $V < 6 \text{ m/s}$
- Conduites de **retour** au bac :  $V < 2 \text{ m/s}$

#### 4.11. Théorème d'Euler :



Une application directe du théorème d'Euler est l'évaluation des forces exercées par les jets d'eau. Celles-ci sont exploitées dans divers domaines : production de l'énergie électrique à partir de l'énergie hydraulique grâce aux turbines, coupe des matériaux, etc. Le théorème d'Euler résulte de l'application du théorème de quantité de mouvement à l'écoulement d'un fluide :

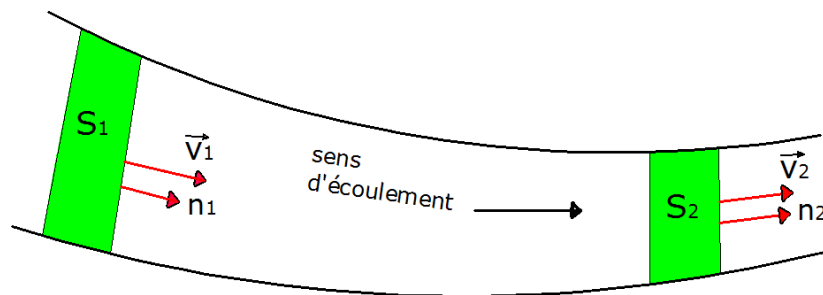


Figure 4.8. Théorème d'Euler

$$\sum \vec{F}_{ex} = \frac{d\vec{P}}{dt}, \quad \text{soit } \frac{dm d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{ex}$$

$$d\vec{P} = d(m \cdot \vec{v}) = m_2 \vec{v}_2 - m_1 \vec{v}_1 = \rho V_2 \cdot \vec{v}_2 - \rho V_1 \cdot \vec{v}_1$$

Or

$$V_2 = S_2 \cdot dx_2 \text{ et } V_1 = S_1 \cdot dx_1$$

$$d\vec{P} = \rho V_2 \cdot \vec{v}_2 - \rho V_1 \cdot \vec{v}_1 = \rho \cdot S_2 \cdot dx_2 \cdot \vec{v}_2 - \rho \cdot S_1 \cdot dx_1 \cdot \vec{v}_1$$

$$d\vec{P} = \rho \cdot S_2 \cdot v_2 \cdot dt \cdot \vec{v}_2 - \rho \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot dt \cdot \vec{v}_1$$

Equation de continuité

$$Q_v = S_2 \cdot v_2 = S_1 \cdot v_1$$

$$d\vec{P} = \rho \cdot Q_v \cdot dt \cdot \vec{v}_2 - \rho \cdot Q_v \cdot dt \cdot \vec{v}_1 = \rho \cdot Q_v \cdot dt \cdot v_1 \cdot \vec{n}_2 - \rho \cdot Q_v \cdot dt \cdot v_1 \cdot \vec{n}_1$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \rho Q \cdot (v_1 \cdot \vec{n}_2 - v_1 \cdot \vec{n}_1)$$

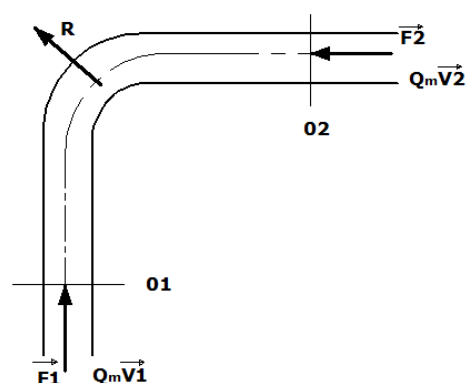
Le théorème d'Euler devient donc :

$\rho Q \cdot (v_1 \cdot \vec{n}_2 - v_1 \cdot \vec{n}_1) = \sum \vec{F}_{ex}$  Ou  $\sum \vec{F}_{ex}$ , représente l'ensemble des forces extérieures appliquées à notre surface de contrôle.

### Application :

Soit un tube de section circulaire de diamètre 0.2m, coudé à angle droit et posé sur un plan horizontal.

- 1- Quelle est en projection horizontale, la résultante des forces R s'exerçant sur le coude quand la vitesse d'écoulement est négligeable.



- 2- Que devient cette résultante quand la vitesse d'écoulement n'est plus négligeable et correspond à un débit de 0.16m<sup>3</sup>/s.

**Réponse :**

- 1- On applique le théorème de quantité de mouvement

$$\vec{P} + \vec{R} = Q_m(\vec{V}_1 - \vec{V}_2)$$

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{F} + \vec{R}$$

Lorsque la vitesse est négligeable, on peut écrire :

$$\vec{P} + \vec{R} = 0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R}$$

$$-\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{R} = 2F_1 \cos 45^\circ$$

F1 et F2, représentent l'action des forces hydrostatiques.

avec

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = P.S \text{ (P: pression exercée)}$$

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = 6.10^5 \frac{\pi}{4} 4.10^{-2} = 18850N$$

$$-R = 2.1885. \frac{\sqrt{2}}{2} = 26650N$$

Le signe (-) de R indique que l'action du fluide sur le coude est dirigée vers l'extérieure de celui-ci.

- 2- En projection horizontale

$$R + F_1 + F_2 = Q_m(\vec{V}_1 - \vec{V}_2)=0$$

$$-R = F_1 + F_2 - Q_m(\vec{V}_1 - \vec{V}_2)$$

$$-R = 2.F_1 \cos 45^\circ + 2.Q_m V_1 \cos 45^\circ$$

Avec

$$V_1 = V_2 = \frac{Q_v}{S} = \frac{160.10^{-3}}{3,14.10^{-2}} = 5,09 \text{ m/s}$$

$$-R=26650+11150=27500N$$

## Chapitre 5. Les régimes d'écoulement des liquides

### 5.1. Dans les conduites fermées

#### 5.1.1. Le nombre de Reynolds

Les expériences réalisées par Reynolds (1883) lors de l'écoulement d'un liquide dans une conduite cylindrique rectiligne dans laquelle arrive également un filet de liquide coloré, ont montré l'existence de deux régimes d'écoulement : laminaire et turbulent.

Les écoulements sont classés en 03 régimes principaux :

Laminaire et Turbulent séparés par une phase transitoire appelée régime critique Pour caractériser ces régimes d'écoulement, on introduit un nombre adimensionnel, appelée Nombre de Reynolds, noté  $Re$  et calculé par la formule :

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{4VD}{\mu}$$

Avec :

$V$  = Vitesse moyenne d'écoulement =  $Q/A$

$D$  = Diamètre de la section d'écoulement (circulaire)

$\nu$  = Viscosité cinématique du fluide =  $\mu/\rho$

$\mu$  = viscosité dynamique du fluide

En introduisant l'expression du débit et de la section d'écoulement (circulaire), le nombre de Reynolds s'écrit :

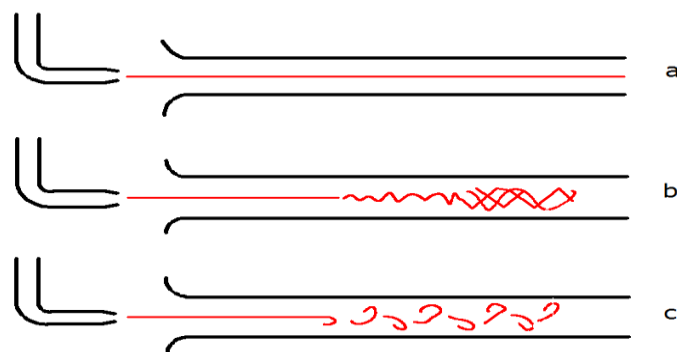
$$Re = \frac{4Q}{\pi D\nu} = \frac{4\rho Q}{\pi D\mu}$$

