ECOLE SUPERIEURE
ET D' APPLICATION
DES TRANSMISSIONS

DIRECTION
GENERALE
DE LA FORMATION

COURS PAR
CORRESPONDANCE

Cours par correspondance

Préparatoire à l'EA2/FS/du BSTAT

Domaine SIC

ELECTRICITE *(continu et alternatif)*

Site du Cours Par Correspondance
www.esat.terre.defense.gouv.fr/services/cpc/default.htm

.TABLE DES MATIERES

.

1. LOI DE JOULE

1. DEFINITION :

La quantité de chaleur dégagée dans un conducteur par un courant constant est :

a) proportionnelle à la durée du passage du courant ;
b) proportionnelle au carré de l'intensité du courant ;
c) variable avec le conducteur.

2. EXPRESSIONS DE LA LOI DE JOULE :

2.1. Expression énergétique :

$$\boxed{W=RI^2t} \quad (1)$$

W en joule (J) ; R en ohm (Ω) ; I en ampère (A) ; t en seconde (s) .

C'est l'énergie électrique transformée en chaleur.

2.2. Expression de la quantité de chaleur libérée par effet joule :

$$\boxed{Q = \frac{W}{4{,}18}}$$

Q en calorie (cal) ; W en joule (J) ; 1 cal = 4,1868 J

N.B.: La calorie est une unité qui ne doit plus être utilisée; la quantité de chaleur s'exprime en Joules (équivalence Chaleur - Energie).

2.3. Expression de la puissance :

Par définition de la puissance : P=W/t donc d'après (1) :

$$\boxed{P=RI^2} \quad (2)$$

Dans la formule (2), si R est exprimé en Ω et I en A, la puissance P s'exprimera en watt (W).

3. EXPRESSION DE LA RESISTANCE D'UN CONDUCTEUR CYLINDRIQUE ET HOMOGENE :

La loi de JOULE nous permet de définir l'unité de résistance (l'ohm) et des résultats expérimentaux nous conduisent à poser la relation :

$$\boxed{R = \rho \frac{l}{s}}$$

dans cette formule la lettre grecque ρ (rô) est la résistivité de la substance. La résistivité est une caractéristique physique de la substance.

Si la résistance est exprimée en Ω, la longueur l en mètre et la section s en mètre carré, la résistivité ρ s'exprime en ohm-mètre dont le symbole est : Ω.m. Ainsi la résistivité d'une substance nous apparaît comme la résistance d'un conducteur (fig 1) cylindrique et homogène, fait de la même substance dont la longueur est 1m et la section $1m^2$.

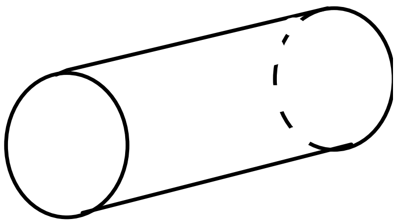


figure 1

Les tables usuelles donnent souvent les résistivités en μΩ cm (10^{-6} Ω cm) (microhm-centimètre) car l Ωm donne un nombre décimal trop petit pour les calculs courants.

Dans ce cas, pour obtenir en ohms la résistance du conducteur considéré, il suffit d'exprimer sa longueur en centimètre et sa section en centimètre carré.

Si l'on veut faire directement le changement d'unités, on a alors à tenir compte que 1 Ω .m=100 Ω.cm .

4. EXEMPLES DE RESISTIVITES :

4.1. Métaux purs :

Les résistivités sont de l'ordre de quelques microhms-centimètres (10^{-8} Ω.m) .

Métal	ρ : Ω.m
Argent	$1{,}5.10^{-8}$
Cuivre	$1{,}6.10^{-8}$
Alumimiun	$2{,}5.10^{-8}$
Fer	$8{,}5.10^{-8}$
Plomb	20.10^{-8}
Tungstène	5.10^{-8}

Il est bon de noter que ces résistivités sont celles des métaux purs considérés. Des traces d'impuretés sont susceptibles d'élever de façon notable la valeur de ρ .

4.2. Alliages :

La résistivité d'un alliage dépend de sa composition qualitative et quantitative. Elle est toujours supérieure à celle des métaux le constituant..

Exemple :

Le maillechort : Cu 60%, Zn 25%, Ni 15% :

$\rho = 30.10^{-8}$ Ω.m

4.3. Carbone :

Le carbone, quoiqu'étant conducteur de l'électricité, possède une résistivité plus élevée que celle des métaux.

Exemples :

Graphite : = 1000.10^{-8} Ω.m
Charbon de cornue : = 5000 à 7000.10^{-8} Ω.m

4.4. Electrolytes :

La résistivité dépend de la nature et de la concentration de la solution. On peut facilement l'exprimer en Ω.cm car elle est plusieurs millions de fois celle des métaux courants. Ainsi pour une solution de H_2SO_4 à 5%, on a : $\rho = 4.8.10^{-2}$ Ω.m

4.5. Isolants :

La résistivité est cette fois considérable et on l'exprime en MΩ.cm (mégohm-centimètre)
= 10^{-6} Ω.cm = 10^4 Ω.m .

Corps	ρ en MΩ.cm
Bois sec	10^4 à 10^6
Paraffine	10^{10} à 10^{13}
Soufre	10^{11}

2. LA LOI D'OHM GENERALISEE

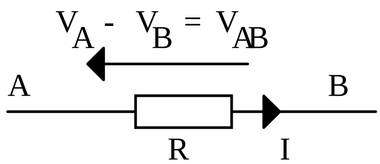
L'objet de ce chapitre est d'établir des règles appelées "lois d'Ohm" qui vont nous permettre de résoudre deux sortes de problèmes :

-Expression de la d.d.p aux bornes d'une portion de circuit comprenant soit des résistances mortes, soit des récepteurs, soit des générateurs, soit enfin un assemblage quelconque de ces divers appareils.

-Calcul de l'intensité du courant dans un circuit fermé en fonction des f.e.m, des f.c.e.m et des résistances.

1. LOI D'OHM RELATIVE A UNE PORTION DE CIRCUIT :

1.1. Tronçon ne contenant qu'une résistance morte :



Sens des flèches : convention du dipôle
I flèché du sens contraire de V

Loi d'Ohm :

$$\boxed{V_A - V_B = V_{AB} = RI}$$

Nous utiliserons cette convention dans toute la suite du cours; la pointe de la flèche représentant la tension correspond au potentiel le plus élevé.

1.2. Tronçon ne contenant qu'un récepteur :

1.21. Etude théorique :

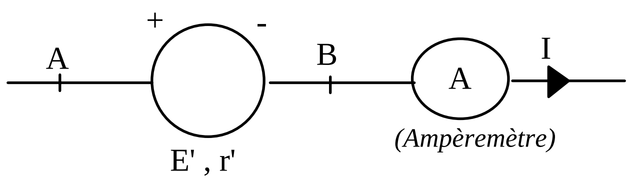


Figure 1

Considérons la portion de circuit représentée sur la figure 1 et appelons E' et r' la f.c.e.m et la résistance interne du récepteur.

L'énergie électrique reçue par le tronçon AB correspond à une puissance électrique :
$P_R = (V_A - V_B) I$.

Une partie de cette puissance est transformée en chaleur par effet Joule et sa valeur est :
$P = r' I^2$. L'autre partie est transformée en une autre forme d'énergie et par définition : $P' = E' I$.

Ecrivons que l'énergie se conserve :

$$\boxed{\textbf{Puissance reçue = Puissance dissipée}}$$

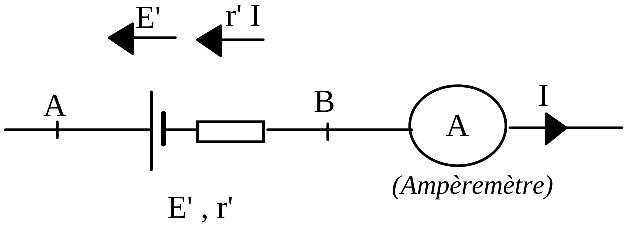
$$(V_A - V_B) I = r' I^2 + E' I$$

soit :

$$\boxed{(V_A - V_B) = r' I + E'} \quad (1)$$

Enoncé de la loi :

La d.d.p aux bornes d'un récepteur de f.c.e.m E' et de résistance interne r', a pour valeur la chute ohmique de tension augmentée de la f.c.e.m, comme le montre le schéma équivalent ci-dessous:



<u>Remarques</u> :

- Si le récepteur est un voltamètre du type à "anode soluble" : ($Cu/Cu^{++},SO_4^{--}/Cu$, par exemple), on a : E' = 0 et $V_A - V_B = r' I$.

- Si le récepteur est un moteur calé et arrêté, on a aussi : E' = 0, et $V_A - V_B = r'I$

<u>1.22. Vérification expérimentale</u> :

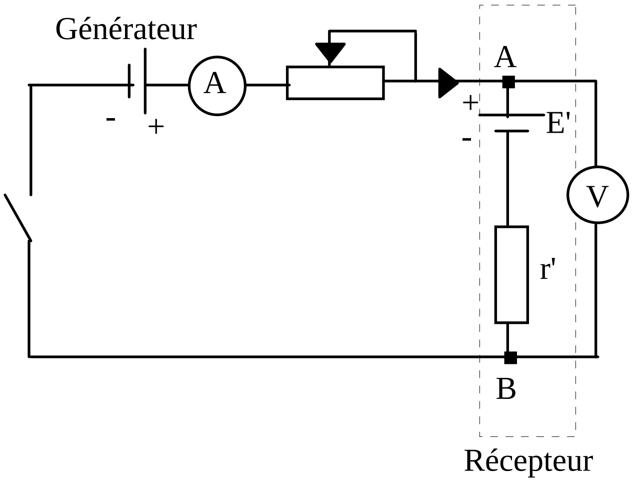


Figure 2

Dans le circuit d'étude de la figure 2, le récepteur est constitué par un accumulateur monté en opposition avec le générateur. Les d.d.p entre A et B étant mesurées avec un voltmètre, on a, pour la courbe donnant ($V_A - V_B$) en fonction de I, une droite de pente r' et d'ordonnée à l'origine E' (figure 3) qui traduit l'expression (1) .

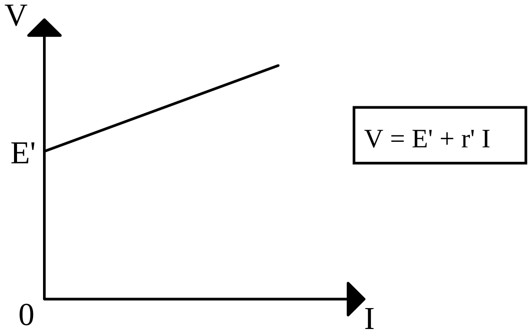


Figure 3

1.3. Tronçon ne contenant qu'un générateur :

1.31. Etude théorique :

Considérons cette fois le circuit de la figure 4, dans lequel la portion AB est constituée par un générateur de f.e.m E et de résistance interne r, qui est parcourue par le courant d'intensité I .

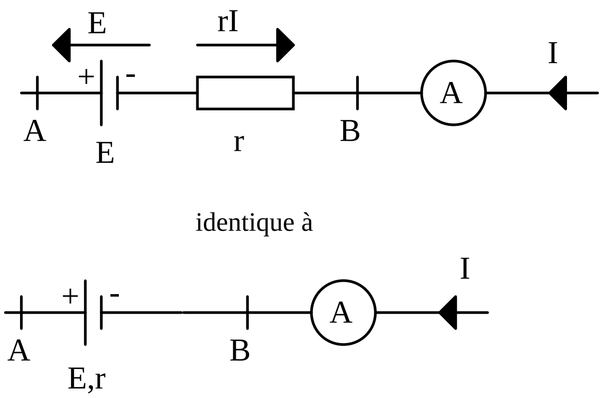


Figure 4

D'après la définition de la f.e.m. (E), le générateur traversé par le courant d'intensité I fournit à la portion une puissance totale : $P_T = E\,I$. Une partie de cette puissance est dissipée par effet Joule dans la portion ; r étant la résistance interne du générateur, on a : $P = r\,I^2$ (effet Joule). L'autre partie est dépensée à l'extérieur : $P' = (V_A - V_B)\,I$.

Ecrivons encore la loi de conservation de l'énergie :
$P_T = P + P'$
$E\,I = r\,I^2 + (V_A - V_B)\,I$
$E = r\,I + (V_A - V_B)$

Nous obtenons ainsi l'expression de la d.d.p aux bornes de la portion mesurée dans le sens du courant électrique à l'intérieur de la portion.

Un voltmètre polarisé (le + du voltmètre étant connecté au + de la source) placé aux bornes A et B de la portion, nous indiquerait la différence :

$$\boxed{V_A - V_B = E - r\,I} \quad (2)$$

Loi :

La d.d.p aux bornes d'un générateur est égale à la f.e.m du générateur diminuée de la chute ohmique de tension dans la portion (ou le générateur).

Remarque :

Le terme rI est nul et par suite ($V_A - V_B = E$) dans le cas où r est très faible (accumulateurs) ou quand I est nul (cas du circuit de la figure 5, où l'interrupteur est ouvert) .

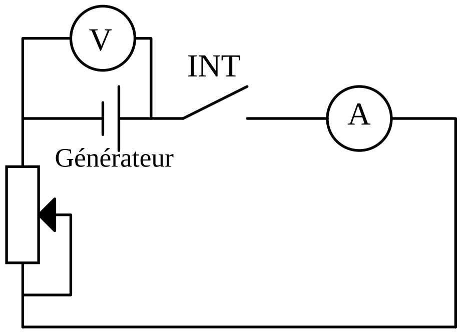


Figure 5

1.32. Etude expérimentale :

On peut vérifier expérimentalement la loi énoncée précédemment avec le montage de la figure 6 :

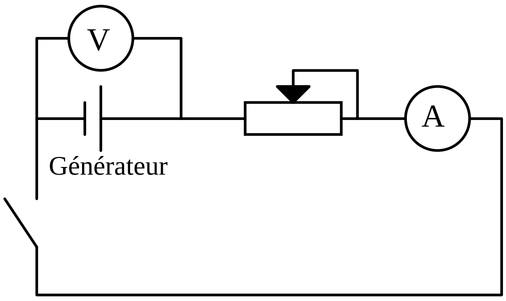


Figure 6

La mesure de V aux bornes du générateur doit se faire avec un voltmètre dont la résistance interne doit être la plus grande possible.

En faisant varier I avec le rhéostat, on note V et on obtient une droite de pente -r et d'ordonnée à l'origine E (figure 7), qui traduit l'expression (2) :

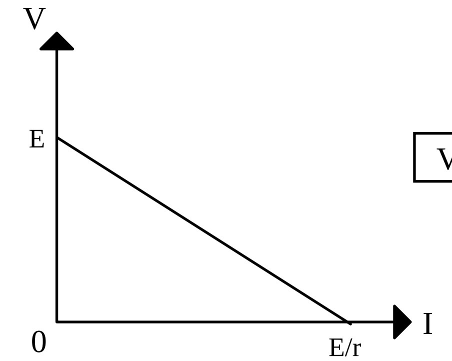


Figure 7

1.4 Tronçon contenant résistances mortes, générateurs et récepteurs :

1.41. Bilan des puissances :

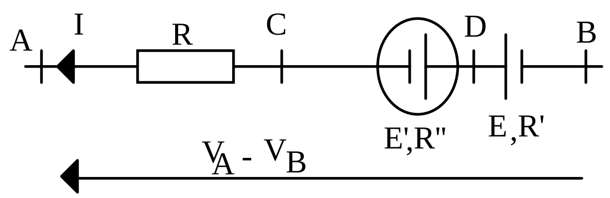


Figure 8

Soit une portion de circuit contenant une résistance morte R, un générateur de f.e.m E et de résistance interne R', un récepteur de f.c.e.m E' et de résistance interne R" .

La résistance R peut être considérée comme la résistance équivalente à un groupement de résistances. De même, le générateur peut être considéré comme un groupement de générateurs et le récepteur comme un groupement de récepteurs.

