Curso 2012/13
HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES/13
I.S.B.N.: 978-84-15910-92-3

MANUEL GONZÁLEZ DE LA ROSA

Logística y distribución comercial: modelos de gestión de inventarios con patrón de demanda potencial

Directores
JOAQUÍN SICILIA RODRÍGUEZ
ISABEL MONTERO MURADAS

SERVICIO DE PUBLICACIONES
UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS
Serie Tesis Doctorales

A mis hijos, Eduardo y Gabriel

A todos mis sobrinos

AGRADECIMIENTOS

Son muchas las personas a las que debo agradecer su esfuerzo y apoyo, sin las cuales no habría podido hacer realidad este trabajo de investigación.

En primer lugar, quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mis directores de tesis, Dr. D. Joaquín Sicilia Rodríguez y Dra. Dña. Isabel Montero Muradas, por el tiempo que me han dedicado, su compromiso y constante entrega. Valoraré toda mi vida el que hayan estado a mi lado, orientándome y ayudándome a realizar esta investigación, así como su estímulo para hacerme disfrutar de la materia objeto de estudio. También, les doy las gracias por la confianza depositada en mí, el ánimo que me han dado en los momentos difíciles y su colaboración en la resolución de los problemas con los que me he encontrado.

Por supuesto, transmito mi gratitud a mis compañeros de Departamento por haberme acompañado, aconsejado y motivado continuamente. Además, a mis amigos por todo lo que aportan a mi vida y a aquellos que me han dado su apoyo incondicional durante estos años.

Finalmente, agradezco a mi familia su paciencia, cariño y compañía permanente. Su profunda comprensión ha sido decisiva para avanzar y concentrar todos mis esfuerzos en el desarrollo y la culminación del trabajo.

A todos, muchas gracias

UNIVERSIDAD DE
LA LAGUNA

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE GENERAL

UNIVERSIDAD DE
LA LAGUNA

INTRODUCCIÓN

PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

INTRODUCCIÓN

PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

(i) Introducción al tema objeto de investigación

En el contexto actual de profunda crisis, la globalización de la economía y el fuerte incremento de la competencia obligan a las empresas a optimizar los recursos de los cuales disponen, con el objetivo de generar ventajas competitivas que les permitan obtener ingresos y beneficios, propiciando su viabilidad económica y su crecimiento. Por ello, la gestión adecuada de las operaciones empresariales y el control de los gastos, son aspectos vitales para la subsistencia de las organizaciones.

Es precisamente ahí donde la Economía de la Empresa y la Investigación Operativa juegan un papel relevante como disciplinas científicas que facilitan y favorecen la adopción de decisiones, proporcionando un conjunto de modelos y técnicas de resolución que permiten afrontar una amplia variedad de problemas reales. De esa manera, recurriendo a sus metodologías y procedimientos se intenta investigar la forma más eficaz y eficiente de manejar, operar o hacer uso de los escasos recursos disponibles para alcanzar los mejores resultados posibles, a través de la construcción de modelos y la utilización de técnicas de optimización que permitan elegir la mejor alternativa de las disponibles. En concreto, de entre todos esos modelos destacan aquellos relativos a la gestión empresarial y, en particular, los referidos a los problemas relacionados con el mantenimiento y la reposición de materiales y bienes a lo largo de la cadena de suministro.

Sin duda alguna, una de las actividades empresariales en la que la reducción de gastos puede ser determinante se materializa en la cadena logística y el circuito de la distribución comercial, mediante el control de los niveles de artículos depositados en los almacenes de las empresas, es decir, por medio de la gestión de stocks. Desde esa perspectiva, la Teoría de Inventarios proporciona una metodología y un cuerpo de conocimientos que permiten analizar y controlar las operaciones relativas al mantenimiento y gestión de los productos. En el marco de esta disciplina ocupa un lugar preferente el diseño, la formulación y el estudio de modelos de gestión de stocks destinados a especificar y caracterizar las variables de decisión que permiten cuantificar los gastos de mantenimiento y de reposición de los artículos. De ahí que, mediante el empleo de los mismos, se puedan determinar las políticas de gestión más eficientes que permitan reducir costes y como consecuencia, incrementar los beneficios derivados del adecuado almacenamiento de las existencias.

Conviene precisar que, tanto en los puntos de venta como en las unidades de producción, se hace necesario mantener artículos en stock con la finalidad de satisfacer la demanda futura de los clientes. Ello origina que, desde el punto de vista económico, se genere una situación, poco deseable, de incertidumbre, debido a que se hace necesario invertir fondos en inmovilizado para posteriormente, con su venta, intentarlos recuperar y obtener, también, un margen de beneficio.

Otra cuestión a considerar es que, lógicamente, la actividad del almacenamiento requiere un manejo que podría dañar los artículos mantenidos en inventario, los cuales, por consiguiente, no podrían venderse y obligaría a considerar costos adicionales derivados del mantenimiento de los stocks. En ese sentido, por una parte, poseer bienes almacenados puede generar un incremento de los costes de mantenimiento y de comercialización pero, por otra, los stocks son sumamente indispensables para hacer frente a eventos inesperados como demandas imprevistas, averías en la maquinaria que interviene en los procesos productivos, tiempos de servicio aleatorios, así como problemas de calidad.

La resolución de un problema de inventario consiste en adoptar las decisiones adecuadas para garantizar la buena gestión de stocks. Esas decisiones van encaminadas a controlar los costes relativos a su mantenimiento y reposición. Aunque dichas decisiones afectan directamente a los costos que intervienen en los sistemas de inventarios, no es usual que se tomen en términos de coste sino, más bien, en función del tiempo y la cantidad. Por ello, esos elementos configuran las variables determinantes que controlan el sistema de inventario e inciden en los costes relacionados con la administración y mantenimiento de los stocks.

En definitiva, con respecto a los diferentes modelos de gestión de stocks, se debe estudiar la forma de responder a las cuestiones planteadas relativas a cuándo y cómo reponer el inventario para determinar la política más adecuada a la hora de administrarlo, gestionarlo y optimizar su coste total.

