

# COURS DE PHYSIQUE

## ÉLECTROCINÉTIQUE

JIMMY ROUSSEL

2023

Cours d'électrocinétique – [femto-physique.fr](http://femto-physique.fr)

JIMMY ROUSSEL, professeur agrégé à l'Ecole Nationale Supérieure de Chimie de Rennes

Copyright © 2023 Jimmy Roussel

 Ce document est sous licence *Creative Commons* «Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 4.0 International (CC BY-NC 4.0)».

Pour plus d'informations : [creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/](http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

Ce document est réalisé avec l'aide de *KOMA-Script* et  $\text{\LaTeX}$  en utilisant la classe *kaobook*.

1<sup>re</sup> édition – Mars 2016

Version en ligne – [femto-physique.fr/electrocinetique](http://femto-physique.fr/electrocinetique)

# Preface

Ce cours s'intéresse à l'électrocinétique, c'est-à-dire à l'étude de la répartition du potentiel et du courant électrique au sein d'un circuit électrique. On distinguera les régimes stationnaires des régimes variables que l'on placera dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

Ce cours s'adresse plus particulièrement à des étudiants de premier cycle universitaire ou élèves des CPGE. Les candidats au CAPES ou à l'Agrégation peuvent y trouver également matière à réflexion.

J'ai essayé le plus possible d'illustrer les différentes notions par des exemples ou de simples exercices. Mais pour un entraînement plus poussé, j'invite le lecteur à se procurer l'eBook suivant :

- ▶ *Électrocinétique – 60 exercices et problèmes corrigés.*

disponibles à l'adresse [payhip.com/femto](http://payhip.com/femto)

**Remarque** : ce recueil est en cours d'élaboration ce qui explique la présence de certains chapitres encore inactifs.

*Jimmy Roussel*



# Table des matières

Preface	iii
Table des matières	v
<b>1 ÉTUDE DES RÉSEAUX ÉLECTRIQUES EN RÉGIME CONTINU</b>	<b>1</b>
1.1 Lois de l'électrocinétique	1
1.2 Phénomènes résistifs	5
1.3 Modélisation linéaire d'un dipôle actif	7
1.4 Méthodes de résolution	11
<b>2 CONDENSATEURS ET BOBINES</b>	<b>17</b>
2.1 Condensateur électrique	17
2.2 Bobine d'induction	20
<b>3 RÉGIMES TRANSITOIRES</b>	<b>25</b>
3.1 Généralités	25
3.2 Décharge d'un condensateur	27
3.3 Circuit RL	29
3.4 Oscillateur RLC	31
<b>4 RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ</b>	<b>35</b>
4.1 Signaux périodiques	35
4.2 Notion d'impédance et d'admittance	40
4.3 Puissance en régime sinusoïdal forcé	43
<b>5 FILTRAGE PASSIF</b>	<b>47</b>
5.1 Fonction de transfert	47
5.2 Filtrage passe-haut	51
5.3 Filtrage passe-bas	55
5.4 Filtre passe-bande	58
5.5 Stabilité	61
<b>6 STRUCTURES ACTIVES À AMPLIFICATEURS INTÉGRÉS</b>	<b>65</b>
Pour en savoir plus	67
Grandeurs physiques et symboles mathématiques	69



# Table des figures

1.1	Les différentes conventions	2
1.2	Représentation d'une tension	3
1.3	maille d'un circuit orientée par le sens de parcours positif indiqué.	3
1.4	Schéma et caractéristique d'un conducteur ohmique.	5
1.5	Réseau constitué de deux résistances	5
1.8	Pont diviseur de tension	6
1.6	Conducteurs ohmiques en série.	6
1.7	Conducteurs ohmiques en parallèle.	6
1.9	Pont diviseur de courant	7
1.10	Source idéale de tension : schéma et caractéristique	8
1.11	Source réelle de tension : schéma et modélisation linéaire.	8
1.12	Puissance produite en fonction du courant débité.	8
1.13	Source de courant idéale : schéma et caractéristique.	8
1.15	Puissance fournie par une source de courant	9
1.14	Source réelle de courant : schéma et caractéristique.	9
1.16	Équivalence Thévenin-Norton.	9
1.17	Batterie en charge.	10
1.18	Moteur à courant continu	10
1.19	Charge d'une batterie.	11
1.20	Circuit étudié.	12
1.21	Circuit étudié.	13
1.22	Théorème de Millman	14
1.23	Circuit étudié.	15
2.1	Schéma électrique du condensateur idéal.	17
2.2	Montage étudié.	18
2.3	Deux condensateurs associés en parallèle.	19
2.4	Deux condensateurs associés en série.	19
2.5	Fabrication d'un condensateur plan réel.	20
2.6	Modélisation d'un condensateur réel.	20
2.7	Induction	21
2.9	Joseph Henry (1797 - 1878).	22
2.8	Représentation d'une bobine idéale.	22
2.10	Modélisations d'une bobine.	23
3.1	Montage étudié.	25
3.2	Régime transitoire observé à l'ouverture de l'interrupteur.	25
3.3	Montage RC.	27
3.4	Évolution de la tension capacitive et du courant de décharge.	28
3.5	Montage R-L.	29
3.6	Évolution du courant et de la tension inductive.	30
3.7	Montage RLC série.	31
3.8	Circuit pour $t > 0$ .	31
3.10	Régime apériodique.	32
3.9	Régime pseudo-périodique.	32
3.11	Régime critique.	33

4.1	Caractéristiques d'un signal périodique. . . . .	35
4.3	Déphasage. . . . .	36
4.2	Signal sinusoïdal. . . . .	36
4.4	Deux signaux sinusoïdaux déphasés de $\phi$ en mode XY. . . . .	37
4.5	Représentation de Fresnel . . . . .	38
4.6	Montage RLC. . . . .	39
4.7	Établissement du régime sinusoïdal (paramètres : $\omega = 0,35\omega_0$ et $Q = 10$ ). . . . .	39
4.8	Impédances : représentations de Fresnel. . . . .	41
4.9	Exemple de circuit avec sa représentation complexe. . . . .	43
5.1	Filtre. . . . .	47
5.2	Quadripôle électronique. . . . .	48
5.3	Filtre RC. . . . .	48
5.4	Types de filtre souvent rencontrés. . . . .	49
5.5	Bande passante. . . . .	49
5.6	Diagramme de Bode d'un filtre RC. Les traits oranges correspondent aux comportements asymptotiques. . . . .	50
5.7	Élimination de la composante continue d'un signal triangulaire . . . . .	52
5.8	Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut du premier ordre avec $G_0 = 3,2$ . . . . .	52
5.9	Exemples de filtres passe-haut du premier ordre. . . . .	53
5.10	Dérivation d'un signal triangulaire à l'aide d'un filtre passe-haut . . . . .	54
5.11	Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut de Butterworth d'ordre 3. . . . .	54
5.12	Exemple de filtre passe-haut du troisième ordre. . . . .	54
5.13	Exemples de filtres passe-bas du premier ordre. . . . .	56
5.14	Filtre passe-bas d'ordre 3. . . . .	58
5.15	Diagramme de Bode associé au filtre passe-bande du second ordre pour $Q = 5$ et $G_0 = 1$ . . . . .	59
5.16	Déphasage introduit par un filtre passe-bande avec $Q = 5$ . . . . .	59
5.17	Sélection de la seconde harmonique d'un signal périodique . . . . .	60
5.18	Quadripôle RLC. . . . .	60
5.19	Quadripôle RLC avec un signal de sortie recueillie aux bornes du condensateur. . . . .	60
5.20	Diagramme de Bode du filtre RLC avec un signal prélevé aux bornes de C et $Q = 5$ . . . . .	61
5.21	Filtre réjecteur à l'aide d'un circuit RLC. . . . .	63

## Liste des tableaux

1.1	Puissance électrique : quelques ordres de grandeur. . . . .	4
-----	---	---

# ÉTUDE DES RÉSEAUX ÉLECTRIQUES EN RÉGIME CONTINU

# 1

Comment courants et potentiels électriques se répartissent au sein d'un circuit électrique ? C'est à cette question que ce cours entend répondre, sachant qu'on limitera notre propos aux réseaux électriques linéaires en régime continu. En effet, ces réseaux ont le bon goût de mener à des équations simples à résoudre.

## Version en ligne

[https://femto-physique.fr/electrocinetique/  
etude-des-reseaux-electriques.php](https://femto-physique.fr/electrocinetique/etude-des-reseaux-electriques.php)

## 1.1 Lois de l'électrocinétique

Les lois de l'électrocinétique ou **lois de Kirchhoff**<sup>1</sup> se résument en deux lois : la *loi des nœuds* et la *loi des mailles*.

### Introduction

Un **réseau électrique** (ou circuit électrique) est un ensemble d'éléments présentant des propriétés électriques, reliés entre eux par des conducteurs que l'on considérera parfaits (conductivité infini). Les lois de l'électricité permettent de trouver la façon dont les courants et les potentiels électriques se répartissent au sein de ce circuit.

Lorsque les grandeurs électriques (tensions et intensités électriques) ne varient pas dans le temps, on parle de **régime continu** ; le **régime variable** désigne la situation contraire.

En régime variable, les fluctuations de courant se propagent à une vitesse proche de la vitesse de la lumière. Pour des circuits de taille raisonnable, la durée de propagation  $\tau$  est très petite devant le temps caractéristique  $T$  des fluctuations (période du signal s'il est périodique). Il est alors légitime de négliger  $\tau$  devant  $T$  ; c'est ce qu'on appelle l'*approximation des régimes quasi-stationnaires*.

### Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS)

Nous admettrons que les lois des régimes permanents restent valables en régime variable si l'on peut considérer les phénomènes de propagation négligeables. Notamment, dans une branche d'un circuit, à un instant donné, le courant a la même intensité en tout point.

1.1 Lois de l'électrocinétique	1
Introduction . . . . .	1
Loi des nœuds . . . . .	2
Loi des mailles . . . . .	2
Puissance électrique . . . . .	4
1.2 Phénomènes résistifs . . . . .	5
Loi d'ohm - effet Joule . . . . .	5
Association de résistances . . . . .	6
Ponts diviseurs . . . . .	6
1.3 Dipôles actifs . . . . .	7
Source de tension . . . . .	7
Source de courant . . . . .	8
Sources de Thévenin- Norton . . . . .	9
Récepteur actif . . . . .	10
Loi de Pouillet . . . . .	10
1.4 Méthodes de résolution . . . . .	11
Utilisation de la loi des mailles . . . . .	11
Équivalence Thévenin- Norton . . . . .	12
Théorème de superposition	13
Théorème de Millman . . . . .	14

<sup>1</sup> : **Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887)** : physicien allemand qui énonça les lois relatives au courant électrique dans les circuits alors qu'il était encore étudiant. On lui doit surtout des avancées en spectroscopie.

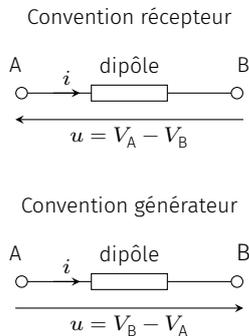


FIG. 1.1 : Les différentes conventions

Un **dipôle électrocinétique** est une partie d'un circuit qui peut être reliée au reste du circuit par deux fils. On décrit le comportement d'un dipôle par sa relation courant-tension ( $i = f(u)$ ) dans une convention précisée. Il en existe deux :

- ▶ dans la convention récepteur, si le courant algébrique est orienté dans le sens AB, alors  $u = V_A - V_B$  ;
- ▶ dans la convention générateur, si le courant est orienté dans le sens AB, alors  $u = V_B - V_A$ .

Dans ce chapitre nous limitons notre propos à l'étude de dipôles électrocinétiques dont la relation entre  $u$  et  $i$  est, soit linéaire, soit affine ( $i = a \times u + b$ ). En effet, l'objectif est avant-tout de se familiariser avec les méthodes de résolutions.

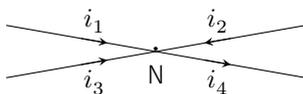
## Loi des nœuds

Dans chaque branche d'un réseau électrique, on définit un sens positif (le choix est arbitraire!) du courant et une intensité algébrique  $i$ . Si  $i > 0$ , le courant circule dans le sens positif; si  $i < 0$ , le courant circule dans le sens opposé.

Un nœud est la rencontre d'au moins trois conducteurs électriques. Considérons  $n$  branches de conducteurs liées par un nœud N. Définissons  $i_k$ , l'intensité algébrique du courant de la  $k^e$  branche. La loi des nœuds traduit la conservation de la charge en régime stationnaire et exprime le fait que la charge ne peut pas s'accumuler en N : le courant électrique qui arrive en N doit être compensé par le courant qui sort. Cette loi, rigoureusement vérifiée en régime continu, est admise en régime variable dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

### Loi des nœuds

En chaque nœud d'un circuit, on a  $\sum_{k=1}^n \epsilon_k i_k = 0$  où  $\epsilon_k = +1$  quand le courant est entrant et où  $\epsilon_k = -1$  dans le cas contraire.



### Exemple

Considérons le schéma ci-contre. La loi des nœuds exprimée en N donne

$$i_1 + i_2 + i_3 - i_4 = 0 \quad \text{soit} \quad i_4 = i_1 + i_2 + i_3$$

ce qui traduit bien le fait que le courant qui arrive en N est égale au courant qui en sort.

## Loi des mailles

Le transport électrique est assuré grâce aux forces électrostatiques. On peut dès lors définir un potentiel électrique en chaque point du circuit. Lorsque le potentiel électrique est le même partout, le réseau

est à l'équilibre et n'est le siège d'aucun courant électrique. En revanche, lorsque le potentiel électrique n'est plus uniforme, le conducteur n'est plus à l'équilibre ce qui génère un courant électrique (qui tente de rétablir l'équilibre). Aux extrémités d'une branche il existe alors une tension qui dépend du courant électrique et de la nature du dipôle traversé par ce courant. Il est traditionnel de représenter une tension  $u_{AB} = V_A - V_B$  par une flèche allant de B vers A.

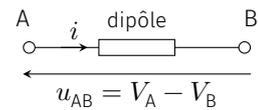


FIG. 1.2 : Représentation d'une tension

Les tensions qui règnent dans un circuit obéissent à quelques contraintes physiques. En effet, si l'on parcourt un circuit fermé (on parle de maille) en partant d'un nœud N pour revenir à ce même nœud, on doit trouver une tension nulle en vertu du caractère conservatif du champ électrique ( $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ ). Autrement dit, si l'on décompose le circuit  $\mathcal{C}$  en  $n$  branches adjacentes on aura :

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0$$

où  $u_k$  est la tension qui règne aux extrémités de la  $k^e$  branche. Cette loi est à appliquer si toutes les tensions sont orientées dans le même sens, ce qui n'est pas toujours le cas à cause des différentes conventions choisies pour les dipôles, c'est pourquoi on retiendra la règle suivante :

**Loi des mailles**

Prenons une maille et choisissons arbitrairement un sens de parcours. Visitions toutes les branches de la maille et associons un coefficient  $\epsilon_k = +1$  à la tension rencontrée lorsqu'elle est orientée (sa flèche représentative) dans le sens de parcours et un coefficient  $\epsilon_k = -1$  lorsque la tension rencontrée est orientée dans l'autre sens. La loi des mailles se traduit alors par

$$\sum_{k=1}^n \epsilon_k u_k = 0 \tag{1.1}$$

**Exemple**

Dans le circuit ci-contre, appliquons la loi des mailles en parcourant la maille dans le sens indiqué. On trouve

$$1 \times u_{BC} + 1 \times u_{AB} - 1 \times u_{AC} = 0 \quad \text{soit} \quad u_{AC} = u_{AB} + u_{BC}$$

On retrouve d'ailleurs une loi identique à celle de Chasles propre aux vecteurs.

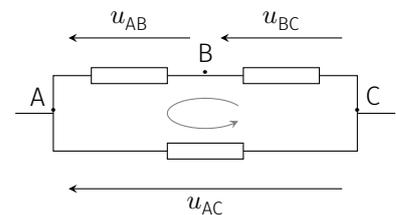


FIG. 1.3 : maille d'un circuit orientée par le sens de parcours positif indiqué.

Il existe une indétermination du potentiel; ceci reste vrai au sein d'un réseau électrique. Cependant, une convention souvent rencontrée consiste à poser l'origine du potentiel au niveau du pôle - de l'alimentation. Ce potentiel de référence est appelée **masse du circuit**.

Un équipement sous tension présente, en général, une connexion physique avec la terre. Elle permet de protéger l'utilisateur et également d'évacuer les courants induits par la foudre. Cependant, il ne faudrait

TAB. 1.1 : Puissance électrique : quelques ordres de grandeur.

électronique $\mu\text{W}-\text{mW}$	lampe de poche W	consommation des français en hiver 100 GW	centrale électrique GW	moteur TGV MW
---	---------------------	--	---------------------------	------------------

pas confondre ligne de terre et ligne de masse, car le potentiel de la terre n'est pas nécessairement constant et sa fonction est uniquement liée à la sécurité.



2 : **James Watt (1736-1819)** : ingénieur britannique, dont les améliorations sur la machine à vapeur furent une étape clé dans la révolution industrielle.

## Puissance reçue par un dipôle électrocinétique

On appelle  $\mathcal{P}(t)$  la puissance électrique reçue à l'instant  $t$  par un dipôle électrocinétique. La puissance électrique se mesure en **watt** (symbole : W) en hommage à James Watt<sup>2</sup> et on rappelle que

$$1 \text{ W} \stackrel{\text{def}}{=} 1 \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$$

Entre  $t$  et  $t + dt$ , la quantité de charge  $dq = i(t) dt$  arrive en une extrémité du dipôle (point A) pendant que la même quantité – nous sommes en régime stationnaire ou quasi-stationnaire – en sort par l'autre extrémité (point B). Cette quantité de charge possède une énergie électrique  $\mathcal{E}_p(A) = dqV_A$  en A et  $\mathcal{E}_p(B) = dqV_B$  en B. Remarquons qu'entre A et B l'énergie des charges n'a pas changé du fait que la distribution des charges et du potentiel est la même entre  $t$  et  $t + dt$ . Autrement dit, d'un point de vue énergétique, tout se passe comme si l'on avait transporté la charge  $dq$  de A en B. Pendant ce transport la charge perd une énergie potentielle  $dqV_A - dqV_B$  qu'elle cède intégralement au dipôle. Celui-ci reçoit donc une quantité d'énergie

$$\delta W = dqV_A - dqV_B = i(t) u_{AB}(t) dt \quad (1.2)$$

### Puissance électrique reçue par un dipôle

La puissance électrocinétique reçue (l'énergie reçue par unité de temps) par un dipôle D à l'instant  $t$ , soumis à une tension  $u(t)$  et traversé par un courant d'intensité  $i(t)$  vaut, *en convention récepteur*,

$$\mathcal{P}(t) = u(t) i(t) \quad (1.3)$$

Si  $\mathcal{P}(t) > 0$ , le dipôle absorbe effectivement, à l'instant  $t$ , de l'énergie électrique. On dit que le dipôle a un caractère **récepteur**. Cette énergie reçue par le dipôle est soit stockée, soit convertie sous une autre forme (effet Joule dans une résistance, énergie mécanique dans un moteur).

Si  $\mathcal{P}(t) < 0$ , le dipôle fournit effectivement de l'énergie électrique; on dit que le dipôle a un caractère **générateur** (ex : batterie).

## 1.2 Phénomènes résistifs

### Loi d'ohm - effet Joule

Comme on l'a vu en électromagnétisme[1], un conducteur ohmique obéit à la loi d'Ohm

[1] : ROUSSEL (2016), *Conducteurs électriques*

#### Loi d'Ohm

$$u(t) = R i(t) \quad [\text{Convention récepteur}] \quad (1.4)$$

où  $R$  désigne la résistance du conducteur ohmique dont la valeur dépend de la géométrie et de la conductivité du matériau conducteur.

Rappelons que  $R$  s'exprime en ohm (symbole  $\Omega$ ). La caractéristique  $i = f(u)$  est donc une droite passant par l'origine.

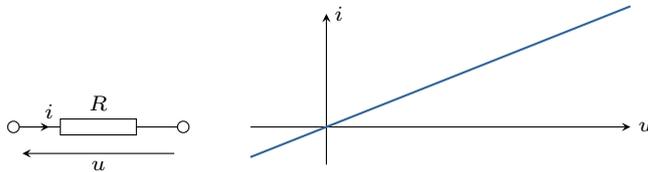


FIG. 1.4 : Schéma et caractéristique d'un conducteur ohmique.

Un circuit uniquement composé de résistances ne peut pas produire de courant. On dit que le conducteur ohmique est un **dipôle linéaire passif**. Par exemple, si l'on branche deux résistances ensemble, la loi des mailles donne

$$u_1 + u_2 = 0$$

soit

$$R_1 i + R_2 i = 0 \implies i = 0$$

Aucun courant ne circule et par conséquent tous les conducteurs sont au même potentiel. On retrouve une des propriétés des conducteurs à l'équilibre.

La puissance reçue par un conducteur ohmique vaut

$$\mathcal{P} = u i = R i^2 > 0 \quad \heartsuit \quad (1.5)$$

Le conducteur ne peut que recevoir de l'énergie électrique, sans pouvoir en fournir. On parle alors de *récepteur* électrique. En revanche cette énergie électrique est convertie essentiellement sous forme de chaleur si le conducteur n'est pas thermiquement isolé. En effet, si le conducteur est maintenu à température et pression constantes, le premier principe de la thermodynamique donne, pendant la durée  $\tau$  :

$$\Delta H = Q_P + W_{\text{elec}} = Q_P + \int R i^2 dt = 0 \implies Q_P = - \int R i^2 dt$$

Cette dissipation de l'énergie électrique sous forme de chaleur porte le nom d'*effet Joule*. Cet effet est mis à profit dans les bouilloires électriques par exemple.

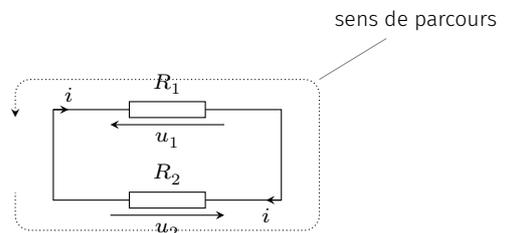


FIG. 1.5 : Réseau constitué de deux résistances

Notez qu'en général le conducteur voit sa température varier, ce qui fait augmenter son enthalpie ( $\Delta H = \int m c_p dT$ ). Dans ce cas, une partie de l'énergie électrique sert à augmenter l'énergie interne du conducteur et à le dilater.

## Association de résistances

Tout dipôle constitué uniquement de résistances équivaut à une résistance équivalente  $R_{\text{eq}}$ . Intéressons-nous à deux configurations simples.

