Université Mohammed V - Agdal
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique
Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014
Rabat, Maroc

Filière :
SMI - SM
&
SMP - SMC
Module : M_6

NOTES de cours d'Analyse II

Partie A : CALCUL INTEGRAL :

Par

Ali ALAMI-IDRISSI Saïd EL HAJJI et Samir HAKAM

Groupe d'Analyse Numérique et Optimisation

Année 2005-2006

Calcul Intégral

Objectifs :

1) Calculer l'aire d'une région à partir de limite
2) Définir l'intégrale de Riemann.
3) Calcul des sommes de Riemann
4) Connaitre et utiliser quelques méthodes (techniques) d'intégrations
5) Etudier les intégrales impropres
6) Déterminer la convergence de certaines séries.

Plan :

I : Intégrale de (ou au sens) de Riemann
II : Fonction définie par une Intégrale
III : Calcul des intégrales.
IV : Calcul de primitives : Techniques de Base
V : Intégrales Impropres

I - Intégrale de Riemann

1) Calcul d'aires à l'aide de limite

Dans toute la suite, on considère l'intervalle fermé borné $[a, b]$ avec a et b réels et $a < b$.

Définition 1:

On appelle subdivision ou partition de $[a, b]$, une suite strictement croissante de nombres réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tel que $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

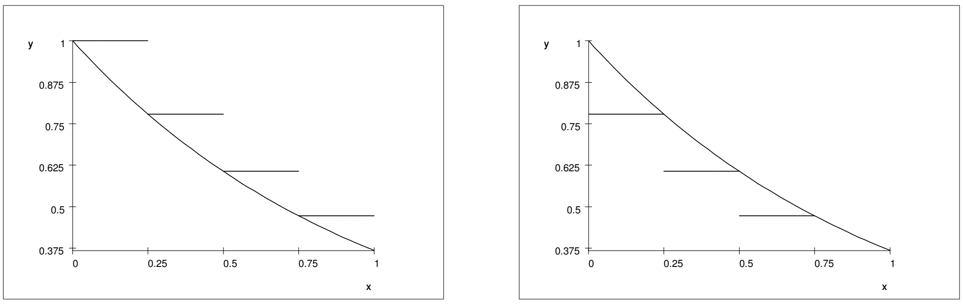
On note $P = (x_i)_{i=0,n}$ ou $P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$.

Chaque sous-intervalle de $[a, b]$, $[x_i, x_{i+1}]$ $i = 0, (n-1)$, est de longueur $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Une partition est dite régulière lorsque $\Delta x_0 = \Delta x_1 = \ldots = \Delta x_n$. On dit aussi que la partition est à pas constant.

Exemple 1:

Soit f une fonction continue, décroissante, positive sur l'intervalle fermé borné $[0, 1]$ et soit C_f sa courbe représentative.



$y = \exp(-x)$, I et S_4 $\quad$ $y = \exp(-x)$, I et s_4

Figure 1

Soit n un entier supérieur à 1 ($n \geq 1$), ($n = 4$ sur la figure).

L'intervalle $[0, 1]$ étant partagé en n intervalles de longueur égale.

On désigne par S_n l'aire des rectangles circonscrits, s_n l'aire des rectangles inscrits et I l'aire limitée par la courbe C_f ($f(x) = \exp(-x)$ sur la figure), l'axe ox et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

Tous les rectangles de la figure ont pour longueur $\frac{1}{n}$ et pour hauteur:

i) Pour les rectangles inscrits:

$f(0),\ f(\frac{1}{n}),\ f(\frac{2}{n}),\ \cdots,\ f(\frac{n-1}{n})$

ii) Pour les rectangles circonscrits :
$f(\frac{1}{n}),\ f(\frac{2}{n}),\ \cdots,\ f(\frac{n-1}{n}),\ f(1)$
D'où les expressions de S_n et s_n :

$$S_n = \frac{1}{n}f(0) + \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n}f(\frac{n-1}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$$

$$s_n = \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}f(\frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$$

Desquelles, on déduit que

$$S_n - s_n = \frac{1}{n}[f(1) - f(0)].$$

Par construction, on a:

$$s_n \le I \le S_n \Rightarrow \begin{cases} 0 \le I - s_n \le S_n - s_n \\ 0 \le S_n - s_n \le S_n - s_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \le I - s_n \le \frac{1}{n}[f(1) - f(0)] \rightarrow 0 n \rightarrow +\infty \\ 0 \le S_n - s_n \le \frac{1}{n}[f(1) - f(0)] \rightarrow 0 n \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Ce qui nous améne à la conclusion

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = I.$$

Exemple 2:

Soient f une fonction bornée sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ et C_f sa courbe représentative.

Considérons l'aire limitée par C_f, l'axe ox et les droites $x = a$ et $x = b$.

Pour calculer approximativement cette aire, on partage l'intervalle $[a, b]$ en n parties égales $(n \ge 1)$ et on a :

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \frac{b-a}{n},\ x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \cdots,\ x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \cdots,\ x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b$$

On désigne par S_n l'aire des rectangles circonscrits, s_n l'aire des rectangles inscrits et I l'aire limitée par la courbe C_f, l'axe ox et les droites $x = a$ et $x = b$.

Tous les rectangles de la figure ont pour longueur $\frac{b-a}{n}$ et pour hauteur:

i) Pour les rectangles inscrits:
$M_1,\ M_2,\ \cdots,\ M_n$ où $M_k = \sup\{f(x)/x_k \le x \le x_{k+1}\}$

ii) Pour les rectangles circonscrits:
$m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n$ où $m_k = \inf\{f(x)/x_k \le x \le x_{k+1}\}$

D'où

$$s_n = \frac{b-a}{n}[m_1 + m_2 + \cdots + m_n] = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k$$

et

$$S_n = \frac{b-a}{n}[M_1 + M_2 + \cdots + M_n] = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} M_k$$

On a:

$$s_n \le I \le S_n$$

2) Intégrale de Riemann

Définition 2:

On dit qu'une fonction f est intégrable sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ si

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

Cette limite est notée: $I = \int_a^b f(x)\ dx$

a et b sont appelées les bornes de l'intégrale définie.

I ne dépend que de f et de l'intervalle fermé borné $[a, b]$.

Définition 3:

On appelle aire algébrique limitée par la courbe C_f, l'axe ox et les doites $x = a$ et $x = b$ l'intégrale définie (ou intégrale) de f sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$.

Remarque 1: Cette intégrale peut être positive (> 0), négative (< 0) ou nulle ($= 0$).

Définition 4:

Soit P une partition quelconque de l'intervalle fermé borné $[a,b]$:

$$P = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

et

$$c_1 \in [x_0,x_1],\ c_2 \in [x_1,x_2],\cdots c_n \in [x_{n-1},x_n]$$

Si l'on considére la somme

$$\Sigma_n = (x_1 - x_0)f(c_1) + (x_2 - x_2)f(c_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(c_n) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(c_k)$$

On dit que f est intégrable au sens de Riemann, si $\lim\limits_{n\to+\infty} \Sigma_n$ existe et est finie.

Cette limite est notée $\int_a^b f(x)\ dx$, elle est indépendante du choix de la subdivision (partition) P et est appelée intégrale de Riemann de f dans l'intervalle fermé borné $[a,b]$.

Σ_n est appelé somme de Riemann de f sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$.

D'où l'intégrale de f est la limite des sommes de Riemann.

Remarques fondamentales :

i) les points $c_i \in [x_{i-1},x_i]$ et ne sont pas donnés explicitement.

ii) Dans la section précédente, s_n et S_n sont également des sommes de Riemann. Dans le cas S_n, par exemple, chaque c_i etait choisi tel que $f(c_i)$ donnait le maximum de la fonction dans le sous intervalle $[x_i,x_{i+1}]$. De plus, les Δx_i étaient égaux

Exemple 3:

Soit f la fonction constante sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$:c'est à dire

$f(x) = C$ pour tout $x \in [a,b]$.

On considère une partition régulière de $[a,b]$ (on a n parties égales de longueur $\frac{b-a}{n}$)

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \frac{b-a}{n},\ x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \cdots,\ x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \cdots,\ x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b$$

On a

$$s_n = S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} C = \frac{b-a}{n} nC = (b-a)C$$

Donc

$$\int_a^b C\ dx = (b-a)C$$

Définition 5:

i) Une fonction $f : [a,b] \to IR$ est dite une fonction en escalier s'il existe une subdivision $P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ de $[a,b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]x_i,x_{i+1}[$.

ii) Une fonction $f : [a,b] \to IR$ est dite une fonction continue par morceaux s'il existe une subdivision $P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ de $[a,b]$ telle que f soit continue sur chaque intervalle $]x_i,x_{i+1}[$ et admette une limite à gauche et à droite en tout point x_i.

Exemple 4:

Soit $f : [0,1] \longrightarrow$ la fonction définie par:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in]0,.5[\\ 2 \text{ si } x \in].5,1[\end{array} \right\}$$

On a f est une fonction en escalier.

Par définition de l'intégrale de Riemann, on a :

$$\int_a^b f(x)\ dx = 1(.5) + 2(.5) = 1.5.$$

Théorème 1:(à admettre)

1) Soit $P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ une partition de $[a,b]$, Si f est une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $f(x) = A_i\ \forall x \in\ ]x_i, x_{i+1}[$ alors

$$\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{i=0}^{n-1} A_i(x_{i+1} - x_i)$$

2) Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ est intégrable sur cet intervalle.

$$\left.\begin{array}{l} f : [a,b] \rightarrow \\ f[a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow f[a,b]$$

c'est à dire $\int_a^b f(x)dx$ existe, est finie et de plus , si on note par $P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ une partition de $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(c_i)$ où $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Remarque 2:

i) La démonstration se fait pour les fonctions en escaliers puis pour les fonctions continues par morceaux et par passage à la limite pour le cas général.

ii) Une fonction bornée sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$ qui n'admet qu'un ensemble fini ou dénombrable de points de discontinuités est intégrable sur $[a,b]$.

Exemple 5:

1) Soit $f : [0,1] \rightarrow$ la fonction définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$

En considérant le partage de $[a,b]$ en n parties égales de longueur $\frac{b-a}{n}$

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \frac{b-a}{n},\ x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \cdots,\ x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \cdots,\ x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b$$

on a :

$$\begin{aligned}
S_n &= (x_1 - x_0)f(x_1) + (x_2 - x_2)f(x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_n) \\
&= \frac{b-a}{n}\left(a + \frac{b-a}{n} + a + 2\frac{b-a}{n}, \cdots + a + (n-1)\frac{b-a}{n} + a + n\frac{b-a}{n}\right) \\
&= \frac{b-a}{n}\left[na + \frac{b-a}{n}(1 + 2 + \cdots + (n-1) + n)\right] \\
&= (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \\
&= (ba - a^2) + \frac{(b-a)^2}{2}\frac{n(n+1)}{n^2} \rightarrow ba - a^2 + \frac{b^2}{2} - ba + \frac{a^2}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_n &= (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_2)f(x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1}) \\
&= \frac{b-a}{n}\left(a + a + \frac{b-a}{n}, \cdots + a + (n-2)\frac{b-a}{n} + a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right) \\
&= \frac{b-a}{n}\left[na + \frac{b-a}{n}(1 + 2 + \cdots + (n-1))\right] \\
&= (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} \\
&= (ba - a^2) + \frac{(b-a)^2}{2}\frac{n(n-1)}{n^2} \rightarrow ba - a^2 + \frac{b^2}{2} - ba + \frac{a^2}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}
\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Donc

$$\int_a^b x \ dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

2) Soit $f : [0,1] \rightarrow$ la fonction définie par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in [0,1]$

En considérant le partage de $[a,b]$ en n parties égales de longueur $\frac{b-a}{n}$

$$x_0 = a, \ x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \ x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \cdots, \ x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \cdots, \ x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b$$

on a :

$$\int_0^1 x^2 \ dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\frac{k}{n})^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

Remarque 3:

Dans nos différents exemples, nous nous sommes limités à calculer les intégrales de fonctions polynomiales. Cependant lorsque il s'agit d'évaluer des intégrales de fonctions telles que $\sqrt{x}$, $\sin(x)$, e^x, etc..., la méthode décrite plus haut est impraticable. Avant de décrire quelques méthodes de base pour évaluer une intégrale définie, nous allons énoncer les propriétés de cette dernière.

