Mathématiques et finance

Emmanuel Gobet[(1)] Gilles Pagès[(2)] Marc Yor[(3)]

[(1)] Ensimag-INP Grenoble Laboratoire de Modélisation et Calcul
UMR 5523.
E-mail :emmanuel.gobet@imag.fr

[(2)] Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires,
UMR 7599, Université Paris 6, case 188, 4, pl. Jussieu, F-75252 Paris Cedex 5.
E-mail :gpa@ccr.jussieu.fr

[(3)] Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires,
UMR 7599, Université Paris 6, case 188, 4, pl. Jussieu, F-75252 Paris Cedex 5.
E-mail :deaproba@proba.jussieu.fr

L'importance croissante prise dans l'industrie bancaire et les métiers de l'assurance par l'utilisation des mathématiques, et plus particulièrement de la théorie des probabilités, depuis le début des années 1990 a suggéré aux auteurs de présenter ici quelques interactions entre Mathématiques et Finance et leurs répercussions au niveau de la recherche et de la formation en France dans ces domaines.

1 Un peu d'histoire

Les origines de la mathématisation de la finance moderne remontent à la thèse de Louis Bachelier [BAC00] intitulée *Théorie de la spéculation* et soutenue à la Sorbonne en 1900. Ces travaux marquent d'une part la naissance des processus stochastiques à temps continu en probabilités, et d'autre part celle des stratégies à temps continu pour la couverture de risque en finance. Du côté mathématique, sa thèse influença grandement les recherches de A.N. Kolmogorov sur les processus à temps continu dans les années 1920 et ceux de K. Itô – l'inventeur du calcul stochastique – dans les années 1950. En revanche, en ce qui concerne la finance, l'approche de Bachelier fut oubliée durant près de trois quarts de siècle, jusqu'en 1973 avec la parution des travaux de Black, Scholes et Merton[1] [BS73].

Revenons à cette époque des années 1970 pour mieux cerner le contexte. C'est alors qu'émerge la volonté politique de déréglementer les marchés financiers, rendant ainsi les taux d'intérêt volatiles et les taux de change instables. Dans un tel environnement dérégulé, les entreprises industrielles et commerciales sont soumises à des risques accrus, liés par exemple à l'extrême variabilité des taux de change : cette situation est inconfortable, tout particulièrement lorsque recettes et dépenses sont libellées dans des monnaies différentes (disons dollar et euro). Pour fournir aux entreprises des

[1] Pour cela, les deux derniers ont reçu le Prix Nobel d'Économie en 1997 (Black est mort en 1995).

outils adaptés à ces problèmes et plus généralement pour permettre aux compagnies d'assurance et aux banques de couvrir ces nouveaux risques, de nouveaux marchés organisés ont été créés, permettant aux intervenants d'échanger massivement des produits d'assurance. Cela marque l'émergence de nouveaux instruments financiers, dits ≪*produits dérivés*≫. L'option d'achat (ou *Call*) est le prototype de ces produits dérivés et reste encore aujourd'hui un des instruments les plus utilisés : dans l'exemple précédent, une telle option protège l'entreprise contre la hausse du taux de change euro/dollar. Acquise aujourd'hui par l'entreprise, elle va lui conférer le droit (mais pas l'obligation) d'acheter 1 dollar en échange de K euros (le *prix d'exercice* ou *strike* K est une caractéristique fixe du contrat) à la date future T fixée (appelée *maturité* ou *échéance*). Si le taux de change en question vaut S_t à la date t (*i.e.* 1 dollar $= S_t$ euros), cette assurance revient du point de vue de l'entreprise à percevoir un montant $\max(S_T - K, 0)$ euros à la maturité T: si $S_T \leq K$, le taux d'achat du dollar est plus avantageux que celui prévu par le contrat et elle ne reçoit donc rien (et va changer ses euros en dollars sur le marché euro/dollar si nécessaire) ; en revanche si $S_T > K$, elle exerce son droit d'acquérir des dollars au taux plus avantageux garanti par le contrat d'option : 1 dollar $= K$ euros (le nombre de dollars qui peuvent être achetés ainsi est aussi un terme du contrat d'option).

Deux questions se sont posées aux intervenants sur ces marchés : quel est le prix (appelé la *prime*) de tels contrats optionnels et quelle attitude adopter lorsqu'on a vendu un tel produit et ainsi endossé le risque – hausse du dollar contre l'euro à la maturité du contrat – en lieu et place de l'acheteur ? Si Bachelier avait établi dès 1900 dans sa thèse [BAC00] la connexion entre le prix de ce type d'instruments financiers et des calculs probabilistes relatifs à certains processus stochastiques, la question de la couverture du risque associé n'a été vraiment résolue qu'avec les travaux de Black, Scholes et Merton en 1973. À l'époque, l'idée de diversification du risque est déjà dans l'air du temps, grâce aux travaux pionniers de Markovitz[2] en 1952 sur l'optimisation de portefeuille : il propose une diversification du risque statique, fondée sur la répartition des actifs au sein d'un portefeuille. La problématique est encore différente en assurance de sinistres : la diversification s'y appuie sur le nombre d'assurés. L'approche novatrice de Black, Scholes et Merton, qui constitue encore aujourd'hui la clé de voûte de la finance moderne, consiste à diversifier le risque *sur le temps* (entre aujourd'hui et la maturité), en mettant en œuvre *une stratégie d'investissement dynamique.* Pour le Call sur le taux de change, cela consiste à acheter ou à vendre des dollars à chaque instant. Le ≪miracle≫ est complet lorsque Black, Scholes et Merton aboutissent à l'existence d'une stratégie dynamique optimale, explicitement calculable, *supprimant tous les risques possibles dans tous les scénarios de marché.*

Ce pas de géant a rendu possible le développement fulgurant de ces nouveaux marchés sous une forme organisée. Le premier d'entre eux s'ouvre à Chicago en 1973 (le CBOT, Chicago BOard of Trade), suivi rapidement par bien d'autres, aux États-Unis d'abord (Philadelphie, ...), puis partout dans le monde. La France emboîte le pas et crée le Matif en 1985 (devenu MArché à Terme International de France après plusieurs changements de signification de l'acronyme) puis le Monep en 1987 (Marché des Options Négociables de Paris). Les progrès technologiques (informatique, communications,...) et théoriques (mathématiques) ont aussi largement favorisé ces développements spectaculaires, comme nous allons le montrer maintenant.