**Résistances en série** – On dit que des résistances sont en série lorsqu'elles sont traversées par le même courant électrique. Appelons  $i$

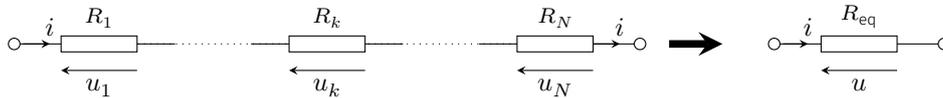


FIG. 1.6 : Conducteurs ohmiques en série.

l'intensité du courant. On a

$$u = R_{\text{eq}} i = \sum_{k=1}^N u_k = i \sum_{k=1}^N R_k$$

Par conséquent, on obtient

$$R_{\text{eq}} = \sum_k R_k \quad \heartsuit \quad (1.6)$$

**Résistances en parallèle** – On dit que des résistances sont associées en parallèle lorsqu'elles sont soumises à la même tension. Appelons

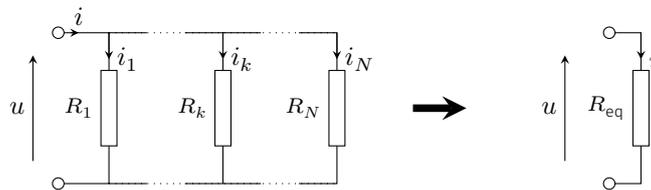


FIG. 1.7 : Conducteurs ohmiques en parallèle.

$u$  la tension commune. On a

$$i = \frac{u}{R_{\text{eq}}} = \sum_{k=1}^N i_k = u \sum_{k=1}^N \frac{1}{R_k}$$

On trouve donc

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_k \frac{1}{R_k} \quad \heartsuit \quad (1.7)$$

On pourra retenir par exemple que :

- ▶ deux résistances en parallèle équivalent à un conducteur de résistance  $R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$  ;
- ▶  $N$  résistances identiques  $R$  en parallèle équivalent à un conducteur de résistance  $R/N$ .

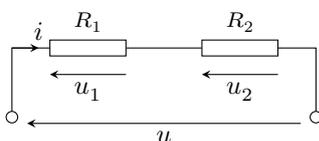


FIG. 1.8 : Pont diviseur de tension

## Ponts diviseurs

Considérons deux résistances  $R_1$  et  $R_2$  en série soumises à une tension globale  $u$ .

En vertu de la loi des mailles, on a  $u = u_1 + u_2 = (R_1 + R_2)i$ . La tension aux bornes de chaque résistance  $u_k = R_k i$  est alors une fraction de la tension  $u$

$$u_k = \frac{R_k}{R_1 + R_2} u \quad k = 1 \text{ ou } 2 \quad \heartsuit \quad (1.8)$$

On parle alors de montage *diviseur de tension*.

On considère maintenant deux résistances  $R_1$  et  $R_2$  en *parallèle* alimentées par un courant global  $i$ . Définissons les conductances  $G_k = 1/R_k$ , exprimées en siemens (symbole : S). Le courant traversant chacune des résistances a pour intensité  $i_k = G_k u$  et  $u = (G_1 + G_2)i$ . En conséquence, on obtient

$$i_k = \frac{G_k}{G_1 + G_2} i \quad k = 1 \text{ ou } 2 \quad \heartsuit \quad (1.9)$$

Le courant se répartit au prorata des conductances et l'on parle de montage *diviseur de courant*.

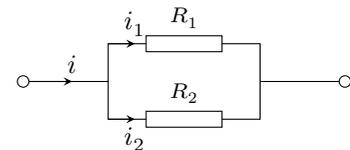
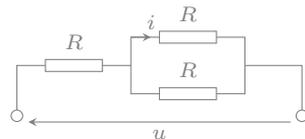


FIG. 1.9 : Pont diviseur de courant

**Exercice** – On considère le montage ci-dessous. Calculer l'intensité du courant  $i$ .



Rép.  $i = u/(3R)$ .

## 1.3 Modélisation linéaire d'un dipôle actif

Contrairement aux dipôles passifs, les dipôles actifs produisent une tension en circuit ouvert. On distingue les sources (piles, alimentation stabilisée, batteries en utilisation,...) et les récepteurs (électrolyseurs, batteries en charge, moteurs électriques).

### Source de tension

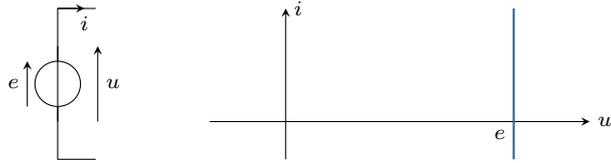
Une source de tension permet aux charges de « remonter » le potentiel grâce à l'existence d'un champ électromoteur au sein de la source. Ce champ électromoteur produit une tension, dite force électromotrice (f.é.m) que nous noterons  $e$ .

La caractéristique d'une source de tension idéale s'écrit en *convention générateur* :

$$u = e \quad \forall i$$

où  $e$  est la **force électromotrice** (f.é.m) de la source de tension.

FIG. 1.10 : Source idéale de tension : schéma et caractéristique

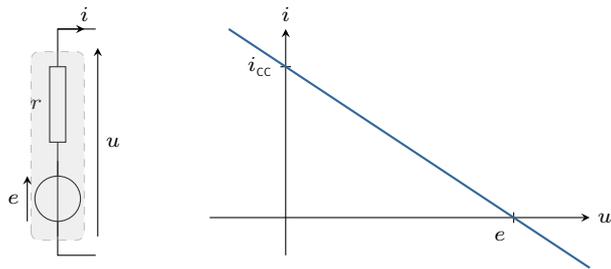


Pour tenir compte des pertes par effet Joule d'une source de tension, on modélise la source par une source idéale en série avec une résistance  $r$  dite *résistance interne*. La caractéristique s'écrit alors :

$$u = e - ri \quad \heartsuit \quad (1.10)$$

Il ressort de cette caractéristique que la source de tension acquiert

FIG. 1.11 : Source réelle de tension : schéma et modélisation linéaire.



un comportement quasi-idéal à la condition que  $ri \ll e$  : le courant débité par la source doit rester faible. C'est ce que l'on obtient lorsque que l'on branche un voltmètre aux bornes de la source : la résistance interne du voltmètre étant très grande, le courant débitée est quasi-nul de sorte que le voltmètre indique la f.é.m de la source. Par ailleurs, lorsque l'on court-circuite la source en reliant ses deux bornes ( $u = 0$ ), on trouve un courant de court-circuit

$$i_{cc} = e/r$$

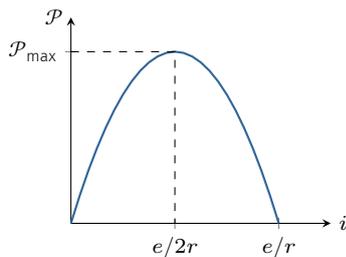


FIG. 1.12 : Puissance produite en fonction du courant débité.

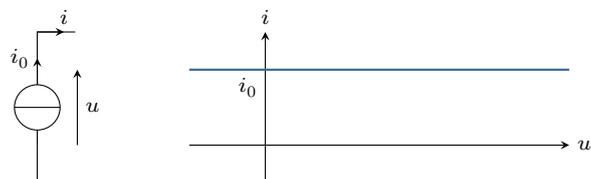
Du point de vue énergétique, la puissance délivrée par la source de tension vaut  $\mathcal{P} = ui = ei - ri^2$ . Ainsi, la puissance atteint une valeur maximale lorsque  $i = e/2r$ . Une source réelle de tension délivre donc une puissance maximale

$$\mathcal{P}_{\max} = \frac{e^2}{4r}$$

### Source de courant

Le rôle d'une source de courant est d'imposer un courant constant indépendamment de la tension qui règne à ses bornes. Une source

FIG. 1.13 : Source de courant idéale : schéma et caractéristique.



de courant idéale aura la caractéristique suivante :

$$i = i_0 \quad \forall u$$

où  $i_0$  désigne le **courant électromoteur** (c.é.m).

Pour tenir compte des pertes par effet Joule d'une source de courant réelle, on la modélise par une source idéale en parallèle avec une *conductance interne*  $g$ . La caractéristique s'écrit alors :

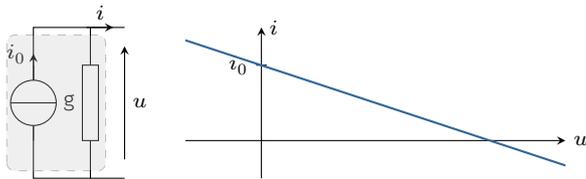


FIG. 1.14 : Source réelle de courant : schéma et caractéristique.

$$i = i_0 - g u \quad \text{avec} \quad g = \frac{1}{r}$$

où  $g$  est la conductance interne ( $r$  la résistance interne). On notera qu'une source de courant se rapproche d'une source de courant idéale quand sa conductance interne  $g \rightarrow 0$  ( $r \rightarrow \infty$ ).

La puissance fournie par une source de courant réelle vaut  $\mathcal{P} = ui = ui_0 - gu^2$ . Suivant le dipôle que charge la source de courant, la tension et donc la puissance délivrée varie. La courbe ci-contre montre que lorsque  $u = i_0/2g$  la puissance atteint une valeur maximale

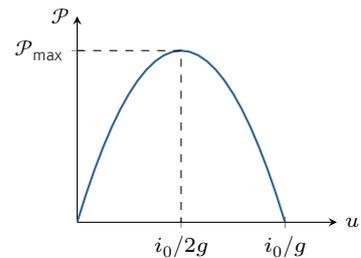


FIG. 1.15 : Puissance fournie par une source de courant en fonction de la tension à ses bornes.

$$\mathcal{P}_{\max} = \frac{i_0^2}{4g}$$

## Représentations de Thévenin et Norton

Considérons une source de tension réelle dont la modélisation linéaire est donnée par  $u = e - ri$ . Cette caractéristique peut se réécrire  $i = e/r - gu$  avec  $g = 1/r$ . En d'autres termes, une source de tension réelle peut s'interpréter comme une source de courant de c.é.m  $i_0 = e/r$  et de conductance  $g = 1/r$ . Ainsi, toute source linéaire présente deux représentations possibles :

- ▶ la modélisation de Thévenin correspondant à une source de tension idéale en série avec une résistance;
- ▶ la modélisation de Norton correspondant à une source de courant idéale en parallèle avec une conductance.

On passe d'une représentation à une autre en retenant l'équivalence Thévenin-Norton suivante :

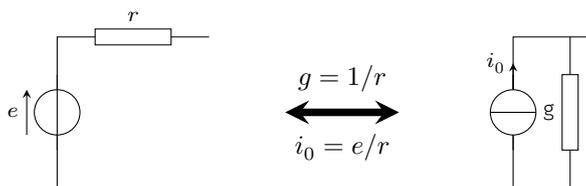


FIG. 1.16 : Équivalence Thévenin-Norton.

### Récepteur actif

Étudions le cas d'une batterie chimique. On distingue deux comportements : la décharge ou la charge. Lorsque la batterie se décharge, elle est alors source d'énergie et est modélisée par une source de tension de f.é.m  $e$  et de résistance interne  $r$ . On a en convention générateur

$$u = e - ri \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = ei - ri^2 > 0$$

En fonctionnement générateur, la puissance fournie est positive et le sens du courant est dictée par la polarité de la source.

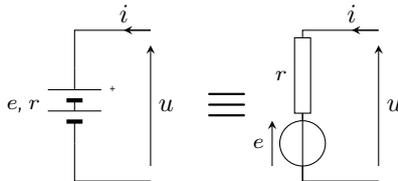


FIG. 1.17 : Batterie en charge.

En revanche, lorsque la batterie est en charge, le courant est dans l'autre sens. Dans ce cas, le dipôle reçoit de la puissance : on dit qu'il s'agit d'un récepteur actif et  $e$  est désigné par le terme **force contre-électromotrice** (f.c.é.m). En convention récepteur, on écrira donc

$$u = e + ri$$

et la puissance fournie à la batterie vaut

$$\mathcal{P} = ei + ri^2$$

Une partie de cette puissance ( $ri^2$ ) est dissipée par effet joule et l'autre partie ( $ei$ ) est convertie en énergie chimique. On peut d'ailleurs définir un rendement de conversion

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{\text{convertie}}}{\mathcal{P}_{\text{fournie}}} = \frac{e}{e + ri}$$

Finalement, une batterie est une source de tension qui peut fonctionner, soit en générateur, soit en récepteur, la polarité étant fixé par la borne + de la batterie. On parle alors de *récepteur réversible*. Les accumulateurs, les électrolyseurs ont ce comportement.

Il existe cependant des dipôles actifs dont le comportement est toujours récepteur quel que soit le sens du courant. La polarité de la f.c.é.m est toujours orientée à contre sens du courant. On parle de *récepteur non réversibles* (ou non polarisés). Le moteur à courant continu en est un exemple.

### Loi de Pouillet

Imaginons une maille constituée de dipôles actifs (en représentation de Thévenin) et de résistances. Appelons  $R$  la somme de toutes les

Cas où  $i > 0$  :  $u = e + ri$

Cas où  $i < 0$  :  $u = -e + ri$

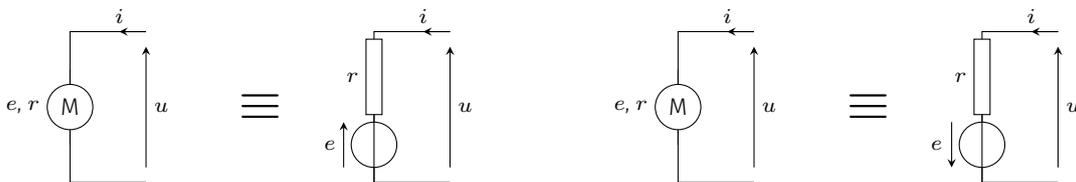


FIG. 1.18 : Moteur à courant continu

résistances (résistances internes incluses). Imposons un sens positif du courant et notons  $i$  l'intensité algébrique du courant qui circule dans la maille. Notons  $e_k$  les f.é.m (orientées dans le sens positif) et  $e'_k$  les f.c.é.m (orientés dans le sens contraire). La loi des mailles permet d'écrire

$$\sum_k e_k - \sum e'_k - Ri = 0$$

Ce qui donne la loi connue sous le nom de loi de Pouillet :

$$i = \frac{\sum_k e_k - \sum_{k'} e'_{k'}}{R} \quad \heartsuit \quad (1.11)$$

**Exercice** – Une source de tension continue, de f.é.m  $e = 15$  V, charge une batterie de f.c.é.m  $e' = 12$  V. Déterminer le courant de charge  $i$  à l'aide de la loi de Pouillet.

Rép.  $i = 50$  mA

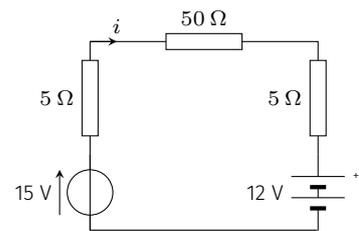


FIG. 1.19 : Charge d'une batterie.

## 1.4 Méthodes de résolution

### Utilisation de la loi des mailles

Dans un réseau constitué de  $b$  branches et  $n$  nœuds, il y a  $N = b - n + 1$  courants indépendants. En effet, les  $b$  courants circulant dans les  $b$  branches vérifient  $n - 1$  relations (lois des nœuds). Il nous faut donc  $N$  relations pour déterminer ces inconnues. Ces relations sont obtenues en appliquant la loi des mailles dans  $N$  mailles indépendantes associées aux caractéristiques des dipôles. On obtient alors un système d'équations à résoudre.

#### Méthodologie

1. Parcourir toutes les branches du réseau en définissant les courants algébriques et en appliquant le plus possible la loi des nœuds à chaque fois que l'on rencontre un nœud.
2. Compter le nombre  $N$  de courants inconnues puis choisir  $N$  mailles avec un sens de parcours.
3. Écrire  $N$  lois des mailles en utilisant les caractéristiques des dipôles. Notez que si une branche contient une source de courant, l'intensité électrique dans cette branche est alors déterminée, mais la tension aux bornes de la source est alors une inconnue.
4. Résoudre le système d'équations.

Cette méthode présente l'avantage de déterminer toutes les grandeurs électriques et s'applique à tous les réseaux électriques. Si le circuit contient uniquement des dipôles linéaires, le système d'équations obtenu est alors linéaire, ce qui facilite sa résolution.

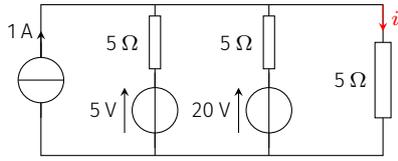
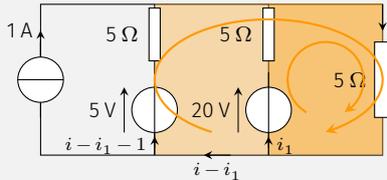


FIG. 1.20 : Circuit étudié.

**Exemple**

À l'aide des lois de Kirchhoff, déterminons l'intensité du courant  $i$  dans le circuit ci-contre.

Commençons par définir tous les courants. Appelons  $i_1$  le courant qui traverse le dipôle (20 V, 5 Ω). En parcourant tout le réseau, on s'aperçoit qu'il n'y a que deux courants inconnus :  $i$  et  $i_1$  (notez qu'il y a une source de courant qui impose la valeur de l'intensité du courant dans une branche). Il suffit donc de deux relations pour les déterminer. On choisira les mailles représentées en couleur sur la figure.



La loi des mailles donne alors

$$\begin{cases} 20 - 5i_1 - 5i = 0 \\ 5 - 5(i - i_1 - 1) - 5i = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5i_1 + 5i = 20 \\ -5i_1 + 10i = 10 \end{cases}$$

En sommant les deux relations, on trouve  $15i = 30$ , soit  $i = 2$  A.

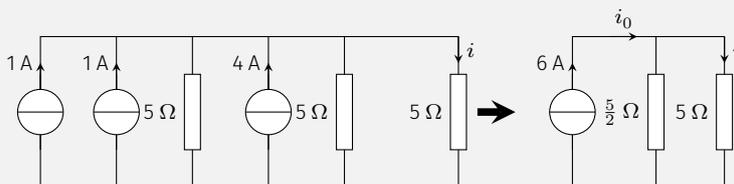
### Équivalence Thévenin-Norton

L'inconvénient majeur de la méthode précédente est qu'elle nécessite de résoudre un système de  $N$  équations, même si l'on ne cherche qu'une seule grandeur électrique; le risque d'erreur de calcul peut devenir important.

Pour remédier à ce défaut, on peut utiliser de façon judicieuse l'équivalence électrique entre une source de tension réelle et une source de courant réelle. En associant les résistances quand c'est possible et en répétant plusieurs fois la transformation Thévenin↔Norton, on peut simplifier une partie du réseau électrique étudié, et donc diminuer le nombre de mailles. Quand le but est de calculer les grandeurs électriques relatives à une branche particulière, cette méthode est à envisager.

**Exemple**

Reprenons l'exemple précédent en remplaçant les sources de tension par leur représentation de Norton.



En associant les sources de courant ainsi que les résistances, on aboutit à un simple diviseur de courant. La formule du diviseur donne alors

$$i = \frac{1/5}{2/5 + 1/5} \times 6 = 2 \text{ A}$$

## Théorème de superposition

Imaginons un circuit constitué de  $n$  sources de tension de f.é.m  $e_k$  et de  $m$  sources de courant de c.é.m  $i_{0k}$ . Si les autres dipôles sont passifs, ce sont ces sources actives qui sont responsables de l'apparition de courants et tensions électriques au sein du réseau. On peut dire en toute généralité que l'intensité  $i$  d'une branche s'écrit

$$i = f(e_1, \dots, e_n, i_{01}, \dots, i_{0m}) \quad \text{avec} \quad f(0, 0, \dots, 0) = 0$$

Par ailleurs, si tous les dipôles sont linéaires, alors la fonction  $f$  vérifie la propriété de linéarité suivante :

$$f(e_1, \dots, e_n, i_{01}, \dots, i_{0m}) = f(e_1, 0, \dots, 0, ) + f(0, e_2, 0, \dots, 0, ) \\ + \dots + f(0, 0, \dots, 0, i_{0m})$$

Autrement dit, il suffit d'allumer une seule source, calculer l'effet produit dans la branche étudiée, puis recommencer en changeant de source, etc. La somme des effets donne alors l'effet obtenu lorsque toutes les sources agissent simultanément.

### Théorème de superposition

Dans un circuit constitué de dipôles linéaires, l'intensité circulant dans une branche (resp. la tension d'une branche) est égale à la somme algébrique des intensités (resp. tensions) produites par chaque source supposée seule active, les autres étant éteintes.

Le théorème de superposition exige de pouvoir allumer une seule source, ce qui suppose que les sources sont *in-dépendantes*.

Pour éteindre les sources on procédera ainsi.

- ▶ **Source de tension éteinte** : on remplace la source de tension idéale par un fil ( $e = 0$ ).
- ▶ **Source de courant éteinte** : on remplace la source de courant idéale par un interrupteur ouvert ( $i_0 = 0$ ).

### Exemple

Reprenons l'exemple qui nous sert de fil rouge dans cette partie, et appliquons le théorème de superposition afin de calculer l'intensité  $i$ .

Commençons par allumer seulement la source de courant. On obtient un diviseur de courant.

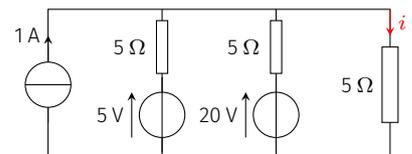
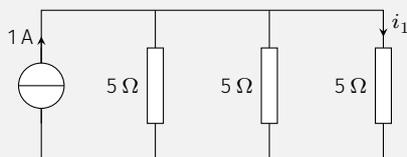
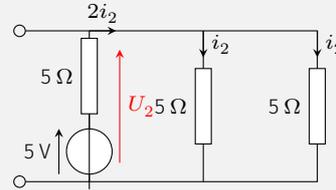


FIG. 1.21 : Circuit étudié.

La formule du diviseur donne immédiatement l'intensité que l'on recherche :

$$i_1 = \frac{1/5}{1/5 + 1/5 + 1/5} \times 1 = \frac{1}{3} \text{ A}$$

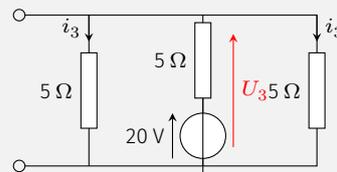
Éteignons la source de courant et allumons la première source de tension.



Les deux résistances en parallèle étant identiques, elles sont traversées par le même courant (noté  $i_2$ ). La source débite donc un courant d'intensité  $2i_2$  et la loi des mailles donne

$$U_2 = 5 - 5(2i_2) = 5i_2 \quad \text{soit} \quad i_2 = \frac{1}{3} \text{ A}$$

Enfin, allumons seulement la dernière source.



Pour les mêmes raisons que précédemment, la source débite un courant double de celui qui traverse les résistances en parallèle. La loi des mailles donne

$$U_3 = 20 - 5(2i_3) = 5i_3 \quad \text{soit} \quad i_3 = \frac{4}{3} \text{ A}$$

Finalement, le courant produit lorsque toutes les sources sont allumées vaut

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = 2 \text{ A}$$

## Théorème de Millman

Considérons un nœud N auquel sont reliés  $n$  conducteurs ohmiques de résistances  $R_k$  ( $k = 1 \dots n$ ). On choisit un potentiel de référence ( $V = 0$ ) et l'on note  $V_k$  le potentiel électrique de l'autre borne de  $R_k$ .

