

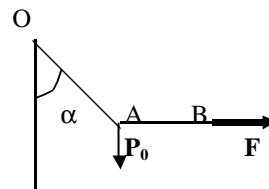
SERIE D'EXERCICES N° 12 : MECANIQUE : DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL

Les grandeurs en caractère gras sont des grandeurs vectorielles. Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen.

Postulat dynamique : point matériel en équilibre.

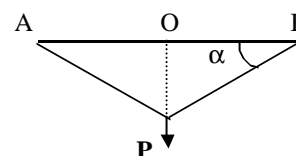
Exercice 1.

On dispose de deux ressorts linéaires identiques de longueur au repos L . Chacun, soumis à un poids P_0 , prend un allongement l_0 , déterminé par leur raideur commune k . On suspend un poids P_0 à l'un des ressorts et on tire horizontalement le poids à l'aide de l'autre ressort que l'on tire avec une force variable F . Le premier fait alors un angle α avec la verticale. Pour chaque valeur de α correspondant à une force F , le ressort (1) prend un allongement l_1 et le ressort (2) un allongement l_2 . Calculer les allongements l_1 et l_2 en fonction de α et l_0 .



Exercice 2.

Un brin de caoutchouc de longueur $2L$ non tendu est fixé entre deux points A et B. On admettra que son poids est négligeable et que le brin est horizontal. On accroche un poids P au milieu O de AB. Sachant que le caoutchouc tendu avec une force F s'allonge de l tel que $F = kl$, exprimer P en fonction de k , L et α .



Postulat dynamique : point matériel libre.

Exercice 3.

Une voiture, de masse m , roulant rectilignement à la vitesse $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{i}$, coupe son moteur à $t = 0$ et n'est plus soumise, suivant \mathbf{i} , qu'à une force de frottement proportionnelle à la vitesse $\mathbf{F} = -h \mathbf{v}$.

1. Ecrire la loi de variation de v en fonction du temps (on fera apparaître la constante de temps τ que l'on définira).
2. En déduire l'équation horaire du mouvement.

Exercice 4.

Un corps de masse m flotte sur un liquide de masse volumique ρ . Sa surface à la ligne de flottaison étant S , calculer la période des oscillations verticales du système en fonction de m , ρ , S et g intensité du champ de pesanteur. On admettra pour simplifier que la surface S reste constante de part et d'autre de la position d'équilibre, sur une longueur supérieure à l'amplitude des oscillations.

On rappelle que la poussée d'Archimède \mathbf{P} est équivalente à une force unique, verticale, dirigée vers le haut, d'intensité égale au poids du fluide déplacé, s'appliquant en C , centre de poussée (on suppose ici C à la verticale du centre de gravité G).

Exercice 5.

Une fusée balistique, assimilée à un point matériel M de masse m , est mise à feu à la surface de la Terre, avec une vitesse \mathbf{v}_0 de valeur inférieure à la vitesse de satellisation sur une orbite circulaire, faisant un angle α avec l'horizontale (on fera une figure dans le plan de tir défini par $(\mathbf{g}, \mathbf{v}_0)$ ramené au trièdre $(O, \mathbf{i}, \mathbf{k})$ où \mathbf{i} est unitaire suivant l'horizontale et \mathbf{k} unitaire suivant la verticale ascendante). Le champ de pesanteur \mathbf{g} est supposé uniforme ($g = 10 \text{ m.s}^{-2}$).

1. On néglige en première approximation la résistance de l'air.
 - a) Etablir l'équation de la trajectoire.
 - b) Exprimer la portée OC puis la flèche AH (A point d'altitude maximale, H sa projection sur l'horizontale) en fonction de v_0 , α et g .

A.N. Calculer la portée maximale et la hauteur maximale alors atteinte si $v_0 = 1 \text{ km.s}^{-1}$.

- c) Ecrire l'équation vérifiée par l'angle de tir α pour que la trajectoire passe par un point B de l'espace de coordonnées (x_B, z_B) . A.N. Calculer α pour $x_B = 73,2 \text{ km}$ et $z_B = 19,6 \text{ km}$ si v_0 a la valeur précédente.

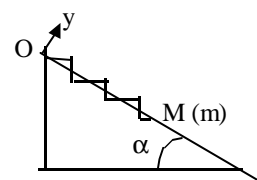
2. On tient compte maintenant de la résistance de l'air, opposée à la vitesse de la fusée : $\mathbf{f} = -h \mathbf{v}$ avec h constante positive. Etablir les équations paramétriques $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement de M .