[2]Prix Nobel d'Économie en 1990.

2 Le monde de Black, Scholes et Merton

Pour formaliser la notion de couverture dynamique, conservons l'exemple du taux de change. À la date 0, le vendeur reçoit de l'acheteur la prime C_0 (le prix du produit dérivé). Il va investir cette prime au cours du temps en dollars (américains). Plus précisément, il en achète une quantité (algébrique) δ_t à chaque instant t, le reste étant non investi (nous supposons ici pour simplifier le raisonnement que le taux d'intérêt, qui rémunère l'argent non investi, ici les liquidités en euro, est nul). Aucun apport extérieur d'argent ne doit intervenir dans sa gestion dynamique : on dira que son *portefeuille est autofinancé*. Si sa valeur au cours du temps est $(V_t)_{t\in[0,T]}$, alors sa variation infinitésimale doit satisfaire

$$V_{t+dt} - V_t = \delta_t \ (S_{t+dt} - S_t) \tag{2.1}$$

avec la contrainte d'obtenir à maturité T ce à quoi il s'est engagé auprès de l'acheteur, à savoir

$$V_T = \max(S_T - K, 0). \tag{2.2}$$

Arrivé à ce point de l'analyse, il devient important de préciser le modèle (stochastique) d'évolution du taux de change $(S_t)_{t\geq 0}$. Sans perdre en généralité, il est assez naturel de décomposer son rendement instantané comme la superposition d'une tendance locale et d'un bruit. Samuelson (1960), puis Black, Scholes et Merton (1973) proposent une modélisation du bruit à l'aide d'un mouvement brownien $(W_t)_{t\geq 0}$, ce qui conduit à une dynamique *infinitésimale* du type

$$\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma(W_{t+dt} - W_t). \tag{2.3}$$

L'amplitude locale du bruit est donnée par le paramètre σ (supposé non nul), appelée *volatilité*.

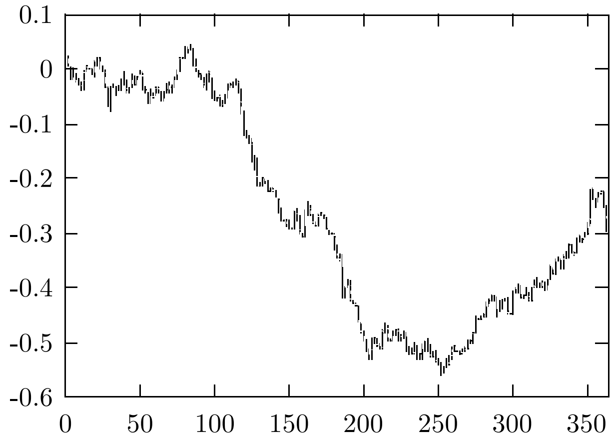
L'idée d'introduire le mouvement brownien pour modéliser l'aléa dans les cours de bourse remonte en fait aux travaux de Bachelier en 1900. Elle est intimement liée à la genèse même du mouvement brownien. Ce processus permet de rendre compte de manière simple de propriétés attendues, comme l'indépendance des accroissements ou l'invariance par changement d'échelle. Enfin, son comportement trajectoriel est très similaire à celui observé en pratique (voir la figure 1). Cependant, ce dernier point fait aujourd'hui débat, motivant des investigations au sein de classes plus vastes de processus, comme les mouvement browniens fractionnaires.

> **Encadré 1**. DÉFINITION DU MOUVEMENT BROWNIEN. Le mouvement brownien est un processus gaussien, à accroissements indépendants et stationnaires : son accroissement $W_t - W_s$ ($0 \leq s < t$) suit une loi gaussienne centrée, de variance $(t - s)$.
> BREF HISTORIQUE. C'est en 1827 que le mouvement brownien est associé aux trajectoires très irrégulières (en fait non dérivables comme fonctions du temps) de fines particules dans un fluide par le botaniste Robert Brown ; en 1900, Louis Bachelier l'utilise pour modéliser la dynamique des cours boursiers, puis Einstein en 1905, pour décrire une particule qui diffuse. Ce n'est qu'en 1923 que Wiener formalise sa construction. C'est le début de recherches mathématiques intensives qui se poursuivent toujours aujourd'hui et irriguent une large part des probabilités modernes.

