Partie Mécanique

Chapitre III
Mécanique de Newton
Lois et Applications

I. Lois Fondamentales

1. Lois de Newton

a. Principe d'inertie ($1^{ère}$ loi de Newton)

Système isolé :
Un système est mécaniquement isolé s'il n'est soumis à aucune force. Ce genre de système n'existe pas en pratique (il y a toujours le poids du système et des frottements).
Système pseudo-isolé :
Un système est pseudo-isolé si les effets des forces extérieures auxquelles il est soumis se compensent.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

i. Référentiel Galiléen

Définition :
En physique, un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel un objet isolé (sur lequel ne s'exerce aucune force ou sur lequel la résultante des forces est nulle) est en mouvement de translation rectiligne uniforme (l'immobilité étant un cas particulier de mouvement rectiligne uniforme) : la vitesse du corps est constante (au cours du temps) en direction et en norme.

Principe d'inertie :
En physique mécanique, le principe d'inertie exprime le fait que, dans un référentiel galiléen, tout corps qui est soumis à une force résultante nulle est immobile ou en mouvement rectiligne uniforme. Ce principe est la première des trois lois de Newton.

ii. Loi de composition des vitesses

Soit M un point mobile dans l'espace. On définit :

- La vitesse absolue de M est la vitesse de M dans le référentiel (R) notée : $\vec{v}_{M/R}$
- La vitesse relative de M est la vitesse de M dans le référentiel (R') notée : $\vec{v}_{M/R'}$
- La vitesse de R' en translation uniforme dans le référentiel R : $\vec{v}_{R'/R}$

La loi de composition s'écrit : $\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{M/R'} + \vec{v}_{R'/R}$

b. Théorème du centre d'inertie (2ème loi de Newton)

La deuxième loi de Newton (ou principe fondamental de la dynamique en translation (PFDT) - parfois appelée *relation fondamentale de la dynamique* ou (RFD) s'énonce ainsi :

Soit un corps de masse *m* (constante) : l'accélération subie par ce corps dans un référentiel galiléen est proportionnelle à la résultante des forces qu'il subit, et inversement proportionnelle à sa masse *m*.

Ceci est souvent récapitulé dans l'équation :

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\sum \vec{F}_i \quad \text{ou} \quad \sum \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Où :

$\vec{F}_i$ désigne les forces extérieures exercées sur l'objet.
m est sa masse.
$\vec{a}$ correspond à l'accélération de son centre d'inertie G.

c. Principe d'interaction (3ème loi de Newton)

Enoncé : Tout corps A exerçant une force sur un corps B subit une force d'intensité égale, de même direction mais de sens opposé, exercée par le corps B.

A et B étant deux corps en interaction, la force $\vec{F}_{A/B}$ (exercée par A sur B) et la force $\vec{F}_{B/A}$ (exercée par B sur A) qui décrivent l'interaction sont directement opposées :

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$

Dans le cas de la mécanique du point, la troisième loi précise également :

$\vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{B/A} = \vec{0}$: la force d'interaction est portée par la droite reliant les positions des particules.

Remarque : La somme des forces intérieures d'un système mécanique est toujours nulle.

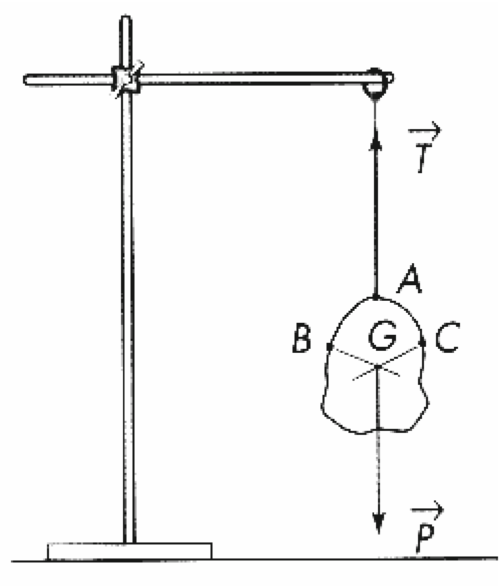
2. Equilibre d'un solide

a. Solide soumis à deux forces

Un solide S suspendu à un fil est soumis à deux forces :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- la tension $\vec{T}$ du fil tendu selon la verticale (T a la même direction que le fil).