### 5.1.2. Les limites du Nombre de Reynolds

Les limites du Nombre de Reynolds définissant les différents régimes d'écoulement peuvent être résumés comme suit :

- $Re < 2000$  : Le régime est **Laminaire**
- $2000 < Re < 4000$  : Le régime est **Critique ou Transitoire**
- $Re \geq 4000$  : Le régime est **Turbulent**

Pour mieux faire comprendre ces définitions, nous décrivons sommairement l'expression classique de Reynolds

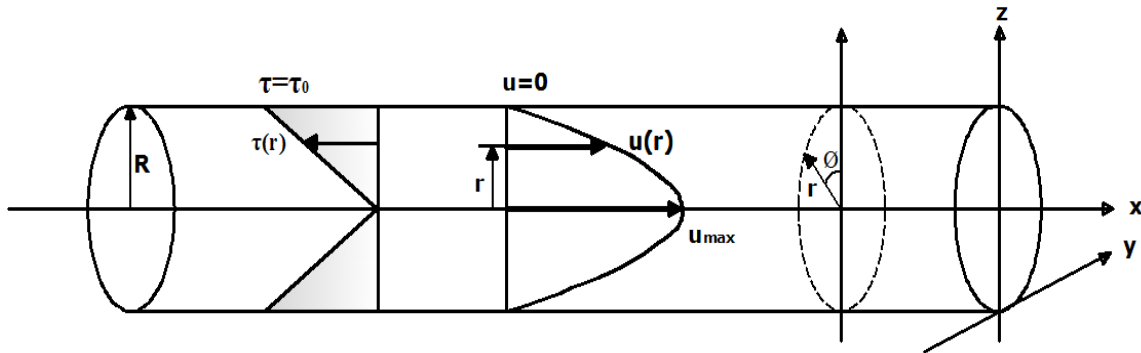


- a) Mouvement laminaire
- b) Mouvement transitoire
- c) Mouvement turbulent

**Figure 5.1.**Expérimentale de Reynolds

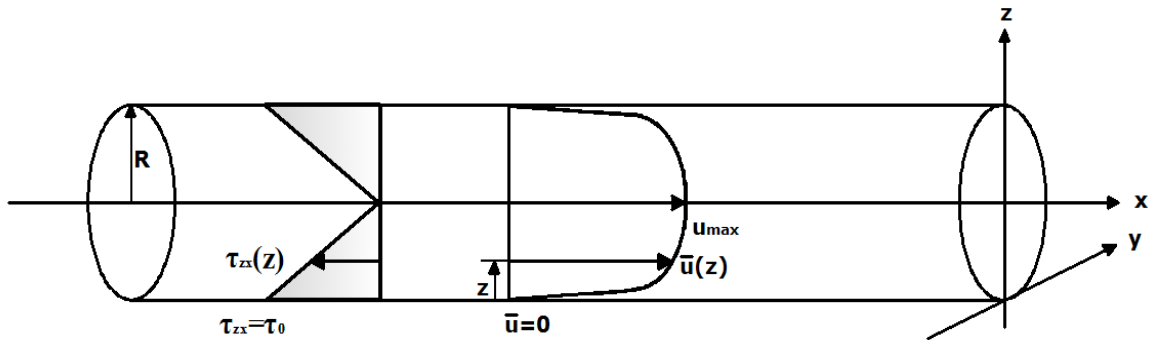
### 5.1.3. Profil des vitesses dans une section circulaire en charge

Dans le cas des conduites en charge où l'écoulement est laminaire, seules les forces de viscosité interviennent ; le profil des vitesses est parabolique et est donné par la figure suivante :



**Figure 5.2.** Profil des vitesses (écoulement est laminaire)

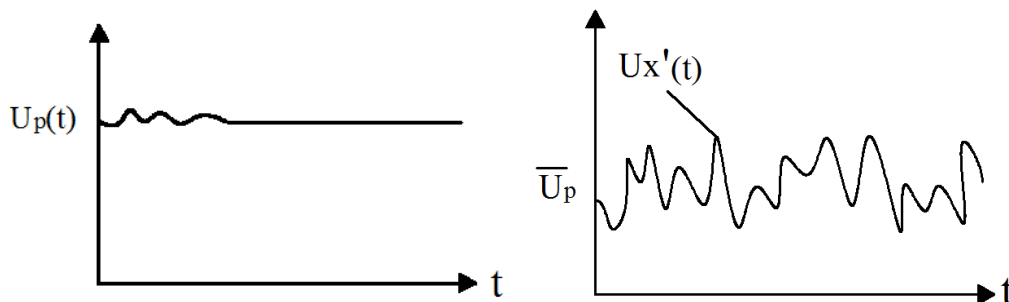
Dans le cas où l'écoulement est turbulent, le profil des vitesses tend à être uniformisé et est du type logarithmique.



**Figure 5.3.** Profil des vitesses (écoulement turbulent)

On constate que la vitesse maximale est au centre de la canalisation. Par contre, le profil de vitesse turbulent varie beaucoup plus qu'en laminaire au voisinage de la paroi. Cette zone de fort gradient de vitesse est appelée couche limite.

La caractéristique principale d'un mouvement turbulent vient du fait que les vitesses et pression en un point fluctuent avec le temps de façon aléatoire.



(a) laminaire (b) turbulent

**Figure 5.4.** Variation d'une des composantes de la vitesse pour des écoulements (a) laminaire et (b) turbulent en un point P

## 5.2. Dans les conduites fermées

### 5.2.1 Le nombre de Froude

Posons  $F = \sqrt[3]{\frac{Q^2.L}{gS^3}}$ , appelé nombre de Froude.

IL s'écrit aussi  $F = \frac{V}{\sqrt{g.y_m}}$  ou  $y_m = S/L$  est le tirant d'eau moyen dans la section.

Si  $F=0 \Rightarrow$  Régime critique

Si  $F < 1 \Rightarrow$  Régime fluvial

Si  $F > 1 \Rightarrow$  Régime torrentiel

## Chapitre 6. Les pertes de charges

Les pertes de charge sont des chutes d'énergie mesurées en différence de pression dues à la résistance que rencontrent les fluides en écoulement : les actions de cisaillement occasionnent en effet des pertes énergétiques.

Il ya deux types de pertes de charge

Les pertes de charge régulières  $\Delta H_L$  (linéaires) qui provienne des frottements de fluide sur la paroi et répartie le long de la conduite.

Les pertes de charge singulières  $\Delta H_s$  concentrée au voisinage d'une singularité (coude, rétrécissement, élargissement, venturi, vanne etc....).

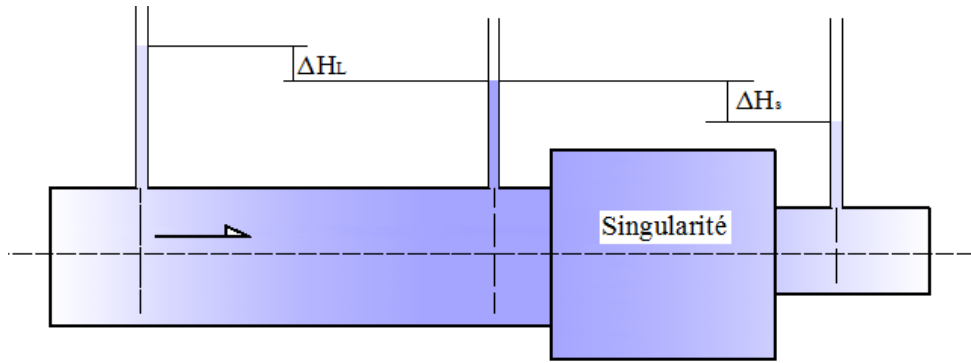


Figure 6.1. Types de pertes de charge

### 6.1. La rugosité

La rugosité qui est la propriété de la surface de contact du matériau de la canalisation avec le liquide, influence grandement la viscosité.