En fait, la justification rigoureuse des écritures infinitésimales (2.1) et (2.3) n'est pas simple, puisque $(W_t)_t$ n'est pas à variation bornée, mais à variation quadratique finie. Le calcul stochastique développé dans les annés 1950 par K. Itô permet de résoudre ces questions techniques. Un calcul différentiel peut aussi être développé, avec pour base la formule d'Itô : pour toute fonction f suffisamment régulière, on a

$$f(t+dt, S_{t+dt}) - f(t, S_t) = \partial_t f(t, S_t)dt + \partial_x f(t, S_t)(S_{t+dt} - S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \partial^2_{x,x} f(t, S_t)dt. \qquad (2.4)$$

La présence du terme supplémentaire $\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \partial^2_{x,x} f(t, S_t)dt$ faisant apparaître la dérivée seconde de f en la seconde variable provient de la variation quadratique finie du mouvement brownien. C'est en quelque sorte la marque de fabrique du calcul différentiel stochastique puisqu'il n'intervient pas dans le calcul différentiel ≪ordinaire≫.



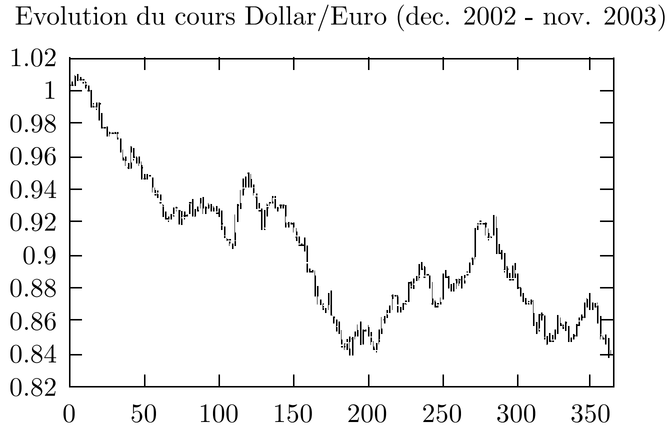


Figure 1: Simulation de trajectoire brownienne (à gauche) et évolution du taux de change dollar/euro (à droite) : plus que des ressemblances, comme un air de famille...

À l'aide de ces outils mathématiques, Black, Scholes et Merton résolvent le problème de couverture de l'option d'achat. En effet, si la valeur du portefeuille associée s'écrit $V_t = C(t, S_t)$, alors en identifiant les équations (2.1), (2.2) et (2.4), on a nécessairement d'une part $\delta_t = \partial_x C(t, S_t)$ et d'autre part $\partial_t C(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial^2_{x,x} C(t, x) = 0, C(T, x) = \max(x - K, 0)$. Cette dernière équation aux dérivées partielles se ramène par changement de variables à l'équation de la chaleur dont la solution, bien connue depuis longtemps, est explicite : on obtient ainsi la célèbre formule de Black & Scholes utilisée dans toutes les salles de marché du monde, donnant la valeur $V_0 = C(0, S_0)$ de l'option aujourd'hui. Il est alors remarquable qu'avec la stratégie ci-dessus, le vendeur de l'option parvienne dans tous les scénarios de marché à générer la *cible aléatoire* $\max(S_T - K, 0)$. Il est aussi surprenant de constater que la prime V_0 ne dépend du modèle (2.3) que par l'intermédiaire de la volatilité σ : en particulier le rendement local $(\mu_t)_t$ n'intervient pas dans la formule.

Encadré 2. Formule de Black & Scholes.
Le prix (ou prime) de l'option d'achat de maturité T et de prix d'exercice K est donné par la fonction

$$\begin{cases} C(t,x) = & x\mathcal{N}[d_1(x/K,t)] - K\mathcal{N}[d_0(x/K,t)], \\ d_0(y,t) & = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\ln(y) - \dfrac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}, \\ d_1(y,t) & = d_0(y) + \sigma\sqrt{T-t}, \end{cases}$$

où $\mathcal{N}$ est la fonction de répartition de la loi normale, centrée réduite.
La stratégie de couverture associée est donnée à l'instant t par $\delta_t = C'_x(t,S_t) = \mathcal{N}[d_1(S_t/K,t)]$ parts de l'actif risqué.

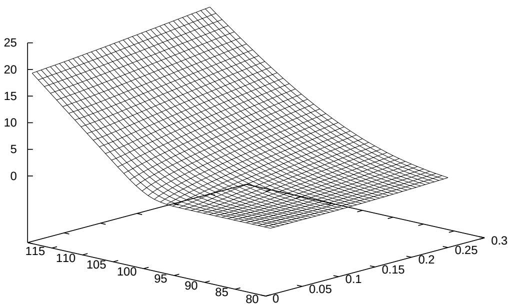


Figure 2 : Surface de prix en fonction de x et $T-t$

Reste enfin à comprendre pourquoi le prix de l'option est unique. L'hypothèse d'*absence d'opportunité d'arbitrage*, fondamentale en finance, va donner la réponse à ce problème : cette hypothèse exprime qu'il n'est pas possible de gagner de l'argent à coup sûr à partir d'un investissement nul. Ainsi pour l'option d'achat évoquée précédemment, si son prix était $V'_0 > V_0$, il suffirait de vendre un tel contrat, puis, avec la prime ainsi encaissée de suivre la stratégie $(\delta_t = \partial_x C(t,S_t))_{0\leq t\leq T}$ pour finalement générer *à coup sûr et à partir de rien* un profit $V'_0 - V_0 > 0$. Un raisonnement analogue vaut pour $V'_0 < V_0$: il suffit alors d'adopter une stratégie opposée – au sens mathématique du terme – à la précédente. Ceci montre finalement qu'il n'y a qu'un prix équitable, donné par la formule ci-dessus. Pour cette raison la stratégie δ_t est appelée *stratégie δ-neutre*.

Signalons pour terminer que le prix V_0 peut s'écrire aussi sous forme d'espérance mathématique, en utilisant la formule de Feynman-Kac liant la solution de l'équation de la chaleur et le mouvement brownien. Cette mise sous forme d'espérance de la valeur de la prime a ouvert la voie à de nombreux calculs explicites de primes d'options dans le cadre du modèle de Black-Scholes, mettant en évidence l'efficacité du calcul stochastique.