La portion AB reçoit du générateur la puissance P =EI .
Examinons ce que devient cette puissance :

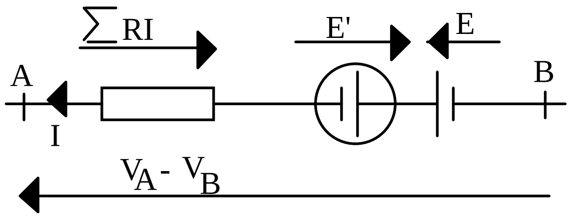
- Une partie est absorbée par effet joule :
$P_1 = RI^2 + R''I^2 + R'I^2 = I^2 \Sigma R$

- Une partie est transformée en une autre forme d'énergie par le récepteur :
$P_2 = E'I$

- Une partie est dépensée dans le circuit extérieur :
$P_3 = (V_A - V_B) I$

en écrivant la loi de conservation de l'énergie :
$P = P_1 + P_2 + P_3$
$EI = I^2 \Sigma R + E'I + (V_A - V_B) I$
soit en simplifiant :

$$\boxed{V_A - V_B = E - E' - I\Sigma R} \quad (3)$$



Méthode pratique : le sens des flèches correspond au signe de la tension.

1.42. Méthode utilisant l'additivité de la d.d.p :

Divisons la portion AB en sous-portions AC, CD, DB (figure 8) et appliquons la loi d'additivité des d.d.p :

$V_A - V_C = - RI$ (1)
$V_C - V_D = - R''I - E'$ (2)
$V_D - V_B = - R'I + E$ (3)

(1) + (2) + (3) = $V_A - V_B = -I\Sigma R - E' + E$

Ce qui est le résultat obtenu au 1) - formule 3 .

2. LOI D'OHM RELATIVE A UN CIRCUIT FERME, LOI DE POUILLET GENERALISEE :

Nous allons cette fois calculer l'intensité du courant qui parcourt un circuit contenant en série générateurs, récepteurs et résistances mortes (figure 9) .

2.1. Expression de l'intensité :

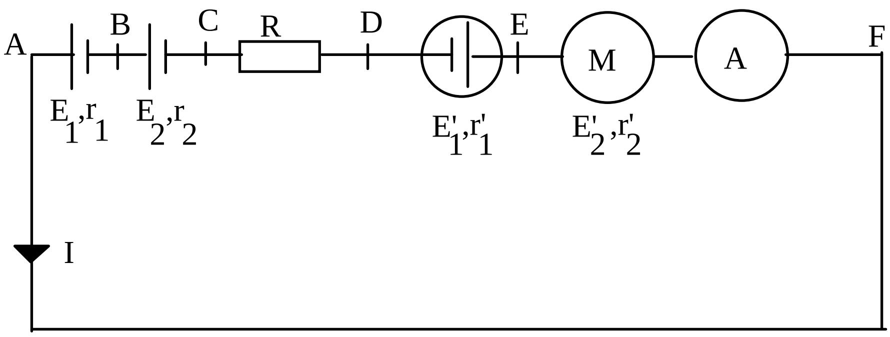


Figure 9

2.11. Bilan des puissances :

Toute l'énergie utilisée dans le circuit provient des générateurs, d'où :

- Puissance fournie par les générateurs :
$P = E_1I + E_2I = I\Sigma E$

- Puissance absorbée par les récepteurs :
$P_1 = E'_1I + E'_2I = I\Sigma E'$

- Puissance absorbée par effet joule :
$P_2 = I^2 (r_1 + r_2 + R + r'_1 + r'_2) = I^2\Sigma R$

La conservation de l'énergie donne :
$P = P_1 + P_2$
$I\Sigma E = I\Sigma E' + I^2\Sigma R$
soit :

$$\boxed{I = \frac{\sum E - \sum E'}{\sum R}} \quad (4)$$

2.12. Méthode des d.d.p :

On divise à nouveau le circuit complet en portions élémentaires (figure 9) auxquelles on applique les lois d'ohm déjà établies :

$V_A - V_B = - r_1I + E_1$
$V_B - V_C = - r_2I + E_2$
$V_C - V_D = - RI$
$V_D - V_E = - r'_1I - E'_1$
$V_E - V_F = - r'_2I - E'_2$
$V_F - V_A = 0$

En additionnant :
$0 = \Sigma E - \Sigma E' - I\Sigma R$
d'où :

$$\boxed{I = \frac{\sum E - \sum E'}{\sum R}} \quad (4)$$

2.2. Etude de quelques cas particuliers :

2.21. Circuit ne contenant qu'un générateur et une résistance :

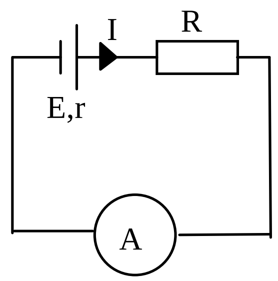


Figure 10

Dans le cas du circuit de la figure 10, la formule 4 nous donne :

$$\boxed{I = \frac{E}{R + r}}$$

Cette formule est aussi connue sous le nom de loi d'**OHM-POUILLET** .

Si par accident, les bornes du générateur sont mises en court-circuit (la résistance R n'intervient plus), on a : $I = E / r$. Comme r est faible, I prend une grande valeur pouvant détériorer le générateur en quelques secondes .

Exemple :

$E = 6V$ et $r = 0.03\ \Omega \Rightarrow I = 6 / 0.03 = 200$ A

2.22. Etude de la puissance délivrée par un générateur :

La puissance dissipée par effet Joule dans la résistance R est égale à :

$$P = RI^2 = \frac{RE^2}{(R + r)^2}$$

en divisant le numérateur et le dénominateur par R, il vient :

$$P = \frac{E^2}{\left(\sqrt{R} + \frac{r}{\sqrt{R}}\right)^2}$$

Pour un générateur donné, E et r sont des données fixes, le dénominateur (et par suite P) varie donc suivant les valeurs de la résistance de charge R : P sera maximale si le dénominateur est minimal . On remarque que le dénominateur est la somme de deux termes : $\sqrt{R}$ et $r/\sqrt{R}$ dont le produit est constant ($\sqrt{R} * r/\sqrt{R}$ = r =constante pour un générateur donné) ; le dénominateur sera minimum quand R = r (on pourra étudier la fonction y = x + a/x) . La puissance P délivrée dans la résistance de charge R est donc maximale quand cette résistance est égale à la résistance interne du générateur. Ce résultat, établi ici dans un cas particulier, est en fait beaucoup plus général.

2.23. Mesure de la force électromotrice d'un générateur :

Un générateur de f.e.m bien constante E débite dans une résistance morte AB. Entre le point A et un point C mobile sur AB, on branche une dérivation comprenant le générateur dont on veut mesurer la f.e.m E' en série avec un galvanomètre G (ampèremètre sensible au micro-ampère). les deux générateurs sont montés en opposition. On déplace C entre A et B jusqu'à ce que le courant qui passe dans le galvanomètre soit nul. A ce moment le circuit EABE est parcouru par un courant :

$$I = \frac{E}{r + R_{AB}}$$

Si R est la résistance de la portion AC, on peut calculer la d.d.p entre A et C de deux façons :

$V_C - V_A$ = RI (loi d'ohm à la portion AC
$V_C - V_A$ = E'; le courant qui passe dans le galvanomètre est nul d'où : E' = RI

On remplace alors le générateur inconnu par un générateur étalon de f.e.m E_0 bien connue, soit C_0 le point C tel que le galvanomètre indique un courant nul et appelons R_0 la résistance de la portion AC_0 (figure 11).

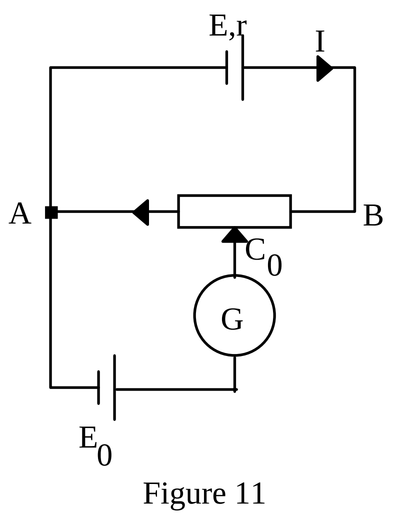


Figure 11

On aurait encore $E_0 = R_0 I$ et comme E et par suite I sont bien constants au cours de ces opérations, on peut écrire :

$$I = E_0/R_0 = E'/R \text{ d'où : } E' = E_0 \,(R/R_0)$$

Connaissant E_0, R et R_0 on en déduit la valeur de E'.

Remarques :

- Si AB est un fil résistant cylindrique et homogène, les résistances $R_{AC} = R'$ et $R_{AC0} = R_0$ sont proportionnelles aux longueurs l et l_0 de AC et AC_0; donc en mesurant ces dernières, on a aussitôt :

$$E_0 = E \frac{l}{l_0}$$

- L'intérêt de la méthode est de s'affranchir de la résistance interne du générateur puisque le courant passant dans E_0 et G est nul et aussi d'obtenir une mesure précise (mesure par méthode de zéro).

3. RESUME :

Nous avons donc établi deux lois importantes qui permettent de résoudre les problèmes rattachés à l'étude des réseaux en courant continu.

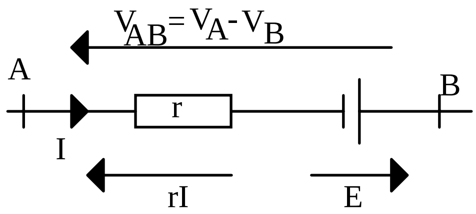
L'intensité du courant qui parcourt un circuit série fermé est de la forme :

$$\boxed{I = \frac{\sum E - \sum E'}{\sum R}}$$

On peut ramener les lois d'ohm donnant la d.d.p aux bornes d'un tronçon de circuit à une seule loi à condition d'utiliser certaines conventions dans sa formulation.

La d.d.p aux bornes d'un tronçon AB, le courant circulant de A vers B, est donnée par la formule générale :

$$\boxed{\mathbf{(V_A - V_B) = r\,I - E}}$$



Avec les conventions suivantes :
E > 0 pour un générateur débitant dans le sens du courant.
E < 0 pour un moteur ou un récepteur.
E = 0 pour une résistance morte.

4. COURANTS DERIVES-APPLICATIONS :

4.1 Définitions :

4.11. Groupement en série :

Divers appareils sont dits groupés en série lorsque la sortie de l'un quelconque d'entre eux est connectée à l'entrée du suivant.Ils sont donc tous parcourus par le même courant. Jusqu'à présent, nous avons toujours travaillé sur des groupements en série et, pour mémoire, nous en donnons le schéma à la figure 12 dans le cas d'un circuit avec générateur, résistance et récepteur.

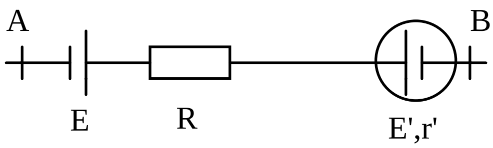


Figure 12

4.12. Groupement en parallèle :

On est souvent amené, dans la pratique, à connecter plusieurs appareils entre deux points donnés d'un réseau. Chacun de ces appareils constitue une dérivation dans le circuit.

Dans l'exemple de la figure 13, la résistance, le générateur et le récepteur qui se trouvent placés entre A et B constituent des dérivations sur le circuit principal (le circuit principal est parcouru par le courant I).

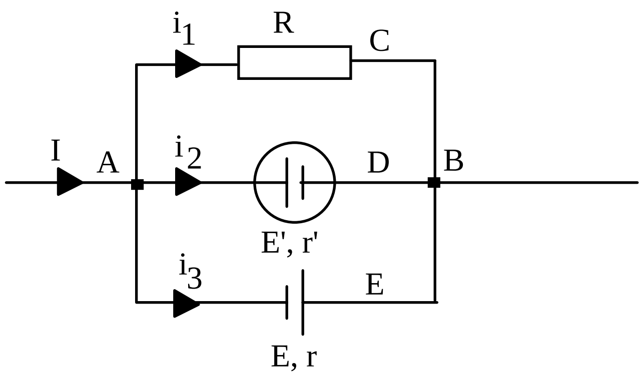


Figure 13

Les points tels que A et B sont appelés des **nœuds** de conducteurs.

Les portions (ACB), (ADB) et (AEB) sont des **branches** ou portions de circuit en dérivation

(ACBDA), (ACBEA) et (ADBEA) sont des **mailles** et l'ensemble constitue un réseau de conducteurs.

I est l'intensité du courant principal (il circule dans le circuit principal) et i_1, i_2, i_3 sont les intensités des courants dérivés.

4.2. Lois générales des courants dérivés - Lois de kirchhoff :

4.21. Loi des nœuds :

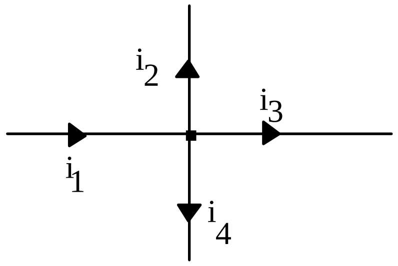
En mesurant l'intensité des courants dans les diverses branches d'un circuit tel que celui de la figure 13, l'expérience montre que :

$$I = i_1 + i_2 + i_3$$

Autrement dit, le courant électrique ne peut s'accumuler en un point; d'où la loi :

La somme des intensités des courants électriques qui arrivent en un point est égale à la somme des intensités des courants électriques qui s'en éloignent.

Exemple :



On aurait ici :
$i_1 = i_2 + i_3 + i_4$

4.22. Loi des d.d.p (ou des tensions) :

Considérons le circuit de la figure 13. Les points A et B sont les extrémités communes aux diverses branches, donc la d.d.p ($V_A - V_B$) est commune (c'est à dire indépendante de la branche considérée), ne dépend que des points A et B, et est indépendante du chemin utilisé.

On vérifie aussi que :

$V_A - V_B = P_1/i_1 = P_2/i_2 = P_3/i_3$ où P_1, P_2 et P_3 sont les puissances consommées dans les diverses branches.

On pourra aussi appliquer à chaque branche les lois d'ohm relatives à un tronçon de circuit : ($V_A - V_B$) sera alors la valeur commune aux trois équations obtenues.

Branche (ACB) $V_A - V_B = Ri_1$
Branche (ADB) $V_A - V_B = r'i_2 + E'$
Branche (AEB) $V_A - V_B = ri_3 - E$

Un voltmètre polarisé placé à l'extérieur du circuit entre A et B indique aussi la valeur ($V_A - V_B$).

Donc en résumé :

La d.d.p aux bornes de plusieurs tronçons montés en parallèle est la même, quel que soit le tronçon considéré.

4.3. Cas particulier important : résistances mortes en parallèle :

4.31. Loi des intensités :

On se propose d'examiner maintenant ce qui se passe dans un cas tout à fait particulier de circuit dérivé : celui dans lequel les dérivations sont formées uniquement de résistances mortes. Prenons un circuit à 3 branches, par exemple figure 14.

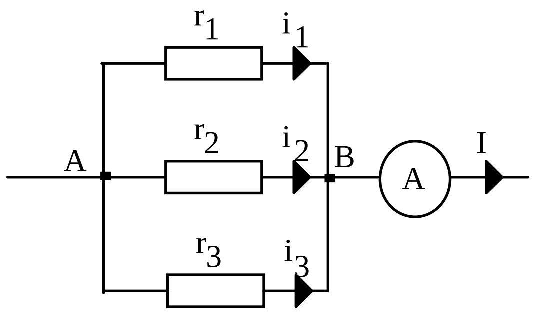


Figure 14

Nous avons vu que : $I = i_1 + i_2 + i_3$

4.32. Loi des d.d.p :

Nous pouvons écrire ici : $V_A - V_B = r_1i_1 = r_2i_2 = r_3i_3$

soit en posant $V=V_A - V_B$ pour la valeur commune de la tension aux bornes des trois branches :

$i_1 = V / r_1$, $i_2 = V/r_2$, $i_3 = V/r_{,3}$

Nous constatons que les intensités sont inversement proportionnelles aux résistances.

4.33. Conséquence : notion de résistance équivalente :

a)Définition :

On peut définir la résistance équivalente aux trois résistances considérées comme étant la résistance unique qui, placée entre A et B en remplacement de r_1, r_2 et r_3 ne modifie pas la tension entre A et B et l'intensité du courant dans le circuit principal.

