

Calcul Intégral

P. Pansu

6 décembre 2011

Conventions

En **bleu**, les paragraphes qui n'ont pas été traités, ou alors de façon évasive. En **rouge**, les démonstrations que tout étudiant doit être capable de refaire. La plupart font l'objet d'un exercice de TD. Elles sont susceptibles d'être exigées aux contrôles.

1 Dénombrabilité

1.1 Définition

Définition 1 *Deux ensembles E et F ont même cardinal s'il existe une bijection de E sur F . Un ensemble est dénombrable s'il a même cardinal que \mathbb{N} .*

Exemple 2 \mathbb{Z} est dénombrable.

Poser $f(n) = 2n$ si $n \geq 0$ et $f(n) = -2n - 1$ si $n < 0$. Dessin.

Proposition 3 *Tout sous-ensemble infini de \mathbb{N} est dénombrable. Tout sous-ensemble infini d'un ensemble dénombrable est dénombrable.*

Numéroter par ordre croissant.

Exemple 4 *L'ensemble des nombres premiers est dénombrable.*

1.2 Résultats

Proposition 5 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

Soit p_n le n -ème nombre premier. Envoyer (n, m) sur $(p_n)^m$.

Corollaire 6 (Hotel de Hilbert) *Un ensemble qui est réunion disjointe d'une suite d'ensembles dénombrable est dénombrable.*

Exemple 7 \mathbb{Q} est dénombrable.

Théorème 1 \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

Preuve On montre par l'absurde que le sous-ensemble E des réels possédant un développement décimal commençant par 0 et ne comportant que des 0 et des 1 n'est pas dénombrable. Sinon, E est une suite x_n , $n \geq 1$. On construit un nombre réel y comme suit. Son premier chiffre après la virgule n'est pas celui de x_1 . Son second chiffre après la virgule n'est pas celui de x_2 , etc.... De la sorte, y diffère de tous les x_n , donc n'appartient pas à E , contradiction. ■

1.3 Propriétés de \mathbb{R}

\mathbb{R} est bien différent de \mathbb{N} , on ne peut pas raisonner sur les réels de la même façon. Ce qui remplace le plus petit élément d'un ensemble d'entier, c'est la borne inférieure d'un ensemble de réels.

Définition 8 Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble majoré. La borne supérieure b de E est le plus petit des majorants. I.e.

$$\forall x \in E, x \leq b, \quad \text{et} \quad \forall \epsilon > 0, \exists x \in E \text{ tel que } b - \epsilon < x \leq b.$$

Si E n'est pas majoré, on pose $\sup E = +\infty$. Idem borne inférieure.

Si u_n est une suite majorée d'entiers, il y a une valeur ℓ qui est prise une infinité de fois. Voici l'analogie pour les suites de réels.

Définition 9 Soit (u_n) une suite majorée de réels. Sa limite supérieure est la borne inférieure de l'ensemble des réels M tels que seul un nombre fini de termes de la suite sont $\geq M$. Par convention, si (u_n) est une suite non majorée de réels, sa limite supérieure vaut $+\infty$.

Proposition 10 Soit (u_n) une suite de réels. Alors

$$\limsup u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{u_k; k \geq n\}.$$

Preuve Voir en TD. ■

2 L'intégrale de Riemann

Idée (dessin) : si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, $\int_a^b f(t) dt$ est l'aire du domaine plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. On approxime ce domaine par une réunion de rectangles. Cela revient à approximer f par une fonction en escalier.

2.1 Historique

Calcul de l'aire sous la parabole par Archimède. Truc pour calculer la somme des puissances k -èmes des premiers entiers.

2.2 Fonctions en escalier

Définition 11 Une subdivision de l'intervalle $[a, b]$, c'est une suite finie S de la forme

$$a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b.$$

Le pas de la subdivision S est $|S| = \max_i |s_{i+1} - s_i|$.

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est en escalier, s'il existe une subdivision $a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$ telle que f est constante sur chaque intervalle ouvert $]s_i, s_{i+1}[$.

L'intégrale d'une fonction en escalier est

$$\sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i) f_i,$$

où f_i est la valeur de f sur l'intervalle $]s_i, s_{i+1}[$.

Analogie pour une fonction bornée quelconque (dessin).

Définition 12 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Soit S une subdivision de $[a, b]$. On note

$$m_i = \inf_{]s_i, s_{i+1}[} f, \quad M_i = \sup_{]s_i, s_{i+1}[} f.$$

On appelle sommes de Darboux de f sur la subdivision S les nombres

$$\sigma(S, f) = \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i) m_i, \quad \Sigma(S, f) = \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i) M_i.$$

Lorsqu'on remplace S par une subdivision plus fine (i.e. qui la contient), $\sigma(S, f)$ augmente, $\Sigma(S, f)$ diminue mais on a toujours $\sigma(S, f) \leq \Sigma(S, f)$. Cela fait penser aux suites adjacentes. Pour qu'il y ait une limite, il suffit que la différence tende vers 0.

2.3 Fonctions Riemann-intégrables

Définition 13 On dit qu'une fonction bornée $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si, quand le pas $|S|$ tend vers 0, la différence $\Sigma(S, f) - \sigma(S, f)$ tend aussi vers 0. Sa limite est l'intégrale de f , notée $\int_a^b f(t) dt$.

Proposition 14 (Admise) Une fonction bornée $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si et seulement si

$$\sup_S \sigma(S, f) = \inf_S \Sigma(S, f).$$

La valeur commune de ces deux nombres est l'intégrale de f

Exemple 15 Pour une fonction en escalier, les deux définitions coïncident.

En effet, m_i ne diffère de M_i que pour les intervalles de la subdivision S qui contiennent une discontinuité de f . Leur nombre est borné, donc la somme de leurs longueurs tend vers 0 avec le pas $|S|$. Les différences $M_i - m_i$ sont bornées, donc $\Sigma(S, f) - \sigma(S, f)$ tend vers 0 avec $|S|$.

2.4 Exemples de fonctions Riemann-intégrables

Proposition 16 Une fonction bornée et monotone sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable.

Dessin.

Proposition 17 Une fonction continue sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable.

Preuve Par uniforme continuité (théorème de Heine-Cantor), pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $x, y \in [a, b]$ et $|x - y| < \delta$, alors $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Soit S une subdivision de $[a, b]$ de pas $< \delta$. Si x et y appartiennent au même intervalle de la subdivision, $|x - y| \leq |S| < \delta$, donc $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Cela entraîne que $M_i - m_i < \epsilon$, et donc que

$$\Sigma(S, f) - \sigma(S, f) = \sum_i (M_i - m_i)(s_{i+1} - s_i) < \epsilon \sum_i (s_{i+1} - s_i) = \epsilon(b - a).$$

On conclut que $\Sigma(S, f) - \sigma(S, f)$ tend vers 0 avec $|S|$. ■

2.5 Intégrales et suites

On ne revient pas sur les propriétés usuelles de l'intégrale. On se concentre sur les questions de convergence. On admettra deux conséquences de la Riemann-intégrabilité. Les preuves sont simples mais un peu longues.

1. On peut voir l'intégrale comme une limite.

Proposition 18 (Admis) Soit $n \geq 1$ un entier. On choisit un point $t_i \in [a + i\frac{b-a}{n}, a + (i+1)\frac{b-a}{n}]$. On appelle sommes de Riemann de f les nombres

$$\Sigma_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i).$$

Si f est Riemann-intégrable, alors la suite $\Sigma_n(f)$ converge et alors

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n(f).$$

Cela sert surtout à prouver la convergence de suites et à en donner la limite, voir TD.

2. On peut voir la Riemann-intégrabilité comme une propriété d'approximation par des fonctions en escalier.

Proposition 19 (Admis) Une fonction bornée $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier g et h telles que $g \leq f \leq h$ et $\int_a^b (h-g)(t) dt < \epsilon$.

Remarquer que c'est une intégrale qui sert à mesurer l'écart entre g et h .

2.6 Convergence uniforme

Théorème 2 Si (f_n) est une suite de fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers une fonction f , alors f est Riemann-intégrable.

Preuve (A savoir refaire, voir en TD).

1. f est bornée.

2. Soit $\epsilon_n = \sup |f - f_n|$. Comme f_n converge uniformément vers f , ϵ_n tend vers 0.

Sur toute subdivision, on a pour tout i , $m_i(f_n) - \epsilon_n \leq m_i(f)$ et $M_i(f) \leq M_i(f_n) + \epsilon_n$. D'où

$$\sigma(S, f_n) - \epsilon_n(b-a) \leq \sigma(S, f) \leq \Sigma(S, f) \leq \Sigma(S, f_n) + \epsilon_n(b-a).$$

Comme f_n est Riemann-intégrable, pour tout n ,

$$\int_a^b f_n(s) ds - \epsilon_n(b-a) \leq \sup_S \sigma(S, f) \leq \inf_S \Sigma(S, f) \leq \int_a^b f_n(s) ds + \epsilon_n(b-a).$$

En faisant tendre n vers l'infini, il vient

$$\sup_S \sigma(S, f) = \inf_S \Sigma(S, f),$$

donc f est Riemann-intégrable. ■

Exemple 20 Toute fonction continue par morceaux est limite uniforme de fonctions en escalier.

Utiliser la continuité uniforme, comme dans la preuve de la proposition 17.

Définition 21 On appelle fonctions réglées les limites uniformes de fonctions en escalier.

Un théorème (que nous ne démontrerons pas) affirme qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est réglée si et seulement si elle admet en chaque point une limite à droite et une limite à gauche. On verra en TD qu'une fonction réglée est bornée et est continue sauf en un nombre fini ou dénombrable de points.

Exemple 22 (Fonction réglée avec une infinité de discontinuités) Soit f la fonction qui vaut $1/n$ sur $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ et 0 en 0. Alors f est réglée sur $[0, 1]$.

On pose $f_n = f$ sur $]\frac{1}{n}, 1]$ et 0 ailleurs. Alors f_n est en escalier et $\sup |f - f_n| \leq \frac{1}{n}$.

Exemple 23 (Fonction réglée discontinue sur un ensemble dense) Soit f la fonction qui vaut $1/q$ sur les rationnels de $[0, 1]$ de dénominateur q et 0 ailleurs. Alors f est réglée.

f est continue en tous les irrationnels. Soit f_n la fonction qui vaut $1/q$ sur les rationnels de $[0, 1]$ de dénominateur $q \leq n$ et 0 ailleurs. Alors f est en escalier et $\sup |f - f_n| \leq \frac{1}{n}$.

2.7 Exemple de fonction qui n'est pas Riemann-intégrable

Exemple 24 Soit f la fonction qui vaut 1 sur $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ et 0 ailleurs. Alors f n'est pas Riemann-intégrable.

En effet, sur tout intervalle de toute subdivision, $m_i = 0$ et $M_i = 1$ donc $\sigma(S, f) = 0$, $\Sigma(S, f) = 1$, la différence ne tend pas vers 0.

2.8 Exemple de fonction Riemann-intégrable qui n'est pas réglée

Soit $E_0 = [0, 1]$. Soit $E_1 \subset E_0$ le complémentaire de l'intervalle central $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Soit $E_2 \subset E_1$ l'ensemble obtenu en retirant à E_1 les deux intervalles centraux $]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$ et $]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$. On continue : E_n est la réunion de 2^n intervalles de longueur 3^{-n} . On obtient E_{n+1} en retirant à chacun de ces intervalles son intervalle central. Ce procédé donne une suite décroissante d'ensembles. Soit

$$E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

Soit $f = \chi_E$ sa fonction caractéristique. La fonction $f_n = \chi_{E_n}$ est en escalier et son intégrale vaut $\frac{2^n}{3^n}$. Comme $0 \leq f \leq f_n$, cela prouve que f est Riemann-intégrable.

Proposition 25 f est discontinue en tout point de E .

Preuve Soit $x_0 \in E$. Soit $\epsilon > 0$. Si $3^n > 1/\epsilon$, l'intervalle $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ est plus long que les intervalles qui constituent E_n , donc il n'est pas contenu dans E_n . Il existe donc $x \in]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ tel que $f(x) = 0$, alors que $f(x_0) = 1$. Par conséquent, f n'est pas continue en x_0 . ■

Proposition 26 E n'est pas dénombrable.

Preuve Les points de E sont exactement les réels qui possèdent un développement en base 3 commençant par 0, ... et ne comportant aucun chiffre 1. Soit F l'ensemble des suites infinies de 0 et de 1. On a prouvé (Théorème 1) que F n'est pas dénombrable. Soit $G \subset F$ le sous-ensemble des suites qui se terminent par une infinité de 0 ou une infinité de 2. Alors G est dénombrable, donc $F \setminus G$ est non dénombrable. L'application qui à une suite de $F \setminus G$ associe le réel dont c'est le développement en base 3 est injective. Son image est E privé des nombres rationnels dont le dénominateur est une puissance de 3. Cet ensemble est donc non dénombrable, et E l'est aussi. ■

Corollaire 27 f n'est pas réglée.

En effet, l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée est dénombrable (TD n°1).

3 Le théorème de convergence dominée

C'est un théorème qui permet, comme le Théorème 2, d'intervertir limite et intégrale, mais il est bien meilleur car ses hypothèses sont faibles et simples à vérifier.

3.1 Marche d'approche

Le rêve : si une suite de fonctions converge simplement (pour chaque $x \in [a, b]$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$), alors $\int_a^b f_k(x) dx$ tend vers $\int_a^b f(x) dx$.

C'est un rêve impossible, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 28 Pour $k \geq 2$, soit f_k la fonction continue sur $[0, 1]$, affine par morceaux, qui vaut 0 en 0 et sur $[\frac{2}{k}, 1]$, et qui vaut k en $\frac{1}{k}$. Alors la suite de fonctions (f_k) converge simplement vers 0, mais $\int_0^1 f_k(x) dx = 1$ pour tout $k \geq 2$.

Il faut donc une hypothèse supplémentaire.

3.2 Quelles fonctions intégrer ?

Poursuivons le rêve fou. On voudrait pouvoir intégrer toutes les fonctions. Ce n'est pas possible, même pour des fonctions bornées sur un intervalle $[a, b]$ (difficile à expliquer). On voudrait au moins pouvoir intégrer toutes les fonctions qui sont des limites simples de fonctions en escalier. C'est une bonne idée, donnons un nom à ces fonctions.

Définition 29 (Provisoire, on la modifiera ensuite) On dit qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est borélienne si c'est la limite simple d'une suite de fonctions en escalier sur \mathbb{R} . Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est borélienne si c'est la limite simple d'une suite de fonctions en escalier définies sur des intervalles de plus en plus grands.

Mais il faut se méfier, il y a des limites de fonctions en escalier dont l'intégrale est infinie.

Exemple 30 La fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in]0, 1]$ est limite simple d'une suite de fonctions en escalier, elle est donc borélienne, mais son intégrale est infinie.

En effet, utilisons la subdivision régulière en 2^k intervalles. Soit f_k l'approximation inférieure d'Archimède, i.e. sur $[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}[$, f_k vaut $\frac{2^k}{i+1}$.

Dans cet exemple, pour tout $x \in [0, 1]$, la suite $(f_k(x))$ est croissante. On dit que f est *limite croissante* des f_k . Et on constate que l'intégrale $\int_0^1 f_k(x) dx = \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \sim k$ tend vers $+\infty$.

C'est une bonne idée d'étudier les limites croissantes. Mais les fonctions en escalier majorées par une fonction donnée sont parfois trop peu nombreuses (difficile à expliquer). Voici l'analogie borélienne des fonctions en escalier.

Définition 31 On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est étagée si elle est borélienne et ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Exemple 32 La fonction caractéristique f de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ (exemple 24) est étagée.

En effet, soit f_k la fonction qui vaut 1 sur les rationnels de dénominateur $\leq k$, et 0 ailleurs. La suite de fonctions f_k converge simplement vers f , donc f est borélienne. Comme elle ne prend que les valeurs 0 et 1, elle est étagée.

3.3 Fonctions intégrables (provisoire)

Admettons pour l'instant (on y reviendra) qu'on sache étendre à toutes les fonctions étagées positives l'intégrale des fonctions en escalier.

Définition 33 Une fonction positive $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est intégrable si elle est borélienne et si les intégrales des fonctions étagées majorées par f restent bornées. Son intégrale est la borne supérieure de ces intégrales. Autrement dit, si on note \mathcal{E}^+ l'ensemble des fonctions étagées positives,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \sup_{\{g \in \mathcal{E}^+ ; g \leq f\}} \int_{\mathbb{R}} g(x) dx.$$

Une fonction de signe quelconque $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable si elle est borélienne et si $|f|$ est intégrable.

Cette définition est difficile à avaler. On y reviendra.

3.4 Recette pour vérifier qu'une fonction d'usage courant est intégrable

Dans l'immédiat, il faut savoir qu'il est souvent assez facile de vérifier qu'une fonction est intégrable.

Exemple 34 Une fonction en escalier sur $[a, b]$, prolongée par 0 hors de $[a, b]$, est intégrable et son intégrale est donnée par la formule usuelle, celle de la définition 11.