3 La pratique des marchés

La démarche décrite dans la section précédente, fondée sur la construction d'un portefeuille dynamique $(\delta_t)_{t\in[0,T]}$ *simulant* ou *répliquant* la valeur de l'option à sa maturité, à savoir $\max(S_T - K, 0)$ est au cœur de la modélisation en finance. On montre que ce type de situation se retrouve dans une classe beaucoup plus générale de modèles appelés marchés complets. Pour autant, on pourrait s'interroger en première analyse sur l'intérêt même de cette démarche : à quoi bon déployer tant d'efforts pour établir une formule donnant la valeur d'un contrat d'option à chaque instant de son existence, alors qu'il existe un marché négociable dont la raison d'être est précisément de fixer cette valeur par le jeu de l'offre et de la demande ? La réponse se cache en fait dans l'approche adoptée pour établir la formule. En effet, sans entrer dans le détail du fonctionnement d'un tel marché, il est clair qu'il existe à la maturité des gestionnaires (ou contreparties) des contrats d'option, qui *in fine* vont se trouver en face des détenteurs d'options et devront leur livrer la fameuse *cible stochastique* $\max(S_T - K, 0)$ euros (lorsque $S_T > K$ évidemment). Or que vont faire ces gestionnaires entre la date à laquelle ils ont encaissé la prime (en ayant vendu un contrat d'option) et sa maturité T ? Ils vont tout naturellement gérer en δ-neutre au fil du temps un portefeuille autofinancé constitué de δ_t actifs sous-jacents S à chaque instant t, afin de disposer de façon certaine (donc *sans risque*) de la cible stochastique $\max(S_T - K, 0)$ euros à la maturité : on parle aussi de *portefeuille de couverture* (on fait abstraction ici des coûts de transaction qui constituent la rémunération des acteurs du marché). Ils s'appuient pour ce faire sur la formule explicite donnant δ_t dans le modèle de Black-Scholes (cf. encadré 2). La formule précise importe peu ici, en revanche le point essentiel est la présence du paramètre de volatilité σ. Ce paramètre n'est pas observable instantanément sur le marché, il faut donc l'en ≪extraire≫ par une voie ou une autre. L'une, naturelle mais essentiellement ignorée par les financiers, est d'estimer σ statistiquement à partir de l'observation des cours. Ce comportement a-statistique a sûrement à voir avec la culture du milieu financier. Mais pas seulement : en fait les financiers ont beaucoup plus confiance dans le marché que dans le modèle. Forts de cette conviction, ils ≪inversent≫ le problème : la formule de Black & Scholes donnant le prix de l'option d'achat est fonction (cf. encadré 2) de paramètres connus à l'instant t – *i.e.* t, S_t, K, T – et d'un paramètre inconnu : la volatilité σ. On vérifie sans peine que la formule de Black-Scholes est une fonction strictement croissante et continue de σ, bijective sur l'ensemble des valeurs *a priori* possibles de l'option. Les gestionnaires utilisent alors le prix de marché pour extraire numériquement la *volatilité implicite*, unique solution à l'instant t de l'équation

$$C(t, S_t, T, K, \sigma_{\text{impl}}) = \text{Prime cotée}(t, K, T) \qquad \text{(pour une cotation de l'actif } S_t\text{)}.$$

Si le modèle de la dynamique de l'actif sous-jacent était adéquat, σ_{impl} vaudrait toujours σ au fil du temps, pour tous les prix d'exercice K. En pratique, il n'en est rien : la volatilité implicite varie non seulement avec le temps t, mais aussi selon les prix d'exercice K ! Ce phénomène est connu sous le nom de *smile de volatilité*, la courbe

$$K \mapsto \sigma_{\text{impl}}(t, K)$$

ayant dans certaines configurations de marchés la forme vaguement parabolique d'un sourire (voir Fig. 3).

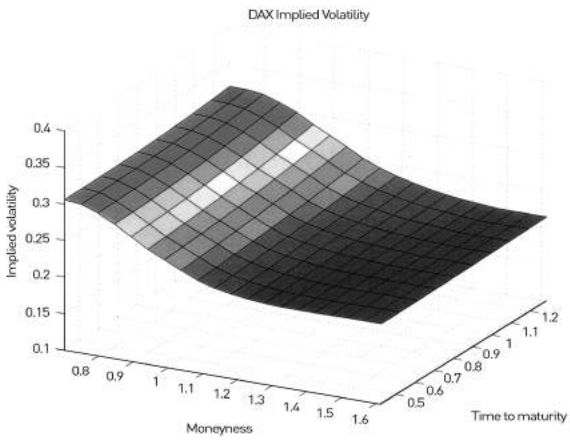


Figure 3 : Surface de volatilité implicite en fonction de K/S_0 et $T - t$ (simulation R. Cont).

Une fois extraite $\sigma_{\text{impl}}(t, K)$ du prix de marché par inversion numérique de la formule de Black-Scholes, le gestionnaire ayant vendu des options va ajuster son portefeuille de couverture en acquérant pour chacune des options de sous-jacent S, de prix d'exercice K et de maturité T dont il est contrepartie, exactement $\delta_t(S_t, \sigma_{\text{impl}}(t, K))$ actifs sous-jacents sur le marché de S.

