Chapitre 3 : statique des fluides

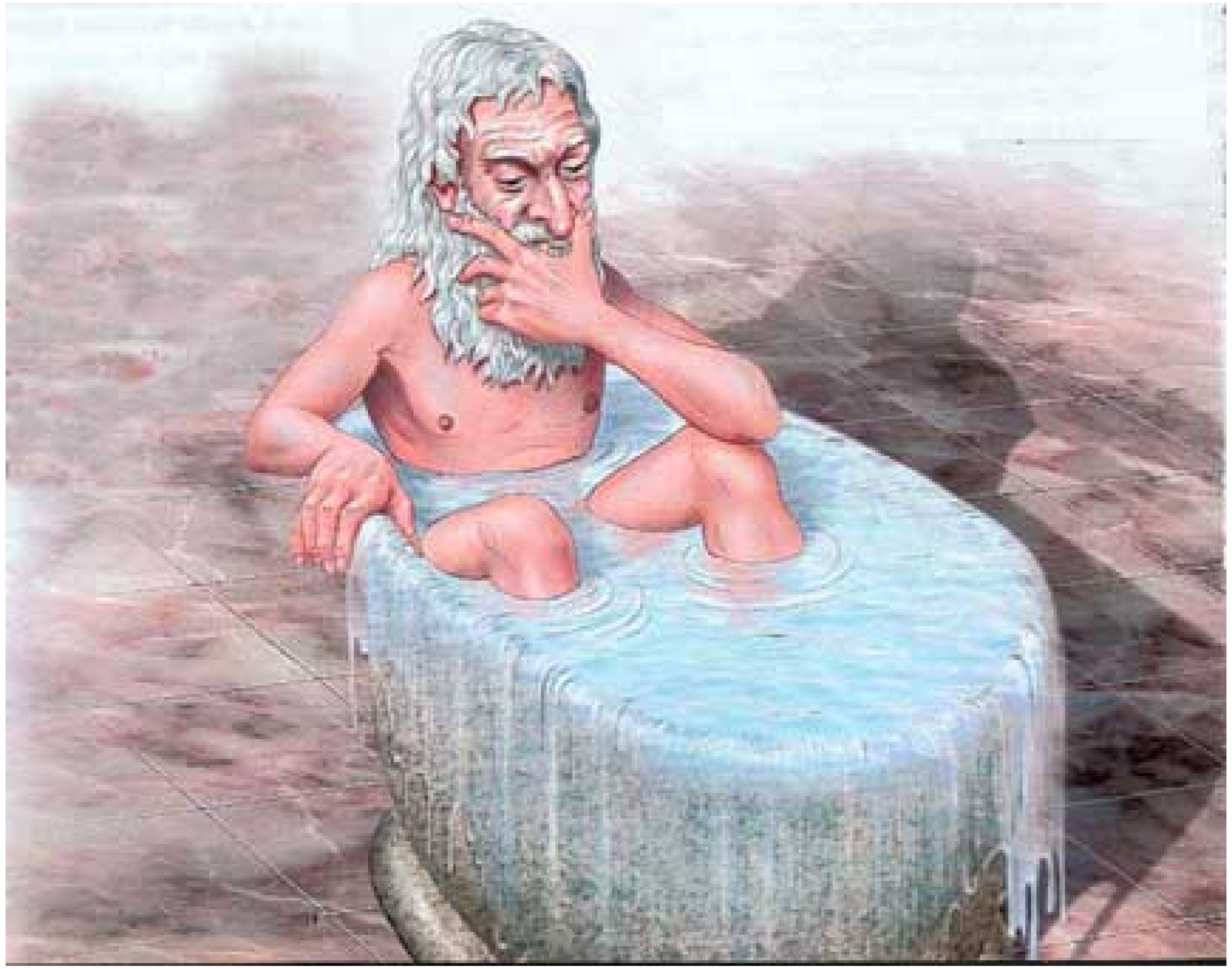
Mécanique des fluides

Christophe Ancey

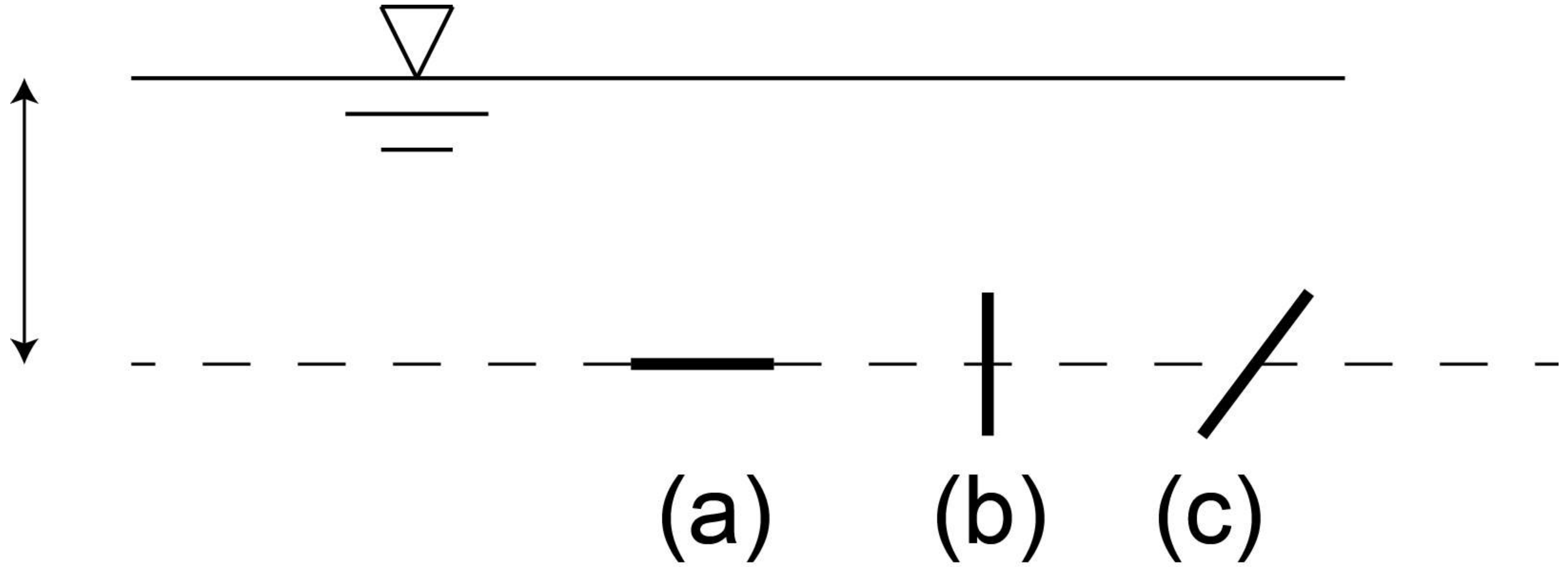
Chapitre 3 : statique des fluides

- Origine physique de la pression
- Loi de Pascal
- Principe d'Archimède
- Calcul de la pression