Le solide étant en équilibre, ces deux forces ont même droite d'action, même valeur, mais des sens opposés.



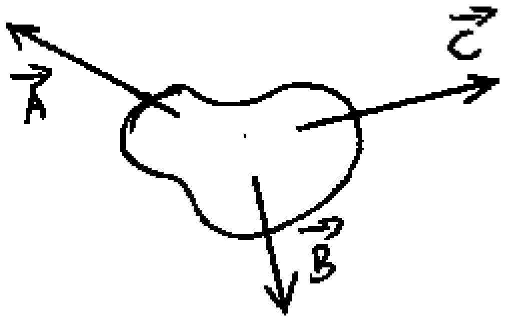
Cette loi se traduit par la relation vectorielle :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$

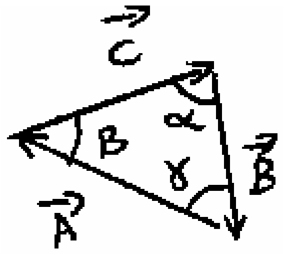
Si nous modifions le point d'attache du solide (A, B, C), la droite d'action de $\vec{P}$ passe toujours par un point G appelé centre de gravité du solide.

b. Solide soumis à trois forces

Si un solide soumis à l'action de 3 forces $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ est en équilibre, la somme vectorielle de ces forces est nulle :
$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$



Cette somme nulle se traduit graphiquement un triangle fermé (en choisissant une échelle appropriée pour les intensités).



Ce triangle permet en utilisant les fonctions trigonométriques de :

- Une force
- Un angle

II. Applications

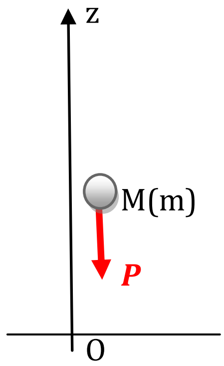
Dans les mouvements qu'on étudier dans cette partie seront considérés en référentiel galiléen du laboratoire.

1. Exemple de mouvement de translation

a. Chute libre

Définition : Une chute libre est un mouvement sous le seul effet de la pesanteur. C'est le mouvement d'un système soumis à la seule force de gravitation.

1er cas : Chute libre sans vitesse initiale :



En supposant que le corps n'est soumis qu'à la pesanteur, si un corps ponctuel M est lâché d'un point de cote z_0 sans vitesse initiale et si l'axe des z est orienté vers le haut, alors l'étude dynamique du corps est :
La deuxième loi de Newton s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g}$$

En projetant sur OZ on a : $a_z = -g$

En intégrant une première fois on a :

$$v_z = -gt + V_0 = -gt \quad \text{car} \quad V_0 = 0$$

En intégrant une seconde fois on a :

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0$$

Avec :
z : la hauteur du corps par rapport au sol
g : l'accélération du champ de pesanteur terrestre (environ 9,81 $m.s^{-2}$)
t : le temps en secondes
z_0: altitude initiale