3) Propriétés de l'intégrale

Théorème 2:

Lorsque l'intervalle d'intégration $[a,b]$ est fixé, l'intégrale de Riemann est une forme linéaire c'est à dire pour f et g intégrable sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$ et pour tout $\lambda \in$ on a:

$$\int_a^b (f+g)(x) \ dx = \int_a^b f(x) \ dx + \int_a^b g(x) \ dx$$

$$\int_a^b (\lambda f)(x) \ dx = \lambda \int_a^b f(x) \ dx$$

Preuve:

Soient $P = \{x_0, \ x_1, \ \cdots, \ x_n\}$ une partition régulière de $[a,b]$ ($x_k = a + k\frac{b-a}{n}$).

i) Notons,

$$m_k(f) = \inf\{f(x)/x \in [x_k, x_{k+1}]\} \quad , \quad M_k(f) = \sup\{f(x)/x \in [x_k, x_{k+1}]\}$$

$$m_k(g) = \inf\{g(x)/x \in [x_k, x_{k+1}]\} \quad , \quad M_k(g) = \sup\{g(x)/x \in [x_k, x_{k+1}]\}$$

$$m_k(f+g) = \inf\{(f+g)(x)/x \in [x_k, x_{k+1}]\} \quad , \quad M_k(f+g) = \sup\{(f+g)(x)/x \in [x_k, x_{k+1}]\}$$

$$s_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} m_k(f), S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} M_k(f)$$

$$s_n(g) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} m_k(g), S_n(g) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} M_k(g)$$

$$s_n(f+g) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} m_k(f+g), S_n(f+g) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} M_k(f+g).$$

On a

$$m_k(f) + m_k(g) \leq m_k(f+g)$$

car pour tout $x \in [x_k, x_{k+1}]$

$$\left.\begin{aligned} m_k(f) &= \inf\{f(x)/x \in [x_k, x_{k+1}]\} \ \leq f(x) \\ m_k(g) &= \inf\{g(x)/x \in [x_k, x_{k+1}]\} \ \leq g(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow m_k(f) + m_k(g) \leq f(x) + g(x)$$

donc $m_k(f) + m_k(g)$ est un minorant de l'ensemble $\{(f+g)(x)/x \in [x_k, x_{k+1}]\}$ et $m_k(f+g)$ est le plus grand des minorants de l'ensemble $\{(f+g)(x)/x \in [x_k, x_{k+1}]\}$. d'où

$$m_k(f) + m_k(g) \leq m_k(f+g).$$

De même on a

$$M_k(f) + M_k(g) \geq M_k(f+g)$$

car pour tout $x \in [x_k, x_{k+1}]$

$$\left.\begin{array}{l} M_k(f) = \inf\{f(x)/x \in [x_k,x_{k+1}]\} \quad \geq f(x) \\ M_k(g) = \inf\{g(x)/x \in [x_k,x_{k+1}]\} \quad \geq g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow M_k(f) + M_k(g) \geq f(x) + g(x)$$

donc $M_k(f) + M_k(g)$ est un majorant de l'ensemble $\{(f+g)(x)/x \in [x_k,x_{k+1}]\}$ et $M_k(f+g)$ est le plus petit des majorants de l'ensemble $\{(f+g)(x)/x \in [x_k,x_{k+1}]\}$. d'où

$$M_k(f) + M_k(g) \geq M_k(f+g).$$

D'où

$$m_k(f) + m_k(g) \leq m_k(f+g) \leq M_k(f+g) \leq M_k(f) + M_k(g)$$

et

$$s_n(f) + s_n(g) \leq s_n(f+g) \leq S_n(f+g) \leq S_n(f) + S_n(g)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(s_n(f) + s_n(g)) \leq \lim_{n\to+\infty} s_n(f+g) \leq \lim_{n\to+\infty} S_n(f+g) \leq \lim_{n\to+\infty}(S_n(f) + S_n(g))$$

f et g intégrable implique

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to+\infty} s_n(f) = \lim_{n\to+\infty} S_n(f) \\ \lim_{n\to+\infty} s_n(g) = \lim_{n\to+\infty} S_n(g) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n(f+g) = \lim_{n\to+\infty} S_n(f+g)$$

d'où $f+g$ est intégrable et on a

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx \leq \int_a^b (f+g)(x)\ dx \leq \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$$

d'où

$$\int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx = \int_a^b (f+g)(x)\ dx$$

ii)

$$s_n(\lambda f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} m_k(\lambda f)$$

$$S_n(\lambda f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} M_k(\lambda f)$$

$$m_k(\lambda f) = \inf\{(\lambda f)(x)\ ,\ x \in [x_k, x_{k+1}]$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} \lambda m_k(f) & si \quad \lambda \geq 0 \\ \lambda M_k(f) & si \quad \lambda \leq 0 \end{array}\right.$$

$$M_k(\lambda f) = \sup\{(\lambda f)(x)\ ,\ x \in [x_k, x_{k+1}]$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} \lambda M_k(f) & si \quad \lambda \geq 0 \\ \lambda m_k(f) & si \quad \lambda \leq 0 \end{array}\right.$$

d'où si $\lambda \geq 0$ on a

$$s_n(\lambda f) = \lambda s_n(f)$$

$$S_n(\lambda f) = \lambda S_n(f)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} s_n(\lambda f) = \lambda \lim_{n\to+\infty} s_n(f) \\ &= \lim_{n\to+\infty} S_n(\lambda f) = \lambda \lim_{n\to+\infty} S_n(f) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_a^b (\lambda f)(x)\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx$$

de même si $\lambda \leq 0$ on a

$$s_n(\lambda f) = \lambda S_n(f)$$
$$S_n(\lambda f) = \lambda s_n(f)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} s_n(\lambda f) = \lambda \lim_{n\to+\infty} S_n(f) \\ &= \lim_{n\to+\infty} S_n(\lambda f) = \lambda \lim_{n\to+\infty} s_n(f) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_a^b (\lambda f)(x)\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx$$

d'où

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx\ ,\ \forall\ \lambda \in$$

Propriété 1: Pour toute fonction f intégrable dans $[a,b]$, on a:

i)

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0\ , \forall a \in IR$$

ii) Relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx\ , \forall c \in]a,b[$$

iii)

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$$

Preuve:

i) sur l'intervalle $[a,a] = \{a\}$ f est une constante et est égale à $f(a)$.

$$\int_a^a f(a)\ dx = (a-a)f(a) = 0.\ \ (\int_a^b C\ dx = (b-a)C$$

ii) Soient un partage de $[a,c]$ en n intervalles par les points $(x_i)_i$: $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = c$ et un partage de $[c,b]$ en n intervalles par les points $(y_i)_i$: $y_0 = c < y_1 < \cdots < y_n = b$.
Et soient $\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_n$ telle que $\alpha_k \in [x_k,x_{k+1}]$ et $\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\beta_n$ telle que $\beta_k \in [y_k,y_{k+1}]$.
Notons $\Sigma_n^{a,c} = (x_1-x_0)f(\alpha_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(\alpha_n) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})f(\alpha_k)$
et $\Sigma_n^{b,c} = (y_1-y_0)f(\beta_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1})f(\beta_n) = \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1})f(\beta_k)$.
D'autre part soit le partage de $[a,b]$ en $(2n+1)$ intervalles par les points $(x_i)_i$ et $(y_i)_i$:

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b.$$

Et notons

$$\begin{aligned} \Sigma_n^{a,b} &= (x_1-x_0)f(\alpha_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(\alpha_n) \\ &= +(y_1-y_0)f(\beta_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1})f(\beta_n) \\ &= \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1})f(\beta_k) + \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})f(\alpha_k) \\ &= \Sigma_n^{a,c} + \Sigma_n^{c,b} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}[\Sigma_n^{a,c} + \Sigma_n^{c,b}] = \lim_{n\to+\infty} \Sigma_n^{a,b}$$

et d'après la remarque 1 on a:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to+\infty} \Sigma_n^{a,c} \;=\; \int_a^c f(x)\ dx \\ \lim_{n\to+\infty} \Sigma_n^{c,b} \;=\; \int_c^b f(x)\ dx \\ \lim_{n\to+\infty} \Sigma_n^{a,b} \;=\; \int_a^b f(x)\ dx \\ \lim_{n\to+\infty}[\Sigma_n^{a,c} + \Sigma_n^{c,b}] \;=\; \lim_{n\to+\infty} \Sigma_n^{a,b} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

iii) d'après ii)

$$\int_a^c f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx$$

pour $c = a$ on a d'après i)

$$0 = \int_a^a f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^a f(x)\ dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$$

Propriété 2 : Pour toute fonction f et g intégrables dans $[a,b]$, on a:

i)

$$a < bf > 0[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx > 0.$$

ii)

$$a < bf \leq g[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$$

iii) pour $a < b$ on a:

$$|\int_a^b f(x)\ dx| \leq \int_b^a |f(x)|\ dx$$

Preuve:

i)

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f) \geq 0 M_k(f) = \sup\{f(x)/x \in [x_k, x_{k+1}]\} \ \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n(f) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx \geq 0$$

ii)

$$f \leq g \Rightarrow h = g - f \geq 0.$$

Or

$$\int_a^b h(x)\ dx = \int_a^b g(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$$

iii) On a

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|\ \ \forall\ x \in [a,b]$$

et d'après ii) on a

$$-\int_a^b |f(x)|\ dx \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$$

Théorème 3:

Soit f une fonction bornée sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$.

i) Si les réels m et M sont telque:

$$m \le f(x) \le M, \ \forall \ x \in [a,b]$$

alors

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\ dx \le M(b-a)$$

ii) Si

$$|f(x)| \le M, \ \forall \ x \in [a,b]$$

alors

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \le M(b-a)$$

Preuve:

i)

$$m \le f(x) \le M \ \forall \ x \in [a,b]$$

alors on a d'après ii) de la propriété 2

$$\int_a^b m\ dx \le \int_a^b f(x)\ dx \le \int_a^b M\ dx$$

Or on a

$$\int_a^b m\ dx = m(b-a) \ , \ \int_a^b M\ dx = M(b-a)$$

d'où

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\ dx \le M(b-a)$$

ii)

$$|f(x)| \le M \ \forall \ x \in [a,b]$$

alors on a d'après ii) et iii) de la propriété 2

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\ dx \le \int_a^b M\ dx = M(b-a)$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \le M(b-a)$$