(ii) Importancia e interés del problema a analizar

La gestión de stocks, en el ámbito de la logística y la distribución comercial, es una materia transcendental para el correcto funcionamiento de las operaciones empresariales llevadas a cabo en todos los sectores de la actividad económica. Por ello, su estudio y análisis ha despertado el interés de muchos investigadores: Carrallo (1978), Ballou (1991), Prida y Gutiérrez (1995), Soret Los Santos (1999), Cuatrecasas (1999), Zermati (2004), García Sabater et al. (2005), Parra Guerrero (2005), Anaya Tejero (2011), entre otros.

Una de las preocupaciones fundamentales del ser humano, en un mundo de recursos limitados, es el diseño de formas eficientes de producción, gestión o administración de productos para lograr alcanzar ciertas metas, impuestas a priori, que se consideran ideales para la colectividad. Esa forma de diseñar o administrar conlleva, implícitamente, la optimización de una serie de objetivos que se consideran relevantes en el contexto de las diferentes situaciones planteadas.

Hasta tiempo relativamente reciente, la empresa se ha enfrentado a mercados con perfiles definidos, predecibles e identificables, conformados por clientes a los que ha satisfecho, ofertando productos y servicios concretos. En la actualidad, sin embargo, el progresivo proceso de apertura de los mercados, ha convertido al entorno empresarial en un medio dinámico y cambiante, caracterizado por la alta competitividad, en el cual no existen puntos de referencia estables y donde la evolución de los acontecimientos económicos condiciona la toma de decisiones. Se hace preciso, pues, no sólo asumir los cambios sino, en la medida de lo posible, adelantarse a ellos, de manera proactiva, mediante una flexible y continua adaptación de las estructuras, los sistemas y los procedimientos empresariales.

Tradicionalmente, para asegurar un buen nivel de servicio al cliente, las compañías solían mantener altos niveles de inventario. Hoy en día, en una situación de crisis generalizada que afecta a, prácticamente, todos los sectores de actividad, las empresas se han dado cuenta que los costes se pueden reducir considerablemente con un buen control de los stocks a lo largo de la cadena de suministro. Dentro de ese ámbito de actuación, la misión de la logística consiste en planificar y coordinar las actividades necesarias para conseguir niveles aceptables de servicio y calidad, con la finalidad de satisfacer las necesidades de los clientes al menor coste posible, conectando al mercado con la empresa y llevando a cabo actividades que van, desde la gestión de las materias primas hasta la entrega de los productos terminados (Díez de Castro, 1992; Castán et al., 2000; Pau y Navascués, 2001; Ballou, 2004).

El estudio de los modelos de gestión de inventarios mejora la eficacia de las operaciones empresariales relacionadas con la cadena de suministro y la distribución de los productos, generando propuestas y alternativas que permiten incrementar la eficiencia y competitividad de las organizaciones. Mediante las técnicas adecuadas de optimización, se pueden desarrollar herramientas de ayuda a la toma de decisiones, que permitan a las empresas adaptarse a las demandas actuales del mercado, provocadas por la necesidad de diferenciación y diversificación de los artículos ofertados. De esa manera, aunque las empresas pueden haber invertido mucho en tecnología de fabricación, distribución y almacenamiento, aumentando en gran medida su capacidad productiva y logística, la gran cantidad y variedad de productos que deben fabricar, con ciclos de vida muy cortos y cada vez más personalizados o adaptados a las necesidades de los clientes, requieren de complejas operaciones logísticas en las cuales se debe invertir mucho tiempo y dinero.

Partiendo de ese escenario, la Investigación Operativa, que es la referencia que adoptamos para la realización de nuestro análisis a lo largo del presente trabajo de investigación, se orienta al estudio de problemas reales de optimización y control, bajo la suposición de que éstos se pueden modelar y resolver aplicando el método científico. Mediante este método científico utilizamos estructuras matemáticas para describir relaciones entre parámetros y variables que caracterizan las propiedades de los sistemas. En ese contexto, establecemos determinados objetivos que son abordados usando las técnicas apropiadas con el fin de determinar, para cada situación planteada, su solución óptima.

En los últimos años se ha prestado un notable interés al estudio de los Modelos de Gestión de Inventarios, con el fin principal de determinar los niveles de stock idóneos para satisfacer la demanda de los clientes y analizar posibles estrategias de minimización de los costes de mantenimiento y reposición de los bienes, así como de los costes de rotura y deterioro. Como resultado de esas investigaciones, hoy en día, disponemos, en la literatura, de un gran número de modelos que abordan esta materia. Sin embargo, como los sistemas de inventario y la comercialización de los productos evolucionan constantemente y son cada día más complejos, es preciso realizar un esfuerzo continuo para diseñar y analizar nuevos y más completos modelos, que permitan seguir manteniendo un control adecuado de las variables de decisión que controlan y optimizan el funcionamiento de los sistemas productivos, comerciales, logísticos y de distribución, presentes a lo largo de la cadena de suministro de cualquier artículo. De ahí que nuestro estudio sobre modelos de gestión de inventarios, tenga la finalidad de facilitar decisiones estratégicas que contribuyan a mejorar la productividad y competitividad de las empresas, enmarcándose en un campo científico amplio, complejo y multidisciplinar en el que es necesario profundizar de cara a despejar interrogantes e intentar realizar nuevas aportaciones.

(iii) Metodología, fases del proceso analítico e hipótesis de partida

La metodología que seguimos consiste, primero, en determinar las propiedades que caracterizan el problema de gestión de inventarios a estudiar para, seguidamente, formalizar un modelo que recoja dichas propiedades y represente adecuadamente al sistema real. Una vez determinadas las variables de decisión que influyen en los costos relativos al sistema de inventario, intentamos determinar las estrategias o políticas de decisión más eficaces y eficientes, utilizando técnicas de optimización y herramientas matemáticas que nos ayuden a caracterizar el conjunto de soluciones óptimas.

En cuanto al plan de trabajo, en un principio, hacemos una recopilación de la bibliografía existente más relevante sobre los temas anteriormente citados, comentando las principales referencias relacionadas con la materia objeto de estudio. A partir de ahí, seguimos un proceso progresivo de profundización en materia de control y gestión de inventarios, estudiando, en primer lugar, los problemas de stocks más sencillos, para a continuación abordar otros modelos más complejos. Finalmente, intentamos diseñar un procedimiento eficiente que determine la política óptima de inventario para cada uno de los sistemas analizados.