Temps de chute t_{chute} :

la masse m arrive au niveau du sol quand z=0

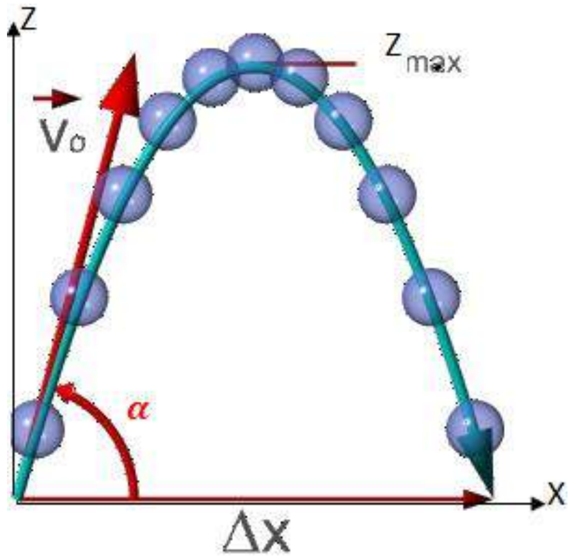
donc $-\frac{1}{2}g{t_{chute}}^2 + z_0 = 0$ d'où $t_{chute} = \sqrt{\frac{2z_0}{g}}$

La vitesse V_{imp} à l'impact est donnée donc par :

$$V = \sqrt{2gz_0}$$

2ème cas : Chute libre avec vitesse initiale :

Lorsqu'on lance un objet en l'air, hormis le cas où il a été lancé rigoureusement à la verticale vers le haut, sa trajectoire est une courbe que l'on peut assimiler à une parabole.



Etude dynamique du mouvement de l'objet :

La deuxième loi de Newton s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g}$$

En projetant sur OZ on a : $\begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$

En intégrant une première fois on a les équations horaires de la vitesse :

$$\begin{cases} v_x = cste = v_{x0} = v_0 \cos\alpha \\ v_z = -gt + cste = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

En intégrant une seconde fois on a les équations horaires de la position :

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\alpha)t \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t \end{cases} \quad \text{car les } x(t=0) = 0 \text{ et } y(t=0) = 0$$

Détermination de l'équation de la trajectoire :

Pour éliminer le temps entre les équations horaires on exprime d'abord t :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

On remplace dans l'expression de Z :

$$z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + (v_0 \sin\alpha)\frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

D'où l'équation de la trajectoire **:**

$$\boldsymbol{z = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0{}^2 \cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x}$$

Remarque :

Il s'agit de l'équation d'une parabole.

Détermination de la portée Δx :

Au point d'impact on a : z=0 donc $-\frac{1}{2}g{t_{chute}}^2 + (v_0 \sin\alpha)t_{chute} = 0$

Le temps de chute est donc : $t_{chute} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$

D'où $\Delta x = (v_0 \cos\alpha)t_{chute} = \frac{2{v_0}^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$

On en déduit donc l'expression finale de la portée : $\boldsymbol{\Delta x = \frac{{v_0}^2 \sin 2\alpha}{g}}$

Remarque :

La portée est maximale si $\sin 2\alpha = 1$ ou encore $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ donc si $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (lancer suivant la première bissectrice).

Détermination de la portée Z_{max} :

Au sommet de la parabole on a : $v_z = 0$ donc $-gt_{sommet} + v_0 \sin\alpha = 0$

Le temps quand l'objet arrive au sommet de la parabole est donc :

$$t_{sommet} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

D'où $Z_{max} = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + (v_0 \sin\alpha)\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)$

On en déduit donc l'expression finale de Z_{max} : $\boldsymbol{Z_{max} = \frac{{v_0}^2 \sin^2\alpha}{2g}}$

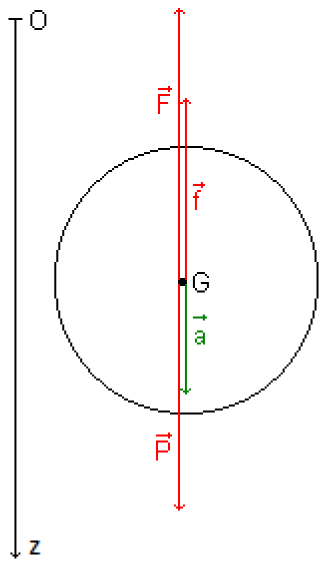
Remarque :

Z_{max} est maximale si $\sin\alpha = 1$ ou encore $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (lancer vertical).

b. Chute verticale d'un solide soumis à une force de frottement fluide

Soit un solide de masse m, de volume V et de vitesse $\vec{v}$ dans un fluide de masse volumique ρ_{fluide}.
Le fluide exerce sur ce solide une force de frottement.
Dans le cas d'une chute verticale dans un fluide, la force de frottement est de la forme $\vec{f} = -k\vec{v}$.