Théorème 4: (Théorème de la moyenne)

Si f est continue sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$, $a < b$, alors il existe $c \in]a,b[$ telque

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\ dx = f(c)$$

Preuve:

Si f est continue sur $[a,b]$ fermé borné $\Rightarrow$ il existe m et M telque

$$f([a,b]) \ = [m,M] \Leftrightarrow m \le f(x) \le M \ \forall \ x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\ dx \le M(b-a) \Leftrightarrow m \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\ dx \le M$$

donc

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\ dx \in [m,M]$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx \in [m,M] \\ f[a,b] \\ f([a,b]) \ = [m,M] \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\ c \in]a,b[f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$$

Autre démonstration:

Si f est continue sur l'intervalle fermé borné $[a,b] \Rightarrow$ il existe m et M telque

$$f([a,b]) \ = [m,M] \Leftrightarrow m \leq f(x) \leq M \ , \ \forall\ x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists\ x_0 \in]a,b[f(x_0) = m \\ \exists\ x_1 \in]a,b[f(x_0) = M \end{array}\right.$$

Soit

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$$

On a g est continue sur $[a,b]$ et

$$g(x_0) = m - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx \leq 0$$

$$g(x_1) = M - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} g[a,b] \\ g(x_0)g(x_1) \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\ c \in]a,b[g(c) = 0$$

$$\Rightarrow f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$$

Exemple 6:

Trouver la limite suivante:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n\pi}\sum_{k=0}^{n}\cos(\frac{k\pi}{2n})$$

On a $f(x) = \cos(x)$, $[a,b] = [0, \frac{\pi}{2}]$

(car pour $k = 0$ on a $a = \frac{0\times\pi}{2n} = 0$ et pour $k = n$ on a $b = \frac{n\times\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$)

et $x_k = a + k\frac{b-a}{n} = \frac{k\pi}{2n}$.

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k) = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n}\cos(\frac{k\pi}{2n}) \to \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ dx = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n\pi}\sum_{k=0}^{n}\cos(\frac{k\pi}{2n}) &= \frac{4}{\pi^2}\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n}\cos(\frac{k\pi}{2n}) \\ &= \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\ dx \\ &= \frac{4}{\pi^2}\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{4}{\pi^2} \end{aligned}$$

II Fonction définie par une Intégrale.

Soit f une fonction bornée sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$.

Si f est intégrable sur $[a,b]$, alors on peut définir une nouvelle fonction sur $[a,b]$ par:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt, \text{ pour tout } x \in [a,b]$$

Théorème 5:

Si f est intégrable sur $[a,b]$, alors la fonction $F : x \in [a,b] \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$ est continue sur $[a,b]$.

Preuve:

Comme f est bornée sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$, alors il existe $M > 0$ telque pour tout $x \in [a,b]$ $|f(x)| \leq M$. Soit $x_0 \in [a,b]$, on a:

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\ dt - \int_a^{x_0} f(t)\ dt = \int_{x_0}^x f(t)\ dt$$

d'après la propriété 2 iii) et le théorème 3 ii) on a:

$$\left| \int_{x_0}^x f(t)\ dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t)|\ dt \leq M|x - x_0|$$

$$\Rightarrow |F(x) - F(x_0)| \leq M|x - x_0|$$

D'où $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \eta = \frac{\varepsilon}{M} > 0 \forall\ x \in [a,b]$ vérifiant

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon.$$

Ce qui montre que F est continue en x_0, $\forall\ x_0 \in [a,b]$.
Donc F est continue sur $[a,b]$.

Théorème 6:

Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$ et à valeurs réelles.

Si f est continue sur $[a,b]$, alors $F : x \in [a,b] \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$ est différentiable sur $[a,b]$ et on a:

$$F'(x) = f(x),\ \ \forall\ x \in [a,b]$$

Preuve:

Soit $x_0 \in [a,b]$, montrons que F est différentiable sur $[a,b]$.

Cherchons la limite lorsque h tend vers 0 de

$$\frac{F(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

On a :

$$\frac{F(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^x f(t)\ dt - \int_a^{x_0} f(t)\ dt\right] = \frac{1}{h}\int_{x_0}^x f(t)\ dt$$

D'après le théorème de la moyenne, il existe $c \in]x_0, x_0 + h[$ tel que:

$$\frac{F(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x_0}^x f(t)\ dt = f(c)$$

$$f \Rightarrow \lim_{h \to 0} f(c) = f(x_0)$$

(car $x_0 \leq c \leq x_0 + h$ qui tend vers x_0 quand h tend vers 0 d'où c tend vers x_0 quand h tend vers 0)

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Ce qui montre que F est différentiable en x_0, $\forall\ x_0 \in [a,b]$.

Donc F est différentiable sur $[a,b]$.

Définition 6:

Une fonction F telleque

$$F'(x) = f(x),\ \ \forall\ x \in [a,b]$$

est dite primitive de f sur $[a,b]$. La fonction F est définie à une constante additive près.

Corollaire 1:

Soient $f : [a,b] \rightarrow$ continue, g et h deux fonctions différentiables sur $[a,b]$, alors:

i) $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\ dt$ est différentiable sur $[a,b]$ et on a

$$F'(x) = f((g(x))g'(x)\ ,\ \forall\ x \in [a,b]$$

ii) $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\ dt$ est différentiable sur $[a,b]$ et on a

$$F'(x) = f((h(x))h'(x) - f((g(x))g'(x)\ ,\ \forall\ x \in [a,b]$$

Preuve:

i) Posons $F(x) = H(g(x)) = \int_a^{g(x)} f(t)\ dt.$

$$\left.\begin{array}{l} y \rightarrow H(y) \\ y \rightarrow g(y) \end{array}\right\} \Rightarrow y \rightarrow H \circ g(y)$$

On a d'après le théorème dérivation des fonctions composées que

$$F'(x) = (H \circ g)'(x) = H'(g(x))g'(x).$$

De plus on a $H(y) = \int_a^y f(t)\ dt \Rightarrow H'(y) = f(y)$.

D'où $F'(x) = f(g(x))g'(x).$

ii) Posons $F_1(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\ dt$ et $F_2(x) = \int_a^{h(x)} f(t)\ dt.$

On a $F(x) = F_1(x) - F_2(x).$

D'après i) on a

$$\left.\begin{array}{l} x \rightarrow F_1(x) \\ x \rightarrow F_2(x) \end{array}\right\} \Rightarrow x \rightarrow F_2(x) - F_1(x)$$

comme différence de deux fonctions différentiables.

$$F_1(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\ dt \Rightarrow F_1'(x) = f(g(x))g'(x)$$

$$F_2(x) = \int_a^{h(x)} f(t)\ dt \Rightarrow F_2'(x) = f(h(x))h'(x)$$

et par la suite

$$\Rightarrow F'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$

III - Calcul des intégrales
1) Calcul au moyen d'une primitive
Théorème 7:

Deux primitives d'une même fonction f différent d'une constante.
i.e. si F et G sont deux primitives de f alors $F = G + C$, où C est une constante.

Preuve :

Soit $H(x) = F(x) - G(x) \Rightarrow H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$
car $F'(x) = G'(x) = f(x)$

$$\Rightarrow H(x) = C = F(x) = G(x) + C$$

Théorème 8:

Si F est une primitive de f sur $[a,b]$ c'est à dire $F'(x) = f(x),\ \forall\ x \in [a,b],$ alors

$$\int_a^b f(t)\ dt = F(b) - F(a)$$

Preuve :

Soit G la primitive de f sur $[a,x]$, $G(x) = \int_a^x f(t)\ dt$. on a

$$G(a) = \int_a^a f(t)\ dt = 0$$

D'après le théorème 7 on a $G(x) = F(x) + C \Rightarrow 0 = G(a) = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$.

$$G(x) = \int_a^x f(t)\ dt = F(x) - F(a)$$

Pour $x = b,$ on a

$$G(b) = \int_a^b f(t)\ dt = F(b) - F(a)$$

2) Calcul au moyen d'un changement de variable
Théorème 9: (un changement de variable est bijectif)

Soit $\Phi\ :\ [\alpha,\beta] \rightarrow$ une fonction continûment différentiable (on dit de classe C^1) et soit f une fonction continue sur $[a,b]$ avec $a = \Phi(\alpha)$ et $b = \Phi(\beta)$. Alors

$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_\alpha^\beta f[\Phi(x)]\Phi'(x)\ dx$$

Preuve :

On a f continue sur $[a,b]$, donc f est intégrable sur $[a,b]$.
On considére la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt\ ,\ \ F(a) = 0$$

Si on pose $G(t) = F(\Phi(t))$, on a G est différentiable sur $[\alpha,\beta]$ (car c'est la composée de deux fonctions différentiables F et Φ) et

$$G'(t) = F'(\Phi(t))\Phi'(t) = f(\Phi(t))\Phi'(t)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_\alpha^\beta G'(t)\ dt &= G(\beta) - G(\alpha)\\ &= \int_\alpha^\beta f(\Phi(t))\Phi'(t)\ dt\\ &= F(\Phi(\beta))\ - F(\Phi(\alpha)\\ &= F(b) - F(a) = F(b)\\ &= \int_a^b f(t)\ dt\end{aligned}$$

Exemple 7:

1) Calculons l'intégrale de la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ sur l'intervalle $[\frac{1}{2},1]$.
Posons $\Phi(x) = \cos(x) \Rightarrow \Phi'(x) = -\sin(x)$.

$\cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$ et $\cos(x) = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow f(\Phi(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2(x)}} = \frac{1}{|\sin(x)|} = \frac{1}{\sin(x)}$$

car $\sin(x) \geq 0$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{-\sin(x)}{\sin(x)}\, dx\\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} dx\\ &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

2) Calculons l'intégrale de la fonction $\frac{(t)}{1+t^2}$ sur l'intervalle $[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1]$.

i) Posons $\Phi(x) = (x) \Rightarrow \Phi'(x) = 1 + {}^2(x)$.

$\Phi(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ et $\Phi(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$.

$$f(t) = \frac{(t)}{1+t^2} \Rightarrow f(\Phi(x)) = \frac{x}{1+{}^2(x)}$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{(t)}{1+t^2}\, dt &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+{}^2(x)}(1+{}^2(x))\, dx\\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} x\, dx\\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\\ &= \frac{\pi^2}{2}\left[\frac{1}{16} - \frac{1}{36}\right]\\ &= \frac{\pi^2}{8}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right]\\ &= \frac{5\pi^2}{288}\end{aligned}$$

ii) Il est plu simple cependant de remarquer que $(\arctan(t))' = \frac{1}{1+t^2}$.

Comme $\int f(t)f'(t)dt = \frac{1}{2}f^2(t) \Rightarrow \int \frac{\arctan(t)}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\arctan^2 t$.

3) Calculons l'intégrale de la fonction $\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$.

