CHAPITRE 13

Dynamique du point

Traveling through both space and time
Out of control
My wheels in constant motion
Constant Motion – Dream Theater

Bibliographie

✍Cap Prépa Physique MPSI–PCSI–PTSI, Pérez, 2013 ⟶ Chapitre 10
✍Cours PTSI, B. Mollier ⟶ Chapitre 11

La dynamique permet de relier les causes du mouvement et leurs conséquences. Ce chapitre vise à développer les premières lois de la mécanique dites lois de Newton. Elles vont nous permettre d'étudier bon nombre de situations de mécanique. Ces lois sont des principes (on parle parfois de postulats) et ne sont pas “démontrables", elles sont issues de l'observation de divers phénomènes et sont en quelque sorte une “mathématisation ad hoc" de la réalité afin de développer des outils d'analyse nous permettant d'appréhender la réalité. Nous nous limiterons à l'étude de la mécanique classique : la mécanique des objets à l'échelle (i.e. la mécanique quantique) et la mécanique des objets à grande vitesse (i.e. la relativité restreinte, et d'autant plus la générale) seront laissées de coté de part leur difficulté conceptuelle et le besoin de maitriser les bases classiques.

I Lois de Newton

1.1 Première loi de Newton : principe d'inertie

1.1.1 Énoncé du principe d'inertie

> **✍ Principe d'inertie ou première loi de Newton**
> Dans un référentiel dit galiléen ou inertiel, un point matériel ne subissant aucune interaction persiste dans son état initial (repos ou translation rectiligne uniforme).

Remarque : Ce principe formulé par Newton est lié à deux notions importantes : le référentiel galiléen et les forces.

> **✍ Reformulation du principe d'inertie**
> Un point matériel est en mouvement non rectiligne uniforme si et seulement si il subit une interaction (i.e. est soumis à une force).

Remarque importante : Cette formulation permet de définir une force !

Le principe d'inertie sous–entend qu'un point matériel s'oppose naturellement à une modification de son mouvement : il faut agir sur lui pour le perturber, c'est l'inertie. Intuitivement on peut affirmer que plus un corps est massif plus il s'oppose à sa mise en mouvement.

> **✍ Masse inertielle d'un corps**
> Tout point matériel M est caractérisé par sa masse inerte m, grandeur invariante strictement positive et constante. De l'existence de la masse résulte l'inertie du corps.

Remarques :

- Plus la masse est grande, plus il est difficile de modifier la vitesse de l'objet.
- En mécanique classique : la masse ne dépend pas du référentiel et la masse d'un système fermé est constante dans le temps.
- La masse est une grandeur extensive (i.e. la masse est additive).
- Un objet sans masse ne peut a priori pas voir sa vitesse changer, c'est le cas du photon.

1.1.2 Référentiel galiléen

Le principe d'inertie repose sur la notion de référentiel galiléen dans lequel un objet ne subissant aucune interaction doit conserver son

> **✍ Système isolé ou pseudo–isolé**
> – On appelle système isolé, un système ne subissant aucune force/interaction.
> – On appelle système pseudo–isolé, un système dont les forces/interactions qu'il subit se compensent.

> **✍ Référentiel galiléen**
> Un référentiel est dit galiléen si un corps ne subissant aucun interaction conserve son état initial (par abus de langage on dit parfois “si il respecte le principe d'inertie"). Tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Remarque importante : Un référentiel est supposé galiléen si sur une échelle de temps donnée (l'expérience typiquement), un système isolé ou pseudo–isolé conserve son état initial. Le référentiel terrestre peut être supposé galiléen lorsque l'on étudie un pendule mais pas pour le pendule de Foucault ou un tir balistique intercontinental.

Remarque importante : Stricto sensu il n'existe pas de référentiel galiléen car cela constituerait un référentiel privilégié/absolu ce qui est contraire aux principes fondamentaux de la cosmologie. Le fond diffus cosmologique (CMB) constitueraient un candidat pertinent de référentiel galiléen.