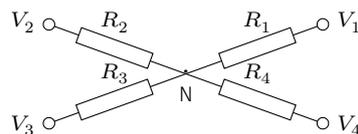


FIG. 1.22 : Le théorème de Millman permet d'exprimer le potentiel du nœud N en fonction des potentiels  $V_k$ .

### Théorème de Millman

Le théorème de Millman exprime le potentiel  $V_N$  en fonction des  $V_k$  et des conductances  $G_k = 1/R_k$  de chaque branche :

$$V_N = \frac{\sum_{k=1}^n G_k V_k}{\sum_{k=1}^n G_k} \quad (1.12)$$

Si une branche ( $k = 1$  par exemple) est traversée par un courant d'intensité  $i_1$  connue, on écrira

$$V_N = \frac{i_1 + \sum_{k=2}^n G_k V_k}{\sum_{k=2}^n G_k} \quad (1.13)$$

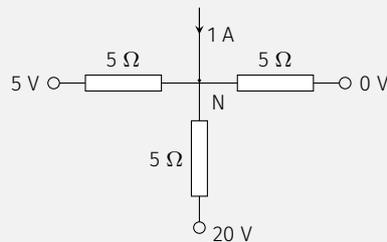
**Démonstration :** le théorème de Millman est en réalité une réécriture de la loi des nœuds en termes de potentiels. D'après la loi d'ohm, le courant de la branche  $k$  entrant en N a pour intensité

$$i_k = \frac{V_k - V_N}{R_k}$$

La loi des nœuds  $\sum_k i_k = 0$  aboutit au théorème de Millman.

### Exemple

Appliquons le théorème de Millman afin de déterminer l'intensité  $i$  de la figure ci-contre. Pour cela, fixons la masse (potentiel nul) au niveau de la borne - des sources de tension, et plaçons N au nœud commun aux trois résistances.



Le théorème de Millman donne immédiatement

$$V_N = \frac{1/5 \times 0 + 1/5 \times 20 + 1/5 \times 5 + 1}{1/5 + 1/5 + 1/5} = 10\text{V}$$

et la loi d'Ohm,  $i = \frac{V_N}{5} = 2\text{A}$ .

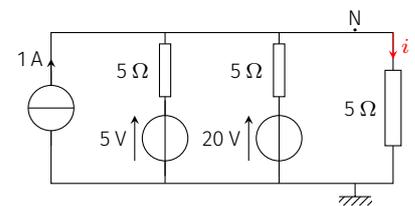


FIG. 1.23 : Circuit étudié.

Ce théorème, que l'on doit à Jacob Millman, est assez utile dans les circuits présentant des amplificateurs linéaires intégrés.



Jusqu'à présent, pour expliciter les lois de l'électricité en régime continu, nous avons introduit des dipôles linéaires dont la caractéristique est de type affine. Il existe d'autres dipôles linéaires dont la caractéristique est de type intégral-différentielle; le condensateur et la bobine inductive en sont les représentants.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electrocinetique/condensateurs-et-bobines.php>

- 2.1 Condensateur électrique . . . 17
  - Le condensateur idéal . . . 17
  - Énergie emmagasinée . . . 18
  - Association de condensateurs . . . . . 19
  - Condensateur réel . . . . . 20
- 2.2 Bobine d'induction . . . . . 20
  - Phénomène d'induction . . . 20
  - Auto-induction . . . . . 22
  - Energie magnétique . . . . . 22
  - Bobine réelle . . . . . 23

## 2.1 Condensateur électrique

### Le condensateur idéal

On a vu en électromagnétisme[1] qu'un condensateur est l'association de deux conducteurs en influence totale, appelés armatures. Soumis à une tension électrique constante  $U$ , le condensateur accumule au niveau de ses armatures des charges électriques de signe opposé ( $Q$  et  $-Q$ ) telles que  $Q = CU$ . On admettra cette relation également vérifiée en régime variable.

[1] : ROUSSEL (2016), *Conducteurs électriques*

#### Capacité d'un condensateur

Dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires, un condensateur idéal répond à la caractéristique

$$q(t) = Cu(t) \quad (2.1)$$

où  $C$  est la **capacité** du condensateur. Celle-ci s'exprime en farad (F); elle dépend de la géométrie du condensateur et de la nature de l'isolant placé entre les armatures.

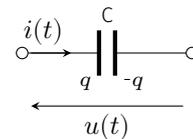


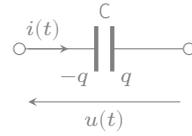
FIG. 2.1 : Schéma électrique du condensateur idéal.

On a donc en convention récepteur

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{du(t)}{dt} \quad [\text{Convention récepteur}] \quad \heartsuit \quad (2.2)$$

Le comportement du condensateur idéal obéit au principe de superposition. En effet, si  $i_1$  est la réponse à la tension  $u_1$  et  $i_2$  celle à la tension  $u_2$ , alors  $i_1 + i_2$  est la réponse à la tension  $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ . En ce sens, le condensateur est un *dipôle linéaire*.

**Exercice** – Soit un condensateur avec les conventions électriques suivantes :



Donner les relations entre  $u$  et  $q$ ,  $i$  et  $q$  ainsi que  $u$  et  $i$ .

En régime continu, toutes les grandeurs étant stationnaires, la loi (2.2) devient  $i = 0$ . Par conséquent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert en régime continu.

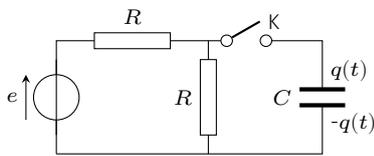
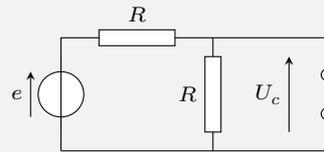


FIG. 2.2 : Montage étudié.

**Exemple**

Soit le montage ci-contre. À  $t = 0$  on ferme l'interrupteur K pour permettre à la source de tension de charger le condensateur. Que vaut la charge capacitive une fois le régime continu établi ?

Pour répondre à la question il suffit de remplacer le condensateur par un interrupteur ouvert.



On obtient alors un montage diviseur de tension. La tension aux bornes du condensateur vaut

$$U_c = e \times \frac{R}{R + R} = \frac{e}{2}$$

ce qui donne une charge capacitive  $q = Ce/2$ .

### Énergie emmagasinée dans un condensateur

On rappelle qu'un condensateur idéal stocke une énergie électrique

$$W_E = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{q^2}{2C} \quad \heartsuit \quad (2.3)$$

Le condensateur chargé agit comme un réservoir d'énergie qu'il peut fournir au reste du circuit. La puissance que reçoit un condensateur idéal s'écrit

$$\mathcal{P} = u i = C u \frac{du}{dt} = \frac{dW_E}{dt}$$

Lorsque l'énergie stockée décroît,  $\mathcal{P} < 0$  : le condensateur se décharge en fournissant de l'énergie au reste du circuit, agissant ainsi comme un générateur.

**Exercice** – Calculer l'énergie emmagasinée dans un condensateur de capacité  $C = 1 \mu\text{F}$  chargé sous la tension constante  $U = 30 \text{ V}$ .

Rép.  $W_E = 0,45 \text{ mJ}$ .

Le fait que le condensateur stocke une énergie sous forme électromagnétique a une conséquence importante en électrocinétique. Vu que l'énergie d'un système ne peut pas varier de façon discontinue, la charge et la tension d'un condensateur doivent varier continûment.

**À retenir**

La charge électrique d'une armature de condensateur évolue de façon continue au cours du temps. Cette propriété est aussi vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.

**Association de condensateurs**

**Association en parallèle** – Soient deux condensateurs de capacité  $C_1$  et  $C_2$  montés en parallèle. On suppose que ces condensateurs

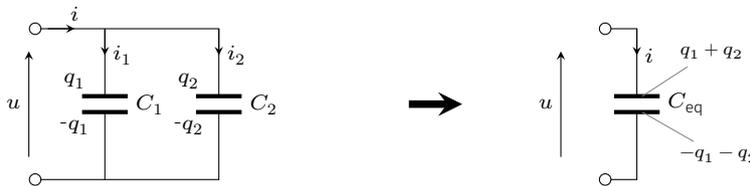


FIG. 2.3 : Deux condensateurs associés en parallèle.

sont suffisamment éloignés pour pouvoir négliger toute influence mutuelle (ce qui est fréquemment réalisé). Exprimons l'énergie emmagasinée :

$$W_E = \frac{1}{2}C_1u^2 + \frac{1}{2}C_2u^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)u^2$$

Par conséquent, l'ensemble est équivalent à un condensateur de capacité  $C_{eq} = C_1 + C_2$  soumis à la tension commune  $u$ . Cette propriété se généralise aisément :  $N$  condensateurs montés en parallèle et sans influence mutuelle équivalent à un condensateur de capacité :

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i \quad \heartsuit \quad (2.4)$$

**Association en série** – Considérons deux condensateurs de capacité  $C_1$  et  $C_2$  montés en série. Appelons  $i$  l'intensité du courant qui les

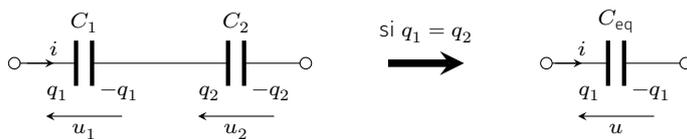


FIG. 2.4 : Deux condensateurs associés en série.

traverse. La conservation de la charge implique que

$$i = \frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt} \implies q_2 - q_1 = C^{te}$$

la quantité de charge  $q_2 - q_1$  représente la charge répartie sur la liaison conductrice entre les deux condensateurs. Supposons la liaison

initialement neutre :  $q_1 = q_2 = q$ . Dans ce cas, l'ensemble est équivalent à un condensateur portant une charge  $q$  et une capacité  $C_{\text{eq}}$ . En effet, l'énergie de l'association s'écrit

$$W_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_2} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_{\text{eq}}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

On peut étendre cette démonstration à un nombre quelconque de condensateurs. Ainsi,  $N$  condensateurs associés en série, sans influence mutuelle et tels que les liaisons inter-armatures soient neutres, se comportent comme un condensateur de capacité

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \quad \heartsuit \quad (2.5)$$

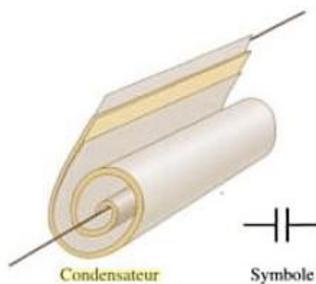


FIG. 2.5 : Fabrication d'un condensateur plan réel.

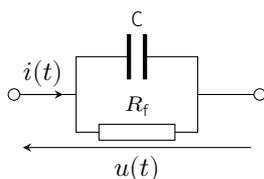


FIG. 2.6 : Modélisation d'un condensateur réel.

## Condensateur réel

Pour réaliser un condensateur peu encombrant, on enroule généralement deux rubans métalliques (aluminium ou étain) jouant le rôle des armatures, que l'on sépare par deux rubans isolants (papier paraffiné, plastique). La présence de cet isolant, dit diélectrique, a pour effet d'augmenter la capacité du condensateur formé suite au phénomène de polarisation électrique. En revanche, le comportement d'un tel condensateur s'écarte un peu de l'idéalité pour deux raisons essentielles.

1. La tension est en général limitée. En effet, il existe un champ électrique qu'il ne faut pas dépasser au risque de détruire le diélectrique placée entre les armatures du condensateur (existence d'un champ disruptif).
2. Il existe un courant de fuite à travers le diélectrique du fait de la conductivité finie de ce dernier. Par exemple, lorsqu'un condensateur chargé est abandonné en circuit ouvert, on constate que sa charge diminue au cours du temps.

Pour modéliser cette fuite, on introduit la notion de **résistance de fuite**. Aussi on représente un condensateur réel par l'association en parallèle d'un condensateur parfait de capacité  $C$  avec une résistance de fuite  $R_f$ . Son ordre de grandeur varie entre le  $M\Omega$  et la centaine de  $M\Omega$ .

## 2.2 Bobine d'induction

### Introduction à l'induction magnétique

Le phénomène d'induction électromagnétique, découvert par Faraday en 1831, a une grande portée industrielle puisqu'il permet de convertir une énergie mécanique en une énergie électrique et vice-versa. Décrivons le principe à l'aide de l'expérience suivante.

### Expérience

Mettons en mouvement un aimant au voisinage d'un cadre conducteur reliée à un galvanomètre (détecteur de courant). On observe l'existence d'un courant induit par le mouvement de l'aimant. Plus précisément, on constate que l'intensité du courant dépend de la façon dont on déplace l'aimant.

- ▶ Si l'on approche l'aimant de façon à ce que le champ magnétique augmente au voisinage de la spire, le courant électrique qui apparaît circule dans un sens tel qu'il produit un champ opposé au champ magnétique imposé par l'aimant.
- ▶ à l'inverse, quand l'aimant s'éloigne de façon à ce que le champ magnétique diminue, le courant électrique induit circule de façon à renforcer le champ magnétique imposé.
- ▶ le sens du courant dépend du sens de l'aimant et du mouvement mais dans tous les cas, le courant induit crée un champ magnétique qui s'oppose à la variation du champ magnétique imposé par le mouvement de l'aimant.
- ▶ Ce phénomène est amplifié par la vitesse du mouvement et par la puissance de l'aimant.

Répétons la même expérience en remplaçant l'ampèremètre par un volt-mètre. Dans ce cas, on note que le mouvement de l'aimant induit également une tension d'autant plus importante que le mouvement de l'aimant est rapide. La polarité de la tension induite dépend du sens de l'orientation de l'aimant.

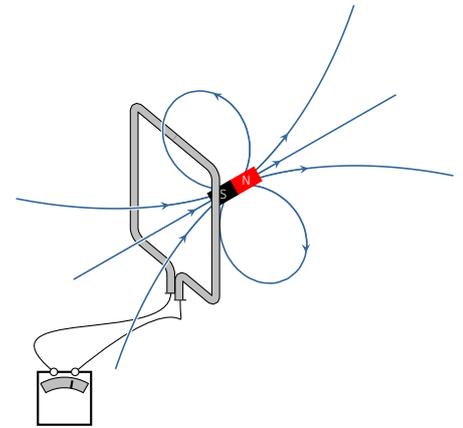


FIG. 2.7 : Induction

La première expérience montre que la spire se comporte comme un aimant dont l'action sur l'aimant consiste à le freiner dans son mouvement. On en tire la loi de modération suivante :

### Loi de Lenz

Dans un circuit fermé, la variation de flux magnétique produit un courant induit dont les effets s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance.

Dans la deuxième expérience, le circuit ouvert n'est plus le siège d'un courant mais voit apparaître à ses bornes, une tension électrique. Le circuit se comporte alors comme une source de tension de f.é.m  $e$ , dite **force électromotrice induite**. Quantitativement, on montre que

$$e = - \frac{d\phi_B}{dt} \quad \heartsuit \quad (2.6)$$

Cette loi, dite **loi de Faraday**, fait intervenir le flux magnétique  $\phi_B$  à travers le circuit. Rappelons que

$$\phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS \quad [\text{Wb}]$$

Sa valeur, exprimée en weber (Wb), dépend de la forme du circuit et du champ magnétique mais en aucune manière il ne dépend du choix de la surface  $S$  s'appuyant sur le circuit. Comme d'habitude,  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire localement normal à la surface  $S$  et dont le sens est

lié au sens positif du circuit *via* la règle du tire-bouchon.

## Auto-induction

On parle d'auto-induction quand la source de champ magnétique à l'origine du phénomène d'induction dans un circuit est produit par le circuit même.

Considérons une **bobine**, c'est-à-dire un enroulement de fil électrique. Lorsque cette bobine est traversée par un courant électrique, celui-ci produit un champ magnétique ainsi qu'un flux magnétique  $\phi_B$ , dit *flux propre*, à travers la bobine. Étant donné que le champ magnétique créé est proportionnel à l'intensité  $i$  du courant (d'après la loi de Biot et Savart), on peut écrire

$$\phi_B = Li$$

où  $L$  désigne le **coefficient d'auto-inductance**<sup>1</sup>. La grandeur  $L$  s'exprime en henry (symbole : H) en hommage à Joseph Henry. Lorsque le courant varie au cours du temps, la bobine se comporte comme une source de f.é.m  $e = -L \frac{di}{dt}$  en convention générateur. Ainsi, la caractéristique d'une bobine idéale s'écrit, en convention récepteur :

$$u_L = L \frac{di}{dt} \quad [\text{convention récepteur}] \quad \heartsuit \quad (2.7)$$

Pour les mêmes raisons que le condensateur, la bobine inductive respecte le principe de superposition, et de ce fait est un *dipôle linéaire*.

Notez qu'en régime continu, le courant étant stationnaire, la caractéristique (2.7) aboutit à  $u_L = 0$ . Autrement-dit, la bobine peut être remplacée par un fil conducteur parfait une fois le régime continu atteint.

Rigoureusement, tout montage électrique présente une auto-inductance, ne serait-ce que parce qu'il faut former une boucle pour refermer le circuit.

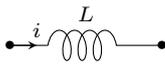


FIG. 2.8 : Représentation d'une bobine idéale.

1 : On dit aussi inductance propre



FIG. 2.9 : Joseph Henry (1797 - 1878).

## Énergie emmagasinée dans une bobine

La puissance électrique que reçoit une bobine parcourue par un courant électrique s'écrit

$$\mathcal{P} = ui = iL \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)$$

Par définition, l'énergie stockée par une bobine idéale  $W_B$  est l'énergie qu'elle est susceptible de libérer lorsque l'on coupe son alimentation ( $i = 0$ ).

$$W_B = - \int \mathcal{P} dt = - \int_{i'=i}^0 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li'^2 \right) dt = \frac{1}{2} Li^2$$

Cette énergie ne dépend pas de la façon dont on coupe l'alimentation. Ainsi, on dira qu'une bobine idéale alimentée par un courant électrique emmagasine une énergie sous forme magnétique qui vaut

$$W_B = \frac{1}{2}Li^2 \quad \heartsuit \quad (2.8)$$

Comme pour le condensateur, l'énergie qu'emmagasine la bobine ne peut pas évoluer par saut. Aussi l'intensité du courant doit varier continûment.

### À retenir

L'intensité du courant qui traverse une bobine évolue de façon continue au cours du temps.

## Bobine réelle

Dans la pratique, le fil formant la bobine est résistive. C'est pourquoi, on modélise une bobine réelle en ajoutant en série une résistance  $r$ , appelée *résistance interne* de la bobine. Généralement, cette représentation convient à basse fréquence.

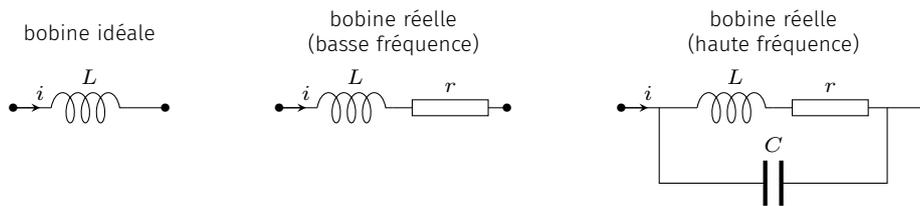


FIG. 2.10 : Modélisations d'une bobine.

À moyenne et haute fréquence, deux phénomènes parasites apparaissent :

1. en régime variable, le courant ne se distribue plus de façon uniforme dans le conducteur : c'est l'*effet de peau*. Ce phénomène produit une augmentation de la résistance  $r$  avec la fréquence<sup>2</sup>.
2. un effet capacitif se produit entre les différentes spires de la bobine. On modélise ce phénomène en ajoutant un condensateur en parallèle (FIG. 2.10).

2 : On peut montrer que  $r$  augmente avec le carré de la fréquence.



Jusqu'ici nous avons étudié des circuits électriques en régime continu, pour lesquels toutes les grandeurs électriques restent stationnaires. Mais que se passe-t-il lorsque l'on passe d'un régime continu à un autre? Ce chapitre répond à la question.

## Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electrocinetique/regimes-transitoires.php>

## 3.1 Généralités

### Régime transitoire

Imaginons par exemple un circuit constitué d'une source de tension continue et d'une résistance. Ajoutons un interrupteur. Ce dernier étant initialement ouvert, on décide de le fermer à l'instant  $t = t_0$ . Que prévoient les lois de Kirchhoff, et qu'observe-t-on en réalité?

Lorsque l'interrupteur est ouvert, le courant ne peut pas circuler :

$$i = 0 \quad \forall t < t_0$$

La fermeture de l'interrupteur autorise le courant à circuler, et les lois de Kirchhoff imposent

$$e - Ri = 0 \quad \text{soit} \quad i = \frac{e}{R} \quad \forall t > t_0$$

Le courant passe donc brutalement de la valeur nulle à la valeur  $e/R$ . Or, une observation attentive montre que la transition entre les deux régimes continus n'est pas instantanée, et suit une certaine évolution. Ce régime est appelé **régime transitoire**. La durée caractéristique de ce régime est appelé **temps de relaxation** et sera noté  $\tau$ . Dans l'exemple discuté ici, l'origine du régime transitoire est lié au fait que le circuit présente une auto-inductance que l'on a négligé dans la mise en équation. Nous verrons plus loin que lorsque l'on tient compte de cette self-inductance, les lois de Kirchhoff rendent bien compte de l'existence de ce régime transitoire.

#### En résumé

Un régime transitoire est le régime d'évolution d'un système qui n'a pas encore atteint son régime permanent. Il se caractérise par une durée caractéristique  $\tau$ , appelée temps de relaxation<sup>1</sup>.

- 3.1 Généralités . . . . . 25
  - Régime transitoire . . . . . 25
  - Aspects mathématiques . . . . . 26
- 3.2 Décharge d'un condensateur . . . . . 27
  - Montage étudié . . . . . 27
  - Régime transitoire . . . . . 27
  - Bilan d'énergie . . . . . 29
- 3.3 Circuit RL . . . . . 29
  - Montage étudié . . . . . 29
  - Régime transitoire . . . . . 30
  - Bilan énergétique . . . . . 30
- 3.4 Oscillateur RLC . . . . . 31
  - Montage RLC série . . . . . 31
  - Mise en équation . . . . . 31
  - Régimes transitoires . . . . . 32
  - Aspects énergétiques . . . . . 33

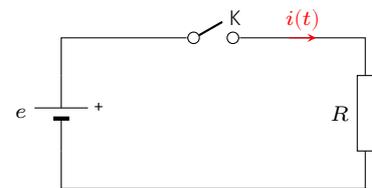


FIG. 3.1 : Montage étudié.

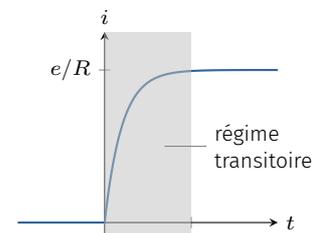


FIG. 3.2 : Régime transitoire observé à l'ouverture de l'interrupteur.

<sup>1</sup> : On dit aussi constante de temps.