Posons $\Phi(x) = \sqrt{1-x^2}\,) \Rightarrow \Phi'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $\Phi(x) = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$f(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow f(\Phi(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2}\,)^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

car $x \in [0, \frac{1}{2}]$

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt &= \int_{1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\\ &= -\int_{1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dx\\ &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

3) Calcul au moyen d'une intégration par parties

Théorème 10:

Soit f et g deux fonctions continûment dérivable sur $[a, b]$.

Alors

$$\int_a^b f'(t)g(t)\ dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\ dt$$

Preuve :

On a la relation

$$\begin{aligned}
(f(t)g(t))' &= f'(t)g(t) + f(t)g'(t) \\
\Rightarrow \int_a^b (f(t)g(t))'\ dt &= \int_a^b f(t)g(t)\ dt + \int_a^b f'(t)g'(t)\ dt \\
&= [f(t)g(t)]_a^b
\end{aligned}$$

d'où

$$\int_a^b f'(t)g(t)\ dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\ dt$$

Exemples 8:

1) Calculons l'intégrale de la fonction $t\log(t)$ sur l'intervalle $[1,3]$.

$$f(t) = \frac{t^2}{2} \Rightarrow f'(t) = t$$

$$g(t) = \log(t) \Rightarrow g'(t) = \frac{1}{t}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^3 f'(t)g(t)\ dt &= [f(t)g(t)]_1^3 - \int_1^3 f(t)g'(t)\ dt \\
&= \left[\frac{t^2}{2}\log(t)\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}\ dt \\
&= \frac{9}{2}\log(3) - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^3 \\
&= \frac{9}{2}\log(3) - \frac{9}{4} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{9}{2}\log(3) - 2
\end{aligned}$$

2) Calculons l'intégrale de la fonction (t) sur l'intervalle $[0,1]$.

$$f(t) = t \Rightarrow f'(t) = 1$$

$$g(t) = (t) \Rightarrow g'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (t)\ dt &= [t(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\ dt \\
&= (1) - \left[-\sqrt{1-t^2}\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{2} - 1
\end{aligned}$$

Corollaire 2:

Soit $f : [a,b] \longrightarrow$ $(n+1)$ fois continûment dérivable. Alors

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(a,b)$$

avec

$$R_n(a,b) = \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)\ dt$$

Preuve :

Démonstration par récurrence.

Pour $n = 1$ on a

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{1!}\int_a^b (b-t)^0 f'(t)\ dt = \int_a^b f'(t)\ dt$$

Supposons que la relation soit vraie jusqu'à l'ordre $(n-1)$

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{(n-1)}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_{n-1}(a,b)$$

avec

$$R_{n-1}(a,b) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\ dt$$

Par intégration par parties de $R_{n-1}(a,b)$, on a :

$$f(t) = -\frac{(b-t)^n}{n} \Rightarrow f'(t) = (b-t)^{n-1}$$

$$g(t) = f^{(n)}(t) \Rightarrow g'(t) = f^{(n+1)}(t)$$

$$\Rightarrow R_{n-1}(a,b) = \frac{1}{(n-1)!}\left\{\left[-\frac{(b-t)^n}{n}f^{(n)}(t)\right]_a^b - \int_a^b -\frac{(b-t)^n}{n}f^{(n+1)}(t)\ dt\right\}$$

$$= \frac{1}{n!}(b-a)^n f^{(n)}(a) + \int_a^b -\frac{(b-t)^n}{n}f^{(n+1)}(t)\ dt$$

$$= \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(a,b)$$

d'où

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(a,b)$$

avec

$$R_n(a,b) = \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)\ dt$$

Propriété 3 :

1) Périodicité :

Soit f une fonction continue sur , T périodique, Alors

$$\int_a^{a+T} f(t)\ dt\ a$$

2) Parité :

Soit f une fonction continue sur . Pour tout $a \in$ on a:

$$i) \int_{-a}^{a} f(t)\ dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\ dt$$

$$ii) \int_{-a}^{a} f(t)\ dt = 0$$

Preuve :

1) Posons $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\ dt$

$$F(x+T) - F(x) = \int_{x}^{x+T} f(t)\ dt$$

$$F'(x+T) - F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$$

$$\Rightarrow F(x+T) - F(x) = C =$$

d'où

$$\int_{x}^{x+T} f(t)\ dt = \int_{a}^{a+T} f(t)\ dt$$

2) i)

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(t)\ dt &= \int_{-a}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{a} f(t)\ dt \\ &= -\int_{0}^{-a} f(t)\ dt + \int_{0}^{a} f(t)\ dt \\ &= 2\int_{0}^{a} f(t)\ dt\end{aligned}$$

$\int_{-a}^{0} f(t)\ dt = -\int_{0}^{a} f(t)\ dt$ (changement de variables $u = -t \Rightarrow u' = -dt$ et $f(-t) = f(t)$ car f est paire).

2) ii)

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(t)\ dt &= \int_{-a}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{a} f(t)\ dt \\ &= -\int_{0}^{-a} f(t)\ dt + \int_{0}^{a} f(t)\ dt \\ &= -\int_{0}^{a} f(t)\ dt + \int_{0}^{a} f(t)\ dt \\ &= 0\end{aligned}$$

Exemple 9:

1)

$$\int_{-1}^{1} \frac{t}{1+t^2}\ dt = 0$$

2)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\ dt = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\ dt = 2[\sin(t)]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

3) $t \longrightarrow \cos(2t)$ est périodique de période π et paire.

$$\int_{a}^{a+\pi} (1+\cos(2t))\ dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2t))\ dt = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2t))\ dt = 2\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

IV -Calcul des Primitives : Techniques de base

Définition 7: D'une primitive d'une fonction.

Soit f une fonction continue. Une primitive de f est une fonction F dont f est la dérivée.

Connaissant une primitive F de f, on obtient toutes les autres primitives de f par la relation: $G(x) = F(x) + C$ où C est une constante.

Une primitive de f est appelée encore l'intégrale indéfinie de f et est notée $\int f(t)\ dt$. Elle est définie à une constante additive près.

1) Tableau des primitives

- $\int a\ dt = at,\ a \in$
- • $\int t\ dt = \frac{t^2}{2}$
- $\int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t}$
- • $\int \frac{dt}{t^2}\ dt = -\frac{1}{t}$
- $\int \cos(t)\ dt = \sin(t)$
- • $\int \sin(t)\ dt = -\cos(t)$
- $\int \frac{dt}{\cos^2(t)}\ dt = (t)$
- • $\int (1 + {}^2(t))\ dt = (t)$
- $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(t)$
- • $\int -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arccos(t)$
- $\int \frac{dt}{1+t^2} = (t)$
- • $\int (t)\ dt = (t)$
- $\int (t)\ dt = (t)$
- • $\int (1 - {}^2(t))\ dt = (t)$
- $\int \frac{dt}{{}^2(t)} = (t)$
- • $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}\ dt = (t)$
- $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = (t)$
- • $\int \frac{dt}{1-t^2}\ dt = (t)$
- $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}\ dt = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}\,)$
- • $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}\,)$
- $\int \frac{dt}{1-t^2}\ dt = \frac{1}{2}\log(\frac{x+1}{1-x})$
- • $\int t^{\alpha}\ dt = \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1}$
- $\int \frac{dt}{t^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\ ,\ \alpha \in$

2) Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions continûment dérivables, alors on a:

$$\int u\,dv = uv - \int v\ du$$

Exemple 10 :

$I = \int t^2 e^t \ dt$

$$\left.\begin{array}{lll} u = t^2 & \Rightarrow & du = 2t \ dt \\ v = e^t & \Rightarrow & dv = e^t \ dt \end{array}\right\} \Rightarrow \int t^2 e^t \ dt = t^2 e^t - 2\int t e^t \ dt$$

Calculons $J = \int t e^t \ dt$

$$\left.\begin{array}{lll} u = t & \Rightarrow & du = t \ dt \\ v = e^t & \Rightarrow & dv = e^t \ dt \end{array}\right\} \Rightarrow \int t e^t \ dt = t e^t - \int e^t \ dt = t e^t - e^t + C_1$$

d'où

$$I = \int t^2 e^t \ dt = t^2 e^t - 2t e^t + 2e^t + C$$

3) Changement de variables

On calcule une intégrale indéfinie avec la méthode de changement de variables suivant :
Si $t = \varphi(x)$ avec φ une fonction continument dérivable, alors on a

$$\int f(t) \ dt = \int f[\varphi(x)]\varphi'(x) \ dx$$

Exemple 11:

$I = \int t\sqrt{1+3t^2} \ dt$ posons $x = \sqrt{1+3t^2} \Leftrightarrow x^2 = 1+3t^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{x^2-1}{3}$

$\Rightarrow 2t \ dt = \frac{}{3} \Rightarrow t \ dt = \frac{}{3}$

$$I = \int t\sqrt{1+3t^2} \ dt = \int x\frac{x}{3} \ dx = \int \frac{x^2}{3} \ dx = \frac{x^3}{9} + C$$

d'où l'on a:

$$I = \int t\sqrt{1+3t^2} \ dt = \frac{1}{9}\left[\sqrt{1+3t^2}\right]^3 + C$$

4) Intégration des fonctions rationnelles réelles.

Soit $F(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ une fraction rationnelle réelle, où P et Q sont des polynômes.

Pour calculer une primitive de F, on décompose la fraction rationnelle en éléments simples dans et on intégre chaque terme de cette décomposition.

Exemple 12:

Calculons la primitive de la fraction rationnelle $F(t) = \frac{1}{(t^2-4)^2}$

On cherche les racines du dénominateur $(t^2-4)^2$.

$(t^2-4)^2 = (t-2)^2(t+2)^2 \Rightarrow t = 2$ et $t = -2$ sont des racines du dénominateur.

$$F(t) = \frac{1}{(t^2-4)^2} = \frac{A}{(t-2)} + \frac{B}{(t-2)^2} + \frac{C}{(t+2)} + \frac{D}{(t+2)^2}$$

$$(t-2)^2 F(t) = \frac{1}{(t+2)^2} = A(t-2) + B + \frac{C(t-2)^2}{(t+2)} + \frac{D(t-2)^2}{(t+2)^2}$$

Pour $t = 2$ on a $B = \frac{1}{16}$

$$(t+2)^2 F(t) = \frac{1}{(t-2)^2} = \frac{A(t+2)^2}{(t-2)} + \frac{B(t+2)^2}{(t-2)^2} C(t+2) + D$$

Pour $t = -2$ on a $D = \frac{1}{16}$

$$\begin{aligned} F(-t) = F(t) \Rightarrow F(-t) &= \frac{A}{(-t-2)} + \frac{B}{(-t-2)^2} + \frac{C}{(-t+2)} + \frac{D}{(-t+2)^2} \\ &= \frac{-A}{(t+2)} + \frac{B}{(t+2)^2} - \frac{C}{(t-2)} + \frac{D}{(t-2)^2} \\ &= \frac{A}{(t-2)} + \frac{B}{(t-2)^2} + \frac{C}{(t+2)} + \frac{D}{(t+2)^2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow A = -C$ et $B = D = \frac{1}{16}$.

