

SEMAINE DU 23/3 AU 29/3

Même programme en ajoutant les hyperplans. Vous pouvez donner des exercices qui reprennent tout le programme, par exemple avec une première partie sur les espaces vectoriels, puis l'étude d'une application linéaire.

ESPACES VECTORIELS

Retour sur le programme sur les espaces vectoriels.

APPLICATIONS LINÉAIRES

$f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

- ① **Rappels.** Définition d'application linéaire, d'isomorphisme, d'endomorphisme, d'automorphisme, de forme linéaire. Notations $\mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{L}(E)$, $\text{GL}(E)$
Intuition sur les applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.
Définition d'image de f , de noyau, d'image réciproque. Caractérisation de l'injectivité par le noyau et de la surjectivité par l'image.
- ② **Premières propriétés.** L'image et l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F . L'image d'un ensemble engendré par une partie est l'ensemble engendré par l'image de cette partie.
En particulier, $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F , $\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de E et l'image de f est engendrée par la famille image de toute base de E .
La composée, la combinaison linéaire et la réciproque (quand elle existe) d'une application linéaire est une application linéaire. Distributivité de la composition sur la combinaison linéaire.
- ③ **Image d'une famille de vecteurs.** L'image d'une base détermine une application linéaire.
 u injective $\iff u$ envoie toute famille libre sur une famille libre
 u surjective $\iff u$ envoie toute famille génératrice sur une famille génératrice
 u bijective $\iff u$ envoie toute base sur une base
Définition d'espaces isomorphes.
- ④ **Dimension finie.** Lien entre matrices et applications linéaires en dimension finie. Matrice d'une application linéaire. Isomorphisme d'espace vectoriel entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, Isomorphisme de groupe entre $\text{GL}(E)$ et $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.
 $\dim E = \dim F \iff E \text{ et } F \text{ sont isomorphes} \iff \left(f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective} \right)$
 $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.
Unicité de l'inverse à gauche ou à droite (pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour $\mathcal{L}(E)$).
 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible $\iff$ les colonnes de A sont linéairement indépendantes.
- ⑤ **Rang.** Définition pour une matrice et pour une application linéaire. Notion d'application de rang fini.
Rang de la composée de 2 applications.
Théorème de factorisation (ou d'isomorphisme), Théorème du rang.
- ⑥ **Projecteur, symétrie.** Définitions, caractérisations, Images et noyaux, Liens entre projecteurs et symétries.
- ⑦ **Hyperplans.** Définition en dimension infinie comme noyau d'une forme linéaire. Définition équivalente géométrique. Espaces vectoriels vus comme intersections d'hyperplans.
Notion d'espace dual.

PREUVES

Seules les preuves dans cette section sont à savoir par coeur par les étudiants. Les autres preuves peuvent être demandées, en proposant une méthode et/ou en aidant l'étudiant durant la réalisation de la preuve.

La question de cours sera composée d'un énoncé rapide (définition, propriété ou théorème), suivi d'une démonstration (ou exemple) de cours choisie parmi :

- ① Preuve de $\begin{cases} u \text{ injective} & \iff u \text{ envoie toute famille libre sur une famille libre} \\ u \text{ surjective} & \iff u \text{ envoie toute famille génératrice sur une famille génératrice} \end{cases}$
- ② Savoir démontrer qu'une application est linéaire et donner une base de son noyau et son image. L'examinateur pourra choisir l'exemple qu'il voudra parmi (voir exercice 2 pour les étudiants)
 - (a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$
 $(x, y, z) \mapsto (x+z, y-x, z+y, x+y+2z)$
 - (b) $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $u(e_1) = -2e_1 + 2e_3$, $u(e_2) = 3e_2$ et $u(e_3) = -4e_1 + 4e_3$.
 - (c) $\Phi: \mathbb{R}_4[X] \rightarrow \mathbb{R}_4[X]$
 $P \mapsto XP' - P$
 - (d) $D: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
 $f \mapsto f'$
 - (e) $\Phi: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$
 $P \mapsto P(X+1) - P(X)$
- ③ Preuve que, pour $p \in \mathcal{L}(E)$, $p \circ p = p$ implique que p est un projecteur.
- ④ Preuve que, pour $s \in \mathcal{L}(E)$, $s \circ s = \text{Id}_E$ implique que s est une symétrie.
- ⑤ Savoir démontrer que deux sous espaces vectoriels sont supplémentaires. L'examinateur pourra choisir l'exemple qu'il voudra parmi
 - (a) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$ et $G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \right\}$ dans $\mathbb{R}^3$
 - (b) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ et $G = \{(2a, -a, 0, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$, dans $\mathbb{R}^4$
 - (c) $F = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \right\}$ et $G = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix} \right\}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - (d) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid (X^2 + 1) \mid P\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$
 - (e) $F = \{u \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = 0\}$ et $G = \{u \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = u_{2n+1}\}$ dans $E := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
 - (f) $F = \{f \in E \mid \exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b\}$ et $G = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ dans $E := \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Code pour colleurs

```
(a) $\text{fonction } f\{\mathbb{R}^3\}\{\mathbb{R}^4\}\{(x, y, z)\}\{(x+z, y-x, z+y, x+y+2 z)\}$
(b) $\text{u: } \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $\text{u}\left(e_1\right)=-2 e_1+2 e_3, \text{quad } u\left(e_2\right)=3 e_2 \text{quad } \text{et} \text{quad } u\left(e_3\right)=-4 e_1+4 e_3$.
(c) $\text{fonction } \Phi\{\mathbb{R}_4[X]\}\{\mathbb{R}_4[X]\}\{P\}\{XP'-P\}$
(d) $\text{fonction } D\{\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})\}\{\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})\}\{f\}\{f'\}$
```

Code pour colleurs

(a)
$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+z=0\}$$

 et
$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x+2y+z=0 \\ x-2y-z=0 \end{array}\}$$
 dans $\mathbb{R}^3$

(b)
$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0\}$$

 et
$$G = \{(2a, -a, 0, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$
 dans $\mathbb{R}^4$

(c)
$$F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \\ \text{quad} \end{array}\}$$

 et
$$G = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix} \\ \text{dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \end{array}\}$$

(d)
$$F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid (X^2+1) \mid P\}$$
 et
$$G = \mathbb{R}_1[X]$$
 dans $\mathbb{R}[X]$

(e)
$$F = \{u \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = 0\}$$

 et
$$G = \{u \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = u_{2n+1}\}$$
 dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(f)
$$F = \{f \in E \mid \exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax+b\}$$

 et
$$G = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$$
 dans $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.