Remarque : La force $\vec{f}$ est colinéaire au vecteur vitesse mais de sens opposé. Sa valeur est proportionnelle à la vitesse v.



Détermination de l'équation différentielle du mouvement :

Bilan des forces : $\begin{cases} \vec{P} = m\vec{g} = \rho_{solide}V\vec{g} \ : Poids\ du\ solide. \\ \vec{F} = -\rho_{fluide}V\vec{g} : poussée\ d'archimède. \\ \vec{f} = -k\vec{v} : force\ de\ frottement. \end{cases}$

La deuxième loi de Newton appliquée au solide donne : $\boldsymbol{m\vec{a}} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{f}$

En projetant sur l'axe vertical Oz on a : $\rho_{solide}V\frac{dv}{dt} = \rho_{solide}Vg - \rho_{fluide}Vg - kv$

On en déduit l'équation différentielle du mouvement :

$$\boldsymbol{\frac{dv}{dt} + \frac{k}{\rho_{solide}V}v = \left(1 - \frac{\rho_{fluide}}{\rho_{solide}}\right)g}$$

Détermination de la vitesse limite :

Lorsque v atteint la vitesse limite, on peut écrire : v=cste=v_{lim} donc $\frac{dv}{dt} = 0$

On déduit de l'équation différentielle précédente : $\boldsymbol{\frac{k}{\rho_{solide}V}v_{lim}} = \boldsymbol{\left(1 - \frac{\rho_{fluide}}{\rho_{solide}}\right)g}$

D'où $\boldsymbol{v_{lim} = \frac{(\rho_{solide} - \rho_{fluide})Vg}{k}}$

Résolution de l'équation différentielle :

On pose $\frac{1}{\tau} = \frac{k}{\rho_{solide}V}$. L'équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = \frac{v_{lim}}{\tau}$$

La solution mathématique de cette équation est de la forme : $\boldsymbol{v} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\frac{v_{lim}}{\tau}}{\frac{1}{\tau}}$ avec A une constante à déterminer par la condition initiale sur la vitesse.

$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}) = A + v_{lim} = 0$ d'où $A = -v_{lim}$

On en déduit la solution finale de l'équation différentielle du mouvement :

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_{lim}}\left(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

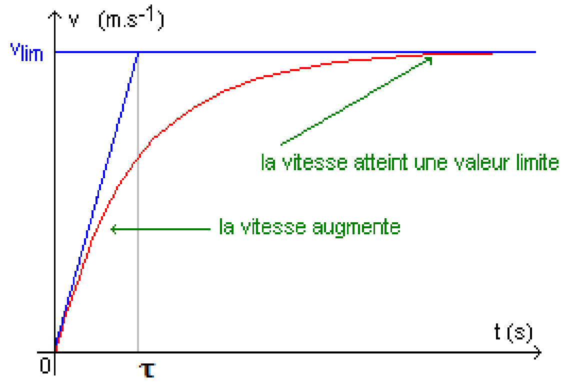
Représentation graphique :

Pa le calcul :

$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t} = 5\tau) \approx 99{,}99\%\boldsymbol{v_{lim}}$
$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t} = \tau) \approx 63\%\boldsymbol{v_{lim}}$

- La vitesse limite est atteinte à partir de 5 τ : on parle ainsi d'un régime permanant.

- La vitesse augmente jusqu'à 5τ : il s'agit d'un régime transitoire.