Postulat dynamique : point matériel lié.

Exercice 6.

On considère un ressort de raideur k et de longueur au repos l_0 , dont les extrémités sont reliées à un point fixe O et à un point matériel M de masse m . On suppose qu'il n'existe pas de frottement de glissement sur le plan incliné. Soit un axe Ox sur le plan incliné (voir la figure).

1. Déterminer l'abscisse x_e du point M à l'équilibre en fonction de l_0 , m , g , k et α .



2. A partir de la position d'équilibre M est déplacé d'une distance d comptée algébriquement sur Ox et lâché sans vitesse initiale. Etablir l'équation horaire $x(t)$ en fonction de d , k , m et x_e .

Exercice 7.

1. La figure 1 représente une portion de plan incliné sur l'horizontale d'un angle α . Un chariot de masse m est mobile sans frottement sur des rails posés parallèlement à une ligne de plus grande pente du plan. Sa position est repérée sur l'axe $x'Ox$ par l'abscisse x de son centre d'inertie G qui est nulle à l'instant initial. On lance le chariot vers le haut à la vitesse v_0 .

Pour quelle valeur de v_0 , exprimée en fonction de g , a , α , la vitesse du chariot s'annule-t-elle au point A d'abscisse $x = a$?

2. La figure 2 représente le même plan incliné muni d'un dispositif à ressort, poulie et fil, qui permet d'exercer sur le chariot une force de rappel $F_x = -kx$, k étant une constante. Le chariot est lancé vers le haut avec la vitesse v'_0 , atteint le point B où sa vitesse s'annule et redescend. Comme précédemment, $x = 0$ à l'instant initial.

Ecrire et intégrer l'équation différentielle du mouvement (on exprimera l'amplitude et la phase à l'origine en fonction de v'_0 , k , m , g et α). Pour quelle valeur de v'_0 le point B est-il confondu avec le point A (on donnera v'_0 en fonction de la pulsation propre ω_0 , a et v_0) ?

Figure 1 :

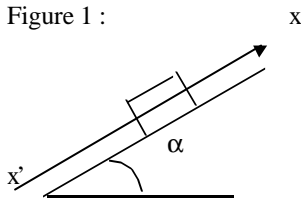
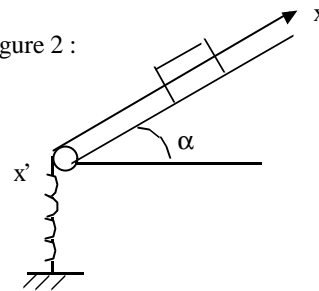


Figure 2 :



Exercice 8.

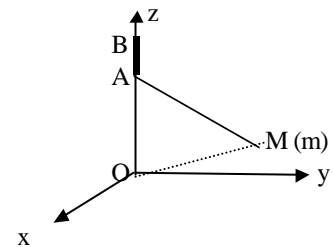
Une tige tourne dans le plan horizontal xOy autour de son extrémité O à la vitesse angulaire constante ω . Sur cette tige, un anneau M de masse m , peut glisser sans frottement. A $t = 0$, l'anneau part de M_0 ($OM_0 = a$, $\theta_0 = 0$), sans vitesse initiale par rapport à la tige.

- Déterminer la trajectoire de l'anneau en coordonnées polaires par rapport au repère xOy .
- Déterminer la réaction de la tige sur l'anneau en fonction de a , ω , θ et g .

Exercice 9.

Un élastique E accroché en B passe en A dans un petit anneau et porte en son extrémité M une masse ponctuelle pesante m . Soit k la raideur de E , BA sa longueur au repos. M étant accroché, la position d'équilibre de M se trouve en O . On pose $OA = a$.

- Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$.
- Résoudre, les conditions initiales quelconques étant définies par : $t = 0$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$.



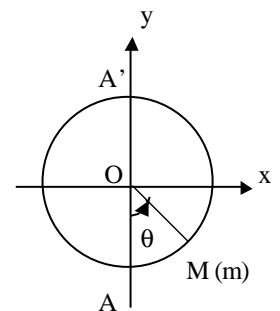
Exercice 10.

Un point matériel M , de masse m , relié à l'origine O par un fil inextensible et sans masse, décrit dans le sens positif un cercle vertical, de centre O , de rayon r .