Plus généralement, si on sait étudier la convergence d'intégrales généralisées de fonctions positives, on sait décider si une fonction continue par morceaux sur \mathbb{R} est intégrable ou non.

Proposition 35 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux avec asymptotes éventuelles, i.e. continue sauf en un nombre fini de points $-\infty = t_0 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_k = +\infty$. f est intégrable si et seulement si toutes les intégrales généralisées $\int_{t_i}^{t_{i+1}} |f(x)| dx$ sont convergentes (i.e. convergentes aux deux bornes). Dans ce cas, l'intégrale est donnée par la formule usuelle.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x) dx.$$

Exemple 36 $f(x) = \min\{1, \frac{1}{x^2}\}$ est intégrable sur \mathbb{R} .

En effet, f est continue et l'intégrale généralisée converge en $-\infty$ et en $+\infty$. On a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} + \int_{-1}^1 dx + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 4.$$

Exemple 37 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ n'est pas intégrable sur \mathbb{R} .

En effet, il y a une discontinuité en 0. L'intégrale généralisée converge en $-\infty$ et en $+\infty$ mais pas en $0-$ ni $0+$.

3.5 Énoncé du théorème

Théorème 3 (Théorème de convergence dominée, H. Lebesgue) Soit (f_k) une suite de fonctions intégrables sur \mathbb{R} telle que

1. Convergence. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ existe.
2. Domination. Pour tout k , $|f_k| \leq g$ où g est une fonction positive indépendante de k .

3. Intégrabilité. g est une fonction intégrable sur \mathbb{R} .

Alors f est intégrable sur \mathbb{R} , et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}} (\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

Exemple 38 Soit f_k la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^k$ si $x \in [0, 1]$, 0 ailleurs. Alors la suite (f_k) converge simplement vers la fonction f qui vaut 1 en 1 et 0 ailleurs. Par conséquent,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx = 0.$$

Remarquer que la suite de fonctions (f_k) ne converge pas uniformément vers f .

Exemple 39 Soit f_k la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 1$ si $x \in [k, k + 1]$, 0 ailleurs. Alors la suite (f_k) converge simplement vers 0. Pourtant

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx = 1.$$

L'hypothèse de domination est satisfaite avec $g = 1$ mais g n'est pas intégrable sur \mathbb{R} (intégrale généralisée divergente en $+\infty$).

Fin du cours n^o2

3.6 Intégrales dépendant d'un paramètre

Ce sont des conséquences du théorème de convergence dominée.

Corollaire 40 Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $s_0 \in I$. Soit $f : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. On suppose que pour tout s fixé dans I , la fonction $x \mapsto f(x, s)$ est intégrable sur \mathbb{R} . Pour $s \in I$, on pose

$$F(s) = \int_{\mathbb{R}} f(x, s) dx.$$

On fait les hypothèses suivantes.

1. Continuité. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $s \mapsto f(x, s)$ est continue en s_0 ;
2. Domination. Pour tout $s \in I$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x, s)| \leq g(x)$ où g est une fonction positive indépendante de s .
3. Intégrabilité. g est une fonction intégrable sur \mathbb{R} .

Alors, $s \mapsto F(s)$ est continue en s_0 , i.e.

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \int_{\mathbb{R}} f(x, s) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x, s_0) dx.$$

Preuve Il suffit de vérifier que pour toute suite s_k convergeant vers s_0 , $F(s_k)$ tend vers $F(s_0)$. Or $F(s_k) = \int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx$, où la suite de fonctions définie par $f_k(x) = f(x, s_k)$ satisfait aux hypothèses du théorème de convergence dominée. ■

Exemple 41 Pour $s \in \mathbb{R}$, soit

$$F(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(sx)}{1+x^2} dx.$$

Alors F est continue sur \mathbb{R} .

En effet, pour tout x , $f(x, s) = \frac{\cos(sx)}{1+x^2}$ est une fonction continue de x , dominée par $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ qui est intégrable car continue sur \mathbb{R} et d'intégrale généralisée est convergente en $+\infty$ et en $-\infty$.

Corollaire 42 (Dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre). *Soit $f(x, s)$ une fonction à valeurs complexes, définie pour $x \in \mathbb{R}$ et pour $s \in]s_0, s_1[\subset \mathbb{R}$. On suppose que pour tout s fixé dans $]s_0, s_1[$, la fonction f est intégrable sur \mathbb{R} . Pour $s \in]s_0, s_1[$, on pose*

$$F(s) = \int_{\mathbb{R}} f(x, s) dx.$$

On fait les hypothèses suivantes.

1. Dérivabilité. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x, s)$ est dérivable par rapport à s ;
2. Domination. Pour tout $s \in]s_0, s_1[$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|\frac{\partial f}{\partial s}(x, s)| \leq g$ où g est une fonction positive indépendante de s .
3. Intégrabilité. g est une fonction intégrable sur \mathbb{R} .

Alors, F est dérivable par rapport à s , de dérivée

$$F'(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial s}(x, s) dx.$$

Autrement dit,

$$\frac{d}{ds} \int_{\mathbb{R}} f(x, s) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial s}(x, s) dx.$$

Preuve (A savoir refaire, voir en TD). Il suffit de vérifier que pour toute suite s_k convergeant vers $s \in]s_0, s_1[$, $\frac{F(s_k) - F(s)}{s_k - s}$ tend vers $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial s}(x, s) dx$. Or $\frac{F(s_k) - F(s)}{s_k - s} = \int_{\mathbb{R}} g_k(x) dx$, où la suite de fonctions définie par $g_k(x) = \frac{f(x, s_k) - f(x, s)}{s_k - s}$ satisfait aux hypothèses du théorème de convergence dominée. La domination résulte de l'inégalité des accroissements finis,

$$\left| \frac{f(x, s_k) - f(x, s)}{s_k - s} \right| \leq \sup_{u \in [s, s_k]} \left| \frac{\partial f}{\partial s}(x, u) \right| \leq g(x).$$

■

Exemple 43 Pour $s \in \mathbb{R}$, soit

$$H(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(sx)}{1+x^4} dx.$$

Alors H est dérivable sur \mathbb{R} .

En effet, pour tout x , $h(x, s) = \frac{\cos(sx)}{1+x^4}$ est une fonction dérivable de s , sa dérivée $\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{-x \sin(sx)}{1+x^4}$ est dominée par $k(x) = \frac{|x|}{1+x^4}$ qui est intégrable car continue sur \mathbb{R} et d'intégrale généralisée convergente en $+\infty$ et en $-\infty$. En revanche, le théorème ne s'applique pas directement à $F(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(sx)}{1+x^2} dx$, car $\frac{|x|}{1+x^2}$ n'est pas intégrable. On peut calculer indirectement $F(s) = e^{-|s|}$ et constater qu'elle n'est pas dérivable en 0.

4 Théorie de la mesure

On a vu que les fonctions étagées doivent remplacer les fonctions en escalier. Les fonctions étagées les plus simples sont les fonctions caractéristiques d'ensembles. On appelle *mesure* d'un ensemble l'intégrale de sa fonction caractéristique. Cela généralise la longueur d'un intervalle (qui est bien l'intégrale de sa fonction caractéristique). Inversement, on peut partir de la mesure des ensembles pour construire l'intégrale des fonctions.

Lettre au Père Noël : on fait une liste des propriétés qu'on attend

- de la famille \mathcal{T} d'ensembles pour lesquels la mesure est définie (on les appelle ensembles *mesurables*) ;
- de la fonction μ qui à un ensemble associe sa mesure.

4.1 Propriétés de la famille des ensembles mesurables

1. Si A est mesurable, son complémentaire l'est aussi.
2. Si A et B sont mesurables, leur réunion $A \cup B$ l'est aussi.
3. Si (A_k) est une suite d'ensembles mesurables, alors la réunion $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ est mesurable.
4. L'ensemble vide est mesurable.

La seconde propriété reflète le fait qu'on souhaite qu'une limite simple de fonctions boréliennes (ici, les fonctions caractéristiques des ensembles $B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$) soit borélienne.

Définition 44 Une tribu sur un ensemble E est une famille de sous-ensembles de E qui satisfait ces 4 propriétés.

Remarque 45 Une tribu est aussi stable par intersection finie ou dénombrable.

Définition 46 La tribu borélienne de \mathbb{R} est la plus petite tribu sur \mathbb{R} contenant tous les intervalles. Elle contient tout ce qu'on peut obtenir à partir d'intervalles en faisant des réunions et intersections dénombrables, et des passages au complémentaire.

On appelle ensemble *borélien* un élément de la tribu borélienne.

Définition 47 La tribu borélienne de \mathbb{R}^2 est la plus petite tribu sur \mathbb{R}^2 contenant tous les rectangles, i.e. les ensembles de la forme $I \times I'$, où I et I' sont des intervalles. Elle contient tout ce qu'on peut obtenir à partir de rectangles en faisant des réunions et intersections dénombrables, et des passages au complémentaire.

Les réunions finies de rectangles sont boréliennes. Par ce moyen, on n'obtient que des polygones dont les côtés sont parallèles aux axes. En considérant des réunions dénombrables, on obtient beaucoup plus d'exemples (en fait, tous les ensembles qu'on peut imaginer sont boréliens).

Exemple 48 Tout demi-plan ouvert de \mathbb{R}^2 appartient à la tribu borélienne.

Preuve (A savoir refaire, voir en TD). Montrons que le demi-plan ouvert $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y > x\}$ est borélien. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $R_t =]-\infty, t[\times]t, +\infty[$ est borélien par définition. D est la réunion des R_t , mais cette famille est non dénombrable. Considérons la famille des R_t pour $t \in \mathbb{Q}$. Celle-là est dénombrable. Montrons que $D = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} R_t$. Soit D_n la réunion des R_t pour les rationnels

t qui sont des multiples entiers de $1/n$. Alors D_n est un polygone, lieu des points situés au-dessus de l'escalier posé sur la bissectrice $\{y = x\}$, dont les marches ont une hauteur et une largeur égales à $1/n$. Si $(x, y) \in D$, alors $y > x$. il existe un entier n tel que $y > x + 1/n$. Qu'on fasse un pas à droite (changer (x, y) en $(x + \frac{1}{n}, y)$) ou vers le bas (changer (x, y) en $(x, y - \frac{1}{n})$), on reste dans D . Par conséquent, (x, y) est au-dessus de l'escalier, donc $(x, y) \in D_n$. Cela prouve que $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$,

et donc que $D = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} R_t$. En particulier, D est borélien. ■

4.2 Propriétés de la mesure

1. L'ensemble vide a une mesure nulle.
2. *Additivité*. Si A et B sont mesurables et deux à deux disjoints, la mesure de $A \cup B$ est la somme des mesures de A et de B .
3. *σ -additivité*. Si (A_k) est une suite d'ensembles mesurables et deux à deux disjoints, la mesure de $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ est la somme des mesures des A_k .

La troisième propriété reflète le fait qu'on espère pouvoir intervertir intégrale et limite simple.

Définition 49 Une mesure sur un ensemble E muni d'une tribu \mathcal{T} est une application $\mathcal{T} \rightarrow [0, +\infty]$ qui satisfait ces 3 propriétés.

Remarquer que la valeur $+\infty$ est admise, avec la convention que $+\infty + x = +\infty$ pour tout $x \in [0, +\infty]$. Aussi, dans la propriété 3., si la série des mesures des A_k est divergente, on convient que sa somme vaut $+\infty$.

Exemple 50 Sur \mathbb{N} et \mathbb{Z} , on utilise la tribu contenant tous les sous-ensembles (c'est évidemment une tribu) et la mesure de comptage : $\mu(A)$ est le nombre d'éléments de A .

Exemple 51 Sur \mathbb{R} muni de la tribu borélienne, soit δ_a la mesure définie par

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On l'appelle la mesure de Dirac au point a .

Exemple 52 On peut faire des sommes pondérées de mesures. Par exemple, sur \mathbb{R} muni de la tribu borélienne, soit (a_n) une suite de points et p_n une suite de nombres positifs. On note $\mu = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \delta_{a_n}$ la mesure définie par $\mu(A) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \delta_{a_n}(A)$. Les mesures obtenues par cette construction sont appelées atomiques.

Voici un exemple moins simple (réponse favorable du Père Noël à notre requête).

Théorème 4 (H. Lebesgue, admis) Sur \mathbb{R} muni de la tribu borélienne, il existe une unique mesure λ telle que pour tout $a < b$, $\lambda([a, b]) = b - a$.

Définition 53 Cette mesure s'appelle la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

4.3 Propriétés générales des mesures positives

Proposition 54 Toute mesure μ possède automatiquement les propriétés suivantes.

1. Si $A \subset B$, $\mu(A) \leq \mu(B)$. Si, de plus, $\mu(B) < +\infty$, alors $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
2. $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B)$.
3. Si $A_k \in \mathcal{T}$ est une suite croissante d'ensembles mesurables ($A_k \subset A_{k+1}$), alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right).$$

4. Si $B_k \in \mathcal{T}$ est une suite décroissante d'ensembles mesurables ($B_k \supset B_{k+1}$), et si $\mu(B_0) < \infty$, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B_k) = \mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k\right).$$

5. Pour une suite quelconque d'ensembles mesurables A_k ,

$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k).$$

Preuve (A savoir refaire. Voir en TD).

3. Soit $A'_0 = A_0$ et, pour $k \geq 1$, $A'_k = A_k \setminus A'_{k-1}$ (faire un dessin). Alors les A'_k sont mesurables, deux à deux disjoints, $A_n = \bigcup_{k=0}^n A'_k$, $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} A'_k$, donc quand n tend vers l'infini, $\mu(A_n) = \sum_{k=0}^n \mu(A'_k)$ converge vers

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(A'_k) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A'_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right).$$

4. Soit $A_k = B_0 \setminus B_k$, c'est un ensemble mesurable (faire un dessin). La suite A_k est croissante. $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = B_0 \setminus \bigcap_{k=0}^{\infty} B_k$. D'après 1. et 3.,

$$\begin{aligned} \mu(B_0) - \mu\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} B_k\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu(B_0) - \mu(B_k)) \\ &= \mu(B_0) - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B_k), \end{aligned}$$

donc $\mu\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B_k)$.

5. Soit $A'_0 = A_0$ et, pour $n \geq 1$, $A'_n = A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$, ce sont des ensembles mesurables deux à deux disjoints, et $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=0}^{\infty} A'_n$. D'après 1., $\mu(A'_n) \leq \mu(A_n)$. Il vient

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A'_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A'_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

■

Dans la propriété 4, on a effectivement besoin de supposer que les ensembles B_k sont de mesure finie.

Exemple 55 Dans $E = \mathbb{N}$ muni de la tribu de tous les sous-ensembles de \mathbb{N} et de la mesure de comptage, soit $B_k = \{n \in \mathbb{N}; n \geq k\}$. Alors $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k = \emptyset$ est de mesure nulle, alors que $\mu(B_k) = +\infty$ pour tout k .

Fin du cours n°3

4.4 Fonctions mesurables

Définition 56 Soit E un ensemble muni d'une tribu \mathcal{T} . Une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable si pour tout ensemble borélien $B \subset \mathbb{R}$, l'image réciproque $f^{-1}(B) = \{x \in E; f(x) \in B\}$ est mesurable, i.e. appartient à \mathcal{T} .

Proposition 57 Soit E un ensemble muni d'une tribu \mathcal{T} . Pour vérifier qu'une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable, il suffit de vérifier que les ensembles $f^{-1}(] - \infty, a[)$ sont mesurables.

En effet, la famille des sous-ensembles $B \subset \mathbb{R}$ tels que $f^{-1}(B)$ est mesurable est une tribu. Si elle contient les demi-droites $] - \infty, a[$, elle contient automatiquement tous les intervalles, et, par définition, elle contient la tribu borélienne.

Exemple 58 Toute fonction continue sur \mathbb{R} est mesurable.

En effet, si f est continue, $f^{-1}(] - \infty, a[)$ est un ouvert, donc une réunion dénombrable d'intervalles ouverts (voir le cours de Calcul Différentiel).

Proposition 59 Si f et g sont des fonctions mesurables sur (E, \mathcal{T}) , alors $f + g$, fg , $\min\{f, g\}$, $f^+ = \max\{f, 0\}$, $|f|$ sont mesurables.

Preuve Pour f^+ et $|f|$, on remarque que $x \mapsto \max\{x, 0\}$ et $x \mapsto |x|$ sont des fonctions continues donc mesurables sur \mathbb{R} . La composition $g \circ f$ de $f = E \rightarrow \mathbb{R}$ avec une fonction mesurable $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable, donc f^+ et $|f|$ sont mesurables.

On munit \mathbb{R}^2 de sa tribu borélienne. On montre que l'addition $A : (x, y) \mapsto x + y$, la multiplication $M : (x, y) \mapsto xy$ et le min $m : (x, y) \mapsto \min\{x, y\}$ sont mesurables. Par exemple, $A^{-1}(] - \infty, a[) = \{(x, y); x + y < a\}$ est un demi-plan ouvert, qui est borélien (exemple 47). ■

Proposition 60 Soit f_k une suite de fonctions mesurables sur (E, \mathcal{T}) . Alors $\sup_k f_k$, $\inf_k f_k$, $\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$ et $\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$ sont mesurables. En particulier, si f_k converge simplement vers f , alors f est mesurable.