En électricité, la durée du régime transitoire est en général très courte, de sorte qu'à peine a-t-on allumé les appareils que le régime permanent est déjà établi. On doit alors utiliser un appareil de détection ou de visualisation (un oscilloscope par exemple) présentant un temps de réponse plus court que la durée du régime transitoire à observer.

## Aspects mathématiques

2 : Par exemple constitué de conducteurs ohmiques, condensateurs et bobines.

3 : Une tension, une intensité, une charge électrique...

Considérons un dipôle électrique passif et linéaire<sup>2</sup> alimenté par une source de tension ou de courant variable.

Imaginons que l'on suive l'évolution d'une grandeur électrique<sup>3</sup> que nous décidons de noter  $y(t)$ . Dans le cadre de l'ARQS, les lois de Kirchhoff permettent d'obtenir une équation différentielle de la forme

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = f(t) \quad (3.1)$$

où  $f(t)$  et les coefficients  $a_k$  sont connues. Cette équation présente deux termes.

- ▶ Le terme de gauche est caractéristique des éléments qui composent le dipôle. Si  $a_n \neq 0$ , on dit que **le dipôle est d'ordre  $n$** .
- ▶ Le terme de droite est lié à la présence du générateur. On parle de **terme d'excitation**.

On établit en mathématique que la solution de l'équation différentielle est la somme

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$$

4 : Que l'on trouve généralement en recherchant une solution de la même forme que  $f(t)$ .

- ▶  $y_p(t)$  est une solution particulière de l'équation complète<sup>4</sup> qui représente le **régime forcé**.
- ▶  $y_0(t)$  est la solution générale de l'équation homogène (3.2)

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = 0 \quad (3.2)$$

$y_0(t)$  représente le **régime libre**, c'est-à-dire la réponse du circuit en l'absence d'excitation

Le régime libre se met sous la forme  $y_0(t) = A e^{rt}$  où  $r$  est un nombre réel ou complexe solution de l'équation caractéristique

$$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_n r^n = 0$$

5 : Si l'équation caractéristique admet une racine multiple  $r_0$  d'ordre  $p$ , la solution contient un terme de la forme  $P(t) e^{r_0 t}$  où  $P(t)$  est un polynôme d'ordre  $p$ .

Si les  $n$  racines sont distinctes<sup>5</sup>, le régime libre s'écrit

$$y_0(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{r_k t}$$

On détermine les  $n$  constantes d'intégration  $A_k$  en imposant les conditions initiales à la solution complète  $y(t)$ . Celles-ci doivent respecter les règles de continuité que l'on rappelle :

### Règles de continuité

- ▶ Dans une branche contenant un condensateur, la tension capacitive est une fonction continue du temps;
- ▶ Dans une branche contenant une bobine d'induction, l'intensité électrique est une fonction continue du temps.

Du fait des effets dissipatifs toujours présents dans un dipôle passif réel, le régime libre s'amortit. On définit alors le temps de réponse  $T_r$  du dipôle comme le temps<sup>6</sup> à partir duquel le régime forcé est établi :

$$|y_0(t)| \ll |y_p(t)| \quad \forall t > T_r$$

Par la suite, on illustre avec trois exemples; deux dipôles du premier ordre et un du second ordre.

6 : Sa valeur dépend du critère que l'on choisit pour décider que le régime libre devient négligeable.

## 3.2 Décharge d'un condensateur

### Montage étudié

Considérons un circuit constitué d'une source réelle de f.é.m  $e_0$ , d'un condensateur de capacité  $C$ , d'un conducteur ohmique de résistance  $R$  et d'un inverseur K. On commence par charger le condensateur en basculant K de manière à mettre en contact la source de tension et le condensateur. Le condensateur se trouve alors chargé et stocke ainsi la quantité de charge

$$q_0 = C e_0$$

À  $t = 0$ , on bascule K. Le condensateur se décharge alors dans la résistance. Avant d'étudier le régime transitoire, analysons les conditions aux limites de ce problème.

- ▶ Juste après l'inversion de K, il y a continuité de la tension capacitive. On en déduit

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = e_0 \quad \text{et} \quad i(0^+) = \frac{u_C(0^+)}{R} = \frac{e_0}{R}$$

- ▶ Une fois le régime forcé (ici continu) établi, toutes les grandeurs sont stationnaires. On a donc

$$q(t) = C^{te} \Rightarrow i(t) = 0 \quad \text{et} \quad u_C(t) = 0 \quad \text{quand} \quad t \rightarrow \infty$$

### Régime transitoire

Cherchons l'évolution de la tension capacitive  $u_C(t)$  et du courant de décharge  $i(t)$ .

Lorsque l'on a basculé l'interrupteur, le circuit obéit à la loi des mailles :

$$u_C(t) - Ri(t) = 0 \quad \text{avec} \quad i(t) = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{du_C}{dt}$$

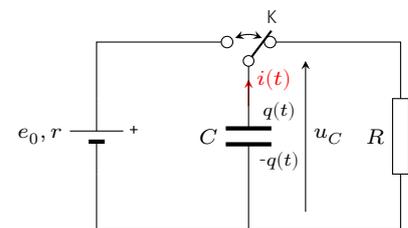


FIG. 3.3 : Montage RC.

La tension  $u_C$  vérifie donc l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = RC \quad \heartsuit \quad (3.3)$$

On voit immédiatement, par analyse dimensionnelle de l'équation différentielle, que  $\tau$  représente une durée. Les solutions sont de la forme  $u_C(t) = Ae^{-t/\tau}$ . On détermine  $A$  grâce à la condition initiale  $u_C(0) = e_0$ , ce qui donne  $A = e_0$ . Finalement, la tension  $u_C$  évolue au cours du temps suivant la loi

$$u_C(t) = e_0 e^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad i(t) = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{e_0}{R} e^{-t/\tau}$$

La tension capacitive décroît exponentiellement jusqu'à s'annuler au bout d'un certain temps conformément à ce que l'on avait prévu dans l'analyse des conditions aux limites.

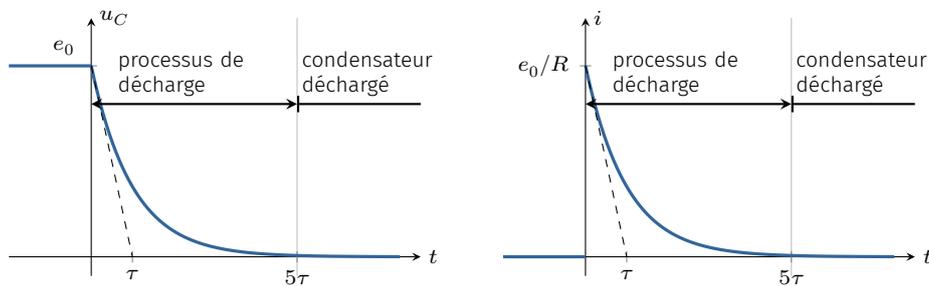


FIG. 3.4 : Évolution de la tension capacitive et du courant de décharge.

Le temps caractéristique de cette décharge peut s'obtenir en prenant l'intersection de la tangente à l'origine avec la valeur finale  $u_C = 0$ . Il est facile de montrer que cette intersection a lieu lorsque  $t = \tau$ . La durée  $\tau = RC$  donne ainsi un ordre de grandeur de la durée de la décharge.

**Remarque :** dans l'industrie on utilise souvent le temps de réponse à 5% qui vaut  $3\tau$  ( $e^{-3} \simeq 5\%$ ).

#### À retenir

Le temps de relaxation d'un dipôle RC vaut  $\tau = RC$ . On retiendra que la charge (ou la décharge) d'un tel dipôle peut être considérée terminée après une durée  $T_r = 5\tau$ .

On voit donc qu'une grande résistance ralentit le temps de décharge du condensateur.

Le courant de décharge, quant à lui, n'est pas constant lors de ce processus. Maximum à  $t = 0^+$  ( $i_{\max} = e_0/R$ ), il décroît avec le même temps de relaxation que la tension. Notez que le courant n'est pas une fonction continue puisqu'il subit une discontinuité entre  $t = 0^-$  et  $t = 0^+$ . En effet, en basculant l'interrupteur K sur la branche contenant la résistance, on met brutalement la résistance sous tension ( $e_0$ ) ce qui impose un courant initial  $e_0/R$ .

## Bilan d'énergie

D'un point de vue énergétique, l'énergie stockée sous forme électrique  $W_E = \frac{1}{2}Cu_C^2$  décroît avec un temps de relaxation  $\tau_E = \tau/2$ . En effet, la conservation de l'énergie se traduit par

$$\underbrace{\frac{d(1/2Cu_C^2)}{dt}}_{\text{puissance stockée}} + \underbrace{\frac{u_C^2}{R}}_{\text{puissance dissipée}} = 0$$

En remplaçant  $u_C^2$  par  $2W_E/C$  on trouve l'équation donnant l'évolution de l'énergie emmagasinée par le condensateur :

$$\frac{dW_E}{dt} + \frac{2}{\tau}W_E = 0 \Rightarrow W_E = W_{E,i} e^{-t/\tau_E}$$

L'énergie initialement emmagasinée par le condensateur est complètement dissipée par effet Joule après une durée de l'ordre de  $5\tau_E$ . On peut le vérifier par un calcul direct de l'énergie dissipée :

$$\int_0^\infty Ri^2(t) dt = \int_0^\infty \frac{e_0^2}{R} e^{-2t/\tau} dt = \frac{1}{2}Ce_0^2$$

L'énergie dissipée ne dépend pas de la résistance. C'est la durée de la dissipation qui en dépend.

## 3.3 Circuit RL

### Montage étudié

Considérons un circuit constitué d'une source de f.é.m  $e_0$  en série avec une résistance  $r_0$  (si la source présente une résistance interne alors celle-ci est incluse dans  $r_0$ ) qui, dans un premier temps alimente une bobine idéale. Au bout d'un certain temps, un courant permanent s'établit. Dès lors, la bobine se comportant comme un fil, on voit immédiatement que le courant s'établit à la valeur  $i_0 = e_0/r_0$ .

À l'instant  $t = 0$ , on bascule un interrupteur K de sorte que la bobine se trouve en contact avec une résistance de charge  $R$ . On oriente le courant dans le sens qui correspond au sens réel du courant  $i_0$ .

La continuité du courant qui traverse la bobine impose

$$i(0^+) = \frac{e_0}{r_0} \quad \text{d'où} \quad u_L(0^+) = -Ri(0^+) = -\frac{R}{r_0}e_0$$

Lorsque le régime permanent est établi, toutes les grandeurs sont stationnaires et la bobine se comporte comme un fil. On a donc

$$u_L(t) = 0 \quad \text{et} \quad i(t) = 0 \quad \text{quand} \quad t \rightarrow \infty$$

On prévoit donc un régime transitoire durant lequel la tension augmente et le courant diminue.

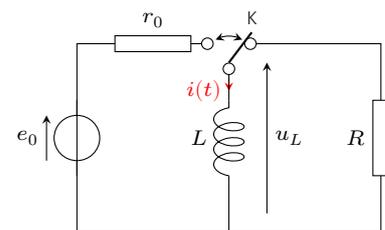


FIG. 3.5 : Montage R-L.

Si la bobine présente une résistance interne  $r$ , il suffit de remplacer dans les calculs  $r_0$  par  $r_0 + r$ .

## Régime transitoire

Cherchons l'évolution du courant et de la tension inductive  $u_L(t)$  à partir de  $t = 0$ . La loi des mailles implique

$$u_L(t) + Ri(t) = 0 \quad \text{avec} \quad u_L(t) = L \frac{di}{dt}$$

Si la bobine présente une résistance interne  $r$ , il faut écrire  $\tau = L/(r + R)$ .

ce qui donne, en posant  $\tau = L/R$ ,

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0 \quad \text{pour } t > 0 \quad \heartsuit \quad (3.4)$$

Les solutions de cette équation différentielle du premier ordre sont de la forme  $i = Ae^{-t/\tau}$ . On détermine la constante d'intégration à l'aide de la condition initiale  $i(0^+) = e_0/r_0$ . Il en sort

$$i(t) = \frac{e_0}{r_0} e^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -\frac{Re_0}{r_0} e^{-t/\tau}$$

Tension et courant relaxent exponentiellement avec une constante de temps  $\tau = L/R$ . La mesure de ce temps caractéristique peut permettre de mesurer la self-inductance d'une bobine par exemple.

### À retenir

Le dipôle RL présente un temps de relaxation  $\tau = L/R$ .

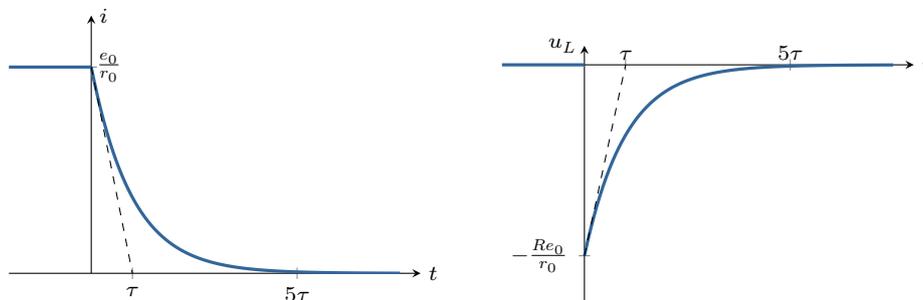


FIG. 3.6 : Évolution du courant et de la tension inductive.

Dans les anciens véhicules, l'allumage du moteur à explosion reposait sur l'amplification d'une telle surtension.

Contrairement au courant, la tension inductive subit une discontinuité au moment du basculement de l'interrupteur. Cette surtension peut devenir relativement importante si  $R \gg r_0$ .

## Bilan énergétique

Comme pour le dipôle RC, l'énergie magnétique stockée initialement dans la bobine  $W_B = \frac{1}{2}Li^2$  décroît avec un temps de relaxation  $\tau_E = \tau/2$ . La conservation de l'énergie électrique s'écrit

$$\underbrace{\frac{d(1/2Li^2)}{dt}}_{\text{puissance stockée}} + \underbrace{Ri^2}_{\text{puissance dissipée}} = 0$$

En remplaçant  $i^2$  par  $2W_B/L$  on aboutit à l'équation décrivant l'évolution de l'énergie magnétique stockée dans la bobine :

$$\frac{dW_B}{dt} + \frac{2}{\tau}W_B = 0 \Rightarrow W_B = W_{M,i} e^{-t/\tau_E}$$

Là aussi, l'énergie stockée est complètement dissipée par effet Joule puisque

$$\int_0^\infty Ri^2(t) dt = \int_0^\infty \frac{Re_0^2}{r_0^2} e^{-2t/\tau} dt = \frac{1}{2} Li_0^2$$

### 3.4 Oscillateur RLC

#### Montage RLC série

Alimentons un circuit constitué d'une bobine d'induction d'auto-inductance  $L$  en série avec un condensateur de capacité  $C$  et d'un conducteur ohmique de résistance  $R$ . Un interrupteur permet de mettre en contact la source continue de f.é.m  $e_0$  avec le dipôle RLC. Nous supposons qu'avant de fermer l'interrupteur, le condensateur est déchargé.

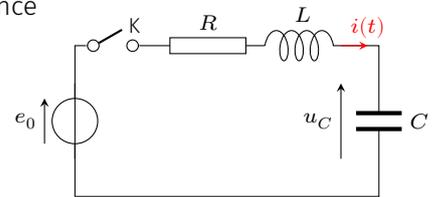


FIG. 3.7 : Montage RLC série.

On inclut dans  $R$  la résistance interne de la bobine et de la source, ainsi que la résistance des fils.

Quelles sont les conditions aux limites du problème ?

- ▶ Juste après la fermeture de l'interrupteur, la continuité de la tension capacitive et du courant traversant la bobine, impose

$$i(0^+) = 0 \quad \text{et} \quad u_C(0^+) = 0$$

- ▶ Une fois le régime permanent établi, les grandeurs électriques sont stationnaires, et l'on peut remplacer la bobine par un fil. On a alors pour  $t \rightarrow \infty$

$$q(t) = C^{te} \Rightarrow i(t) = 0 \quad \text{et} \quad u_C(t) = e_0$$

#### Mise en équation

La loi des mailles donne pour  $t > 0$

$$e_0 = Ri + L \frac{di}{dt} + u_C \quad \text{avec} \quad i = C \frac{du_C}{dt} \quad (3.5)$$

Choisissons d'étudier la tension capacitive  $u_C(t)$ . Celle-ci obéit donc à l'équation-différentielle

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2\lambda \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 e_0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 2\lambda = \frac{R}{L} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases} \quad (3.6)$$

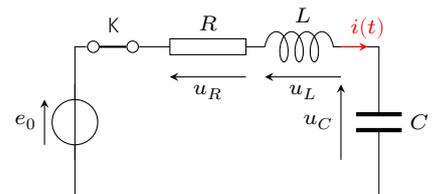


FIG. 3.8 : Circuit pour  $t > 0$ .

équation canonique d'un oscillateur harmonique amorti de pulsation propre  $\omega_0$  et de coefficient d'amortissement  $\lambda$ , soumis à une excitation constante.

Avant d'expliciter la forme des solutions, remarquons que le comportement de cet oscillateur ne dépend que de deux paramètres :  $\lambda$  et  $\omega_0$  qui sont homogènes à l'inverse d'un temps. On peut donc former deux temps caractéristiques

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{LC} \quad \text{et} \quad \tau_2 = \frac{1}{\lambda} = \frac{2L}{R}$$

Une solution particulière est  $u_C(t) = e_0$ , et les solutions de l'équation homogène se mettent sous la forme  $u_C(t) = A e^{rt}$  avec  $r$  solution de l'équation caractéristique du second degré

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

Le discriminant  $\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$  a son signe qui dépend de la valeur de la résistance. En effet, si l'on définit  $R_c = 2\sqrt{L/C}$ , on a

$$\Delta \leq 0 \quad \text{si} \quad R \leq R_c \quad \text{et} \quad \Delta \geq 0 \quad \text{si} \quad R \geq R_c$$

$R_c$  est la **résistance critique** de l'oscillateur RLC série.

## Régimes transitoires

Suivant le signe du discriminant, et donc la valeur de la résistance, on distingue trois régimes transitoires différents.

**Régime pseudo-périodique :**  $R < R_c$  – Dans ce cas, le discriminant de l'équation caractéristique est négatif et les racines sont complexes :

$$r = -\lambda \pm i\omega \quad \text{avec} \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$$

La solution réelle est de la forme

$$u_C(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) + e_0$$

La tension capacitive oscille donc avant de se stabiliser à sa valeur imposée par le générateur. L'amortissement des oscillations est caractérisée par la constante de temps  $\tau_2 = 2L/R$ . Plus la résistance est faible, plus longue est la durée du régime transitoire. Dans ce régime, c'est la bobine qui impose son temps de réponse au système.

Les oscillations amorties se caractérisent également par une **pseudo-période**  $T$ , durée entre deux maxima successifs, qui est aussi la période de  $\cos(\omega t + \varphi)$  :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

**Régime aperiodique :**  $R > R_c$  – Le discriminant de l'équation caractéristique est positif et les solutions sont réelles :

$$r_{\pm} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

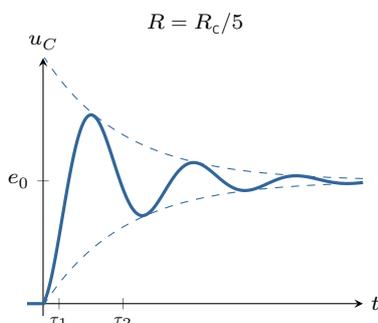


FIG. 3.9 : Régime pseudo-périodique.

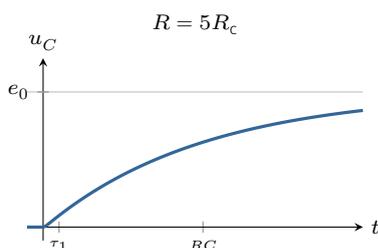


FIG. 3.10 : Régime aperiodique.

La solution s'écrit

$$u_C(t) = A e^{r_+ t} + B e^{r_- t} + e_0 \quad \text{avec} \quad r_{\pm} < 0$$

Les deux racines étant négatives, chaque exponentielle tend vers 0 lorsque  $t \rightarrow \infty$  : l'oscillateur atteint l'équilibre sans osciller et d'autant plus lentement que l'amortissement est fort. L'exponentielle la plus lente impose son temps de relaxation. On montre<sup>7</sup> que si l'amortissement est fort, c'est le condensateur qui impose son temps de réponse.

**Régime critique :**  $R = R_c$  – Le discriminant de l'équation caractéristique est nulle et la racine est double :  $r = -\omega_0$ . La solution s'écrit alors

$$u_C(t) = (A + Bt) e^{-\omega_0 t} + e_0$$

L'oscillateur atteint l'équilibre sans osciller (on dit qu'il n'y a pas de dépassement). Dans ce cas, les deux constantes de temps  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont identiques et correspondent au temps de relaxation du dipôle. On montre que le régime critique permet d'atteindre le régime forcé le plus rapidement possible sans dépassement. Autrement dit le temps de relaxation d'un circuit RLC est minimum en régime critique et vaut

$$\tau_{\min} = \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{LC}$$

## Aspects énergétiques

Multiplions par  $i(t)$  la loi des mailles (3.5) :

$$e_0 i(t) = Ri(t)^2 + L \frac{di(t)}{dt} i(t) + u_C i(t) \quad \text{avec} \quad i(t) = C \frac{du_C}{dt}$$

Faisons intervenir l'énergie emmagasinée sous forme électromagnétique  $W_{EB} = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cu_C^2$  :

$$e_0 i(t) = Ri(t)^2 + \frac{dW_{EB}}{dt}$$

équation qui traduit la conservation de l'énergie. En effet, la puissance fournie par la source de tension ( $e_0 i$ ) est pour une part dissipée par la résistance ( $Ri^2$ ) et pour une autre stockée dans la bobine et le condensateur ( $dW_{EB}/dt$ ).

L'énergie totale fournie par la source pendant le régime transitoire vaut

$$W_f = \int_0^{\infty} e_0 i(t) dt = e_0 \int_0^{\infty} \frac{dq(t)}{dt} dt = e_0 [q(\infty) - q(0)] = Ce_0^2$$

à la fin, une partie de cette énergie se retrouve stockée (notamment dans le condensateur) :

$$W_{EB} = \frac{1}{2} Li(\infty)^2 + \frac{1}{2} Cu_C(\infty)^2 = \frac{1}{2} Ce_0^2$$

7 : La constante de temps de l'exponentielle la plus lente vaut  $\tau = 1/|r_+|$  avec  $r_+ = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ . Pour  $\lambda \gg \omega_0$  un développement limité donne  $r_+ \approx -\omega_0^2/2\lambda$  soit  $\tau \approx RC$ .

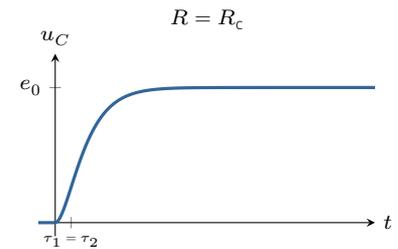


FIG. 3.11 : Régime critique.