- Quelles sont les tensions T_A et $T_{A'}$ lorsque M passe en A avec la vitesse v_A et en A' avec la vitesse $v_{A'}$? (on exprimera T_A et $T_{A'}$ en fonction de v_A , $v_{A'}$, m , r et g intensité du champ de pesanteur). Les valeurs trouvées sont-elles toujours positives ?
- Ecrire l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ que fait OM avec la verticale.

Pour intégrer cette équation, multiplier chaque terme par $\frac{d\theta}{dt}$ pour faire apparaître des dérivées connues, en déduire l'expression de la vitesse à l'instant t sachant qu'à l'instant initial $\theta = 0$ et $v = v_0$ (on exprimera v^2 en fonction de v_0 , g , r et θ). Calculer alors la tension du fil T en fonction de v_0 , g , r et θ .

- La vitesse initiale v_0 étant donnée, on désigne par θ_v la valeur de θ qui annule l'expression de v et par θ_T celle qui annule l'expression de T . Exprimer $\cos \theta_v$ puis $\cos \theta_T$ en fonction de v_0 , g et r , et tracer les courbes $\cos \theta_v = f(v_0^2)$ et $\cos \theta_T = f(v_0^2)$. En déduire la nature du mouvement de M suivant la valeur de v_0 .



Moment cinétique.

Exercice 11.

Selon le modèle classique d'atome, un électron décrit autour du noyau une orbite circulaire de rayon r , à la vitesse angulaire ω constante, sous l'action d'une force centrale d'origine électrique. Calculer le moment cinétique orbital de l'électron en fonction de la surface S de l'orbite et du courant équivalent $i = e/T$ (e : charge de l'électron, m_e : masse de l'électron, T : période de révolution).

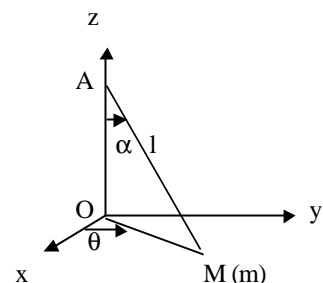
Exercice 12.

Un point matériel M , de masse m , lié par un fil inextensible de longueur l à un point fixe A , tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe Az .

1. α étant l'angle que forme AM avec la verticale, calculer la tension du fil T puis l'angle α en fonction de m , g , l et ω .

2. Calculer en coordonnées cylindriques d'origine O l'expression du moment cinétique de M par rapport à A .

Vérifier que sa dérivée par rapport au temps est égale au moment par rapport à A de la résultante des forces appliquées à M .



Force centrale.

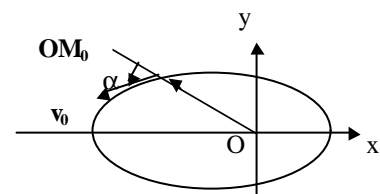
Exercice 13.

Montrer que si la trajectoire d'un point soumis à une force centrale est un cercle, le mouvement de ce point est alors uniforme.

Exercice 14.

Un point matériel soumis à une force centrale de centre de force O , décrit une trajectoire elliptique. En un point M_0 son vecteur position est \mathbf{OM}_0 et sa vitesse \mathbf{v}_0 avec $\alpha = (\mathbf{OM}_0, \mathbf{v}_0)$. Les valeurs extrémales de OM sont r_1 et r_2 avec $r_2 > r_1$.

Calculer les vitesses de M en ces points en fonction des données.



Exercice 15.

Un point matériel M , de masse m , est soumis à une force centrale $\mathbf{F} = \frac{Km}{r^4} \mathbf{r}$. A l'instant initial $t = 0$, le point M se trouve en A de coordonnées $r_0 = a$ et $\theta_0 = 0$, la vitesse initiale \mathbf{v}_0 étant perpendiculaire à \mathbf{OA} avec une constante des aires C positive. Etablir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par r en faisant intervenir C et K .

Formule de Binet.

Exercice 16.

En utilisant la formule de Binet pour l'accélération, trouver la loi de force pour une trajectoire d'équation polaire : $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ où p

et e sont des constantes.

Réponses.