### 6.2. Surface de contact

Surface lisse, une surface rugueuse implique un état de surface dont les irrégularités ont une action directe sur les forces de frottements.

Surface rugueuse peut être considérée comme étant constituée par une série de protubérances élémentaires caractérisées par une hauteur, notée  $k$ , et appelée " Rugosité " :

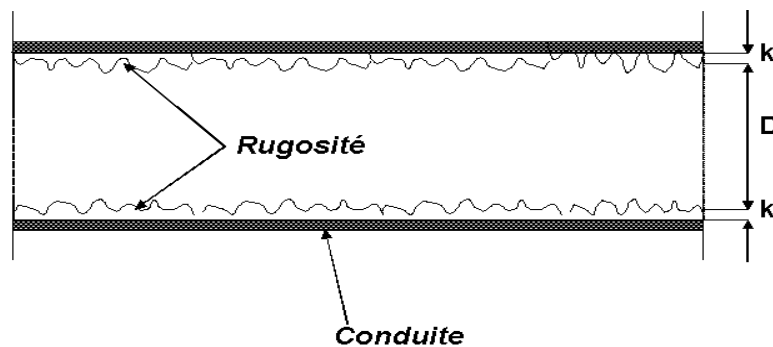


Figure 6.2. Surface de contact



Figure 6.3. Surface rugueuse ( $R_t = R_p + R_c$ )

La rugosité est faite de creux ( $R_c$ ) et de pic ( $R_p$ ) dont la somme donne la rugosité totale ( $R_t$ ).

Cette rugosité peut être mesurée par rapport au diamètre de la conduite. On parle alors de rugosité relative:

$$\varepsilon = \frac{k}{D}$$

**Tableau 6.1.** Rugosité absolue de conduits en fonction du type de matériau.

Matériau	Condition	$\varepsilon$ (mm)
Acier	Feuille de métal nouvelle	0,05
	Acierinoxydable	0,002
	Commercial, nouveau	0,046
	Rivé	3
	Rouillé	2
Fer	Fonte, nouvelle	0,26
	Forgé, nouveau	0,046
	Galvanisé, nouveau	0,15
	Fonteasphaltée	0,12
Cuivre	Tube étiré	0,002
Plastique	Tube étiré	0,0015
Verre	Lisse	0,0001
Béton	Lisse	0,04
	Rugueux	2
Caoutchouc	Lisse	0,01
Bois	Défoncé	0,5

### 6.3. Coefficient de frottement

On définit le coefficient sans dimension, appelé coefficient de *Darcy-Weisbach* comme coefficient de perte de charge régulière, pour l'écoulement dans un conduit droit, de longueur  $L$  et de diamètre  $D$ , par :

$$\lambda = \frac{\Delta p}{\frac{L}{D} \frac{\rho V^2}{2}}$$

Dans l'industrie, on utilise souvent le coefficient de frottement de Fanning, ce coefficient est différent du celui de Darcy-Weisbach qui est divisé par un facteur de 4. En effet, le coefficient de frottement relie la contrainte de cisaillement  $\tau_p$  à la paroi à la vitesse débitante  $v$  sous la forme :

$$\tau_p = C_f \frac{\rho V^2}{2}$$

et

$$\tau_p = \frac{\Delta p D}{L 4}$$

Soit :

$$C_f = \frac{1}{4} \frac{\Delta p}{\frac{L \rho V^2}{D}} = \frac{\lambda}{4}$$

Si l'on cherche à rapprocher cette perte de charge à une hauteur de liquide, la relation de l'hydrostatique  $\rho g h = \Delta p$  nous permet d'obtenir :

$$\Delta H_L = \lambda \frac{L V^2}{2gD}$$

Ce genre de perte est causé par le frottement intérieur qui se produit dans les liquides ; il se rencontre dans les tuyaux lisses aussi bien que dans les tuyaux rugueux.

Entre deux points séparés par une longueur  $L$ , dans un tuyau de diamètre  $D$  apparaît une perte de pression  $p$ .

#### 6.4. Coefficient de frottement en régime laminaire

Le coefficient de perte de charge régulière  $L$  pour l'écoulement laminaire d'un fluide dans une conduite est indépendant de la rugosité de la paroi et sa valeur est donnée par la relation :

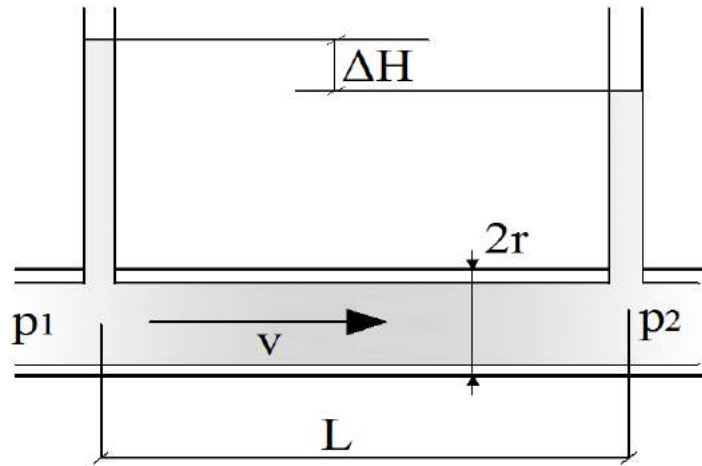
$$\lambda = \frac{64}{R_e}$$

##### 6.4.1. Loi de Poiseuille

Pour un écoulement laminaire, dans une conduite cylindrique horizontale, le débit-volume d'un fluide est donné par :

$$Q_v = \frac{\pi}{128\mu} \frac{(p_1 - p_2)}{L} D^4 = \frac{\pi}{128\mu} \frac{\Delta p}{L} D^4$$





**Figure 6.3.Écoulement laminaire (Loi de Poiseuille)**

Il est alors immédiat de voir que  $h$  est proportionnel à la vitesse  $v$  et donc au débit  $q$ , ainsi qu'à la viscosité cinématique.

Avec :

$Q_v$  : Débit-volume ( $m^3 \cdot s^{-1}$ ),

$r$  : Rayon intérieur (m),

$\mu$  : Viscosité dynamique du fluide ( $Pa \cdot s$ ),

$L$  : Longueur entre les points (1) et (2) (m),

$p_1$  et  $p_2$  : pression du fluide aux points (1) et (2) (Pa).

### 6.5. Coefficient de perte de charge régulière en régime turbulent

En écoulement turbulent, la rugosité de paroi joue un rôle déterminant sur la valeur du coefficient de perte de charge régulière. En effet, le niveau de turbulence sera directement associé à l'état de surface de la paroi solide. On définit la rugosité relative de la paroi par  $(\varepsilon/D)$ .