Autrement dit, l'énergie dissipée par effet Joule vaut

$$W_{\text{diss}} = W_f - W_{EB} = \frac{1}{2} C e_0^2$$

50% de l'énergie fournie par la source est irrémédiablement perdue, ceci quelle que soit la durée du régime transitoire.

On étudie dans ce cours les circuits électriques linéaires en régime sinusoïdal forcé. Dans ce cas, il est intéressant d'introduire le concept d'impédance complexe. Les lois de l'électricité se transforment alors en équations algébriques simples à résoudre.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electrocinetique/regime-sinusoidal.php>

## 4.1 Signaux périodiques

### Généralités sur les signaux périodiques

Un signal temporel  $y(t)$  constitué par un motif de durée  $T$  qui se répète à l'identique, est dit périodique, et  $T$  représente la **période** du signal. Mathématiquement, le signal vérifie

$$y(t + T) = y(t) \quad \forall t$$

Il est facile de voir que si  $T$  est une période, alors  $2T$  l'est également. C'est pourquoi, par convention, la période est la plus petite valeur possible de  $T$  telle  $y(t + T) = y(t)$  pour tout  $t$ .

Le nombre  $\nu$  de périodes dans une seconde s'appelle la **fréquence** et s'exprime en hertz (Hz), en hommage à Hertz<sup>1</sup> :

$$\nu = \frac{1}{T} \quad \heartsuit \quad (4.1)$$

Les appareils de mesure électrique (voltmètre, ampèremètre, oscilloscope, etc.) permettent d'accéder à différentes grandeurs.

- La valeur continue représente la grandeur moyenne du signal :

$$\bar{y} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

- La valeur crête-à-crête correspond à l'écart entre la valeur maximum et la valeur minimum :

$$y_{pp} = \max(y) - \min(y)$$

- La valeur efficace ou valeur RMS<sup>2</sup> représente la racine de la moyenne du carré du signal :

$$y_{rms} = \sqrt{\overline{y^2}}$$

- 4.1 Signaux périodiques . . . 35
  - Généralités . . . . . 35
  - Le signal sinusoïdal . . . 36
  - Représentations d'un sinus 38
  - Régime forcé . . . . . 39
- 4.2 Impédance et admittance 40
  - Définitions . . . . . 40
  - Exemples . . . . . 40
  - Lois d'association . . . . 41
  - Méthodes de résolution . 42
- 4.3 Puissance en régime forcé 43
  - Puissance active . . . . . 43
  - Facteur de puissance . . . 44

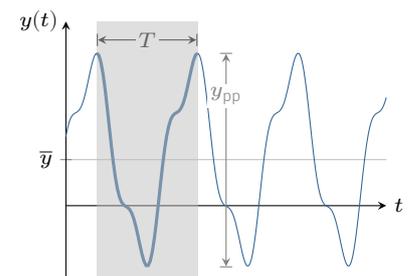


FIG. 4.1 : Caractéristiques d'un signal périodique.

1 : **Heinrich Hertz (1857-1894)** : physicien théoricien, il réussit la première émission et réception d'ondes radio en 1887, sur une distance de 20 mètres donnant du même coup une preuve de la validité de la théorie électromagnétique de Maxwell. Dans les milieux scientifiques, il est considéré comme le découvreur de la radio. C'est la raison pour laquelle on a donné le nom d'« ondes hertziennes » aux signaux radio et pourquoi l'unité de la fréquence vibratoire –appelée « cycle » au départ– a été remplacée par « hertz ».

2 : Acronyme anglais pour *Root Mean Square*

3 : sous certaines conditions mathématiques peu restrictives en électricité

Dans la suite, on se limite aux signaux sinusoïdaux. En effet, le théorème de Fourier stipule<sup>3</sup> qu'un signal périodique de fréquence  $\nu$  se décompose, en sinus et cosinus de fréquences multiples de la fréquence  $\nu$  :

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k\nu t) + b_k \sin(2\pi k\nu t)$$

où  $a_0$  représente la valeur moyenne (sa composante continue) et  $a_k \cos(2\pi k\nu t) + b_k \sin(2\pi k\nu t)$  la  $k^{\text{e}}$  harmonique. Si l'on connaît tous les coefficients  $a_k$  et  $b_k$ , appelés coefficients de Fourier, on peut reconstruire complètement le signal périodique. Or, puisque l'on étudie des réseaux linéaires, si l'on connaît leur comportement vis à vis d'un signal sinusoïdal quelconque, on est capable de connaître, par combinaison linéaire, la réponse vis à vis de n'importe quelle signal périodique, ce qui justifie l'étude de la réponse en régime sinusoïdal.

### Le signal sinusoïdal

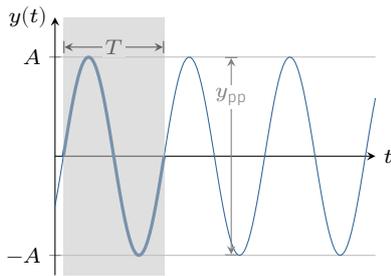


FIG. 4.2 : Signal sinusoïdal.

Un signal sinusoïdal  $y(t)$  s'exprime par

$$y(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$A$  désigne l'amplitude,  $\phi$  la phase (en radian) et  $\omega$  la pulsation (en rad/s). Le signal est bien périodique puisque l'équation

$$\cos(\omega t + \phi + \omega T) = \cos(\omega t + \phi) \quad \forall t$$

admet comme solution

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \implies \nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad \heartsuit \quad (4.2)$$

Par ailleurs, on voit sur le graphe qu'un signal sinusoïdal ne présente pas de composante continue ( $\bar{y} = 0$ ). La valeur crête-à-crête donne immédiatement l'amplitude car  $y_{pp} = 2A$ . Enfin, on peut calculer la valeur efficace à partir de la définition. Pour tout signal sinusoïdal on trouve

$$y_{rms} = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad \heartsuit \quad (4.3)$$

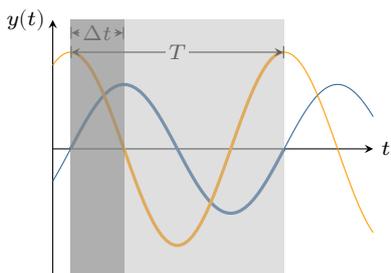


FIG. 4.3 : Déphasage.

**Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux** – La phase est une grandeur qui dépend du choix de l'origine des temps; autrement dit, la phase est arbitraire. En revanche, le **déphasage** entre deux signaux sinusoïdaux caractérise le décalage entre les deux courbes sinusoïdales et ne dépend pas du choix de l'origine des temps. Considérons par exemple deux signaux sinusoïdaux :

$$y_1 = A \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad y_2 = B \cos(\omega t + \phi)$$

Les phases respectives de  $y_1$  et  $y_2$  sont  $\phi_1 = 0$  et  $\phi_2 = \phi$ .

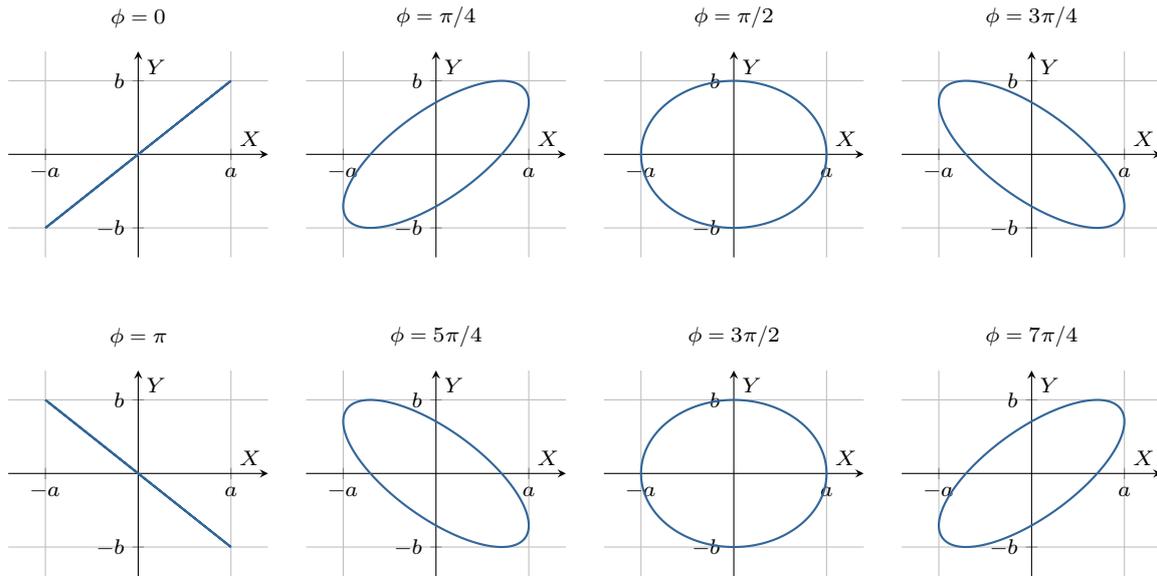


FIG. 4.4 : Deux signaux sinusoïdaux déphasés de  $\phi$  en mode XY.

Le déphasage de  $y_2$  par rapport à  $y_1$  vaut  $\phi_2 - \phi_1 = \phi$ . Si  $\phi > 0$  on dit que  $y_2$  est en avance sur  $y_1$ , sinon  $y_2$  est en retard sur  $y_1$ . Pour mesurer  $\phi$  il suffit de déterminer le décalage entre deux sommets par exemple. En effet, d'après l'expression de  $y_1$  on voit que le signal atteint son maximum en  $t = 0$ , alors que  $y_2$  atteint son maximum en  $t = -\frac{\phi}{\omega}$ . Ainsi si  $\phi > 0$ , le signal  $y_2$  est décalé vers la gauche et atteint son maximum avant le signal  $y_1$  : il est donc en avance. La relation entre le déphasage et le décalage temporel est donné par

$$\phi = \frac{2\pi}{T} \times \Delta t$$

**Visualisation en mode XY** – Lorsque l'on injecte un signal sinusoïdal sur la voie X d'un oscilloscope et un autre sur la voie Y, puis que l'on commute l'oscilloscope en mode XY, on obtient une courbe paramétrique d'équation

$$\begin{cases} X(t) = a \cos(\omega t) \\ Y(t) = b \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

Il s'agit de l'équation paramétrique d'une ellipse circonscrite dans un rectangle  $2a \times 2b$  et dont l'excentricité  $e$  varie avec  $\phi$  (FIG. 4.4). Cette représentation permet de repérer aisément la situation où les deux signaux sont en phase ( $\phi = 0$ ) ou en opposition de phase ( $\phi = \pi$ ).

**Exercice** – Un générateur délivre une tension sinusoïdale  $u_1(t)$  de fréquence 100 Hz de valeur efficace 5,0 V. Un autre générateur délivre une tension sinusoïdale de même fréquence, de tension crête-à-crête 4,8 V et en avance de  $90^\circ$  sur  $u_1(t)$ . En considérant que la phase à l'origine de  $u_1(t)$  est nulle, donner les expressions mathématiques des deux tensions.

Rép.  $u_1(t) = 7,1 \cos(200\pi t)$  et  $u_2(t) = 2,4 \cos(200\pi t + \pi/2)$

## Représentations d'un signal sinusoïdal

**Représentation de Fresnel** – Considérons un signal sinusoïdal  $y(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ . On peut représenter cette grandeur sous la forme d'un vecteur dit *phaseur* ou *vecteur de Fresnel*. Il s'agit d'un vecteur faisant un angle  $\omega t + \phi$  avec l'axe des abscisses et une longueur  $A$ . L'intérêt de cette représentation réside dans le fait que la somme de deux signaux sinusoïdaux s'obtient en sommant vectoriellement les vecteurs de Fresnel. Le déphasage entre deux signaux correspond alors à l'angle entre les vecteurs de Fresnel.

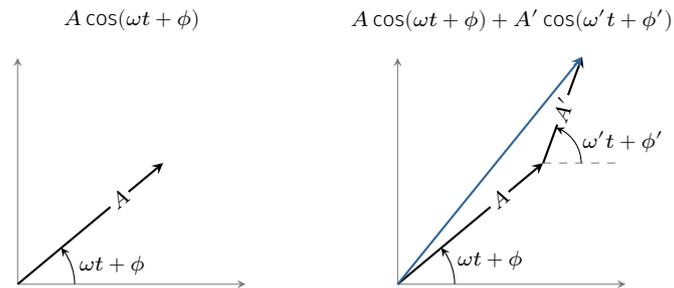


Fig. 4.5 : Représentation de Fresnel d'un signal sinusoïdal et d'une somme de deux signaux sinusoïdaux.

En électricité on convient de remplacer le nombre complexe  $i$  par  $j$  pour éviter toute confusion avec l'intensité électrique.

**Représentation complexe** – Il existe une autre représentation très utile : on peut considérer que  $y(t)$  est la partie réelle d'un nombre complexe :

$$y(t) = \operatorname{Re}(\underline{y}(t)) \quad \text{avec} \quad \underline{y}(t) = A e^{j(\omega t + \phi)} \quad \text{et} \quad j^2 = -1$$

On dira alors que  $\underline{y}(t)$  est le **nombre complexe associé au signal sinusoïdal**. On peut l'écrire sous la forme

$$\underline{y}(t) = \underline{A} e^{j(\omega t)} \quad \text{avec} \quad \underline{A} = A e^{j\phi} \quad \heartsuit \quad (4.4)$$

Le nombre complexe  $\underline{A}$  est appelé **amplitude complexe**. Lorsque l'on connaît l'amplitude complexe d'un signal on peut en déduire l'amplitude du signal réel ainsi que la phase via les relations

$$A = |\underline{A}| \quad \text{et} \quad \phi = \arg(\underline{A})$$

Pour deux signaux sinusoïdaux  $y_1$  et  $y_2$  d'amplitude complexe  $\underline{A}_1$  et  $\underline{A}_2$ , le **déphasage de  $y_2$  par rapport à  $y_1$**  vaut :

$$\phi = \arg(\underline{A}_2) - \arg(\underline{A}_1) = \arg\left(\frac{\underline{A}_2}{\underline{A}_1}\right)$$

L'intérêt de la notation complexe réside dans la simplification des calculs différentiels. Par exemple dériver un sinus revient à multiplier par  $j\omega$  le nombre complexe :

$$\frac{dy(t)}{dt} \rightarrow j\omega y$$

## Établissement du régime sinusoïdal forcé

Pour illustrer ce que représente le régime sinusoïdal forcé, prenons l'exemple d'un circuit RLC série alimenté par un générateur basse fréquence (GBF) délivrant une tension sinusoïdale de pulsation  $\omega$ . Ce signal d'excitation s'écrit  $e(t) = E \cos \omega t$ .

Observons l'évolution du signal d'excitation sur la voie 1 d'un oscilloscope (CH1) et la tension capacitive sur la voie 2 (CH2).

La loi des mailles donne

$$e(t) - Ri(t) - L \frac{di}{dt} - u_C(t) = 0 \quad \text{avec} \quad i(t) = C \frac{du_C}{dt}$$

ce qui donne, après avoir posé  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ ,

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E \cos(\omega t) \quad \text{pour} \quad t > 0$$

Du point de vue mathématique, la solution se compose de deux termes.

- ▶ Le premier terme correspond à la solution de l'équation homogène et représente le régime libre d'un oscillateur. Ce régime est transitoire puisqu'il se dissipe au bout d'un certain temps.
- ▶ Le second est une solution particulière de la forme  $A \cos(\omega t + \phi)$ . Il représente le *régime sinusoïdal forcé*. Ce régime ne se dissipe pas contrairement au régime transitoire; il est entretenu par la source.

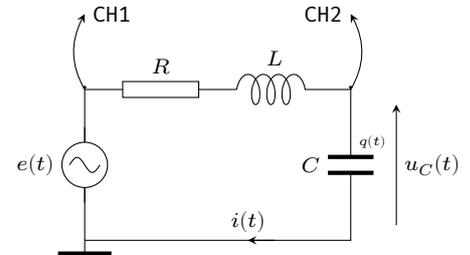
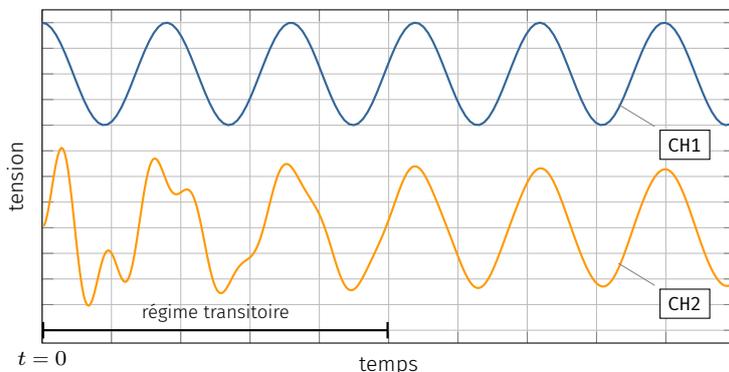


FIG. 4.6 : Montage RLC.

FIG. 4.7 : Établissement du régime sinusoïdal (paramètres :  $\omega = 0,35 \omega_0$  et  $Q = 10$ ).

La FIG. 4.7 montre l'établissement du régime forcé, c'est-à-dire la disparition du régime transitoire au détriment d'un régime sinusoïdal permanent de même fréquence que l'excitation. On note la présence du régime transitoire par l'apparition d'interférences entre deux signaux non synchrones (de fréquences différentes). En effet, avec un grand facteur de qualité, le régime transitoire fait apparaître des oscillations faiblement amorties de fréquence voisine de la fréquence propre qui se superpose au régime sinusoïdal forcé.

### Régime sinusoïdal forcé

Lorsque le régime transitoire s'est dissipé, toutes les grandeurs électriques oscillent de façon sinusoïdale à la même fréquence

que l'excitateur (fréquence imposée par le G.B.F.). On s'intéresse aux propriétés électriques des circuits une fois ce régime sinusoïdal installé.

## 4.2 Notion d'impédance et d'admittance

### Définitions

Supposons un réseau linéaire constitué de sources sinusoïdales de même fréquence  $\nu$ . Une fois le régime transitoire dissipée, un régime sinusoïdal de fréquence  $\nu$  s'installe dans toutes les branches du réseau.

On adopte la représentation complexe : notons  $\underline{U}$  l'amplitude complexe associée à la tension et  $\underline{I}$  l'amplitude complexe associée à l'intensité. Par définition, l'impédance d'un dipôle passif linéaire s'écrit

$$\underline{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u(t)}{i(t)} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + jX \quad \heartsuit \quad (4.5)$$

où  $R$  désigne la résistance et  $X$  la réactance.  $Z$  se mesure en ohm ( $\Omega$ ). Notez que la notion d'impédance n'a de sens que pour un dipôle passif linéaire en régime sinusoïdal. On définit également l'admittance du dipôle, qui vaut

$$\underline{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\underline{Z}} = G + jS$$

où  $G$  désigne la conductance et  $S$  la susceptance.  $Y$  se mesure en siemens (S ou  $\Omega^{-1}$ ).

On peut déterminer l'impédance d'un dipôle passif linéaire en le soumettant à une tension sinusoïdale puis en effectuant les mesures de la tension efficace, de l'intensité efficace ainsi que du déphasage entre le courant et la tension électrique. En effet, d'après (4.5), on a

$$|\underline{Z}| = \frac{U_{\text{rms}}}{I_{\text{rms}}} \quad \text{et} \quad \arg(\underline{Z}) = \phi_u - \phi_i \quad \heartsuit \quad (4.6)$$

### Exemples

On retiendra les impédances des trois dipôles passifs linéaires suivants :

Conducteur ohmique	Bobine	Condensateur
$u(t) = R i(t)$	$u(t) = L \frac{di}{dt}(t)$	$i(t) = C \frac{du}{dt}(t)$
$\underline{u} = R \underline{i}$	$\underline{u} = jL\omega \underline{i}$	$\underline{i} = jC\omega \underline{u}$
$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$\underline{Z}_c = \frac{1}{jC\omega}$

On remarque que le conducteur ohmique n'introduit pas de déphasage entre la tension et le courant puisque l'impédance d'une résistance est réelle et se confond avec sa résistance. En revanche la bobine et le condensateur introduisent un déphasage de  $\pi/2$  : on dit que courant et tension évoluent en *quadrature de phase*. Dans le cas de la bobine idéale, c'est la tension inductive qui est en avance de  $\pi/2$  par rapport au courant alors qu'aux bornes d'un condensateur idéal, la tension capacitive est en retard de  $\pi/2$ .

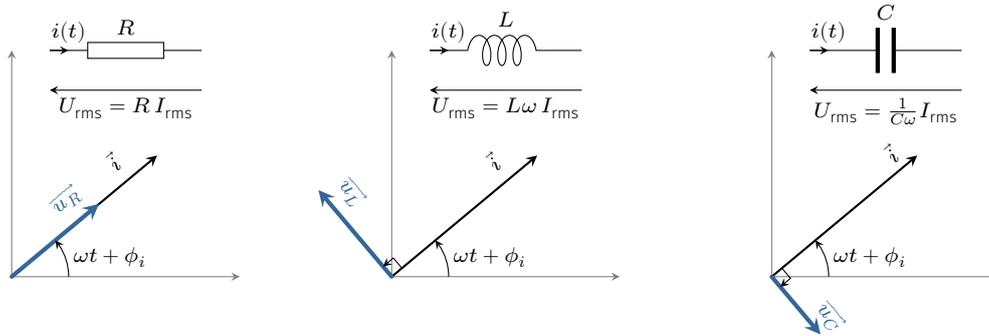


FIG. 4.8 : Impédances : représentations de Fresnel.

## Lois d'association

En régime sinusoïdal forcé, à chaque grandeur électrique (courant, tension) correspond une grandeur complexe associée. L'écriture de la loi des mailles et celle des nœuds aboutit à des équations algébriques dans  $\mathbb{C}$ . En conséquence, les formules d'association des résistances s'étendent aux impédances complexes :

$$\text{en série, } \underline{Z}_{\text{eq}} = \sum_i \underline{Z}_i \quad \text{et en parallèle, } \underline{Y}_{\text{eq}} = \sum_i \underline{Y}_i \quad \heartsuit \quad (4.7)$$

### Exemple – la bobine réelle

On alimente une bobine réelle à l'aide d'une source de tension sinusoïdale  $u(t) = E \cos(\omega t)$ . Cherchons comment s'exprime l'intensité du courant électrique en régime forcé. On note  $r$  la résistance interne de la bobine et  $L$  sa self-inductance.