Preuve Soit $g = \sup_k f_k$. Alors $g(x) > a \Leftrightarrow \exists k$ tel que $f_k(x) > a$. Par conséquent, $g^{-1}(]a, +\infty[) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f_k^{-1}(]a, +\infty[)$ est une réunion dénombrable d'ensembles mesurables, donc est mesurable.

Comme $\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} (\inf_{k \geq n} f_k)$, cette fonction est mesurable. Si la suite (f_k) converge simplement vers f , alors $f = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$ est mesurable. ■

4.5 Mesure image

Définition 61 Soit E un ensemble muni d'une tribu \mathcal{T} et d'une mesure μ , soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. La mesure image de μ par f , notée $f_*\mu$, est la mesure sur \mathbb{R} muni de la tribu borélienne définie sur un ensemble borélien A de \mathbb{R} par

$$f_*\mu(A) = \mu(f^{-1}(A)).$$

C'est bien une mesure. En effet, si les A_k sont deux à deux disjoints, il en est de même des $f^{-1}(A_k)$ (dessin), et $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_k) = f^{-1}(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k)$.

En probabilités, on modélise les variables aléatoires par des fonctions X mesurables sur un ensemble E muni d'une tribu et d'une mesure μ . Ce qu'on cherche à calculer, c'est la probabilité d'événements liés à X , comme $\mathbb{P}(a < X < b) = X_*\mu(]a, b[)$. Cette probabilité ne dépend que de la mesure image sur \mathbb{R} , que les probabilistes appellent *loi* ou *distribution* de X .

5 Intégration par rapport à une mesure

On va définir l'intégrale d'une fonction mesurable par rapport à une mesure quelconque. Il est utile de procéder dans une grande généralité, d'abord parce que la théorie des probabilités en a besoin, ensuite parce que cela rend les énoncés très concis. Mais on a toujours en tête l'exemple de la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

On peut manipuler sans danger des intégrales qui valent $+\infty$, tant qu'on ne fait que les ajouter, sans jamais les soustraire (le véritable ennemi, c'est $\infty - \infty$). Donc on commence par intégrer des fonctions positives, et on autorise qu'elles prennent la valeur $+\infty$.

5.1 Intégrales des fonctions étagées

On définit d'abord l'intégrale des fonctions étagées, puis celle des fonctions positives générales en maximisant sur les fonctions étagées qu'elles majorent.

Notation 62 On note χ_A la fonction caractéristique d'un sous-ensemble A , i.e. la fonction qui vaut 1 sur A et 0 ailleurs.

Définition 63 Soit E un ensemble muni d'une tribu \mathcal{T} et d'une mesure μ . Une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est étagée si elle est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs $y_1 < y_2 < \dots < y_k$. On pose alors $A_i = f^{-1}(y_i)$ (de sorte que $f = \sum_{i=1}^k y_i \chi_{A_i}$), et

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^k y_i \mu(A_i).$$

Exercice 64 Une autre écriture $f = \sum_{i=1}^{k'} y'_i \chi_{A'_i}$, avec des A'_i deux à deux disjoints, donne la même intégrale,

$$\sum_{i=1}^k y_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{k'} y'_i \mu(A'_i).$$

Preuve Chaque A_i est la réunion disjointe des ensembles de la famille $\{A'_j; y'_j = y_i\}$, donc

$$\mu(A_i) = \sum_{\{j; y'_j = y_i\}} \mu(A'_j),$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k y_i \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^k y_i \left(\sum_{\{j; y'_j = y_i\}} \mu(A'_j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\sum_{\{j; y'_j = y_i\}} y'_j \mu(A'_j) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{k'} y'_j \mu(A'_j). \end{aligned}$$

■

Proposition 65 (Linéarité et croissance de l'espérance) 1. L'intégrale est une forme linéaire sur l'espace vectoriel \mathcal{E} des fonctions étagées, i.e. si f, g sont des fonctions étagées et $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu.$$

2. L'intégrale est croissante, i.e. si f, g sont des fonctions étagées et $f \leq g$, alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Preuve Soit $f = \sum_{i=1}^k y_i \chi_{A_i}$, $g = \sum_{i=1}^{k'} y'_i \chi_{A'_i}$.

1. On introduit les ensembles deux à deux disjoints $B_j = A_i \cap A'_i$, et on écrit

$$f = \sum_{j=1}^{\ell} z_j \chi_{B_j}, \quad g = \sum_{j=1}^{\ell} z'_j \chi_{B_j},$$

où il peut y avoir des répétitions dans les z_j et z'_j . D'après l'exercice 64, ça ne change pas l'expression de l'intégrale, et

$$\begin{aligned} \int (af + bg) d\mu &= \int \left(\sum_{j=1}^{\ell} (az_j + bz'_j) \chi_{B_j} \right) d\mu \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} (az_j + bz'_j) \mu(B_j) \\ &= a \left(\sum_{j=1}^{\ell} z_j \mu(B_j) \right) + b \left(\sum_{j=1}^{\ell} z'_j \mu(B_j) \right) \\ &= a \int f d\mu + b \int g d\mu. \end{aligned}$$

2. $g - f$ est une fonction étagée à valeurs positives, donc $\int (g - f) d\mu \geq 0$. D'après 1.,

$$\int g d\mu = \int f d\mu + \int (g - f) d\mu \geq \int f d\mu.$$

■

5.2 Intégrales des fonctions positives

Définition 66 Soit E un ensemble muni d'une tribu \mathcal{T} et d'une mesure μ . On note \mathcal{E}_+ l'ensemble des fonctions étagées positives. Soit $f : E \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable. On pose

$$\int f d\mu = \sup_{\{g \in \mathcal{E}_+; g \leq f\}} \int g d\mu.$$

On note parfois $\int f d\mu = \int f(x) d\mu(x)$.

Exemple 67 Soit $E = \mathbb{N}$, $\mathcal{T} =$ tous les sous-ensembles de \mathbb{N} , $\mu =$ mesure de comptage. Pour toute fonction positive $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $\int f d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$.

Preuve Les fonctions positives étagées intégrables sont les suites positives ayant seulement un nombre fini de termes non nuls. Si g est une telle fonction, et $g \leq f$, alors $\int g d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$. En considérant la suite g_N définie par

$$g_N(n) = \begin{cases} f(n) & \text{si } n \leq N, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on voit que le sup est exactement $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$. ■

Exemple 68 Soit $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} =$ tribu borélienne, $\lambda =$ mesure de Lebesgue. Soit f une fonction mesurable positive bornée par M sur \mathbb{R} , nulle hors d'un intervalle borné $[a, b]$. Alors $\int f d\mu \leq M|b - a|$.

Preuve Supposons que $0 \leq f \leq M$ et f est nulle hors de $[a, b]$. Si g est une fonction positive étagée sur \mathbb{R} telle que $g \leq f$, alors $g = \sum_{i=0}^k y_i \chi_{A_i}$ avec $y_0 = 0$ et les A_i pour $i \geq 1$ sont 2 à 2 disjoints et contenus dans $[a, b]$. De plus, $0 \leq y_i \leq M$. Par conséquent,

$$\int g d\lambda \leq M \sum_{i=1}^k \lambda(A_i) \leq M|b - a|.$$

Cela prouve que le sup des intégrales des fonctions g est $\leq M|b - a|$, donc f est intégrable et $\int f d\mu \leq M|b - a|$. ■

Remarque 69 Par construction, l'intégrale est croissante, elle est nulle lorsque $\mu(\{x \in E; f(x) > 0\}) = 0$.

En effet, si $g = \sum_{i=1}^k y_i \chi_{A_i} \in \mathcal{E}_+$ et $g \leq f$, alors $\mu(\{x \in E; g(x) > 0\}) = 0$, donc seule la valeur $y_i = 0$ donne un A_i de mesure non nulle, donc $\int g d\mu = 0$. D'où $\int f d\mu = 0$.

Théorème 5 (Théorème de convergence monotone) Soit E un ensemble muni d'une tribu \mathcal{T} et d'une mesure μ . Soit (f_n) une suite croissante (i.e. $f_n \leq f_{n+1}$) de fonctions mesurables positives qui converge vers f . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu = \int (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n) d\mu.$$

Autrement dit, si la suite de fonctions est positive croissante, on peut intervertir intégrale et limite.

L'énoncé signifie que l'un des membres vaut $+\infty$ si et seulement si l'autre vaut aussi $+\infty$.

Preuve Par croissance de l'intégrale, $\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$. Inversement, soit $g = \sum_{i=1}^k y_i \chi_{A_i}$ une fonction étagée quelconque majorée par f . Si $a < 1$, les ensembles mesurables $E_n = \{x \in E; ag(x) \leq f_n(x)\}$ forment une suite croissante de sous-ensembles dont la réunion est E . Par

conséquent, pour tout i , les $E_n \cap A_i$ forment une suite croissante de sous-ensembles dont la réunion est A_i , d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n \cap A_i) = \mu(A_i).$$

Sur E_n , $f_n \geq ag$, donc, sur E tout entier, on peut écrire $f_n \geq ag\chi_{E_n}$, d'où

$$\int f_n d\mu \geq \int (ag\chi_{E_n}) d\mu = a \sum_{i=1}^k y_i \mu(E_n \cap A_i),$$

et le membre de droite tend vers $a \sum_{i=1}^k y_i \mu(A_i) = a \int g d\mu$ lorsque n tend vers l'infini. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq a \int g d\mu$$

puis, en faisant tendre a vers 1, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq \int g d\mu$. En prenant le sup sur g , $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq \int f d\mu$. ■

Corollaire 70 Soit f_n une suite quelconque de fonctions mesurables positives. Alors

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Autrement dit, on peut toujours intervertir intégrale et somme et pour des séries de fonctions positives.

Corollaire 71 (Linéarité de l'intégrale des fonctions positives) Si $a, b > 0$, alors

$$\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu.$$

Preuve Pour toute fonction mesurable positive f , on construit une suite croissante de fonctions étagées f_n qui converge en croissant vers f en posant

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^n & \text{si } f(x) \geq 2^n, \\ \frac{p}{2^n} & \text{si } f(x) < 2^n \text{ et } \frac{i}{2^n} \leq f(x) < \frac{i+1}{2^n}. \end{cases}$$

comme le faisait Archimède. Idem pour g . Alors $af + bg$ est limite croissante des fonctions étagées $af_n + bg_n$, donc

$$\int (af + bg) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (af_n + bg_n) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} a \int f_n d\mu + b \int g_n d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu.$$

par convergence monotone. ■

5.3 Lemme de Fatou

Théorème 6 (Fatou) Soit E un ensemble muni d'une tribu \mathcal{T} et d'une mesure μ . Soit (f_n) une suite quelconque de fonctions mesurables positives sur E . Alors

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Preuve (A connaître, voir en TD). On utilise la caractérisation suivante de la \liminf d'une suite $u_n \in [-\infty, +\infty]$:

$$\liminf u_n = \lim_{k \rightarrow \infty} (\inf_{n \geq k} u_n).$$

où la suite $v_k = \inf_{n \geq k} u_n$ est croissante. On applique le théorème de convergence monotone à la suite de fonctions $g_k = \inf_{n \geq k} f_n$, il vient

$$\int (\liminf f_n) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k d\mu.$$

Pour tout $n \geq k$, $g_k \leq f_n$, donc $\int g_k d\mu \leq \int f_n d\mu$, et en prenant l'inf,

$$\int g_k d\mu \leq \inf_{n \geq k} \int f_n d\mu,$$

puis en passant à la limite pour ces deux suite croissantes,

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n \geq k} \int f_n d\mu = \liminf \int f_n d\mu.$$

■

5.4 Mesure de densité f par rapport à μ

Voici un nouvel exemple de mesure.

Définition 72 Soit E un ensemble muni d'une tribu \mathcal{T} et d'une mesure μ . Soit $f : E \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. La mesure de densité f par rapport à μ , notée $\nu = f \cdot \mu$, est définie, pour $A \in \mathcal{T}$, par

$$\nu(A) = \int \chi_A f d\mu.$$

Preuve (A savoir refaire, voir en TD). C'est bien une mesure. En effet, si (A_n) est une suite de sous-ensembles mesurables deux à deux disjoints,

$$\nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \int \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{A_n} f\right) d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int \chi_{A_n} f d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n),$$

car on peut intervertir intégrale et somme.

■

Exemple 73 On appelle mesure gaussienne la mesure de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

La constante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ est choisie de sorte que l'intégrale de f vaille 1, ce qui fait de $\nu = f \cdot \lambda$ une mesure de probabilité.

5.5 Propriétés vraies presque partout

Définition 74 Soit E un ensemble muni d'une tribu \mathcal{T} et d'une mesure μ . On dit qu'une propriété est vraie presque partout (noté *p.p.*), si elle est vraie en dehors d'un ensemble mesurable de mesure nulle.

Proposition 75 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (ou de Chernov) et conséquences)

Soit f une fonction mesurable positive.

1. Pour tout $a > 0$,

$$\mu(\{x \in E; f(x) \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int f d\mu.$$

2. $\int f d\mu < +\infty \Rightarrow f < +\infty$ p.p.

3. $\int f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ p.p.

4. $f = g$ p.p. $\Rightarrow \int f d\mu = \int g d\mu$.

Preuve 1. Soit $A = \{x \in E; f(x) \geq a\}$. Alors $\chi_A f \geq a\chi_A$, d'où

$$\int f d\mu \geq \int \chi_A f d\mu \geq \int a\chi_A d\mu = a\mu(A).$$

2. Poser $a = +\infty$.

3. Poser $a = 1/n$. La suite d'ensembles mesurables $A_n = \{x \in E; f(x) \geq 1/n\}$ est croissante. Si $\int f d\mu = 0$, tous ont une mesure nulle, donc leur réunion $\{x \in E; f(x) \neq 0\}$ aussi.

4. Soit $A = \{x \in E; f(x) = g(x)\}$, $B = \{x \in E; f(x) \neq g(x)\}$, $h = \max\{f, g\}$. Par hypothèse, $\mu(B) = 0$ donc $\chi_B(h - g)$ est nulle presque partout, son intégrale est nulle. D'autre part, sur A , $f = g$ donc $h = g$ et $\chi_A(h - g)$ est nulle presque partout aussi. Il vient

$$\begin{aligned} \int h d\mu &= \int (g + \chi_A(h - g) + \chi_B(h - g)) d\mu \\ &= \int g d\mu + \int \chi_A(h - g) d\mu + \int \chi_B(h - g) d\mu \\ &= \int g d\mu. \end{aligned}$$

De la même façon, $\int h d\mu = \int f d\mu$. ■

5.6 Fonctions intégrables

On passe aux fonctions de signe quelconque. L'idée est d'écrire $f = f^+ - f^-$ où $f^+ = \max\{0, f\}$ et $f^- = \max\{0, -f\}$ sont positives. Encore faut il que les intégrales de ces fonctions soient toutes les deux finies. C'est le cas si et seulement si $\int |f| d\mu < +\infty$, car $|f| = f^+ + f^-$.

Définition 76 Soit E un ensemble muni d'une tribu \mathcal{T} et d'une mesure μ . Une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ de signe quelconque est intégrable si elle est mesurable et si

$$\int |f| d\mu < +\infty.$$

Dans ce cas, son intégrale est

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

On note $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{T}, \mu)$ l'espace des fonctions intégrables.

Fin du cours n^o4

Remarque 77 1. $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace vectoriel, l'intégrale est une forme linéaire. Elle est croissante, et

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

2. Si f et g sont intégrables et égales presque partout, elles ont même intégrale.

Définition 78 Une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont. Dans ce cas, on pose

$$\int f \, d\mu = \int \Re(f) \, d\mu + i \int \Im(f) \, d\mu.$$

Remarquer que $\int |\Re(f)| \, d\mu$ et $\int |\Im(f)| \, d\mu < +\infty$ simultanément si et seulement si $\int |f| \, d\mu < +\infty$.

Exemple 79 Soit $E = \mathbb{N}$, $\mathcal{T} =$ tous les sous-ensembles de \mathbb{N} , $\mu =$ mesure de comptage. Une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable si et seulement si la série à termes positifs $\sum |f(n)|$ est convergente.

Exemple 80 Soit $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} =$ la tribu borélienne de \mathbb{R} , $\lambda =$ mesure de Lebesgue. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui est mesurable bornée et nulle hors d'un intervalle borné est intégrable.

5.7 Convergence dominée

Théorème 7 (Théorème de convergence dominée, H. Lebesgue) Soit E un ensemble muni d'une tribu \mathcal{T} et d'une mesure μ . Soit (f_k) une suite de fonctions intégrables sur E telle que

1. Convergence. Pour presque tout $x \in E$, la limite $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ existe.
2. Domination. Pour tout k , pour presque tout $x \in E$, $|f_k(x)| \leq g(x)$ où g est une fonction positive indépendante de k .
3. Intégrabilité. g est une fonction intégrable sur E .

Alors f est intégrable sur E , et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k \, d\mu = \int \left(\lim_{k \rightarrow \infty} f_k \right) \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Preuve Quitte à multiplier f_k par la fonction caractéristique d'un ensemble dont le complémentaire est de mesure nulle, on peut supposer que la convergence et la domination ont lieu partout.