Dans cette relation,  $\varepsilon$  est la *rugosité absolue* dépendant de la hauteur moyenne des rugosités ainsi que de leur forme, de leur nombre et de leur répartition surfacique.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\varepsilon/D}{3.71} + \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} \right) \text{Colebrook - White (1938)}$$

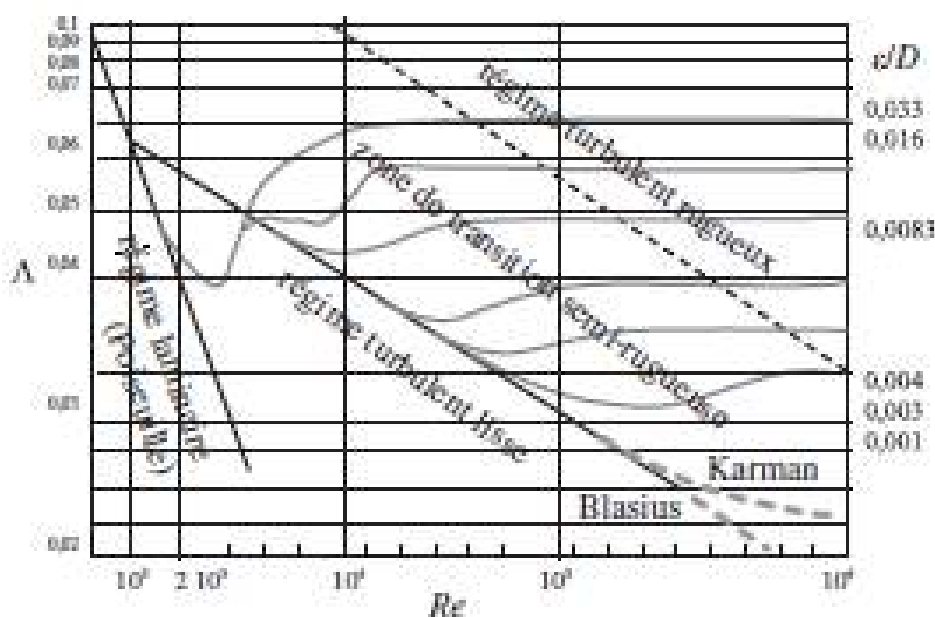
Cette équation est une équation implicite qui peut être résolue numériquement avec la méthode itérative :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda^{(k+1)}}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\varepsilon/D}{3.71} + \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda^k}} \right)$$

On arrête les calculs lorsque  $|\lambda^{k+1} - \lambda^k| < \gamma$ , où  $\gamma$  correspond au petit paramètre du critère d'arrêt.

**Nikuradse** mena des expériences en contrôlant la rugosité de paroi de conduites. Pour cela, il colla sur la paroi des grains de sable de taille calibrée grâce à un tamis. La rugosité relative varie de  $10^{-3}$  à  $3,3 \cdot 10^{-2}$ , ce qui lui a permis de distinguer les zones rugueuses (où  $\lambda$  est indépendant du nombre de Reynolds) de celles semi-rugueuses (où  $\lambda$  varie en fonction de  $Re$  et de  $\epsilon/D$ ).

Les résultats présentant le coefficient de perte de charge en fonction de la rugosité relative pour différentes valeurs du nombre de Reynolds de l'écoulement sont présentés sur la Figure 9.4. Lorsque  $Re < 2\,000$ , le régime d'écoulement est laminaire et  $\lambda$  est indépendant de  $\epsilon/D$  et égal à  $64/Re$ . On constate ensuite que la transition vers le régime turbulent arrive à partir de  $Re \sim 2\,100$ . Cependant, on observe qu'il est possible d'obtenir un nombre de  $Re$  critique plus élevé (jusqu'à  $20\,000$ ) pour un  $e/D$  petit. La région de transition  $2000 < Re < 4000$ , appelée région critique, est particulièrement complexe car les régimes laminaire et turbulent coexistent et il est donc très difficile de dégager une expression générale pour  $\lambda$ . Lorsque  $Re > 4000$ , le régime est totalement turbulent et  $\lambda$  dépend de  $Re$  et de  $\epsilon/D$  ou seulement de  $Re$  si celui-ci est suffisamment grand.



**Figure 6.4.** Diagramme de Nikuradse pour les conduites rugueuses.

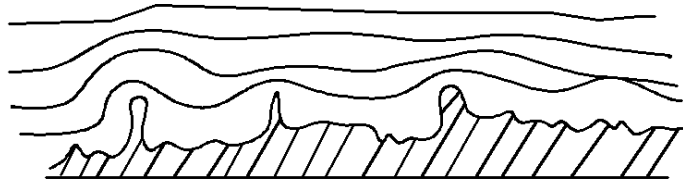
## 6.6. Diagramme de Moody

le diagramme de Moody est un graphe adimensionnel qui représente le facteur de friction de Darcy-Weisbach  $\lambda$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re$  et de la rugosité relative pour un débit de pleine section dans une conduite circulaire. Ce graphe permet de calculer les pertes de charges ou le débit dans un tuyau donné.

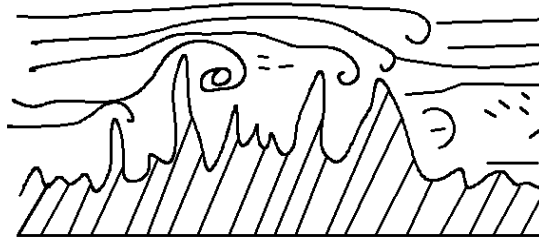
Le diagramme de Moody met en évidence trois sous-régimes d'écoulement en régime turbulent :

**a- Régime hydrauliquement lisse**

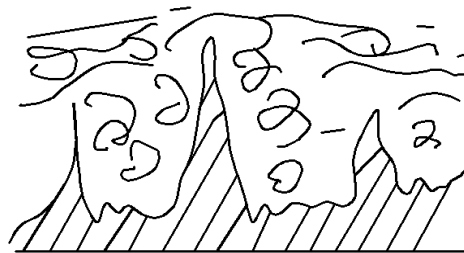
Le régime hydrauliquement lisse comporte deux zones, la première étant représentée par la droite de Blasius.