1.2 Second loi de Newton : principe fondamental de la dynamique

1.2.1 Quantité de mouvement

✍ Quantité de mouvement

Soit un point matériel M de masse m et de vitesse $\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. Ce point matériel possède une quantité de mouvement

$$\overrightarrow{p}_{M/\mathcal{R}} = m\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}} \quad (1)$$

qui s'exprime en $\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$.

Remarque : La même quantité peut être défini pour un système composé de deux points matériel M_1 et M_2, N points matériels ou un solide.

? Écrire la quantité de mouvement de deux points matériels

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p} &= \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = m_1\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_1}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + m_2\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_2}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2})\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}m_{\text{tot}}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = m_{\text{tot}}\overrightarrow{v}_{G/\mathcal{R}} = \overrightarrow{p}_{G/\mathcal{R}}\end{aligned}$$

? Écrire la quantité de mouvement de N points matériels puis d'un solide indéformable

$$\overrightarrow{p}_N = \sum_i^N \overrightarrow{p}_i = m_{tot}\overrightarrow{v}_{G/\mathcal{R}} \ ; \ \overrightarrow{p}_\Sigma = m_\Sigma \overrightarrow{v}_{G/\mathcal{R}} \, .$$

1.2.2 Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique

✍ Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, la dérivée temporelle de la quantité de mouvement d'un point matériel M de masse m est égale à la résultante $\overrightarrow{F}$ des forces extérieurs qu'il subit

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}_{M/\mathcal{R}_g}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{F} \quad (2)$$

Cas particuliers :

- Si le système possède une masse constante m, $\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}_{M/\mathcal{R}_g}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = m\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}_g}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = m\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{F}$.
- Si la résultante des forces est nulle, $\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}_{M/\mathcal{R}_g}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{p}_{M/\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{\text{cste}}$. La deuxième loi de Newton contient le principe d'inertie.

Remarque : Cette formulation est plus générale que celle vue en lycée, on peut par exemple traiter des systèmes ouverts qui présentent une masse variable, des problèmes de relativité où la masse dépend de la vitesse...

1.3 Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques

✍ Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques

Soit deux points matériel M_1 et M_2. Si M_1 exerce une force $\overrightarrow{F}_{2\leftarrow 1}$ sur M_1 alors le point M_2 exerce une force $\overrightarrow{F}_{1\leftarrow 2} = -\overrightarrow{F}_{2\leftarrow 1}$ sur M_1 de même direction, sens opposé et même norme.

Remarque : Ce principe qui semble anodin est une nécessité.

II Forces en mécanique

2.1 Notion de force

☕ Présentation d'un ou plusieurs mouvements non rectilignes uniformes

Bien que dans un référentiel galiléen, une balle lancée n'est pas en mouvement rectiligne uniforme. Ceci signifie qu'elle ne constitue pas un système isolé, elle doit subir une action mécanique extérieure.

✍ Notion de Force

Une action mécanique subie par un point matériel est susceptible d'en modifier le mouvement. Une action mécanique extérieure est appelée force.

Remarque : Une action mécanique peut aussi prendre la forme d'un « couple », ce que nous verrons plus tard : ici concentrons–nous sur les forces.

2.2 Description d'une force

✍ Modéliser une force

Une force se modélise à l'aide d'un vecteur noté $\overrightarrow{F}$ dont

- la norme représente l'intensité de la force en Newton ($1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$),
- la direction représente la direction de la force,
- le sens représente le sens de la force,
- l'origine est le point d'application de la force.

Décrire une force consiste à énonces ces quatre caractéristiques.

Les forces possèdes donc les propriétés des vecteurs, et plus particulièrement leur caractère additif. Un système ponctuel soumis à plusieurs forces peut se résumer en un système ponctuel soumis à une force appelé résultante des forces telle que $\overrightarrow{F}_{\text{résultante}} = \sum_i \overrightarrow{F}_i$.

2.3 Classification des forces

✍ Forces de contact ou à distance

- Force de contact : le système extérieur exerce une force sur le point matériel en étant en contact avec lui. Par exemple le frottement solide, réaction du support, tension d'un fil, force de rappel d'un ressort...
- Force à distance : le système extérieur exerce une force sur le point matériel sans être en contact avec lui. Par exemple la gravitation, force électromagnétique...