Exercice 1.

$$l_1 = l_0 / \cos \alpha \text{ et } l_2 = l_0 \tan \alpha .$$

Exercice 2.

$$P = 2 k L (\tan \alpha - \sin \alpha) .$$

Exercice 3.

$$1) v = v_0 e^{-t/\tau} \text{ avec } \tau = \frac{m}{h} . 2) x = \tau v_0 (1 - e^{-t/\tau}) .$$

Exercice 4.

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{\rho S g}} .$$

Exercice 5.

$$1.a) z = - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + \tan(\alpha) x . 1.b) OC = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha) \text{ et } AH = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} ; OC_{\max} = \frac{v_0^2}{g} = 100 \text{ km alors}$$

$$AH = 25 \text{ km} . 1.c) \tan^2(\alpha) - \frac{2 v_0^2}{g x_B} \tan(\alpha) + (1 + \frac{2 v_0^2 z_B}{g x_B^2}) = 0 \text{ donne } \alpha_1 = 60^\circ \text{ (tir en cloche) et } \alpha_2 = 45^\circ \text{ (tir tendu).}$$

$$2) x = \frac{m}{h} v_0 \cos(\alpha) (1 - e^{-ht/m}) \text{ et } z = \frac{m}{h} (v_0 \sin(\alpha) + \frac{m}{h} g) (1 - e^{-ht/m}) - \frac{m}{h} g t .$$

Exercice 6.

$$1) x_e = l_0 + \frac{mg}{k} \sin(\alpha) . 2) x = d \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} t) + x_e .$$

Exercice 7.

$$1) v_0 = \sqrt{2ga \sin(\alpha)} . 2) \ddot{x} + \frac{k}{m} x = -g \sin(\alpha) \text{ d'où } x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) - \frac{mg}{k} \sin(\alpha) \text{ avec } X_m = \sqrt{v_0^2 \frac{m}{k} + (\frac{mg}{k} \sin(\alpha))^2} \text{ et } \varphi$$

$$= \text{Arctan} [- \frac{v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}}{\frac{m}{k} g \sin(\alpha)}] ; B \text{ confondu avec } A \text{ pour } v_0' = \sqrt{\omega_0^2 a^2 + v_0^2} .$$

Exercice 8.

$$1) r = a \text{ ch}(\theta) ; 2) R_\theta = 2 m a \omega^2 \text{ sh}(\theta) \text{ et } R_z = m g .$$

Exercice 9.

$$1) \ddot{\mathbf{r}} + \frac{k}{m} \mathbf{r} = \mathbf{0} . 2) \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \cos(\omega t) + \frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \sin(\omega t) \text{ (oscillateur spatial).}$$

Exercice 10.

$$1) T_A = m (\frac{v_A^2}{r} + g) \text{ et } T_{A'} = m (\frac{v_{A'}^2}{r} - g) . 2) \ddot{\theta} + \frac{g}{r} \sin(\theta) = 0 ; v^2 = v_0^2 + 2 g r (\cos(\theta) - 1) ;$$

$$T = m (\frac{v_0^2}{r} + g (3 \cos(\theta) - 2)) . 3) \cos(\theta_v) = - \frac{v_0^2}{2 g r} + 1 \text{ et } \cos(\theta_T) = - \frac{v_0^2}{3 g r} + \frac{2}{3} ; \text{ mouvement pendulaire pour } \theta_v < \theta_T ; \text{ fil}$$

détendu pour $\theta_T < \theta_v$; mouvement circulaire pour $v_0^2 > 5 g r$.

Exercice 11.

$$\mathbf{s}_0 = \frac{2 m_e S i}{e} \mathbf{u}_z .$$

Exercice 12.

1) $T = m l \omega^2$ et $\cos(\alpha) = \frac{g}{l\omega^2}$ (exige $\omega > \sqrt{\frac{g}{l}}$). 2) $\mathbf{s}_A = m l^2 \omega \sin(\alpha) (\cos(\alpha) \mathbf{u}_r + \sin(\alpha) \mathbf{u}_z)$ et

$$\frac{d\mathbf{s}_A}{dt} = m l^2 \omega^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \mathbf{u}_q .$$

Exercice 14.

$$r_1 v_1 = r_2 v_2 = C = r_0 v_0 \sin(\alpha) .$$

Exercice 15.

$$\ddot{r} = \frac{C^2 + K}{r^3} = \frac{r_0^2 v_0^2 + K}{r^3} .$$

Exercice 15.

$$\mathbf{F} = - \frac{K m}{r^2} \mathbf{u}_r .$$