**b- Régime intermédiaire**

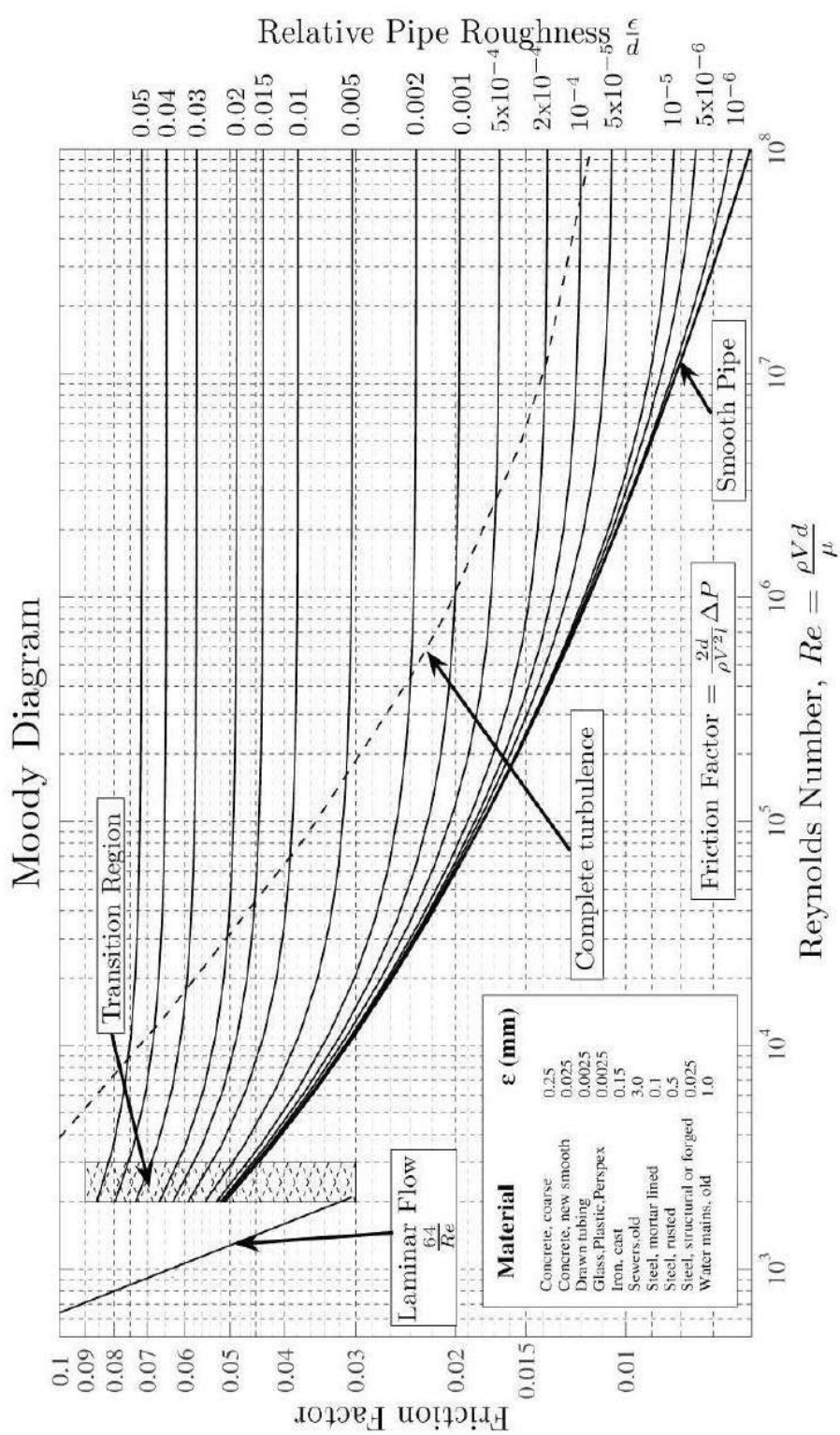


**c- Régime hydrauliquement rugueux**



«

**Figure 6.5.** Diagramme de Moody-Stanton reliant le coefficient de perte de charge régulière  $L$  au nombre de Reynolds  $Re$  et à la rugosité relative  $(\epsilon/D)$ .



Le diagramme permet d'observer et d'identifier plusieurs régions :

- Zone à Ecoulement Laminaire :  $Re < 2000$  :  $\lambda = f(Re)$
- Zone de transition :  $2000 < Re < 4000$
- Zone de Turbulence Lisse :  $\lambda = f(Re)$
- Zone de Turbulence Transitoire :  $\lambda = f(Re; k/D)$
- Zone de Turbulence Rugueuse :  $\lambda = f(k/D)$

- 1- Utilisation en régime laminaire (Le coefficient se lit directement à partir de la droite  $64/Re$ )

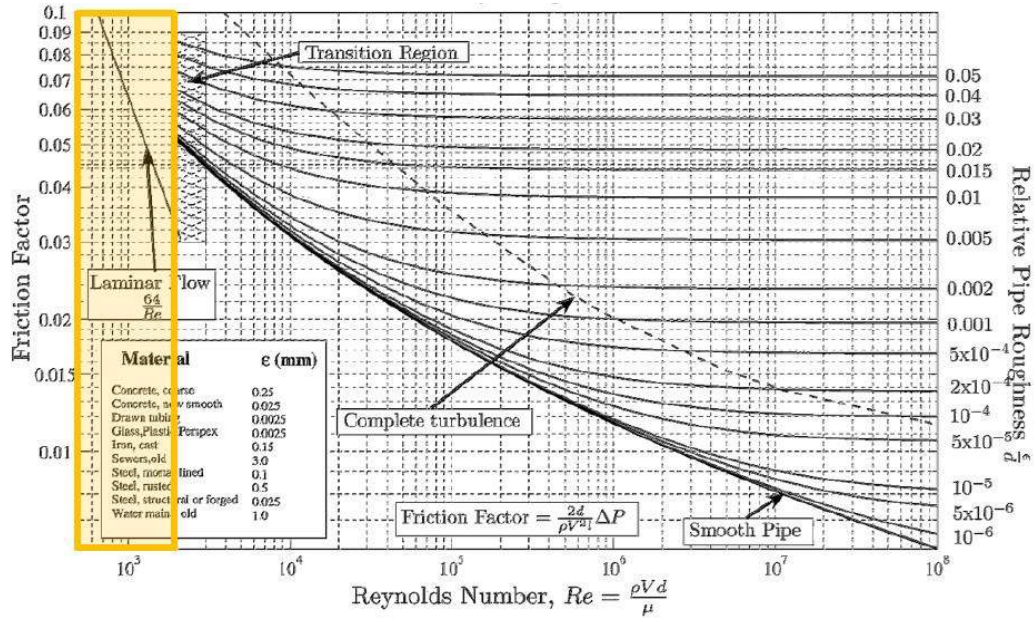


Figure 6.6. Diagramme de Moody (régime laminaire)

- 2- Utilisation en régime turbulent

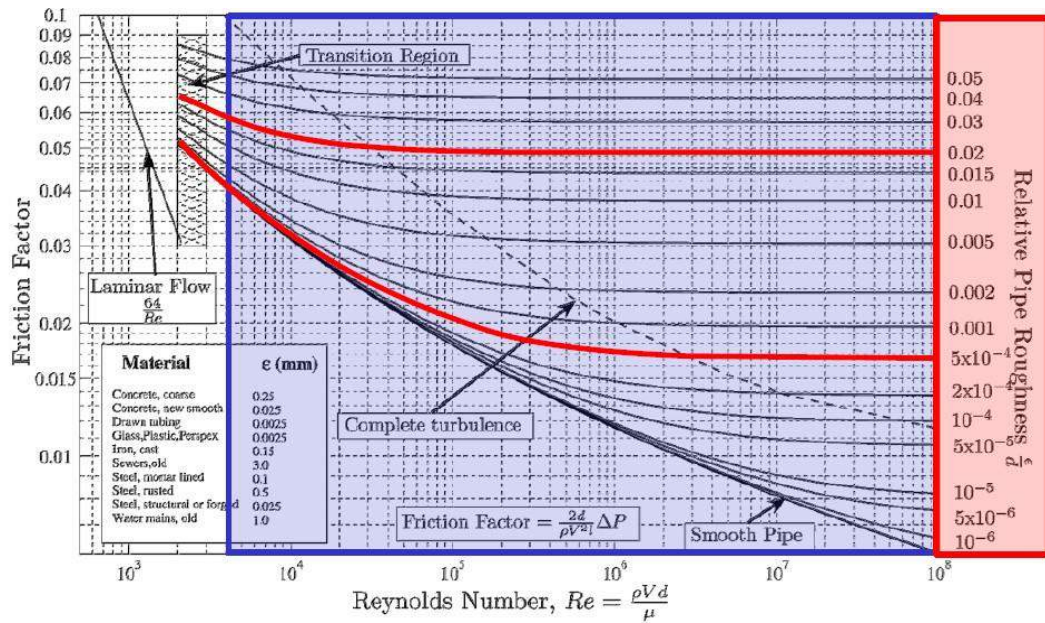


Figure 6.7. Diagramme de Moody (régime turbulent)