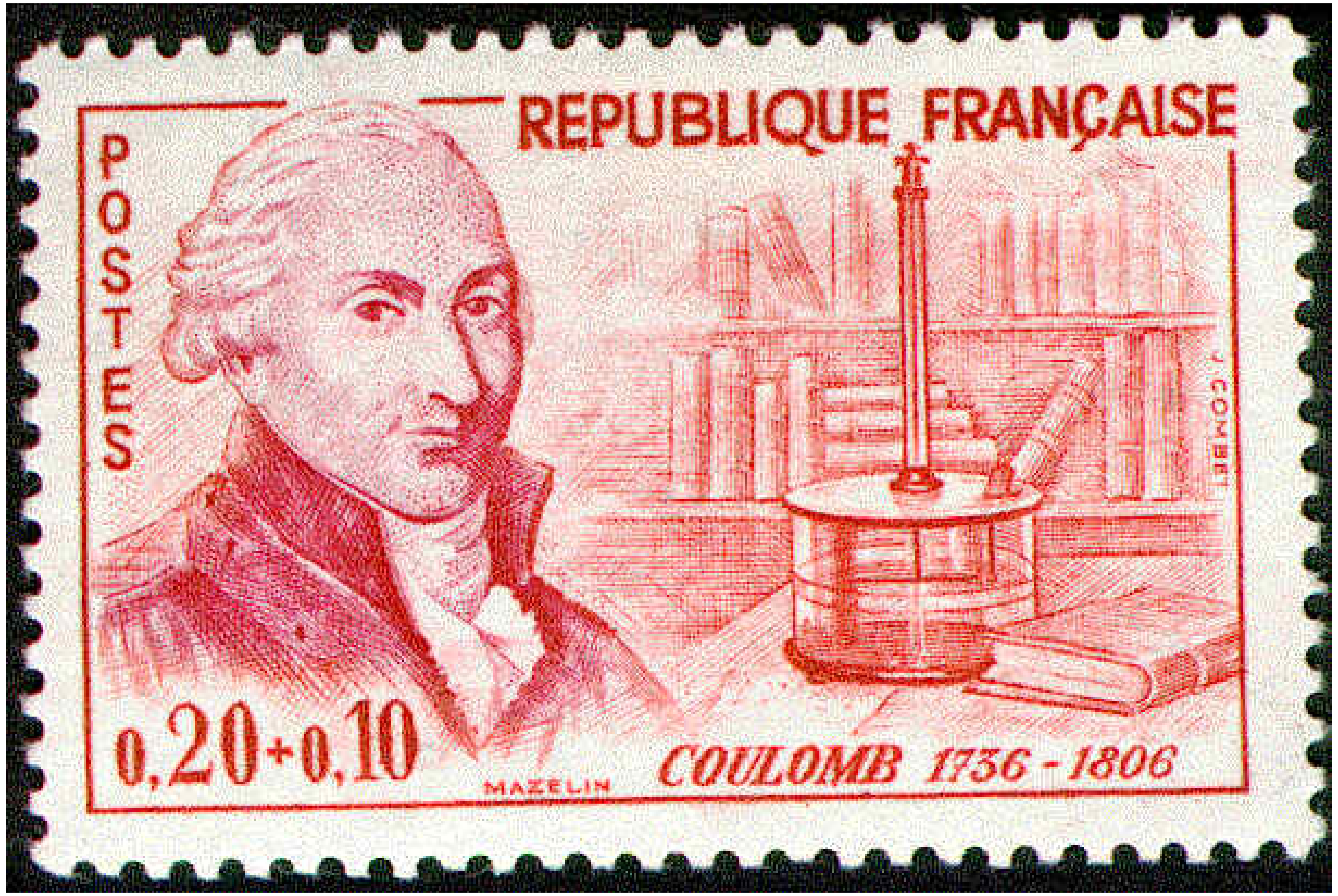
Un petit quiz pour s'échauffer



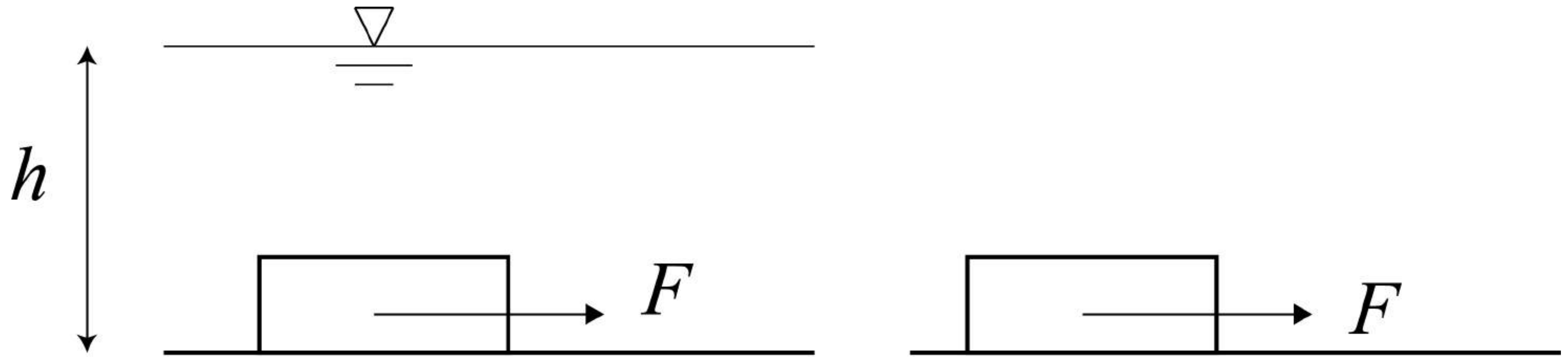
- Trois facettes sont plongées à la même profondeur, mais avec des orientations différentes. Sur quelle facette la pression est maximale ?



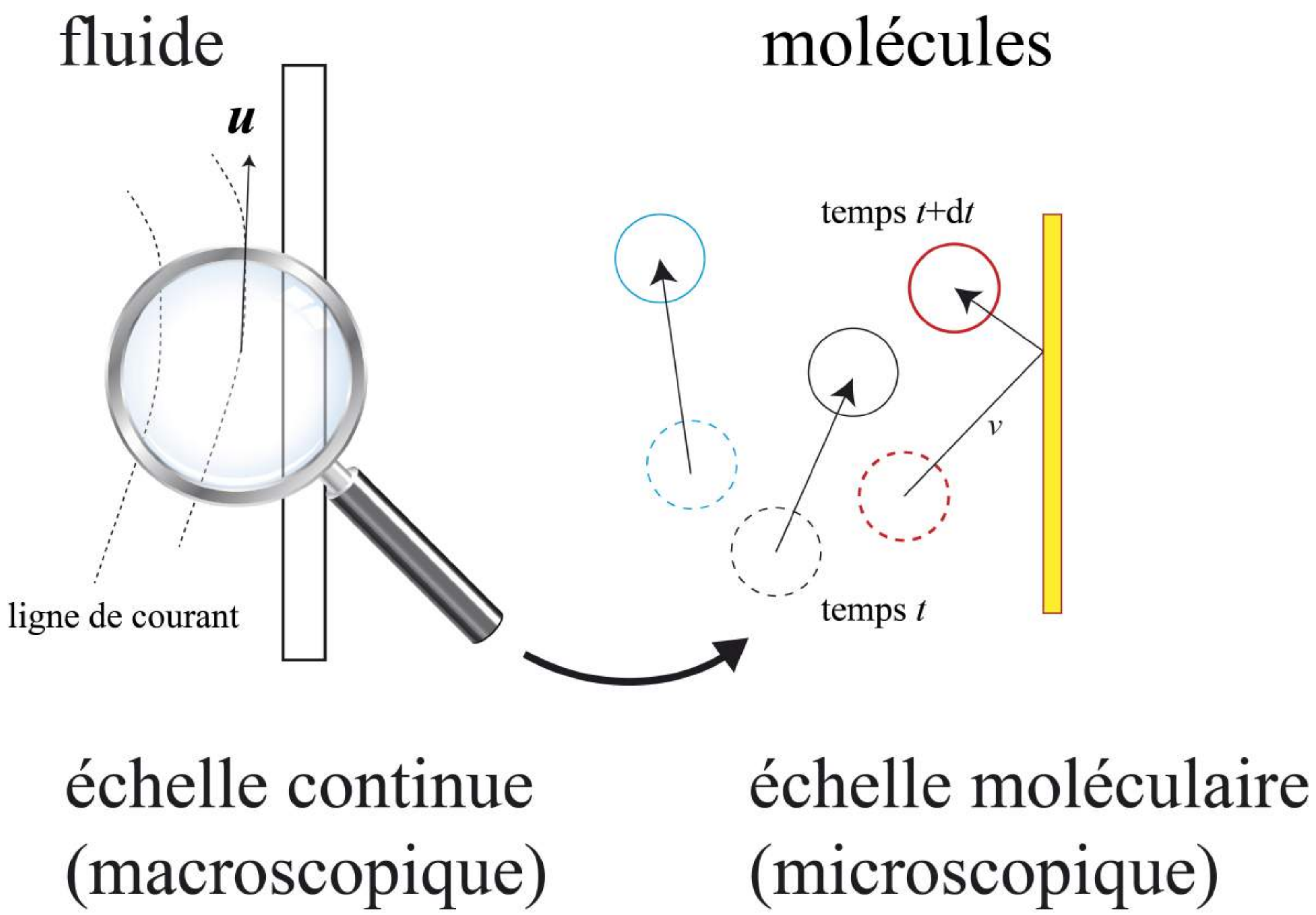
Un petit quiz pour s'échauffer



- On place un corps solide de masse m sur un plan horizontal. On tire le solide à vitesse constante en exerçant une force F. Le solide est soumis à une force de frottement (Coulomb). On réalise tout d'abord l'expérience dans l'air. On réitère ensuite l'expérience dans l'eau. Dans quel milieu (eau ou air) la force de traction est la plus faible ?

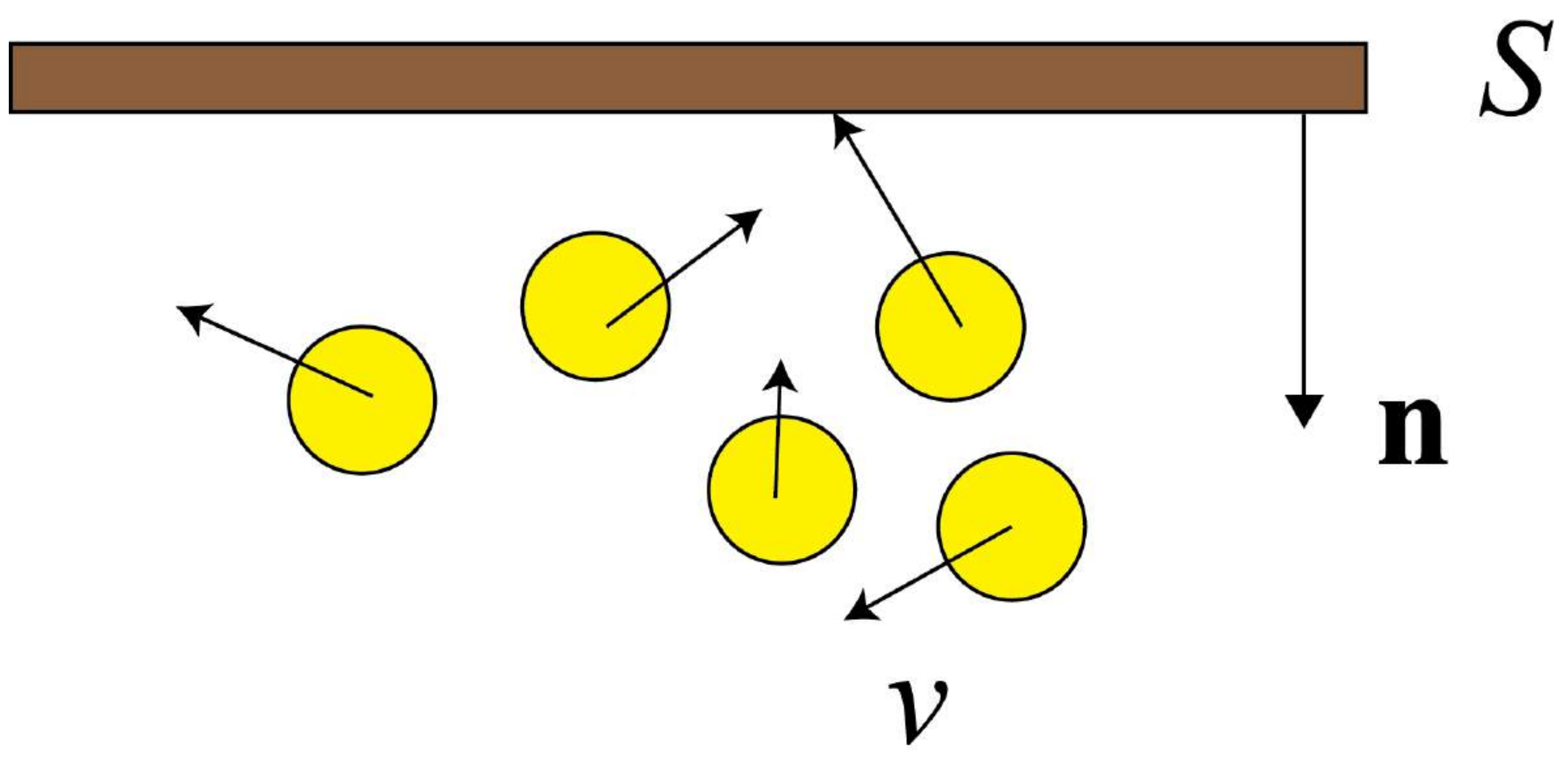


Origine physique de la pression



Pour un gaz dilué, la pression est définie comme un flux de quantité de mouvement à travers une surface : $p = \frac{1}{3} n m v^2$, avec n le nombre de molécules par unité de volume, v la vitesse d'agitation thermique, et m la masse d'une molécule.