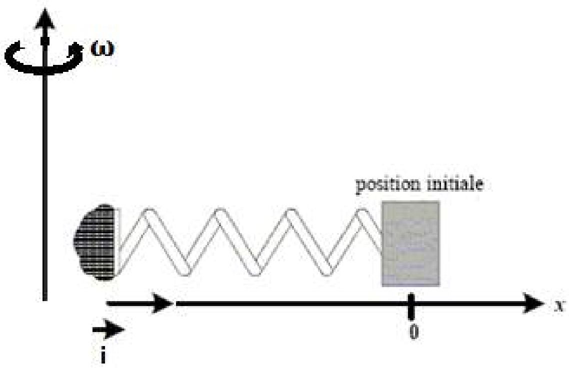


2. Exemple de mouvement de rotation

a. Mouvement circulaire uniforme

i. Fronde horizontale

Définition : Il s'agit d'un solide de masse m pouvant coulisser sur une tige métallique animé d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω. L e solide est relié à l'axe de rotation par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0.



Etude dynamique du mouvement du solide :

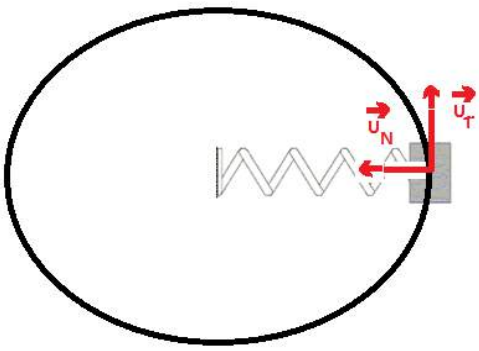
Bilan des forces : $\begin{cases} \vec{P} = m\vec{g} : Poids\ du\ solide. \\ \vec{T} = -k(l - l_0)\vec{\imath} : Tession\ du\ ressort. \\ R : Réaction\ de\ la\ tige. \end{cases}$

2ème loi de Newton : $\boldsymbol{m\vec{a}} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R}$

On projette dans la base de Frenet :

$$\begin{cases} ma_N = m\dfrac{v^2}{l} = T = k(l - l_0) \\ ma_T = m\dfrac{dv}{dt} = 0 \ => v = cste \end{cases}$$

Vu de dessus



or $v = l\omega$ donc : $ml\omega^2 = k(l - l_0)$

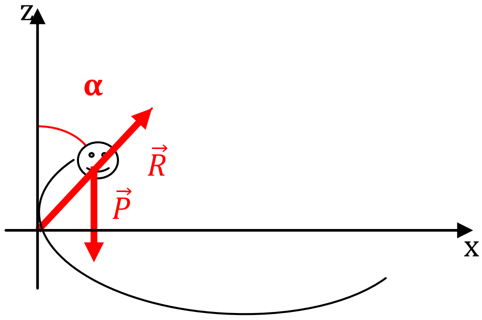
Le rayon du mouvement circulaire (longueur du ressort) est donc : $\boldsymbol{l = \frac{kl_0}{k - m\omega^2}}$

Remarque :

- Plus la masse est importante plus l'élongation est grande.
- Plus le solide tourne vite plus l'élongation est grande.

ii. Stabilité d'un deux roues dans un virage

1er cas : Adhérence parfaite :



L'adhérence étant parfaite, les deux roues va donc s'incliner dans le virage de rayon r.

La réaction de la route passe par le point de contact entre les roues et le sol et le centre d'inertie G du deux roues.

Elle est inclinée d'un angle α par rapport à la verticale.