Appelons R_e une telle résistance, nous aurions donc (figure 15) :

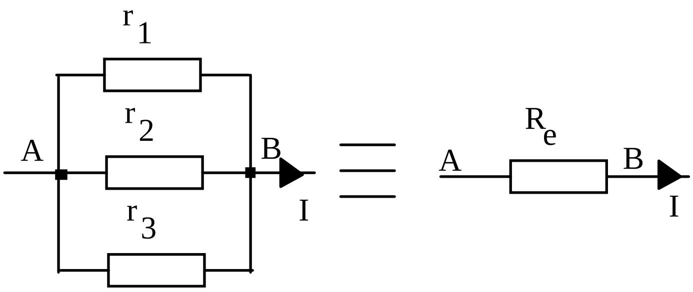


Figure 15

b) Calcul de la résistance équivalente :

On a vu que :

$I = i_1 + i_2 + i_3$ (1)

$V = V_A - V_B = r_1 i_1 = r_2 i_2 = r_3 i_3$ (2)

Par définition de R_e, on peut écrire :

$V = V_A - V_B = R_e I$ (3)

Tirons de (2)les valeurs des courants :

$i_1 = V/r_1$, $i_2 = V/r_2$, $i_3 = V/r_3$ et reportons dans (1) :

$I = V/r_1 + V/r_2 + V/r_3$; or (3): $I = V/R_e$ d'où :

$V / R_e = V/r_1 + V/r_2 + V/r_3$ il suffit de simplifier par V (car V est différent de zéro), d'où :

$$\boxed{\frac{1}{R_e} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}}$$

Loi :

La résistance équivalente à plusieurs résistances mortes placées en parallèle est telle que son inverse est égal à la somme des inverses des résistances mortes constituant le faisceau.

Ainsi, pour un nombre (n) de résistances on a :

$$\boxed{\frac{1}{R_e} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + ... + \frac{1}{r_n}} \quad (5)$$

c) Définition de la conductance :

On appelle conductance l'inverse de la résistance d'un conducteur. La loi (5) peut donc se formuler ainsi :

- La conductance équivalente à un faisceau de résistances mortes en parallèle est égale à la somme des conductances des différentes branches du faisceau.

On représente souvent par G la conductance d'un conducteur ($G = 1 / R$), donc :

$$\boxed{\mathbf{G_e = g_1 + g_2 + ... + g_n}}$$

où $Ge = 1/R_e$, $g_1 = 1/r_1 .... g_n = 1/r_n$

d) Cas particulier :

Dans le cas où toutes les résistances placées en parallèle ont la même valeur, on obtient une forme simple pour la résistance équivalente.

Prenons n résistances de valeur r, on a pour la résistance équivalente :

$$\boxed{\frac{1}{R_e} = \frac{n}{r} \quad \text{donc} \quad R_e = \frac{r}{n} \quad \text{ou} \quad G_e = ng}$$

Remarque :

Le **SIEMENS** est l'unité de conductance (symbole : S)

<u>5. LES LOIS DE KIRCHHOFF :</u>

Le but de ce chapitre est d'exposer une méthode simple et systématique d'étude d'un groupement, aussi complexe soit-il, d'appareils électriques, résistances, générateurs et récepteurs.

En effet, il est possible de calculer les intensités dans chacune des parties du circuit en appliquant les règles suivantes, connues sous le nom de lois de **KIRCHHOFF.**

<u>5.1. Définitions</u> :

<u>5.11. Circuit électrique ou réseau</u> :

C'est le groupement de conducteurs, de résistances, de générateurs, de moteurs électriques et de voltamètres.

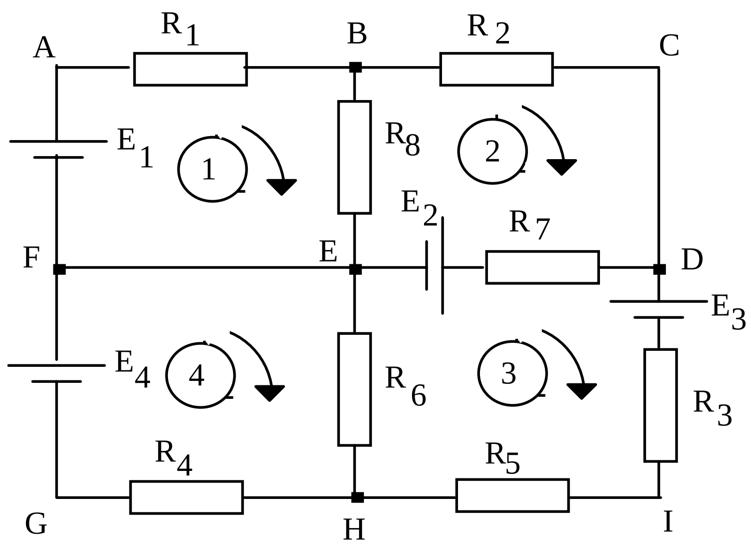


Figure 16

<u>5.12. Nœud</u> :

Un nœud est un point où se raccordent les conducteurs du réseau.

Pour le réseau proposé à la figure 16, B est un noeud de ce réseau; A n'est pas un nœud.

5.13. Maille :

Une maille est un ensemble de conducteurs et d'éléments électriques constituant un circuit fermé, chaque nœud n'étant parcouru qu'une fois.

Ainsi, le trajet ABEFA constitue une maille; le trajet ABCDEBA ne constitue pas une maille.

5.14. Branche extérieure :

Une branche extérieure relie deux nœuds placés à la périphérie du réseau.

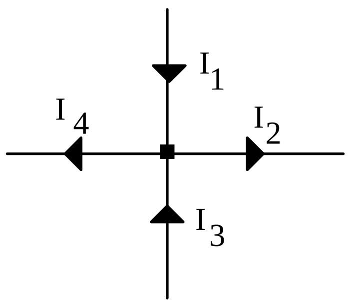
Ainsi DH est une branche extérieure.

5.15. Branche commune à deux mailles :

Une telle branche relie deux nœuds, les éléments électriques et les conducteurs étant communs à deux mailles.

Ainsi, la branche ED est commune aux deux mailles BCDEB et EDIHE.

5.2. Première loi : loi des nœuds :



En un nœud, la somme des courants qui en partent est égale à la somme des courants qui y arrivent. Ou encore : la somme algébrique des courants en un nœud est nulle.

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4$$

En convenant d'affecter le signe + aux intensités des courants qui se dirigent vers le nœud et le signe - aux intensités des courants qui s'en éloignent, on a :

$$I_1 + I_3 - I_2 - I_4 = 0$$

Soit d'une façon plus générale :

$$\boxed{\sum I = 0}$$

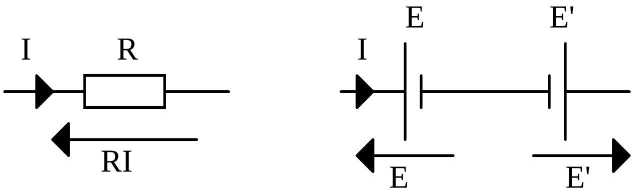
5.3. Deuxième loi : loi des mailles :

Après avoir choisi arbitrairement un sens de parcours de la maille, on peut appliquer à celle-ci la loi d'ohm généralisée.

$$\boxed{\sum E = \sum RI}$$

La somme algébrique des f.e.m ou f.c.e.m est égale à la somme algébrique des chutes de tension avec les conventions suivantes :

a) On représente la tension aux bornes de chaque composant en appliquant la convention du dipôle:



b) On choisit une maille et on représente son sens de parcours par une flèche.

c) On écrit ensuite que la somme des tensions la long de la maille est nulle, avec les conventions suivantes :

- Signe + pour une tension si le sens de la flèche est le même que celui du sens de parcours de la maille.
- Signe - dans le cas contraire.

5.4. Application : étude d'un circuit quelconque :

La méthode présentée ci-dessus n'est pas unique ; mais elle présente l'avantage d'être systématique, donc ordonnée et, de plus, elle mène à des résultats simples à énoncer. Un exemple traité dans le détail permet d'exposer la démarche à suivre..

5.41. Schéma :

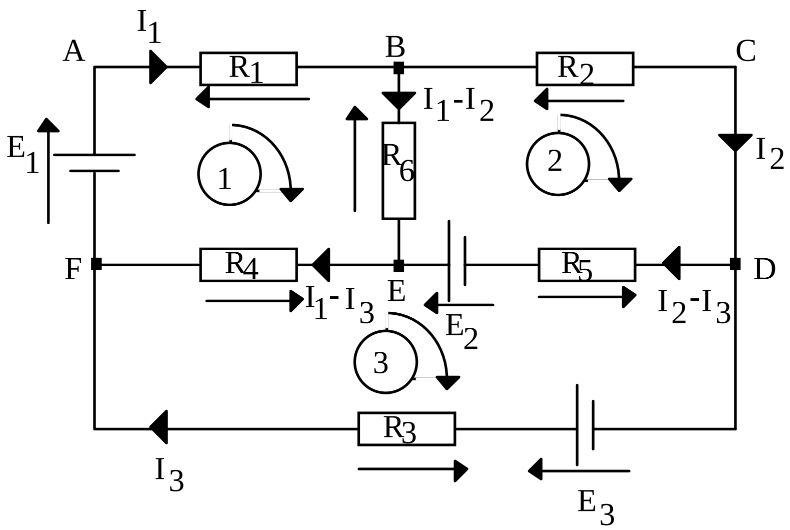


Figure 17

5.42. Choix des mailles :

On dit que deux mailles sont adjacentes si elles sont extérieures l'une à l'autre et si elles n'ont qu'une branche commune. Les mailles adjacentes apparaissent alors tout naturellement sur le dessin. On oriente toutes les mailles dans le même sens (sens horaire, par exemple).

Sur la figure 17, les mailles 1, 2 et 3 sont respectivement ABEFA, BCDEB, FEDF parcourues dans le sens indiqué.

5.43. Choix des courants :

Nous choisissons comme courants inconnus les courants (dit courants de maille) parcourant les éléments des branches extérieures des mailles considérées ci-dessus. Le sens adopté est le même que celui adopté pour les mailles.

Ainsi, les courants choisis sont I_1 parcourant AB, I_2 parcourant BC et I_3 parcourant DF. Nous avons donc autant d'inconnues que de mailles, nous devons donc écrire autant d'équations, ce qui est obtenu en appliquant la deuxième loi de KIRCHHOFF aux mailles considérées.

5.44. Mise en équation :

La deuxième loi de KIRCHHOFF permet d'écrire respectivement pour les mailles 1, 2 et 3 :

Maille 1 : $- R_1I_1 - R_6(I_1 - I_2) - R_4(I_1 - I_3) + E_1 = 0$
Maille 2 : $- R_2I_2 - R_5(I_2 - I_3) + R_6(I_1 - I_2) + E_2 = 0$
Maille 3 : $- R_3I_3 + R_4(I_1 - I_3) + R_5(I_2 - I_3) + E_3 - E_2 = 0$

Le système peut encore s'écrire :

$(R_1 + R_4 + R_6)I_1 - R_6I_2 - R_4I_3 = E_1$
$- R_6I_1 + (R_2 + R_5 + R_6)I_2 - R_5I_3 = E_2$
$- R_4I_1 - R_5I_2 + (R_3 + R_4 + R_5)I_3 = E_3 - E_2$

5.45. Conclusion :

La dernière phase consiste en la résolution de ce système. Pour tout problème, nous pouvons adopter la méthode proposée ci-dessus ou appliquer directement les résultats démontrés à l'aide de l'exemple précédent.

Règle :

Considérons un circuit à n mailles, l'équation relative à la maille i s'établit comme suit (uniquement dans le cas de mailles adjacentes, orientées dans le même sens) :

- Le coefficient du courant de maille i est égal à la somme des résistances constituant la maille i.

- Le coefficient du courant de maille j est égal à l'opposé de la résistance commune aux mailles i et j.

- En parcourant la maille i dans le sens choisi, les f.e.m sont comptées positives si les générateurs sont traversés du pôle - vers le pôle +, négatives dans le cas contraire.

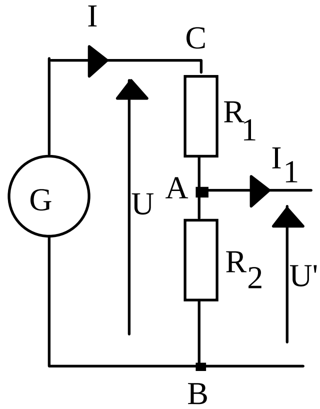
Cette règle permet d'établir les n équations du système.

5.5. Pont diviseur de tension :

Théorème :

Dans un circuit alimenté par une différence de potentiel U et comprenant des résistances en série, la tension de sortie aux bornes d'une des résistances est égale à la tension d'alimentation U multipliée par la résistance de sortie et divisée par la somme des résistances en série.

Soit U' la tension entre les bornes A et B, appelons I l'intensité circulant dans le circuit :

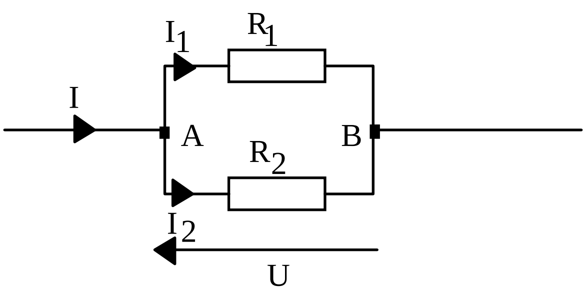


$U = (R_1 + R_2)I$; $I = U / (R_1 + R_2)$
$U' = R_2 I$
d'où :

$$\boxed{U' = U\frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

ATTENTION : pour appliquer le théorème il faut $I_1 << I$.

5.6. Pont diviseur d'intensité :



$U = RI$ avec $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$;
$R = R_1R_2/(R_1 + R_2)$
$I = I_1 + I_2$
$U = R_1I_1 = R_2I_2 = RI$
d'où : $i_1 = RI/R_1$ et $I_2 = RI/R_2$ d'où on tire :

$I_1 = I\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$	$I_2 = I\dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$

5.7. Théorème de Thévenin :

Tout ensemble de f.e.m (continues ou variables), de résistances (ou d'impédances) utilisé par l'alimentation d'une charge Z à partir de deux de ses bornes A et B peut être remplacé par un générateur ayant une f.e.m E_V et une impédance Z_i avec :

Ev : tension entre A et B en l'absence de charge (c'est donc la tension à vide mesurée aux bornes A et B).

Zi : impédance présentée par l'ensemble entre les bornes A et B lorsqu'on a supprimé les f.e.m des générateurs, mais en conservant leurs impédances internes.

Exemple :

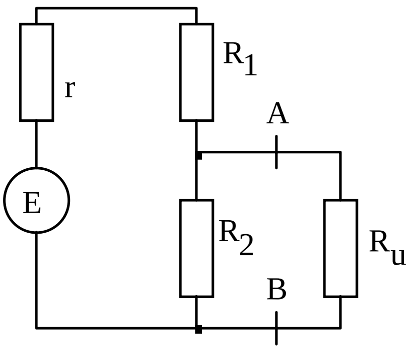


Figure 18

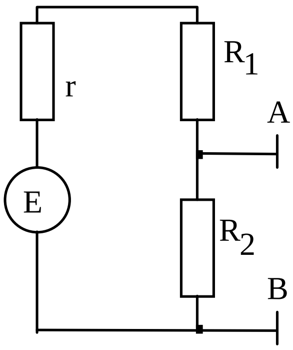


Figure 19

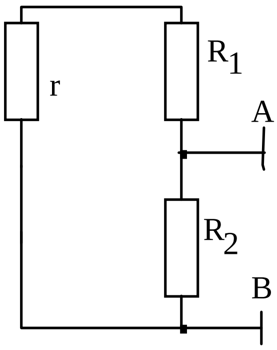


Figure 20

a) Soit le montage de la figure 18 :
Enlevons la charge R_u, on obtient le montage de la figure 19.