Las fases principales de nuestro estudio comprenden, por tanto, la definición del problema de inventario, la construcción del modelo matemático que lo estructure y formalice, la determinación de su solución, esto es, la mejor política de inventario que debe considerarse, así como su validación práctica y la implementación de esa solución.

Con la definición del problema, tratamos de determinar su alcance, identificando, por una parte, la descripción de las alternativas de decisión, y por otra estableciendo, de manera clara, el objeto de estudio y la especificación de las hipótesis, limitaciones o restricciones bajo las cuales funciona el sistema modelado. Este paso inicial es primordial para el desarrollo de nuestro análisis cuantitativo ya que debemos reflejar, de manera explícita, una representación segura del comportamiento global del sistema de inventario con la finalidad de adoptar decisiones que afecten a su control y gestión.

A continuación, la construcción del modelo implica traducir la definición del problema a relaciones matemáticas que representen la evolución del inventario, lo cual depende de las diferentes variables que influyen en el sistema y su grado de complejidad. Así, el modelo deberá tener una solución que sea realista, aplicable y fácil de entender.

Por su parte, mediante el análisis cuantitativo buscamos obtener la solución óptima, es decir, la mejor solución matemática que minimice el coste total relacionado con la gestión del inventario. Esa solución del modelo conlleva el uso de técnicas y algoritmos de optimización bien definidos. En ese sentido, es conveniente reseñar que los modelos de gestión de stocks han de ser probados, tanto para determinar su validez interna, lo cual implica que las representaciones matemáticas han de tener sentido, como su validez externa, con la finalidad de que los resultados obtenidos sean coherentes cuando se comparan con la realidad de la situación que estamos estudiando.

La validación del modelo de inventario permite comprobar si éste representa y explica en forma adecuada el comportamiento del sistema objeto de estudio, así como si la solución tiene aplicabilidad. La interpretación de los resultados conlleva examinarlos a la luz de los objetivos propuestos, debiendo determinar las implicaciones de su desarrollo y aplicación. Además, como el modelo es una aproximación de la realidad, debe analizarse la sensibilidad de su solución, estudiando la política óptima de inventario ante los cambios que ocurran en los insumos o parámetros de entrada del sistema.

Finalmente, la implementación de la solución del modelo validado tiene como objeto traducir los resultados obtenidos en detalladas instrucciones de operaciones para la gestión del inventario. Téngase en cuenta que la solución óptima de un modelo matemático no es siempre la política que debe ser implementada por la empresa, ya que la decisión final la debe tomar el ser humano utilizando el sentido común y considerando los condicionantes del entorno, junto con las posibilidades o recursos físicos y económicos de las organizaciones.

Si bien, el control de las operaciones propias de un almacén de mercancías en donde hay que decidir qué cantidad de un determinado tipo de artículo hay que reponer y en qué instante hay que solicitar ese pedido es el principal objetivo de los modelos de gestión de stocks, dichos modelos abarcan diferentes situaciones prácticas, que deben recoger una variedad de características o hipótesis, las cuales permiten configurar la actividad a realizar en relación con el inventario.

Las hipótesis de partida de los sistemas de gestión de stocks se encauzan hacia las propiedades que configuran los sistemas de inventario. Dichas propiedades tienen que ver con sus cuatro componentes fundamentales: la demanda de los clientes, las reposiciones que deben especificar los vendedores, los costos relacionados directamente con la gestión de los stocks y por último, las restricciones físicas, económicas y ambientales que influyen y condicionan la evolución de las otras componentes. Por tanto, según sea el comportamiento de la demanda, según sea la decisión tomada por el empresario e intermediario en los canales de distribución en relación con las reposiciones, así como la posibilidad o no de asumir rotura de stocks, se configuran una serie de hipótesis de partida que caracterizan el sistema de inventario a estudiar.

Entre las hipótesis de partida, nos podemos encontrar con sistemas de inventarios en los que no se permita rotura; sistemas donde la demanda de los clientes puede considerarse constante, o bien variable y dependiente del tiempo; inventarios en los cuáles la pérdida de ventas sea relevante, etc. En ese sentido, debe tenerse en cuenta que cuando hay roturas de stocks, existe la posibilidad de gestionar inventarios con pérdida de ventas, o bien, con demanda en espera, lo cual se traduce en que si no hay existencia de los artículos solicitados por los clientes, éstos estarían dispuestos a esperar a la llegada de nueva mercancía para satisfacer sus necesidades. También, puede darse que la reposición sea instantánea o que ésta requiera un periodo de tiempo durante el cual se produciría el aprovisionamiento, en cuyo caso, la razón de reposición podría ser fija o variable con el tiempo. Además, se podría considerar la existencia o no de un posible deterioro de los artículos, lo cual incidiría en la disminución del nivel del inventario.

Así, considerando esas hipótesis, cualquier mejora operacional en la cadena de planificación, localización, producción, inventario y distribución, supondría un ahorro notable de costos y la consiguiente mejora de los beneficios empresariales. También, es preciso reseñar que, a pesar de que, desde hace varias décadas, la literatura científica ha aportado un amplio número de modelos teóricos, éstos no siempre permiten resolver todos los problemas reales, debido a su amplia complejidad y a la aparición de nuevos retos inherentes al crecimiento y desarrollo de la sociedad. Para estas situaciones, desafortunadamente, las técnicas conocidas pueden no ser adecuadas, necesitándose generar procedimientos y algoritmos eficientes que contemplen sus requerimientos en toda su amplitud, complejidad y diversidad de situaciones.

En consecuencia, es preciso diseñar nuevos modelos y métodos que aborden la planificación estratégica de las actividades relacionadas con la gestión y almacenamiento de stocks, aportando soluciones específicas que incorporen las hipótesis y los aspectos más relevantes de los sistemas, de cara a la determinación de políticas óptimas de inventario que sitúen a las empresas en las mejores condiciones de competitividad. Por ello, en cada uno de los capítulos del presente trabajo de investigación, se irán especificando las hipótesis de partida y los aspectos más determinantes para cada uno de los modelos que son objeto de análisis.