Vu sous cet angle, on constate qu'un marché d'options négociables est donc un marché de la volatilité de l'actif sous-jacent à l'option. On observe là le comportement très pragmatique des agents face à l'inadéquation d'un modèle, plébiscité par ailleurs dès sa naissance pour sa maniabilité calculatoire. Dans un premier temps divers travaux ont confirmé le caractère qualitativement ≪robuste≫ du modèle de Black-Scholes : si le paramètre de volatilité σ est non plus constant mais aléatoire tout en restant compris entre deux bornes $\sigma_{\min}$ et $\sigma_{\max}$, alors les modèles de Black & Scholes de paramètres $\sigma_{\min}$ et $\sigma_{\max}$ encadraient les primes d'options du modèle général [EKJS98]. Mais de telles considérations qualitatives ne pouvaient satisfaire longtemps des utilisateurs que le krach de 1987 puis la crise asiatique de 1997 avaient rendus à chaque fois plus sensibles aux risques inhérents à la gestion des produits dérivés. L'idée a donc germé de mettre en place des modèles plus riches en paramètres, essentiellement en considérant la volatilité σ non plus comme un paramètre déterministe, mais comme un processus aléatoire, lui-même régi par un certain nombre de paramètres (voir plus bas). Ils entreprennent ensuite de caler – les financiers préfèrent l'anglicisme *calibrer* – sur les prix de marchés les plus liquides en tirant partie de son plus grand nombre de degrés de liberté. Cela se fait généralement *via* la *nappe de volatilité implicite* $(K,T) \mapsto \sigma_{\mathrm{impl}}(t,K,T)$ (juxtaposition de smiles de volatilité pour les maturités présentes dans le portefeuille), toujours par inversion de la formule de Black-Scholes : on détermine ainsi les paramètres du modèle ≪enrichi≫ permettant de reproduire au mieux cette nappe. C'est une façon de caler les paramètres à partir des primes d'option cotées sur le marché, dans un univers compatible avec l'intuition et le mode de communication des praticiens, tous deux fondés sur la volatilité. Une fois ces paramètres déterminés, il ne reste plus qu'à calculer les couvertures attachées aux options contenues dans le portefeuille et, si nécessaire, les prix d'options non cotées, généralement exotiques (voir plus bas). Il est alors également possible de se projeter plus avant dans l'avenir en calculant par simulation informatique ou par des méthodes d'équations aux dérivées partielles, la structure probabiliste du portefeuille, dans une semaine ou dans un mois, notamment la probabilité de sortir d'une certaine épure fixée à l'avance : c'est l'objet de la *value at risk* (calcul de risque), avatar financier de l'intervalle de confiance [ADEH99].

Pour enrichir le modèle de dynamique de l'actif, tout l'arsenal probabiliste est appelé à la rescousse : ajout d'une composante de sauts à la dynamique de l'action, dépendance de la volatilité en la valeur de l'action ($\sigma = \sigma(S_t)$), modélisation de la dynamique de la volatilité par un processus de diffusion plus ou moins décorrélé du mouvement brownien W qui régit le cours de l'actif sous-jacent, adjonction de sauts au processus de volatilité, etc. L'escalade semble sans fin et sans espoir de fin, à ceci près que si le calage d'un modèle est d'autant plus aisé qu'il dépend de nombreux paramètres, sa stabilité est, elle, inversement proportionnelle à ce foisonnement. Une règle que certains apprennent à leurs dépens lorsque d'un jour à l'autre, les paramètres de calage de la nappe de volatilité varient du tout au tout, entamant quelque peu la confiance en le modèle.

Jusqu'à maintenant, par souci de simplicité, nous nous sommes cantonnés au cas très particulier d'une option d'achat. Si ce cadre est historiquement celui qui a vu naître la théorie (dans [BS73], avec pour actif sous-jacent une action ne distribuant pas de dividende), il n'est aujourd'hui qu'un exemple parmi d'autres – particulièrement simple – de produit dérivé. En concomitance avec les options d'achat sont nées les options de vente (*Put*), puis diverses combinaisons des deux (options *spread*, *saddle*, *straddle*, *butterfly*, ...) bientôt rejointes par d'innombrables ≪droits conditionnels≫ dépendant non plus seulement de la valeur de l'action à la maturité mais de toute sa trajectoire de cotations entre 0 et T : citons pour mémoire l'option (d'achat) asiatique qui n'est autre qu'une option d'achat sur la moyenne $\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt$ des cours entre 0 et T, les options barrière(s), sans regret, cliquets, digitales, etc. Après des années d'euphorie technologique qui ont assuré le bonheur des virtuoses du mouvement brownien et de leurs étudiants, cette déferlante d'*options exotiques* semble se tarir quelque peu depuis le milieu des années 1990, l'estimation et la gestion du risque (*value at risk*, etc) prenant peu à peu le pas sur la complicité aussi féconde qu'inattendue entre probabilistes et commerciaux en produits dérivés. Signalons que ces options exotiques ne donnent généralement pas lieu à un marché négociable, mais plutôt à des transactions de gré à gré, y compris en direction des particuliers à travers les grands réseaux de banques de détail.