Origine physique de la pression



À l'échelle macroscopique, il en résulte une force dite *force de pression* :

$$\mathbf{F} = -p\,S\mathbf{n},$$

avec $\mathbf{n}$ la normale à la surface orientée vers l'intérieur du volume fluide et S la surface de la paroi. L'unité de p est le pascal [Pa], celle de F le newton [N].

Différents sens du mot « pression »

Attention, le mot *pression* a plusieurs sens :

- sens commun en mécanique ou en physique : synonyme de *contrainte* (force par unité de surface) ;
- pour un gaz ou un fluide compressible, p est définie thermodynamiquement à partir de l'énergie interne U $(\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V)$:
$$p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S .$$
- pour un fluide incompressible : la pression est indéfinie et sert à assurer l'incompressibilité du fluide dans les équations du mouvement ;
- en mécanique des milieux continus : la pression désigne une contrainte moyenne isotrope.

Compressibilité

On introduit la compressibilité isotherme d'un fluide et la compressibilité adiabatique (ou isentropique)

$$\beta_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \text{ et } \beta_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial P}\right)_S$$

Pour un gaz parfait $\beta_T = 1/P$ et $\beta_T/\beta_S = \gamma$ ($\gamma = C_p/C_v \sim 1{,}5$ indice adiabatique ou rapport des constantes thermiques).

Relation avec la vitesse du son : on définit la célérité comme

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_S,$$

ce qui fournit également la relation

$$c^2 = \frac{1}{\varrho \beta_S}.$$

Milieu compressible et écoulement isochore

On trouve que :

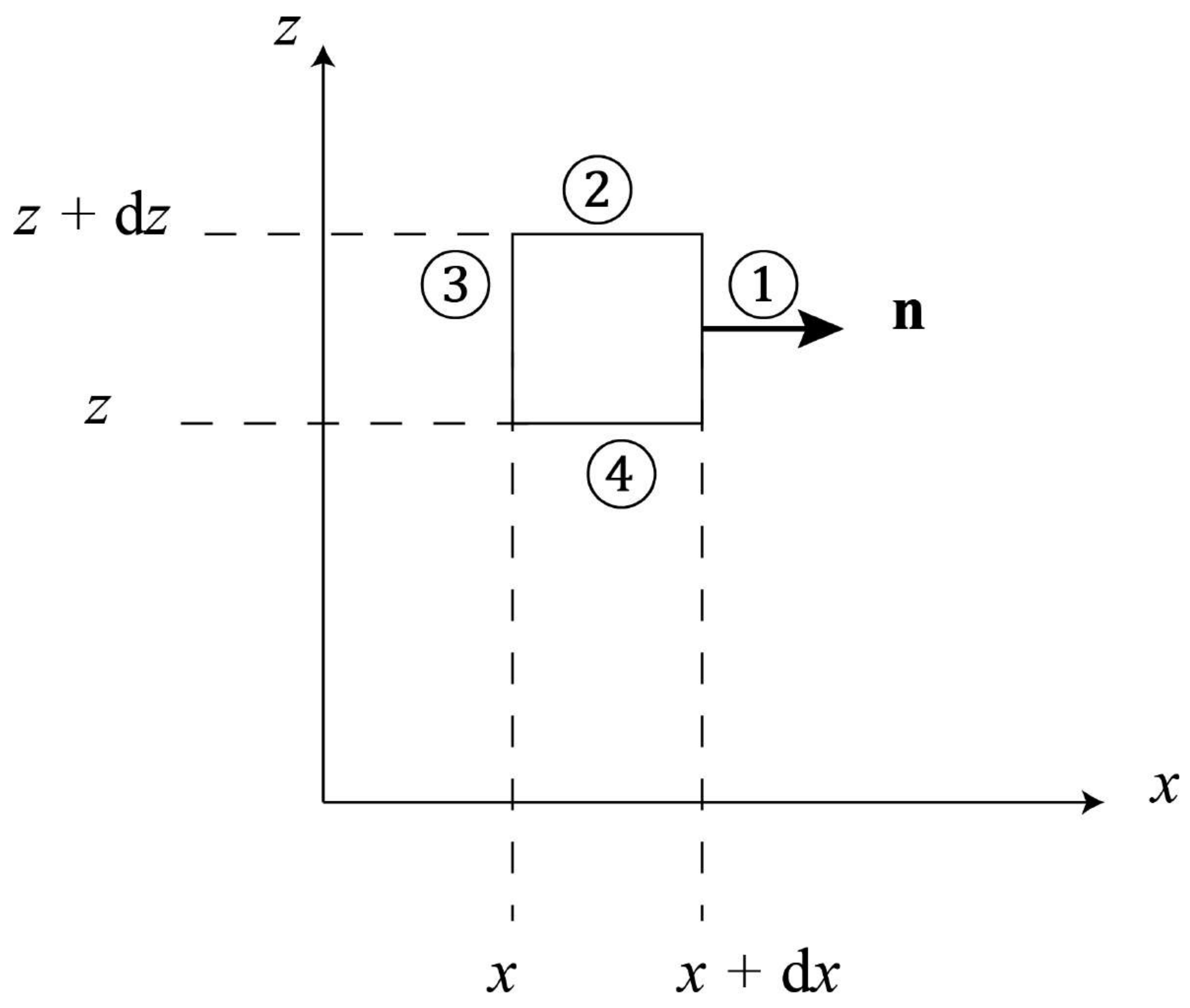
- pour un gaz : le milieu est compressible avec $\beta_S \propto 1/P = 10^{-5}$ Pa^{-1} ;
- pour un liquide : le milieu est très faiblement compressible avec $\beta_S = O(10^{-10})$ Pa^{-1} (p. ex. eau à 20 °C, $\beta_S = 4{,}58 \times 10^{-10}$ Pa^{-1}). En pratique, on suppose qu'il est incompressible.

Nombre de Mach pour un écoulement d'un fluide compressible à la vitesse u :

$$M = \frac{u}{c},$$

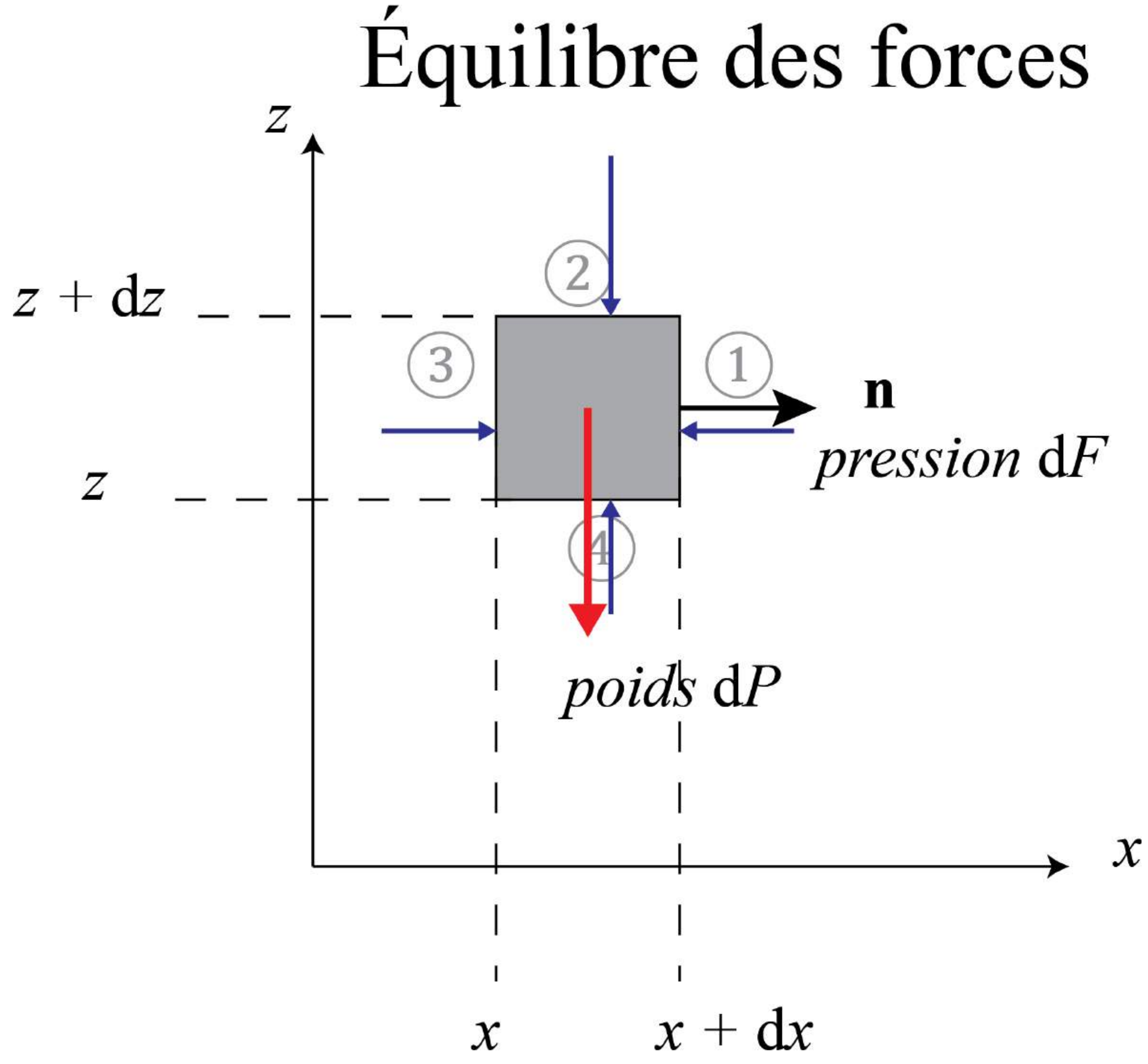
avec c la célérité du son. Pour $M \ll 1$, un écoulement de gaz ne subit pas de variation significative de volume : l'écoulement est dit *isochore*.