Calcul de l'angle α :

On fait une étude dynamique du deux roues dans le référentiel Oxz :

Bilan des forces : $\begin{cases} \vec{P} = m\vec{g} \text{ : } Poids\ du\ deux\ roues. \\ \vec{R} \text{ : } Réaction\ de\ la\ route. \end{cases}$

2ème loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$

On projette :

sur Ox : $m\frac{v^2}{r} = Rsin\alpha$

sur Oz : $-mg + Rcos\alpha = 0$

D'où $\begin{cases} Rsin\alpha = m\frac{v^2}{r} \\ Rcos\alpha = mg \end{cases}$

On en déduit : $\boldsymbol{tan\ \alpha} = \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{gr}}$

Calcul de R :

On a déjà démontré : $Rcos\alpha = mg$

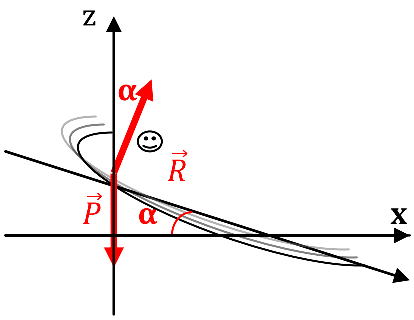
D'où $R = \frac{mg}{cos\alpha}$.

2ème cas : Sans adhérence :

Si l'adhérence est nulle alors c'est la route qui doit être incliné d'un angle α pour que la réaction soit à chaque instant perpendiculaire à la route.

L'étude dynamique nous a permis précédemment de trouver : $\boldsymbol{sin\alpha} = \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{gr}}$

Et $R = \frac{mg}{cos\alpha}$.

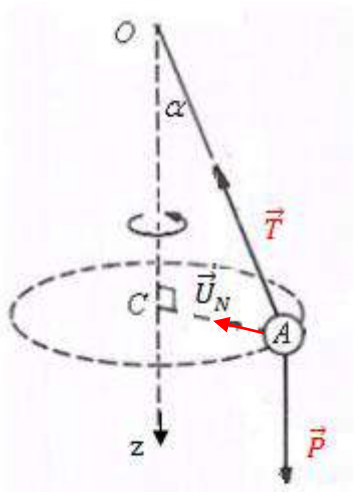


iii. Pendule conique à angle bloqué

Une masse M est fixée à un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable. L'autre extrémité du fil est fixée à un axe vertical qui tourne à la vitesse angulaire uniforme ω. Soit α l'angle du fil avec la verticale.

La masse décrit un cercle de rayon R =CA= L.sin(α). Comme la vitesse angulaire est constante, l'accélération tangentielle est nulle et l'accélération normale a pour valeur:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \mathrm{R}\omega^2 = \mathrm{L.sin}(\alpha)\omega^2$$



Bilan des forces appliquées sur la masse M : $\begin{cases} \vec{P} = m\vec{g} : Poids\ de\ la\ masse\ M. \\ \vec{T} : Tension\ du\ fil. \end{cases}$

2ème loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$

On projette dans la base de Frenet :

sur $\vec{U}_N$: $ma_N = m\mathrm{L.sin}(\alpha)\omega^2 = Tsin\alpha$

sur : $-mg + T\cos\alpha = 0$

D'où $\begin{cases} T = m\mathrm{L}\omega^2 \\ T\cos\alpha = mg \end{cases}$

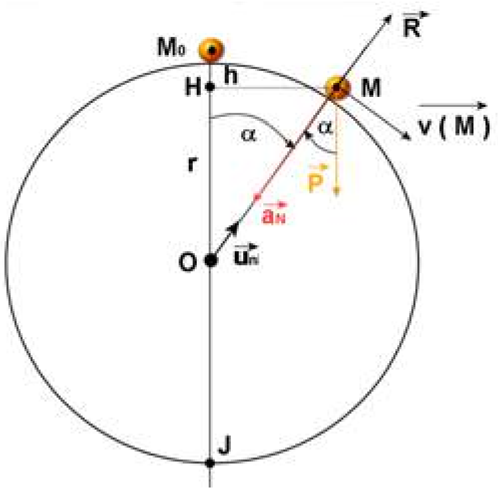
On en déduit : $\cos\alpha = \frac{g}{\mathrm{L}\omega^2}$ si $\mathrm{L}\omega^2 > g$

Remarque : Si cette condition est réalisée, le pendule s'écarte de l'axe de rotation. Sinon la masse M reste collée à l'axe de rotation.

b. Mouvement circulaire non uniforme

i. Solide glissant sur une sphère

Soit une petite boule glissant sans rouler sur une sphère de rayon r et M_0 sa position d'équilibre instable initiale.