Bien que nous travaillons avec des points matériels pour le moment et que la notion de force répartie n'a pas de sens dans ce contexte distinguons tout de suite deux catégories de forces. Ceci a un sens si on essaye de comprendre “avec les mains" un phénomène que l'on

✍ Forces localisées ou réparties

- Force localisée : une force est dite localisée si elle ne s'exerce qu'en un point du système. Par exemple la tension d'un fil, contact ponctuel...
- Force répartie : une force est dite répartie si elle s'exerce sur l'ensemble (ou du moins une sous partie non ponctuelle) du système. Par exemple le frottement de l'air, gravitation...

III Forces usuelles : Forces newtoniennes

3.1 Gravitation

3.1.1 Construction historique

- VIIème, Brumaghupta : la Terre est ronde et tous les corps chutent vers son centre.
- XVIème, Kepler : lois de Kepler, en particulier la loi des aires stipule que R^3/T^2 (pour une trajectoire circulaire) est une constante.
- XVIIème, Galilée : tout corps est en chute libre à une même vitesse, indépendamment de sa masse.
- XVIIème, Newton : lois de Newton.

Construisons une force gravitationnelle à l'aide de ces observations historiques.

- Les objets chutent à une vitesse indépendante de leur masse, ainsi à l'aide de la deuxième loi de Newton on peut affirmer que $F \propto m_1$ la masse de l'objet étudié.
- D'après la troisième loi de Newton, on peut affirmer que cette force est également subie par l'objet "attracteur" donc $F \propto m_1 m_2$.
- D'après la deuxième loi de Kepler on sait que $R^3/T^2 = \text{cste}$. De plus, en ordre de grandeur on peut affirmer que $a = v/T = R/T^2$ donc $R^2 a = \text{cste}$. D'après la deuxième loi de Newton on peut donc affirmer que $F \propto 1/R^2$.
- D'après les observations de Brahmagupta, on affirme que la force est radiale et orientée vers l'objet "attracteur" donc

$$\overrightarrow{F} \propto -\frac{m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{u_r}\,.$$

- En l'absence de toute autre dépendance observée, on introduit $\mathcal{G}$ le coefficient de proportionnalité appelé constante de la gravitation universelle

$$\overrightarrow{F} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{u_r}\,.$$

3.1.2 Gravitation universelle

✍ Gravitation universelle

Soit deux points M_1 et M_2 de masse m_1 et m_2. Le point M_1 subit de la part du point M_2 une force d'expression

$$\overrightarrow{F}_{1\leftarrow 2} = \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{||\overrightarrow{M_1M_2}||^3}\overrightarrow{M_1M_2} \tag{3}$$

avec $\mathcal{G} = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ la constante de gravitation universelle.

Remarque : Force à distance toujours attractive, de direction M_1M_2, s'appliquant au centre de gravité des objets, proportionnelle aux masse et inversement proportionnelle au carré de la distance séparant les deux points matériels (dite en $1/r^2$).

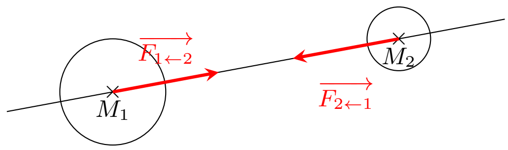


FIGURE 1 – Attraction gravitationnelle entre deux corps

? Attraction dans le système solaire

On donne $\mathcal{G} = 6.673\times10^{-11}$ unités S.I., $M_\odot \approx 2\times10^{30}\,\mathrm{kg}$, $M_T \approx 6\times10^{24}\,\mathrm{kg}$, $M_L = 7\times10^{22}\,\mathrm{kg}$, $d_{S,T} \approx 150\times10^{6}\,\mathrm{km}$, $d_{T,L} \approx 380\times10^{3}\,\mathrm{km}$.
$F_{ST} = 3.56\times10^{22}\,\mathrm{N}$, $F_{SL} = 4\times10^{20}\,\mathrm{N}$, $F_{TL} = 3.56\times10^{20}\,\mathrm{N}$, *interprétation compliquée, système à trois corps...*

✍ Poids

Au voisinage de la surface de la Terre, un point matériel M de masse m subi une force de pesanteur appelée poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ avec $\overrightarrow{g}$ le champ de pesanteur terrestre de norme $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.
Le poids d'un objet s'identifie à l'attraction gravitationnelle entre la Terre et l'objet si l'on suppose le référentiel terrestre galiléen.