(iv) Objetivos y alcance del estudio

En línea con las ideas señaladas en los apartados anteriores, donde se ha comentado la metodología empleada en los modelos de inventarios que vamos a analizar, así como el marco general de las hipótesis de partida, los objetivos que pretendemos conseguir con el desarrollo del presente trabajo son los siguientes:

Objetivo 1: Estudio de modelos de cantidad económica de pedido con demanda variable en el tiempo y patrón potencial.

Nos proponemos analizar modelos de gestión de stock donde la demanda no es constante, sino que la misma puede depender del tiempo. En concreto, analizaremos sistemas en los cuales la demanda pueda ser lineal, o bien potencialmente creciente o decreciente, planteando diferentes situaciones, en función de si es permitida o no la existencia de roturas en el inventario. En caso de admitir la falta de stock para cubrir la demanda, abordaremos, por una parte, el supuesto en el cual los clientes están dispuestos a esperar al suministro de nueva mercancía y por otra, el caso en el que se genera una pérdida de ventas derivada de la no espera por parte de los clientes a la llegada de la siguiente reposición. En todos los supuestos, formularemos la función de coste total, que engloba los costes relacionados con el mantenimiento, la rotura y la reposición del inventario, determinando cuándo se deberá reponer el stock junto con la cantidad óptima que minimiza su coste total de gestión.

Objetivo 2: Análisis de modelos de tamaño del lote con deterioro.

Pretendemos estudiar nuevos modelos de inventario que, además de admitir demanda dependiente del tiempo y patrón potencial permitan, también, considerar la existencia de una fracción de artículos o productos en stock que pueden sufrir deterioro. Por tanto, se deberá tener en cuenta, aparte del coste de mantenimiento y reposición, el coste originado por el deterioro de los artículos. En concreto, analizaremos, en primer lugar, el modelo de inventario para bienes con posibilidad de presentar deterioro, asumiendo la inexistencia de roturas y, a continuación, la situación en la cual se producen roturas de stocks y éstas son recuperables, es decir, los clientes están dispuestos a esperar a la llegada de la siguiente reposición para satisfacer sus necesidades. Desde la perspectiva de la minimización de los costes que intervienen en el pedido y en el mantenimiento de los productos almacenados, buscaremos determinar la política óptima de inventario.

Objetivo 3: Estudio de modelos de cantidad económica de producción con demanda dependiente del tiempo y periodo de reposición no instantáneo.

Analizaremos sistemas de inventario en los cuales la demanda de los clientes sigue un patrón potencial y existe un período de tiempo durante el cual se añade stock al inventario, mediante una tasa de reposición de la mercancía. En estos modelos deberemos tener en cuenta que durante una parte del ciclo del inventario existirá interacción entre demanda y reposición, esto es, se atenderá la demanda al mismo tiempo que se repondrá la mercancía. Ello hace que se compliquen los cálculos relativos a las cantidades disponibles en stock y a los costos de mantenimiento. En ese sentido, analizaremos la evolución del inventario y determinaremos el lote óptimo de producción que minimice la suma de los costes de mantenimiento y reposición, considerando, en primer lugar, una tasa de reposición uniforme y, a continuación, permitiendo que dicha tasa varíe con el tiempo y sea proporcional a la razón de demanda.

En definitiva, el objetivo general de este trabajo de investigación consistirá en contribuir a la mejora de algunos modelos de inventario deterministas en la línea de las extensiones previamente comentadas, analizando y estudiando las operaciones empresariales relacionadas con la gestión de stocks para mejorar los resultados, la eficiencia y la competitividad de las empresas. Para ello, tras considerar una serie de hipótesis de partida, trataremos de desarrollar las metodologías de optimización necesarias y, en su caso, diseñar los algoritmos específicos orientados hacia la resolución de dichos modelos.

(v) Contenido y estructura del trabajo de investigación

El trabajo se estructura de la siguiente manera:

En esta introducción hemos recogido los principales planteamientos de nuestra investigación, delimitando el tema a tratar, destacando la importancia e interés estratégico de nuestro estudio, definiendo la metodología empleada, es decir, el procedimiento general llevado a cabo en las diferentes fases del proceso de modelización, considerando las hipótesis generales de partida, así como plasmando con detalle los objetivos que pretendemos conseguir.

En el capítulo 1, ofrecemos una visión general de los aspectos esenciales relativos al tema objeto de estudio, pretendiendo identificar, de manera resumida, su problemática y las características principales que lo configuran. Desde esa perspectiva, se adopta como referencia del análisis el papel de la logística, el marketing y la distribución comercial para llevar a cabo una adecuada gestión de stocks y generar ventajas competitivas en la cadena de suministro de las organizaciones. Reflejamos la importancia del análisis de los modelos de gestión de stocks, en el marco de la Economía de la Empresa y Investigación Operativa, con la finalidad de ayudar a la adopción de decisiones que se puedan aplicar a y la resolución de problemas reales de optimización de costes y control de inventarios.

En el capítulo 2, analizamos los factores que, de una forma u otra, influyen en la gestión de los stocks, considerando las principales características y variables de decisión que permiten estudiar a los sistemas de inventario. Asimismo, se definen las variables y parámetros más relevantes junto con sus relaciones intrínsecas.

Cabe aclarar que en este capítulo no se pretende llevar a cabo un análisis profundo de los diversos aspectos abordados, ya que ello está bien documentado en la literatura existente. Sin embargo, su enfoque busca destacar los elementos esenciales que, en materia de gestión de stocks, sirven como preámbulo para desarrollar diferentes modelos deterministas orientados a determinar la política óptima, contemplando diferentes escenarios caracterizados por diversas hipótesis sobre la demanda y la evolución de los inventarios.

A continuación, una vez expuestos los modelos básicos de gestión de stocks, realizamos una exhaustiva revisión de la literatura relativa a los modelos deterministas con demanda variable en el tiempo, a modelos que contemplan un patrón de demanda potencial, así como de aquellos modelos que incorporan deterioro, la cual sirve de base y fundamento teórico para la elaboración de nuestro trabajo.