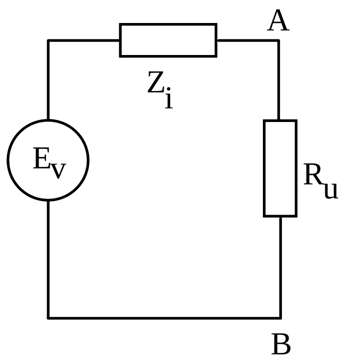
b) Exprimons E_V (tension à vide, c'est à dire la tension entre A et B) à l'aide de la formule du pont diviseur de tension :

$$E_V = E\frac{R_2}{r + R_1 + R_2}$$

c) Puis on remplace la f.e.m par un court-circuit (figure 20).
On exprime alors la résistance équivalente entre A et B (notée Z_i).
R_2 est en parallèle sur (r + R_1) donc :

$$Z_i = \frac{(r + R_1)R_2}{r + R_1 + R_2}$$

Donc le montage de la figure 18 est équivalent au schéma suivant :



Déterminons la tension V_{AB} (tension entre les bornes A et B) :

$$V_{AB} = E_V \frac{R_u}{R_u + Z_i}$$ (c'est la formule du pont diviseur de tension)

avec $E_V = E\frac{R_2}{r + R_1 + R_2}$ et $Z_i = \frac{(r + R_1)R_2}{r + R_1 + R_2}$

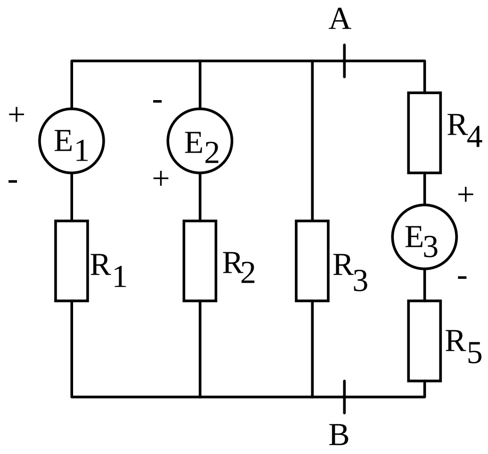
<u>5.8. Théorème de Millmann</u> :

Si entre deux points A et B d'un circuit, constitué par plusieurs branches en parallèle, chaque branche comporte des f.e.m en série avec des résistances (ou impédances), la tension entre les points A et C est égale au rapport de la somme algébrique des produits des f.e.m par les admittances (ou conductances)de chaque branche sur la somme des admittances ; en comptant par exemple les f.e.m positives si leur pôle + est situé du côté du point A et négatives si leur pôle + est situé du côté du point B, ce qui se traduit par la relation:

$$\boxed{V_{AB} = \frac{\sum EY}{\sum Y}}$$

(Y= admittance = 1/impédance)

<u>Exemple</u> :



$\sum Y = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + 1/(R_4 + R_5)$

$\sum EY = E_1/R_1 + E_2/R_2 + E_3/(R_4 + R_5)$

d'où $V_{AB} = \sum EY/\sum Y$

$$V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_4 + R_5}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}$$

AN : $R_1 = R_3 = 10\Omega$, $R_2 = 15\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $R_5 = 3\Omega$, $E_1 = 20V$, $E_2 = 5V$, $E_3 = 8V$

d'où : $\sum Y = 7/15$, $\sum EY = 49/15$ et $V_{AB} = 7V$

5.9. Théorème de Norton :

Tout réseau qui comporte des sources de tension ou de courant et des résistances (ou impédances) entre deux points A et B peut être remplacé par une source de courant qui délivrerait le courant I_{cc} (obtenu lorsque A et B sont court-circuités) et sur laquelle serait montée en parallèle une impédance Z_i représentée par l'ensemble des réseaux entre les bornes A et B lorsque les sources sont éteintes (sources de tensions remplacées par des courts-circuits; sources de courant par des circuits ouverts).

Exemple :

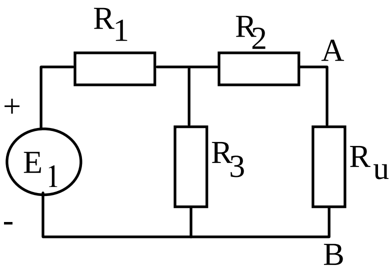


Figure 21

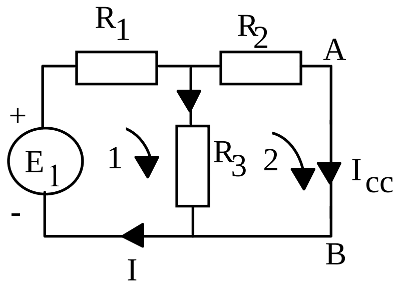


Figure 22

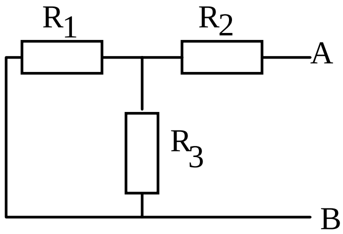


Figure 23

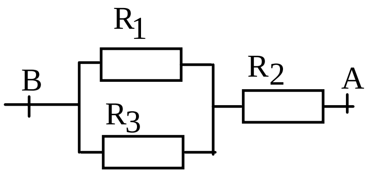


Figure 24

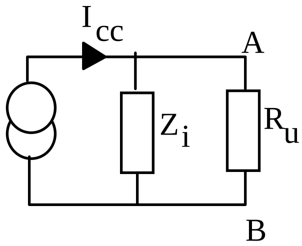


Figure25

Appliquons le théorème de Norton au schéma de la figure 21, R_u étant la résistance de charge.

a) Calcul de I_{cc} :
pour cela court-circuitons entre A et B et appliquons la loi des mailles (figure 22) :

Maille 1 : $E_1 - R_1 I - (I - I_{cc})R_3 = 0$
Maille 2 : $- R_2 I_{cc} + (I - I_{cc})R_3 = 0$

d'où $I_{cc} = \dfrac{R_3 E_1}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - R_3^2}$ s

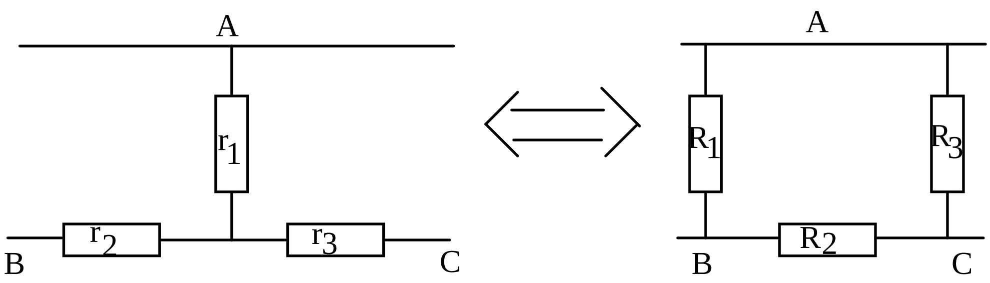
b) Puis calcul de l'impédance Z_i à l'aide du théorème de Thévenin (figure 23 qui est équivalente à la figure 24) :

$Z_i = R_2 + R_1 R_3/(R_1 + R_3)$

d'où, en définitive, le montage de la figure 21 est équivalent au montage de la figure 25.

<u>Attention</u> : le générateur ici délivre un courant constant : donc sa f.e.m n'est pas connue, elle va dépendre de la résistance de charge R_u . En outre le courant qui circule dans la résistance de charge R_u dépend de celle-ci..

<u>5.10. Formules de transformation de Kennelly</u> :



Les formules sont les suivantes :

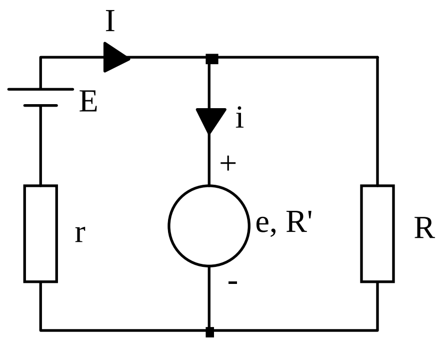
$r_1 = \dfrac{R_1R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$	$R_1 = \dfrac{r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1}{r_3}$
$r_2 = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$	$R_2 = \dfrac{r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1}{r_1}$
$r_3 = \dfrac{R_2R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$	$R_3 = \dfrac{r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1}{r_2}$

6. EXERCICES CORRIGES

EXERCICE n°1 :

Enoncé :

On considère le circuit ci-dessous qui comporte : un générateur de f.e.m constante E et de résistance interne r et deux dérivations, l'une formée d'une résistance R, l'autre d'un moteur de f.c.e.m e et de résistance R'.



1) Calculer les intensités I et i.

2) Entre quelles valeurs peut varier la f.c.e.m du moteur ?

3) Calculer la puissance utile P du moteur en fonction de la f.c.e.m.
Entre quelles limites cette puissance P peut varier lorsque e varie ?
Comment peut-on interpréter cette puissance utile nulle ?

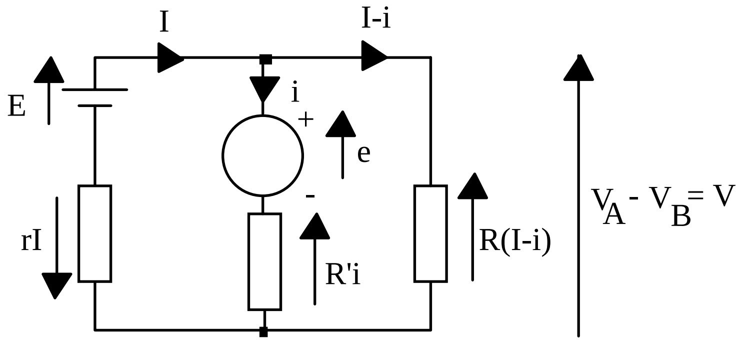
4) Calculer les valeurs précédentes pour :

E = 120V	r = 2Ω
R' = 10Ω	R = 38Ω

5) Calculer les valeurs maxima des intensités i et I lorsque e varie.

6) Si l'on suppose que seule la puissance mécanique est intéressante, quel est le rendement total du circuit lorsque la puissance utile P est maximun ?

Corrigé :



1) Le courant dans la résistance R est I - i.
Exprimons de trois façons la tension entre A et B :

- Aux bornes du générateur : V = E - rI (1)
- Aux bornes du moteur : V = e + R'i (2)
- Aux bornes de la résistance R : V = R(I - i) (3)

Egalons les relations : (1) et (2); (1) et (3),

soit le système à deux inconnues :

(R + r)I - Ri = E
rI + R'i = E - e

d'où nous tirons

$I = \dfrac{E\left(R + R'\right) - eR}{\left(rR' + RR' + rR\right)}$
$i = \dfrac{ER - e\left(R + r\right)}{\left(rR' + RR' + rR\right)}$

2) Le moteur doit fonctionner en récepteur : le sens du courant i doit être de A vers B; de même E doit fonctionner en générateur : le sens de I doit être de B vers A. Mathématiquement cela s'exprime en écrivant que les courants I et i circulent dans le sens des flèches, donc que leurs valeurs calculées à partir des formules ci-dessus sont positives :

I > 0 => E(R + R') - eR > 0 => e < E(R + R')/R
i > 0 => ER - e(R + r) > 0 => e < ER/(R + r)

Comparons ces deux nombres en formant la différence :

$$\frac{E\left(R+R'\right)}{R}-\frac{ER}{R+r}=\frac{E\left(RR'+Rr+R'r\right)}{R\left(R+r\right)}>0$$

Il suffit alors que la f.e.m. e satisfasse à la condition la plus limitative, d'où :

$$\boxed{0<e<\frac{ER}{R+r}}$$

3) La puissance utile du moteur est : P = ei, soit

$$\boxed{P=e\frac{ER-e\left(R+r\right)}{rR'+RR'+rR}}$$

Lorsque e varie seul (E et les résistances restent constantes), P est une fonction parabolique de e .

P est nul pour e = ER/(R + r) qui est la limite supérieure de e, et pour e = 0 qui est la limite inférieure.

Le maximum de P est obtenu pour :

$e=\frac{1}{2}\frac{ER}{R+r}$ et vaut :

$$P_M=\frac{E^2R^2}{4\left(R+r\right)\left(rR'+RR'+rR\right)}$$

La puissance varie de 0 à P_m .

La puissance utile est nulle :
- pour e = 0 ce qui signifie que le moteur ne tourne pas. C'est une résistance morte .

- pour e maximum; à ce moment le moteur tourne, mais i est nul. La f.c.e.m du moteur compense la d.d.p à ses bornes. Il ne fournit pas de travail mécanique.. En pratique, les frottements dissiperont une faible puissance, donc la vitesse n'atteindra pas tout à fait la valeur pour laquelle e serait tel que : i = 0 .

4)

$$\boxed{\mathbf{e_m = 120{,}38/41 = 114V}}$$

La puissance maximun est obtenue pour e = 57V, elle vaut :

$$\boxed{P_M = \frac{(120)^2(38)^2}{4.40(20+380+76)} = 273W}$$

5) I et i sont maxima lorsque e est nul.

Ces maxima sont :

$$\boxed{I_M = \frac{ER}{rR' + RR' + rR} = \frac{120.38}{476} = 9{,}58A}$$

$$\boxed{I_M = \frac{E(R+R')}{rR' + RR' + rR} = \frac{120.48}{476} = 12{,}1A}$$

6) La puissance utile est P, la puissance fournie est EI. Le rendement est :

$$x = \frac{P}{EI} = \frac{e}{E}\frac{ER - e(R+r)}{E(R+R') - eR}$$

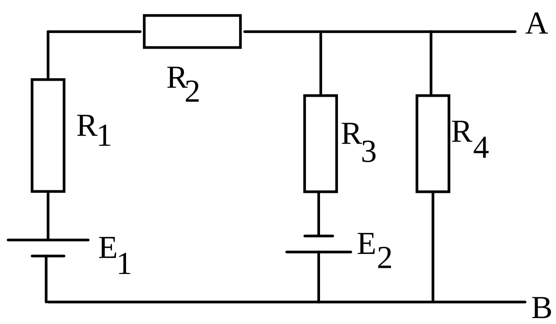
Lorsque P = P_m, $e = \frac{1}{2}\frac{ER}{R+r}$ et le rendement vaut :

$$\boxed{x_0 = \frac{R^2}{4(R+R')(R+r) - 2R^2}}$$

Il est indépendant de E et vaut : $x_0 = 0{,}30$

EXERCICE n°2 :

Enoncé :

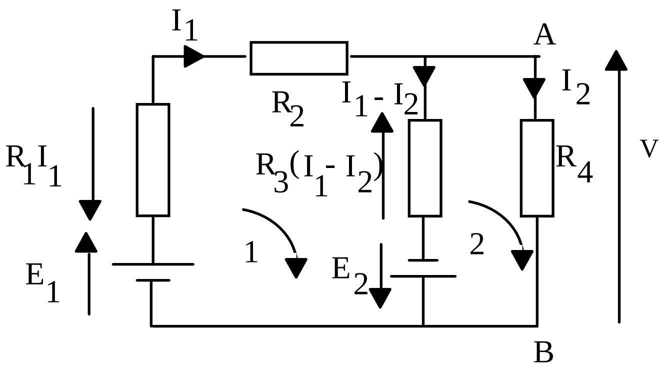


$R_1 = R_3 = 2\Omega$ $R_2 = 1\Omega$ $R_4 = 3\Omega$ $E_1 = 1V$ $E_2 = 2V$

En appliquant les lois de Kirchhoff, calculer les courants circulant dans les deux boucles ?

calculer la différence de potentiel $V_A - V_B = V$

Corrigé :



Application du cours :

- Sens de parcours des boucles.
- Choix des courants de boucle : I_1 et I_2 (ne pas prendre le courant parcourant la branche commune aux deux boucles). Le sens choisi pour I_1 et I_2 est celui des boucles.
- Courant dans la branche commune : $I_1 - I_2$.
- Représentation des tensions aux bornes de chaque composant.
- Ecriture des lois des mailles :

Maille 1 : $E_1 - R_1I_1 - R_2I_1 - R_3I_1 + R_3I_2 + E_2 = 0$

Maille 2 : $- E_2 + R_3I_1 - R_3I_2 - R_4I_2 = 0$

NB : On aurait pu, dès le départ, remplacer les résistances de R_2 et R_1 par une résistance unique $R = 3\Omega$.

Soit le système à résoudre :

$I_1(R_1 + R_2 + R_3) - R_3 I_2 = E_1 + E_2$
$I_1 R_3 - (R_3 + R_4) I_2 = E_2$
Noter que le système illustre la règle données au paragraphe 5.45.