Tout d'abord, la bobine réelle se modélise par une résistance  $r$  en série avec une bobine idéale de self inductance  $L$ . Son impédance s'écrit donc

$$\underline{Z} = r + jL\omega$$

La définition de l'impédance permet d'obtenir l'intensité du courant en notation complexe :

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}} = \frac{E e^{j\omega t}}{r + jL\omega}$$

soit

$$\underline{i} = \frac{E}{r^2 + (L\omega)^2} (r - jL\omega) e^{j\omega t}$$

On obtient l'intensité en prenant la partie réelle de  $\underline{i}$ . Sachant que  $j =$

$e^{j\pi/2}$ , on a

$$i(t) = \frac{E}{r^2 + (L\omega)^2} [r \cos(\omega t) + L\omega \sin(\omega t)]$$

## Méthodes de résolution d'un réseau linéaire en régime sinusoïdal forcé

Dans un réseau linéaire en régime sinusoïdal forcé, toutes les grandeurs sont sinusoïdales. On peut remplacer chaque dipôle passif par son impédance et les sources par les grandeurs complexes associées. Les équations de Kirchhoff (loi des noeuds + loi des mailles) exprimées à l'aide des grandeurs complexes associées, donnent alors des équations algébriques :

$$\sum_k \epsilon_k \underline{u}_k = 0 \quad \text{loi des mailles} \quad \text{et} \quad \sum_k \epsilon_k \underline{i}_k = 0 \quad \text{loi des noeuds}$$

Les problèmes sont donc identiques à ceux rencontrés en régime continu, à ceci près que les grandeurs recherchées sont des nombres complexes, caractérisées par une amplitude (le module) et une phase (l'argument).

### Exemple

Considérons le circuit ci-contre alimenté par un générateur basse fréquence réglé sur 50 Hz. La valeur efficace de la tension  $u(t)$  appliquée vaut 1000 V. Cherchons les valeurs efficaces des courants électriques dans chaque branche sachant que  $R_1 = 40 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 320 \text{ k}\Omega$  et  $C = 25 \text{ nF}$ .

En parcourant toutes les branches et en appliquant systématiquement loi des noeuds, on s'aperçoit qu'il y a deux inconnues en courant :  $\underline{i}_1$  et  $\underline{i}_2$ . Il suffit d'écrire deux lois des mailles, par exemple :

$$\begin{cases} R_1 \underline{i}_1 + R_2 \underline{i}_2 = \underline{u} \\ \underline{Z}_c (\underline{i}_1 - \underline{i}_2) - R_2 \underline{i}_2 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \underline{i}_1 = \frac{\underline{Z}_c + R_2}{\underline{Z}_c (R_1 + R_2) + R_1 R_2} \underline{u} \\ \underline{i}_2 = \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_c (R_1 + R_2) + R_1 R_2} \underline{u} \end{cases}$$

Sachant que  $\underline{Z}_c = 1/jC\omega$ , on trouve

$$\underline{i}_1 = \frac{1 + jR_2 C\omega}{(R_1 + R_2) + jR_1 R_2 C\omega} \underline{u} \quad \text{et} \quad \underline{i}_2 = \frac{1}{(R_1 + R_2) + jR_1 R_2 C\omega} \underline{u}$$

On obtient les amplitudes en prenant les modules de ces nombres complexes. En divisant par  $\sqrt{2}$  on trouve les valeurs efficaces. On obtient

$$I_{1\text{rms}} = \sqrt{\frac{1 + (R_2 C\omega)^2}{(R_1 + R_2)^2 + (R_1 R_2 C\omega)^2}} U_{\text{rms}} = 7,2 \text{ mA}$$

et

$$I_{2\text{rms}} = \frac{1}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (R_1 R_2 C\omega)^2}} U_{\text{rms}} = 2,7 \text{ mA}$$

Pour le courant  $\underline{i}_c$  qui traverse le condensateur, on a

$$\underline{i}_c = \underline{i}_1 - \underline{i}_2 = \frac{jR_2 C\omega}{(R_1 + R_2) + jR_1 R_2 C\omega} \underline{u}$$

D'où l'on tire

$$I_{c\text{rms}} = \frac{R_2 C \omega}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (R_1 R_2 C \omega)^2}} U_{\text{rms}} = 6,7 \text{ mA}$$

## 4.3 Puissance en régime sinusoïdal forcé

### Puissance absorbée par un dipôle linéaire

Alimentons un dipôle linéaire passif par une tension sinusoïdale  $u(t)$ . En régime sinusoïdal forcé, le courant d'alimentation d'intensité  $i(t)$  est également sinusoïdal. Écrivons

$$u(t) = \sqrt{2} U_{\text{rms}} \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad i(t) = \sqrt{2} I_{\text{rms}} \cos(\omega t - \phi)$$

avec  $\phi$  le **déphasage de la tension par rapport au courant**. Exprimons la puissance  $\mathcal{P}$  reçue par le dipôle. À partir de l'identité  $\cos a \cos b = 1/2[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ , on obtient

$$\mathcal{P}(t) = u(t) i(t) = U_{\text{rms}} I_{\text{rms}} [\cos \phi + \cos(2\omega t - \phi)]$$

La puissance instantanée oscille à la pulsation  $2\omega$  autour de  $U_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos \phi$ . Ce terme représente la puissance moyenne injectée dans le dipôle, ou *puissance active*.

#### Définition

La **puissance active** est la puissance électrique moyenne reçue par le dipôle :

$$\bar{\mathcal{P}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}(t) dt = U_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos \phi$$

La puissance active permet d'obtenir l'énergie fournie à un dipôle pendant la durée  $\Delta t$ . En effet, si la durée  $\Delta t$  est grande devant la période  $T$  du signal électrique, on a

$$\mathcal{E} = \int_{t=0}^{\Delta t} \mathcal{P} dt = \left( \frac{1}{\Delta t} \int_{t=0}^{\Delta t} \mathcal{P} dt \right) \Delta t \simeq \bar{\mathcal{P}} \times \Delta t$$

En conséquence, l'énergie se conservant, si un circuit alimenté par une source alternative possède  $N$  dipôles passifs consommant chacun une puissance active  $\bar{\mathcal{P}}_i$ , alors la puissance moyenne délivrée par la source vaut

$$\bar{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^N \bar{\mathcal{P}}_i \quad \heartsuit \quad (4.8)$$

**Exercice** – L'emballage d'une ampoule « basse consommation » indique : 230 V – 150 mA – 20 W – 50 Hz. En déduire l'expression de son impédance complexe.

Rép.  $\underline{Z} = (889 + j1249) \Omega$ .

## Facteur de puissance

Par définition le facteur de puissance d'un dipôle passif est le rapport de la puissance active reçue  $\overline{\mathcal{P}}$  sur la puissance apparente  $U_{\text{rms}}I_{\text{rms}}$  (en V.A). En régime sinusoïdal,

$$\text{Facteur de puissance} = \frac{\overline{\mathcal{P}}}{U_{\text{rms}}I_{\text{rms}}} = \cos \phi \quad \heartsuit \quad (4.9)$$

Rappelons que le déphasage s'obtient à partir de l'impédance complexe du dipôle :

$$\phi = \arg(\underline{Z})$$

4 : C'est le cas d'un conducteur ohmique mais ce n'est pas le seul cas.

Ainsi, pour un dipôle dont l'impédance est réelle<sup>4</sup> ( $\underline{Z} = R$ ), on a  $\phi = 0$  soit un facteur de puissance égal à 1. Dans ce cas, le dipôle absorbe une puissance moyenne

$$\overline{\mathcal{P}} = U_{\text{rms}}I_{\text{rms}} = RI_{\text{rms}}^2$$

On peut d'ailleurs donner un nouveau sens physique à l'intensité efficace : cela correspond à l'intensité du courant continu qui produirait la même dissipation d'énergie dans une résistance.

Pour un dipôle purement inductif ou capacitif (on dit réactif), l'impédance complexe est un nombre imaginaire pur d'où  $\phi = \pm\pi/2$ . Par conséquent  $\overline{\mathcal{P}} = 0$  : le dipôle n'absorbe pas de puissance électrique en moyenne<sup>5</sup>.

5 : Bien entendu, le dipôle reçoit de l'énergie ou en donne mais comme il passe autant de temps à recevoir de l'énergie qu'à en délivrer, en moyenne, le bilan est nul.

Dans le cas d'un dipôle passif linéaire quelconque, c'est-à-dire présentant une impédance avec une partie réelle non nulle, on a

$$\underline{Z} = R + jX \quad \Rightarrow \quad \cos \phi = \frac{R}{|\underline{Z}|}$$

La puissance active s'écrit

$$\overline{\mathcal{P}} = U_{\text{rms}}I_{\text{rms}} \frac{R}{|\underline{Z}|} = RI_{\text{rms}}^2$$

Finalement, en régime sinusoïdal tout dipôle passif linéaire reçoit une puissance moyenne

$$\overline{\mathcal{P}} = RI_{\text{rms}}^2 \quad \text{où} \quad R = \text{Re}(\underline{Z}) \quad \heartsuit \quad (4.10)$$

**Importance du facteur de puissance** – Le distributeur d'électricité facture généralement la puissance électrique moyenne consommée par l'installation concernée. En revanche, la puissance gaspillée par effet joule dans les lignes de transport est facturée globalement. C'est pourquoi les distributeurs d'électricité appliquent une surfacturation lorsque le facteur de puissance d'une installation est trop faible.

En effet, une installation industrielle présente en général un caractère inductif important dû à la présence des moteurs (bobinages) d'où un

$\cos \phi$  qui peut être faible. Si l'installation consomme une puissance active  $\overline{\mathcal{P}}$ , alors le courant d'alimentation a pour valeur efficace

$$I_{\text{rms}} = \frac{\overline{\mathcal{P}}}{U_{\text{rms}} \cos \phi}$$

À cette intensité correspond une puissance dissipée par effet joule dans la ligne de transport qui vaut

$$P_{\text{ligne}} = RI_{\text{rms}}^2 = \frac{R\overline{\mathcal{P}}^2}{U_{\text{rms}}^2 \cos^2 \phi}$$

où  $R$  représente la résistance des lignes électriques. Ainsi, une faible valeur du facteur de puissance entraîne une perte d'énergie électrique en ligne plus importante ce qui explique pourquoi le distributeur d'électricité facture le coût d'électricité d'autant plus cher que le facteur de puissance est faible.

Si l'on veut éviter cette surfacturation il faut alors procéder à un *relevage du facteur de puissance*. En général, adjoindre un condensateur en parallèle de l'installation permet de remonter la valeur du  $\cos \phi$ .



Dans une chaîne d'analyse et de traitement du signal, il arrive fréquemment que l'information intéressante soit dissimulée au sein d'un signal plus complexe, voire parasitée par du bruit. On peut souvent l'extraire par filtrage, en agissant dans l'espace des fréquences. Les premiers filtres étaient de nature analogiques, et sont encore couramment employés en instrumentation, en électronique de puissance et dans les systèmes haute fréquence.

Actuellement les filtres numériques programmables ont tendance à remplacer les filtres analogiques, mais dans ce chapitre, on se concentre sur les filtres analogiques passifs.

## 5.1 Fonction de transfert

### Généralités

Pour extraire un signal utile, on aura en général besoin d'un système qui transforme un signal d'entrée  $e(t)$  (de nature électrique, mécanique, acoustique, etc.) en un signal de sortie  $s(t)$  (de nature électrique, mécanique, acoustique, etc.). On peut penser à un capteur, un amplificateur, un intégrateur, un correcteur de phase, etc.

On appelle **filtre** un tel système si :

- ▶ ses caractéristiques sont invariantes dans le temps;
- ▶ son comportement respecte le principe de superposition<sup>1</sup>.

La réponse d'un filtre peut alors être modélisée par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du type

$$\alpha_0 e(t) + \alpha_1 \frac{de(t)}{dt} + \dots + \alpha_n \frac{d^n e(t)}{dt^n} = \beta_0 s(t) + \beta_1 \frac{ds(t)}{dt} + \dots + \beta_m \frac{d^m s(t)}{dt^m}$$

Les filtres font jouer un rôle particulier aux signaux sinusoïdaux, puisque lorsque l'on envoie un signal sinusoïdal en entrée d'un filtre, il en ressort un signal sinusoïdal de même fréquence<sup>2</sup>. Si l'on pose en notation complexe  $\underline{e}(t) = \underline{E} e^{j\omega t}$  et  $\underline{s}(t) = \underline{S} e^{j\omega t}$ , la réponse du filtre est entièrement déterminée par la **fonction de transfert**  $\underline{H}$  :

$$\underline{H}(j\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} \quad \heartsuit \quad (5.1)$$

La fonction de transfert est une grandeur complexe qui dépend de la **pulsation**  $\omega$  et des caractéristiques du filtre. Elle peut toujours se mettre sous la forme d'un quotient de deux polynômes en  $j\omega$  :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \quad (5.2)$$

- 5.1 Fonction de transfert . . . 47
  - Généralités . . . . . 47
  - Bande passante . . . . . 48
  - Diagramme de Bode . . . 50
  - Réponse temporelle . . . 51
- 5.2 Filtrage passe-haut . . . . 51
  - Filtre du premier ordre . . 51
  - Comportement dérivateur 53
  - Filtres plus performants . 54
- 5.3 Filtrage passe-bas . . . . . 55
  - Introduction . . . . . 55
  - Comportement intégrateur 56
  - Filtre de Butterworth . . . 57
- 5.4 Filtre passe-bande . . . . . 58
  - Introduction . . . . . 58
  - Filtre RLC . . . . . 60
- 5.5 Stabilité . . . . . 61
  - Relation différentielle . . 61
  - Condition de stabilité . . 61



FIG. 5.1 : Filtre.

1 : Si les signaux d'entrée  $e_1$  et  $e_2$  produisent indépendamment un signal de sortie  $s_1$  et  $s_2$  alors la combinaison  $a e_1 + b e_2$  produit en sortie le signal  $a s_1 + b s_2$ .

2 : En effet, dériver un signal sinusoïdal redonne un signal sinusoïdal déphasé de  $-\pi/2$  de sorte que l'équation différentielle a pour solution (sauf cas très particuliers) en régime permanent un signal sinusoïdal.

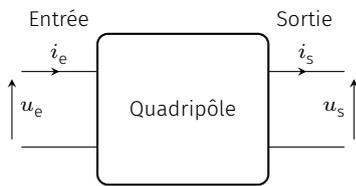


FIG. 5.2 : Quadripôle électronique.

3 : comme c'est le cas lorsqu'on y branche un voltmètre ou un oscilloscope dont les impédances d'entrée sont suffisamment grandes pour être considérées infinies.

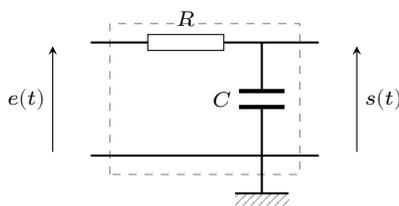


FIG. 5.3 : Filtre RC.

On appelle **ordre du filtre** le degré du polynôme  $D(j\omega)$  situé au dénominateur de la fonction de transfert.

En électronique, dans une chaîne d'analyse et de traitement du signal électrique, on rencontre couramment des filtres sous la forme de quadripôles, c'est-à-dire d'éléments possédant deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie. Les grandeurs d'entrée et de sortie sont les tensions ou les courants. Le filtre est *passif* s'il ne possède que des éléments linéaires passifs (R, L, C). Dans ce cas, la puissance moyenne en sortie est toujours inférieure ou égale à la puissance moyenne en entrée, car une partie de l'énergie entrante est dissipée par le quadripôle. Le filtre est *actif* quand il contient au moins un composant électronique actif, c'est-à-dire alimenté, tel l'amplificateur linéaire intégré (ALI). Il est, dans ce cas, possible d'avoir un gain de puissance.

Dans ce cours, nous nous limitons à la réponse en tension des filtres électrocinétiques. Plus précisément, la fonction de transfert correspond à la *réponse en tension en boucle ouverte*, c'est-à-dire lorsque la sortie ne débite aucun courant<sup>3</sup> :

$$\underline{H}(j\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{u_s(t)}{u_e(t)} \right|_{i_s=0} \quad \heartsuit \quad (5.3)$$

**Exemple : filtre RC**

Étudions le filtre RC formé par la mise en série d'un conducteur ohmique de résistance  $R$  et d'un condensateur de capacité  $C$ . Le signal d'entrée sera la tension aux bornes de l'ensemble et le signal de sortie la tension aux bornes du condensateur. Nous reconnaissons un diviseur de tension, de sorte qu'en régime sinusoïdal on peut écrire

$$s(t) = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} e(t) \quad \text{avec} \quad Z_R = R \quad \text{et} \quad Z_C = \frac{1}{jC\omega}$$

On en déduit la fonction de transfert de ce filtre

$$\underline{H} = \frac{s(t)}{e(t)} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Il s'agit d'un filtre du premier ordre.

Dorénavant, nous notons systématiquement  $e$  et  $s$  les tensions d'entrée et de sortie.

**Bande passante**

Le gain en tension d'un filtre s'obtient en prenant le module de la fonction de transfert :

$$G(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} |\underline{H}(j\omega)| = \frac{S_{\text{rms}}}{E_{\text{rms}}} \quad \heartsuit \quad (5.4)$$

Souvent, le filtre présente un gain relativement constant pour un certain intervalle de fréquences alors qu'il est quasiment nul pour les autres fréquences. Le filtre élimine alors certaines harmoniques du signal.

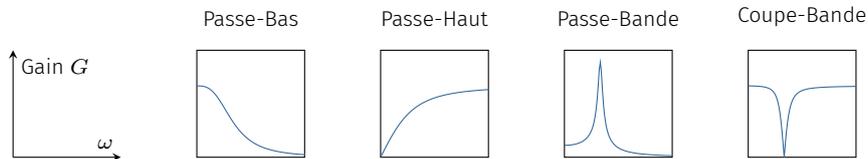


FIG. 5.4 : Types de filtre souvent rencontrés.

Suivant l'allure du gain avec la fréquence on distingue différents types de filtre :

- ▶ Le **filtre passe-bas** laisse passer les basses fréquences et coupe les hautes fréquences;
- ▶ Le **filtre passe-haut** laisse passer les hautes fréquences et coupe les basses fréquences;
- ▶ Le **filtre passe-bande** laisse passer les harmoniques situées dans une certaine bande de fréquences;
- ▶ Le **filtre coupe-bande**<sup>4</sup> coupe les harmoniques dans une certaine bande de fréquences.

4 : On dit aussi réjecteur de bande.

Par convention, on appelle **bande passante** l'intervalle des fréquences (resp. pulsations) pour lequel  $G$  est compris entre le maximum  $G_{\max}$  et  $G_{\max}/\sqrt{2}$ . Les fréquences (resp. pulsations) qui délimitent la bande passante sont appelées **fréquences de coupure** (resp. pulsations de coupure).

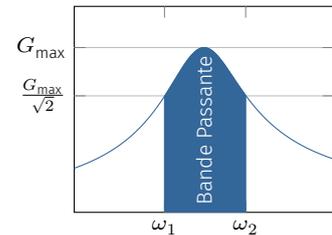


FIG. 5.5 : Bande passante.

**Exemple**

Le filtre RC étudié précédemment présente une fonction de transfert donnée par

$$H = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad \text{soit} \quad G = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

Le gain diminue avec la fréquence; il s'agit donc d'un filtre passe-bas. Le gain est maximum lorsque  $\omega = 0$  ( $G_{\max} = 1$ ) et la pulsation de coupure  $\omega_c$  est telle que

$$G(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{soit} \quad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

La bande passante correspond donc à l'intervalle  $[0, \omega_c]$  en termes de pulsation ou  $[0, \omega_c/(2\pi)]$  en termes de fréquence.

Un filtre du premier ordre possède au plus une fréquence de coupure alors qu'un filtre du second ordre peut présenter deux fréquences de coupure. On peut alors rencontrer tous les cas de la FIG. 5.4.

Notez que dans l'exemple précédent, la bande passante a pour largeur  $1/\tau$  où  $\tau$  est le temps de relaxation du circuit RC. Un filtre RC de grande bande passante est un système électrique de petit temps de réponse. On retiendra cette relation assez générale :

RAPIDITÉ  $\Leftrightarrow$  LARGE BANDE PASSANTE.

## Diagramme de Bode

5 : Par définition, 1 bel (1 B) correspond à un gain de puissance d'un facteur 10. Autrement dit,  $G_B = \log_{10} \mathcal{P}_s / \mathcal{P}_e$  où  $\mathcal{P}$  désigne la puissance. Comme 1 B = 10 dB, on a  $G_{dB} = 10 \log_{10} \mathcal{P}_s / \mathcal{P}_e$  ce qui redonne (5.5) car la puissance est proportionnelle au carré de la tension.

6 : Inventé par Hendrik Wade Bode, ingénieur américain chez Bell Laboratory.

Afin de pouvoir étudier le comportement d'un filtre sur un large domaine fréquentiel on étudie le gain en adoptant une échelle logarithmique pour la fréquence. Par ailleurs, pour visualiser l'efficacité du filtrage il est plus commode de porter le gain en décibel<sup>5</sup> défini par

$$G_{dB} \stackrel{\text{def}}{=} 20 \log_{10} G \quad \heartsuit \quad (5.5)$$

Le diagramme de Bode<sup>6</sup> est constitué de deux graphes :

- ▶ celui du gain en décibel  $G_{dB}$  en fonction de la fréquence en échelle logarithmique;
- ▶ celui du déphasage sortie/entrée  $\phi = \arg(\underline{H})$  en fonction de la fréquence en échelle logarithmique.

L'échelle logarithmique simplifie la lecture du comportement du filtre car l'essentiel du graphe est constitué de tronçons linéaires correspondants aux comportements asymptotiques.

Dans une telle représentation, les fréquences de coupure correspondent à une diminution de 3dB du gain par rapport au maximum, puisque

$$G = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \quad \text{donne} \quad G_{dB} = 20 \log_{10} G_{\max} - 10 \log_{10}(2) \simeq G_{dB \max} - 3 \text{ dB}$$

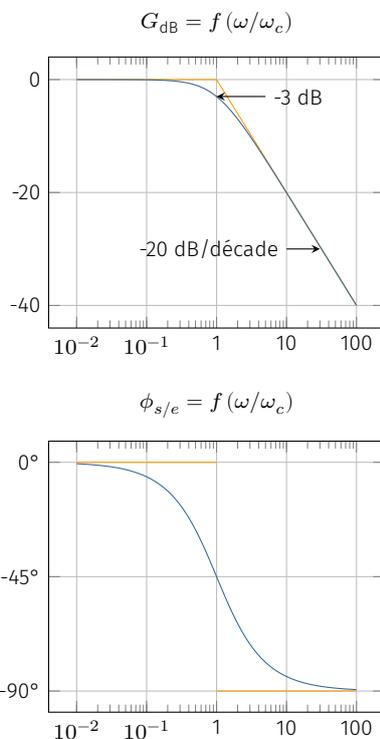


FIG. 5.6 : Diagramme de Bode d'un filtre RC. Les traits oranges correspondent aux comportements asymptotiques.

### Exemple : diagramme de Bode du filtre RC

Reprenons la fonction de transfert du filtre passe-bas RC :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{avec} \quad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

Le gain en décibel est alors donné par

$$G_{dB} = -10 \log_{10} [1 + (\omega/\omega_c)^2]$$

On peut distinguer deux comportements, un à basse fréquence, l'autre à haute fréquence.

À basse fréquence ( $\omega \ll \omega_c$ ),  $G_{dB} \simeq 0 \text{ dB}$  : le graphe est assimilable à une portion horizontale d'ordonnée 0 dB.