En el capítulo 3, presentamos un análisis detallado de los sistemas de inventario deterministas con patrón de demanda potencial, en los cuales el período de programación no está fijado previamente, con la finalidad de obtener una solución única para el nivel de stock inicial y el ciclo de programación óptimos. En concreto, analizamos tres escenarios diferentes: en primer lugar, admitimos la ausencia de roturas en el sistema; posteriormente, estudiamos la situación en que se permiten roturas y la demanda es diferida en el tiempo, es decir, los clientes no atendidos estarán dispuestos a esperar a la llegada del siguiente pedido para satisfacer su demanda; por último, contemplamos el caso en el que las roturas se traducen en pérdida de ventas. Además, desarrollamos varios ejemplos numéricos que ilustran la política eficiente y el coste mínimo para cada sistema de inventario analizado.

En el capítulo 4, estudiamos la política de reposición óptima para un sistema de cantidad económica de pedido, considerando artículos con deterioro y patrón de demanda potencial, donde el ciclo de reposición no es fijo y el costo total promedio depende de esa variable de decisión. Así, planteamos la correspondiente modelización matemática y su procedimiento de resolución, proporcionando algunos ejemplos numéricos que muestran las relaciones entre los diferentes parámetros. También, abordamos el estudio de un sistema de inventario con deterioro cuando se permite rotura de stocks y éstas son recuperables. Seguidamente, presentamos algunos resultados numéricos que muestran el efecto de una variación del parámetro de deterioro sobre la política de inventario óptima.

En el capítulo 5, realizamos un análisis de los sistemas de inventario de tamaño de lote, en los cuáles existe un periodo de reposición del stock y la demanda sigue un patrón potencial. Estudiamos la cantidad de producción económica que minimiza el costo total de inventario por unidad de tiempo, admitiendo, en primer lugar, una tasa de reposición uniforme y, posteriormente, permitiendo que esa tasa varíe con el tiempo y sea proporcional a la razón de demanda. A continuación, ilustramos los resultados obtenidos con algunos ejemplos numéricos.

Finalmente, presentamos un resumen de los resultados obtenidos, aportando las principales conclusiones e implicaciones derivadas del trabajo llevado a cabo, así como las futuras líneas de investigación a desarrollar.

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

CAPÍTULO 1

LOGÍSTICA EMPRESARIAL Y GESTIÓN DE STOCKS

CAPÍTULO 1

LOGÍSTICA EMPRESARIAL Y GESTIÓN DE STOCKS

1.1.- Introducción: la logística y la distribución comercial en las organizaciones

La economía mundial se encuentra inmersa en un acelerado proceso de transformación que está generando profundos efectos en las operaciones comerciales y empresariales. Como consecuencia de ello, las organizaciones de las sociedades del siglo XXI se enfrentan a la urgente necesidad de adaptarse al nuevo escenario internacional.

La etapa que se desarrolla en la actualidad, cuyos límites, lógicamente, aún no están bien definidos, se caracteriza por la necesidad de afrontar numerosos desafíos en materia de gestión empresarial. A grandes rasgos, algunas de las nuevas tendencias que se están configurando en el ámbito de la logística y la distribución comercial son las siguientes:

- Concentración e integración de la distribución comercial (Díez de Castro, 1997; De Juan Vigaray, 2005); reorganización de los canales de comercialización (Fernández et al., 2007) y descenso de la cuota de mercado de los comercios independientes (Casares et al., 1990), debido a la progresiva implantación de nuevos sistemas de venta y formatos comerciales (Rebollo, 1993; Sainz de Vicuña, 1996a; Kotler et al., 2000; Santesmases, 2012).

- Incremento del movimiento asociativo en defensa de intereses comunes (Flavián et al., 1997); aparición de fórmulas comerciales ligadas al ocio y tiempo libre (Montero y Oreja, 1998), así como coexistencia de un sector tradicional, pero modernizado, con grandes superficies de autoservicio (Díez de Castro, 1997; Casares y Rebollo, 2005).

- Diversificación de tipos de tienda y organizaciones (Rebollo, 1998), con una demanda cada vez más fragmentada como consecuencia de los patrones de consumo; creciente segmentación del mercado (Fernández et al., 2008), diversidad de estrategias (Bello et al., 1993) y especialización (Vázquez y Trespalacios, 2002).

- Consolidación de principios basados en los enfoques de marketing (Santesmases, 1991; Cruz Roche, 1991; Kotler et al., 1995), marketing social, marketing de relaciones o gestión de la calidad total (Kotler et al., 2000); afianzamiento de las condiciones de libre competencia (Libro Verde del Comercio, 1997; Libro Blanco del Comercio, 1999), así como cambios en su naturaleza (Parra Guerrero, 2005).

- Grandes progresos en los sistemas de gestión de la información (Park y King, 2007); incremento de los nuevos métodos de venta como consecuencia de los avances tecnológicos en comunicación (Díez de Castro y Fernández, 1993; Kotler y Amstrong 2003; Casares y Rebollo, 2005; Fernández et al, 2008; Miquel Peris et al., 2008), y ofertas de propuestas innovadoras ante las exigencias de los clientes (Dawson y Frasquet, 2006).

- Variaciones sustanciales en el entorno y, particularmente, en el consumidor, en lo relativo a sus características socioeconómicas, hábitos, estilos de vida, valores, formación y educación (Casares y Martín, 2003). Esos cambios de plasman en la transformación de los gustos y necesidades de la sociedad moderna que se han multiplicado en cuanto a complejidad, cantidad y variabilidad (Casares, 2003; Parra Guerrero, 2005; Kotler et al., 2006) y que afectan directa o indirectamente a la gestión empresarial.

- Fortalecimiento, de manera determinante, del protagonismo de los aspectos financieros y de los costes empresariales en el seno de las organizaciones, así como desarrollo de nuevos métodos y modelos de gestión en el marco de la logística (Carrallo, 1978; Díez de Castro, 1992; Lambert et al., 1998; Ballou, 2004; Martínez y Maraver, 2009; Anaya Tejero, 2011) y la distribución comercial (Sainz de Vicuña, 1996b; Díez de Castro, 1997; Casares y Rebollo, 2005; Miquel Peris, 2008; Roux, 2009), orientados a proporcionar eficacia y eficiencia para la consecución de los objetivos, así como una mejor asignación de los recursos (Parra Guerrero, 2005).