Pour $t = 0$, on a

$$F(0) = \frac{1}{16} = \frac{-A}{2} + \frac{B}{4} + \frac{C}{2} + \frac{D}{4} = C + \frac{B}{2} = C + \frac{1}{32}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{16} - \frac{1}{32} = \frac{1}{32}\ A = -\frac{1}{32}$$

d'où

$$F(t) = \frac{1}{(t^2-4)^2} = \frac{-1}{32(t-2)} + \frac{1}{16(t-2)^2} + \frac{1}{32(t+2)} + \frac{1}{16(t+2)^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(t^2-4)^2}\ dt = \int \frac{-dt}{32(t-2)} + \int \frac{dt}{16(t-2)^2} + \int \frac{dt}{32(t+2)} + \int \frac{dt}{16(t+2)^2}$$

$$= \frac{-1}{32} \log|t-2| - \frac{1}{16(t-2)} + \frac{1}{32} \log|t+2| - \frac{1}{16(t+2)}$$

$$= \frac{1}{32} \log\left|\frac{t+2}{t-2}\right| - \frac{1}{16} \frac{2t}{(t^2-4)}$$

$$= \frac{1}{32} \log\left|\frac{t+2}{t-2}\right| - \frac{t}{8(t^2-4)}$$

Exemple 13:

Calculons la primitive de la fraction rationnelle $F(t) = \frac{1}{t^2(t^3-1)}$

On cherche les racines du dénominateur $t^2(t^3-1)$.

$t^2(t^3-1) = t^2(t-1)(t^2+t+1) \Rightarrow t = 0$ et $t = 1$ sont des racines du dénominateur.

$F(t) = \frac{1}{t^2(t^3-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{(t-1)} + \frac{Dt+E}{(t^2+t+1)}$

$$t^2F(t) = \frac{1}{(t^3-1)} = At + B + \frac{Ct^2}{(t-1)} + \frac{t^2(Dt+E)}{(t^2+t+1)}$$

Pour $t = 0$ on a $B = -1$

$$(t-1)F(t) = \frac{1}{t^2(t^2+t+1)^2} = \frac{A(t-1)}{t} + \frac{B(t-1)}{t^2} + C + \frac{(t-1)(Dt+E)}{(t^2+t+1)}$$

Pour $t = 1$ on a $C = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{t^2(t^3-1)} \\ &= \frac{At(t^3-1) + B(t^3-1) + Ct^2(t^2+t+1) + t^2(t-1)(Dt+E)}{t^2(t^3-1)} \\ &= \frac{At^4 - At + Bt^3 - B + Ct^4 + Ct^3 + Ct^2 + Dt^4 - Dt^3 + Et^3 - Et^2}{t^2(t^3-1)} \\ &= \frac{t^4(A+C+D) + t^3(B+C-D+E) + t^2(C-E) - At - B}{t^2(t-1)} \end{aligned}$$

d'où le systéme

$$\begin{cases} -B = 1 & \Rightarrow\ B = -1 \\ -A = 0 & \Rightarrow\ A = 0 \\ C - E = 0 & \Rightarrow\ C = E = \frac{1}{3} \\ B + C - D + E = 0 & \Rightarrow\ D = B + 2C = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \\ A + C + D = 0 & \Rightarrow\ D = -C = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

d'où

$$F(t) = \frac{1}{t^2(t^3-1)} = \frac{-1}{t^2} + \frac{1}{3(t-1)} + \frac{1}{3}\frac{1-t}{t^2+t+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{t^2(t^3-1)}\ dt = \int \frac{-dt}{t^2} + \int \frac{dt}{3(t-1)} + \frac{1}{3}\int \frac{(1-t)}{t^2+t+1}\ dt$$

Calculons $I = \int \frac{(1-t)}{t^2+t+1}\ dt$.

$(t^2+t+1)' = 2t+1$ et $1-t = -\frac{1}{2}(2t+1)+\frac{3}{2}$ d'où

$$\begin{aligned} I = \int \frac{(1-t)}{t^2+t+1}\ dt &= -\frac{1}{2}\int \frac{2t+1}{t^2+t+1}\ dt + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2+t+1} \\ &= -\frac{1}{2}\log|t^2+t+1| + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2+t+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^2+t+1 &= t^2 + 2\frac{t}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\ &= \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})\right)^2 + 1\right] \end{aligned}$$

En faisant le chagement de variables $x = \frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}) \Rightarrow dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\ dt \Rightarrow\ dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\ dx$, on a

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t^2+t+1} &= \frac{4}{3}\int \frac{dt}{\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})\right)^2+1\right]} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{4}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}(x) + C_1 \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})\right) + C_1 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{2}\log|t^2+t+1| + \frac{3}{2}\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})\right) + C_1\right] \\ &= -\frac{1}{2}\log|t^2+t+1| + \sqrt{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})\right) + C \end{aligned}$$

Par suite

$$I = \frac{1}{t} + \frac{1}{3}\log|t-1| - \frac{1}{6}\log|t^2+t+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})\right) + C$$

5) Intégrale se ramenant à des fractions rationnelles

5.1) Fractions rationnelles en sin et cos

Si $I = \int F(\sin(t),\cos(t))\ dt$ où F est une fraction rationnelle.

Une méthode pour calculer I consiste à faire le changement de variables

$$x = tg(\tfrac{t}{2}) = \tan(\tfrac{t}{2}) \Leftrightarrow t = 2\arctan(x)$$

ce qui nous donne

$$dt = \frac{2\ dx}{1+x^2}\ ,\ \cos(t) = \frac{1-x^2}{1+x^2}\ ,\ \sin(t) = \frac{2x}{1+x^2}$$

Et on a

$$I = \int F(\sin(t),\cos(t))\ dt = 2\int F\left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\ \frac{dx}{1+x^2}$$

Ainsi le calcul de laprimitive d'une fraction rationnelle en sin et cos se raméne à celui d'une fraction rationnelle de polynomes.

Exemple 14:

Calculons la primitive de la fonction $\frac{1+\sin(t)}{\cos(t)}$

$$\begin{aligned}
\frac{1+\sin(t)}{\cos(t)}\ dt &= \frac{1+\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\frac{2\ dx}{1+x^2}\\
&= \frac{1+x^2+2x}{1-x^2}\frac{2\ dx}{1+x^2}\\
&= \frac{(1+x)^2}{(1-x)(1+x)}\frac{2\ dx}{1+x^2}\\
&= \frac{2(1+x)}{(1-x)(1+x^2)}\ dx
\end{aligned}$$

$$\int \frac{1+\sin(t)}{\cos(t)}\ dt = 2\int \frac{(1+x)}{(1-x)(1+x^2)}\ dx$$

$$\frac{(1+x)}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{(1+x)}{(1+x^2)} = A + \frac{(1-x)(Bx+C)}{1+x^2} \\ x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = 1$$

$$\begin{aligned}
\frac{(1+x)}{(1-x)(1+x^2)} &= \frac{1}{1-x} + \frac{(Bx+C)}{1+x^2}\\
&= \frac{1+x^2+Bx+C-Bx^2-Cx}{(1-x)(1+x^2)}\\
&= \frac{(1-B)x^2+(B-C)x+(C+1)}{(1-x)(1+x^2)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} 1-B = 0 & \Rightarrow & B = 1 \\ B-C = 1 & \Rightarrow & C = 0 \\ C+1 = 1 & \Rightarrow & C = 0 \end{array}\right.$$

$$\frac{(1+x)}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned}
2\int \frac{(1+x)}{(1-x)(1+x^2)}\ dx &= 2\int \frac{dx}{1-x} + \int \frac{2x}{1+x^2}\ dx\\
&= -2\log|1-x| + \log|x^2+1| + C
\end{aligned}$$

et

$$\int \frac{1+\sin(t)}{\cos(t)}\ dt = -2\log|1-(\frac{t}{2})| + \log|(\frac{t}{2})^2+1| + C$$

Remarque 4:

i)Le changement de variable $x = \tan(\frac{t}{2})$ n'est pas unique.

On peut utiliser tout autre changement de variables qui soit plus simple.

ii) Le changement de variables $x = \tan(\frac{t}{2})$ serait maladroit si l'intégrale I est l'un des types suivants:

$$a)I = \int F(\sin(t))\cos(t)\ dt\ u = \sin(t)$$
$$b)I = \int F(\cos(t))\sin(t)\ dt\ u = \cos(t)$$
$$c)I = \int F((t))\frac{dt}{\cos^2(t)}\ dt\ u = (t)$$

Exemple 15:

1) Calculons la primitive de la fonction $\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)-\cos(t)}$

Effectuons le changement de variables $u = \cos(t) \Rightarrow du = -\sin(t)\ dt$ d'où

$$\int \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)-\cos(t)}\ dt = \int \frac{-du}{u^2-u}$$
$$G(U) = \frac{1}{u-u^2} = \frac{1}{u(1-u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1-u}$$
$$\left.\begin{array}{l} uG(u) = A + \frac{Bu}{1-u} \\ u = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = 1$$
$$\left.\begin{array}{l} (1-u)G(u) = \frac{A(1-u)}{u} + B \\ u = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow B = 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{u(1-u)} = \frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}$$
$$\int \frac{1}{u-u^2}\ du = \int \frac{1}{u}\ du + \int \frac{1}{1-u}\ du$$
$$= \log|u| - \log|u-1| + C$$

et

$$\int \frac{\sin(t)}{\cos^(t) - \cos(t)}\ dt = \log|\cos(t)| - log|\cos(t)-1| + C$$
$$= \log\left|\frac{\cos(t)}{1-\cos(t)}\right| + C$$

2) Calculons la primitive de la fonction $\frac{\cos(t)}{a+\cos^2(t)}$, $a \in {}_+$

$$I = \int \frac{\cos(t)}{a+\cos^2(t)}\ dt = \frac{\cos(t)}{a++1\cos^2(t)-1} = \frac{\cos(t)}{a+1-\sin^2(t)}$$

Effectuons le changement de variable $u = \sin(t) \Rightarrow du = \cos(t)\ dt$ d'où

$$I = \int \frac{\cos(t)}{a+1-\sin^2(t)}\ dt = \int \frac{du}{a+1-u^2}$$
$$= \frac{1}{a+1}\int \frac{du}{1-(\frac{u}{\sqrt{a+1}})^2}$$

$$v = \frac{u}{\sqrt{a+1}} \Rightarrow du = \sqrt{a+1}\ du$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{a+1-u^2} = \frac{1}{a+1}\int \frac{du}{1-(\frac{u}{\sqrt{a+1}})^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a+1}}\int \frac{dv}{1-v^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a+1}}(v) + C$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{a+1}}\log\left|\frac{v+1}{1-v}\right| + C$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{a+1}}\log\left|\frac{u+\sqrt{a+1}}{u-\sqrt{a+1}}\right| + C$$

et

$$I = \int \frac{\cos(t)}{a+\cos^2(t)}\ dt = \frac{1}{2\sqrt{a+1}}\log\left|\frac{\sin(t)+\sqrt{a+1}}{\sin(t)-\sqrt{a+1}}\right| + C$$

5.2) Fractions rationnelles en ^{t}

Si $I = \int F(^t)\ dt$ où F est une fraction rationnelle.