À haute fréquence ( $\omega \gg \omega_c$ ),  $G_{dB} \simeq -20 \log_{10}(\omega) + 20 \log_{10}(\omega_c)$  : le graphe est assimilable à une portion de droite décroissante passant par le point  $(\omega_c, 0)$  et de pente -20 dB/décade ou -6 dB/octave<sup>a</sup>.

Quant au déphasage sortie/entrée, on a

$$\phi_{s/e} = -\arg\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_c}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

Ainsi, à basse fréquence, le déphasage tend vers 0 alors qu'à haute fréquence il tend vers  $-\pi/2$  rad; la tension de sortie es alors en quadrature de phase par rapport à la tension d'entrée.

<sup>a</sup> Une décade représente un intervalle  $[\omega, 10\omega]$ . Sur une échelle logarithmique, cela correspond à un intervalle d'une unité. Une octave désigne l'intervalle  $[\omega, 2\omega]$ .

## Réponse du filtre soumis à une excitation périodique

Comme on l'a vu, un filtre a la particularité de produire un signal sinusoïdal lorsque l'on injecte en entrée un signal sinusoïdal. Certes, l'amplitude et la phase à l'origine peuvent différer, mais pas la forme du signal ! Ça n'est plus le cas lorsque l'on envoie un signal périodique non sinusoïdal : le filtre produit une déformation du signal, et c'est bien là l'intérêt d'un filtre : nettoyer un signal du bruit, sélectionner une harmonique particulière, corriger la phase d'un signal, enlever la composante continue... sont autant de possibilités qui rendent le filtre indispensable dans une chaîne de traitement du signal.

Cette déformation est le résultat d'une transformation différente des harmoniques par le filtre. En effet, rappelons qu'un filtre agit sur une harmonique en agissant sur l'amplitude et la phase :

$$A \cos(\omega t) \xrightarrow{\text{Filtre}} G(\omega) \times A \cos(\omega t + \phi) \quad \text{avec} \quad \phi = \arg \underline{H}$$

Soumettons le filtre à une excitation périodique de période  $T = 2\pi/\omega$  et décomposable en série de Fourier :

$$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

En vertu du principe de superposition, chaque harmonique subit une amplification par le gain correspondant à la fréquence de l'harmonique et un déphasage  $\phi = \arg \underline{H}$ . Le signal de sortie s'écrit alors

$$s(t) = G_0 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [G_n a_n \cos(n\omega t + \phi_n) + G_n b_n \sin(n\omega t + \phi_n)] \quad \heartsuit \quad (5.6)$$

avec  $G_n = G(n\omega)$  et  $\phi_n = \phi(n\omega)$ .

## 5.2 Filtrage passe-haut

### Filtre du premier ordre

Imaginons que l'on souhaite éliminer la composante continue d'un signal périodique. C'est par exemple ce que réalise un oscilloscope sur le signal d'entrée lorsque qu'on le place en mode AC. Un simple filtre passe-haut permet d'éliminer la composante continue<sup>7</sup>. Il faut juste veiller à ce que la fréquence de coupure soit suffisamment basse pour éviter d'affecter les harmoniques du signal.

Le filtre passe-haut le plus simple est un filtre du premier ordre dont la fonction de transfert prend la forme

$$\underline{H} = G_0 \frac{j\omega/\omega_c}{1 + j\omega/\omega_c} \quad \heartsuit \quad (5.7)$$

où  $\omega_c$  est la pulsation de coupure et  $|G_0|$  le gain à haute fréquence. On vérifie que  $G = 0$  pour  $\omega = 0$  et  $G \rightarrow |G_0|$  pour  $\omega \rightarrow \infty$ . Dans

<sup>7</sup> : Composante qui correspond à la fréquence nulle.

un oscilloscope, un filtre passe-haut de gain  $G_0 = 1$  et de fréquence de coupure  $\nu_c \sim 10$  Hz réalise une telle opération comme l'illustre la simulation de la Fig. 5.7.

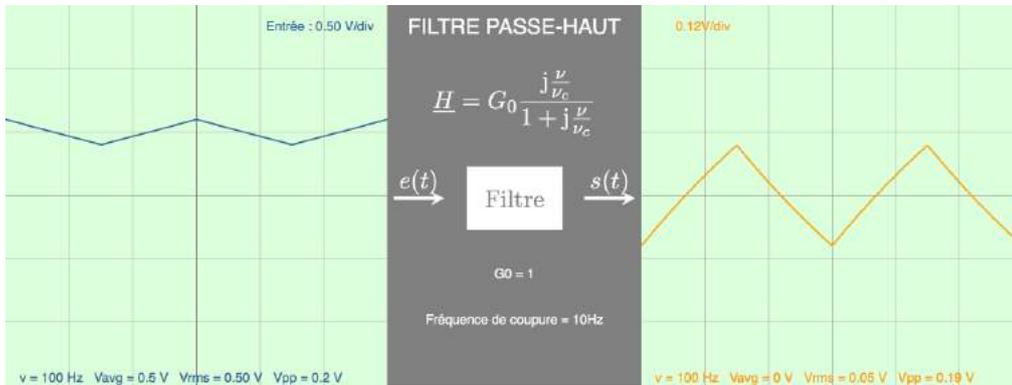


FIG. 5.7 : Élimination de la composante continue d'un signal triangulaire à l'aide d'un filtre passe-haut de fréquence de coupure fixée à 10 Hz (simulation ©J.Roussel).

Établissons le diagramme de Bode d'un tel filtre. Le gain en décibel vaut

$$G_{dB} = 20 \log |G_0| + 20 \log \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) - 20 \log \sqrt{1 + \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2}$$

À haute fréquence on a le comportement  $G_{dB}^{HF} \approx 20 \log |G_0|$  alors qu'à basse fréquence on a le comportement  $G_{dB}^{BF} \approx 20 \log |G_0| + 20 \log \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)$ . Cela donne deux tronçons rectilignes, l'un horizontal et l'autre de pente +20 dB/décade, se coupant au point  $(\log(\omega_c); 20 \log |G_0|)$ . On vérifie que  $\omega_c$  est bien la pulsation de coupure puisque

$$G(\omega_c) = \frac{|G_0|}{\sqrt{2}} \quad \text{soit} \quad G_{dB}(\omega_c) = 20 \log(|G_0|) - 3 \text{ dB}$$

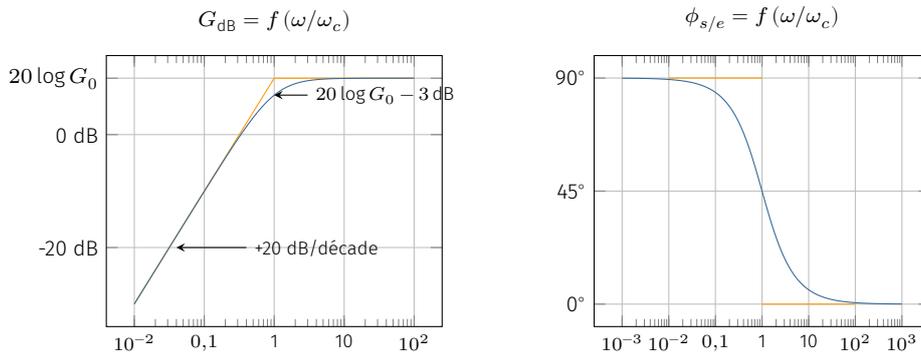


FIG. 5.8 : Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut du premier ordre avec  $G_0 = 3,2$ .

Quant au déphasage introduit par le filtre, si  $G_0 > 0$ , on a :

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \arg(1 + j\omega/\omega_c)$$

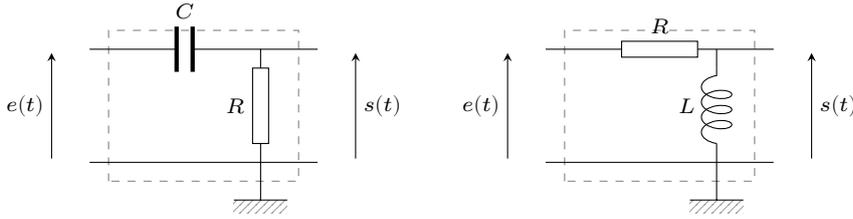


FIG. 5.9 : Exemples de filtres passe-haut du premier ordre.

ce qui donne les limites suivantes

$$\phi^{\text{BF}} \simeq \frac{\pi}{2} \quad \phi(\omega_c) = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \phi^{\text{HF}} \simeq 0$$

On peut très facilement réaliser un filtre passe-haut à l'aide d'un conducteur ohmique et d'un condensateur ou d'une bobine. En guise d'exercice, on laisse au lecteur le soin de vérifier que les montages de la FIG. 5.9 correspondent à des filtres passe-haut de gain  $G_0 = 1$  de pulsation de coupure  $\omega_c = 1/RC$  pour le montage C-R, et  $\omega_c = R/L$  pour le montage L-R.

## Comportement dérivateur

Dériver un signal est une opération qui se réalise aisément à l'aide d'un filtre. La tension de sortie doit prendre la forme

$$s(t) = \tau \frac{de(t)}{dt}$$

où  $\tau$  est un paramètre homogène à un temps. En notation complexe cela donne

$$\underline{s}(t) = \tau j\omega \underline{e}(t) \quad \text{soit} \quad \underline{H} = j\omega \tau$$

Par exemple, si l'on reprend le filtre passe-haut précédent et que l'on règle la fréquence de coupure à une valeur très éloignée de la fréquence du signal d'entrée, on peut écrire  $\omega \ll \omega_c$  et

$$\underline{H} = \frac{j\omega/\omega_c}{1 + j\omega/\omega_c} \simeq j\omega/\omega_c$$

ce qui correspond à une dérivation avec un paramètre  $\tau = 1/(\omega_c)$ . La FIG. 5.10 illustre le phénomène avec un signal triangulaire d'amplitude 1 V et de fréquence 100 Hz envoyé sur un filtre passe-haut dont la fréquence de coupure est fixée à 1 000 Hz.

Les premières harmoniques – celles qui ont le plus de poids dans la série de Fourier – se trouvent dans un domaine fréquentiel où  $\underline{H} \simeq j\omega/\omega_c$ . On s'attend à obtenir un signal de sortie correspondant à la dérivée du signal triangulaire, à savoir,

$$s(t) = \frac{1}{2\pi\nu_c} \frac{de(t)}{dt} = \frac{1}{2000\pi} \times \frac{\pm 2}{0,01/2} = \pm 64 \text{ mV}$$

On prévoit donc un signal carré de fréquence 100 Hz et d'amplitude crête à crête 128 mV, ce que confirme la simulation de la FIG. 5.10. On note cependant que le signal de sortie n'est pas tout à fait carré, car le basculement entre la valeur maximale et la valeur minimale se

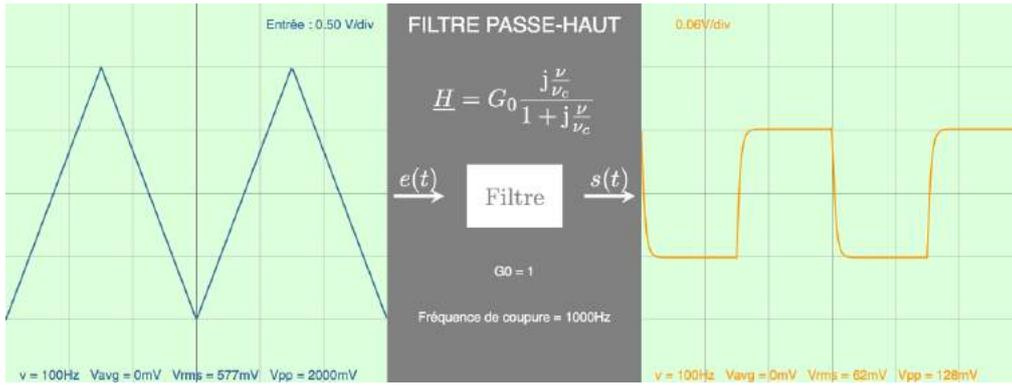


FIG. 5.10 : Dérivation d'un signal triangulaire à l'aide d'un filtre passe-haut de fréquence de coupure fixée à 1000 Hz (simulation ©J.Roussel).

fait sur une durée finie de l'ordre de  $\tau$ . Du point de vue de l'analyse de Fourier, cet « adoucissement » du signal carré est lié au fait que les harmoniques haute-fréquence se retrouvent dans la bande passante du filtre passe-haut et ne sont pas dérivées ( $\underline{H} = 1$  au lieu de  $\underline{H} = j\omega\tau$ ). Or c'est précisément ces harmoniques qui jouent un rôle important dans la synthèse d'un carré au voisinage des discontinuités. En résumé, un filtre passe-haut présente un comportement dérivateur d'autant plus fidèle que la fréquence de coupure est grande.

### Filtres plus performants

Les harmoniques situées en dehors de la bande passante sont d'autant mieux filtrées que la pente de la portion rectiligne est importante. Si une atténuation de 20 dB/décade n'est pas suffisante il faut se tourner vers des filtres d'ordre supérieur à un.

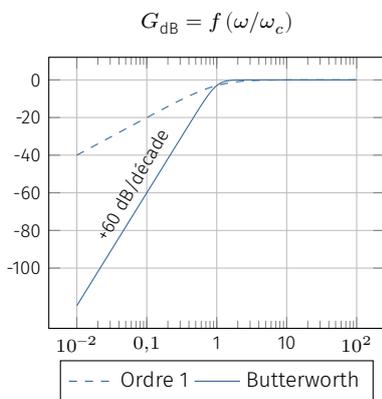


FIG. 5.11 : Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut de Butterworth d'ordre 3.

Le filtre de Butterworth d'ordre trois est couramment utilisé dans les système d'amplification audio. Sa fonction de transfert se met sous la forme

$$\underline{H}(jx) = \frac{(jx)^3}{1 + 2jx - 2x^2 - jx^3} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_c} \quad (5.8)$$

Le gain associé prend une forme simple :

$$G = \frac{x^3}{\sqrt{(1 - 2x^2)^2 + (2x - x^3)^2}} = \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^6}}$$

On voit ainsi que

$$G^{\max} = 1 \quad G^{\text{HF}} = 1 \quad G(x = 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad G \underset{x \rightarrow 0}{\simeq} x^3$$

La pulsation de coupure correspond à  $x = 1$  soit  $\omega = \omega_c$ . Par ailleurs, le diagramme de Bode comporte dans la partie basse-fréquence une portion rectiligne de pente +60 dB/décade ( $G_{\text{dB}}^{\text{BF}} = 60 \log x$ ).

Une manière de réaliser un filtre de Butterworth d'ordre 3 consiste à fabriquer un pont en T avec deux condensateurs et une bobine que l'on branche sur une résistance de charge  $R$  (FIG. 5.12). En choisissant correctement les valeurs de  $C_1$ ,  $C_2$  et  $L$ , on trouve une fonction de

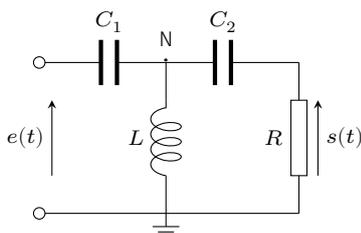


FIG. 5.12 : Exemple de filtre passe-haut du troisième ordre.

transfert de la forme (5.8). Pour le vérifier, calculons la fonction de transfert de ce filtre :

$$\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{s}{u_N} \times \frac{u_N}{e}$$

où  $u_N$  est la tension entre le point N et la masse. Le premier facteur s'obtient par la relation du diviseur de tension :

$$\frac{s}{u_N} = \frac{R}{R + 1/jC_2\omega} = \frac{jRC_2\omega}{1 + jRC_2\omega}$$

Le deuxième facteur s'obtient à l'aide du théorème de Millman :

$$\frac{u_N}{e} = \frac{e jC_1\omega + 0/(jL\omega) + s jC_2\omega}{jC_1\omega + 1/(jL\omega) + jC_2\omega}$$

À partir de ces deux relations, on peut éliminer  $u_N$ . Tout calcul fait, on obtient

$$\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{RC_2C_1L(j\omega)^3}{1 + jRC_2\omega - L(C_1 + C_2)\omega^2 - jRC_1C_2L\omega^3}$$

On constate qu'il s'agit d'un filtre de Butterworth d'ordre 3 à condition d'imposer

$$RC_1C_2L\omega_c^3 = 1 \quad RC_2\omega_c = 2 \quad \text{et} \quad L(C_1 + C_2)\omega_c^2 = 2$$

Dans une chaîne de transmission audio, la résistance  $R$  correspond à la résistance d'entrée des hauts-parleurs. Si l'on fixe la fréquence de coupure, alors les valeurs de  $C_1$ ,  $C_2$  et  $L$  sont imposées.

## 5.3 Filtrage passe-bas

### Introduction

Il arrive couramment que l'on veuille lisser un signal pour en éliminer le bruit haute-fréquence capturée lors de l'enregistrement. Parfois, on désire simplement calculer la moyenne d'un signal périodique. Souvent dans une chaîne de conversion analyse-numérique on élimine les composantes haute-fréquence pour éviter le phénomène de repliement de spectre. Toutes ces opérations se réalisent à l'aide d'un filtre passe-bas.

Le filtre passe-bas du premier ordre est le plus simple d'entre eux. Sa fonction de transfert se met sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_c} \quad [\text{passe-bas ordre 1}] \quad \heartsuit \quad (5.9)$$

Le gain associé s'écrit

$$G = \frac{|G_0|}{\sqrt{1 + x^2}} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_c}$$

On voit ainsi que

$$G^{\max} = |G_0| \quad G^{\text{BF}} = |G_0| \quad G(x = 1) = \frac{|G_0|}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad G \underset{x \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{|G_0|}{x}$$

Le gain  $|G_0|$  est appelé **gain statique**, car il correspond au gain à fréquence nulle. La grandeur  $\omega_c$  désigne la pulsation de coupure à -3 dB, et le comportement à haute fréquence se traduit dans le diagramme de Bode par une droite de pente -20 dB/décade (cf. FIG. 5.6).

Le filtre RC vu en exemple présente ce comportement avec  $G_0 = 1$  et  $\omega_c = 1/RC$ . On peut aussi réaliser un tel filtre à l'aide d'une bobine et d'un conducteur ohmique; dans ce cas la pulsation de coupure est donnée par  $\omega_c = R/L$ .

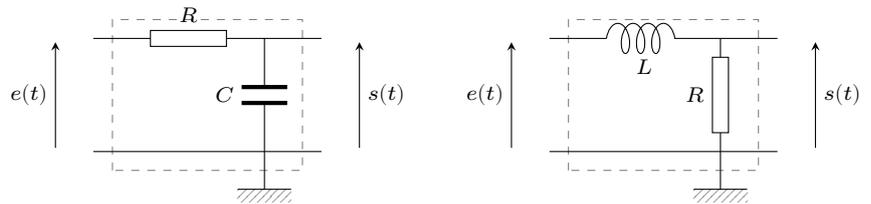


FIG. 5.13 : Exemples de filtres passe-bas du premier ordre.

Si l'on cherche à obtenir la valeur moyenne d'un signal périodique, il suffira d'envoyer le signal à traiter sur un filtre passe-bas de gain statique  $G_0 = 1$  et dont la bande passante sera choisie de façon à exclure toutes les harmoniques. Ainsi seule la composante continue, c'est-à-dire la valeur moyenne du signal, sera transmise.

### Comportement intégrateur

#### Expérience

Envoyons un signal carré d'amplitude  $A = 1\text{ V}$  et de fréquence  $\nu = 100\text{ Hz}$  à l'entrée d'un filtre RC. Ajustons la fréquence de coupure à  $10\text{ Hz}$ . La simulation ci-dessous donne le résultat<sup>8</sup> :

8 : Voir [Simuler pour apprendre sur femto-physique.fr](http://Simuler.pour.apprendre.sur.femto-physique.fr)



Comme on peut le voir, le filtre se comporte comme un intégrateur, puisque le signal de sortie est, à une constante multiplicative près, l'intégrale du signal d'entrée.

Pour interpréter cette expérience, adoptons tout d'abord un point de vue temporel. Rappelons [2] que le signal carré est constitué uniquement d'harmoniques impaires dont les amplitudes décroissent en

[2] : ROUSSEL (2020), *Séries de Fourier*

$1/n$ . Plus précisément on trouve

$$e(t) = \frac{4A}{\pi} \left[ \cos(\omega t) + \frac{1}{3} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega t) + \frac{1}{7} \cos(7\omega t) + \dots \right]$$

avec  $\omega = 2\pi\nu$ . Le gain et le déphasage introduits par le filtre s'écrivent :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}} \quad \text{et} \quad \phi_{s/e} = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

avec  $\omega_c = 1/(RC)$  la pulsation de coupure ajustable en modifiant les valeurs de  $R$  et  $C$ . En vertu du principe de superposition, le signal filtré s'écrit

$$s(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{n\omega}{\omega_c}\right)^2}} \times \frac{1}{n} \cos[n\omega t - \arctan(n\omega/\omega_c)]$$

La fréquence de coupure étant fixée à 10 Hz, toutes les harmoniques se trouvent suffisamment loin de la bande passante pour assimiler la réponse du filtre à son comportement asymptotique. Autrement dit, on a  $G \simeq \omega_c/\omega$  et  $\phi \simeq -\pi/2$  de sorte que la réponse est approximativement donnée par

$$s(t) = \frac{4A\omega_c}{\pi\omega} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} \sin(n\omega t)$$

On obtient une série d'harmoniques impaires dont l'amplitude décroît en  $1/n^2$ . On reconnaît ici un signal triangulaire<sup>9</sup> d'amplitude :

$$A_s = \frac{\pi\omega_c}{2} A \quad \text{soit} \quad A_s \simeq 157 \text{ mV}$$

résultat confirmée par la simulation<sup>10</sup>.

On peut aussi adopter un point de vue spectral. En effet, lorsque  $\omega \gg \omega_c$  la fonction de transfert est bien approchée par  $\underline{H} \simeq \omega_c/j\omega$ . La tension de sortie s'écrit  $\underline{e}(t) \simeq \frac{1}{\omega_c} j\omega \underline{s}(t)$  ce qui signifie en représentation réelle  $e(t) = \frac{1}{\omega_c} \frac{ds(t)}{dt}$  soit

$$s(t) = 2\pi\nu_c \int e(t) dt$$

Un filtre passe-bas du premier ordre réalise donc une intégration mathématique du signal d'entrée si les harmoniques du signal se trouvent suffisamment loin de la bande passante.

## Filtre passe-bas de Butterworth

Un filtre passe-bas est de type Butterworth quand son gain se met sous la forme

$$G = \frac{G_0}{\sqrt{1 + x^{2n}}} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_c}$$

où  $n$  est l'ordre du filtre.

9 : Un signal triangulaire d'amplitude  $A$  présente des harmoniques de fréquence impaire et d'amplitude  $A_n = \frac{8A}{\pi^2} \frac{1}{n^2}$  [2]

10 : La simulation donne une tension crête-à-crête de 311 mV à comparer avec  $2A_s = 314$  mV. La différence est due aux approximations du calcul théorique.