Como respuesta a todo ello, la logística empresarial y la distribución comercial se erigen como áreas de gestión que tienen una incidencia decisiva en la adaptación de las organizaciones a los cambios tecnológicos, productivos y sociales. No cabe ninguna duda de que, hoy en día, facilitar el acceso de los clientes a los productos, hace que se incremente su demanda y, por consiguiente, los ingresos de las empresas. Por ello, la gestión adecuada del movimiento de las materias primas y de los bienes elaborados representa una de las preocupaciones fundamentales de los responsables de las organizaciones implicadas en la logística y la distribución de artículos para el consumo. En los siguientes apartados hablaremos de estas materias, centrándonos en su evolución y la importancia que tienen en la generación de ventajas competitivas dentro del ámbito de la gestión empresarial.

1.1.1.- La actividad logística y su evolución conceptual

Los procesos de cambio acaecidos en el mundo económico conllevan una adaptación constante y permanente que tiene consecuencias determinantes para las organizaciones. Desde esa perspectiva, la logística es una disciplina que ha evolucionado a lo largo del tiempo, conjuntamente con las transformaciones de la sociedad.

La palabra logística, en su origen, se refería a la parte de la ciencia militar que calculaba, preparaba y realizaba todo lo relativo a los movimientos y las necesidades de las tropas en campaña a fin de conseguir la máxima eficacia de una operación (Castán et al., 2000). Como señala Ballou (1991), la logística nace como un campo novedoso en comparación con el resto de áreas más tradicionales de la empresa, tratándose de un proceso relacionado con la administración del flujo de bienes y servicios, cuya principal finalidad consiste en ofrecer una respuesta eficaz y eficiente a una demanda cambiante y cada vez más exigente.

A principios del siglo XX, la logística se encontraba poco desarrollada dentro del ámbito de la gestión empresarial y la preocupación principal de las organizaciones se centraba, fundamentalmente, en la función de producción, ya que se podía vender fácilmente lo que se fabricaba (Rufín, 2010). Bajo esa óptica, la logística estaba constituida por actividades que eran necesarias pero no incorporaban valor (Casares y Rebollo, 2003). En esas etapas iniciales, en el ámbito académico, comenzaron a aparecer las primeras aproximaciones al estudio de la función logística, desde el campo de la economía y el marketing (Servera, 2010).

Es, aproximadamente, durante los años veinte, cuando surgió el marketing como nueva disciplina científica cuyo objetivo fundamental, en sus primeras fases, consistía en estimular la demanda para absorber toda la producción disponible (Rufín, 2010). Así, hasta los años cincuenta, se produjo un predominio de las funciones de ventas y producción sobre las actividades logísticas que quedaron silenciadas debido a mercados que se encontraban en permanente crecimiento y proporcionaban grandes beneficios (Ballou, 1991). En esos primeros momentos, la función logística se asociaba básicamente a las actividades de distribución física, en especial al transporte y almacenamiento de productos (Rufin, 2010).

Durante el transcurso de la segunda guerra mundial, cobró una importancia notoria el movimiento de las tropas, el transporte de material bélico y el suministro de mercancías, comenzando a valorarse la necesidad de articular una logística eficiente que permitiera cubrir las necesidades de los ejércitos (Castán et al., 2000). Terminada la contienda bélica, la década de los años cincuenta, generó un clima adecuado para la puesta en marcha de actividades de logística empresarial como consecuencia de los cambios que se produjeron en el consumo, la presión de los costes en los balances de las empresas y el progreso de la tecnología, generándose un clima adecuado para el desarrollo de modelos matemáticos y estadísticos orientados a abordar problemas logísticos reales que, entre otras finalidades, se han ido aplicando a la gestión y al control de inventarios (Wagner y Whitin, 1958; Colerus, 1972; Ventsel, 1983; Mathur y Solow, 1996; Hillier y Lieberman, 2006; Singh et al., 2009).

Es a partir de los años sesenta cuando la logística, siguiendo los postulados del marketing, adquirió una visión orientada hacia el cliente que se materializó en ofrecer un servicio ajustado a la satisfacción de sus necesidades. Desde ese momento, la función logística en la empresa empezó a ser tratada como una actividad de carácter estratégico generadora de ventajas competitivas, ampliándose su ámbito de aplicación (Servera, 2010).

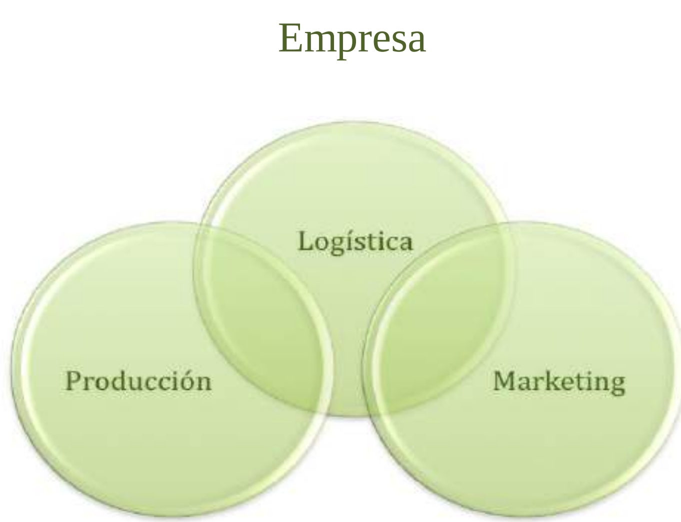
Más adelante, la crisis de los años setenta obligó a reenfocar las acciones de marketing pasando del estimulo de la demanda hacia la mejora de la eficacia y eficiencia en la gestión de los recursos. Ello dio lugar a que las empresas optaran por reducir sus inventarios sin disminuir el servicio prestado a los clientes, surgiendo, de ahí, la necesidad de planificar y gestionar de forma integrada la distribución, la producción y el aprovisionamiento (Ballou, 1991), definiéndose el concepto de logística integral (Kent y Flint, 1997; Casanovas y Cuatrecasas, 2001; Ballou, 2004). Efectivamente, las empresas comprendieron que la optimización de los costes sería mayor si gestionaban de forma íntegra y unificada todas las actividades logísticas (Casares y Rebollo, 2005).