Loi de Pascal (1648)

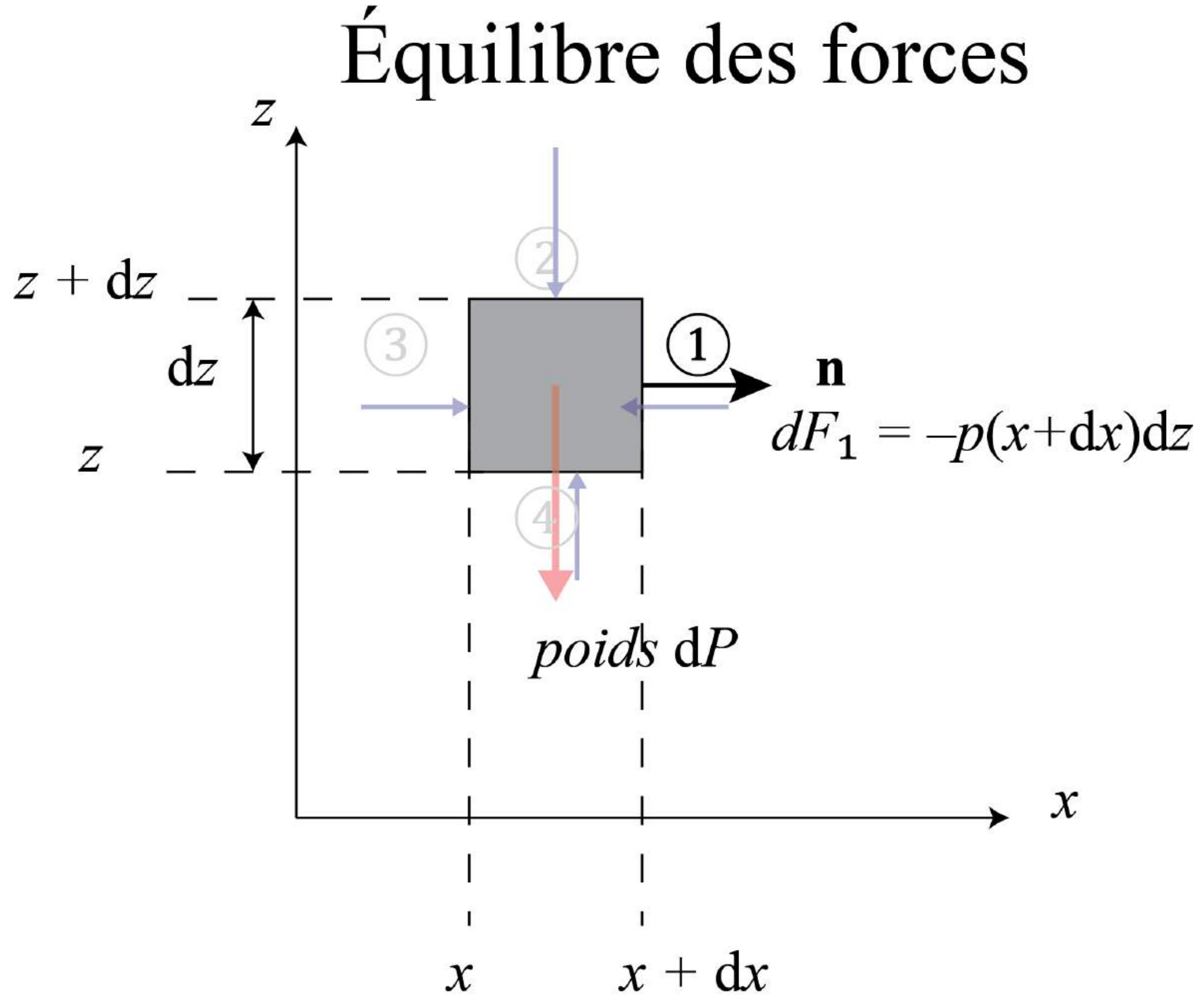


Considérons un fluide au repos et isolons un volume élémentaire.

Loi de Pascal

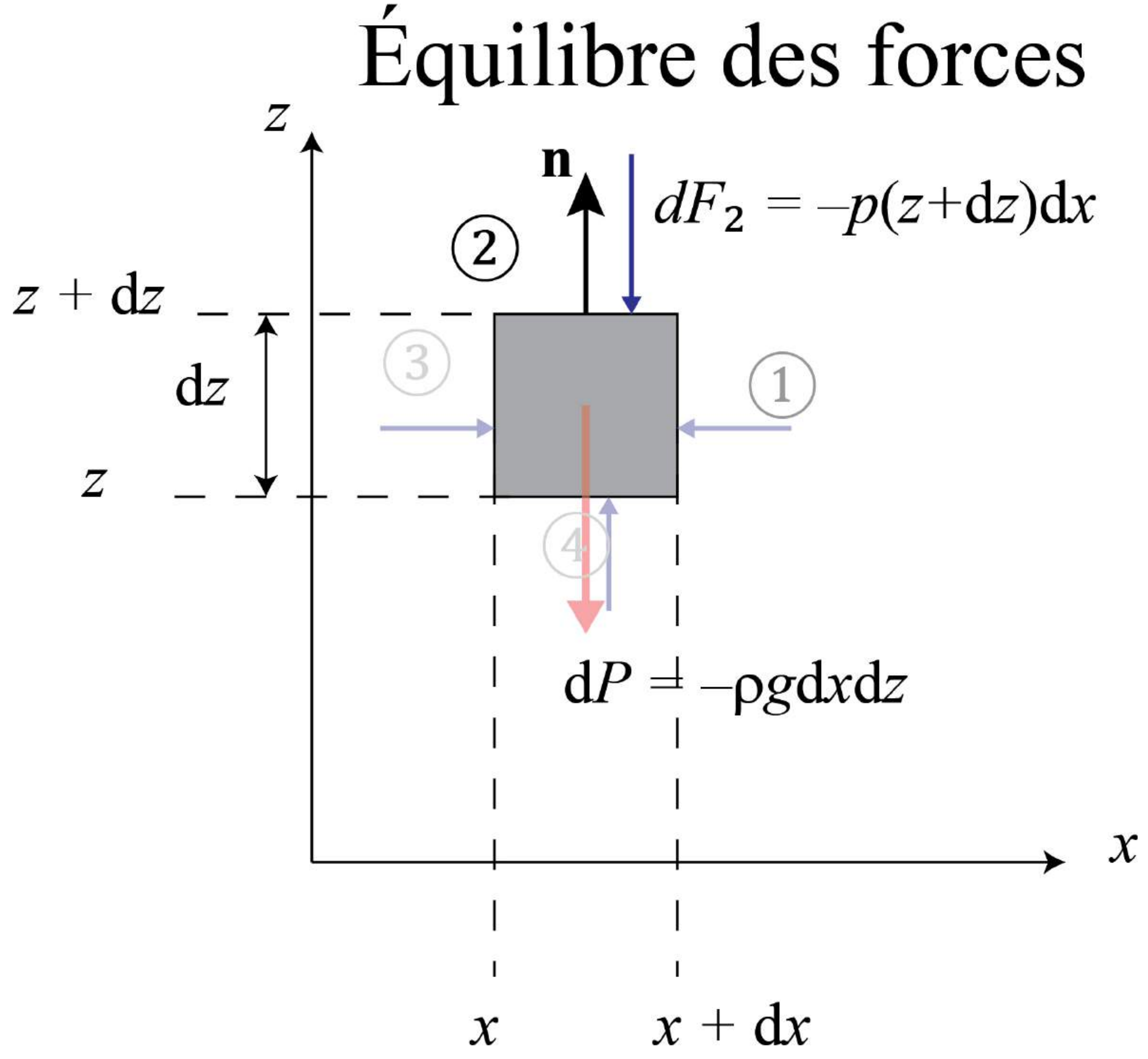


Faisons le bilan des forces.