Une méthode pour calculer I consiste à faire le changement de variable $x = {}^t \Leftrightarrow t = \log(x)$ ce qui nous donne $dt = \frac{dx}{x}$ et on a

$$I = \int F(^t)\ dt = \int F(x)\ \frac{dx}{x}$$

Exemple 16 :

Calculons la primitive de la fonction $\frac{^t-1}{^t+1} = (-)$

$$x = e^t \Rightarrow dx = e^t\ dt = x\ dt \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$$
$$\frac{^t-1}{^t+1}\ dt = \frac{x-1}{x+1}\frac{dx}{x}$$
$$= \frac{(x-1)}{x(x+1)}\ dx$$
$$\frac{(x-1)}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$
$$\left.\begin{array}{l} x\frac{(x-1)}{x(x+1)} = \frac{(x-1)}{(x+1)} = A + x\frac{B}{x+1} \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = -1$$
$$\left.\begin{array}{l} (x+1)\frac{(x-1)}{x(x+1)} = \frac{(x-1)}{x} = \frac{A(x+1)}{x} + B \\ x = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow B = 2$$
$$\frac{(x-1)}{x(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}$$
$$I = \int \frac{(x-1)}{x(x+1)}\ dx = -\int \frac{1}{x}\ dx + 2\int \frac{1}{x+1}\ dx$$
$$= 2\log|1+x| - \log|x| + C$$
$$= \log\frac{(1+x)^2}{|x|} + C$$
$$\int \frac{^t-1}{^t+1}\ dt = \int (\frac{t}{2})\ dt = \log\frac{(1+e^t)^2}{e^t} + C$$

.5.3 Fractions rationnelles en ch et sh

Si $I = \int F((t),(t))\ dt$ où F est une fraction rationnelle.

Une méthode pour calculer I consiste à faire le changement de variable $x = e^t \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$

$$x = e^t \Rightarrow \begin{cases} (t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2} = \frac{e^{2t}+1}{2e^t} = \frac{x^2+1}{2x} \\ (t) = \frac{e^t-e^{-t}}{2} = \frac{e^{2t}-1}{2e^t} = \frac{x^2-1}{2x} \\ (t) = \frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}} = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} \end{cases}$$

et on a

$$I = \int F((t),(t))\ dt = \int F\left(\frac{x^2-1}{2x}, \frac{x^2+1}{2x}\right)\ \frac{dx}{x}$$

Exemple 17:

Calculons la primitive de la fonction $\frac{1+(t)}{1+(t)}$

$$\begin{aligned} \frac{1+(t)}{1+(t)}\ dt &= \frac{1+\frac{x^2-1}{2x}}{1+\frac{x^+1}{2x}}\,\frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^2+2x-1}{x(1+x)^2}\ dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{1+(t)}{1+(t)}\ dt = \int \frac{x^2+2x-1}{x(1+x)^2}\ dx$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2x-1}{x(1+x)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{(1+x)^2} \\ &= \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A}{x(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ 2A + B + C = 2 \\ A = -1 \qquad \Rightarrow \ A = -1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} B = 2 \\ C = 2 \end{cases}$$

$$\frac{x^2+2x-1}{x(1+x)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{1+x} + \frac{2}{(1+x)^2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2x-1}{x(1+x)^2}\ dx &= -\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{1+x}\ dx + 2\int \frac{dx}{(1+x)^2}\ dx \\ &= -\log|x| + 2\log|x+1| - \frac{1}{1+x} + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{1+(t)}{1+(t)}\ dt = -\log\left(\frac{(1+e^t)^2}{e^t}\right) - \frac{1}{1+x} + C$$

Remarque 5 :

Le changement de variable $x = e^t$ sera maladroit si l'intégrale I est l'un des types suivants:

$$a) I = \int F((t))(t)\ dt \ \ u = (t)$$
$$b) I = \int F((t))(t)\ dt \ \ u = (t)$$
$$c) I = \int F((t))\frac{dt}{^2(t)}\ dt \ \ u = (t)$$

Exemple 18:

Calculons la primitive de la fonction $\frac{(t)}{1+(t)}$

Effectuons le changement de variable $u = (t) \Rightarrow du = (t)\ dt$ d'où

$$\begin{aligned}
\int \frac{(t)}{(t)}\ dt &= \int \frac{du}{1+2u} \\
&= \frac{1}{2}\log|1+2u|+C \\
&= \frac{1}{2}\log|1+2(t)|+C \\
&= \frac{1}{2}\log(1+2(t)) + C
\end{aligned}$$

V : Intégrales Impropres

Dans ce chapitre (section) nous allons étendre la notion d'intégrales définies à des fonctions qui tendent vers l'infinie pour une ou plusieurs valeurs d'un intervalle I quelconque et à des fonctions continues sur des intervalles infinis.

Définition 8:

L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est dite une intégrale impropre si

i) f tend vers l'infinie $(\pm\infty)$ pour un ou plusieurs valeurs de l'intervalle $[a,b]$

ou

ii) au moins une des bornes d'intégration est infinie (a ou $b = \pm\infty$).

Exemple 19:

1) $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ est une intégrale impropre, car $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ quand $x \to 0^+$ et $0 \in [0,1]$.

2) $\int_1^3 \frac{1}{x-2}dx$ est une intégrale impropre, car $\frac{1}{x-2}$ tend vers $+\infty$ quand $x \to 2^+$ et $2 \in [1,3]$.

3) $\int_0^{+\infty} xdx$ est une intégrale impropre, car une des bornes d'intégration est infinie.

V-1) Intégrale Impropre sur un ouvert borné

1) Définitions et Notations

Définition 9:

Soit f une fonction définie sur l'intervalle borné $]a,b]$, on suppose que f est intégrable sur tout intervalle fermé $[a+\varepsilon,b] \subset]a,b]$, $(\varepsilon > 0)$ (par exemple f continue).

Considérons la fonction:

$$I(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^b f(t)\ dt\ ,\ 0 < \varepsilon < b-a$$

Si la fonction $I(\varepsilon)$ admet une limite finie quand $\varepsilon \to 0^+$, on dit que l'intégrale impropre converge (on note C.V. ou CV) et on pose

$$\int_{a^+}^b f(t)\ dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(t)\ dt$$

Si la fonction $I(\varepsilon)$ n'a pas de limite (la limite d'existe pas) quand $\varepsilon \to 0^+$ ou que cette limite tend vers l'infinie $(\pm\infty)$, on dit que l'intégrale impropre $\int_{a^+}^b f(t)\ dt$ diverge (on note D.V. ou DV).

Remarque 6:

i) La convergence de l'intégrale impropre sur l'intervalle borné $]a, b]$, dépend de l'existence de la limite

$$\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\ dt$$

ii) Si l'intégrale existe au sens usuel alors elle existe au sens de la nouvelle définition et a la même valeur.

iii) De façon analogue, on peut définir (si elle existe)

$$\int_a^{b^-} f(t)\ dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(t)\ dt$$

De même on définit:

$$\int_{a^+}^{b^-} f(t)\ dt = \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0^+} \int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(t)\ dt$$

Exemples 21:

1) On considére l'intégrale impropre $I = \int_0^2 \frac{1}{x}\ dx$

$$\int_\varepsilon^2 \frac{1}{x}\ dx = \log 2 - \log \varepsilon\ ,\ \ \varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \frac{1}{x}\ dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^2 \frac{1}{x}\ dx = +\infty$$

$\Rightarrow I$ est divergente

2) On considére l'intégrale impropre $I = \int_0^1 \log(x)\ dx$

Par intégration parties, on a

$$\int_\varepsilon^1 \log x\ dx = [x \log x]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1\ dx$$

$$= -\varepsilon \log \varepsilon + (\varepsilon - 1)$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \log(x)\ dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \log x\ dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} (-\varepsilon \log \varepsilon + \varepsilon - 1)$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \log(x)\ dx = -1$$

$\Rightarrow I$ est convergente.

3) On considére l'intégrale impropre $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$

$$\int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right] & (\alpha \neq 1) \\ \log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) & (\alpha = 1) \end{cases}$$

L'intégrale $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ converge pour $\alpha < 1$ et diverge pour $\alpha \geq 1$.

En particulier on a :

$$\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

Remarque : Critère de Cauchy :

Considérons la fonction:

$$I(x) = \int_{a+x}^b f(t)\ dt$$

La fonction I admet une limite finie en 0, si l'on a :
$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ \eta > 0\ \ :\ \ 0 < x_1 < \eta 0 < x_2 < \eta$

$$\Rightarrow |I(x_1) - I(x_2)| < \varepsilon$$

$$|\int_{a+x_1}^{b} f(t)\ dt - \int_{a+x_2}^{b} f(t)\ dt| < \varepsilon$$

$$|\int_{a+x_1}^{a+x_2} f(t)\ dt| < \varepsilon$$

Exemple 22:

On considére l'intégrale impropre **:**

$$I = \int_0^b \cos(\frac{1}{t})\ dt$$

La fonction $\cos(\frac{1}{x})$ est continue et bornée sur l'intervalle $]0, b]\ \forall\ b \in$ et est majorée par 1 ($|\cos(\frac{1}{x})| \leq 1\ \forall\ x$) donc I est convergente.

2) Résultats de base sur les intégrales convergentes

Propriétés 4:

i) $\int_{a^+}^{b} (\alpha f(t) + \beta g(t))\ dt = \alpha \int_{a^+}^{b} f(t)\ dt + \beta \int_{a^+}^{b} g(t)\ dt$

ii) $f \geq 0 \Rightarrow \int_{a^+}^{b} f(t)\ dt \geq 0.$

iii) $\int_{a^+}^{b} f(t)\ dt = \int_{a^+}^{c} f(t)\ dt + \int_{c}^{b} f(t)\ dt\ ,\ a < c < b$

iv) Intégration par parties :

Soient g et h deux fonctions dérivables sur $]a,b]$ et telque g' et h' soient continues sur $]a,b]$. Supposons que l'on ait :

α) $\lim_{x\to a^+} g(x)\,h(x)$ existe et est finie.

β) L'une des intégrales impropres $\int_{a^+}^{b} g(t)\,h'(t)\ dt$, $\int_{a^+}^{b} g'(t)\,h(t)\ dt$ est convergente. Alors on a:

$$\int_{a^+}^{b} g(t)\,h'(t)\ dt = \lim_{x\to a^+}[g(x)\,h(x)]_x^b - \int_{a^+}^{b} g'(t)\,h(t)\ dt$$

v) Changement de variables :

Soient f une fonction continue sur $]A,B]$ et g une fonction continue sur $]a,b]$ qui admet une dérivée continue g' sur $]a,b]$. On suppose que $g(]a,b]) \subset]A,B]$.

Dans ces conditions, on a la formule de changement de variable dans tout intervalle $[x,b]$ telque $a < x < b$:

$$\int_{g(x)}^{g(b)} f(s)ds = \int_{x}^{b} f[g(t)]g'(t)\ dt$$

Si l'une des intégrales précédentes admet une limite finie pour x tendant vers a^+, il en est de même de l'autre, et on obtient:

$$\lim_{x\to a^+}\int_{g(x)}^{g(b)} f(s)ds = \int_{a^+}^{b} f[g(t)]g'(t)\ dt$$

Preuve :

Les proprietés i) et ii) découlent directement des proprietés de l'intégrale usuelle.