En los años ochenta, la función logística comienza a ser considerada un elemento clave para la diferenciación de la empresa (Ballou, 1991), lo cual supone identificarla como una variable básica de su estrategia, constatándose que permite obtener ventajas competitivas sostenibles, tanto por la vía de la diferenciación, como por la vía de la reducción de costes (Mentzer et al., 2004).

A partir de ahí, en los años noventa, la función logística adquiere una relevancia máxima dentro de la gestión empresarial, considerándose una variable estratégica para la diferenciación respecto a la competencia, capaz de generar valor para el cliente, aumentando su satisfacción y lealtad (Mentzer et al., 2004). Por tanto, como señala Castán et al. (2000), se puede afirmar que ha sido una de las áreas de la función empresarial que ha evolucionado más rápidamente y de manera más significativa a lo largo de las últimas décadas, debido, fundamentalmente, a la posibilidad de obtener ventajas competitivas a través de ella (Porter, 2002). En ese sentido, la revisión de las publicaciones de los últimos años permite identificar un creciente interés en el estudio de la integración de la función logística a lo largo de todo el canal de suministro con la finalidad de ofrecer un mayor valor al cliente final (Servera, 2010).

Desde una perspectiva complementaria, en lo que se refiere a su proceso evolutivo, la producción y el marketing se han concebido durante mucho tiempo como actividades separadas que han coexistido dentro de la organización. La necesidad de resolver esa falta de coordinación, que se ha traducido en la aparición de problemas para las organizaciones, ha generado el surgimiento de nuevos conceptos aplicados a la logística, que consideran el nexo entre la demanda del mercado y las actividades de producción (Pau y Navascués, 2001).

Figura 1.1: Logística, producción y marketing



Fuente: Elaboración propia

Servera (2010) señala que, recientemente, algunos autores han planteado claras diferencias entre los términos de distribución física y logística, ya que el primero abarca la gestión del flujo de productos terminados, mientras que el segundo comprende la gestión del flujo de mercancías, que comprende desde la fase del aprovisionamiento hasta la entrega de los productos terminados al cliente, siendo, por tanto, la distribución física una parte de la función logística. Esa definición amplia de la función logística implica que no puede ser considerada meramente como un elemento de la variable distribución del marketing mix, debido a que su dimensión interna y externa le permite alcanzar un nivel superior en el organigrama funcional de la organización (Gutierrez y Prida, 1998; Ballou, 2004).

De esa manera, se considera que la logística aborda el estudio del conjunto de actividades que se desarrollan sobre los flujos materiales, informativos, financieros y de retorno, desde un origen hasta un destino, con el objetivo de proporcionar a los clientes de la organización un servicio de calidad, en el lugar y momento oportunos, con un mínimo de gastos (Magee et al., 1973; Bowersox, 1974; Ballou, 1991; Arbones, 1992; Chase y Aquilano, 1994; Prida y Gutierréz, 1995; Levy, 1997; Gómez y Acevedo, 2000; Pau y Navascués, 2001; Anaya Tejero, 2011). Para Cuatrecasas (2000), la logística empresarial comprende la planificación, la organización y el control de todas las actividades relacionadas con la obtención, el traslado y el almacenamiento de materiales y productos, desde la adquisición hasta el consumo, a través de la organización y como un sistema integrado, incluyendo también todo lo referente a los flujos de información implicados, con el objetivo de satisfacer las necesidades y los requerimientos de la demanda, de la manera más eficaz y con el mínimo coste posible.

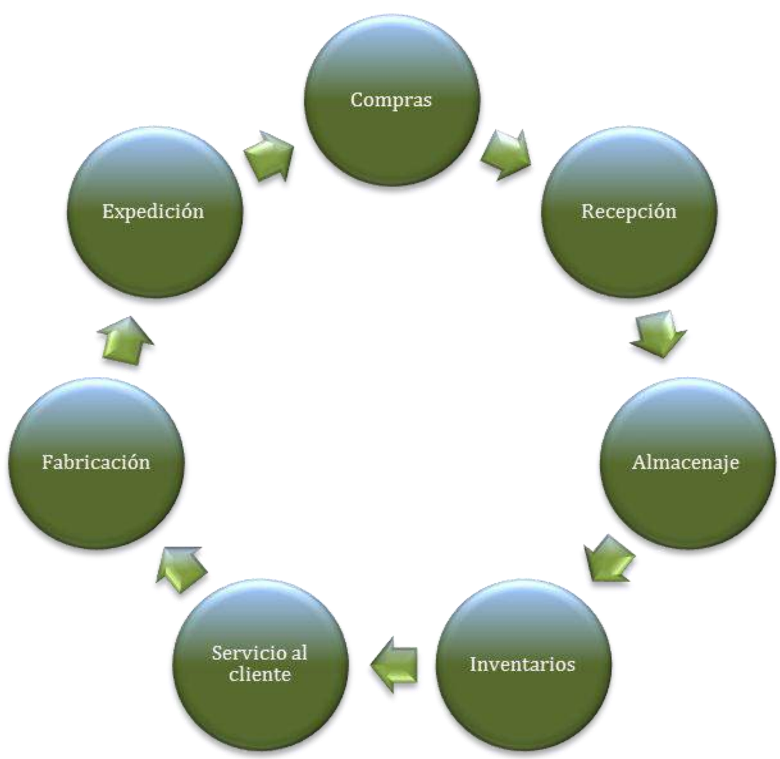
En concreto, siguiendo al Council of Logistics Management (1998), la logística es la parte del proceso de gestión de la cadena de suministro encargada de planificar, implantar y controlar, de forma eficiente y efectiva, el almacenaje y flujo de los bienes, servicios y toda la información relacionada con éstos, entre el punto de origen y el punto de de consumo, con el propósito de cumplir con las expectativas del consumidor o cliente. En ese sentido, la cadena de suministro (“supply chain”) hace referencia al conjunto de empresas e intermediarios a través de los cuales el producto se mueve desde las fuentes de materias primas, pasando por los procesos de producción y llegando al consumidor final a través de la distribución (Levy, 1997; Hopp, 2004). Por tanto, como señala Porter (2002), la gestión de la cadena de suministro (“supply chain management”) es la estrategia a través de la cual se gestionan todas esas actividades de la cadena.