On applique le Lemme de Fatou à $g_k = 2g - |f - f_k|$, qui est mesurable positive. Par hypothèse, g_k converge simplement vers $2g$, donc

$$\int 2g \, d\mu \leq \liminf \int g_k \, d\mu = \int 2g \, d\mu - \limsup \int |f - f_k| \, d\mu.$$

Ceci montre que $\limsup \int |f - f_k| \, d\mu = 0$, et donc que $\lim_{k \rightarrow \infty} \int |f - f_k| \, d\mu = 0$. Comme

$$\left| \int f_k \, d\mu - \int f \, d\mu \right| = \left| \int (f_k - f) \, d\mu \right| \leq \int |f - f_k| \, d\mu,$$

$\int f_k \, d\mu$ tend vers $\int f \, d\mu$. ■

5.8 Intégrales dépendant d'un paramètre

Presque rien à changer, seulement mettre des p.p. (en x) dans les hypothèses de continuité et de domination.

Corollaire 81 Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Soit E un ensemble muni d'une tribu \mathcal{T} et d'une mesure μ . Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $s_0 \in I$. Soit $f : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs complexes. On suppose que pour tout s fixé dans I , la fonction $x \mapsto f(x, s)$ est intégrable sur E . Pour $s \in I$, on pose

$$F(s) = \int f(x, s) \, d\mu(x).$$

On fait les hypothèses suivantes.

1. Continuité. Pour presque tout $x \in E$, $s \mapsto f(x, s)$ est continue en s_0 ;
2. Domination. Pour tout $s \in I$ et presque tout $x \in E$, $|f(x, s)| \leq g(x)$ où g est une fonction positive indépendante de s .
3. Intégrabilité. g est une fonction intégrable sur E .

Alors, $s \mapsto F(s)$ est continue en s_0 , i.e.

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \int f(x, s) d\mu(x) = \int f(x, s_0) d\mu(x).$$

Exercice 82 Soit μ une mesure sur \mathbb{R} muni de la tribu borélienne. On suppose que μ n'a pas d'atomes, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mu(\{x\}) = 0$. Soit f une fonction intégrable par rapport à μ . Alors la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$F(s) = \int \chi_{]-\infty, s]} f d\mu$$

est continue sur \mathbb{R} .

En effet, appliquons le théorème de continuité à la fonction $f(x, s) = \chi_{]-\infty, s]}(x)f(x)$ au voisinage de $s_0 \in \mathbb{R}$. Elle est dominée par $|f|$ qui est intégrable. A x fixé, c'est une fonction de s continue en s_0 , sauf pour $x \in \{s_0\}$ qui est de mesure nulle. Donc le théorème s'applique.

Corollaire 83 (Dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre). Soit E un ensemble muni d'une tribu \mathcal{T} et d'une mesure μ . Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Soit $f : E \times]s_0, s_1[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. On suppose que pour tout s fixé dans I , la fonction $x \mapsto f(x, s)$ est intégrable sur E . Pour $s \in I$, on pose

$$F(s) = \int f(x, s) d\mu(x).$$

On fait les hypothèses suivantes.

1. Dérivabilité. Pour presque tout $x \in E$, $f(x, s)$ est dérivable par rapport à s ;
2. Domination. Pour tout $s \in I$ et presque tout $x \in E$, $|\frac{\partial f}{\partial s}(x, s)| \leq g(x)$ où g est une fonction positive indépendante de s .
3. Intégrabilité. g est une fonction intégrable sur E .

Alors, F est dérivable par rapport à s , de dérivée

$$F'(s) = \int \frac{\partial f}{\partial s}(x, s) d\mu(x).$$

Autrement dit,

$$\frac{d}{ds} \int f(x, s) d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial s}(x, s) d\mu(x).$$

En appliquant ces théorèmes à la mesure de comptage sur \mathbb{N} , on retrouve les propriétés des séries normalement convergentes.

5.9 Les fonctions Riemann-intégrables sont intégrables

Proposition 84 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée Riemann intégrable. On prolonge f à \mathbb{R} par 0. La fonction obtenue coïncide presque partout avec une fonction f qui est intégrable, et

$$\int \tilde{f} d\lambda = \int_a^b f(t) dt.$$

Preuve Soient g_n et h_n les approximations inférieure et supérieure d'Archimède pour la subdivision régulière en 2^n segments, cf. Proposition 19. Ce sont des fonctions en escalier, donc des fonctions étagées, nulles hors d'un intervalle de mesure finie, elles sont donc intégrables, et leur intégrale pour la mesure de Lebesgue est donnée par la formule usuelle. La suite g_n croît et la suite h_n décroît. Les fonctions définies par

$$g_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x), \quad h_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x),$$

satisfont

$$g_\infty \leq f \leq h_\infty,$$

et, pour tout n ,

$$\int g_n d\lambda \leq \int g_\infty d\lambda \leq \int h_\infty d\lambda \leq \int h_n d\lambda.$$

Or si f est Riemann-intégrable, les deux suites $\int g_n d\lambda$ et $\int h_n d\lambda$ convergent vers la même limite $\int_a^b f(t) dt$, donc

$$\int_a^b f(t) dt = \int g_\infty d\lambda = \int h_\infty d\lambda.$$

Ceci entraîne que $g_\infty = h_\infty = f$ p.p., donc f coïncide presque partout avec la fonction intégrable g_∞ , et $\int_a^b f(t) dt = \int g_\infty d\lambda$. ■

La proposition 35 (intégrabilité d'une fonction continue par morceaux avec asymptotes éventuelles) en résulte, avec un peu de travail.

6 Espaces L^p

6.1 Définition

Définition 85 Soit E un ensemble muni d'une tribu \mathcal{T} et d'une mesure μ . Soit $p \geq 1$. On note $L^p(E, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables sur E telles que $|f|^p$ est intégrable. On introduit la relation d'équivalence

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ } \mu \text{ presque partout.}$$

L'ensemble des classes d'équivalence est noté $L^p(E, \mu)$. Pour $f \in L^p(E, \mu)$, on note $\|f\|_p = (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$.

Soit $p = \infty$. On note $L^\infty(E, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables sur E telles que $|f|$ coïncide presque partout avec une fonction bornée. L'ensemble des classes d'équivalence est noté $L^\infty(E, \mu)$. Pour $f \in L^\infty(E, \mu)$, on note

$$\|f\|_\infty = \inf\{c > 0; |f| \leq c \text{ } \mu \text{ p.p.}\}.$$

La définition de $L^p(E, \mu)$ paraît compliquée. En fait, c'est une commodité de vocabulaire : parler de fonctions dans l'espace quotient $L^p(E, \mu)$ permet d'éviter de distinguer des fonctions qui coïncident presque partout, ça gagne du temps.

Le but de ce chapitre est de montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme, et par conséquent, $L^p(E, \mu)$ et $L^\infty(E, \mu)$ sont des espaces vectoriels.

6.2 Inégalité de Hölder

Théorème 8 (Inégalité de Hölder) Soit E un ensemble muni d'une tribu \mathcal{T} et d'une mesure μ . Soit $p \in [1, \infty]$. Soit $q \in [1, \infty]$ l'exposant conjugué, i.e.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Soient $f \in L^p(E, \mu)$ et $g \in L^q(E, \mu)$. Alors $|fg| \in L^1(E, \mu)$ et

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $|f|^p / \|f\|_p^p = |g|^q / \|g\|_q^q$ presque partout.

Preuve 1. Soit $\alpha \in]0, 1[$. La fonction $x \mapsto x^\alpha - \alpha x$ sur \mathbb{R}_+ atteint un unique maximum absolu en $x = 1$. En effet, sa dérivée $\alpha(x^{\alpha-1} - 1)$ change de signe en $x = 1$. Par conséquent, pour tout $x \geq 0$,

$$x^\alpha \leq \alpha x + (1 - \alpha).$$

Il en résulte (poser $x = u/v$, $\alpha = \frac{1}{p}$) que pour tout $u, v > 0$,

$$u^{1/p} v^{1/q} \leq \frac{1}{p} u + \frac{1}{q} v.$$

Cela reste vrai si u ou v est nul.

2. Supposons que $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. En intégrant l'inégalité ci-dessus appliquée à $u = |f(x)|^p$, $v = |g(x)|^q$, il vient

$$\int |fg| d\mu \leq \frac{1}{p} \int |f|^p d\mu + \frac{1}{q} \int |g|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

3. Dans le cas général, on applique l'inégalité précédente à $f/\|f\|_p$, $g/\|g\|_q$, il vient

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int |fg| d\mu \leq 1, \quad \text{d'où } \int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Fin du cours n°5

4. L'égalité $x^\alpha = \alpha x + (1 - \alpha)$ entraîne que $x = 1$. Donc l'égalité $u^{1/p} v^{1/q} = \frac{1}{p} u + \frac{1}{q} v$ entraîne que $u = v$. Donc l'égalité dans l'inégalité de Hölder entraîne que $f^p / \|f\|_p^p = g^q / \|g\|_q^q$ presque partout. ■

Exemple 86 Soit $E =]0, 1[$, $\mathcal{T} =$ tribu borélienne, $\lambda =$ mesure de Lebesgue sur $]0, 1[$. Alors $L^2(]0, 1[, \lambda) \subset L^1(]0, 1[, \lambda)$ et pour tout $f \in L^2(]0, 1[, \lambda)$,

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2.$$

6.3 Exemple d'utilisation de l'inégalité de Hölder

Si f est une fonction sur le plan qui ne dépend que de la distance à l'origine, son intégrale vaut $2\pi \int_0^\infty f(r) r dr$, celle de son carré vaut $2\pi \int_0^\infty f(r)^2 r dr$. Comment comparer cette intégrale à l'intégrale sur la droite $2 \int_0^\infty f(r) dr$? Si $0 < a < b < +\infty$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz (pour la mesure $r dr$) s'écrit

$$\left(\int_a^b f(r) dr \right)^2 = \left(\int_a^b f(r) r^{-1} r dr \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(r)^2 r dr \right) \left(\int_a^b r^{-2} r dr \right) \leq \log\left(\frac{b}{a}\right) \int_a^b f(r)^2 r dr.$$

Donc sur un intervalle qui ne s'approche pas de 0 ni de $+\infty$, l'intégrale de $f(r)^2 r dr$ contrôle l'intégrale de f . En revanche, si $a = 0$ ou $b = +\infty$, $\log(\frac{b}{a}) = +\infty$, cela ne marche plus.

Retenir la méthode : l'intégrale $2\pi \int_0^\infty f(r)^2 r dr$ impose le choix de mesure $\mu = r dr$. Donc on fait apparaître cette mesure dans $2 \int_0^\infty f(r) dr$, ce qui fait apparaître un produit de fonctions et suggère d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

6.4 Inégalité de Jensen

Définition 87 Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe si la région située au-dessus de sa courbe représentative est convexe.

Un convexe du plan est toujours une intersection de demi-plans. Une fonction convexe est donc la borne supérieure d'une famille de fonctions affines (en fait, il suffit de prendre les tangentes à la courbe).

Théorème 9 (Inégalité de Jensen) Soit E un ensemble muni d'une tribu \mathcal{T} et d'une mesure de probabilité μ (i.e. $\mu(E) = 1$). Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Soit $f \in L^1(E, \mu)$. Alors

$$\phi\left(\int f d\mu\right) \leq \int \phi \circ f d\mu.$$

Preuve Soit (α_s) , $x \mapsto a_s x + b_s$, une famille de fonctions affines telle que $\phi = \sup_s \alpha_s$. Pour chaque s ,

$$\begin{aligned} \int \phi \circ f d\mu &\geq \int \alpha_s \circ f d\mu \\ &= \int (a_s f + b_s) d\mu \\ &= a_s \int f d\mu + b_s \\ &= \alpha_s\left(\int f d\mu\right). \end{aligned}$$

En prenant le sup sur s , il vient $\int \phi \circ f d\mu \geq \phi\left(\int f d\mu\right)$. ■

Exemple 88 Pour toute fonction intégrable sur un ensemble muni d'une mesure de probabilité,

$$e^{\int f d\mu} \leq \int e^f d\mu.$$

6.5 Inclusions entre espaces L^p

Remarque 89 Si $\mu(E) < +\infty$, la famille des espaces $L^p(E, \mu)$ est décroissante, i.e.

$$p \leq q \Rightarrow L^q(E, \mu) \subset L^p(E, \mu).$$

Preuve (A connaître, voir en TD). En effet, en appliquant l'inégalité de Hölder aux fonctions $|f|^p \in L^r$ et 1, avec l'exposant $r = q/p$ et l'exposant conjugué r' , il vient

$$\int |f|^p d\mu \leq \| |f|^p \|_r \|1\|_{r'} = \|f\|_q^{\frac{p}{q}} \mu(E)^{1-\frac{p}{q}}.$$

On peut aussi appliquer l'inégalité de Jensen, car la fonction $x \mapsto |x|^{q/p}$ est convexe. Dans le cas où $\mu(E) = 1$, il vient

$$\left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{q}{p}} \leq \int (|f|^p)^{\frac{q}{p}} d\mu.$$

Le cas général s'en déduit en introduisant la mesure $\nu = (\mu(E)^{-1})\mu$. ■

Ce sont les seules inclusions possibles en général.

Exemple 90 Si $p < q$, $L^p(E, \mu)$ n'est pas contenu dans $L^q(E, \mu)$.

En effet, considérer la mesure de Lebesgue sur $]0, 1[$, i.e. la mesure $\mu = \chi_{]0, 1[} \cdot \lambda$ sur \mathbb{R} . C'est une mesure de probabilité. La fonction $f_q(x) = x^{-1/q}$ n'est pas dans $L^q(\mathbb{R}, \mu)$ mais appartient à $L^p(\mathbb{R}, \mu)$ pour tout $p < q$.

Exemple 91 Si $\mu(E) = +\infty$, pour tout $p \neq q$, $L^q(E, \mu)$ n'est pas contenu dans $L^p(E, \mu)$.

En effet, considérer la mesure de Lebesgue sur $]1, +\infty[$, i.e. la mesure $\mu = \chi_{]1, +\infty[} \cdot \lambda$ sur \mathbb{R} . La fonction $f_p(x) = x^{-1/p}$ n'est pas dans $L^p(\mathbb{R}, \mu)$ mais appartient à $L^q(\mathbb{R}, \mu)$ pour tout $q > p$.

6.6 Convergence de suites d'intégrales

Si une suite de fonctions $f_n \in L^1(E, \mu)$ converge dans cet espace vers $f \in L^1(E, \mu)$, alors $\int f_n d\mu$ tend vers $\int f d\mu$ (la réciproque est évidemment fautive en général). En revanche, lorsque $p > 1$ et $\mu(E) = +\infty$, si une suite de fonctions $f_n \in L^p(E, \mu)$ converge dans cet espace vers $f \in L^p(E, \mu)$, alors $\int f_n d\mu$ ne tend pas nécessairement vers $\int f d\mu$.

Exemple 92 Soit $E = \mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne et de la mesure $\mu = \chi_{[0, +\infty[} \cdot \lambda$. Soit $p > 1$ et $q = \frac{1+p}{2}$. Soit $f_n = n^{-1/q} \chi_{[0, n]}$. Alors $f_n \in L^p(\mathbb{R}, \mu) = L^p([0, +\infty[, \lambda)$, $\|f_n\|_p = n^{-1/q} n^{1/p}$ tend vers 0 mais $\int f_n d\mu = n^{-1/q} n$ tend vers $+\infty$.

6.7 Convergence dans L^p et convergence presque partout

Il n'y a pas de réciproque du théorème de convergence dominée. Si une suite de fonctions $f_n \in L^1(E, \mu)$ converge dans cet espace vers $f \in L^1(E, \mu)$, f_n ne converge pas nécessairement presque partout vers f .

Exemple 93 Soit $E = \mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne et de la mesure $\mu = \chi_{[0, 1]}$. Lorsque $2^k \leq n < 2^{k+1}$, soit f_n la fonction caractéristique de l'intervalle $[\frac{n-2^k}{2^k}, \frac{n+1-2^k}{2^k}]$. Alors $f_n \in L^1(E, \mu)$, $\|f_n\|_1 = 2^{-k}$ tend vers 0 mais pour tout $x \in [0, 1]$, la suite $f_n(x)$ n'a pas de limite.

En effet, x appartient à une infinité des intervalles de la forme $[\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k}]$, et n'appartient pas à une infinité de ces intervalles, donc la suite $f_n(x)$ prend une infinité de fois chacune des valeurs 0 et 1.

6.8 Inégalité de Minkowski

Théorème 10 (Inégalité de Minkowski) Soit E un ensemble muni d'une tribu \mathcal{T} et d'une mesure μ . Soit $p \in [1, \infty]$. Soient $f, g \in L^p(E, \mu)$. Alors $f + g \in L^p(E, \mu)$ et

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Preuve On écrit

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)|f + g|^{p-1} = |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1},$$

puis, par l'inégalité de Hölder,

$$\int |f||f + g|^{p-1} \leq \|f\|_p \|f + g\|_q^{p-1} = \|f\|_p \left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}},$$

et idem pour le second terme. Il vient

$$\int |f + g|^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}},$$

d'où, en simplifiant,

$$\left(\int |f + g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

■

Corollaire 94 Pour tout $p \in [1, \infty]$, $\|\cdot\|_p$ est une norme. $\mathcal{L}^p(E, \mu)$ et $L^p(E, \mu)$ sont des espaces vectoriels.