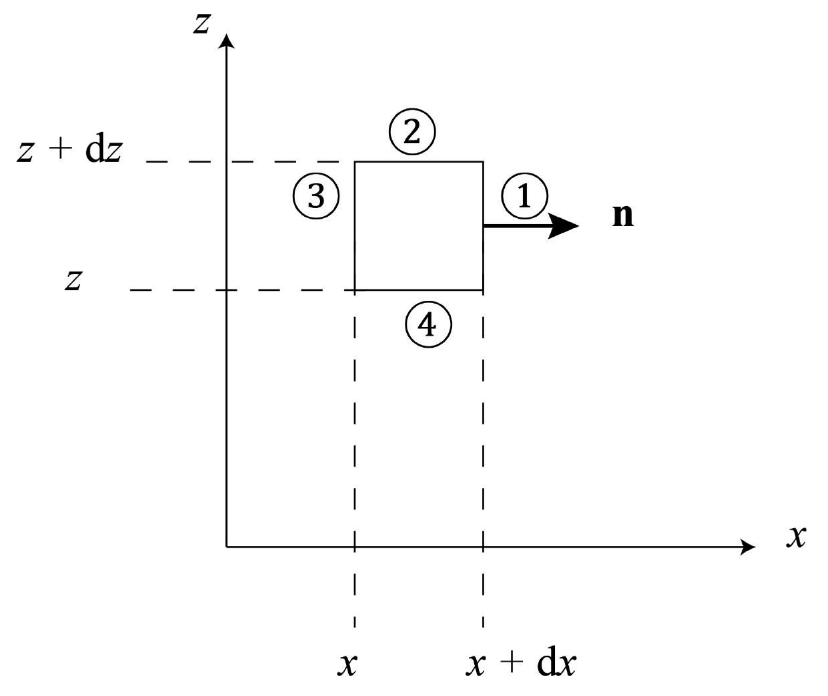
Sur la facette 1, la force de pression vaut $\mathrm{d}F_1 = -p(x + \mathrm{d}x, z)\mathrm{d}z$

Loi de Pascal



Sur la facette 2, la force de pression vaut $\mathrm{d}F_2 = -p(x,z+\mathrm{d}z)\mathrm{d}x$

Loi de Pascal



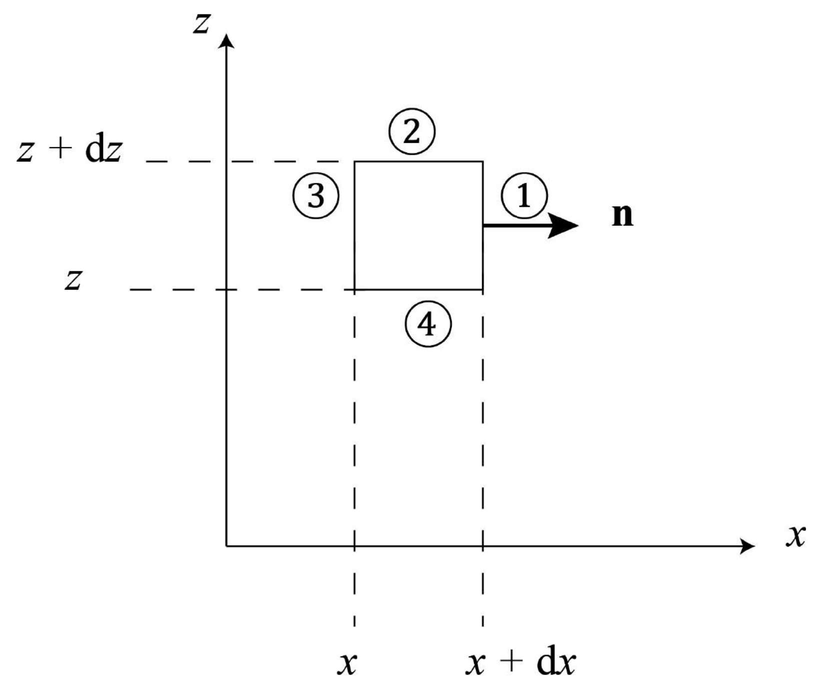
Bilan des forces projetées sur l'axe x

$$\mathrm{d}F_1 + \mathrm{d}F_3 = 0 = p(x,z)\mathrm{d}z - p(x + \mathrm{d}x,z)\mathrm{d}z \Rightarrow p \text{ est indépendant de } x.$$

Bilan des forces projetées sur l'axe z

$$\mathrm{d}F_2 + F_4 + \mathrm{d}P = 0 = -p(x,z + \mathrm{d}z)\mathrm{d}x + p(x,z)\mathrm{d}x - \rho g \mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

Loi de Pascal



En regroupant les termes, on a :

$$\frac{p(x,z+\mathrm{d}z)-p(x,z)}{\mathrm{d}z}=-\rho g,$$

ce qui donne dans la limite $\mathrm{d}z \to 0$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=-\rho g.$$

C'est la *loi de Pascal* ou loi de l'hydrostatique.

Loi de Pascal

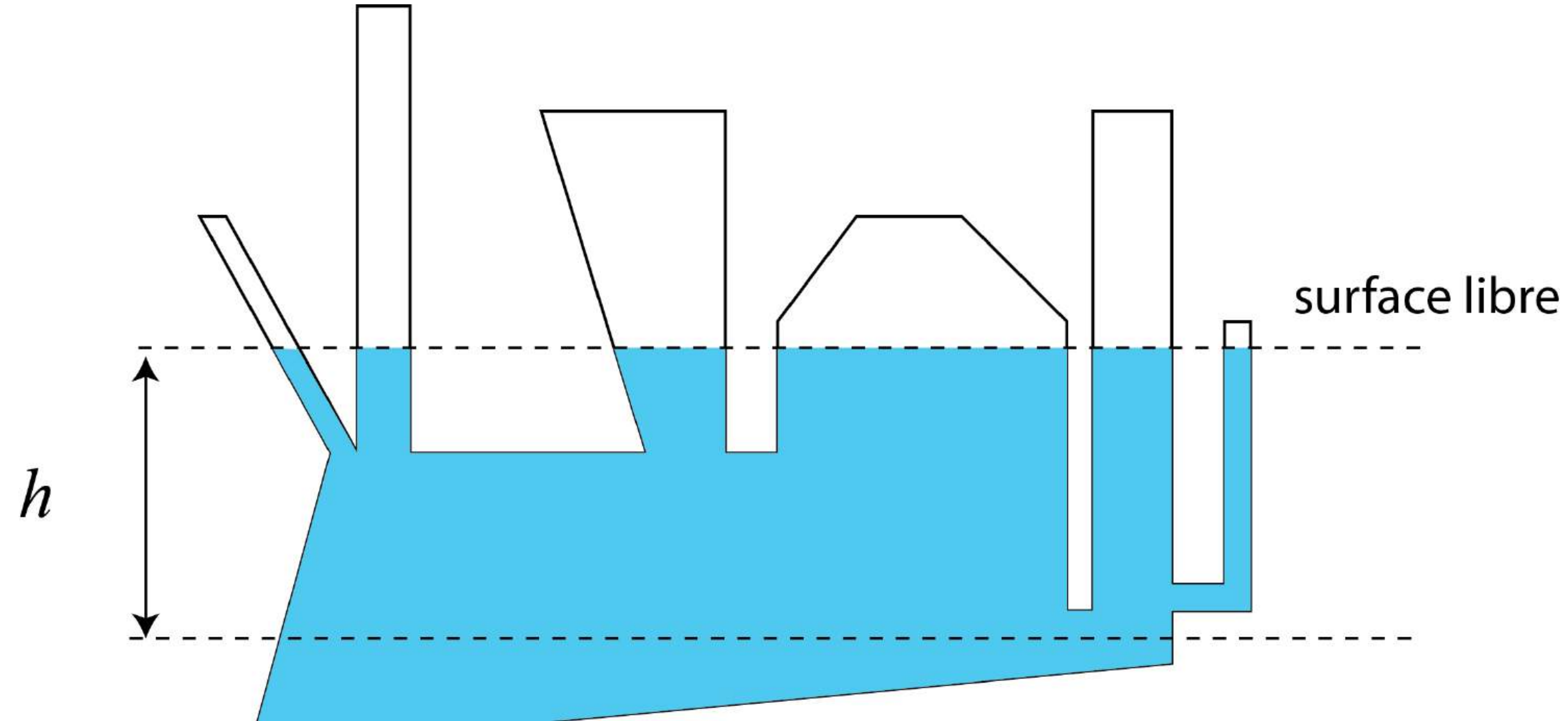
Quelques conséquences :

- La loi se généralise dans des repères quelconques (∇ opérateur gradient)

$$-\nabla p + \rho \mathbf{g} = 0.$$

- Pour des fluides incompressibles (ou des écoulements isochores), on a (Δp : différence de pression)

$$\Delta p = \rho g h.$$



Loi du nivellement barométrique

Pour des fluides compressibles, il faut tenir compte des variations de ρ. Pour un gaz parfait : $p = \rho R'T$ (où $R' = R/M$ avec $R = 8{,}31$ J·K^{-1}·mol^{-1}) la constante des gaz parfaits et $M = 0{,}029$ kg·mol^{-1} la masse molaire de l'air), donc

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g = -\frac{p}{R'T}g.$$

Par intégration et en prenant $p(0) = p_a$, on a :

$$p = p_a \exp\left(-\frac{gz}{R'T}\right).$$

C'est l'équation du *nivellement barométrique*.