La liaison est parfaite; il n'y a pas pas de forces de frottement. La réaction se réduit à sa composante normale R.

Ecartée sans vitesse initiale de cette position, la bille se trouve en mouvement de translation circulaire dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Soit M la position de son centre d'inertie à l'instant t.

Remarque 1 : la réaction normale R ne travaille pas.

Remarque 2: la position d'équilibre M_0 est dite instable car si on écarte légèrement la bille de cette position, elle n'y reviendra pas.

Remarque 3: la position d'équilibre J, à l'intérieur de la sphère est dite stable car si on écarte la bille de cette position, elle y repassera et y restera, une fois son énergie dissipée complètement à cause des frottements solides et fluides.

Ecrivons la deuxième loi de Newton en un instant générique t lorsque la bille est au point générique M:

$$\vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{a}$$

Projetons cette relation sur le vecteur unitaire $\vec{u}$

(Note importante: ce vecteur $\vec{u}$ ne peut être attaché à un repère galiléen, puisqu'il tourne dans le référentiel terrestre: ce n'est qu'un repère de projection des lois de la Dynamique, lesquelles, elles, sont appliquées dans le référentiel terrestre supposé galiléen)

$$R_n - m\,g\cos\alpha = m\,a_N = -m\frac{v^2}{r}$$

Pour que le contact demeure, il faut qu'il y ait une réaction R > 0 soit

$$R = m\,g\cos\alpha - m\frac{v^2}{r} > 0$$

$$g\cos\alpha - \frac{v^2}{r} > 0 \Rightarrow g\cos\alpha > \frac{v^2}{r}$$

Par la conservation d'énergie on a :

$$E_m(M_0) = E_m(M)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$v^2 = 2\,g\,h = 2\,g\,(r - r\cos\alpha) = 2\,g\,r\,(1 - \cos\alpha) \Rightarrow$$

$$g\cos\alpha > \frac{2\,g\,r(1-\cos\alpha)}{r} \Rightarrow$$

$$\cos\alpha > 2(1 - \cos\alpha) \Rightarrow$$

$$3\cos\alpha > 2 \Rightarrow \cos\alpha > \frac{2}{3} \Rightarrow$$

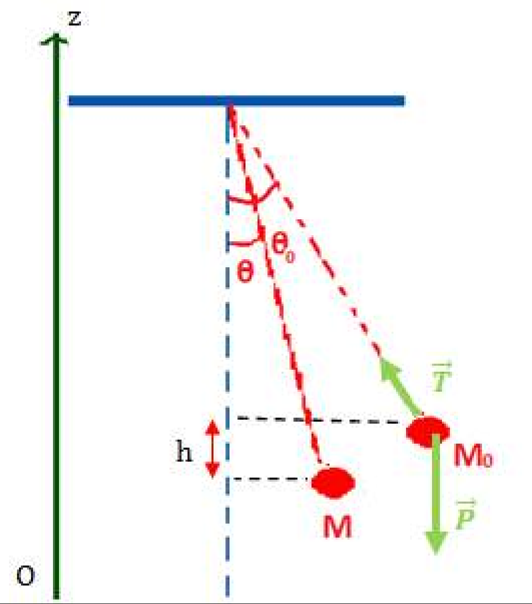
$$\alpha \leq 48{,}2^0$$

Au-delà de cette valeur, la bille quitte la piste.

