

Méthode de Newton

La méthode de Newton est une méthode classique de calcul approché des zéros d'une fonction, très puissante quand elle peut être utilisée.

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que f s'annule en un unique point $z \in I$ et que f' ne s'annule pas sur I . On va approximer z par une suite définie par récurrence et évaluer ensuite la vitesse de convergence de cette suite.

- ① On note F la fonction qui, à tout $x \in I$, associe l'abscisse du point d'intersection entre l'axe des abscisses et la tangente de f en x . Justifier la définition de F sur I et montrer que pour tout $x \in I$, $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

- ② Puisque $z \in I$, il existe $\alpha > 0$ tel que $]z - \alpha, z + \alpha[\subseteq I$.

③ a) Montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \left[F(z+h) - z - \frac{f''(z)}{2f'(z)} h^2 \right] = 0$.

- ③ b) En déduire l'existence d'un réel $\beta \in]0, \alpha[$ tel que pour tout $x \in]z - \beta, z + \beta[$,

$$|F(x) - z| \leq \frac{|x - z|^2}{10\beta}$$

En déduire que $F([z - \beta, z + \beta]) \subseteq]z - \beta, z + \beta[$.

- ④ c) Soit $x_0 \in]z - \beta, z + \beta[$ fixé. Grâce au résultat de ③, on peut poser, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} = F(x_n)$.

i. Représenter graphiquement le principe de construction de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - z| \leq \frac{|x_n - z|^2}{10\beta}$.

iii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - z| \leq \frac{\beta}{10^{2^n} - 1}$.

iv. En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers z .

v. A cause de la majoration 10^{-2^n} , la convergence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite quadratique. Comment le nombre de décimales exactes de z évolue-t-il à chaque étape de l'algorithme? Comment évoluerait-il si la majoration était de la forme 10^{-n} (convergence géométrique)?

- ⑤ ③ On suppose f strictement croissante et convexe sur I et on pose $D = I \cap [z, \infty[$.

- ⑥ a) Soit $x \in D$. Montrer l'inégalité $z \leq F(x) \leq x$.

Pour tout $x \in D$, remarquer que le graphe de f est au-dessus de la tangente de f en x .

- ⑥ b) Soit $x_0 \in D$. En ③a), on a montré que $F(D) \subseteq D$. On peut donc poser, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = F(x_n)$. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, puis que cette suite converge vers z .

- ⑥ c) Pourquoi le résultat de la question ③b) peut-il être utile en dépit de la convergence établie à la question ②?

On a supposé f strictement croissante et convexe sur I et on vient d'approcher z par une suite définie par récurrence. On pourrait montrer que ce résultat est conservé si on suppose seulement f strictement monotone et convexe ou concave sur I , à condition de bien choisir l'intervalle D .

- ⑦ ④ Soit $a \in \mathbb{R}_+^\times$.

- ⑦ a) Montrer qu'on peut utiliser la méthode de Newton avec $f : x \mapsto x^2 - a$ pour approcher $\sqrt{a}$. Calculer la fonction F correspondante.

- ⑦ b) Montrer qu'on peut utiliser la méthode de Newton avec $f : x \mapsto \frac{1}{x} - a$ pour approcher $\frac{1}{a}$. Calculer la fonction F correspondante.

- ⑦ c) A quoi peuvent bien servir l'approximation des racines carrées et des inverses?