Une résolution linéaire est source d'erreur. L'application numérique se fera dès la mise en équation:

$5I_1 - 2I_2 = 3$
$-2I_1 + 5I_2 = -2$

On en déduit :

$I_1 = 0{,}52$ A
$I_2 = -0{,}19$ A

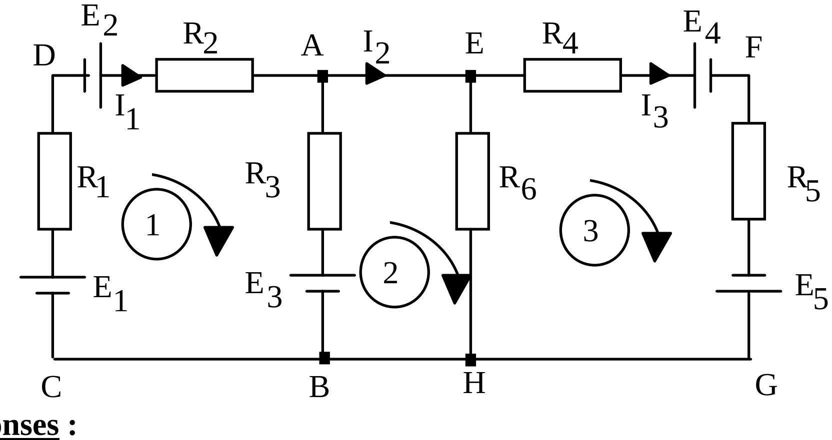
Le signe (-) pour I_2 indique que le sens réel du courant est inverse de celui choisi arbitrairement au départ .
La différence de potentiel aux bornes de A et B est donnée par la loi d'ohm :

$$\boxed{\mathbf{V = R_4 I_2 = -\ 0{,}57V}}$$

EXERCICE n°3 :

Enoncé :
Calculer les courants dans les branches AB et FG du circuit ci-dessous :

A.N :		
	$E_1 = 1V$	$R_1 = 2\Omega$
	$E_2 = 2V$	$R_2 = 3\Omega$
	$E_3 = 4V$	$R_3 = 5\Omega$
	$E_4 = 3V$	$R_4 = 4\Omega$
	$E_5 = 1V$	$R_5 = 1\Omega$
		$R_6 = 2\Omega$



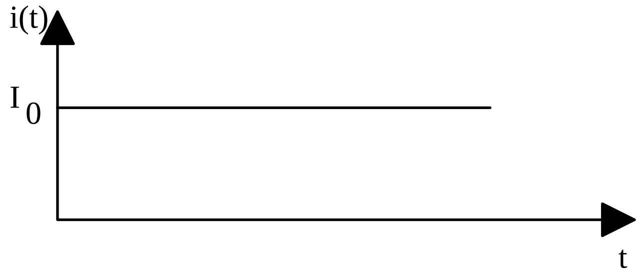
Réponses :

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{I_1 = 273\ mA\ ;\ I_2 = 745\ mA\ ;\ I_3 = -73\ mA} \\ \mathbf{I_{AB} = 472\ mA\ (courant\ dirigé\ de\ B\ vers\ A)} \\ \mathbf{I_{FG} = 73\ mA\ (courant\ dirigé\ de\ G\ vers\ F).}\end{array}}$$

COURANT ALTERNATIF $1^{ère}$ partie

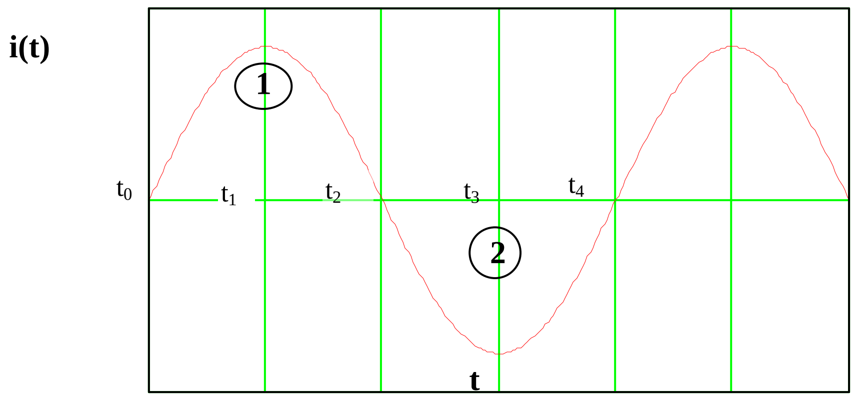
1. DEFINITION DU COURANT ALTERNATIF :

Nous n'avons considéré jusqu'ici que des courants d'intensité constante. Le courant alternatif est un courant d'intensité variable en fonction du temps . Nous pouvons représenter le courant continu par une droite :



Le courant a une valeur constante I_0 en fonction du temps.

Par analogie, nous devrons représenter le courant alternatif sinusoïdal par une courbe sinusoïde :



- Au temps t_0 l'intensité est nulle.
- Au temps t_1 l'intensité est maximun, le courant se déplace dans un sens dans le conducteur
- L'intensité diminue pour redevenir nulle au temps t_2 .
- Puis elle augmente à nouveau, mais elle a changé de signe : le courant sera maximun en t_3 mais dans l'alternance 2 (contraire de 1).
- Elle diminue pour devenir nulle en t_4, et le cycle recommence.

On appelle **période** du courant alternatif, le temps que met le courant pour parcourir un cycle, c'est-à-dire l'alternance 1 et l'alternance 2.

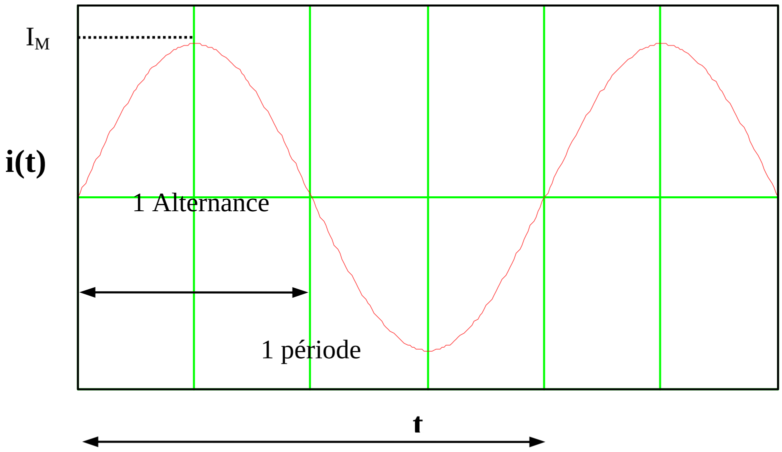
Dans l'exemple précédent, la période s'étend de t_0 à t_4, on la représente par la lettre T.

On appelle **fréquence** du courant alternatif, le nombre de périodes par seconde. On la représente par la lettre F .

La courbe (sinusoïdale) représentant le courant alternatif sinusoïdal a pour équation

$$i(t) = I_M \sin(\omega t + \phi)$$

- $i(t)$ = intensité à chaque instant : c'est la valeur instantanée. Elle peut être positive ou négative, selon que le courant va dans un sens ou dans l'autre.
- I_M = intensité maximale.
- ω = pulsation exprimée en rad/s. Nous avons $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$.
- $\omega t + \phi$ = phase .
- ϕ = phase initiale pour $t = 0$.



Le courant alternatif sera provoqué par une tension alternative sinusoïdale qui a pour équation :

$$\boxed{v(t) = V_M \sin(\omega t + \phi')}$$

- $v(t)$ = valeur instantanée de la tension.
- V_M = valeur maximale ou amplitude de la tension .
- $\omega t + \phi'$ = phase de la tension : elle peut être différente de la phase du courant traversant le circuit.
- ϕ' = phase initiale à l'instant $t = 0$.

On appelle **intensité efficace** d'un courant alternatif, l'intensité d'un courant continu qui, dans le même circuit et dans le même temps, produirait le dégagement d'une même quantité de chaleur.

Pour un courant alternatif sinusoïdal, nous avons :

$$\boxed{I_{eff} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}}$$

Les appareils de mesure (ampèremètre et voltmètre alternatifs) indiquent toujours la valeur efficace du courant ou de la tension.

2. HYPOTHESES DU COURANT ALTERNATIF :

Nous étudions en courant alternatif des circuits dans lesquels circulent des courants alternatifs.

Aux bornes des éléments du circuit, nous aurons des tensions alternatives. Dans l'étude de ces circuits, il s'agit de connaître des courants ou des tensions inconnus en fonction de courants ou de tensions connus. Pour cela, il faudra déterminer entre les valeurs connues et les valeurs inconnues :

a) l'amplitude des courants et des tensions,
b) le déphasage ou la différence de phase.

Pour les calculs, nous pouvons observer les règles suivantes :

- A un instant t, l'intensité instantanée est la même en tous les points d'un circuit série.
- Les règles du courant continu restent valables pour les courants instantanés.
- Les lois de conservation de l'électricité, d'ohm, de Joule, de Faraday, de Lentz, etc....., sont applicables

3. LOI D'OHM EN COURANT ALTERNATIF :

3.1. Résistances :

Les hypothèses précédentes permettent d'appliquer la loi d'Ohm aux valeurs instantanées :

$$\boxed{v(t) = Ri(t)} \quad (1)$$

Si le courant est de la forme :

$$\boxed{i(t) = I_M \sin(\omega t)}$$

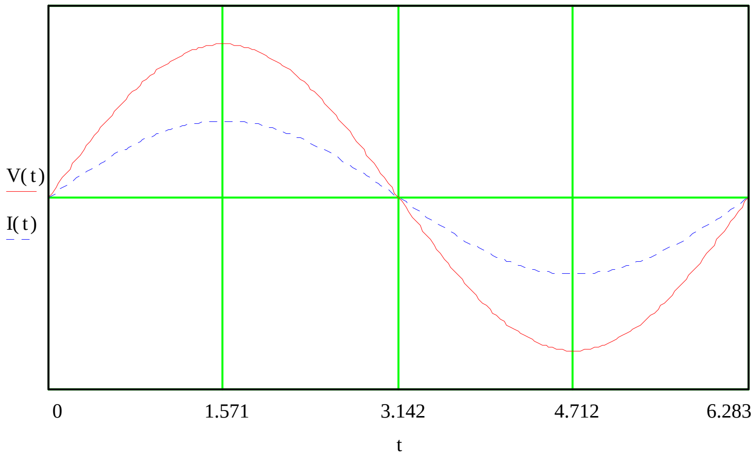
l'équation (1) donne l'expression de la tension :

$$\boxed{v(t) = RI_M \sin(\omega t)}$$

Cette fonction admet :

- amplitude $V_M = RI_M$
- déphasage $\phi = 0$ puisque les phases de la tension et du courant sont identiques.

Les courbes représentatives de v(t) et de i(t) sont visibles ci-dessous:



3.2. Inductance pure :

Les hypothèses précédentes permettent d'appliquer la loi de Lentz aux valeurs instantanées. L'inductance se comporte comme un récepteur de f.c.e.m e(t). Cette dernière s'oppose au passage du courant; le potentiel aux bornes de l'inductance est :

$$v(t) = -e(t) = d\phi/dt = L di(t)/dt$$

puisque $\phi = Li(t)$

Donc :

$$\boxed{v(t) = L\frac{di(t)}{dt}} \quad (2)$$

représente l'équation aux valeurs instantanées.

Si le courant est de la forme :

$$\boxed{\mathbf{i(t) = I_M \sin(\omega t)}}$$

l'équation (2) donne l'expression de la tension :

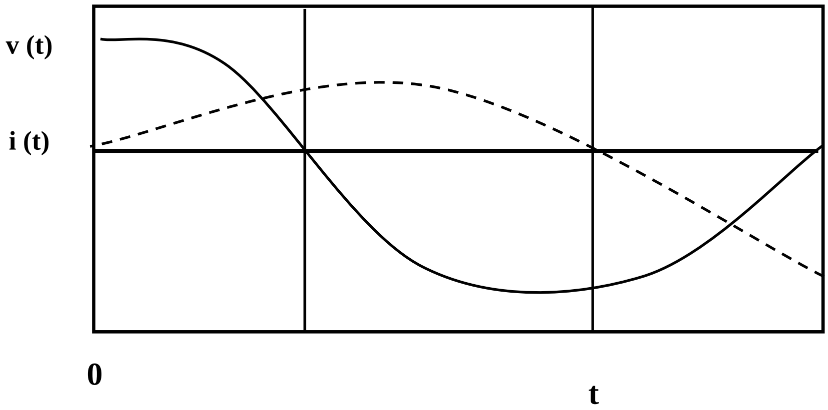
$$\boxed{\mathbf{v(t) = L\omega I_M \cos(\omega t) = L\omega I_M \sin(\omega t + \pi/2)}}$$

Cette fonction sinusoïdale admet pour :

a) amplitude : $V_M = L\omega I_M$
b) déphasage : $\phi = +\pi/2$

On dit que la tension est en avance de $\pi/2$ par rapport au courant dans une inductance pure.

Nous représenterons v(t) et i(t) sur le même graphique en fonction du temps :



3.3. Capacité pure :

On établit en électrostatique la relation q = CV entre la charge et le potentiel aux bornes d'un condensateur.

Pendant un instant très petit, le courant i transporte une très petite quantité d'électricité dq donnée par :

$$dq = i dt$$

En éliminant la charge q entre les deux équations, nous obtenons :

$$\boxed{i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}} \quad (3)$$

qui représente l'équation aux valeurs instantanées.

Si le courant est de la forme :

$$\boxed{\mathbf{i(t) = I_M \sin(\omega t)}}$$

l'équation (3) donne l'expression de la tension :

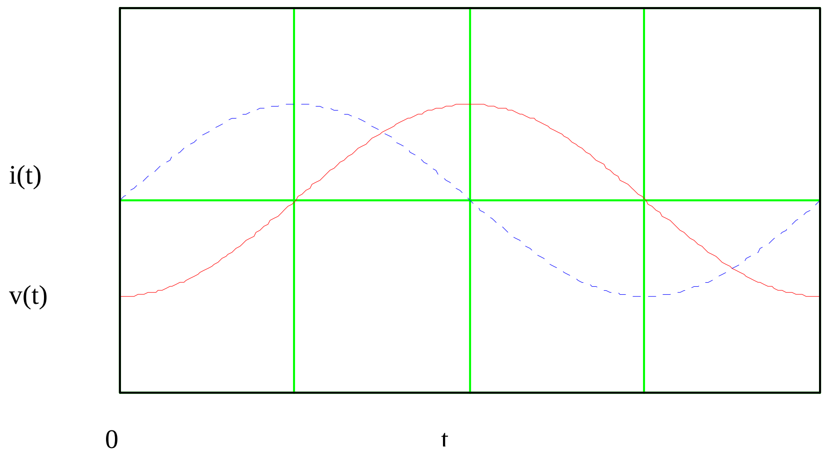
$$\boxed{v(t) = -\frac{I_M}{C\omega}\cos\omega t = \frac{I_M}{C\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Cette fontion v(t) sinusoïdale admet :

a) pour amplitude $V_M = I_M/C\omega$
b) pour déphasage $\phi = -\pi/2$

On dit que la tension est en retard de $\pi/2$ par rapport au courant dans une capacité pure.

Nous représentons Ic(t) et V(t) sur le même graphique :



Exemple : à l'instant t = 0, i(t) = 0; la phase de la fonction v(t) est $-\pi/2$, donc $v(t) = -V_M$, la fonction passe donc par un minimum comme l'indique la courbe.

COURANT ALTERNATIF 2eme partie

1. NOTATIONS COMPLEXES EN ELECTRICITE :

1.1. Généralités :

Considérons un courant sinusoïdal dont l'équation instantanée est :

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \phi)$$

Nous remarquons qu'il est possible d'associer à ce courant réel un courant fictif complexe, noté $\overline{I}$ et qui s'écrit :

$$\boxed{\overline{I} = I_M\left(\cos(\omega t + \phi) + j\sin(\omega t + \phi)\right)}$$

Il est très important de remarquer que cette transformation est simplement un outil mathématique qui facilitera les calculs par la suite.

$\overline{I}$ n'est en aucun cas le courant réel qui traverse le circuit. Pour trouver ce courant réel, il faut prendre la partie réelle de $\overline{I}$ si nous avons posé $i(t) = I_M \cos(\omega t + \phi)$ ou bien la partie imaginaire de, débarrassé de j, si nous avions posé $i(t) = I_M \sin(\omega t + \phi)$.

Nous pouvons opérer la même tranformation pour la tension, en posant :

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \phi)$$

on obtient $\overline{V}$:

$$\boxed{\overline{V} = V_M\left(\cos(\omega t + \phi) + j\sin(\omega t + \phi)\right)}$$

On en déduit que le module du nombre complexe $\overline{I}$ et $\overline{V}$ est l'intensité (ou la tension) maximale du courant (ou de la tension) réel et que l'argument de $\overline{I}$ et $\overline{V}$ est la phase du courant (ou de la tension) réel.

Rappel :
Soit un nombre complexe $y = a + jb$:
le module de y vaut $\sqrt{a^2 + b^2}$
L'argument de y vaut $\arctan(b/a)$.

<u>1.2. Application au cas d'une résistance pure, d'une inductance pure, une capacité pure</u> :

<u>1.21. Résistance pure</u> :

Nous avons vu que, dans ce cas, le courant qui traverse la résistance est en phase avec la tension.