Remarque : Force à distance toujours attractive, de direction verticale **si on suppose le référentiel terrestre galiléen**, orientée vers le bas et proportionnelle à la masse de l'objet.

? Retrouver l'expression du poids grâce à l'expression de la force de gravitation.

Données : $R_T \sim 6300\,\mathrm{km}$, $m_T \sim 6\times10^{24}\,\mathrm{kg}$. On a $P = \dfrac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2}m$ alors $g \approx 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

✍ Centre d'inertie ou centre de masse

Le centre d'inertie I d'un système de 2 points matériels de masse m_1 et m_2 est le barycentre des points M_i pondérés par leurs masses m_i défini par

$$m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} = (m_1+m_2)\overrightarrow{OI} \Longrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}{m_1+m_2}\ ;\ m_1\overrightarrow{IM_1} + m_2\overrightarrow{IM_2} = \overrightarrow{0}$$

On peut généralisé à N points matériels par $\overrightarrow{OI} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{OM_i}}{m_{\text{tot}}}\ ;\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{IM_i} = \overrightarrow{0}$.

Ou encore pour un solide indéformable Σ par $\overrightarrow{OI} = \dfrac{\iiint_\Sigma \rho(\overrightarrow{r})\overrightarrow{r}\,\mathrm{d}\tau}{\iiint_\Sigma \rho(\overrightarrow{r})\mathrm{d}\tau} = \dfrac{\iiint_\Sigma \rho(\overrightarrow{r})\overrightarrow{r}\,\mathrm{d}\tau}{m_{\text{tot}}}$.

✍ Centre de gravité

Point d'application de la résultante des forces gravitationnelles sur un système, il est souvent confondu avec le centre de masse mais ce n'est pas une vérité générale.

? Barycentre du système Terre–Soleil

En supposant la Terre et le Soleil comme des points matériel, déterminer la position du barycentre de ce système.
Prenons O au centre du soleil. $|\overrightarrow{SG}| = \dfrac{M_T}{M_S+M_T}d_{S,T} \approx 450.10^3\,m \ll R_S \approx 700.10^6\,m$.

✍ Masse grave ... masse inertielle ?

Qui nous dit que le facteur numérique présent dans l'expression du poids et que nous appelons masse est identique à la masse inertielle ? Cette masse est appelée masse grave et on supposera qu'elle est égale à la masse inertielle. C'est un postulat de la mécanique.

Remarque : Ne pas confondre poids et masse par abus de langage !

3.2 Force électrostatique

✍ Force électrostatique

Soit deux points M_1 et M_2 de charge électrique q_1 et q_2. Le point M_1 subit de la part du point M_2 une force d'expression

$$\overrightarrow{F}_{1\leftarrow 2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{||\overrightarrow{M_1M_2}||^3}\overrightarrow{M_1M_2} \tag{4}$$

avec $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12}\mathrm{F.m^{-1}}$ la permittivité diélectrique.

Remarque : Force à distance attractive (si charges de signe opposé) ou répulsive (si charges de même signe), de direction M_1M_2, s'appliquant au barycentre de charge des objets, proportionnelle aux charges et inversement proportionnelle au carré de la distance séparant les deux points matériels (dite en $1/r^2$).

Remarque : Cette force est analogue à l'attraction gravitationnel mais pour des charges électriques.