On calcule la rugosité relative et on sélectionne la courbe correspondante ( $0.02$  ou  $5 \cdot 10^{-4}$ )

On détermine le nombre de Reynolds et on lit  $\lambda$  à l'intersection de la courbe et de la verticale

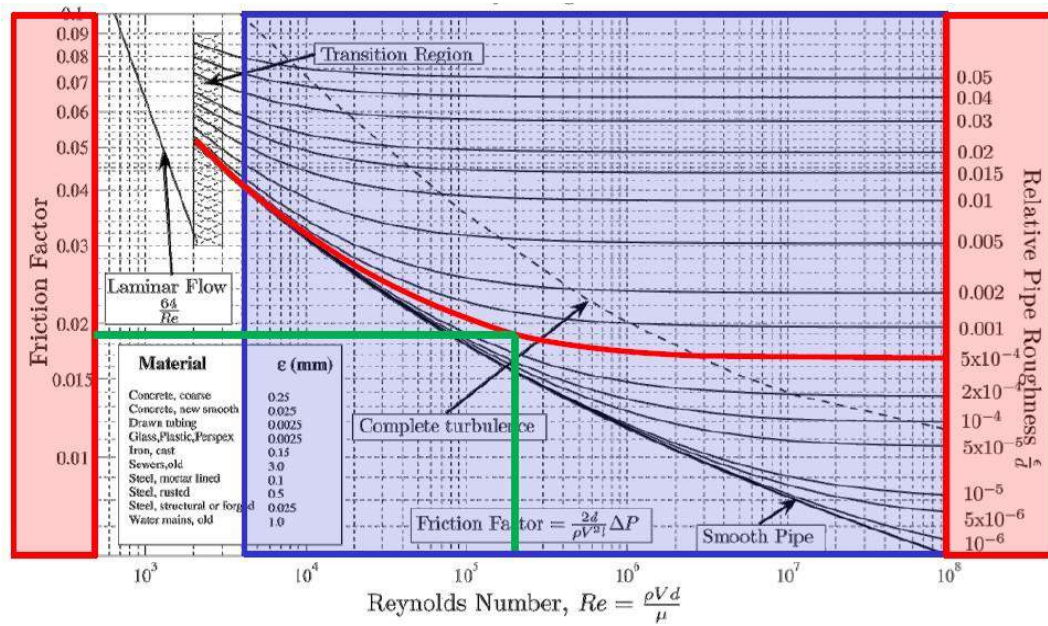


Figure 6.8. Diagramme de Moody (régime turbulent)

- On voit qu'au-delà de la courbe « Complete turbulence », le coefficient  $\lambda$  ne dépend plus que de la rugosité et est indépendant du nombre de Reynolds.
- La ligne « Smooth Pipe » correspond à la limite du diagramme en régime turbulent : les conduites ne sont plus rugueuses sur cette ligne.

Tableau 6.2. Différentes lois de corrélation en fonction du nombre de Reynolds et du type de rugosité.

Conduite			Régime d'écoulement	Relation
Lisse	Rugueuse homogène	Rugueuse hétérogène		
+			Laminaire $Re < 2000$	<i>Poiseuille</i> $\lambda = \frac{64}{Re}$
+			Turbulent $2000 < Re < 5.10^5$	<i>Blasius</i> $\lambda = 0.316 Re^{-0.25}$
+			Turbulent $Re > 5.10^5$	<i>Karman</i> $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log_{10} \left( \frac{Re \sqrt{\lambda}}{2.51} \right)$

	+	+	Turbulent Rugueux	<i>Karman-Prandtl</i> $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\varepsilon/D}{3.71} \right)$
		+	Turbulent Rugueux et semi-rugueux	<i>Colebrook</i> $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\varepsilon/D}{3.71} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}} \right)$

**Application** : Du pétrole de viscosité  $\mu=0.11$  Pa.s et de densité 0.9 circule dans une conduite de longueur 1650m et de diamètre 25cm à un débit volumique 19.7 l/s. Déterminer la viscosité cinématique du pétrole dans le système SI.

- Calculer la vitesse de l'écoulement et le débit massique
- Calculer le nombre de Reynolds et en déduire la nature de l'écoulement
- Déterminer le coefficient de perte de charge linéaire et calculer la perte de charge dans la conduite

**Réponse** :

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0.11}{900} = 1.22 \cdot 10^{-4} \frac{m^2}{s} = 1.22 \text{ stokes}$$

$$V = \frac{4 \cdot 19.7 \cdot 10^{-3}}{\pi (0.25)^2} = 0.40 m/s$$

$$Q_m = \rho \cdot Q_v = 0.9 \cdot 19.7 \cdot 10^{-3} = 17.73 \text{ kg/s}$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{0.4 \cdot 0.25}{1.22 \cdot 10^{-4}} = 820$$

Donc

Le Régime laminaire  $\Rightarrow$

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{820} = 0.078$$

$$\Delta H_L = \lambda \frac{L V^2}{2gD}$$

$$\Delta H_L = 0.078 \frac{1650 \cdot (0.40)^2}{2 \cdot 9.81 \cdot 0.25} = 4.20 m$$

**Application** : On considère une tuyauterie de diamètre intérieur  $D = 14$  mm et de longueur  $L = 10$  mètres. La rugosité moyenne interne de ce conduit est  $\varepsilon = 0,1$  mm.

Le fluide hydraulique a une masse volumique  $\rho = 900$  kg/m<sup>3</sup> et une viscosité cinématique  $\nu = 30 \cdot 10^{-3}$  et le débit du fluide qui circule dans ce conduit est de  $Q = 55$  l/mn.

Calculer la perte de charge  $\Delta P$  exprimée en bars :

**Réponse :**

$$\Delta H_L = \lambda \frac{L V^2}{2gD}$$

D'après le diagramme de Moody

$$\left(\frac{\varepsilon}{D}\right) = 0.1/14 = 0.0071$$

$$R_e = \frac{4Q}{\pi D v} = \frac{4.1000.55.10^{-3}}{3.14.14.10^{-3}.30.10^{-4}.60} = 27800$$

Donc le régime est turbulent

$$\lambda = 0.018$$

Donc

$$\Delta H_L = 0.018 \frac{10 \left(\frac{55.10^{-3}}{3.14.7.10^{-3}.60}\right)^2}{2.9.81.14.10^{-3}} = 0.072\text{m}$$

**Application :** Déterminer la perte de charge et la perte de pression d'une huile de densité 0.8 et de viscosité 9 cSt s'écoulant dans une conduite de 20 cm de diamètre et de rugosité absolue  $\varepsilon = 0.25\text{mm}$  et de longueur 300m si le débit est de 120 litres par seconde.