Si la nature des produits dérivés varie (presque) à l'infini, celle des supports (ou actifs sous-jacents) de ces produits n'est pas en reste, chacun d'entre eux introduisant une spécificité plus ou moins importante dans l'approche générale. Aux actions ne distribuant pas de dividende (en pratique les indices boursiers), sont venus s'adjoindre les options sur les taux de change, sur les contrats ≪futures≫ ([3]), sur les matières premières. Terminons cette énumération avec une mention toute particulière pour les produits dérivés sur obligations et taux d'intérêt dont l'actif sous-jacent commun est en quelque sorte la courbe des taux aux diverses échéances. Il s'agit d'un domaine d'une importance économique capitale de par les volumes qui s'y échangent et d'une grande complexité en termes de modélisation, puisqu'il s'agit de rendre compte des variations non pas d'une action ou d'un panier d'actions mais bien d'un (quasi-)continuum de taux (à 1 jour, 1 mois, 3 mois, 1 an, 3 ans , ..., 30 ans) variant aléatoirement entre eux et dans le temps, de façon plus ou moins corrélée : une sorte de processus aléatoire à valeurs dans un espace de fonctions. Parmi les domaines ayant émergé ou en développement, citons notamment les questions liées à l'optimisation de portefeuille, aux coûts de transaction, aux *hedge funds*,.... Récemment le *risque de crédit* ou *risque de défaut* et les différents produits associés ont pris une importance déterminante : il s'agit de se protéger contre le risque associé à des obligations – non paiement des coupons, perte partielle ou totale du capital – émises par une entreprise susceptible de faire faillite.

Autre ≪variable qualitative≫ propre au monde des options, l'étendue des droits d'exercice ; jusqu'ici nous avons évoqué de façon implicite les contrats dits ≪*européens*≫ accordant à leur détenteur le droit de recevoir *à la date* T un flux monétaire égale à $\max(S_T - K, 0)$. Si ce droit est étendu à tout l'intervalle de temps $[0, T]$, c'est-à-dire si l'on peut exercer une et une seule fois à une date t de son choix le droit de recevoir $\max(S_t - K, 0)$, on parle alors d'option américaine. Il s'agit là d'un problème dit d'arrêt optimal induisant pour le détenteur du contrat une prise de décision en environnement aléatoire. La plupart des marchés organisés d'options sur actions ou indices traitent des options américaines.

4 Développements mathématiques

Le développement des marchés de produits dérivés dans les années 1970 et 1980, mais aussi les crises qui les ont secoués à plusieurs reprises ont puissamment contribué à l'épanouissement et au développement de diverses branches des mathématiques appliquées, en premier lieu des probabilités et du calcul stochastique ; le fait le plus marquant à ce jour reste sans doute le basculement brutal du mouvement brownien, de la formule d'Itô et des équations différentielles stochastiques du cénacle des probabilistes les plus purs... aux amphis des écoles de commerce ! L'exemple, en ce qui concerne les mathématqiues, n'est pas unique mais, à l'époque récente, il est particulièrement spectaculaire. Une autre spécificité notable est liée à la nature même des marchés financiers : activité humaine mûe par l'urgence, en permanente mutation, la modélisation y tient une place à la fois centrale et volatile : ce qui est vrai aujourd'hui peut ne plus l'être demain. Le mathématicien, par nature avide de problèmes, peut y trouver son compte : tout financier est avide de solutions ! Mais l'un et l'autre ne sont pas à l'abri parfois de quelques désillusions car là où le mathématicien s'attachera avant tout à une résolution rigoureuse et exhaustive du problème posé, le financier privilégiera l'≪interprétabilité≫ des modèles et de leurs paramètres (pour avoir une représentation mentale de l'univers des décisions possibles) et surtout la calculabilité (formules explicites, performances

[3] Contrats à terme négociables qui ont fait le succès du MATIF parisien jusqu'au milieu des années 1990, aujourd'hui négociés également à Francfort (BUND) et à Londres (LIFFE).

numériques,...) seule à même de préserver sa réactivité lors de transactions délicates (dont l'unité de temps est la seconde).

Le domaine où l'interaction avec la finance a été la plus forte est clairement celui des probabilités : calcul stochastique et mouvement brownien dans un premier temps, notamment lors de l'émergence des option exotiques. Puis, peu à peu, la complexité croissante des produits, l'escalade des modèles, la multiplication des indicateurs à calculer pour cerner le risque, ont conduit à des situations où les calculs explicites doivent au moins partiellement céder le pas à des méthodes numériques. Deux grandes familles de méthodes sont disponibles, celles issues de l'analyse numérique et celles issues des probabilités numériques. Chacune de ces deux disciplines peut se résumer en un mot ou presque : équations aux dérivées partielles pour l'une, méthode de Monte Carlo pour l'autre (calcul d'une moyenne par simulation informatique massive de scénarios aléatoires). Si l'analyse numérique, pilier historique des mathématiques appliquées en France, a trouvé là une nouvelle source de problèmes où mettre en œuvre des méthodes à l'efficacité souvent éprouvée, il est clair que les probabilités numériques ont connu, sous l'impulsion de la finance quantitative, un essor sans précédent, notamment en ce qui concerne les méthodes de discrétisation de processus (notamment sous l'impulsion de Denis Talay à l'Inria). La plupart des grands domaines des probabilités sont mis à contribution, jusques et y compris le calcul de Malliavin (ou calcul des variations stochastiques), venu récemment y jouer un rôle important, et à certains égards inattendu. D'autres champs des probabilités ont connu un véritable bain de jouvence comme toute la théorie de l'arrêt optimal *via* les options américaines, ou l'optimisation, omniprésente de la couverture moyenne-variance à la Föllmer-Sondermann aux innombrables algorithmes de calibration. Le développement des probabilités numériques et de la simulation ne s'est pas fait au détriment d'aspects plus théoriques puisque, depuis quelques années, les processus à sauts, plus communément associés aux problèmes de file d'attente et de réseaux, sont aujourd'hui eux aussi utilisés massivement en modélisation financière, généralement dans leurs aspects les plus sophistiqués (*processus de Lévy*, voir par exemple [CT04]).