Remarque : Le résultat ne dépend ni de la masse de la bille, ni du rayon de la sphère

ii. Pendule simple

Le pendule simple est une masse ponctuelle fixée à l'extrémité d'un fil sans masse, inextensible et oscillant sous l'effet de la pesanteur. Il s'agit du modèle de pendule pesant le plus simple. Par extension on appelle aussi parfois pendule simple un dispositif dans lequel le fil inextensible est remplacé par une tige rigide de masse nulle pouvant tourner sans frottement dans un plan vertical autour de son extrémité fixe (liaison parfaite).



Calcul de la vitesse *v* en un point M :

On applique le théorème d'énergie cinétique à la masse m entre les points M et M :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = W_{M\to M_0}(\vec{P}) + \underbrace{W_{M\to M_0}(\vec{T})}_{=0\ car\ \vec{T}\perp\vec{v}} = mgh = mgl(\cos\theta - cos\theta_0)$$

D'où $v = \sqrt{{v_0}^2 + 2mgl(\cos\theta - cos\theta_0)}$

Calcul de la tension $\vec{T}$:

2ème loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$

On projette dans la base de Frenet :

sur $\vec{U}_N$: $ma_N = m\frac{v^2}{l} = T - mg\cos\theta$

$$T = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{l}$$

Remarque : Quand la vitesse augmente la tension du fil augmente, le fil sera donc plus tendu. La tension maximale est atteinte à la position d'équilibre.

$Si\ v_0 = 0$ alors $v_{max} = v(\theta = 0) = \sqrt{2mgl(1 - cos\theta_0)}$

3. Accéléromètre

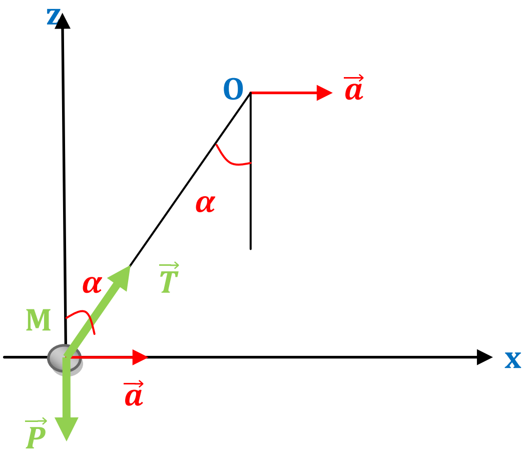
a. Définition

L'accéléromètre est un appareil qui mesure l'accélération.

On va étudier dans cette partie deux types de cet appareil pour mesurer l'accélération d'un mouvement rectiligne uniformément varié.

b. Accéléromètre à pendule

Soit un point O animé d'un mouvement uniformément varié (a=cste).



$2^{ème}$ loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$

On projette dans la base Oxy :

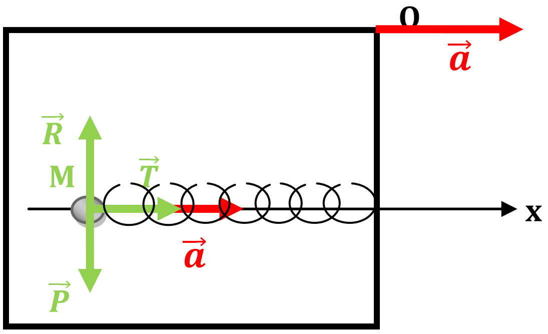
sur Ox : $ma = T\sin\alpha$
sur Oy : $0 = -mg + T\cos\alpha$

D'où $\begin{cases} ma = T\sin\alpha \\ mg = T\cos\alpha \end{cases}$

On en déduit donc l'accélération :

$$\boldsymbol{a = g\sin\alpha}$$

c. Accéléromètre à ressort



Soit un point O animé d'un mouvement uniformément varié (a=cste).

2ème loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R}$

On projette dans la base Ox :

$$ma = T = k\,\Delta l$$

On en déduit donc l'accélération :

$$\boldsymbol{a = \frac{k}{m}\,\Delta l}$$