**Réponse :**

Equation de continuité

$$Q = S V$$

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4.0,12}{\pi.0,2^2}$$

$$R_e = \frac{VD}{\nu} = \frac{3,82.0,2}{9.10^{-6}} = 84888$$

Donc

$R_e > 2000$  (le régime est turbulent)

$$R_e = 8,5.10^4$$

$$\left(\frac{\varepsilon}{D}\right) = \frac{0.25}{200} = 1,25.10^{-3}$$

$$\lambda = 0,019$$

$$\Delta H_L = \lambda \frac{L V^2}{2gD} = 0,019 \frac{300.(3,82)^2}{2.9,81.0,2} = 21.20\text{m}$$

$$\Delta p = \rho g \Delta H = 800.9,81.21,20 = 166377,6 \text{ Pa} = 166.38 \text{ kPa}$$

## 6.7. Pertes de charge dans les conduites non circulaires



On utilise le diamètre hydraulique défini précédemment. Ceci conduit aux nouvelles expressions de la rugosité relative  $(\varepsilon/2D_h)$  ainsi que du nombre de Reynolds et de la perte de charge régulière respectivement sous la forme :

$$Re = \frac{2VD_h}{\nu}$$

$$\Delta H_s = \lambda \frac{LV^2}{2D_h 2g}$$

### 6.8. Les pertes de charge singulière

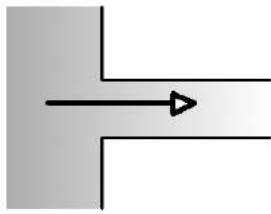
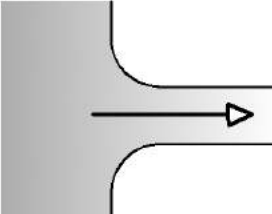
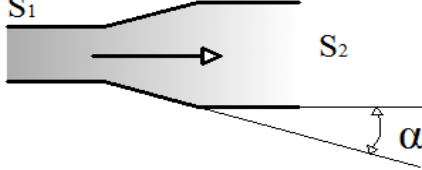
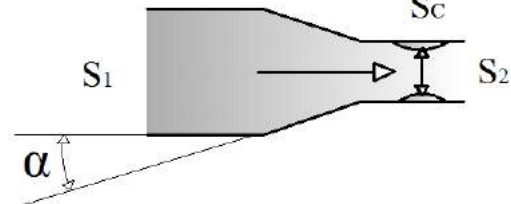
Des pertes de charge apparaissent lors de changement de direction d'écoulement, de changement de diamètre, et lorsque des dispositifs (vannes, raccords et manchons, coudes, tés, etc.) sont disposés sur la ligne d'écoulement. Ces pertes sont typiquement exprimées par la relation :

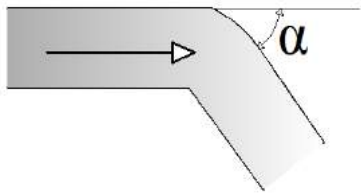
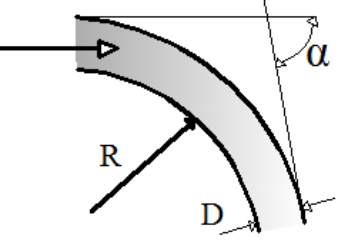
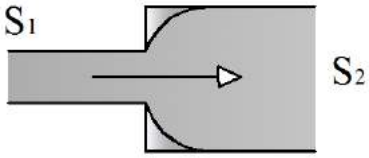
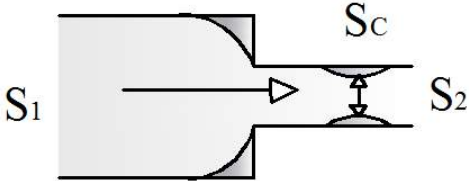
$$\Delta H_s = \sum_i \xi \frac{V_i^2}{2g}$$

Où  $V_i$  est la vitesse moyenne pour le dispositif :

$\xi$  est fonction des caractéristiques géométriques et du nombre de Reynolds. La valeur de  $\xi$  est donnée pour les différents cas les plus classiques dans les tableaux suivants :

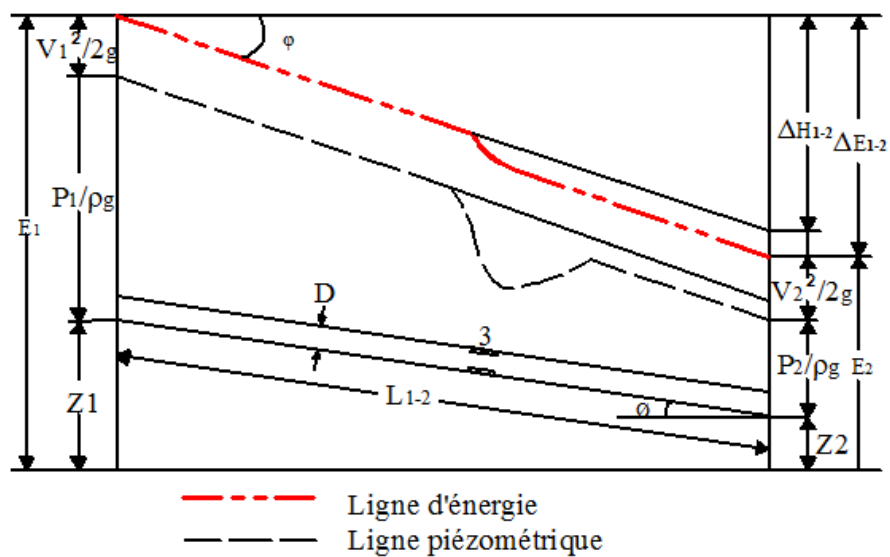
**Tableau 6.3.** Quelques expressions du coefficient de pertes de charge singulières  $\xi$  pour des géométries d'écoulements couramment utilisées.

<p>Entrée brusque de canalisation <math>\xi = 0,5</math></p> 	<p>Entrée progressive de canalisation <math>\xi = 0,04</math></p> 
<p>Divergent</p>  <p><math>\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \sin\alpha</math></p>	<p>Convergent</p>  <p><math>\left(\frac{1}{\xi} - 1\right)^2 \sin\alpha, \xi = \frac{S_c}{S_2}</math></p>

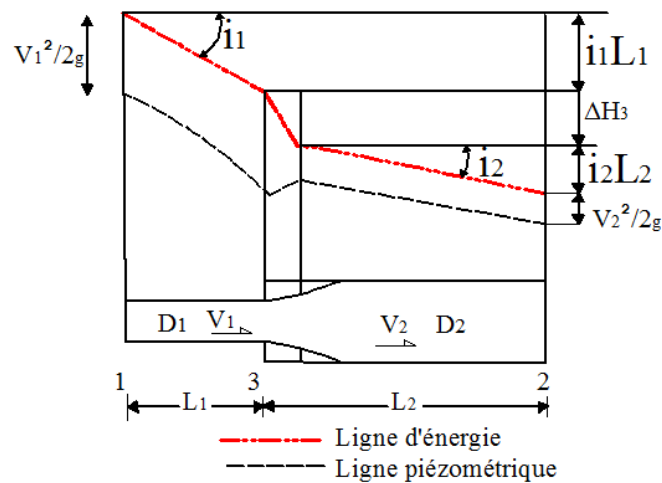
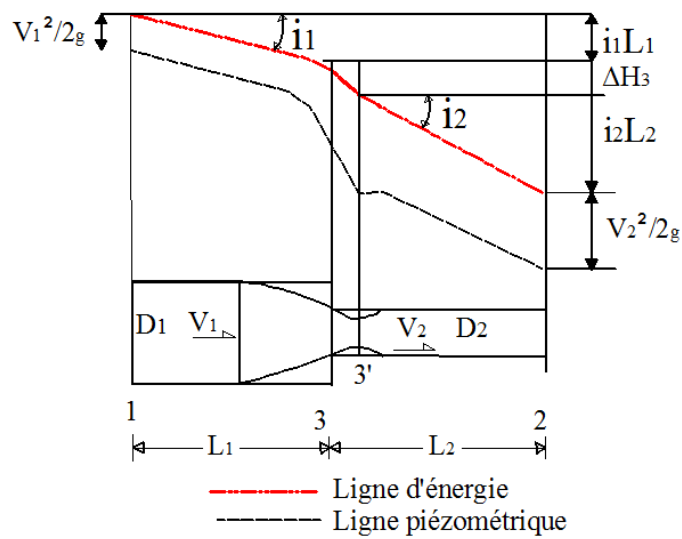
<p>Coude brusque</p>  $\sin^2 \alpha + 2 \sin^4 \frac{\alpha}{2}$	<p>Coude progressif</p>  $\frac{\pi}{\alpha} \left( 0.131 + 1.847 \left( \frac{D}{R} \right)^{7/2} \right)$
<p>Élargissement brusque</p>  $\left( 1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2$	<p>Rétrécissement brusque</p>  $\left( \frac{1}{\xi} - 1 \right)^2, \xi = \frac{S_c}{S_2}$

### 6.9. Application de tracé de perte de charge

Considérons une conduite de longueur L1-2. On dispose en 3 d'un rétrécissement brusque.