Corollaire 95 Pour $p = 2$, $\|\cdot\|_2$ est la norme associée à un produit scalaire.

6.9 Interprétation géométrique

Lorsque $E = \{1, \dots, n\}$ est un ensemble fini, \mathcal{T} la tribu de tous les sous-ensembles de E et μ la mesure de comptage, $L^p(E, \mu)$ est l'espace \mathbb{R}^n muni de la norme

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

Lorsque $n = 2$, on peut dessiner la boule unité $B_p = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\|_p \leq 1\}$. L'inégalité de Minkowski signifie que B_p est *convexe*. En effet, pour tous points $z, z' \in B_p$, $t \mapsto (1-t)z + tz'$ est un paramétrage du segment de droite de z à z' , et

$$\|(1-t)z + tz'\|_p \leq \|(1-t)z\|_p + \|tz'\|_p = (1-t)\|z\|_p + t\|z'\|_p \leq 1-t+t \leq 1,$$

donc le segment est entièrement contenu dans B_p .

Soient $a \geq 0, b \geq 0$ tels que $a^q + b^q = 1$. L'inégalité de Hölder

$$ax + by \leq \|(x, y)\|_p \|(a, b)\|_q$$

entraîne que

$$\max\{ax + by; (x, y) \in B_p\} \leq \|(a, b)\|_q = 1,$$

avec égalité pour $x = a^{q/p}, y = b^{q/p}$. Elle signifie que dans la famille des droites parallèles d'équations $ax + by = m$, il y en a exactement deux qui sont tangentes à B_p , elles touchent B_p aux points $(a^{q/p}, b^{q/p})$ et $-(a^{q/p}, b^{q/p})$, et leurs équations sont $ax + by = \pm 1$.

6.10 Densité des fonctions en escalier

On admet le résultat (pas simple) suivant.

Proposition 96 Soit $[a, b]$ un intervalle borné. Pour tout $p \in [1, +\infty[$, les fonctions continues sont denses dans $L^p([a, b], \lambda)$. Autrement dit, pour toute fonction $f \in L^p([a, b], \lambda)$, il existe une suite f_n de fonctions continues telle que $\|f - f_n\|_p$ tend vers 0.

Remarque 97 Ce n'est pas vrai pour $p = \infty$. Une limite dans $L^\infty([a, b], \lambda)$ de fonctions continues est continue, alors que $L^\infty([a, b], \lambda)$ contient des fonctions discontinues.

Corollaire 98 Soit $[a, b]$ un intervalle borné. Pour tout $p \in [1, +\infty[$, les fonctions en escalier sont denses dans $L^p([a, b], \lambda)$.

Preuve Voir en TD. ■

6.11 Complétude

Définition 99 Soit V un espace vectoriel muni d'une norme. Soit (v_n) une suite d'éléments de V . On dit que c'est une suite de Cauchy si pour tout $\epsilon > 0$ il existe N tel que pour tous $n > N$, $m > N$, $\|v_n - v_m\| < \epsilon$.

On dit que V est complet si toute suite de Cauchy dans V est convergente.

Remarque 100 Une suite convergente est automatiquement de Cauchy.

Lemme 101 Un espace vectoriel normé V est complet si et seulement si toute série dont la série des normes est convergente est convergente.

Preuve A une suite v_n on associe la série de terme général $v_{n+1} - v_n = u_n$, et inversement, à une série $\sum u_n$ on associe la série des sommes partielles $v_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Si la série $\sum \|u_n\|$ est convergente, alors, pour tout $m < n$,

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^n u_k \right\| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n \|u_k\| \\ &= w_n - w_m, \end{aligned}$$

qui tend vers 0 car la suite de nombres réels $w_n = \sum_{k=0}^n \|u_k\|$, qui est convergente, est de Cauchy. Donc (v_n) est de Cauchy. Si (v_n) est convergente, par définition, la série $\sum u_n$ est convergente.

Si (v_n) est de Cauchy, alors pour tout entier k , il existe n_k tel que si $n > m \geq n_k$, alors $\|v_n - v_m\| \leq 2^{-k}$. On pose $u_k = v_{n_{k+1}} - v_{n_k}$. Par construction,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} \leq 2,$$

donc la série des normes est convergente. Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la suite des sommes partielles

$$\sum_{k=0}^{p-1} u_k = v_{n_p}$$

est convergente. Soit v sa limite. Alors pour $m \geq n_k$ et $\ell > k$,

$$\|v_{n_\ell} - v_m\| \leq 2^{-k}.$$

En faisant tendre ℓ vers l'infini, il vient

$$\|v - v_m\| \leq 2^{-k}.$$

Cela prouve que la suite (v_n) est convergente. ■

Exemple 102 Un espace vectoriel normé de dimension finie est toujours complet.

En effet, \mathbb{R} est complet, donc \mathbb{R}^d aussi (raisonner composante par composante).

En dimension infinie, les espaces normés ne sont pas tous complets, il leur arrive d'avoir des trous : les limites des suites de Cauchy existent dans un espace plus grand.

Exemple 103 Soit V l'ensemble des fonctions polynômes sur $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ muni de la norme L^p . Alors V n'est pas complet.

En effet, la série entière $\sum x^n$ converge normalement et donc uniformément sur I . Il en résulte qu'elle converge dans $L^p(I, \lambda)$. En particulier, c'est une suite de Cauchy de V . Mais la somme de la série n'est pas un polynôme, donc n'appartient pas à V .

Théorème 11 (Fischer-Riesz) *Soit E un ensemble muni d'une tribu \mathcal{T} et d'une mesure μ . L'espace $L^p(E, \mu)$ est complet.*

Preuve Soit $\sum u_n$ une série de fonctions mesurables telle que la série des normes L^p soit convergente, i.e.

$$\sum_n \|u_n\|_p < +\infty.$$

Posons $f_n = (\sum_{k=0}^n |u_k|)^p$. Alors

$$\begin{aligned} (\int f_n d\mu)^{1/p} &= \left\| \sum_{k=0}^n |u_k| \right\|_p \\ &\leq \sum_{k=0}^n \|u_k\|_p \end{aligned}$$

est borné indépendamment de n . La suite de fonctions réelles positives f_n est croissante. Soit f sa limite. D'après le théorème de convergence monotone,

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n |u_k| \right\|_p^p \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|_p \right)^p \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Par conséquent, $f < +\infty$ presque partout. En presque tout point $x \in E$, la série de nombres réels $\sum u_k(x)$ est absolument convergente, donc convergente. Autrement dit, la série de fonctions $\sum u_k$ converge presque partout vers une fonction v . v est mesurable. Notons

$$g_n = \left| \sum_{k=0}^n u_k \right|^p.$$

Alors g_n converge presque partout vers $|v|^p$. Comme, pour tout n et tout $x \in E$,

$$|g_n(x)| \leq \left(\sum_{k=0}^n |u_k(x)| \right)^p = f_n(x) \leq f(x),$$

la suite de fonctions g_n est dominée par f , qui est intégrable. Le théorème de convergence dominée garantit que la fonction limite $|v|^p$ est intégrable (i.e. $v \in L^p$) et que

$$\int |v|^p d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu.$$

Enfin, la suite de fonctions $v_n = v - \sum_{k=0}^n u_k$ converge vers 0 presque partout. Pour tout n et tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} |v_n(x)| &= \left| v(x) - \sum_{k=0}^n u_k(x) \right|^p \\ &\leq (|v(x)| + f_n(x))^p \\ &\leq 2f(x), \end{aligned}$$

qui est intégrable. Le théorème de convergence dominée garantit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int v_n d\mu = 0,$$

i.e. que $\|v - \sum_{k=0}^n u_k\|_p$ tend vers 0. v est bien la somme dans L^p de la série. ■

Remarque 104 *La preuve montre que si la série des normes L^p converge, alors la série de fonctions converge presque partout. En combinant avec la preuve du lemme 101, on voit que si une suite de fonctions converge dans L^p , alors il existe une sous-suite qui converge presque partout.*

7 Séries de Fourier

La possibilité de décomposer les vibrations périodiques en superpositions de modes dont les fréquences sont des multiples entiers d'une même fréquence fondamentale est suggérée par la physique : observations sur les cordes vibrantes remontant à l'antiquité. En 1822, Joseph Fourier a transformé cette idée en un outil mathématique, utile pour résoudre les équations de la physique (l'équation de la chaleur) et étudier finement la dérivabilité des fonctions.

7.1 Harmoniques

Soit $T > 0$. Les fonctions T -périodiques les plus simples sont $t \mapsto \sin(\frac{2\pi t}{T})$ et $t \mapsto \cos(\frac{2\pi t}{T})$. Les combinaisons linéaires $a_1 \cos(\frac{2\pi t}{T}) + b_1 \sin(\frac{2\pi t}{T})$ s'appellent les *sons purs* de période T (ou de fréquence $\frac{2\pi}{T}$). Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. On appelle *harmoniques* d'ordre n les combinaisons linéaires $a_n \cos(\frac{2\pi nt}{T}) + b_n \sin(\frac{2\pi nt}{T})$. En les superposant, on obtient une grande famille de fonctions T -périodiques, de la forme

$$a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\frac{2\pi nt}{T}) + b_n \sin(\frac{2\pi nt}{T}).$$

On les appelle *séries trigonométriques*.

Question 105 *A quelle condition sur les coefficients a_n et b_n la série trigonométrique ci-dessus converge-t-elle ?*

Question 106 *A quelle condition une fonction T -périodique peut-elle s'écrire comme la somme d'une série trigonométrique ?*

Dans suite, on supposera $T = 2\pi$. Le cas général se ramène à ce cas particulier par un changement de variable.

7.2 Un exemple

Proposition 107 *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le signal en dents de scie, i.e. la fonction 2π -périodique qui, sur $[0, 2\pi[$, est donnée par*

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}.$$

Pour $t \in]0, 2\pi[$,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nt).$$

Preuve Par symétrie ($f(2\pi - t) = -f(t)$ et il en est de même de la série), on peut supposer que $t \in]0, \pi[$. On considère l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{e^{it}}{1 - e^{it}x} dx.$$

Pour la calculer, on développe en série entière

$$\frac{e^{it}}{1 - e^{it}x} = e^{it} \sum_{n=0}^{\infty} e^{int} x^n.$$

Le terme général de la série ne se majore pas bien. Il vaut mieux calculer les sommes partielles

$$f(n, x) = e^{it} \sum_{k=0}^n e^{ikt} x^k = e^{it} \frac{1 - e^{i(n+1)t} x^{n+1}}{1 - e^{it}x}.$$

Pour tout $x \in [0, 1[$, $f(n, x)$ tend vers $\frac{e^{it}}{1 - e^{it}x}$. Pour tout $x \in [0, 1[$ et tout entier n ,

$$|f(n, x)| \leq \frac{2}{|1 - e^{it}|},$$

donc il y a domination par une fonction constante et donc intégrable sur $[0, 1]$. Le théorème de convergence dominée garantit que I est la limite de la suite d'intégrales

$$\int_0^1 f(n, x) dx = \sum_{k=0}^n \int_0^1 e^{i(n+1)t} x^k dx = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} e^{i(n+1)t}.$$

Il reste à calculer la partie imaginaire de I , $\int_0^1 \frac{\sin t}{1+x^2-2x \cos t} dx$. On écrit cette intégrale sous la forme $J = \int_0^1 \frac{dx}{\sin t [1 + (\frac{x - \cos t}{\sin t})^2]}$, que l'on calcule par changement de variables en posant $u = \frac{x - \cos t}{\sin t}$

(on notera que $\sin t$ est non nul). On a $J = [\arctan u]_{-\frac{1 - \cos t}{\sin t}}^{\frac{1 - \cos t}{\sin t}}$. Un petit calcul trigonométrique donne $\frac{1 - \cos t}{\sin t} = \tan \frac{t}{2}$. Or $\arctan(\tan \frac{t}{2}) = \frac{t}{2}$ (car $t/2$ est dans $]0, \pi/2[$) et $\arctan(-\cot t) = -\arctan(\tan(\frac{\pi}{2} - t)) = t - \frac{\pi}{2}$ (car $\pi/2 - t$ est dans $] -\pi/2, \pi/2[$). Il vient $J = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$. ■

Fin du cours n⁰⁷

7.3 Polynômes trigonométriques

Un polynôme trigonométrique, c'est une série trigonométrique qui n'a qu'un nombre fini de termes non nuls. Soit $\mathcal{T}_n^{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel (de dimension finie) des polynômes trigonométriques de fréquence $\leq n$. On munit $\mathcal{T}_n^{\mathbb{R}}$ du produit scalaire

$$f \cdot g = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt.$$

$\mathcal{T}_n^{\mathbb{R}}$ devient un espace euclidien.

Lemme 108 Les fonctions $t \mapsto \sqrt{2} \sin(mt)$ et $t \mapsto \sqrt{2} \cos(mt)$, $0 \leq m \leq n$, forment une base orthonormée de $\mathcal{T}_n^{\mathbb{R}}$.

Pour cette vérification, il est commode d'exprimer $t \mapsto \sin(mt)$ en fonction de $e_m := t \mapsto e^{imt}$ et de sa conjuguée e^{-imt} . On verra qu'il est toujours commode de manipuler des fonctions à valeurs complexes. On notera donc désormais $L^2([0, 2\pi], \lambda)$ l'espace vectoriel sur \mathbb{C} des fonctions 2π -périodiques à valeurs complexes. On le munit du produit scalaire hermitien

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)} dt.$$

On note \mathcal{T}_n le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions e_m , $m = -n, \dots, n$. Alors

Définition 109 Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie, muni d'un produit scalaire hermitien. On appelle base unitaire de V une base e_i telle que

- pour tout i , $\langle e_i | e_i \rangle = 1$.
- pour tout $j \neq i$, $\langle e_i | e_j \rangle = 0$.

Proposition 110 Les fonctions $e_m(t) = e^{imt}$, $m = -n, \dots, n$, forment une base unitaire de \mathcal{T}_n .

Preuve Simple calcul. ■

Corollaire 111 (Identité de Parseval pour les polynômes trigonométriques) Soit $f = \sum_{m=-n}^n c_n e^{imt}$ un polynôme trigonométrique. Alors

$$\|f\|_2^2 = \langle f | f \rangle = \sum_{m=-n}^n |c_n|^2.$$

7.4 Coefficients de Fourier

Définition 112 Soit $f \in L^1([0, 2\pi], \lambda)$ une fonction 2π -périodique sur \mathbb{R} et intégrable sur $[0, 2\pi]$. Ses coefficients de Fourier sont les nombres

$$\hat{f}_n = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Remarque 113 Si h est une fonction 2π -périodique sur \mathbb{R} et intégrable sur $[0, 2\pi]$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_x^{x+2\pi} h(t) dt = \int_0^{2\pi} h(t) dt.$$

On se servira souvent de cette propriété sans le dire.

Exemple 114 Coefficients de Fourier du signal en dents de scie.

$\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$. Pour $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} \hat{f}_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - t}{2} e^{-int} dt \\ &= \left[\frac{1}{-2\pi in} \frac{\pi - t}{2} e^{-int} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{-2\pi in} \frac{-1}{2} e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2in}. \end{aligned}$$

Rappel 115 Soit W un sous-espace vectoriel de dimension d de l'espace euclidien \mathbb{R}^n . Soit e_1, \dots, e_d une base orthonormée de W . Le projecteur orthogonal sur W est donné par la formule

$$P_W(x) = \sum_{i=1}^d (x \cdot e_i) e_i.$$

Lemme 116 Soit V un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire hermitien. Soit W un sous-espace vectoriel complexes de dimension d de V . Soit e_1, \dots, e_d une base unitaire de W . Le projecteur orthogonal sur W est donné par la formule

$$P_W(x) = \sum_{i=1}^d \langle x | e_i \rangle e_i.$$

Preuve Soit $y = \sum_{i=1}^d \langle x|e_i \rangle e_i$. Alors pour tout $i = 1, \dots, d$, $\langle y|e_i \rangle = \langle x|e_i \rangle$, donc $z = y - x$ est orthogonal à e_1, \dots, e_d , il est donc orthogonal à W . L'écriture $x = y + z$ avec $y \in W$ et $z \in W^\perp$ montre que y est la projection orthogonale de x sur W . ■

Corollaire 117 Soit $f \in L^2([0, 2\pi], \lambda)$ une fonction à valeurs complexes, de carré intégrable. Alors la projection orthogonale de f sur \mathcal{T}_n est le polynôme trigonométrique

$$\sum_{m=-n}^n \hat{f}_m e^{imt}.$$

En particulier,

$$\sum_{m=-n}^n |\hat{f}_m|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

On voit que les sommes partielles de la série de Fourier de f sont les projections orthogonales de f sur des sous-espaces de dimensions finies de $L^2([0, 2\pi], \lambda)$, de plus en plus grands. Montrer que ces sommes convergent vers f consiste d'une certaine façon à dire que les espaces \mathcal{T}_n finissent par remplir L^2 .