Force électrostatique

Comparer l'intensité de l'attraction gravitationnelle et électrostatique entre un noyau d'Hydrogène et l'électron de son cortège électronique. On donne $\epsilon_0 \approx 8,8.10^{-12}$S.I., $m_H \approx 1,6.10^{-27}$kg, $m_{e^-} \approx 9,1.10^{-31}$, $d_{H,e^-} \approx 0,5.10^{-10}$m et $e = 1,6.10^{-19}$C

$F_{el} \approx 9,2.10^{-8} N$ *et* $F_g \approx 3,8.10^{-47} N$

IV Forces usuelles : système de fixation

4.1 Rappel élastique

Force de rappel élastique

Soit un ressort (ou un élastique) de longueur au repos l_0. Dans le cas des faibles déformations, la force de rappel s'exprime

$$\overrightarrow{F}_{\text{rappel}} = -k(l - l_0)\overrightarrow{u} \tag{5}$$

avec k la raideur du ressort (ou de l'élastique) en $\mathrm{N\,m^{-1}}$, $l - l_0$ l'élongation du ressort (ou de l'élastique) et $\overrightarrow{u}$ le vecteur unitaire porté par l'axe du ressort (ou de l'élastique).

Remarque : C'est une force de contact s'appliquant au point d'attache du ressort. Cette force est dite de rappel car elle s'oppose au mouvement du point matériel.

Remarque : L'expression de cette force est valable pour les faibles déformations, au delà on peut modifier de façon permanente la forme du ressort (déformation inélastique).

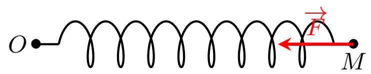


FIGURE 2 – Ressort en extension : $l > l_0$

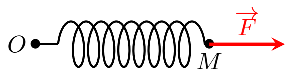


FIGURE 3 – Ressort en compression : $l < l_0$

TD15 – App1

4.2 Tension d'un fil

Tension d'un fil

Un fil accroché à un objet exercera une force sur ce dernier dont on ne peut établir une expression générale.

Remarque importante : C'est une force de contact s'appliquant au point d'attache du fil, de direction le fil, orienté de l'objet vers le fil et de norme à déterminer au cas par cas...

Exemple du pendule simple

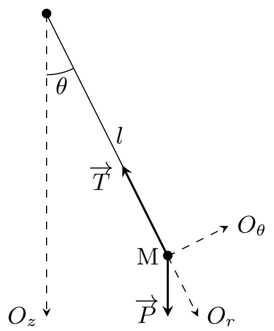


FIGURE 4 – Schéma du pendule simple

Soit un pendule simple placé dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Un bilan des forces puis l'écriture du principe fondamental de la dynamique conduisent à l'équation (6). On projette ensuite suivant les direction $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ afin d'essayer de s'affranchir de la tension $\overrightarrow{T}$.

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} \tag{6}$$

$$ma_r = P\cos(\theta) - T \ ; \ ma_\theta = -P\sin(\theta) \tag{7}$$

L'accélération tangentielle a pour expression $a_\theta = l\ddot{\theta}$. Ainsi l'équation projeté suivant l'axe $\overrightarrow{u_\theta}$ devient

$$ml\ddot{\theta} + mg\sin(\theta) = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{8}$$

Dans l'approximation des petits angles.

V Forces usuelles : effets d'un fluide

5.1 Poussé d'Archimède

Archimède de Syracuse 287 av. J.C.–212 av. J.C. : physicien, mathématicien, ingénieur grec (de Sicile)

✍ Poussée d'Archimède

Soit un système immergé dans un fluide au repos. La résultante des forces de pression s'appliquant au système est égale au poids de fluide déplacé et orientée vers le haut. Cette force s'appliqué en un point appelé le centre de poussé.

Remarque : C'est une force de contact répartie que l'on peut modéliser par une force localisé au centre de poussée.

Remarque : Si le système est immergé dans plusieurs fluides il faut prendre en compte tous les fluides !

? Poussée d'Archimède

Combien de ballons remplis d'hélium faut–il pour soulever une masse de 10kg ? On négligera le poids les ballons d'hélium devant celui de la masse.
Données : $\rho_{\mathrm{He}} = 0,18\mathrm{g.L^{-1}}$, $\rho_{\mathrm{air}} = 1,22\mathrm{g.L^{-1}}$, $V_{\mathrm{ballon}} = 2,7\mathrm{L}$... $V \approx 8200\mathrm{L}$.