Principe d'Archimède

EPFL

Le principe d'Archimède (287–212 avant Jésus-Christ) :

« Tout corps immergé dans un fluide au repos est soumis de la part du fluide à une poussée verticale, opposée à la force de gravité, égale au poids du volume de fluide déplacé et appliquée au centre de masse de ce fluide (centre appelé *centre de carène* pour les bateaux). »

Principe d'Archimède

Ce principe se déduit assez aisément de l'équation de Pascal. Considérons le volume $\mathcal{V}$ occupé par le corps immergé et intégrons l'équation de Pascal

$$-\int_{\mathcal{V}} \nabla p \mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \varrho \mathbf{g} \mathrm{d}\mathcal{V} = 0,$$

d'où l'on déduit par utilisation du théorème de Green-Ostrogradski

$$\underbrace{-\int_{\mathcal{S}} p\mathbf{n}\mathrm{d}\mathcal{S}}_{\text{résultante des forces de pression}} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \varrho \mathbf{g} \mathrm{d}\mathcal{V}}_{\text{poids propre}} = 0.$$

Calcul des forces en pratique

La force de pression exercée sur une paroi de surface S est :

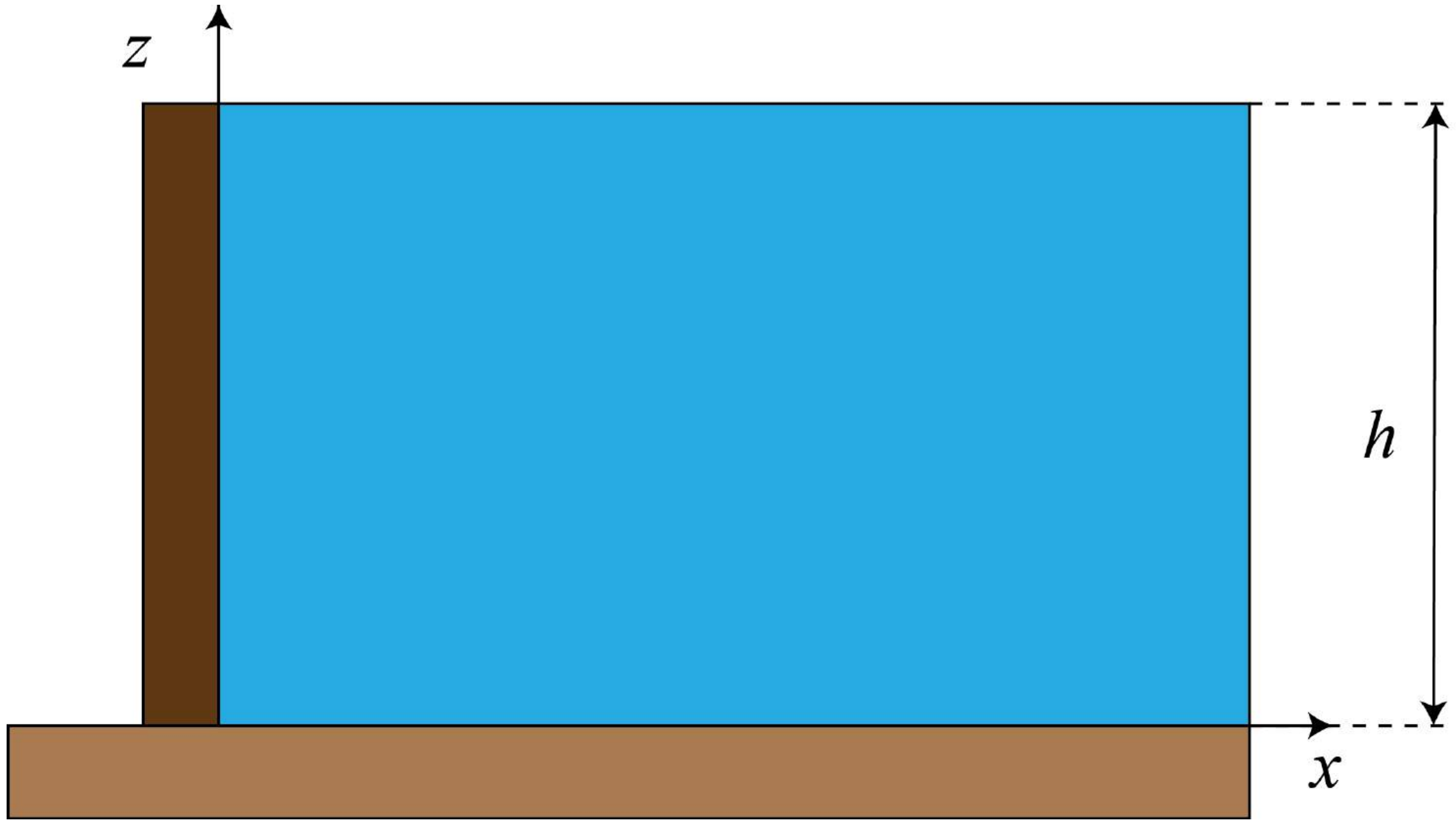
$$\mathbf{F} = \int_S (-p\mathbf{n}) \mathrm{d}S$$

avec $\mathbf{n}$ normale à la surface élémentaire $\mathrm{d}S$, orientée de l'intérieur vers l'extérieur.

Le calcul de la force se fait en plusieurs étapes :

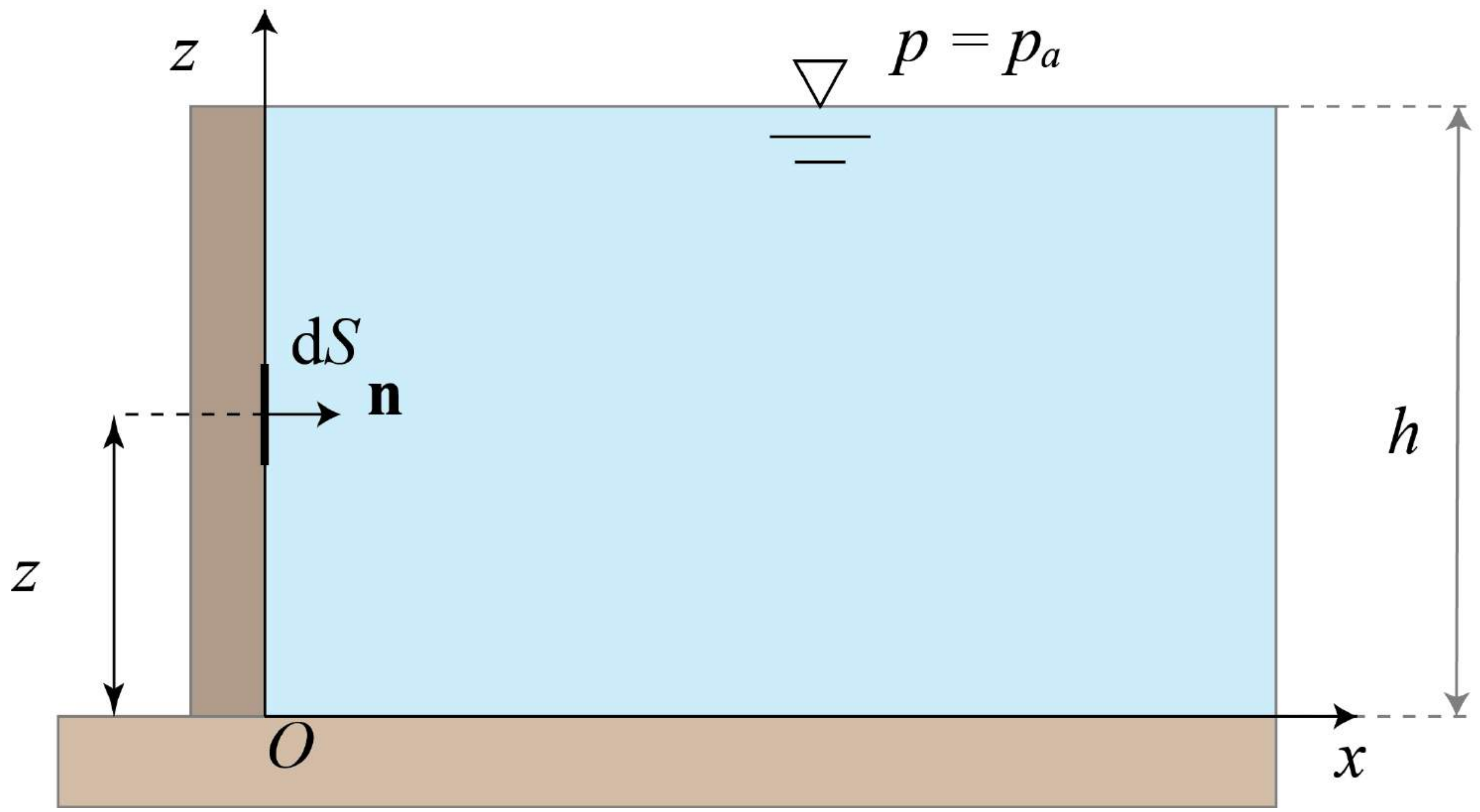
1. calculer la pression ;
2. identifier les surfaces où la pression p est constante ;
3. déterminer la surface infinitésimale $\mathrm{d}S$ compte tenu de la géométrie de la surface S ;
4. calculer les composantes de $\mathbf{n}$;
5. on intègre $\mathbf{F} = \int_S (-p\mathbf{n}) \mathrm{d}S$.

Exemple du barrage



Considérons un barrage rempli d'eau, avec une hauteur h et une largeur ℓ. On veut calculer la force totale de pression qui s'exerce sur le mur du barrage.