Pour iii) on a: pour $x \in]a,b[$, on applique la formule d'intégration par parties sur l'intervalle $[x,b]$

$$\int_{x}^{b} g(t)\,h'(t)\ dt = [g(x)\,h(x)]_x^b - \int_{x}^{b} g'(t)\,h(t)\ dt$$

Il suffit alors de faire tendre x vers a^+.

Exemple 23:

1) On considére l'intégrale impropre **:**

$$I = \int_{0}^{b} \frac{1}{t}\sin(\frac{1}{t})\ dt, (b > 0).$$

Etudions la convergence de l'integrale impropre de la fonction $\frac{1}{t}\sin(\frac{1}{t})$ sur $]0,b]$, $(b > 0)$.

Soit $x \in\ ]0,b]$, par intégration par parties, on a:

$$\int_{x}^{b} \frac{1}{t}\sin(\frac{1}{t})\ dt = \Big[t\cos(\frac{1}{t})\Big]_x^b - \int_{x}^{b}\cos(\frac{1}{t})\ dt$$

i) $\lim_{x\to 0^+} x\cos(\frac{1}{x}) = 0$

ii) $\int_{x}^{b}\cos(\frac{1}{t})\ dt$ converge car la fonction $\cos(\frac{1}{t})$ est continue sur $]0,b]$ et est bornée par 1. Par conséquent on a:

$$\int_{x}^{b} \frac{1}{t}\sin(\frac{1}{t})\ dt = b\cos(\frac{1}{b}) - \int_{x}^{b}\cos(\frac{1}{t})\ dt$$

2) On considére l'intégrale impropre **:**

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}\arccos(t)dt$$

Etudions la convergence de l'intégrale impropre de la fonction $\frac{1}{\sqrt{t}}\arccos(t)$ sur l'intervalle $]0,1]$. Soit $x \in]0,1[$ et considérons l'intégrale:

$$\int_{x}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}\arccos(t)dt$$

posons $s = \sqrt{t} \Rightarrow ds = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$\int_{x}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}} \arccos(t) = \int_{\sqrt{x}}^{1} 2\arccos(s^2)ds$$

La fonction $\arccos(s^2)$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[0,1]$, donc son intégrale est parfaitement définie d'où l'on a:

$$\int_{0^+}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}} \arccos(t) = 2\int_{0}^{1} \arccos(s^2)ds$$

Théorème 11:

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b[$ et telles que:

$$f \geq 0 f \leq g[a,b[$$

Alors la convergence de l'intégrale impropre $\int_{a}^{b^-} g(t)\ dt$ implique la convergence de l'intégrale $\int_{a}^{b^-} f(t)\ dt$.

Si l'intégrale impropre $\int_{a}^{b^-} f(t)\ dt$ diverge, il en est de même de l'intégrale $\int_{a}^{b^-} g(t)\ dt$.

Remarque 7:

Le théorème s'applique encore si les mêmes conditions sont vérifiées relativement à un intervalle $]a,b]$.

Preuve :

Considérons les fonctions

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt G(x) = \int_a^x g(t)\ dt$$

D'aprés les hypothèses du Théorème on a:

- G est dérivable et a pour dérivée $g > 0$ car $(0 < f < g)$ donc G est croissante.
- $F(x) \leq G(x)$.

Si l'intégrale $\int_a^{b^-} g(t)\ dt$ converge, cela entraine que G est majorée d'où F l'est aussi, ce qui donne la convergence de l'integrale $\int_a^{b^-} f(t)\ dt$.

Pour le cas de l'intervalle $]a,b]$ on considére les fonctions:

$$F_1(x) = \int_x^b f(t)\ dt G_1(x) = \int_x^b g(t)\ dt$$

Les fonctions F_1 et G_1 sont décroissantes et $F_1(x) \leq G_1(x)$. Si G_1 est majorée, il en est de même de F_1.

Corollaire 3:

Soient f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $[a,b[$ et intégrables sur l'intervalle $[a,c]$, pour tout $c \in [a,b[$, telles que f et g soient strictement positives ($f > 0$, $g > 0$) sur $[a,b[$ et $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, fini ($k \neq 0$). Alors

$$\int_a^{b^-} f(t)\ dt \int_a^{b^-} g(t)\ dt$$

On dit que les deux intégrales sont de même nature.

Preuve :

Soit $\varepsilon \in]0,k[$, il existe $\eta > 0$ tel que pour x vérifiant

$$0 < b - x < \eta \ \Rightarrow\ |\frac{f(x)}{g(x)} - k| < \varepsilon$$

donc on a

$$(k - \varepsilon)g(x) < f(x) < (k + \varepsilon)g(x)$$

Notons $c = b - \eta$ et appliquons le théorème précédent dans l'intervalle $[c,b[$ pour avoir le résultat.

Le résultat s'étend aux intégrales impropres relatives à $]a,b]$.

Exemples 24:

1) Etudions la convergence de l'intégrale $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}$ sur $[0,1[$.

f est continue et strictement positive ($f > 0$).

Considérons la fonction $g(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$. on a

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2} \int_0^{1^-} \frac{dt}{\sqrt{1-t}} \alpha = \frac{1}{2} < 1$$

D'où

$$\int_0^{1^-} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

On peut aussi procéder de la façon suivante:

$$0 < \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1+t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

et utiliser le théorème précédent.

2) Etudions la convergence de l'intégrale $f(t) = \frac{e^t}{t}$ sur $]0,1]$.

f est continue et strictement positive ($f > 0$).

Considérons la fonction $g(t) = \frac{1}{t}$. on a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \int_{0^+}^{1} \frac{dt}{t} \alpha = 1$$

D'où

$$\int_0^1 \frac{e^t}{t}\ dt$$

On peut aussi procéder de la façon suivante:

$$0 < \frac{1}{t} < \frac{e^t}{t}$$

3) Etudions la convergence de l'intégrale $f(t) = \frac{(t) - \cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}}$ sur $]0, 1]$.

f est continue et strictement positive ($f > 0$).

Le développement Taylor des fonctions (t) et $\cos(t)$

$$(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!}(\theta_1 t) \quad 0 < \theta_1 < 1$$

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!}\sin(\theta_2 t) \quad 0 < \theta_2 < 1$$

ce qui nous donne

$$f(t) = \frac{t^2 + \frac{t^3}{3!}((\theta_1 t) - \sin(\theta_2 t)}{t^{\frac{5}{2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{t}$$

$$\int_{0^+}^{1} \sqrt{t}\ dt\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$$

d'où

$$\int_{0^+}^{1} \frac{(t) - \cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}}\ dt$$

3) Intégrales absolument convergentes
Définition 10:

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a,b[$. on dit que l'intégrale impropre $\int_a^{b^-} f(t)\ dt$ est absolument convergente, si l'integrale impropre $\int_a^{b^-} |f(t)|\ dt$ est convergente.

On a la même définition pour un intervalle de la forme $]a,b]$.

Propriété 5:

La convergence absolue implique la convergence simple.

Soit f une fonction définie sur $[a,b[$ telle que l'intégrale impropre $\int_a^{b^-} f(t)\ dt$ est absolument convergente c'est à dire $\int_a^{b^-} |f(t)|\ dt$ est convergente. Alors l'intégrale impropre

$$\int_a^{b^-} f(t)\ dt$$

Preuve:

On pose $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$. Pour $|x_1 - x_2| < \eta$, on a

$$\begin{aligned} |F(x_1) - F(x_2)| &= |\int_a^{x_1} f(t)\ dt - \int_a^{x_2} f(t)\ dt| \\ &= |\int_{x_2}^{x_1} f(t)\ dt| \\ &\leq \int_{x_2}^{x_1} |f(t)|\ dt < \varepsilon \end{aligned}$$

Remarque 8: La convergence simple n'implique pas la convergence absolue

$$\int_a^{b^-} f(t)\ dt \nRightarrow \int_a^{b^-} |f(t)|\ dt$$

En effet : Si l'on considére la fonction $f(t) = \frac{1}{t}\sin(\frac{1}{t})$ on a :

$$\int_{0^+}^{1} \frac{1}{t}\sin(\frac{1}{t})\ dt \int_{0^+}^{1} |\frac{1}{t}\sin(\frac{1}{t})|\ dt$$

V-2) Intégrale Impropre sur un ouvert non borné
1) Définitions et notations
Définition 11:

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,+\infty[$, on suppose que f est intégrable sur tout intervalle fermé $[a,x] \subset [a,+\infty[$ (par exemple f continue).

Considérons la fonction:

$$I(x) = \int_a^x f(t)\ dt\ ,\ a < x < +\infty$$

Si la fonction $I(x)$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$, on dit que f admet sur $[a,+\infty[$ une intégrale impropre convergente égale à cette limite.

$$\int_a^{+\infty} f(t)\ dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\ dt$$

Si la fonction $I(x)$ n'a pas de limite quand $x \to +\infty$ ou que cette limite est infinie $(\pm\infty)$, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ diverge.

La convergence de l'intégrale impropre dépend de l'existence de la limite

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\ dt$$

De façon analogue, on peut définir (si elle existe)

$$\int_{-\infty}^a f(t)\ dt = \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)\ dt$$

De même on définit:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \lim_{(x,y)\to(-\infty,+\infty)} \int_x^y f(t)\ dt$$

Exemple 25 :

Etudions l'intégrale impropre $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^\alpha}$

$$\int_2^y \frac{dx}{(x-1)^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(y-1)^{\alpha-1}} - 1\right] & (\alpha \neq 1) \\ \log(y-1) & (\alpha = 1) \end{cases}$$

L'intégrale $\int_2^y \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \leq 1$.

En particulier on a pour $a > 0$

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \Leftrightarrow \alpha > 1 \int_{-\infty}^{-a} \frac{dx}{x^\alpha} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Remarque 9: Critére de Cauchy

Considérons la fonction:

$$I(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

La fonction I admet une limite finie lorsque $x \to +\infty$, si l'on a :

$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ A > 0\ \ :\ \ x_1 > Ax_2 > A$

$$\Rightarrow |I(x_1) - I(x_2)| < \varepsilon$$

$$|\int_a^{x_1} f(t)\ dt - \int_a^{x_2} f(t)\ dt| < \varepsilon$$

$$|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\ dt| < \varepsilon$$

Exemple 26:

Soit a un réel strictement positif ($a > 0$), on considére la fonction

$$f(t) = \frac{1}{t^m}\ m$$

• pour $m \neq 1$

$$\int_a^x \frac{dt}{t^m} = \int_a^x t^{-m}\ dt$$

$$= \left[\frac{t^{-m+1}}{-m+1}\right]_a^x$$

$$= \frac{1}{1-m}\left[\frac{1}{x^{m-1}} - \frac{1}{a^{m-1}}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{m-1}} = \begin{cases} 0 & m > 1 \\ +\infty & m < 1 \end{cases}$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^m} = \frac{1}{(1-m)a^{m-1}}$$

• • pour $m = 1$

$$\int_a^x \frac{dt}{t} = [\log(t)]_a^x$$

$$= \log(x) - \log(a)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{dt}{t} = +\infty$$

donc l'intégrale impropre

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^m} = \begin{cases} & \Leftrightarrow \quad m > 1 \\ & \Leftrightarrow \quad m \leq 1 \end{cases}$$

2) Résultats de base sur les intégrales convergentes :

Propriétés 6:

i) $\int_a^{+\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t))\ dt = \alpha \int_a^{+\infty} f(t)\ dt + \beta \int_a^{+\infty} g(t)\ dt,\ \forall \alpha \in IR$ et $\beta \in IR$

ii) $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\ dt \geq 0.$

iii) $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt + \int_c^{+\infty} f(t)\ dt\ , \forall c\ :\ a < c < +\infty$

Preuve :

Les proprietés i) et ii) découlent directement des proprietés de l'intégrale usuelle.