5.2 Forces de frottement fluide

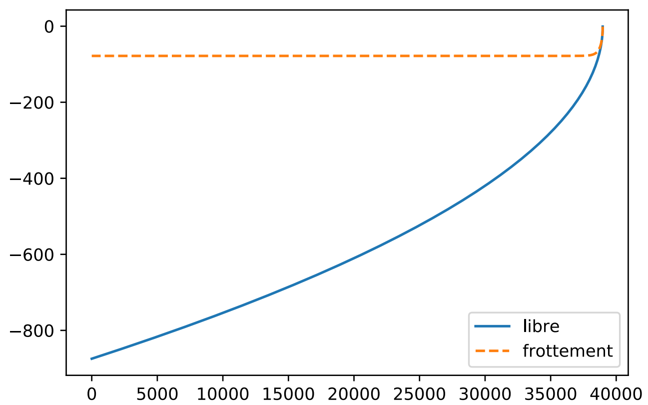
✍ Frottement fluide

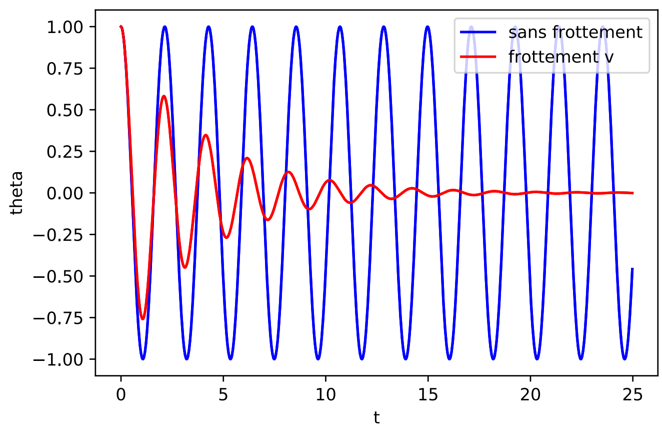
Un système en mouvement à la vitesse $\overrightarrow{v}$ dans un fluide subira une force de frottement fluide $\overrightarrow{f}$.

- Pour le faibles vitesse $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$.
- Pour les fortes vitesse $\overrightarrow{f} = -\alpha' v\overrightarrow{v}$.

avec α et α' coefficients de frottements dépendants du fluide, de la forme du solide, du régime de vitesse...

Remarque : C'est une force de contact (répartie si on considère un solide) de direction la vitesse de l'objet, orienté de façon opposée à la vitesse et dont la norme augmente avec la vitesse.





? TD15 – Ex4

? Tir ballistique avec frottement

Soit un point matériel M de masse m lancé à l'instant $t = 0$ depuis l'origine du repère avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v} = v_{0,x}\overrightarrow{e_x} + v_{0,z}\overrightarrow{e_z}$ et subissant un force de frottements linéaire due à l'air $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$.
1. Déterminer les équations du mouvement.

- On prend le référentiel terrestre supposé galiléen, le système un un point matériel M de masse m, système de coordonnées cartésiennes.
- Bilan des actions mécanique : le point est soumis à son propre poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$.
- PFD : $\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}_{M/\mathcal{R}_g}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = m\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}_g} = m\overrightarrow{g}$ et au frottement de l'air $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$.
- Projection suivant les axes du système de coordonnées

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\alpha}{m}\dot{x} \\ \ddot{z} = -g - \dfrac{\alpha}{m}\dot{z} \end{cases}$$

Tir ballistique avec frottement (suite)

– Les équations précédentes sont indépendantes, leur résolution conduit à

$$\begin{cases} \dot{x} = v_{0,x} \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \\ \dot{z} = \left(v_{0,z} + \frac{gm}{\alpha}\right)\exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) - \frac{gm}{\alpha} \end{cases}$$

– Intégrer permet d'obtenir les positions

$$\begin{cases} x = \left(x_0 + \frac{v_{0,x}m}{\alpha}\right) - \frac{v_{0,x}m}{\alpha}\exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \\ z = \left(z_0 + \left(v_{0,z} + \frac{gm}{\alpha}\right)\frac{m}{\alpha}\right) - \left(v_{0,z} + \frac{gm}{\alpha}\right)\frac{m}{\alpha}\exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) - \frac{gm}{\alpha}t \end{cases}$$

Remarque : Les frottement entraine ici l'existence d'une vitesse limite, $\dot{z} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{mg}{\alpha}$. Le mouvement tend vers un mouvement rectiligne uniforme, le système sera pseudo–isolé lorsque les frottements de l'air compenseront précisément le poids du point.