$i(t) = I_M \cos(\omega t)$; on a alors $v(t) = V_M \cos(\omega t)$

On sait que $V_M = RI_M$

On peut donc écrire sous la forme complexe :

$\overline{V} = R\overline{I} = \overline{Z}\overline{I}$

D'où pour une résistance pure :

$$\boxed{\overline{Z} = R}$$

Z s'appelle l'impédance du circuit. $\overline{Z}$ est l'impédance complexe du circuit.
Dans le cas d'une résistance $\overline{Z}$ est réel = Z

<u>1.22. Inductance pure</u> :

Nous avons vu que la tension était en avance de $\pi/2$ sur le courant, c'est à dire que si l'on a :

$i(t) = I_M \cos(\omega t)$, alors $v(t) = V_M \cos(\omega t + \pi/2)$

On sait que $V_M = L\omega I_M$.

Si nous passons en complexe :

$\overline{I} = I_M(\cos\omega t + j\sin\omega t)$ donc :

$$\overline{V} = L\omega I_M\left(\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Transformons l'expression de $\overline{V}$ sachant que :

$\cos(\omega t + \pi/2) = -\sin(\omega t)$
$\sin(\omega t + \pi/2) = \cos(\omega t)$

On obtient :

$$\overline{V} = L\omega I_M(-\sin\omega t + j\cos\omega t)$$

$$\overline{V} = jL\omega I_M(\cos\omega t + j\sin\omega t)$$ sachant que $j^2 = -1$

donc V peut se mettre sous la forme :

$$\overline{V} = jL\omega\overline{I} = \overline{Z}\overline{I}.$$

L'impédance complexe d’une inductance pure est donc :

$$\boxed{\overline{Z} = jL\omega}$$

<u>1.23. Capacité pure</u> :

Nous avons vu que la tension était en retard de $\pi/2$ sur le courant, c'est à dire si l'on a :

$i(t) = I_M \cos(\omega t)$, alors $v(t) = V_M \cos(\omega t - \pi/2)$

On sait que $V_M = \dfrac{I_M}{C\omega}$

Nous obtenons en complexe :

$$\overline{I} = I_M(\cos\omega t + j\sin\omega t)$$

$$\overline{V} = \frac{I_M}{C\omega}\left(\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Transformons $\overline{V}$ sachant que :

$\cos(\omega t - \pi/2) = \sin(\omega t)$
$\sin(\omega t - \pi/2) = -\cos(\omega t)$

On obtient :

$$\overline{V} = \frac{I_M}{C\omega}(\sin\omega t - j\cos\omega t)$$

$$\overline{V} = -j\frac{I_M}{C\omega}(\cos\omega t + j\sin\omega t) = \overline{Z}\overline{I}$$

L'impédance d'une capacité pure est :

$$\boxed{\overline{Z} = \frac{1}{jC\omega} = \frac{-j}{C\omega}}$$

<u>1.24. Conclusion</u> :

On remarque que lorqu'on passe en complexe dans un circuit alternatif, la différence de potentiel aux bornes d'un composant satisfait à la loi d'Ohm complexe.

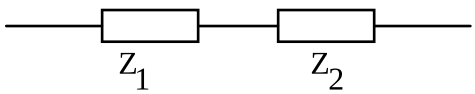
$\overline{V}$ = différence de potentiel aux bornes de l'élément.
$\overline{I}$ = courant traversant cet élément.
$\overline{Z}$ = R pour une résistance
= $jL\omega$ pour une inductance
= $1/(jC\omega)$ pour une capacité

NB : si aucune confusion n'est possible, on peut supprimer la barre sur $\overline{V}$, $\overline{I}$, $\overline{Z}$.

<u>2. IMPEDANCE D'UN CIRCUIT DANS LE CAS GENERAL :</u>

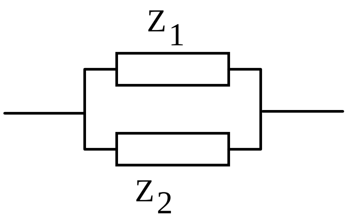
Un circuit ou un réseau complexe sera constitué de plusieurs impédances reliées en série ou en parallèle, d'une façon quelconque. On appliquera la loi sur les associations d'impédances en courant alternatif comme on emploie la loi d'association des résistances en continu sans oublier que l'impédance est un nombre complexe.

- en série :



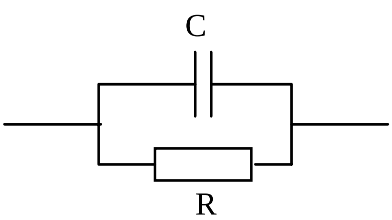
$$\overline{Z}_{total} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2$$

- en parallèle :



$$\frac{1}{\overline{\overline{Z}}_{total}} = \frac{1}{\overline{\overline{Z}}_1} + \frac{1}{\overline{\overline{Z}}_2}$$

<u>Exemple n°1</u> :



$$\frac{1}{\overline{Z}_{Total}} = jC\omega + \frac{1}{R} = \frac{jRC\omega + 1}{R}$$

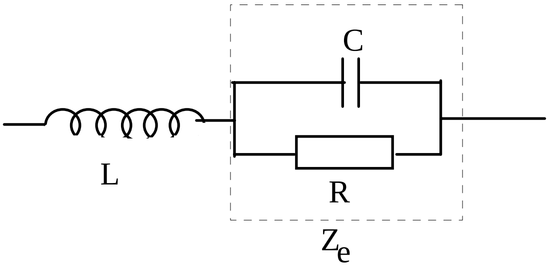
$$\overline{Z}_{total} = \frac{R}{jRC\omega + 1}$$

Il est parfois avantageux de faire disparaître le nombre complexe du dénominateur. Pour cela, il faut multiplier haut et bas par la quantité conjugée du dénominateur.

$$\overline{Z}_{total} = \frac{R}{jRC\omega + 1}\frac{1 - jRC\omega}{1 - jRC\omega} = \frac{R - jR^2C\omega}{1 + R^2C^2\omega^2}$$

Cette expression de $\overline{Z}_{total}$ semble plus compliquée que la précédente mais présente néanmoins quelquefois certains avantages.

Exemple n°2 :



$$\overline{Z}_{total} = \overline{Z}_e + \overline{Z}_L$$

$\overline{Z}_L$ = inductance

$\overline{Z}_e$ = R//C

$$\frac{1}{\overline{Z}_e} = jC\omega + \frac{1}{R} = \frac{1 + jRC\omega}{R}$$

$$\overline{Z}_L = jL\omega$$

$$\overline{Z}_{total} = jL\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega} = \frac{jL\omega(1 + jRC\omega) + R}{1 + jRC\omega} = \frac{(R - RLC\omega^2) + jL\omega}{1 + jRC\omega}$$

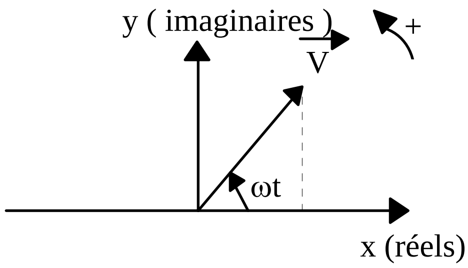
3. REPRESENTATION DE FRESNEL :

Nous avons vu qu'un courant $i(t) = I_M \cos(\omega t)$, ou une tension $v(t) = V_M \cos(\omega t + \phi)$, pouvait être associé à un nombre complexe $\overline{I}$ ou $\overline{V}$ qui le représentait.

Nous pouvons également associer à ce courant, ou à cette tension, un vecteur tournant.

3.1. Pour le courant :

Soit un repère orthonormé : à l'origine des axes se trouve l'origine d'un vecteur $\vec{V}$ de module constant tournant autour de cette origine à une vitesse radiale constante ω dans le sens trigonométrique (inverse des aiguilles d'une montre) .

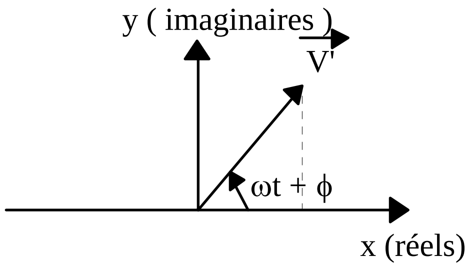


Soit ωt l'angle que fait le vecteur avec l'axe des abscisses.

La projection de ce vecteur sur l'axe des abscisses donne la valeur instantanée du courant : $i(t) = I_M \cos(\omega t)$.

3.2. Pour la tension :

Dans le même repère orthonormé, à l'origine des axes, se trouve l'origine d'un vecteur $\vec{V}'$ de module constant tournant autour de cette origine, à la vitesse radiale constante ω dans le sens trigonométrique.



Soit V_M le module constant de ce vecteur : c'est l'amplitude de la tension.

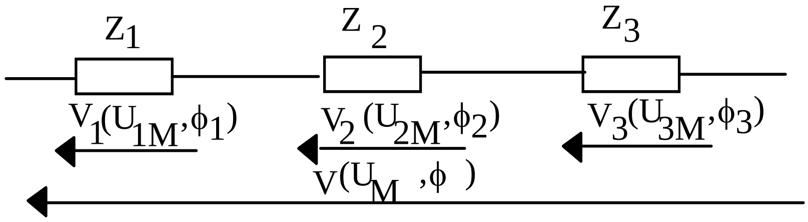
Soit ($\omega t + \phi$) l'angle que fait le vecteur avec l'axe des abscisses.

La projection de ce vecteur sur l'axe des abscisses donne $v(t) = V_M \cos(\omega t + \phi)$: nous retrouvons ici la valeur instantanée de la tension.

L'intérêt de cette représentation vectorielle de Fresnel, est en particulier d'illustrer graphiquement le problème physique.

Exemple :

Soit 3 impédances quelconques en série : Z_1, Z_2, Z_3 .

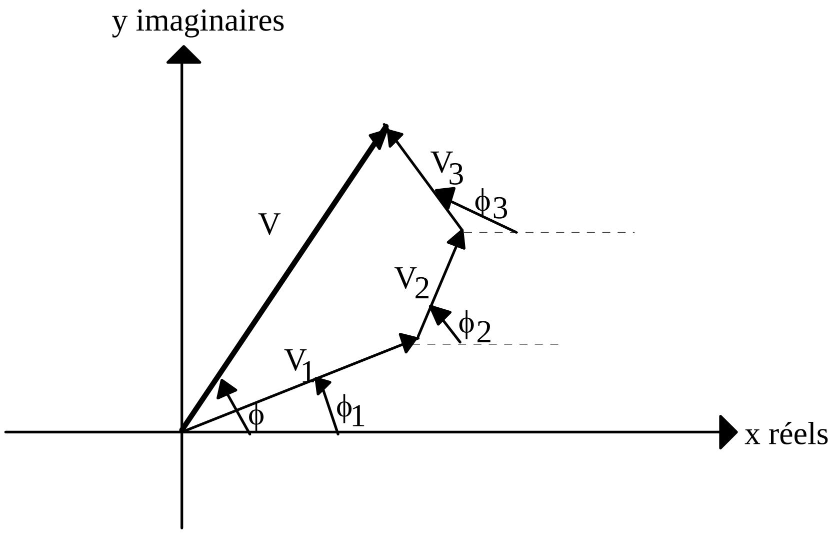


Aux bornes de Z_1 nous avons une tension V_1 d'amplitude U_{1M}, de phase.
Aux bornes de Z_2 nous avons une tension V_2 d'amplitude U_{2M}, de phase.
Aux bornes de Z_3 nous avons une tension V_3 d'amplitude U_{3M}, de phase.

Si nous voulons ajouter les valeurs instantanées pour obtenir l'amplitude V_M et la phase de la tension v(t) aux bornes du circuit, les calculs seront très longs.

Par contre, si nous représentons la somme des vecteurs représentatifs de ces tensions, sur un même graphique de Fresnel, nous obtiendrons directement le vecteur somme qui sera le vecteur représentatif de la tension totale.

Nous obtenons ainsi beaucoup plus vite l'amplitude et la phase de la tension totale :

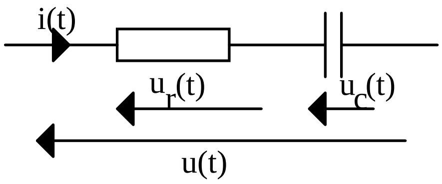


4. APPLICATION A LA DETERMINATION DE L'AMPLITUDE ET DE LA PHASE POUR UN CIRCUIT QUELCONQUE :

Nous traiterons ce paragraphe sous forme d'exemples faisant partie intégrante du cours.

Exemple n°1 : circuit RC série :

C'est un circuit comprenant en série une résistance pure R et une capacité pure C.



Quand on applique une différence de potentiel u(t) à ses bornes, il apparaît un courant alternatif i(t) dans le circuit.

Supposons que l'on connaisse i(t) : son amplitude est I_M et sa phase initiale est supposée nulle.

Le problème consiste à calculer u(t) c'est-à-dire à connaître son module U_M et son déphasage par rapport à i(t).

Appliquons la loi d'Ohm avec les grandeurs associées complexes $\overline{I}$ et.

$$\overline{U} = \overline{Z}\overline{I}$$

L'impédance $\overline{Z}$ du circuit est la somme des impédances en série :

$$\overline{Z} = R - \frac{j}{C\omega}$$

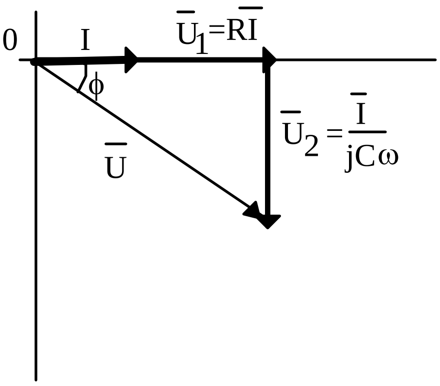
$$\overline{U} = \left(R - \frac{j}{C\omega}\right)\overline{I}$$

Le module de $\overline{U}$ sera le produit des modules de $\overline{Z}$ et de $\overline{I}$:

$$U_M = I_M\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}$$

Le déphasage entre $\overline{U}$ et $\overline{I}$ sera donné par $\text{tg}\phi = -\frac{1}{RC\omega}$.

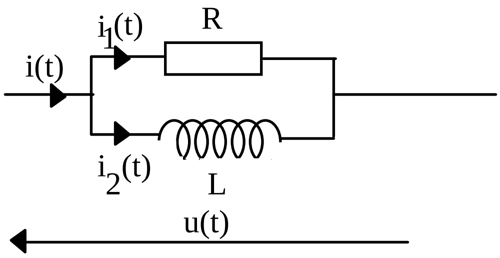
Nous retrouvons ces résultats sur la représentation de Fresnel :



Nous vérifions que U est la somme des d.d.p U_1 et U_2 aux bornes de la résistance R et de la capacité C. Nous vérifions aisément que : $\mathrm{tg}\phi = -\dfrac{1}{RC\omega}$.

<u>Exemple n°2 : circuit RL parallèle</u> :

C'est un circuit comprenant en parallèle une résistance pure et une inductance pure.



Quand on applique u(t) à ses bornes, il apparaît un courant alternatif i(t) dans le circuit, se divisant en deux : $i_1(t)$ dans la résistance et $i_2(t)$ dans l'inductance.

Supposons que l'on connaisse i(t) : son amplitude est I_M et sa phase initiale est nulle.

Le problème consiste à calculer u(t) c'est-à-dire à connaître son module et son argument.

On a : $\overline{U} = \overline{Z}\overline{I}$

$\overline{Z}$, pour un circuit parallèle, se calcule en écrivant : $\dfrac{1}{\overline{Z}} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{jL\omega}$

$$\overline{Z} = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega}$$

On met l'impédance $\overline{Z}$ sous forme a+jb pour faciliter les calculs en multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjugée du dénominateur :

$$\overline{Z} = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega}\frac{R - jL\omega}{R - jL\omega} = \frac{RL^2\omega^2 + jR^2L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}$$

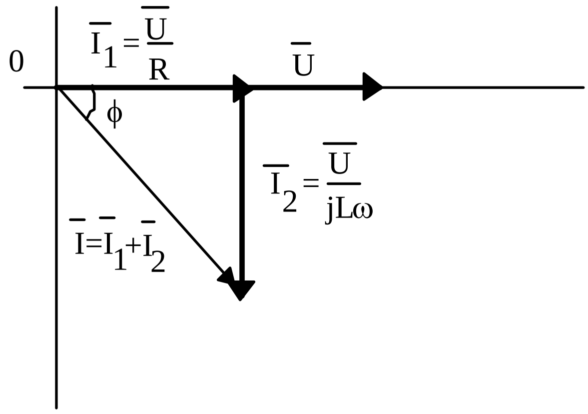
$$\overline{U} = \frac{RL^2\omega^2 + jR^2L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\overline{I}$$

Pour obtenir le module de $\overline{U}$ nous multiplions le module de $\overline{Z}$ par le module de $\overline{I}$:

$$U_M = I_M\sqrt{\left(\frac{RL^2\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{R^2L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\right)^2}$$

Le déphasage entre $\overline{U}$ et $\overline{I}$ sera donné par : $tg\phi = \dfrac{R}{L\omega}$

Nous retrouvons ces résultats sur la représentation de fresnel.