7.5 Séries de Fourier des fonctions L^2

Théorème 12 Si $f \in L^2([0, 2\pi], \lambda)$, alors la série de Fourier de f converge dans L^2 . En particulier, on a l'identité de Parseval

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2.$$

Preuve D'après le Corollaire 117, l'application linéaire

$$S_n : f \mapsto S_n f = \sum_{m=-n}^n \hat{f}_m e_m$$

satisfait $\|S_n f\|_2 \leq \|f\|_2$. De plus, la suite de fonctions $(S_n f)$ est de Cauchy dans $L^2([0, 2\pi], \lambda)$. En effet, si $p < q$, d'après l'identité de Parseval pour les polynômes trigonométriques,

$$\|S_p f - S_q f\|_2^2 = \sum_{m=-q}^{-p-1} |\hat{f}_m|^2 + \sum_{m=p+1}^q |\hat{f}_m|^2$$

tend vers 0 quand p tend vers l'infini. Du Théorème de Fischer-Riesz, il résulte que $S(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n f$ existe dans L^2 . On a

$$\|S(f)\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2.$$

Il reste à montrer que $Sf = f$. L'inégalité $\|S_n f\|_2 \leq \|f\|_2$ passe à la limite, donc $\|S(f)\|_2 \leq \|f\|_2$. S est une application linéaire continue. Il suffit de prouver l'identité $S(f) = f$ pour un ensemble dense de fonctions f . On va le faire pour les fonctions en escalier (les fonctions en escalier sont denses dans L^2 , Corollaire 98). Par linéarité, il suffit de le faire pour les fonctions caractéristiques d'intervalles. Il suffit même de traiter les intervalles de la forme $[0, a]$.

Soit $f = \chi_{[0, a]}$. On calcule $\hat{f}_0 = \frac{a}{2\pi}$, $\hat{f}_n = \frac{1 - e^{-ina}}{2\pi in}$. Posons, pour $t \in [0, 2\pi]$,

$$\sigma_n(t) = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \sin(mt).$$

Alors

$$\begin{aligned}
(S_n f)(t) &= \hat{f}_0 + \sum_{m=1}^n \hat{f}_m e^{imt} + \hat{f}_{-m} e^{-imt} \\
&= \frac{a}{2\pi} + \sum_{m=1}^n \frac{1 - e^{-ima}}{2\pi im} e^{imt} + \frac{1 - e^{ima}}{-2\pi im} e^{-imt} \\
&= \frac{a}{2\pi} + \sum_{m=1}^n \frac{e^{imt} - e^{im(t-a)} - e^{-imt} + e^{-im(t-a)}}{2\pi im} \\
&= \frac{a}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sigma_n(t) - \frac{1}{\pi} \sigma_n(t-a).
\end{aligned}$$

On a montré (Proposition 107) que, si $t \in]0, 2\pi[$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}.$$

Par conséquent, pour tout $t \in]a, 2\pi[$, comme $t - a \in]0, 2\pi[$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n f)(t) = \frac{a}{2\pi} + \frac{1}{2} - \frac{t}{2\pi} - \left(\frac{1}{2} - \frac{t-a}{2\pi}\right) = 0.$$

Cependant, si $t \in]0, a[$, $t - a + 2\pi \in]0, 2\pi[$, donc, comme σ_n est 2π -périodique,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n f)(t) = \frac{a}{2\pi} + \frac{1}{2} - \frac{t}{2\pi} - \left(\frac{1}{2} - \frac{t-a+2\pi}{2\pi}\right) = 1.$$

Autrement dit, $S_n f - f$ tend vers 0 presque partout. D'après la remarque 104, il existe une suite n_k telle que $S_{n_k} f$ converge vers $S(f)$ presque partout. On en déduit que $S(f) = f$. Cela complète la preuve. ■

Remarque 118 Si $f \in L^2([0, 2\pi], \lambda)$, alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|\hat{f}_n e_n\|_2^2 < +\infty$, mais cela n'entraîne pas que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|\hat{f}_n e_n\|_2 < +\infty$. On ne peut donc pas déduire de la remarque 104 que la série de Fourier converge presque partout. Toutefois, c'est vrai, mais c'est un résultat récent (L. Carleson 1966).

Corollaire 119 Pour toute suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes telle que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$, il existe une unique fonction $f \in L^2([0, 2\pi], \lambda)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}_n = c_n$.

Preuve (A savoir refaire, voir en TD). La suite de fonctions $f_n = \sum_{m=-n}^n c_m e_m$ est de Cauchy donc elle converge dans L^2 . Sa limite f satisfait, pour tout $m \in \mathbb{Z}$,

$$\hat{f}_m = \langle f | e_m \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n | e_m \rangle = c_m.$$

Enfin, si deux fonctions L^2 f et g ont même coefficients de Fourier, la norme L^2 de leur différence vaut 0, donc elles coïncident presque partout. ■

Exemple 120

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

En effet, on applique l'identité de Parseval au signal en dents de scie $f(t) = \frac{\pi-t}{2}$. Son développement en série de Fourier est

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{1}{2in} e_n,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{1}{4n^2} = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi-t}{2}\right)^2 dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

7.6 Le théorème de Dirichlet

Théorème 13 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique et de classe C^1 par morceaux, i.e. il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 2\pi$ telle que, sur chaque intervalle $]t_j, t_{j+1}[$, f est la restriction d'une fonction de classe C^1 sur $[t_j, t_{j+1}]$. En particulier, f possède une limite finie à gauche $f(t_j-)$ et une limite finie à droite $f(t_j+)$.

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{int}$ converge vers $\frac{1}{2}(f(t+) + f(t-))$.

On va prouver plus loin une version faible du théorème, dans laquelle on fait l'hypothèse supplémentaire suivante : f est continue.

Fin du cours n^o8

Pour la preuve, on a besoin de la propriété suivante.

Lemme 121 Soit f une fonction 2π -périodique, continue et de classe C^1 par morceaux. Alors les coefficients de Fourier de la dérivée f' (elle est définie presque partout) satisfont $\hat{f}'_n = in\hat{f}_n$.

Preuve (A savoir refaire). f' est une fonction mesurable bornée, donc dans $L^2([0, 2\pi], \lambda)$. Par intégration par parties (qui marche pour les fonctions continues et C^1 par morceaux),

$$\begin{aligned} 2\pi \hat{f}'_n &= \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-int} dt \\ &= [f(t) e^{-int}]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f(t) (-in) e^{-int} dt \\ &= 2\pi in \hat{f}_n. \end{aligned}$$

■

Preuve de la version faible.

1. La série $\sum |\hat{f}'_n|$ est convergente.

En effet, en utilisant l'inégalité générale $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, on majore

$$|\hat{f}_n| \leq \frac{1}{n} |\hat{f}'_n| \leq \frac{1}{n^2} + |\hat{f}'_n|^2,$$

séries qui sont toutes les deux convergentes (Parseval pour la seconde), donc $\sum |\hat{f}'_n|$ est convergente.

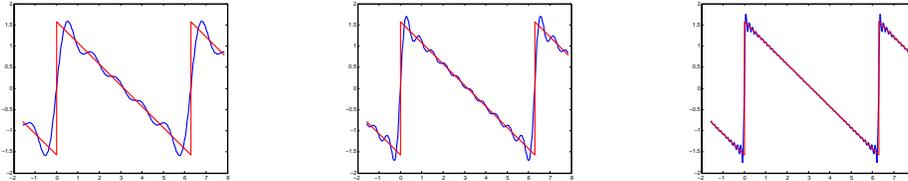
2. La série de fonctions $\sum \hat{f}'_n e_n$ converge uniformément, donc sa somme g est une fonction continue. Par convergence uniforme, les coefficients de Fourier de g sont égaux à ceux de f' . Comme f et g sont mesurables et bornées sur $[0, 2\pi]$, elles appartiennent à $L^2([0, 2\pi], \lambda)$. D'après le corollaire 119, elles sont égales presque partout. Elles sont donc égales partout. ■

Remarque 122 Pour une fonction f discontinue, la série de fonctions $\sum \hat{f}_n e_n$ ne converge pas uniformément. De plus, au voisinage des points de discontinuité de f , la somme partielle dépasse sa limite,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \sum_{n=-N}^N \hat{f}_n e^{int} > \sup_{t \in \mathbb{R}} f(t),$$

d'un facteur qui ne tend pas vers 0 (phénomène de Gibbs). Cela se voit bien expérimentalement, à l'oscilloscope, ou sur des tracés à l'ordinateur.

Ci-dessous, la somme des n premiers termes de la série $\sum \frac{\sin(nt)}{n}$, pour $n = 5, 10, 40$.



Remarque 123 Inversement, pour une fonction f qui possède des dérivées successives, la suite $|\hat{f}_n|$ tend vers 0 rapidement. Par exemple, f est de classe C^∞ si et seulement si pour tout entier k , $|\hat{f}_n| = o(n^{-k})$.

Voir en TD.

8 Intégrales multiples

L'objet de ce chapitre est de démontrer le théorème de Fubini sur les intégrales multiples. Pour alléger les notations, on se limite la plupart du temps aux intégrales doubles, mais les énoncés généraux se devinent aisément.

8.1 La tribu borélienne de \mathbb{R}^2

C'est la plus petite tribu qui contient tous les rectangles $I \times I'$, où I et I' sont des intervalles. On appelle boréliens les éléments de la tribu borélienne. On a vu plus haut qu'elle contient des demi-plans, et que la fonction $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ est mesurable. Maintenant que le cours de Calcul différentiel a avancé, on peut donner davantage d'exemples.

Proposition 124 *Tout ouvert de \mathbb{R}^2 est mesurable.*

Preuve Soit A un ouvert de \mathbb{R}^2 . Pour tout $(x, y) \in A$, il existe $r > 0$ tel que A contienne la boule $B((x, y), r)$. Il existe des rationnels a, b, c, d tels que le rectangle $R =]a, b[\times]c, d[$ contienne (x, y) et soit contenu dans $B((x, y), r)$, et donc dans A . Cela donne une famille dénombrable de rectangles dont la réunion est A . ■

Corollaire 125 *Toute fonction continue $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable.*

Preuve Il suffit de vérifier que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, a])$ est borélien. Or c'est un ouvert. ■

Lemme 126 *Soit A un borélien de \mathbb{R}^2 . Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $A^x = \{y \in \mathbb{R}; (x, y) \in A\}$. On vérifie que A^x est un borélien de \mathbb{R} .*

Preuve Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit \mathcal{T}' l'ensemble des parties B de \mathbb{R}^2 telles que B^x est un borélien de \mathbb{R} . \mathcal{T}' est une tribu. \mathcal{T}' contient tous les rectangles. Donc \mathcal{T}' contient la tribu borélienne de \mathbb{R}^2 . ■

Corollaire 127 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $f_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_x(y) = f(x, y)$. Alors f_x est mesurable.*

Preuve Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f_x^{-1}(]-\infty, a]) = \{y \in \mathbb{R}; f(x, y) < a\} = (f^{-1}(]-\infty, a]))^x$. ■

8.2 La mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^2

On admet le théorème suivant (même principe général qui donne le Théorème 4).

Théorème 14 *Sur \mathbb{R}^2 muni de la tribu borélienne, il existe une unique mesure λ_2 telle que pour tout rectangle $I \times I'$, $\lambda_2(I \times I') = \lambda(I)\lambda(I')$.*

Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction mesurable positive, ou intégrable, on note tout simplement

$$\int f d\lambda_2 = \int f(x, y) dx dy.$$

De même, la mesure λ_n sur \mathbb{R}^n satisfait $\lambda_n(I_1 \times \cdots \times I_n) = \lambda(I_1) \cdots \lambda(I_n)$.

Lemme 128 *La mesure de Lebesgue λ_n est*

- *Invariante par translation, i.e. si $v \in \mathbb{R}^n$ et A est un borélien, $A + v = \{x + v; x \in A\}$, alors $\lambda_n(A + v) = \lambda_n(A)$.*
- *Homogène de degré n , i.e. si $t > 0$ et A est un borélien, $tA = \{tx; x \in A\}$, alors $\lambda_n(tA) = t^n \lambda_n(A)$.*

En effet, c'est vrai pour les rectangles.

8.3 Les théorèmes de Fubini

On en donne deux versions, une pour les fonctions positives mesurables, et une pour les fonctions complexes intégrables.

Théorème 15 (Fubini-Tonnelli) *Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. Les fonctions*

$$x \mapsto \int f(x, y) dy \quad \text{et} \quad y \mapsto \int f(x, y) dx$$

sont mesurables, et

$$\int \int f(x, y) dx dy = \int \left(\int f(x, y) dx \right) dy = \int \left(\int f(x, y) dy \right) dx.$$

Cet énoncé est très simple d'utilisation. Par exemple, il fournit immédiatement un procédé pour vérifier qu'une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable.

Corollaire 129 *Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ est mesurable, et si*

- *pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est intégrable;*
- *la fonction $y \mapsto \int f(x, y) dx$ est intégrable,*

alors f est intégrable.

Théorème 16 (Fubini-Lebesgue) *Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable. Alors*

- *Pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est intégrable.*
- *Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable.*
- *La fonction $x \mapsto \int f(x, y) dy$ est intégrable.*
- *La fonction $y \mapsto \int f(x, y) dx$ est intégrable, et*

$$\int \int f(x, y) dx dy = \int \left(\int f(x, y) dx \right) dy = \int \left(\int f(x, y) dy \right) dx.$$

Cet énoncé est plus délicat à manipuler. L'hypothèse que f est intégrable est nécessaire.

Exemple 130 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \chi_A(x, y)(2e^{-2xy} - e^{-xy})$, où $A =]0, +\infty[\times]0, 1[$. Alors*

$$\int \left(\int f(x, y) dx \right) dy = 0, \quad \int \left(\int f(x, y) dy \right) dx > 0.$$

En effet,

$$\begin{aligned}\int f(x, y) dx &= \int_0^{+\infty} (2e^{-2xy} - e^{-xy}) dx \\ &= \left[\frac{2}{-2y} e^{-2xy} - \frac{1}{-y} e^{-xy} \right]_{x=0}^{x=+\infty} = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int f(x, y) dy &= \int_0^1 (2e^{-2xy} - e^{-xy}) dy \\ &= \left[\frac{2}{-2x} e^{-2xy} - \frac{1}{-x} e^{-xy} \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{1}{x} (e^{-x} - e^{-2x}) > 0.\end{aligned}$$

8.4 Preuve des théorèmes de Fubini

On commence par le cas de la fonction caractéristique d'un borélien A de $[-T, T]^2$.

Soit \mathcal{T}' l'ensemble des parties A de \mathbb{R}^2 telles que la fonction $\ell_A : x \mapsto \lambda(A^x)$ est mesurable. \mathcal{T}' contient tous les rectangles. \mathcal{T}' est une tribu. En effet, si les A_n sont disjoints,

$$\ell_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_{A_n}.$$

De plus $\ell_{[-T, T]^2 \setminus A} = \ell_{[-T, T]^2} - \ell_A$. Donc \mathcal{T}' est stable par complémentaire et par réunion dénombrable disjointe. Il y a une difficulté technique, à cause du mot "disjointe". On la contourne comme ceci : tout ensemble qui s'obtient à partir des rectangles par un nombre fini d'opérations booléennes (réunion, intersection, complémentaire) peut s'écrire comme une réunion disjointe de rectangles. Cela suffit pour conclure que \mathcal{T}' contient la tribu borélienne de \mathbb{R}^2 . On vérifie ensuite que la formule $\mu(A) = \int \lambda(A^x) dx$ définit une mesure sur la tribu borélienne de \mathbb{R}^2 , qui vaut $\lambda(I)\lambda(I')$ sur les rectangles $I \times I'$, donc c'est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 .

On se débarrasse de T en le faisant tendre vers l'infini (le théorème de convergence monotone intervient). Par linéarité, on passe aux fonctions étagées, puis en prenant une borne supérieure (et en utilisant le théorème de convergence monotone), aux fonctions mesurables quelconques. Cela prouve Fubini-Tonelli.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Fubini-Tonelli appliqué à $|f|$ entraîne que pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est intégrable. On décompose alors f en $f^+ - f^-$ et on applique Fubini-Tonelli séparément à f^+ et f^- . Le cas à valeurs complexes ne coûte aucun effort.

8.5 Volume de la boule unité

C'est une application du Théorème de Fubini-Tonelli. On verra des applications du Théorème de Fubini-Lebesgue après la formule de changement de variable.