Enfin, comme c'est souvent le cas dans ce type d'interaction, la modélisation financière a fait émerger en retour des problématiques nouvelles qui se développent de façon essentiellement autonome au sein des probabilités : c'est notamment le cas de questions soulevées par la généralisation de la notion d'arbitrage, soit à des espaces de processus de plus en plus généraux, soit à des modélisations plus réalistes des activités de marché (prise en compte de fourchettes d'achat-vente sur les cotations, bornes diverses sur les marges d'action des gestionnaires, etc).

5 Formation

Le développement des mathématiques financières dans les années 1980 a eu un impact fort en termes de formation en mathématiques appliquées, essentiellement en probabilités, sous l'impulsion initiale de Nicolas Bouleau, Nicole El Karoui, Laure Élie, Hélyette Geman, Jean Jacod, Monique Jeanblanc, Damien Lamberton, Bernard Lapeyre. Dès la fin des années 1980, les premiers cours de calcul stochastique orientés vers la finance se créent, notamment à l'École nationale des ponts et chaussées, puis rapidement à l'École polytechnique. Fait notable, les universités ne sont pas en reste, notamment sur le campus de Jussieu, et, à la même époque, s'ouvrent des cursus spécialisés en finance au sein des DEA probabilistes des universités Paris VI et Paris VII. Le succès est foudroyant et ne se dément pas : si la première promotion de la filière *Probabilités & Finance* du DEA de Probabilités et Applications de l'université Paris VI (en collaboration avec l'École polytechnique pour ce qui concerne la thématique Finance) ne comptait que 5 diplômés en 1991, depuis 2003 chaque promotion en compte généralement plus de 80. Une dynamique similaire est observée à l'université Paris VII. Entre temps les formations de 3^{e} cycle universitaire – DEA ou DESS – sont devenues Master (2^{e} année) ≪Recherche≫ et ≪Professionnels≫ respectivement. Aujourd'hui, rien qu'en Ile-de-France, et en se cantonnant spécifiquement à ces formations, trois autres formations orientées vers les mathématiques financières se sont développées avec succès : le DEA *Mathématiques Appliquées aux Sciences Économiques* de Paris IX (devenu Master 2 MASEF) et le Master 2 *Analyse & Systèmes aléatoires* (parcours Finance) à l'université de Marne-la-Vallée, le DESS *Ingénierie financière* à l'université d'Évry-Val-d'Essonne. Toutes font bénéficier les étudiants des points forts reconnus de leurs équipes de recherche locales (modélisation, calcul stochastique, probabilités numériques, économétrie, statistique,. . .). On peut évaluer entre 150 et 200 le nombre d'étudiants diplômés chaque année par ces seules formations universitaires franciliennes (qui fonctionnent souvent en partenariat avec des écoles d'ingénieurs ou de commerce et accueillent nombres d'élèves de ces établissements en quête d'une formation spécialisée de pointe). Du côté des écoles d'ingénieurs, outre l'École polytechnique, l'ENPC, l'Ensae, Sup'Aéro à Toulouse ou l'Ensimag à Grenoble, très en pointe dans ce domaine, de nombreuses filières spécialisées en mathématiques financières fleurissent et l'on peut ainsi évaluer à environ 15 % la proportion de polytechniciens accédant aux métiers de la Finance quantitative *via* leurs compétences mathématiques.

Au-delà de leurs spécificités ou de leurs orientations plus professionnelles ou académiques, ces formations sont un passage obligé pour les aspirants analystes quantitatifs (≪*Quant*≫ en anglais). Elles s'articulent autour des trois axes constitutifs de l'activité : modélisation (fondée notamment sur le calcul stochastique), probabilités et analyse numériques, optimisation, algorithmique et programmation (voir [EKP04] pour plus de détails). Il faut être conscient que les cellules de recherche des banques dans lesquelles nombre de *quants* entament leur carrière fonctionnent généralement comme prestataires pour d'autres services de leur institution (salle de marché, gestionnaire,. . .). Elles fonctionnent donc comme de petites structures de type PME. Ceci se révèle d'autant plus vrai dans des institutions de taille plus modeste (sociétés de gestion, fonds, etc). Il y a donc une véritable exigence de polyvalence.

L'impact des mathématiques financières s'observe aussi au sein de filières non prioritairement mathématiques. Notamment dans les programmes de formations plus anciennes couronnant généralement des études en économie ou en gestion (DEA *Banques & Finance* à Paris I, *203* à Paris IX, les formations d'actuariat comme celle de Lyon II ou de l'ENSAE,. . .) ou dans celui d'écoles de commerce comme HEC ou l'ESSEC à des degrés divers, parfois élevés, parfois plus utilitaires, les mathématiques (pour la Finance s'entend. . .) y prennent une place significative. Ceci illustre la place prise par la culture en mathématiques appliquées dans des domaines *a priori* moins ≪quantitatifs≫ comme la gestion ou la vente (*sales*, *trading*) d'actifs ou de produits financiers.

Si la France occupe une place de choix dans la formation des ≪*quants*≫, due en grande partie à l'importance traditionnellement accordée aux mathématiques dans la formation des jeunes français, l'emploi en Finance de marché est évidemment en rapport direct avec l'importance des places financières. Aujourd'hui l'Europe de la Finance et les emplois qui l'accompagnent se développent essentiellement à Londres où une part chaque année croissante de jeunes diplômés va mettre en œuvre le savoir-faire acquis dans l'Hexagone. Et Londres n'est pas, loin de là, leur seule destination : nombre d'entre eux n'hésitent pas à répondre à l'appel du large et s'en vont faire leurs premières armes à New York ou à Tokyo,. . .