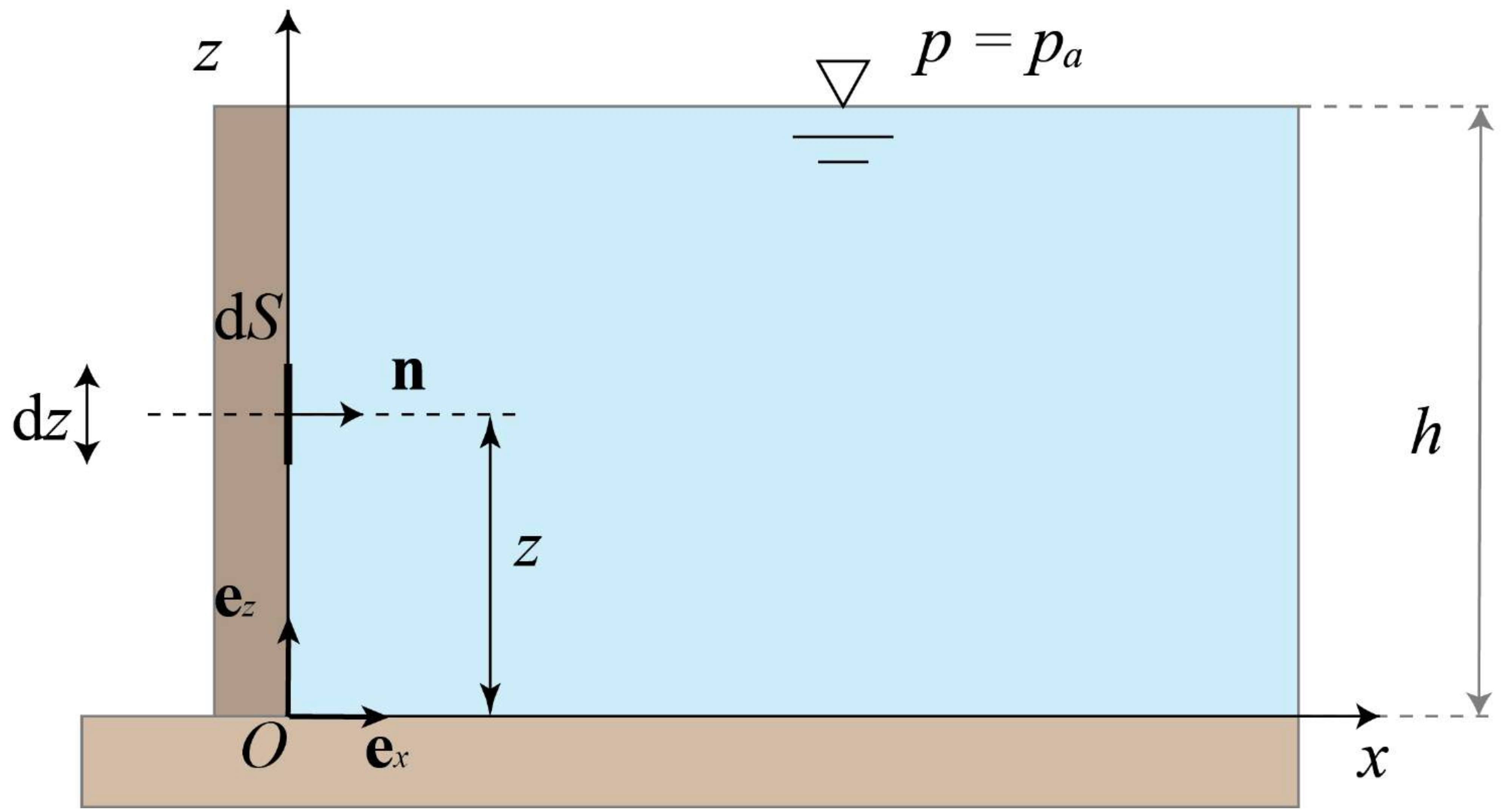
Exemple du barrage



Loi de Pascal : $p'(z) = -\rho g \Rightarrow p(z) = p_a + \rho g(h - z)$.

La distribution est linéaire avec la profondeur : on parle de *distribution hydrostatique*. Pour simplifier on pose $p_a = 0$.

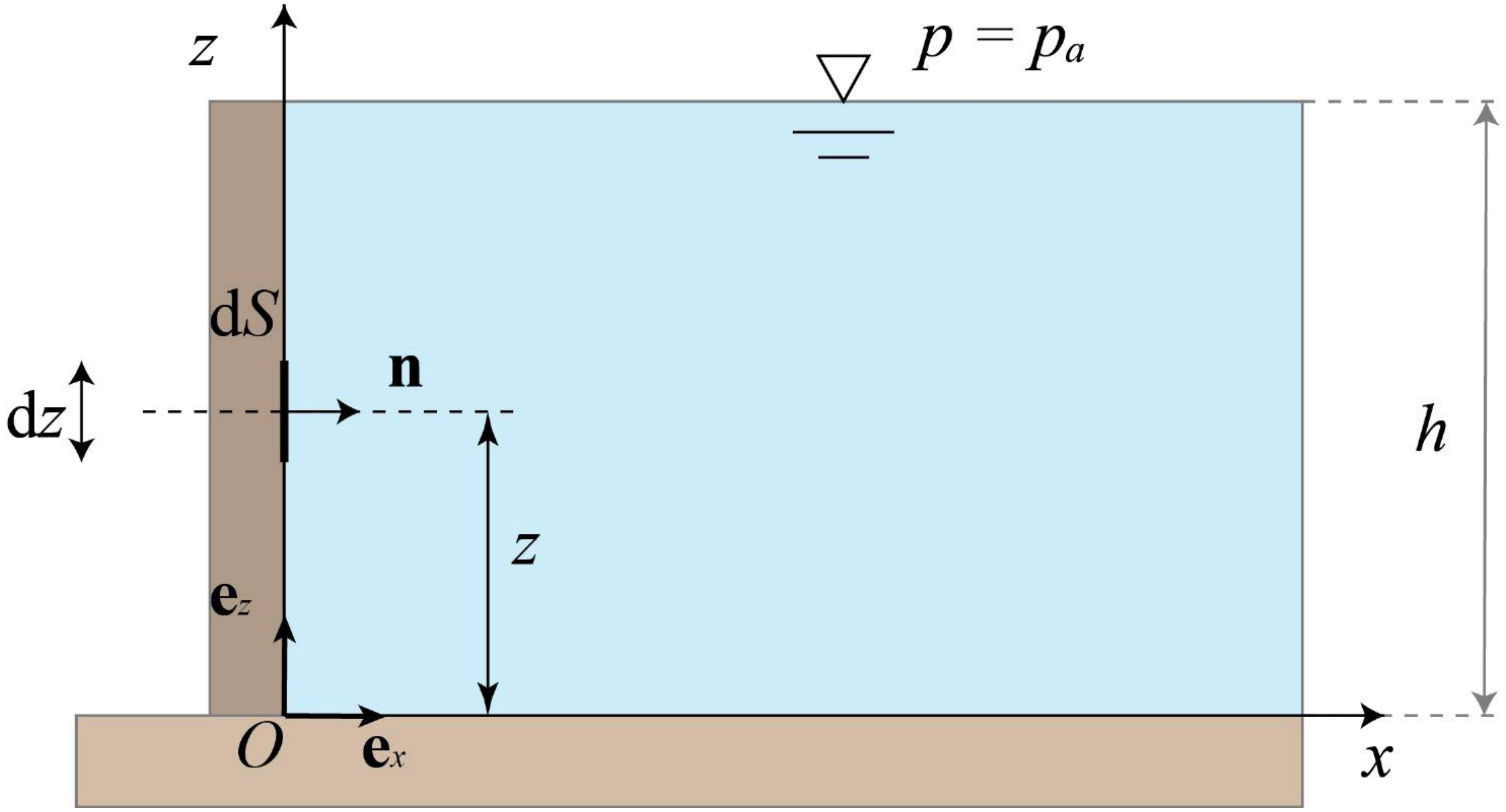
Exemple du barrage



La surface infinitésimale est $\mathrm{d}S = \ell \mathrm{d}z$. La normale à cette surface est $\mathbf{n} = (1{,}0)$. La force de pression est donc :

$$\mathbf{F} = \int_S (-p\mathbf{n})\mathrm{d}S = -\ell\mathbf{n}\int_0^h \rho g(h - z)\mathrm{d}z = -\rho g \ell \frac{h^2}{2}\mathbf{n}$$

Exemple du barrage

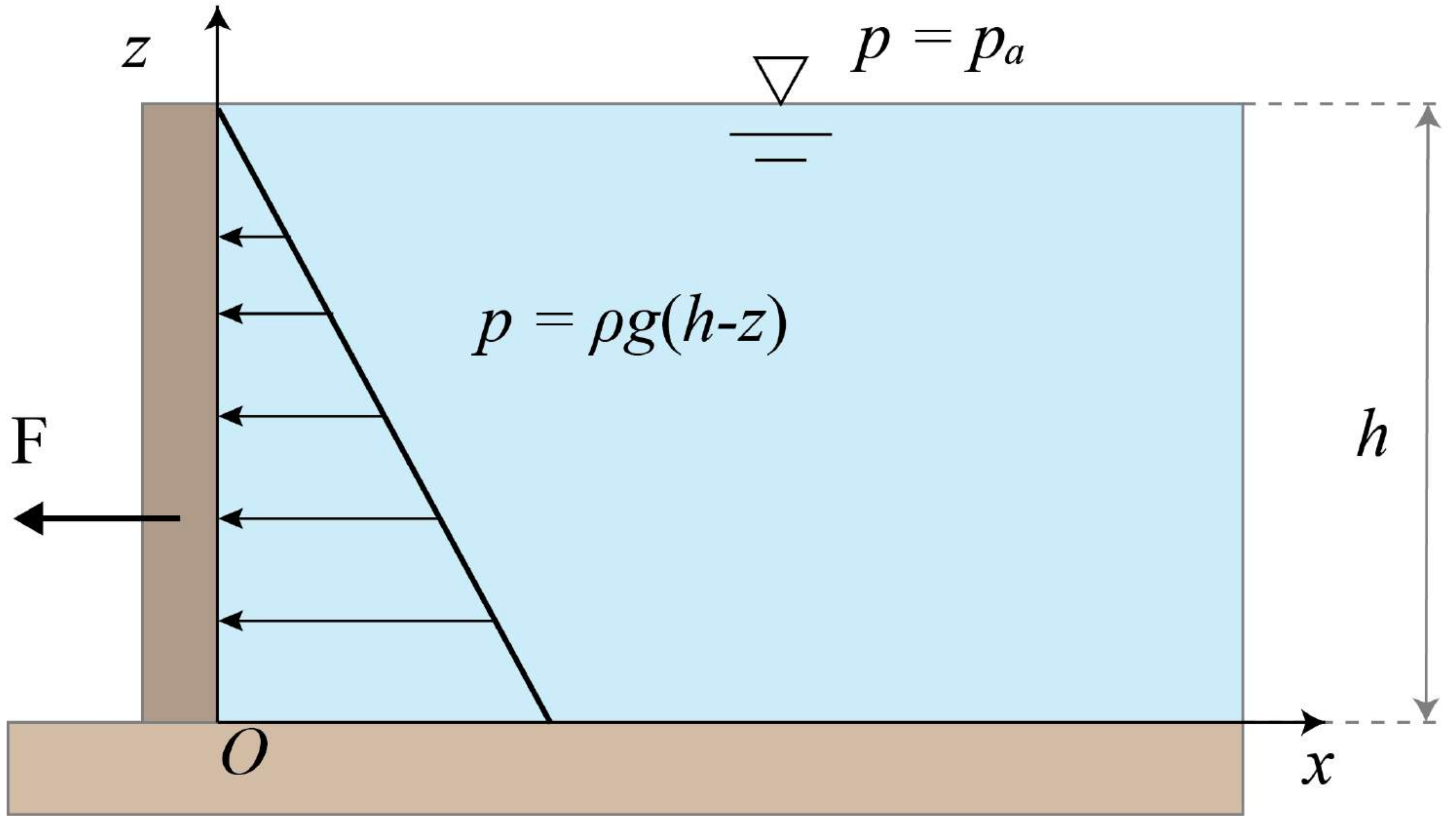


Le moment de force en O est

$$\mathbf{M} = \int_S (-p\mathbf{r} \times \mathbf{n})\mathrm{d}S = -\ell \mathbf{e}_y \int_0^h \rho g z (h - z)\mathrm{d}z = -\rho g \ell \frac{h^3}{6}\mathbf{e}_y$$