5 -EXERCICES CORRIGES

1. ENONCE :

Exercice n°1 :

On dispose d'un condensateur de 20µF, d'une bobine de résistance R=10Ω et de coefficient d'inductance propre L=0,3H, d'une tension sinusoïdale de valeur efficace 100V et de fréquence f=50hz.

Calculer l'intensité du courant et son déphasage par rapport à la tension quand on applique la tension successivement :

a) Aux bornes du condensateur.
b) Aux bornes de la bobine.
c) A l'ensemble condensateur et bobine en série .
d A l'ensemble condensateur et bobine en parallèle.

Exercice n°2 :

Une bobine B est alimentée en courant continu sous une tension U_1 de 6V; elle est traversée par un courant I_1 de 2A .

Lorsqu'on alimente cette même bobine en courant sinusoïdal de fréquence f=50Hz sous une tension efficace U de 110V, l'intensité I du courant est de 1A .

Calculer la résistance r et l'inductance L de cette bobine.

Exercice n°3 :

Une bobine B (L=0,35H, r=3Ω) est placée en série avec une résistance non inductive R=52Ω et un condensateur C=10µF . On soumet l'ensemble à une tension sinusoïdale de valeur efficace U=110V dont on fait varier la fréquence f .

1) Calculer l'impédance Z de l'ensemble : bobine, résistance, condensateur pour f=100Hz ; quelle est alors l'intensité efficace I du courant qui traverse le circuit ?

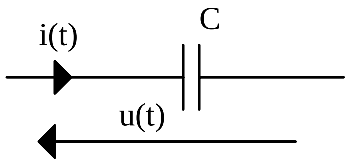
2) Calculer les tensions efficaces U_L aux bornes de la bobine, U_R aux bornes de la résistance, U_C aux bornes du condensateur. Quel est le déphasage ϕ de l'intensité par rapport à la tension ?

3) Tracer le diagramme de Fresnel correspondant.

2. SOLUTIONS DES EXERCICES :

Exercice n°1 :

a) Condensateur seul :



$\overline{Z} = \dfrac{1}{jC\omega}$ or $\overline{U} = \overline{Z}\overline{I}$

donc $\overline{U} = \dfrac{\overline{I}}{jC\omega}$

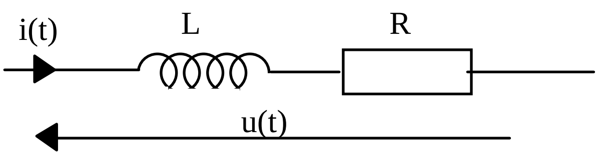
Soit ϕ le déphasage de I par rapport à U ici $\phi = +\dfrac{\pi}{2}$

$I_{eff} = C\omega U_{eff} = 2\pi f C U_{eff}$

$I = 20.10^{-6}.2.\pi.50.100 = 0.628A$

$$\boxed{I = 2\pi f C U_{eff} = 0.628A}$$

b) Bobine :



$\overline{Z} = R + jL\omega$ or $\overline{U} = \overline{Z}\overline{I}$

$\overline{U} = (R + jL\omega)\overline{I}$

d'où :

$$\overline{I} = \frac{\overline{U}}{R + jL\omega} = \frac{\overline{U}}{R^2 + (L\omega)^2}(R - jL\omega)$$

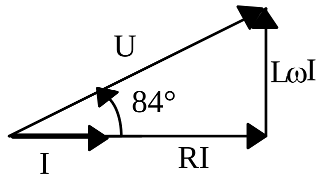
Si ϕ est le déphasage de I par rapport à U :

$$tg\phi = -\frac{L\omega}{R}$$

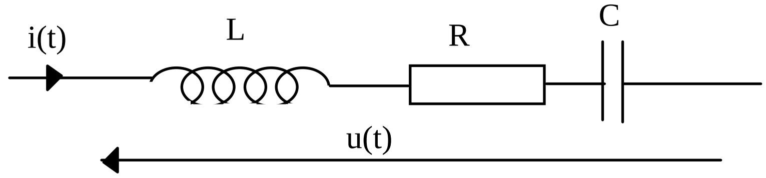
$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

$tg\phi = -\frac{L\omega}{R} = -84°$
$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} = 1{,}05A$

Diagramme de Fresnel :



c)Condensateur et bobine en série :



$$\overline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

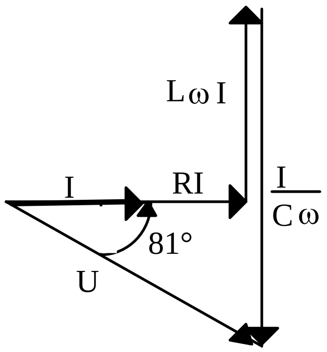
$$\overline{I} = \frac{\overline{U}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{\overline{U}}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}\left(R - j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right)$$

$$tg\phi = -\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

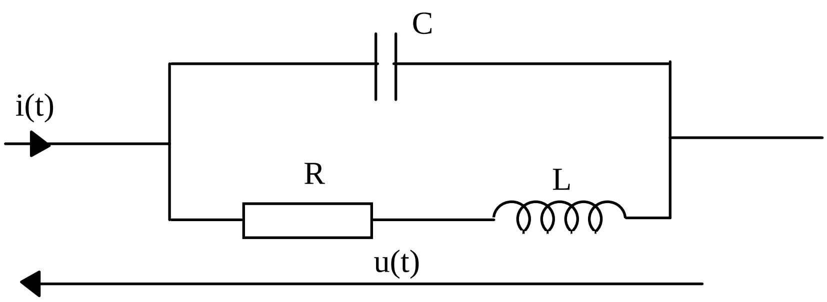
$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$\mathrm{tg}\phi = -\dfrac{1}{R}\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right) \Rightarrow \phi = 81°$
$I_{eff} = \dfrac{U_{eff}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}} = 1{,}52A$

Diagramme de Fresnel :



d)<u>Bobine et condensateur en parallèle</u> :



L'admittance du circuit est :

$$\overline{Y} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega} = jC\omega + \frac{R - jL\omega}{R^2 + (L\omega)^2} = \frac{R}{R^2 + (L\omega)^2} + j\left(C\omega - \frac{L\omega}{R^2 + (L\omega)^2}\right)$$

$$\overline{I} = \overline{Y}\,\overline{U}$$

$$I_{eff} = U_{eff}\sqrt{\frac{R^2}{\left(R^2 + L^2\omega^2\right)^2} + \left(C\omega - \frac{L\omega}{\left(R^2 + L^2\omega^2\right)}\right)^2}$$

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{R^2 + L^2\omega^2}{R}\left(C\omega - \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\right)$$

I = 0,42A
ϕ = -75°

<u>Exercice n°2</u> :

Calcul de r et L :

en continu $U_1 = rI_1 \Rightarrow r = U_1/I_1 = 3\Omega$

$$\boxed{r = \frac{U_1}{I_1} = 3\Omega}$$

en alternatif :

$$\overline{U} = \overline{Z}\,\overline{I} = \left(r + jL\omega\right)\overline{I}$$

$$U = \sqrt{r^2 + \left(L\omega\right)^2}\,I$$

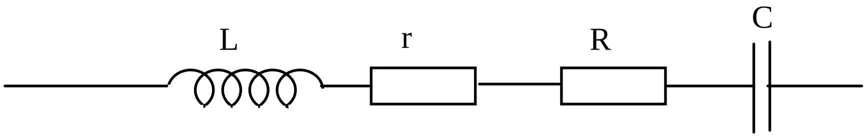
$$U^2 = \left(r^2 + \left(L\omega\right)^2\right)I^2$$

$$L^2 = \left(\frac{U^2}{I^2} - r^2\right)\frac{1}{\omega^2}$$

$$\boxed{L = \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(\frac{U^2}{I^2} - r^2\right)} = 0{,}35H}$$

<u>Exercice n°3</u> :

1) Calcul de Z et I :



$$\overline{Z} = \left(R + r\right) + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$\boxed{Z = \sqrt{\left(R + r\right)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = 84\Omega}$$

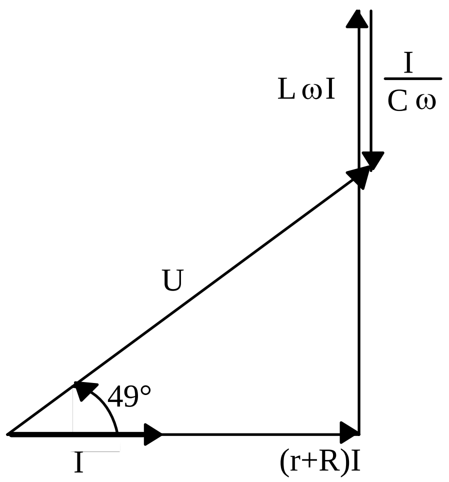
U = ZI

$$\boxed{I = \frac{U}{Z} = 1{,}31A}$$

2) Calcul de U_L, U_R, U_C, ϕ :

$U_L = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2}\, I = 290V$
$U_C = \frac{I}{C\omega} = 209V$
$U_R = RI = 69V$
$tg\phi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R + r}$ $\phi = 49°$

Diagramme de Fresnel :



<u>3. EXERCICE NON CORRIGE</u> :

<u>Enoncé</u> :

Un circuit électrique, alimenté par une source de tension alternative de valeur efficace U et de pulsation ω réglable, comprend en série une bobine de résistance R et d'inductance L et un condensateur de capacité C .

L'intensité instantanée du courant qui parcourt le circuit et la tension d'alimentation à ses bornes peuvent s'écrire respectivement :

$$i(t) = I\sqrt{2}\sin\omega t \text{ et } u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \phi)$$

Pour tous les calculs numériques du problème, on prendra :

U=100V, R=10Ω, L= 0,30H, C=20µF . On pourra utiliser π^2=10

Calculer dans le cas où ω = 100π rd/s :

1) L'impédance Z du circuit .

2) La valeur efficace de l'intensité I .

3) Le déphasage ϕ de la tension par rapport à l'intensité; construire le diagramme de Fresnel relatif au circuit .

4) Calculer les valeurs efficaces des tensions aux bornes du condensateur et de la bobine .

5) Ecrire les expressions des tensions aux bornes du condensateur et de la bobine .

6) Déterminer le déphasage ϕ' entre les tensions aux bornes du condensateur et de la bobine; préciser laquelle est en avance sur l'autre .

<u>Réponse</u> :

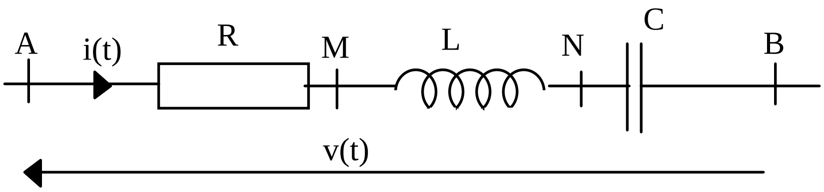
1) Z = 65,67Ω
2) I = 1,523A
3) ϕ = -1,418 rd = -81°14'
4) U_{Ceff} = 242,3V et U_{Beff} = 144,3V
5) U_C = 342,7sin(100πt - π/2)
U_B = 204,1sin(100πt + 1,465)
6) ϕ' = 3,036 rd; la tension aux bornes de la bobine est en avance sur celle aux bornes du condensateur .

COURANT ALTERNATIF 3ème partie

1. CIRCUITS RESONNANTS - SERIE, PARALLELE - BANDE PASSANTE - SELECTIVITE

1.1. Circuit R L C série :

Soit le circuit suivant, comportant en série une résistance, une capacité, une inductance, alimenté par une différence de potentiel v(t) alternative et parcouru par un courant alternatif i(t) .



1.11. Représentation complexe :

Appliquons la loi d'Ohm en complexe :

$$\overline{V} = \overline{V_A - V_M} + \overline{V_M - V_N} + \overline{V_N - V_B}$$
$$\overline{V_A - V_N} = R\overline{I}$$
$$\overline{V_M - V_N} = jL\omega\overline{I}$$
$$\overline{V_N - V_B} = \frac{1}{jC\omega}\overline{I}$$

D'où : $\overline{V} = \left[R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right]\overline{I}$

Cette expression est de la forme $\overline{V} = \overline{Z}\overline{I}$ où $\overline{Z}$ est l'impédance du circuit .

Si $i(t) = I_M \cos\omega t$ ou $\overline{I} = I_M(\cos\omega t + j\sin\omega t)$

Nous aurons $v(t) = V_M \cos(\omega t + \phi)$ ou $\overline{V} = V_M(\cos(\omega t + \phi) + j\sin(\omega t + \phi))$

Nous avons $V_M = ZI_M$ en module .

$\overline{Z}$ en module est égal à : $\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

Donc :

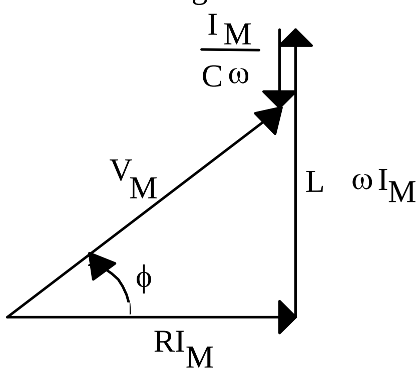
$$\boxed{V_M = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}\, I_M}$$

Le déphasage du courant par rapport à la différence de potentiel est donné par :

$$\boxed{tg\phi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}}$$

1.12. Représentation de Fresnel :

Nous retrouvons ces résultats sur la figure ci-dessous :



1.13. Etude de la variation de Z en fonction de ω :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Z' = dérivée de Z :

$$Z' = \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\left(L + \frac{1}{C\omega^2}\right)}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

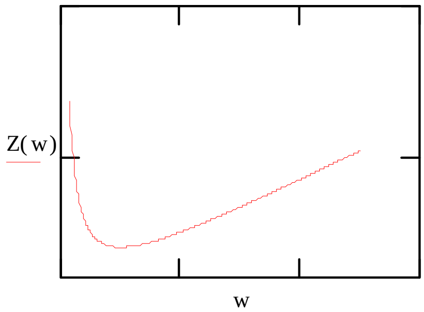
La dérivée s'annule pour :

$\omega^2 = \dfrac{1}{LC}$ soit pour $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$

Le tableau de variation est le suivant :

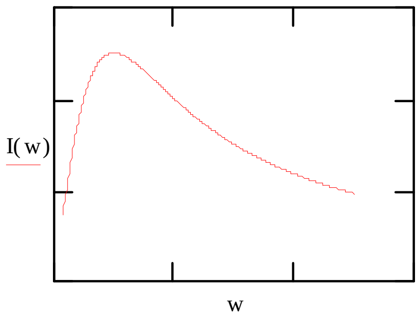
ω	0		ω_0		$+\infty$
Z'		$-$	0	$+$	
Z	$+\infty$	$\searrow$	R	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe est de la forme :



par la formule : $I_M = \frac{V_M}{Z}$

nous obtiendrons la courbe $I_M = f(\omega)$ suivante :



Le courant traversant le circuit a une amplitude maximale pour la pulsation :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

On dit qu'il y a **résonance** entre le circuit et la source, la fréquence de résonance est :

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

1.14. Etude de la tension aux bornes de L :

$\overline{V_L} = jL\omega\bar{I}$

Nous avons : $\bar{I} = \dfrac{\overline{V}}{\overline{Z}}$

D'où : $\overline{V_L} = \dfrac{jL\omega\overline{V}}{R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}$

Le module de $\overline{V_L}$ sera donc :

$$\boxed{V_L = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}} V_M}$$

A la résonance : $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

En remplaçant dans l'expression de V_L nous avons :

$$V_L = \frac{L\omega_0 V_M}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} V_M$$

Nous appellerons **coefficient de surtension** le rapport :

$$\boxed{Q = \frac{V_L}{V_M} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

1.14. Etude de la tension aux bornes de C :

$$\overline{V_C} = -\frac{j}{C\omega}\bar{I}$$

Nous avons : $\bar{I} = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}}$

D'où : $\overline{V_C} = \frac{-j\overline{V}}{C\omega\left(R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right)}$

Le module de $\overline{V_C}$ sera donc :

$$\boxed{V_C = \frac{V_M}{C\omega\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}}$$

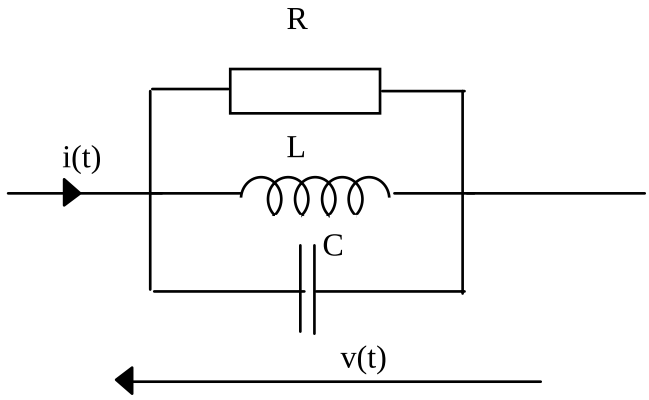
A la résonance : $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

En remplaçant dans l'expression de V_C nous avons :

$$V_C = \frac{V_M}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}V_M$$

Nous obtenons le même module pour la tension V_C que pour la tension V_L . En tenant compte des déphasages, ces tensions V_C et V_L sont en fait de signe contraire, leur somme est donc nulle . Nous retrouvons bien le fait que la tension aux bornes du circuit total est égale à la tension aux bornes de la résistance seule .