En ce qui concerne notre capacité d'attraction d'étudiants étrangers dans ce contexte favorable, elle est incontestable ; même si elle reste freinée par la barrière de la langue et les problèmes d'adaptation au système français, notamment, en matière d'évaluation : le critère quasi unique retenu en France – la résolution de problèmes en temps limité – est loin d'être universellement adopté par le reste du monde et les étudiants étrangers y sont souvent mal préparés. À l'inverse, la quasi-gratuité de notre système d'enseignement supérieur devrait, si elle perdure, constituer à terme un atout majeur. Une spécificité qui ne manque pas d'étonner outre-Manche et outre-Atlantique où le coût des formations analogues s'élève à plusieurs dizaines de milliers d'euros.

En conclusion, constatons que le message a diffusé dans les générations montantes et que l'on observe de plus en plus d'étudiants de second cycle et d'élèves-ingénieurs qui poursuivent – voire parfois s'échinent à poursuivre – des études de mathématiques avancées dans l'unique but d'accéder ainsi aux métiers de la finance de marché. Que l'on s'en réjouisse ou qu'on le déplore, le calcul stochastique et, par extension, les probabilités et les mathématiques appliquées sont devenus depuis quinze ans ≪La≫ voie d'accès de la filière scientifique aux métiers de la finance de marché. À l'heure actuelle, c'est une autoroute, l'avenir dira ce qu'il en est.

References

Quelques références historiques

[BAC00] L. Bachelier, *Théorie de la spéculation*, thèse, *Ann. Sci. de l'Ecole Norm. Sup.*, Série 3, janvier 1900, **17**: 21-86.

[BS73] F. Black, M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, **81**: 637-654, 1973 (May-June).

[CRR79] J.C Cox, S.A. Ross, M. Rubinstein. Option pricing : a simplified approach, *Journal of Financial Economics*, 1979, **7**, pp. 259-261.

[GK83] M. Garman, S. Kohlhagen. Foreign currency option values, *Journal of International Money and Finance*, **2**:231-237, 1983.

[HK79] M. Harrison, D. Kreps. Martingales and Arbitrages in Multiperiod Securities markets, *J. of Econom. Theory*, **29**(3): 381-408, 1979.

[HP81] M. Harrison, S. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, *Stochastic Process. Appl.*, 1981, **11**(3):215-260.

[ME73] R.C. Merton. Theory of rational option pricing. *Bell J. Econom. and Management Sci.*, **4**:141-183, 1973.

[Mer76] R.C. Merton. Option pricing when the underlying stock returns are discontinuous, *J. of Financial Economics*, 1976, **3**:125-144.

Quelques références à vocation introductive (de niveaux d'accès variés)

[DJ03] R.A. Dana, M. Jeanblanc. *Marchés financiers en temps continu, valorisation et équilibre*, 2e édition, Économica, Paris, 1994. Traduction anglaise *Financial markets in continuous time*. Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[Duf94] D. Duffie . Modèles dynamiques d'évaluation. P.U.F., Paris, 1994.

[EK02] N. El Karoui. Mesures et couverture de risques dans les marchés financiers, *MATAPLI*, **69**:43-66, 2002.

[EKP04] N. El Karoui, G. Pagès, Comment devenir *Quant* ?, téléchargeable à l'URL `http://www.maths-fi.com/devenirquant.asp`, 2004.

[FO01] H. Föllmer. Probabilistic Aspects of Financial Risk. Plenary Lecture at the Third European Congress of Mathematics. *Proceedings of the European Congress of Mathematics, Barcelona, 2000*, Birkhäuser (2001).

[FS02] H. Föllmer, A. Schied. *Stochastic Finance*, vol. 27, de Gruyter Studies in Mathematics, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2004, 2e edition. An introduction in discrete time.

[Hul03] J.C. Hull. *Options, Futures and other Derivatives*, Prentice Hall International, Editions. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2003.

[LL97] D. Lamberton, B. Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipses édition Marketing, 2e édition, Paris, 1997. Traduction anglaise *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall, 1996

[MAPR00] L. Martellini, P. Priaulet, *Produits de taux d'intérêt : méthodes dynamiques d'évaluation et de couverture*, Économica, 2000.

[PB99] G. Pagès, C. Bouzitat, *En passant par hasard, les probabilités dans la vie quotidienne*, 3è édition, Vuibert, Paris, 2003. Partie IV, La Bourse et la vie: 185-258.

[RO04] T. Roncalli, *La gestion des risques financiers*, Économica, Paris, 2004.

Quelques références plus avancées

[ADEH99] P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Elber, D. Heath. Coherent measures of risk. *Math. Finance*, **9**(3):203-228, 1999.

[CT04] R. Cont, P. Tankov, *Financial modelling with jump processes.* Financial Mathematics Series. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.

[DS98] F. Delbaen, W. Schachermayer. The fundamental theory of asset pricing for bounded stochastic processes, *Math. Ann.*, **312**(2):215-250, 1998.

[EKJS98] N. El Karoui, M. Jeanblanc, S.E. Shreve. Robustness of the Black and Scholes formula. *Math. Finance*, **8**(2):93-126, 1998.

[KS98] I. Karatzas, S.E. Shreve. *Methods of mathematical finance*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[MP02] D. Madan, S.R. Pliska editors. *Mathematical Finance Bachelier Congress 2000*, Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, 2002. Selected papers from the 1st World Congress of the Bachelier Finance Society held in Paris, June 29-July 1, 2000.

[RT97] L.C.G. Rogers, D. Talay editors. *Numerical Methods in Finance*, Publications of the Isaac Newton Institute series, Cambridge University Press, 1997.