Remarque : Pour les temps cours ($t \ll \tau$) on trouve $\dot{z} \sim -gt$. On retrouve la chute libre pour les faibles vitesses.

Chute libre avec frottement, régime des fortes vitesses

Même exercice que précédemment en prenant en compte les frottements de l'air $\vec{f} = -\alpha' v \vec{v}$.

– Même référentiel, même système.
– Bilan des actions mécanique : poids du point matériel $\vec{P} = m\vec{g}$ et frottement fluide $\vec{f} = -\alpha' v \vec{v}$.
– PFD : $m\vec{a}_{M/\mathcal{R}_g} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{M/\mathcal{R}_g}}{\mathrm{d}t} = m\vec{g} - \alpha' v \vec{v}$.
  Astuce : estimer qualitativement l'effet de telle ou telle force. Le poids accélère le point matériel alors que les frottements de l'air le ralentissent.
– Après projection sur la base de l'espace on obtient

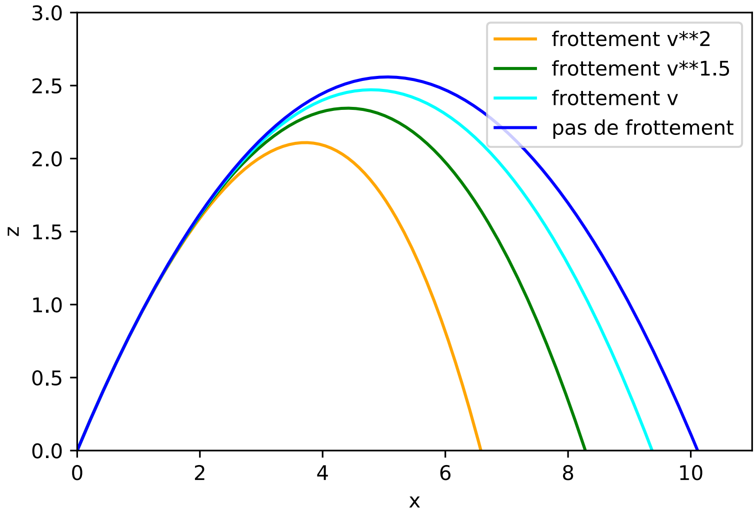
$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = mg - \alpha' \dot{z}^2 \end{cases}$$

  Le problème est identique au précédents sur les axes x et y. Suivant l'axe z le problème est dit non–linéaire, de nombreux problèmes physiques sont non–linéaires et par nature difficile (voire impossible) à traiter analytiquement. L'outil numérique nous permet d'étudier approximativement ces problèmes.
– Vitesse limite : la vitesse limite est atteinte lorsque l'accélération devient nulle et donc $0 = mg - \alpha' \dot{z}_l^2$ i.e. $\dot{z}_l = \sqrt{\frac{mg}{\alpha'}}$.

Soit un point matériel M de masse m initialement lancée avec une vitesse $\vec{v_0}$ depuis l'origine. L'étude est réalisée dans le référentiel terrestre supposé galiéen, le système de coordonnées cartésien est choisi. Après bilan des forces on obtient le PFD

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}_g} = m\vec{g} - \alpha' v \vec{v} \implies \begin{cases} \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha'}{m}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\,\dot{x} \\ \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t} = -g - \frac{\alpha'}{m}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\,\dot{z} \end{cases}$$

Une étude numérique en Python permet de construire les solutions numériques suivantes



VI Forces usuelles : contact avec un solide

6.1 Réaction normale du support

✍ Réaction normale du support

Un objet en contact avec un support subira une force dite de réaction normale $\overrightarrow{R}_N$. C'est cette force qui empêche un objet de passer à travers un support solide. Cette force ne possède pas d'expression générale mais est

- de direction orthogonale au support ;
- dirigée du support vers le système ;
- appliquée au point de contact entre le système et le support.