1.2. Circuit R L C parallèle :



Soit le circuit ci-dessus, comportant en parallèle une résistance, une inductance et une capacité, alimenté par une d.d.p alternative v(t) et parcourue par un courant i(t) alternatif .

1.21. Représentation complexe :

La tension alternative peut s'écrire :

$$v(t) = V_M \cos\omega t$$

En complexe :

$$\overline{V} = V_M(\cos\omega t + j\sin\omega t)$$

Le courant sera de la forme :

$i(t) = I_M \cos(\omega t + \phi)$ ou en complexe $\bar{I} = I_M(\cos(\omega t + \phi) + j\sin(\omega t + \phi))$

Nous écrivons donc :

$$\bar{I} = \left(\frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right)\overline{V}$$

Nous pouvons donc déduire, d'après les méthodes de calcul sur les nombres complexes que :

$$\boxed{I_M = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}\, V_M}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\phi = \frac{C\omega - \frac{1}{L\omega}}{\frac{1}{R}}}$$

Nous avons donc ainsi le module ou amplitude du courant en fonction du module ou amplitude de la tension .

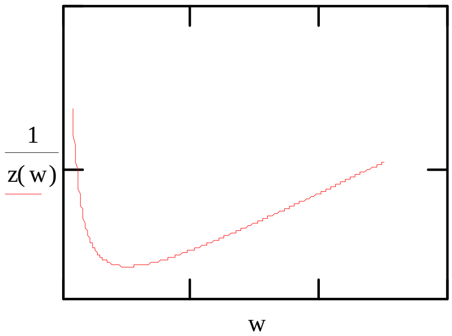
Nous connaissons aussi le déphasage ϕ du courant par rapport à la tension .

<u>1.22. Etude du courant</u> :

Le module de l'impédance est :

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$$

Nous étudions 1/Z en fonction de la pulsation ω, nous obtenons la même courbe que dans le circuit R L C série :



ω_0 est appelé fréquence d'antirésonance . Comme I est proportionnel à 1/Z, la courbe I en fonction de ω se déduit directement de la précédente et a la même allure.

I passe par un minimun I_0 pour $\omega = \omega_0$.

Le courant de fréquence ω_0 sera atténué, "bloqué" alors que les autres fréquences pourront passer . C'est pour cela qu'on appelle le circuit R L C parallèle "**circuit bouchon**" .

2. PUISSANCE EN COURANT ALTERNATIF :

2.1. Introduction :

Nous avons vu en courant continu que la puissance dissipée dans une portion de circuit parcourue par le courant I était donnée par la formule P = VI .V étant la d.d.p aux bornes du circuit .

En courant alternatif, nous avons vu que nous pouvions appliquer aux valeurs instantanées du courant i(t) et de la tension v(t) les même formules qu'en courant continu .

Nous obtenons donc ainsi la puissance instantanée dans un circuit alimenté en alternatif. A l'instant t la puissance débitée sera :

$$\boxed{p(t) = v(t)i(t)}$$

Toutefois, cette puissance instantanée n'est guère utile; c'est l'effet moyen du courant qu'il faut considérer : en particulier nous nous intéresserons à l'effet moyen du courant sur une période du courant alternatif .

2.2. Puissance moyenne ou réelle :

Par définition, la puissance moyenne est la puissance dépensée pendant une période .

Pour un circuit alimenté en courant alternatif sinusoïdal, nous avons par exemple :

$$i(t) = I_M \cos\omega t \text{ et } v(t) = V_M \cos(\omega t + \phi)$$

ϕ étant le déphasage entre la tension et le courant .

Par un calcul que nous n'exposerons pas dans le cours, nous obtenons pour une période, la puissance moyenne :

$$\boxed{P = \frac{I_M V_M}{2}\cos\phi}$$

Nous savons que l'intensité efficace et la tension efficace du courant sont données par :

$$I_{eff} = \frac{I_M}{\sqrt{2}} \text{ et } V_{eff} = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$$

D'où la puissance moyenne :

$$\boxed{P = V_{eff} I_{eff} \cos\phi}$$

Par définition : cosϕ est appelé **facteur de puissance** du circuit . Par définition également, nous appellerons le produit $V_{eff}I_{eff}$ la **puissance apparente** .

2.3. Puissance active - Puissance réactive :

2.31. Courant watté - Courant déwatté :

Considérons une portion de circuit dans laquelle la d.d.p instantanée est de la forme $v(t)=V_M \sin\omega t$, l'intensité instantanée $i(t) = I_M \sin(\omega t - \phi)$, ϕ étant le déphasage entre le courant et la tension dans cette portion de circuit .

Par formule trigonométrique, nous transformons l'expression i(t) en l'expression :

$$i(t) = I_M \sin\phi \sin\omega t + I_M \cos\phi \cos\omega t$$

i(t) est donc la somme de deux courants :

$$i_1(t) = I_M \cos\phi \cos\omega t$$
$$i_2(t) = I_M \sin\phi \sin\omega t = I_M \sin\phi \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Le courant i_1 est en phase avec la tension aux bornes du tronçon du circuit .

Le courant i_2 est déphasé de π/2 avec cette dernière .

Nous avons vu que : $P = V_{eff} I_{eff} \cos\phi$

Pour i_1 : $\phi = 0 \Rightarrow \cos\phi = 1 \Rightarrow P = V_{eff}I_{eff}$.

Pour i_2 : $\phi = \pi/2 \Rightarrow \cos\phi = 0 \Rightarrow P = 0$.

On peut donc dire que la puissance est fournie par le composante i_1 qui s'appelle courant **watté** .

La composante i_2 s'appelle courant **déwatté** .

2.32. Puissance active - Puissance réactive :

On appelle **puissance active** le produit :

$$\boxed{P_a = V_{eff} I_{eff} \cos\phi}$$

On appelle **puissance réactive** le produit :

$$\boxed{P_r = V_{eff} I_{eff} \sin\phi}$$

Ces deux termes proviennent du calcul de la puissance moyenne quand on a décomposé le courant i(t) en ses composantes i_1 watté et i_2 déwatté .

La puissance active s'identifie à la puissance réelle .

C'est la puissance active qui fait tourner le compteur électrique .

La puissance réactive ne fait pas tourner le compteur électrique mais le courant déwatté peut être important et peut provoquer des dégagements de chaleur importants si $\cos\phi$ est faible .

3 - EXERCICES CORRIGES

EXERCICE n°1 :

Enoncé :

La bobine d'un électro-aimant peut être considérée comme équivalente à une inductance L = 0,15H montée en série avec une résistance R = 16,8Ω . Elle est alimentée par une tension alternative de fréquence f = 50Hz, d'expression instantanée $u(t) = 100\sqrt{2}\sin\omega t$.

1) Déterminer l'intensité efficace traversant la bobine et le déphasage qu'elle introduirait entre la tension à ses bornes et l'intensité . Exprimer en fonction du temps l'intensité instantanée de la bobine .

2) Calculer la puissance moyenne consommée par cet électro-aimant .

3) Déterminer la capacité du condensateur qui, monté en série avec la bobine, annule le déphasage entre la tension aux bornes du montage et l'intensité qui le parcourt . Calculer la nouvelle puissance moyenne consommée par l'électro-aimant .

Corrigé :

1) Intensité et déphasage :

$U_{eff} = ZI_{eff}$

Z est l'impédance de la bobine $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$

Numériquement :

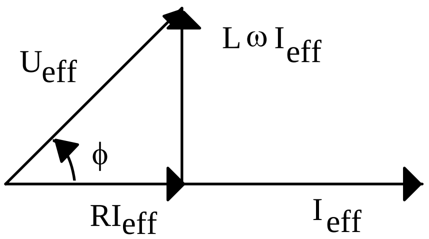
$$Z = \sqrt{(16,8)^2 + (0,15.2.\pi.50)^2} = \sqrt{2500} = 50\Omega$$

$$\boxed{I_{eff} = \frac{U_{eff}}{Z} = \frac{100}{50} = 2A}$$

Le déphasage du courant par rapport à la tension est donné par :

$$\boxed{\begin{array}{l} tg\phi = -\dfrac{L\omega}{R} = -2,81 \\ \phi = -1,23rd \end{array}}$$

Diagramme de Fresnel :



L'expression de l'intensité instantanée est donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} i(t) = I_{eff}\sqrt{2}\sin(\omega t + \phi) \\ i(t) = 2\sqrt{2}\sin(100\pi t - 1{,}23) \end{array}}$$

2) <u>Puissance moyenne consommée</u> :

$$P = U_{eff} I_{eff} \cos\phi$$

On voit sur le diagramme de Fresnel :

$$\cos\phi = \frac{RI_{eff}}{U_{eff}}$$

D'où :

$$\boxed{P = RI_{eff}^2 = 67,2W}$$

3) <u>Annulation du déphasage par une capacité</u> :
Pour un circuit R L C le déphasage est donné par :

$$tg\phi = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}$$

$$\phi = 0 \Leftrightarrow L\omega = \frac{1}{C\omega}$$

$$\boxed{C = \frac{1}{L\omega^2} = 6,75.10^{-5}\,F}$$

L'impédance du circuit est $Z = R = 16{,}8\Omega$.

L'intensité parcourant le circuit vaut :

$$\boxed{I_{eff} = \frac{U_{eff}}{Z} = 5{,}95A}$$

La puissance moyenne consommée par l'électro-aimant :

$$P = U_{eff} I_{eff} \cos\phi$$

$$P = U_{eff} I_{eff} (\cos\phi = 1)$$

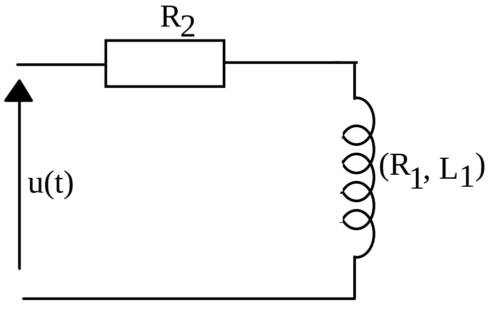
$$\boxed{P = \frac{U_{eff}^2}{R} = 595W}$$

EXERCICE n°2 :

Enoncé :

On dispose d'un générateur de tension alternative sinusoïdale et l'on se propose d'en évaluer sa fréquence f_0 .

A) Le générateur alimente un circuit électrique où une bobine (R_1, L_1) est branchée en série avec une résistance pure $R_2 = 12{,}5\Omega$.



On mesure l'intensité efficace I du courant, les tensions efficaces U aux bornes du générateur, U_1 aux bornes de la bobine et U_2 aux bornes de la résistance R2 . On constate $U_1 = U_2$.

1) Montrer que les impédances Z_1 et Z_2 de la bobine et de la résistance sont égales . Donner numériquement ces impédances . En déduire la résistance R_1 et l'impédance $L_1\omega$ de la bobine . Construire le diagramme de Fresnel correspondant à ces cas . Tout se passe comme si, dans le montage complet, il n'y avait qu'une bobine d'inductance L_1 et de résistance $R_1 + R_2$.

2) Calculer la valeur f_0 que donne cette expression sachant que $L_1 = 36mH$.

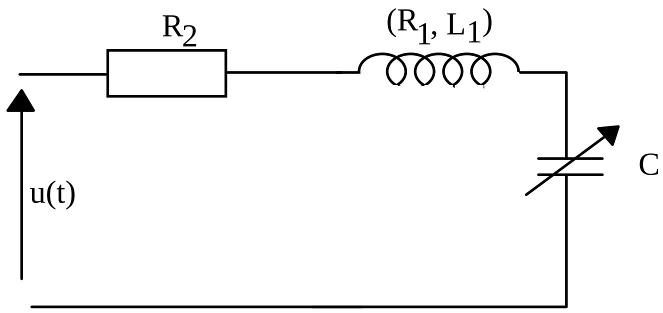
AN : $I = 3,2A$ et $U = 64V$

B) On ajoute en série dans le circuit un condensateur de capacité C variable . A l'aide d'un oscilloscope bicourbe, on visualise les fonctions i = f(t) pour le courant et u = f(t) pour la tension aux bornes du générateur . Pour une certaine valeur C_0 de C on constate que les deux courbes sont en phase .

1) Interpréter le phénomène .

2) En déduire la valeur de f_0 que donne cette expérience .

AN : $C_0 = 2,5.10^{-4}\,F$



<u>Corrigé</u> :

A) 1-<u>Calcul de R_1 et $L_1\omega$</u> :

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = Z_1 I \\ U_2 = Z_2 I \end{array}\right\} \Rightarrow U_1 = U_2 \Rightarrow Z_1 = Z_2$$

Pour la résistance pure $Z_2 = R_2 = 12,5\Omega$

Pour la bobine nous avons $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (L_1\omega)^2} = 12,5\Omega \; (1)$

Pour le circuit entier $Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (L_1\omega)^2} = \dfrac{U}{I} = 20\Omega \; (2)$

(1) et (2) forment le système :

$$\begin{cases} R_1^2 + (L_1\omega)^2 = 156{,}25 \\ (R_1 + 12{,}5)^2 + (L_1\omega)^2 = 400 \end{cases}$$

Par différence, membre à membre, on obtient :

$$(R_1 + 12{,}5)^2 - R_1^2 = 243{,}75$$

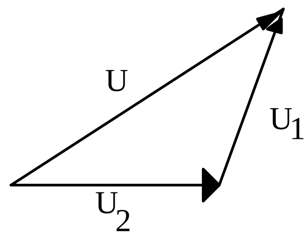
soit :

$$\boxed{R_1 = \frac{243{,}75}{12{,}5.2} - \frac{12{,}5}{2} = 3{,}5\Omega}$$

Nous obtenons :

$$\boxed{L_1\omega = \sqrt{12{,}5^2 - 3{,}5^2} = 12\Omega}$$

Diagramme de Fresnel :



2) <u>Valeur de f_0 :</u>

$L_1\omega = 12\Omega$ et $\omega = 2.\pi.f$

$$\boxed{f_0 = \frac{12}{L_1.2.\pi} = 53{,}1\text{Hz}}$$

B) 1-<u>Tension et intensité en phase</u> :

$$i(t) = I\sqrt{2}\sin\omega t$$
$$u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \phi)$$

La phase est définie par :

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{L_1\omega - \dfrac{1}{C_0\omega}}{R_1 + R_2}$$

Les deux grandeurs sont en phase si $\phi = 0$ soit $\operatorname{tg}\phi = 0$

d'où : $L_1\omega = \dfrac{1}{C_0\omega}$

$$\boxed{C_0\omega = \frac{1}{L_1\omega}}$$

2) <u>Calcul de f_0</u> :

$C_0 = 2{,}5.10^{-4}\,\mathrm{F}$ et $L_1 = 3{,}6.10^{-2}\,\mathrm{H}$

$$\boxed{f_0 = \frac{\omega}{2.\pi} = \frac{1}{2.\pi.\sqrt{L_1C_0}} = 53{,}1\,\mathrm{Hz}}$$