Pour iii) pour $x \in]a,+\infty[$, on applique la formule d'intégration par partie sur l'intervalle $[a,x]$

$$\int_a^x g(t)\,h'(t)\ dt = [g(x)\,h(x)]_a^x - \int_a^x g'(t)\,h(t)\ dt$$

il suffit alors de faire tendre x vers $+\infty$.

Théorème 12:

i) Intégration par parties

Soient g et h deux fonctions de classe C^1 sur $[a,+\infty[$.

Supposons que l'on ait:

α) $\lim_{x \to +\infty} g(x)\,h(x)$ existe et est finie.

β) L'une des intégrales impropres $\int_a^{+\infty} g(t)\,h'(t)\ dt$, $\int_a^{+\infty} g'(t)\,h(t)\ dt$ est convergente.

Alors on a:

$$\int_a^{+\infty} g(t)\,h'(t)\ dt = \lim_{x \to +\infty} [g(x)\,h(x)]_a^x - \int_a^{+\infty} g'(t)\,h(t)\ dt$$

ii) Changement de variables

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction de classe C^1 sur $[a,+\infty[$.

On suppose que $g([a,+\infty[) \subset I.$

Dans ces conditions on a la formule de changement de variables dans tout intervalle $[a,x]$ tel que $a < x < +\infty$:

$$\int_{g(a)}^{g(x)} f(s) ds = \int_a^x f[g(t)]g'(t)\ dt$$

Si l'une des intégrales précédentes admet une limite finie pour x tendant vers $+\infty$, il en est de même de l'autre, et on obtient:

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{g(x)}^{g(b)} f(s) ds = \int_a^{+\infty} f[g(t)]g'(t)\ dt$$

Exemple 27 :

1) Etudions la convergence de l'integrale impropre de la fonction $\frac{\log(t)}{t^2}$ sur $[1,+\infty[$.

Pour $x > 1$, utilisons une intégration par parties pour calculer l'intégrale

$$\int_1^x \frac{\log(t)}{t^2}\ dt = \left[-\frac{\log(t)}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t^2}\ dt$$

$$= -\frac{\log(x)}{x} + 1 - \frac{1}{x}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(t)}{t^2}\ dt = \lim_{x \to +\infty} - \frac{\log(x)}{x} + 1 - \frac{1}{x}$$

$$= 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(x)}{x} = 0$$

2) Etudions la convergence de l'intégrale impropre de $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

Soit $x \in [1,+\infty[$ et considérons l'intégrale:

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\ dt$$

Posons $s = \frac{1}{t} \Rightarrow ds = -\frac{dt}{t^2}$

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\ dt = -\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{s}\sin(\frac{1}{s})\ ds$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt = \int_{0^+}^1 \frac{1}{s}\sin(\frac{1}{s})\ ds$$

Exercice:

Calculer $\int_a^{+\infty} \frac{(\log(t))^m}{t}\ dt$

Théorème 13:

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,+\infty[$ et telles que:

$$f \geq 0 f \leq g[a,+\infty[$$

Alors la convergence de l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} g(t)\ dt$ implique la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$.

Si l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ diverge, il en est de même de l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t)\ dt$.

Remarque 10:

Le Théorème s'applique encore si les mêmes conditions sont vérifiées relativement à un intervalle $]-\infty,a]$.

Preuve:

Considérons les fonctions

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt G(x) = \int_a^x g(t)\ dt$$

D'aprés les hypothèses du théorème on a :

- G est dérivable et a pour dérivée $g > 0$ car $(0 < f < g)$ donc G est croissante.
- $F(x) \leq G(x)$.

Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t)\ dt$ converge, cela entraine que G est majorée d'où F l'est aussi, ce qui donne la convergence de l'integrale $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$.

Pour le cas de l'intervalle $]-\infty,a]$ on considére les fonctions:

$$F_1(x) = \int_x^a f(t)\ dt G_1(x) = \int_x^a g(t)\ dt$$

Les fonctions F_1 et G_1 sont décroissantes et $F_1(x) \leq G_1(x)$. Si G_1 est majorée, il en est de même de F_1.

Exemple 28 :

Etudions l'intégrale impropre de la fonction $\frac{1}{e^t+t^2 e^{-t}}$ sur $]-\infty,+\infty[$

On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^t+t^2 e^{-t}}\ dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{e^t+t^2 e^{-t}}\ dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{e^t+t^2 e^{-t}}\ dt$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{e^t+t^2 e^{-t}}\ dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{1}{e^t+t^2 e^{-t}}\ dt \leq \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{1}{e^t}\ dt = \lim_{x\to+\infty}\Big[1-\frac{1}{e^x}\Big] = 1$$

donc l'intégrale impropre

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{e^t+t^2 e^{-t}}\ dt$$

Pour l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{e^t+t^2 e^{-t}}\ dt$ on considére les deux cas :

• $-1 \leq t \leq 0$, la fonction $t \to \frac{1}{e^t+t^2 e^{-t}}$ est continue ce qui implique que l'intégrale

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{e^t+t^2 e^{-t}}\ dt$$

• • $t \leq -1$, on a

$$\frac{1}{e^t + t^2 e^{-t}} \leq \frac{1}{t^2 e^{-t}} < e^t$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{e^t + t^2 e^{-t}} \, dt \leq \int_{-\infty}^{-1} e^t \, dt = \lim_{x \to -\infty} [e^t]_x^{-1} = \lim_{x \to -\infty} [e^{-1} - e^x] = e^{-1}$$

Par suite,

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{e^t + t^2 e^{-t}} \, dt$$

d'où l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^t + t^2 e^{-t}} \, dt$$

Corollaire 4:

Soient f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $[a, +\infty[$ et intégrables sur l'intervalle $[a, c]$, pour tout $c \in [a, +\infty[$, telles que f et g sont strictement positives ($f > 0$, $g > 0$) sur $[a, +\infty[$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, fini ($k \neq 0$).

Alors

$$\int_{a}^{+\infty} f(t) \, dt \int_{a}^{+\infty} g(t) \, dt$$

On dit que les deux intégrales sont de même nature.

Preuve :

Soit $\varepsilon \in]0, k[$, il existe $A > 0$ tel que pour x vérifiant

$$x > A \quad \Rightarrow \quad |\frac{f(x)}{g(x)} - k| < \varepsilon$$

donc on a

$$(k - \varepsilon)g(x) < f(x) < (k + \varepsilon)g(x)$$

En appliquant le théorème précédent dans l'intervalle $[A, +\infty[$ on a le résultat énnoncé.

Remarque 11:

Le résultat s'étend aux intégrales impropres relatives à $]-\infty, a]$.

Exemple 29 :

1) Etudions la convergence de l'intégrale $f(t) = e^{-t^2}$ sur $[1, +\infty[$. f est continue et strictement positive ($f > 0$). Considérons la fonction $g(t) = e^{-t}$.

Pour $t \geq 1$ on a $e^{-t^2} \leq e^{-t}$

$$\int_1^{+\infty} e^{-t}\, dt = \lim_{x \to +\infty} \int_1^x e^{-t}\, dt = \lim_{x \to +\infty} [-e^{-t}]_{-1}^x = \lim_{x \to +\infty} [-e^{-1} - e^{-x}] = e^{-1}$$

D'où

$$\int_1^{+\infty} e^{-t}\, dt$$

2) Etudions la convergence de l'intégrale $f(t) = \frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}} - 1\right)$ sur $]1, +\infty]$. f est continue et strictement positive ($f > 0$).

Considérons la fonction $g(t) = \frac{1}{t^2}$. on a

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t \to +\infty} t\left(e^{\frac{1}{t}} - 1\right) \\
&= \lim_{t \to +\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{t}} - 1\right)}{\frac{1}{t}} \\
&= \lim_{y \to 0} \frac{(e^y - 1)}{y} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Or

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}\, dt$$

d'où, par application du résultat précédent, la convergence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}} - 1\right)\, dt$$

Exercice:

Etudier la convergence de l'intégrale $f(t) = \frac{dt}{e^t + |t|}$ sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.

3) Intégrales absolument convergentes

1) Définition 12:

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, +\infty[$. on dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est absolument convergente, si l'integrale impropre $\int_a^{+\infty} |f(t)|\ dt$ est convergente.

On a la même définition pour un intervalle de la forme $]-\infty, a]$.

Propriété 7:

La convergence absolue implique la convergence simple.

Soit f une fonction définie sur $[a, +\infty[$ telle que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est absolument convergente c'est à dire $\int_a^{+\infty} |f(t)|\ dt$ est convergente.

Alors l'intégrale impropre

$$\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$$

Preuve :

Utilisons le critère de Cauchy: Notos $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ et pour $x_1 > A$ et $x_2 > A$, on a:

$$\begin{aligned} |F(x_1) - F(x_2)| &= |\int_a^{x_1} f(t)\ dt - \int_a^{x_2} f(t)\ dt| \\ &= |\int_{x_2}^{x_1} f(t)\ dt| \\ &\leq \int_{x_2}^{x_1} |f(t)|\ dt < \varepsilon \end{aligned}$$

Remarque 12:

La convergence simple n'implique pas la convergence absolue

$$\int_a^{+\infty} f(t)\ dt \nRightarrow \int_a^{+\infty} |f(t)|\ dt$$

En effet, si on considére la fonction $f(t) = t\sin(\frac{1}{t})$, on a :

$$\int_\pi^{+\infty} t\sin(\frac{1}{t})\ dt \int_\pi^{+\infty} |t\sin(\frac{1}{t})|\ dt$$

4) Complément sur les intégrales impropres:

Théorème 14:

Soit f et g deux fonctions définies et strictement positives sur l'intervalle $[a, b[$, b peut être fini ou infini.

i) Si $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ et si $\int_a^{b^-} g(t)\ dt$ converge alors $\int_a^{b^-} f(t)\ dt$ converge.

ii) Si $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ et si $\int_a^{b^-} g(t)\ dt$ diverge alors $\int_a^{b^-} f(t)\ dt$ diverge.

Corollaire 5:

Soit f une fonction définies et strictement positives sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

i) Si $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = 0$ et si $\alpha > 1$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ converge.

ii) Si $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$ et si $\alpha < 1$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ diverge.

Ali ALAMI-IDRISSI Saïd EL HAJJI et Samir HAKAM

Université Mohammed V - Agdal

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique

Groupe d'Analyse Numérique et Optimisation

Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014

Rabat, Maroc

Tel et fax +(37)775471

Pages web :

http://www.fsr.ac.ma/ANO/

Email : alidal@fsr.ac.ma elhajji@fsr.ac.ma s-hakam@fsr.ac.ma

http://www.fsr.ac.ma/ANO/elhajji/