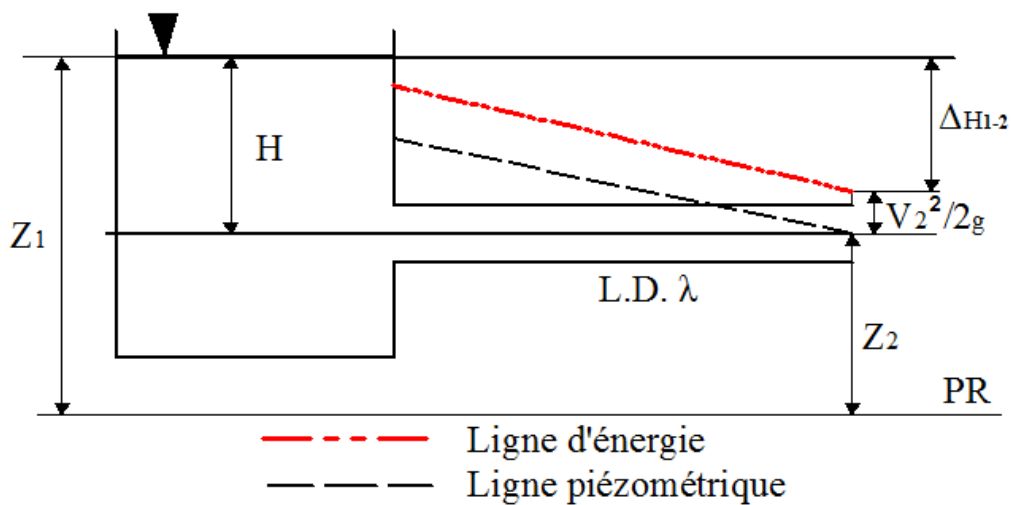


Supposons deux conduites horizontales avec une liaison du type élargissement ou rétrécissement brusque.



### III.4.1.- Conduite à Section Constante (Conduite simple)

a.- Sortie à l'air libre



Application de l'équation de Bernoulli

$$p_1 = p_{atm}$$

$$v_1 \cong 0$$

$$p_2 = p_{atm}$$

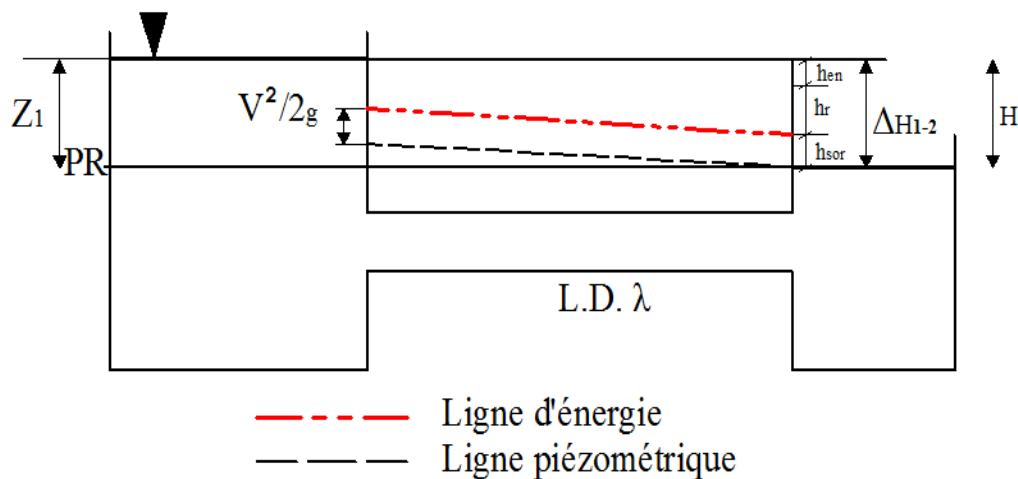
$$\frac{p_1}{\rho g} + 0 + Z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + \Delta h_{1-2}$$

$$Z_1 - Z_2 = H = \frac{V_2^2}{2g} + \Delta h_{1-2}$$

$$H = \frac{V_2^2}{2g} + \lambda \frac{LV_2^2}{2gD} + \xi_{en} \frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda \frac{L}{D} + \xi_{en}}} \sqrt{2gH}$$

b.- Sortie immergée :



$$Z_1 = H$$

$$Z_2 = 0$$

$$p_1 = p_{atm}$$

$$v_1 \cong 0$$

$$p_2 = p_{atm}$$

$$v_2 \cong 0$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + 0 + H = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + 0 + \Delta h_{1-2}$$

$$H = \Delta h_{1-2}$$

$$H = \lambda \frac{LV_2^2}{2gD} + \xi_{sor} \frac{V_2^2}{2g} + \xi_{en} \frac{V_2^2}{2g}$$

et donc:

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{L}{D} + \xi_{en} + \xi_{sor}}} \sqrt{2gH}$$

## **Conclusion**

Cette polycopie nous a permis de connaître les principales notions d'hydraulique nécessaires à la compréhension des phénomènes hydrauliques qui existent dans les conduites d'eau et gaz. Il est conforme aux programmes de formation de licence sol et eau. Ces connaissances alliées à celles des procédures de design et de dimensionnement des conduites d'eau pour l'irrigation et eau potable. Accompagné des exercices corrigés d'une façon détaillée, cet ouvrage rassemble un volume d'applications pratiques intéressant qui en font une bonne préparation aux examens, aux concours et la vie professionnelle.

## ***Références Bibliographie***

- [1] OURAGH YUCEF : Ecoulement forcée en hydraulique (1ère partie)
- [2] OURAGH YUCEF : Ecoulement forcée en hydraulique (2ème partie)
- [3] CARLIER M. : Hydraulique générale et appliquée, Editions Eyrolles (1972).
- [4] ARMONDO LANGASTRE : Hydraulique générale
- [5] ZELLAA LAKHDAR : Hydraulique Générale Hydrostatique et hydrodynamique (2eme édition) professeur
- [6] J VAZQUEZ OSE : Hydraulique Générale
- [7] SAKIR AMIROUDINEN et JEAN-LUC BATTAGLIA : Mécanique des fluides
- [8] BEN HAMOUDA RIADH : Notions de Mécanique des fluides Cours et Applications
- [9] Cours hydraulique\_...rale\_MEPA\_2010.pdf enges.unistra.fr
- [10] Cours-hydraulique-tc32 fr.slideshare.net
- [11] Cours-hydraulique-tc3 fr.slideshare.net
- [12] Notions-mecanique-des-fluides.pdf pf-mh.uvt.rnu.tn