Exemple 131 Soit ω_n la mesure de Lebesgue de la boule unité de \mathbb{R}^n . Vérifier que

$$\omega_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}, \quad \omega_{2k+1} = \frac{\pi^k}{(k + \frac{1}{2})(k - \frac{1}{2}) \cdots \frac{3}{2} \frac{1}{2}}.$$

Soit B_n la boule unité de \mathbb{R}^n . Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $B^x = \{y \in \mathbb{R}^{n-1}; (x, y) \in B_n\}$. B^x est une boule de rayon $\sqrt{1-x^2}$, donc $\lambda_{n-1}(B^x) = \omega_{n-1}(1-|x|)^{(n-1)/2}$.

$$\begin{aligned}\omega_n &= \int \chi_{B_n} d\lambda_n \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int \chi_{B^x} d\lambda_{n-1} \right) dx \\ &= \omega_{n-1} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{(n-1)/2} dx \\ &= \omega_{n-1} I_{n-1},\end{aligned}$$

où on a noté

$$I_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{n/2} dx$$

On intègre par parties

$$\begin{aligned}I_n &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^{n/2} dx \\ &= [x(1-x^2)^{n/2}]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 x \frac{n}{2} (-2x)(1-x^2)^{(n-2)/2} dx \\ &= n \int_{-1}^1 x^2 (1-x^2)^{(n-2)/2} dx \\ &= n \int_{-1}^1 (x^2-1)(1-x^2)^{(n-2)/2} dx + n \int_{-1}^1 (1-x^2)^{(n-2)/2} dx \\ &= -nI_n + nI_{n-2},\end{aligned}$$

d'où $I_n = \frac{n}{n+1} I_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.

Astuce : en multipliant les deux membres par I_{n-1} , on trouve que, pour tout $n \geq 2$, $(n+1)I_n I_{n-1} = nI_{n-1} I_{n-2}$, i.e. $(n+1)I_n I_{n-1}$ est indépendant de n . Or $I_0 = 2$, $I_1 = \frac{\pi}{2}$, donc pour tout $n \geq 1$, $(n+1)I_n I_{n-1} = 2I_1 I_0 = 2\pi$.

On repart de $\omega_n = \omega_{n-1} I_{n-1} = \omega_{n-2} I_{n-2} I_{n-1} = \omega_{n-2} \frac{2\pi}{n}$, d'où

$$\omega_n = \frac{2\pi}{n} \omega_{n-2} = \frac{2\pi}{n} \frac{2\pi}{n-2} \omega_{n-4} = \dots = \frac{(2\pi)^{(n-2)/2}}{n(n-2)\dots 4} \omega_2$$

si n pair,

$$\omega_n = \frac{2\pi}{n} \omega_{n-2} = \frac{2\pi}{n} \frac{2\pi}{n-2} \omega_{n-4} = \dots = \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{n(n-2)\dots 3 \cdot 1} \omega_1$$

si n impair. On conclut avec $\omega_1 = 2$ et $\omega_2 = \omega_1 I_1 = \pi$.

Fin du cours n°9

8.6 Changement de variables

8.6.1 Cas de la dimension 1

Soit $\phi :]a, b[\rightarrow]c, d[$ une fonction de classe C^1 , croissante. Alors pour toute fonction continue bornée $f :]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_c^d f(t) dt = \int_a^b f \circ \phi(s) \phi'(s) ds.$$

C'est la formule de changement de variables usuelle. On la démontre en considérant une primitive F de f sur $]c, d[$ et en dérivant $F \circ \phi$.

Lorsque ϕ est décroissante, la formule devient

$$\int_c^d f(t) dt = - \int_a^b f \circ \phi(s) \phi'(s) ds,$$

ce qui peut s'écrire

$$\int_c^d f(t) dt = \int_a^b f \circ \phi(s) |\phi'(s)| ds.$$

C'est sous cette forme que la formule se généralise aux dimensions supérieures.

8.6.2 Difféomorphismes

En dimension 2 ou plus, un changement de variables, c'est une bijection $\phi : U \rightarrow V$ entre deux ouverts de \mathbb{R}^n , qui possède des dérivées partielles continues, et dont l'application réciproque $\phi^{-1} : V \rightarrow U$ possède aussi des dérivées partielles continues. On appelle cela un C^1 -difféomorphisme.

Exemple 132 *Coordonnées polaires.*

Il s'agit d'un difféomorphisme de $U =]0, +\infty[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur le demi-plan ouvert $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$, donné par

$$\phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

L'application réciproque est donnée par

$$\phi^{-1}(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(\frac{y}{x})).$$

8.6.3 Déterminant jacobien

Chaque coordonnée y_j de $y = \phi(x)$ est une fonction sur U qui possède des dérivées partielles $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$. On appelle *matrice jacobienne* la matrice J_ϕ dont les coefficients sont les $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$. Son déterminant $\det(J_\phi)$ s'appelle le *déterminant jacobien*.

Exemple 133 *Coordonnées polaires.*

On calcule

$$J_\phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix},$$

d'où $\det(J_\phi) = r$.

8.6.4 Formule de changement de variables

Théorème 17 *Soient U et V des ouverts de \mathbb{R}^n , munis de la mesure de Lebesgue. Soit $\phi : U \rightarrow V$ un C^1 -difféomorphisme. Pour toute fonction mesurable positive (resp. intégrable) $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction $f \circ \phi |\det(J_\phi)|$ est mesurable positive (resp. intégrable) sur U , et*

$$\int_V f dy_1 \dots dy_n = \int_U f \circ \phi |\det(J_\phi)| dx_1 \dots dx_n.$$

Exemple 134 *Soit $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$ le quart de disque. Soit $f(x, y) = 2xy : V \rightarrow \mathbb{R}$. Alors*

$$\int_V f(x, y) dx dy = \int_{]0, 1[\times]0, \frac{\pi}{2}[} 2r^2 \cos \theta \sin \theta r dr d\theta,$$

comme on peut le vérifier numériquement.

$$\begin{aligned} \int_V f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 2xy dy \right) dx \\ &= \int_0^1 [y^2]_0^{\sqrt{1-x^2}} x dx \\ &= \int_0^1 (1-x^2)x dx = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

La forme du domaine (quart de disque) suggère d'utiliser les coordonnées polaires.

$$\begin{aligned} \int_{]0,1[\times]0, \frac{\pi}{2}[} 2r^2 \cos \theta \sin \theta r dr d\theta &= \int_0^1 r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2} \cos(2\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Exemple 135 Soit E le quart d'ellipse défini par les inéquations

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0, x^2 + \frac{1}{4}y^2 < 1\}.$$

Calculer $\iint_E 2xy dx dy$.

On utilise le changement de variable $x = u, y = 2v, (u, v) \in D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u > 0, v > 0, u^2 + v^2 < 1\}$. Autrement dit, $\phi : D \rightarrow E$ est le difféomorphisme défini par $\phi(u, v) = (u, 2v)$. Il est linéaire, sa matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donc son déterminant jacobien vaut 2. Il vient

$$\begin{aligned} \iint_E 2xy dx dy &= \iint_D 2.u.2v.2 du dv \\ &= 4 \iint_D 2uv du dv = 1. \end{aligned}$$

Corollaire 136 Soit $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire de déterminant ± 1 . Alors ϕ préserve la mesure de Lebesgue : pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^n, \lambda_n(\phi(A)) = \lambda_n(A)$. En particulier, ϕ est invariante par isométries.

Preuve Appliquer la formule de changement de variable à la fonction caractéristique de A . La matrice jacobienne d'une bijection linéaire, c'est sa matrice dans la base canonique, donc $\det(J_\phi) = \det(\phi)$.

On rappelle qu'une application linéaire $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une isométrie si elle préserve la norme euclidienne. Cela entraîne que ϕ préserve le produit scalaire. Si X, Y sont les colonnes des composantes de deux vecteurs v et w , et si M est la matrice de ϕ , alors $v \cdot w = X^\top Y, \phi(v) \cdot \phi(w) = (MX)^\top MY = X^\top M^\top MY$. Par conséquent, ϕ préserve le produit scalaire si et seulement si $M^\top M = I$. Cela entraîne que

$$1 = \det(I) = \det(M^\top M) = \det(M)^2,$$

donc $|\det(\phi)| = 1$. ■

Proposition 137 $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Preuve On calcule de deux façons $\int_{x>0, y>0} e^{-x^2-y^2} dx dy$. Par Fubini-Tonnelli,

$$\begin{aligned} \int_{x>0, y>0} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx \right) dy \\ &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \\ &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

La forme de la fonction à intégrer (elle ne dépend que de r) suggère d'utiliser un changement de variables.

$$\begin{aligned} \int_{x>0, y>0} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_{]0, +\infty[\times]0, \frac{\pi}{2}[} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \right) e^{-r^2} r dr \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

■

8.6.5 Preuve dans le cas linéaire

On suppose ici que $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une bijection linéaire. Dans ce cas, $\det(J_\phi) = \det(\phi) \neq 0$. On rappelle la définition de la *mesure image* par une application mesurable. La mesure $(\phi_* \lambda_n)(A)$ d'un ensemble mesurable A est par définition

$$(\phi_* \lambda_n)(A) = \lambda_n(\phi^{-1}(A)).$$

Par définition, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable positive,

$$\int f d(\phi_* \lambda_n) = \int f \circ \phi d\lambda_n.$$

D'après le Théorème 14 (partie unicité), pour montrer que $\phi_* \lambda_n = |\det(\phi)|^{-1} \lambda_n$, il suffit de vérifier que pour tout rectangle A , $(\phi_* \lambda_n)(A) = |\det(\phi)|^{-1} \lambda_n(A)$. Autrement dit, que

$$\lambda_n(\phi^{-1}A) = |\det(\phi)|^{-1} \lambda_n(A).$$

Ou, ce qui revient au même,

$$\lambda_n(\phi(A)) = |\det(\phi)| \lambda_n(A).$$

On le vérifie d'abord lorsque $\phi = id + E_{ij}$, où E_{ij} est la matrice dont un seul coefficient est non nul, c'est par exemple a en position ij . Autrement dit,

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_i + ax_j, \dots, x_n).$$

Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que $(i, j) = (n-1, n)$. Si $A = \prod_{k=1}^n I_k$ est un rectangle, on calcule la mesure de $\phi(A)$ par Fubini. On écrit $x = (x', x_n)$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la coupe

$$\begin{aligned} \phi(A)^y &= \{x' \in \mathbb{R}^{n-1}; (x_1, \dots, x_{n-1} + ay, y) \in A\} \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n-2} I_k \right) \times (I_{n-1} + ay). \end{aligned}$$

Le dernier intervalle est seulement translaté, ce qui ne change pas sa mesure. On conclut que $\lambda_{n-1}(\phi(A)^y) = \lambda_{n-1}(A^y)$. En intégrant par rapport à y , on trouve que $\lambda_n(\phi(A)) = \lambda_n(A)$. En particulier, multiplier ϕ par une matrice de la forme $id + E_{ij}$ ne change ni la mesure image, ni le déterminant. L'effet de cette multiplication est d'ajouter à une ligne de ϕ un multiple d'une autre ligne. La méthode du pivot montre que par de telles opérations, on ramène n'importe quelle matrice à une matrice diagonale. Pour une matrice diagonale $\phi = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$,

$$\lambda_n\left(\prod_{k=1}^n I_k\right) = \prod_{k=1}^n \lambda(a_k I_k) = \prod_{k=1}^n |a_k| = |\det(\phi)|,$$

ce qui achève la preuve.

8.6.6 Cas général

On donne juste l'idée. Si ϕ est de classe C^1 , on peut partitionner U en boréliens très petits sur lesquels ϕ est proche d'une application affine, de la forme

$$y \mapsto L(y) = \phi(x_0) + J_\phi(x_0)(y),$$

(développement limité à l'ordre 1). Pour un tel borélien A , la mesure de $\phi(A)$ est proche de celle de $L(A)$, qui vaut $|\det(J_\phi(x_0))|\lambda_n(A)$, donc proche de l'intégrale sur A de la fonction $|\det(J_\phi)|$. En additionnant les contributions des petits boréliens, on trouve que $\lambda_n(\phi(U))$ est proche de $\int_U |\det(J_\phi)| d\lambda_n$. On passe des mesures des ensembles mesurables aux intégrales des fonctions mesurables positives (resp. intégrables) comme précédemment.

9 Convolution

9.1 Motivation

Il s'agit de modéliser un dispositif quelconque de traitement du signal. C'est un opérateur F qui prend en entrée un signal, i.e. une fonction g , et retourne une autre fonction $F(g)$.

1. On suppose que F ne change pas dans le temps. Autrement dit, pour tout τ , si on décale le signal d'entrée dans le temps, i.e. on remplace $g(t)$ par $g_\tau(t) = g(t + \tau)$, alors le signal de sortie est décalé d'autant, i.e.

$$F(g_\tau) = F(g)_\tau.$$

2. On suppose de plus que F obéit au principe de superposition, i.e. pour $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$F(g_1 + g_2) = F(g_1) + F(g_2), \quad F(\lambda g) = \lambda F(g).$$

Autrement dit, F est linéaire.

Simplifions en supposant que le temps est discret, i.e. ne prend que les valeurs entières $\dots, -1, 0, 1, \dots$. Les signaux d'entrée et de sortie sont des vecteurs, $(\dots, g(-1), g(0), g(1), \dots)$ et son image par l'application linéaire P , i.e. le produit par la matrice P ,

$$(Fg)(i) = \sum_k f_{ik}g(k).$$

La condition d'invariance dans le temps s'écrit

$$\begin{aligned} \sum_k f_{(i+\tau)k}g(k) &= F(g)_\tau(i) \\ &= F(g_\tau)(i) \\ &= \sum_k f_{ik}g(k + \tau) \\ &= \sum_\ell f_{i(\ell-\tau)}g(\ell). \end{aligned}$$

Cela entraîne que pour tout τ , $f_{(i+\tau)k} = f_{i(k-\tau)}$. En faisant $\tau = k$, il vient $f_{(i+k)k} = f_{i0}$, i.e. $f_{ik} = f_{(i-k)0}$ ne dépend que de $i - k$. On note cela $f_{ik} = f(i - k)$. L'opérateur F est donc donné par

$$F(g)(i) = \sum_k f(i - k)g(k).$$

On remplace les fonctions sur \mathbb{Z} par des fonctions sur \mathbb{R} . Par analogie, on étudie les opérateurs de la forme

$$F(g)(x) = \int f(x - t)g(t) dt.$$

Fin du cours n°10

9.2 Définition

Définition 138 On appelle l'opération

$$(f, g) \mapsto h, \quad h(x) = \int f(x - y)g(y) dy$$

le produit de convolution de f et g , et on le note $f \star g$.

On se demande à quelles conditions sur f et g le produit $f \star g$ est défini.

Si f et g sont positives, pas de problèmes. Si f et g changent de signe, il faut vérifier que $\int |f(x - y)g(y)| dy < +\infty$. Ce n'est pas automatique.

Exemple 139 Soit $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)|x|^{-1/2}$. Alors f est intégrable. Mais $f \star f(0) = \int_{-1}^1 x^{-1} dx = +\infty$.

En revanche, $f \star f$ est finie en dehors de 0. Plus généralement,

Théorème 18 Soient f et g des fonctions intégrables sur \mathbb{R} . Alors $h = f \star g$ est définie presque partout et c'est une fonction intégrable.

Preuve (A savoir refaire, voir en TD). On pose $\phi(x, y) = f(x - y)g(y)$. Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \phi(x, y)$ est un multiple d'une translatée de f , donc est intégrable, et $\int \phi(x, y) dx = g(y) \int f(x) dx$. La fonction $y \mapsto \int \phi(x, y) dx$ est un multiple de g , donc elle est intégrable. Le théorème de Fubini-Tonnelli montre que ϕ est intégrable, et que $y \mapsto \int \phi(x, y) dx$ est intégrable pour presque tout x . Par conséquent, h est définie presque partout et

$$\begin{aligned} \int |h(x)| dx &\leq \int \left(\int |f(x - y)g(y)| dy \right) dx \\ &= \int \left(\int |f(x - y)||g(y)| dx \right) dy \\ &= \int \left(\int |f(x - y)| dx \right) |g(y)| dy \\ &= \int |f(x)| dx \int |g(y)| dy. \end{aligned}$$

■

9.3 Cas des fonctions périodiques

Un énoncé identique est vrai pour les fonctions périodiques. La démonstration est la même, à condition de lire $x - y \pmod{2\pi}$ à la place de $x - y$, et de n'intégrer que sur $[0, 2\pi]$. Cela motive la définition suivante.

Définition 140 Soient f et g des fonctions 2π -périodiques sur \mathbb{R} et intégrables sur $[0, 2\pi]$. On définit leur produit de convolution par

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t) dt.$$

Théorème 19 Soient f et g des fonctions 2π -périodiques sur \mathbb{R} et intégrables sur $[0, 2\pi]$. Alors $h = f \star g$ est définie presque partout, 2π -périodique sur \mathbb{R} et intégrable sur $[0, 2\pi]$.

Exemple 141 Soit $f = \frac{1}{a}\chi_{[0,a]}$ où $\chi_{[0,a]}$ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, a]$. Alors $f \star g$ donne la moyenne de g sur une fenêtre mobile de largeur a .

9.4 Propriétés

Proposition 142 Soient f et g deux fonctions intégrables (resp. 2π -périodiques sur \mathbb{R} et intégrables sur $[0, 2\pi]$). Alors

1. $f \star g = g \star f$.
2. Si f est de classe C^1 et f' est intégrable et bornée, alors $h = f \star g$ est dérivable, et $h' = f' \star g$.
3. Cas périodique. Les coefficients de Fourier de $h = f \star g$ satisfont $\hat{h}_n = \hat{f}_n \hat{g}_n$.