L'expression de cette force est à déterminer au cas par cas.

? **TD15 – Ex1**

6.2 Réaction tangentielle du support

Soit un solide noté (1) en mouvement en contact avec un support noté (2).

✍ Vitesse de glissement

On appelle vitesse de glissement la quantité

$$\overrightarrow{v}_{g,1/2} = \overrightarrow{v}_{1/\mathcal{R}} - \overrightarrow{v}_{2/\mathcal{R}} .$$

✍ Réaction tangentielle du support : frottement solide

La force de frottement solide, correspond à une réaction tangentielle du support $\overrightarrow{R}_T$. Cette force est

- de direction tangente au support ;
- orienté afin de s'opposer à la vitesse de glissement du système ou à la mise en mouvement du système ;
- appliquée au point de contact entre le système et le support.

L'expression de cette force peut être définie à l'aide des lois empiriques de Coulomb.

✍ Lois de Coulomb

- Si la vitesse de glissement est nulle, on dit qu'il y a adhérence, les réactions du support vérifient $||\overrightarrow{R}_T|| \leq f_s||\overrightarrow{R}_N||$ avec f_s le coefficient de frottement statique.
- Si la vitesse de glissement est non nulle, les réactions du support vérifient $||\overrightarrow{R}_T|| = f_d||\overrightarrow{R}_N||$ avec f_d le coefficient dynamique de frottement.

De plus les coefficients de frottement vérifient $f_d < f_s$.

Remarque : Dans le cas où il y a glissement on peut écrire $||\overrightarrow{R}_T|| = -f_d||\overrightarrow{R}_N||\dfrac{\overrightarrow{v}_{g,1/2}}{||\overrightarrow{v}_{g,1/2}||}$.

Matériaux	pneu/béton sec	pneu/béton humide	bois/bois	corde/bois	chaussure/glace
f_s	1.0	0.7	0.5	0.5	0.1
f_d	0.8	0.5	0.3	0.3	0.05

? **TD15 – App3**

Suppléments – Chapitre 13

Fiche méthode : Traiter un problème de mécanique

- Définir le système et ses caractéristiques utiles.
- Choisir le référentiel d'étude et précise si il est supposé galiléen ou non.
- Faire un bilan des actions mécaniques.
- Faire/compléter une figure permet très souvent d'y voir plus clair (pour vous et pour le correcteur).
- Appliquer le PFD (ou autre théorème utile que nous verrons ultérieurement).
- Définir la base dans laquelle travailler puis écrire les vecteurs–position, –vitesse, –accélération dans cette base.
- Appliquer le PFD (ou le théorème choisi) et le projeter sur les vecteurs unitaires de la base : on obtient les équations différentielles du mouvement.
- Résoudre les équations précédentes si cela est possible et/ou demandé.
- Éliminer la dépendance temporelle pour obtenir l'équation de la trajectoire.

Fiche méthode : Méthode d'Euler

La méthode d'Euler consiste à estimer la dérivée $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ par le taux d'accroissement $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$. Puis à exprimer $f(t+\Delta t)$ en fonction de $f(t)$. Ici cela conduit à

$$\begin{cases} \dot{x}(t+\Delta t) = \dot{x}(t) - \dfrac{\alpha'}{m}\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{z}(t)^2}\;\dot{x}(t)\Delta t \\ \dot{z}(t+\Delta t) = \dot{z}(t) - \left(g + \dfrac{\alpha'}{m}\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{z}(t)^2}\;\dot{z}(t)\right)\Delta t \end{cases}$$

De même pour la position $\dot{x} \sim \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$ et donc,

$$\begin{cases} x(t+\Delta t) = x(t) + \dot{x}(t)\Delta t \\ z(t+\Delta t) = z(t) + \dot{z}(t)\Delta t \end{cases}$$

On peut ensuite rentrer ces formules dans un tableur, une calculatrice ou demander à Python de faire le boulot pour obtenir une expression approchée de la trajectoire en représentant $z(x)$.