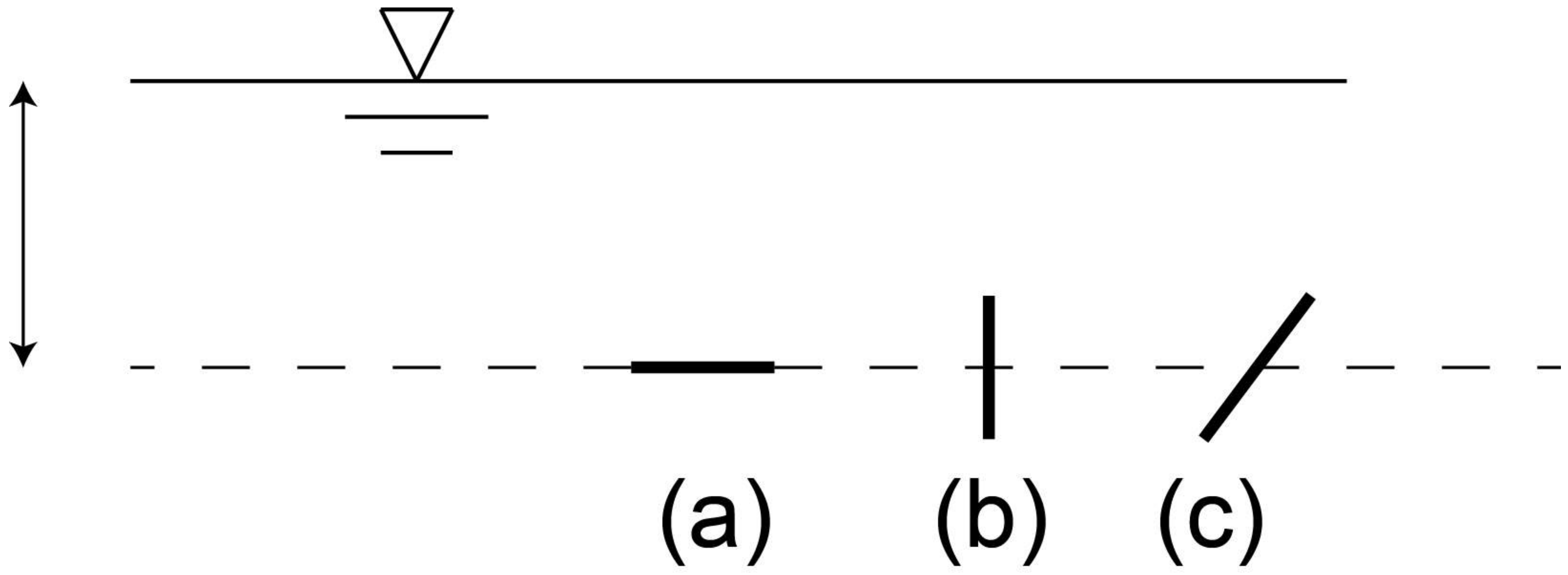
avec $\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z$

Exemple du barrage



Synthèse : distribution linéaire (hydrostatique) de pression. Comme $M = Fh/3$, le point d'application de la force est situé au tiers de la hauteur du barrage (depuis O).

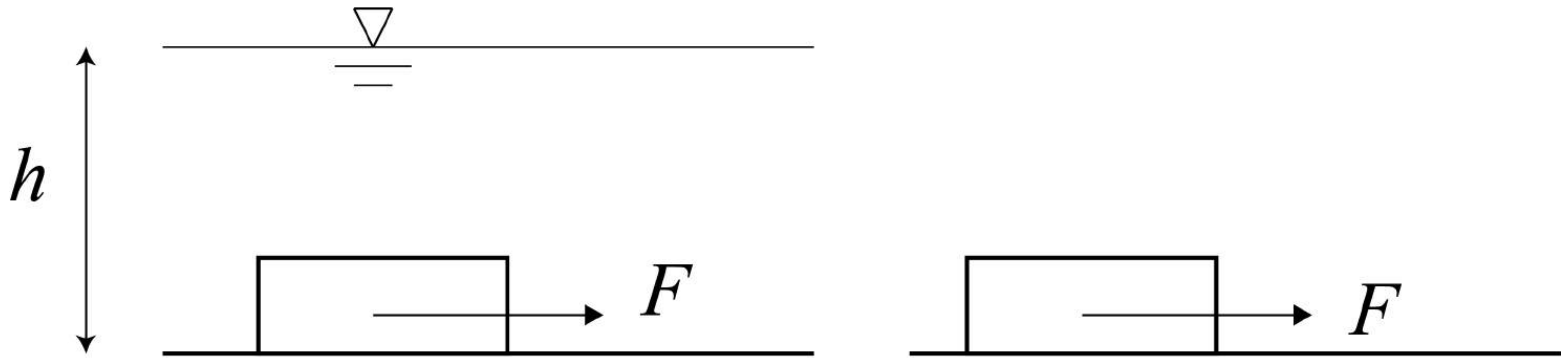
Réponse au quiz



- Trois facettes sont plongées à la même profondeur, mais avec des orientations différentes. Sur quelle facette la pression est maximale ?

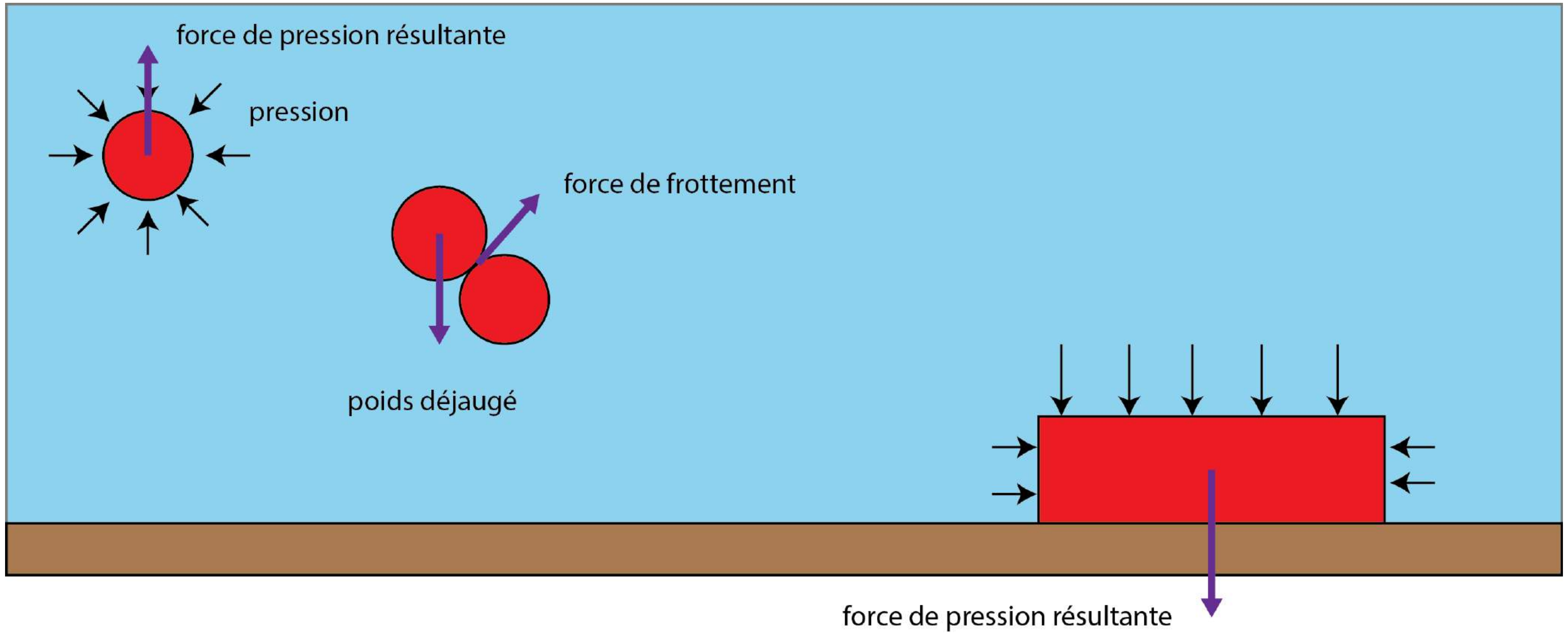
  $\rightsquigarrow$ Si la surface est infinitésimale, la pression est identique sur toutes les facettes car elle ne dépend que de la profondeur d'eau.

Réponse au quiz



- On place un corps solide de masse m sur un plan horizontal. On tire le solide à vitesse constante en exerçant une force F. Le solide est soumis à une force de frottement (Coulomb). On réalise tout d'abord l'expérience dans l'air. On réitère ensuite l'expérience dans l'eau. Dans quel milieu (eau ou air) la force de traction est la plus faible ?

Réponse au quiz



La force de frottement est proportionnelle au « poids déjaugé » (poids propre − force de pression) :

- pour un objet entouré d'eau, la force d'Archimède contrebalance le poids ;
- mais si l'objet est contact avec le fond, ce n'est plus le cas...