Preuve (A savoir refaire, voir en TD).

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $t \mapsto g(x-t)f(t)$ est intégrable. Par la formule de changement de variable (en une variable),

$$(g \star f)(x) = \int g(x-t)f(t) dt = \int g(u)f(x-u) du = (f \star g)(x).$$

2. Par hypothèse, il existe M tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq M$. On applique le Théorème 83 (dérivation sous le signe somme) à la fonction $f(x, s) = f(s-x)g(x)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
 - *Dérivabilité.* Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x, s)$ est dérivable par rapport à s , de dérivée $f'(s-x)g(x)$;
 - *Domination.* Pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(s-x)g(x)| \leq M|g(x)|$ où $|g|$ est une fonction indépendante de s .
 - *Intégrabilité.* $|g|$ est une fonction intégrable sur \mathbb{R} .
 On conclut que $h : s \mapsto (f \star g)(s) = \int f(x, s) dx$ est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée

$$h'(s) = \int f'(s-x)g(x) dx = (f' \star g)(s).$$

3. Pour $x, t \in [0, 2\pi]$, on pose $k(x, t) = f(x-t)g(t)e^{-inx}$. D'après le Théorème de Fubini-Tonnelli,

$$\begin{aligned} \iint_{[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]} |k(x, t)| dx dt &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x-t)||g(t)| dx dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(x-t)| dx \right) |g(t)| dt \\ &= \left(\int_0^{2\pi} |f(x)| dx \right) \left(\int_0^{2\pi} |g(t)| dt \right) \end{aligned}$$

est finie, donc k est intégrable sur $[0, 2\pi]$. D'après le Théorème de Fubini-Lebesgue,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^2} \iint_{[0,2\pi] \times [0,2\pi]} k(x,t) dx dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t) dt \right) e^{-inx} dx \\ &= \hat{h}_n. \end{aligned}$$

Mais aussi

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^2} \iint_{[0,2\pi] \times [0,2\pi]} k(x,t) dx dt &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x-t)e^{-in(x-t)} dx \right) g(t)e^{-int} dt \\ &= \hat{f}_n \hat{g}_n. \end{aligned}$$

■

9.5 Filtre passe bas

C'est le dispositif qui retire à un signal périodique ses harmoniques d'ordres élevés.

Définition 143 Soit N un entier. Le filtre passe-bas P_N est l'opérateur qui, à un signal périodique $g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}_n e_n$ associe

$$P_N(g) = \sum_{n=-N}^N \hat{g}_n e_n.$$

Proposition 144 Le filtre passe bas P_N coïncide avec le produit de convolution avec la fonction $p_N(t) = \frac{\sin((2N+1)t/2)}{\sin(t/2)}$.

Preuve Si $h = P_N(g)$, alors $\hat{h}_n = c_n \hat{g}_n$ où $c_n = 1$ si $|n| \leq N$, $c_n = 0$ sinon. Il vient $h = f \star g$ où f est la fonction de coefficients de Fourier c_n ,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n(t) = \sum_{n=-N}^N e_n(t) = e^{-iNt} \sum_{n=0}^{2N} e^{int} \\ &= e^{-iNt} \frac{1 - e^{(2N+1)it}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{-i(2N+1)t/2} - e^{(2N+1)it/2}}{e^{-it/2} - e^{it/2}} \\ &= \frac{\sin((2N+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}. \end{aligned}$$

■

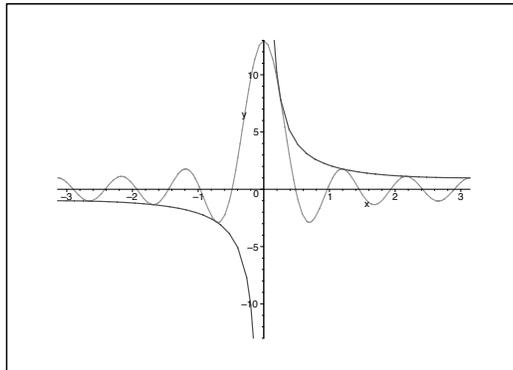


Figure 4 : Courbe représentative de p_6 .

9.6 Aliassage et échantillonnage

9.6.1 Origine de l'aliassage

L'aliassage (aliasing), c'est l'apparition sur une image

- de marches d'escalier ;
- de moirés ;

et la disparition de petits objets.

L'oeil est particulièrement sensible aux transitions sombre/lumineux, donc il s'attache à décortiquer les marches d'escaliers et moirés (alignements de marches d'escalier dans les régions rayées) qui n'ont pourtant aucune signification. L'oeil voit des motifs qui n'existent pas, d'où la terminologie (alias = autre en latin).



Figure 1 : Vue d'un cône rayé

L'aliassage a pour origine les erreurs d'*échantillonnage*, i.e. celles qui se produisent quand on transforme une image continue en une image discrète, i.e. un tableau de pixels. C'est lorsque l'image présente des transitions que l'échantillonnage pose des problèmes. On va analyser mathématiquement la perte d'information lors de l'échantillonnage d'une fonction périodique d'une variable, cela conduira à une méthodologie qu'on appliquera à l'aliassage.

9.6.2 Echantillonnage

Les transitions brutales, i.e. les discontinuités, sont bien détectées par la transformation de Fourier, voir Remarque 122. La discontinuité se traduit par une décroissance lente des coefficients de Fourier, i.e. les hautes fréquences sont très présentes.

Les hautes fréquences sont difficiles à *échantillonner*, i.e. lorsqu'on transforme un signal continu en un signal discret en prenant ses valeurs à intervalles réguliers, les hautes fréquences donnent lieu à des erreurs. On va expliquer ce principe pour des fonctions d'une variable, la généralisation à deux variables est immédiate.

Exemple 145 Les fonctions $x \mapsto \sin(5x)$ et $x \mapsto -\sin(2x)$ prennent les mêmes valeurs aux points $x = \frac{2k\pi}{7}$, $k \in \mathbb{Z}$.

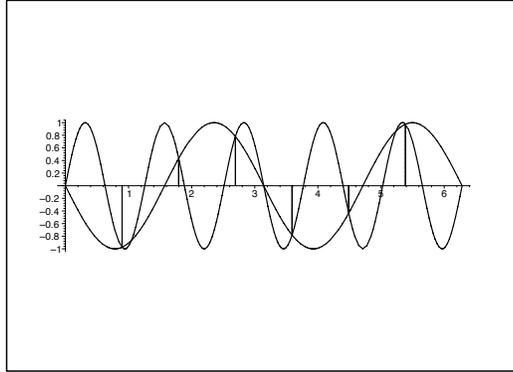


Figure 3 : Courbes représentatives de $x \mapsto \sin(5x)$ et $x \mapsto -\sin(2x)$.

On appelle *échantillonnage en N points* l'application linéaire qui à une fonction 2π -périodique f à valeurs complexes associe le vecteur

$$(f(0), f(\frac{2\pi}{N}), f(\frac{4\pi}{N}), \dots, f(\frac{2(N-1)\pi}{N})) \in \mathbb{C}^N.$$

Soit \mathcal{T}_n l'espace vectoriel complexe des polynômes trigonométriques de degré $\leq n$. Comme sa dimension vaut $2n+1$, l'échantillonnage en N points ne peut pas être injectif sur \mathcal{T}_n si $N < 2n+1$. Il y a donc forcément une perte d'information sur les signaux comportant de hautes fréquences. La réciproque est vraie, avec le même seuil $2n+1$.

Théorème 20 *L'échantillonnage en N points est injectif sur les polynômes trigonométriques de degré $< N/2$.*

Preuve Échantillonner f revient à remplacer f par la mesure

$$g_N = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\frac{2k\pi}{N}) \delta_{\frac{2k\pi}{N}}$$

où δ_x désigne la masse de Dirac en x . On va vérifier que les coefficients de Fourier de g_N valent

$$(\widehat{g_N})_n = \frac{N}{2\pi} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}_{n+pN}$$

On parle de *repliement du spectre*. Si le spectre de f (i.e. l'ensemble des indices $n \in \mathbb{Z}$ tels que \hat{f}_n est non nul) est contenu dans un intervalle de longueur $< N$ (par exemple dans l'intervalle $] -N/2, N/2[$, l'application $\hat{f} \mapsto (\widehat{g_N})$ est injective, donc $f \mapsto g_N$ est injective.

Notons, pour $y \in [0, 2\pi]$,

$$\gamma_y = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta_{y+2\pi p}$$

la mesure périodique qui coïncide avec la masse de Dirac δ_y sur $[0, 2\pi]$. Par définition, les coefficients de Fourier de γ_y valent

$$(\widehat{\gamma_y})_n = \frac{1}{2\pi} e^{-niy}.$$

Comme

$$g_N = \sum_{k=1}^N f(\frac{2k\pi}{N}) \gamma_{\frac{2k\pi}{N}},$$

il vient

$$\widehat{(g_N)}_n = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2\pi} f\left(\frac{2k\pi}{N}\right) e^{-ni\frac{2k\pi}{N}}.$$

Or

$$f\left(\frac{2k\pi}{N}\right) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}_p e^{ip\frac{2k\pi}{N}}.$$

d'où

$$\begin{aligned} (\hat{g}_N)_n &= \sum_{k=1, \dots, N, p \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \hat{f}_p e^{i(p-n)\frac{2k\pi}{N}} \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \hat{f}_p \sum_{k=1}^N e^{i(p-n)\frac{2k\pi}{N}} \\ &= \sum_{p \equiv n \pmod{N}} \frac{N}{2\pi} \hat{f}_p \end{aligned}$$

et enfin

$$\widehat{(g_N)}_n = \frac{N}{2\pi} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}_{n+pN}.$$

■

Conclusion : avant d'échantillonner, il faut supprimer les hautes fréquences, i.e. appliquer le filtre passe-bas P_N .

9.7 Comment réduire l'aliassage

- En suréchantillonnant, i.e. en augmentant N . Comme cela est coûteux, on peut détecter les régions où un suréchantillonnage est nécessaire (en comparant la couleur en un point avec la couleur aux points voisins) et subdiviser les pixels correspondant. C'est le principe du *suréchantillonnage adaptatif*. On ne s'étendra pas dessus.
- En supprimant les hautes fréquences dans l'image initiale, i.e. en appliquant l'opérateur P_N ci-dessus ou une approximation de P_N dans les deux directions x et y .

9.7.1 Approximation de P_N

On obtient une bonne approximation de P_N en effectuant une convolution avec une approximation de p_N , par exemple en tronquant p_N à son premier 0, et en remplaçant l'intégrale par une somme de Riemann relative à une subdivision en $2\ell + 2$ intervalles. En termes d'échantillonnage, cela revient à choisir, pour discrétiser la fonction f , de remplacer $f\left(\frac{2k\pi}{N}\right)$ par

$$\sum_{j=-\ell}^{\ell} a_j f\left(\frac{2k\pi}{N} + \frac{2j\pi}{(\ell+1)N}\right)$$

où les a_j sont des valeurs de p_N normalisées,

$$a_j = \frac{p_N\left(\frac{2j\pi}{(\ell+1)N}\right)}{\sum_{i=-\ell}^{\ell} \chi_N\left(\frac{2j\pi}{(\ell+1)N}\right)}.$$

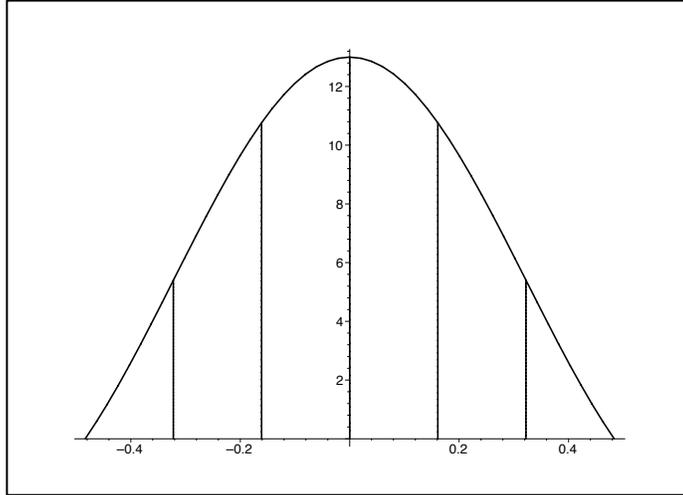


Figure 5 : Discrétisation de p_6 ($\ell = 2$).

Autrement dit, on régularise l'échantillonnage en prenant des moyennes pondérées des valeurs aux points voisins.

9.7.2 Mise en oeuvre pratique

Modélisons une image noir et blanc ou un texte destinés à être affichés sur un écran d'ordinateur par une fonction $f : [0, 2\pi]^2 \rightarrow [0, 1]$. C'est réaliste si l'image est calculée (texte ou image de fabrication maison) ou donnée par un tableau de valeurs de gris de taille beaucoup plus grande que le nombre L de lignes de l'écran. On choisit un nombre $N \leq L$ du même ordre de grandeur que L , de sorte que $2\pi/N$ est de l'ordre de quelques pixels. On choisit une valeur de ℓ petite (disons $\ell = 2$). On attribue au pixel numéroté $(m, m') \in \{1, \dots, L\}^2$ l'intensité lumineuse

$$I(m, m') = \sum_{j=-\ell}^{\ell} \sum_{j'=-\ell}^{\ell} a_j a_{j'} f\left(\frac{2m\pi}{L} + \frac{2j\pi}{(\ell+1)N}, \frac{2m'\pi}{L} + \frac{2j'\pi}{(\ell+1)N}\right).$$

Ce procédé remplace les zones de transition brutale entre ombre et lumière par des dégradés dans lesquels l'oeil ne trouve pas de détail auquel s'accrocher. Modifier le rapport N/L permet d'étaler plus ou moins le dégradé.

9.8 Lissage

En combinant deux point de vue sur la convolution, on montre qu'elle permet d'approximer toute fonction par des fonctions très régulières, y compris des polynômes.

Le premier point de vue est que, si f est positive d'intégrale 1, $f \star g$ est une moyenne pondérée mobile de g . Si g varie peu (par exemple, g est continue), alors $f \star g$ est proche de g .

Proposition 146 Soit f_n une suite de fonctions positives sur \mathbb{R} telle que

- f_n est nulle hors de $[-1, 1]$;
- $\int f_n(x) dx = 1$;
- Pour tout $\delta > 0$, $\int_{-\delta}^{\delta} f_n(x) dx$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Soit $A > 0$. Soit g une fonction continue sur \mathbb{R} , nulle hors de l'intervalle $[-A, A]$. Alors $f_n \star g$ converge uniformément vers g sur \mathbb{R} .

Preuve g est continue sur l'intervalle fermé borné $[-A - 1, A + 1]$, donc uniformément continue. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x')| < \epsilon.$$

D'autre part, g est bornée sur $[-A - 1, A + 1]$, $|g| \leq M$. Soit $x \in [-A - 1, A + 1]$.

$$\begin{aligned} |(f_n \star g)(x) - g(x)| &= \int f_n(t)(g(x-t) - g(x)) dt \\ &\leq \int f_n(t)|g(x-t) - g(x)| dt \\ &= \int_{|t|>\delta} f_n(t)|g(x-t) - g(x)| dt + \int_{|t|\leq\delta} f_n(t)|g(x-t) - g(x)| dt \\ &\leq \int_{|t|>\delta} f_n(t)M dt + \int_{|t|\leq\delta} f_n(t)\epsilon dt \leq 2\epsilon \end{aligned}$$

pour n assez grand (indépendamment de x), car la première intégrale tend vers 0 et la seconde est $\leq \epsilon$. Si $x \notin [-A - 1, A + 1]$, $(f_n \star g)(x) = g(x) = 0$. Dans les deux cas, il y a convergence uniforme. ■

Le second point de vue est que $f \star g$ est une moyenne pondérée de f . Si f est régulière (e.g., de classe C^k), il en est de même de $f \star g$ (Proposition 142, 2.). On obtient donc une approximation de g par une fonction plus régulière. On peut aller plus loin, approximer par les fonctions les plus régulières qui soient, les polynômes.

Théorème 21 (Stone-Weierstrass) Soit $A \in \mathbb{R}$. Soit g une fonction continue sur \mathbb{R} , nulle hors de l'intervalle $[-A, A]$. Alors g est limite uniforme sur $[-A, A]$ d'une suite de polynômes.

Preuve Quitte à remplacer g par $x \mapsto g(2Ax)$, on peut remplacer $[-A, A]$ par $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On pose $f_n(x) = \frac{1}{c_n}(1-x^2)^n \chi_{[-1,1]}$, où $c_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt$. D'après la proposition, $f_n \star g$ converge uniformément vers g . On remarque que, pour $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

$$\begin{aligned} (f_n \star g)(x) &= \int_{x-1}^{x+1} \frac{1}{c_n} (1-(x-t)^2)^n g(t) dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{c_n} (1-(x-t)^2)^n g(t) dt. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est un polynôme en x . On obtient donc une approximation de g par un polynôme sur son support. ■

Fin du cours n°11