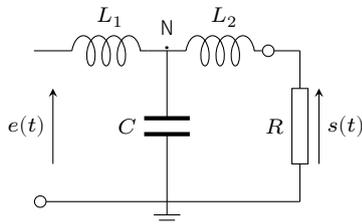


Fig. 5.14 : Filtre passe-bas d'ordre 3.

Ainsi, les filtres RC et LR sont des filtres de Butterworth d'ordre 1. On peut réaliser des filtres de Butterworth d'ordre supérieur en associant « en échelle » des bobines et des condensateurs, l'ensemble étant fermé sur une résistance de charge  $R$ . Illustrons l'exemple d'un pont en T similaire au montage de la Fig. 5.12 où l'on remplace les condensateurs par des bobines et vice versa (Fig. 5.14).

Calculons la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{s}}{\underline{u}_N} \times \frac{\underline{u}_N}{\underline{e}}$$

où  $\underline{u}_N$  est la tension entre le point N et la masse. Le premier facteur s'obtient par la relation du diviseur de tension :

$$\frac{\underline{s}}{\underline{u}_N} = \frac{R}{R + jL_2\omega}$$

Le deuxième facteur s'obtient à l'aide du théorème de Millman :

$$\underline{u}_N = \frac{\underline{e}/jL_1\omega + \underline{s}/jL_2\omega + 0}{1/jL_1\omega + 1/jL_2\omega + jC\omega}$$

En substituant  $\underline{s}$  par  $\underline{u}_N R / (1 + jL_2\omega)$ , on obtient

$$\frac{\underline{u}_N}{\underline{e}} = \frac{R + jL_2\omega}{R + j(L_1 + L_2)\omega + RL_1C(j\omega)^2 + L_1L_2C(j\omega)^3}$$

Finalement, la fonction de transfert, s'écrit

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{u}_N} \times \frac{\underline{u}_N}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + \frac{L_1+L_2}{R}j\omega + L_1C(j\omega)^2 + \frac{L_1L_2C}{R}(j\omega)^3}$$

11 : Il suffit de choisir  $L_2 = R/(2\omega_c)$ ,  $L_1 = 3L_2$  et  $C = 2/(L_1\omega_c^2)$ .

Pour une résistance de charge donnée et une fréquence de coupure fixée à  $\omega_c$ , il est possible de choisir correctement les valeurs<sup>11</sup> de  $L_1$ ,  $L_2$  et  $C$  pour mettre la fonction de transfert sous la forme

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + 2(jx) + 2(jx)^2 + (jx)^3} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_c}$$

Dans ce cas, le gain vaut

$$G = \frac{1}{\sqrt{(1 - 2x^2)^2 + (2x - x^3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^6}}$$

Il s'agit d'un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre 3, qui présente une coupure à -60 dB/décade.

## 5.4 Filtre passe-bande

### Introduction

Que l'on cherche à isoler une harmonique particulière cachée dans un signal, ou que l'on souhaite ne conserver qu'une certaine bande de fréquences avant de procéder à une démodulation, on aura recours à un filtre passe-bande.

Le filtre passe-bande le plus simple est un filtre d'ordre deux. Sa fonction de transfert se met sous la forme

$$\underline{H} = \frac{G_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad [\text{Passe-Bande 2nd ordre}] \quad \heartsuit \quad (5.10)$$

où  $\omega_0$  est la pulsation de résonance du filtre pour laquelle le gain est maximum ( $G_{\max} = |G_0|$ ). Le paramètre  $Q$  est un nombre positif sans dimension, dit **facteur de qualité**, qui permet d'ajuster la bande-passante  $\Delta\omega$ .

On détermine aisément les comportements asymptotiques du filtre :

$$G^{\text{BF}} \simeq \left| \frac{G_0}{Q\omega_0/\omega} \right| \quad \text{et} \quad G^{\text{HF}} \simeq \left| \frac{G_0}{Q\omega/\omega_0} \right|$$

Ce qui se traduit en échelle logarithmique par

$$G_{\text{dB}}^{\text{BF}} \simeq G_{\text{dB}}^{\max} - 20 \log Q + 20 \log(\omega/\omega_0) \quad \text{et} \quad G_{\text{dB}}^{\text{HF}} \simeq G_{\text{dB}}^{\max} - 20 \log Q - 20 \log(\omega/\omega_0)$$

ce qui donne deux droites de pentes  $\pm 20$  dB/décade qui se coupent à la fréquence de résonance à la hauteur  $G_{\text{dB}}^{\max} - 20 \log Q$ .

Les pulsations de coupure  $\omega_c$  sont définies par

$$\frac{|G_0|}{\sqrt{1 + Q^2(\omega_c/\omega_0 - \omega_0/\omega_c)^2}} = \frac{|G_0|}{\sqrt{2}}$$

Après avoir posé  $x = \omega_c/\omega_0$ , on aboutit à l'équation  $Q(x - 1/x) = \pm 1$  dont les deux seules solutions positives sont

$$x_{\pm} = \frac{\sqrt{1 + 4Q^2} \pm 1}{2Q} = \frac{\omega_{\pm}}{\omega_0}$$

Finalement, la bande passante vaut

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \frac{\omega_0}{Q} \quad \text{ou} \quad \Delta\nu = \frac{\nu_0}{Q} \quad \heartsuit \quad (5.11)$$

Ainsi, plus  $Q$  est grand, plus le filtre est sélectif, c'est-à-dire à bande passante-étroite.  $Q$  est, de ce fait, aussi appelé **facteur d'acuité à la résonance**.

Quant au déphasage entre la sortie et l'entrée, dès que l'on s'éloigne de la bande passante, on a  $\phi \simeq \pm\pi/2$ . Les signaux sont en quadrature de phase. En revanche à la résonance, le signal de sortie est en phase avec le signal d'entrée.

La simulation de la FIG. 5.17 illustre l'effet d'un filtre passe-bande sur un signal en forme de rampe de fréquence 100 Hz. La bande passante est centrée sur 200 Hz et le facteur  $Q$  est fixé à 50 pour avoir une bonne sélectivité. On recueille ainsi en sortie la deuxième harmonique du signal : on peut constater qu'il s'agit d'un sinus déphasé de  $\pi$ .

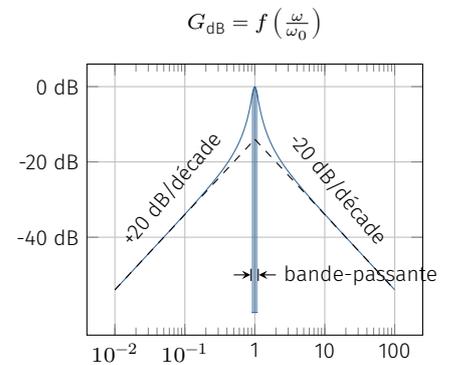


FIG. 5.15 : Diagramme de Bode associé au filtre passe-bande du second ordre pour  $Q = 5$  et  $G_0 = 1$ .

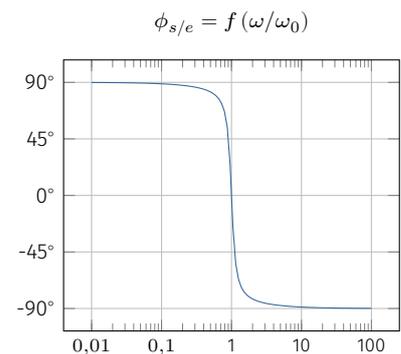


FIG. 5.16 : Déphasage introduit par un filtre passe-bande avec  $Q = 5$ .

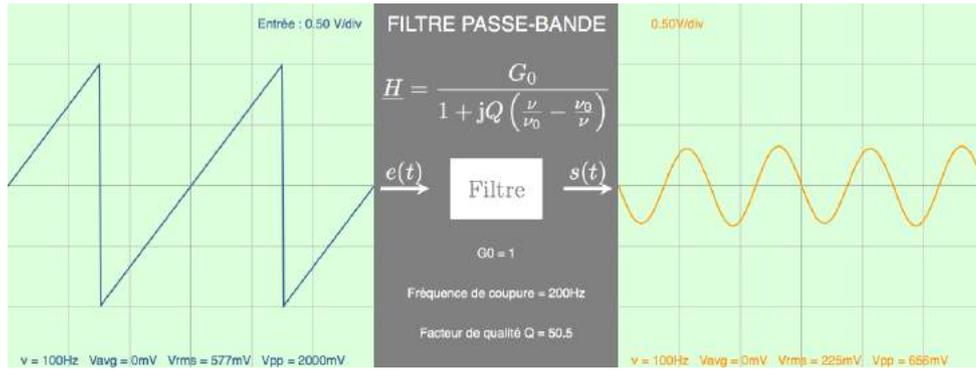


FIG. 5.17 : Sélection de la seconde harmonique d'un signal périodique à l'aide d'un filtre passe-bande (simulation ©J.Roussel).

### Filtre RLC

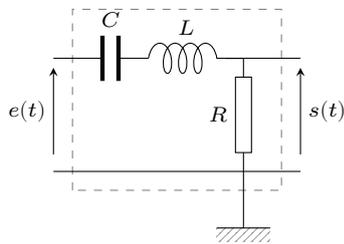


FIG. 5.18 : Quadripôle RLC.

Un dipôle formé d'une bobine en série avec un condensateur et un conducteur ohmique présente les propriétés d'un filtre passe-bande du second ordre. Si l'on recueille la tension aux bornes du conducteur, on obtient un filtre passe-bande du type (5.10). Si l'on recueille la tension aux bornes du condensateur, on obtient un filtre passe-bande à condition que la résistance ne soit pas trop importante.

Intéressons nous d'abord à la tension aux bornes du conducteur ohmique. On a

$$H = \frac{R}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = \frac{1}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$$

Ainsi, les valeurs de  $L$  et  $C$  commandent la fréquence de résonance, tandis que la valeur de  $R$  permet d'ajuster l'acuité de la résonance sans modifier la fréquence de résonance.

Si l'on recueille la tension aux bornes du condensateur, on obtient un comportement sensiblement différent. Tout d'abord, la loi des mailles impose

$$e(t) = jL\omega i(t) + u_R(t) + s(t)$$

En divisant par  $e(t)$  on obtient

$$H' = \frac{s(t)}{e(t)} = 1 - \frac{u_R(t)}{e(t)} - j\frac{L\omega}{R} \frac{u_R(t)}{e(t)}$$

Or, le rapport  $u_R(t)/e(t)$  est donné par la relation (5.10). On trouve finalement

$$H' = \frac{-jQ\frac{\omega_0}{\omega}}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$$

Avec  $Q$  et  $\omega_0$  définis comme précédemment. Le gain vérifie les propriétés suivantes :

$$G^{BF} \simeq 1 \quad G(\omega_0) = Q \quad \text{et} \quad G^{HF} \simeq \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$$

On remarque que le filtre laisse passer les basses fréquences sans les

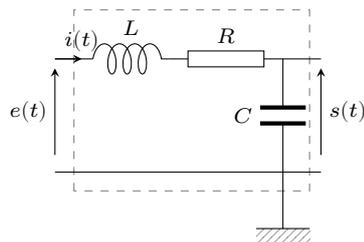


FIG. 5.19 : Quadripôle RLC avec un signal de sortie recueillie aux bornes du condensateur.

atténuer. En revanche les hautes fréquences sont plus efficacement atténuées que dans le filtre précédent. Le diagramme de Bode fait apparaître une asymptote oblique de pente  $-40$  dB/décade. Notons également que le signal est amplifié d'un facteur  $Q$  lorsque  $\omega = \omega_0$ . On peut montrer que la courbe de gain ne présente pas toujours de résonance : il faut dépasser la valeur  $Q = \sqrt{2}/2$  pour que ce soit le cas. On parlera donc de filtrage passe-bande uniquement si  $Q$  est assez grand.

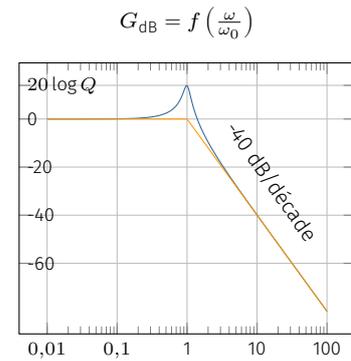


FIG. 5.20 : Diagramme de Bode du filtre RLC avec un signal prélevé aux bornes de C et  $Q = 5$ .

## 5.5 Stabilité

### Relation différentielle

Rappelons que la réponse d'un filtre peut être modélisée par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du type

$$\alpha_0 e(t) + \alpha_1 \frac{de(t)}{dt} + \dots + \alpha_n \frac{d^n e(t)}{dt^n} = \beta_0 s(t) + \beta_1 \frac{ds(t)}{dt} + \dots + \beta_m \frac{d^m s(t)}{dt^m}$$

Cette équation différentielle est étroitement liée à la fonction de transfert du filtre. En effet, si l'on adopte la notation complexe et que l'on se place en régime forcé, on a

$$\frac{de(t)}{dt} \rightarrow j\omega e(t) \quad \text{avec} \quad \omega = 2\pi \nu$$

Dès lors, la fonction de transfert s'écrit

$$\underline{H} = \frac{\alpha_0 + j\omega \alpha_1 + \dots + (j\omega)^n \alpha_n}{\beta_0 + j\omega \beta_1 + \dots + (j\omega)^m \beta_m} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

avec  $m$  l'ordre du filtre et  $n \leq m$  pour des raisons de stabilité comme nous allons le voir.

Un théorème de mathématiques stipule que l'on peut toujours décomposer un polynôme à coefficients réels en un produit de polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. C'est pourquoi la fonction de transfert peut toujours s'écrire

$$\underline{H} = \prod \underline{H}_i$$

où  $\underline{H}_i$  est une fonction de transfert d'ordre 1 ou 2.

### Condition de stabilité

Pour qu'un filtre soit stable, on doit s'assurer qu'à tout signal d'entrée borné corresponde un signal de sortie également bornée, ceci à toute fréquence. Pour cela il est nécessaire que la **fonction de transfert reste finie pour toute pulsation**  $\omega \in \mathbb{R}$ . Il est donc impératif que le degré du dénominateur soit supérieure ou égal au degré du numérateur, sans quoi  $|\underline{H}|$  diverge quand  $\omega \rightarrow \infty$ .

Étudions plus spécifiquement les filtres d'ordre 2 de la forme

$$\underline{H} = \frac{\alpha_0 + j\omega \alpha_1 + (j\omega)^2 \alpha_2}{\beta_0 + j\omega \beta_1 + (j\omega)^2 \beta_2} \quad \text{avec } \beta_2 \neq 0$$

Que dire des coefficients  $\beta_1$  et  $\beta_0$  ?

- ▶ si  $\beta_1 = 0$ , il existe une fréquence qui annule le dénominateur et fait diverger la fonction de transfert.
- ▶ si  $\beta_0 = 0$ , la fréquence nulle fait diverger la fonction de transfert.

Autrement dit les coefficients  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont non nuls. Regardons maintenant la dynamique de ce filtre lorsque l'entrée est nulle. L'équation différentielle s'écrit

$$\beta_0 s(t) + \beta_1 \frac{ds(t)}{dt} + \beta_2 \frac{d^2s(t)}{dt^2} = 0$$

12 : Si tel n'est pas le cas, il suffit de multiplier l'équation différentielle par -1 pour se ramener à ce cas.

Supposons que  $\beta_2$  soit positif<sup>12</sup>. Démontrons que  $\beta_1$  et  $\beta_0$  ne peuvent pas être négatifs. Rappelons que pour trouver les solutions de l'équation différentielle il faut résoudre l'équation caractéristique

$$\beta_0 + \beta_1 r + \beta_2 r^2 = 0 \quad \text{de discriminant } \Delta = \beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2$$

13 : Rappelons que le produit des racines est donné par  $\beta_0/\beta_2$ .

Si  $\beta_0 < 0$ , le discriminant est positif et les solutions – appelons-les  $r_1$  et  $r_2$  – sont réelles. Or, si  $\beta_0 < 0$ , le produit<sup>13</sup> des racines est aussi négatif ce qui signifie que l'une d'entre elles est positive. Par conséquent la solution diverge :

$$s(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty \quad (5.12)$$

Le filtre n'est pas stable si  $\beta_0 < 0$ . Fixons maintenant  $\beta_0 > 0$ . Le produit des racines est donc positif. Deux cas se présentent.

- ▶ Le discriminant est positif. Les racines sont alors réelles, et la solution s'écrit comme (5.12). Pour que le filtre soit stable il est nécessaire que les racines soient toutes les deux négatives, comme leur somme  $S = -\beta_1/\beta_2$ . On en déduit  $\beta_1 > 0$ .
- ▶ Le discriminant est négatif. Les racines s'écrivent  $r_{1,2} = -\frac{\beta_1}{2\beta_2} \pm j\Omega$  et la solution est de la forme

$$s(t) = C_1 e^{-\beta_1 t/2\beta_2} \cos(\Omega t + \varphi)$$

solution qui diverge si  $\beta_1 < 0$ . La stabilité impose alors  $\beta_1 > 0$ .

Pour résumer, un filtre d'ordre 2 est stable si tous les coefficients du dénominateur sont de même signe. L'étude du filtre d'ordre 1 est analogue et aboutit au même résultat.

### Conditions de stabilité

Un filtre d'ordre 1 ou 2 est stable à condition que :

1. le degré du dénominateur soit supérieur ou égal au degré du numérateur ;
2. les coefficients du dénominateur soient tous non nuls et de même signe.

**Exemple**

Considérons l'exemple d'un circuit RLC série où la tension de sortie est recueillie aux bornes de l'ensemble LC. La fonction de transfert vaut

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{1 + LC(j\omega)^2}{1 + RCj\omega + LC(j\omega)^2}$$

Il s'agit donc d'un filtre d'ordre deux. Ici le degré du numérateur est le même que celui du dénominateur, et tous les coefficients du dénominateur sont positifs. Par conséquent ce filtre est stable. On laisse au lecteur le soin de montrer qu'il s'agit ici d'un filtre coupe-bande centrée en  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

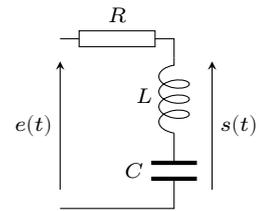


FIG. 5.21 : Filtre réjecteur à l'aide d'un circuit RLC.



# STRUCTURES ACTIVES À AMPLIFICATEURS INTÉGRÉS

# 6

À venir ...



## Pour en savoir plus

- [1] J. ROUSSEL. *Conducteurs électriques*. Fév. 2016. URL : <https://femto-physique.fr/electromagnetisme/> (cf. p. 5, 17).
- [2] J. ROUSSEL. *Séries de Fourier*. Jan. 2020. URL : <https://femto-physique.fr/omp/> (cf. p. 56, 57).
- [3] Jean PÉRICART. *Cours d'électricité théorique, Tome 1 : Electrostatique - Electrocinétique*. 1962.
- [4] Étienne TISSERAND, Jean-François PAUTEX et Patrick SCHWEITZER. *Analyse et traitement des signaux-2e éd. : Méthodes et applications au son et à l'image*. Dunod, 2009.



# Grandeurs physiques et symboles mathématiques

## Constantes physiques définies par le SI (valeurs exactes)

$h$	Constante de Planck	$6,626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J Hz}^{-1}$
$c$	Vitesse de la lumière dans le vide	$299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$
$\Delta\nu_{\text{Cs}}$	Fréquence hyperfine du $^{133}\text{Cs}$	$9\,192\,631\,770 \text{ Hz}$
$e$	Charge élémentaire	$1,602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}$
$k_{\text{B}}$	Constante de Boltzmann	$1,380\,649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
$N_{\text{A}}$	Nombre d'Avogadro	$6,022\,140\,76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
$R = k_{\text{B}}N_{\text{A}}$	Constante des gaz parfaits	$8,314\,462\,618 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
$K_{\text{cd}}$	Efficacité lumineuse	$683 \text{ lm W}^{-1}$

## Autres constantes physiques

$G$	Constante gravitationnelle	$6,67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
$\epsilon_0$	Permittivité diélectrique du vide	$8,85418781 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
$\mu_0$	Perméabilité magnétique du vide	$1,256637062 \times 10^{-6} \text{ H m}^{-1}$
$m_{\text{e}}$	Masse de l'électron au repos	$9,10938370 \times 10^{-31} \text{ kg}$
$m_{\text{p}}$	Masse du proton au repos	$1,672621923 \times 10^{-27} \text{ kg}$
$m_{\text{n}}$	Masse du neutron au repos	$1,674927498 \times 10^{-27} \text{ kg}$

## Grandeurs physiques

$\gamma$	Conductivité électrique ( $\text{S.m}^{-1}$ )
$\mathcal{E}$	Énergie (J)
$\mathcal{P}$	Puissance (W)
$\nu$	Fréquence (Hz)
$\omega$	Vitesse angulaire, pulsation ( $\text{rad.s}^{-1}$ )
$\vec{B}$	Champ magnétique (T)
$\vec{E}$	Champ électrique ( $\text{V.m}^{-1}$ )
$\phi$	Phase à l'origine (rad)
$\phi_{\text{B}}$	Flux magnétique (Wb)
$C$	Capacité électrique (F)

$e$	f.é.m ou f.c.é.m (V)
$G, g$	Conductance électrique (S)
$i, I$	Intensité électrique (A)
$L$	Auto-inductance (H)
$m$	Masse (kg)
$Q$	Facteur de qualité (sans unité)
$q$	Charge électrique (C)
$R, r$	Résistance électrique ( $\Omega$ )
$T$	Période (s)
$t$	Temps (s)
$u$ ou $U$	Tension électrique (V)
$V$	Potentiel électrique (V)
$W_B$	Énergie stockée dans une bobine (J)
$W_E$	Énergie stockée dans un condensateur (J)
$Y$	Admittance (S)
$Z$	Impédance électrique ( $\Omega$ )
$\varepsilon_r$	Permittivité diélectrique relative (sans unité)

### Symboles mathématiques

$\stackrel{\text{def}}{=}$	Relation de définition
$\sim$	Égal en ordre de grandeur
$A \gg B$	$A$ très grand devant $B$
$A \ll B$	$A$ très petit devant $B$
$\bar{f}$	Moyenne temporelle de $f(t)$
$f_{pp}$	Amplitude crête-à-crête du signal $f(t)$
$f_{rms}$	Valeur efficace du signal $f(t)$
$\frac{df}{dt}$	Dérivée première par rapport au temps
$\frac{d^n f}{dt^n}$	Dérivée n-ième par rapport au temps
$\underline{z}$	Grandeur complexe
$\underline{z}^*$	Complexe conjugué
$\text{Re}(\underline{z})$	Partie réelle de $\underline{z}$
$\text{Im}(\underline{z})$	Partie imaginaire de $\underline{z}$
$\arg(\underline{z})$	Argument de $\underline{z}$

$\int_{\mathcal{D}}$	Intégration sur un domaine $\mathcal{D}$
$\int_C \vec{A}(M) \cdot d\vec{\ell}$	Circulation de $\vec{A}$ le long du circuit C
$\iint_S \vec{A}(M) \cdot \vec{n} dS$	Flux d'un champ vectoriel $\vec{A}$



2023