Figura 1.2: La cadena de suministro

Fuente: Ballou (2004). Elaboración propia

Ballou (1991), plantea la clasificación de las tareas logísticas en dos grandes áreas. Por una parte, la que se refiere al suministro de las materias primas para la producción, que incluye actividades de transporte, procesamiento de pedidos, compras, almacenaje, mantenimiento y gestión de inventarios y, por otra parte, la relativa a la distribución, situada entre las fábricas y los consumidores, en la cual las actividades logísticas que se llevan a cabo son las mismas pero orientadas hacia los clientes de la organización. Asimismo, Ballou (2004) sostiene que el sistema logístico comprende el subsistema de logística de abastecimiento que agrupa las funciones de compras, recepción, almacenamiento y administración de inventario; el subsistema de logística de planta que abarca las actividades de mantenimiento, seguridad industrial y cuidado del medio ambiente; así como el subsistema de logística de distribución que comprende las actividades de expedición y distribución de los productos terminados hacía los diferentes mercados, constituyendo el nexo entre las funciones de producción y las de comercialización.

Figura 1.3: El proceso logístico



Fuente: Elaboración propia

Según Martinez y Maraver (2009), una estrategia logística tiene como objetivos la reducción de los costes asociados al transporte y el almacenamiento de la mercancía, la minimización del nivel de inversión en el sistema y las mejoras en los servicios prestados a los clientes. Todo ello, configura una actividad compleja, ya que es muy difícil compaginar esos tres objetivos de manera simultánea. De esa manera, se puede afirmar que la logística, como área dentro de la empresa, surge con dos motivaciones claras pero antagónicas. Por una parte, aumentar la calidad del servicio al cliente, garantizando las entregas a tiempo y en perfectas condiciones de los artículos y, por otra, reducir los elevados costes derivados del mantenimiento y la gestión de los inventarios (Martínez y Maraver, 2009). Además, la logística ofrece a los negocios reglas que permiten a la dirección seguir, valorar, priorizar y controlar los distintos elementos relacionados con el aprovisionamiento y la distribución que inciden en la satisfacción del cliente, en los costes y en los beneficios (Pau y Navascués, 2001).

La gestión logística en la empresa abarca el análisis de la demanda y su predicción, el aprovisionamiento, la gestión de almacenes, la gestión de stocks y de pedidos, e incluso la logística inversa (Cristopher, 1994). En ese sentido, existe un consenso generalizado para muchos autores a la hora de afirmar que las funciones del sistema logístico se pueden agrupar en cinco áreas principales de decisión: niveles de servicio al cliente, gestión del aprovisionamiento, gestión de almacenes, gestión del transporte y gestión de inventarios. Desde esa perspectiva, se hace especial énfasis en la gestión de stocks como una de las actividades clave de la logística que es esencial para el desarrollo del proceso de comercialización (Carrallo, 1978; Cuatrecasas, 1999; Ballou, 2004; Zermati, 2004; Parra Guerrero, 2005).

1.1.2.- La logística y la generación de ventajas competitivas

En el contexto actual, la globalización de los mercados y la orientación de la empresa hacía la actividad productiva, a sus negocios básicos y al cliente, han sido factores determinantes para que la logística sea una de las áreas de la gestión empresarial que más se ha desarrollado en los últimos tiempos y cuyo crecimiento será sostenido en el futuro (Castán et al., 2000). Ello se debe a que esta disciplina se está convirtiendo en uno de los factores clave del éxito de las empresas, siendo un elemento determinante de su ventaja competitiva (Porter, 2002), al conseguir optimizar el flujo de materiales y su coste de manipulación, asegurando un nivel adecuado de servicio al cliente.

Como señala Castán et al. (2000), las empresas orientadas al cliente, con visión de negocio, deben buscar que toda la cadena de producción en su conjunto sea competitiva a través de añadir valor y reducir costes a lo largo de la misma. En ese sentido, el valor añadido, que es un concepto de carácter económico, surge como consecuencia de cambiar la forma, situación o disponibilidad de un producto o servicio para que sea percibido en el lugar, forma y manera deseados por quien es su destinatario y, por tanto, la generación del mismo no tiene que fundamentarse necesariamente en los rasgos tangibles del producto, sino a través del servicio.

Hoy en día, resulta difícil, para las organizaciones, mantener la ventaja competitiva únicamente con el producto, ya que los clientes tienen cada vez más posibilidades de obtener otros bienes sustitutivos. Por ello, el potencial del servicio al cliente, como medio para obtener una clara diferenciación, ha ido cobrando un mayor protagonismo. De ahí que, para satisfacer la necesidad del cliente sea preciso realizar diferentes actividades que comienzan con la recepción de sus pedidos, continúan con la entrega del producto y siguen después de que éste haya sido suministrado (Anaya Tejero, 2011; Santesmases, 2012). Desde esa perspectiva, la logística se conforma como una herramienta que permite obtener ventajas competitivas, realizando servicios de valor añadido que incrementan la rentabilidad de las organizaciones (Christopher, 1994; Porter, 2002).

Autores como Santesmases (1991), Lambin (1993) y Kotler et al. (1995), definen el valor añadido como la atribución o asignación de valor adicional que hace el consumidor o usuario, en reacción a la presencia, dentro de la oferta, de elementos de satisfacción que no están directamente relacionados con el producto en sí. Así, como sostiene Levy (1997), el valor añadido que incorpora la logística en cada uno de los eslabones del sistema logístico constituye un arma competitiva decisiva, que se manifiesta en la excelencia en el servicio de entrega, el liderazgo en la diferenciación del producto, la gestión con un mínimo de costo o el servicio al cliente sobre la base de una eficiente gestión de los inventarios.

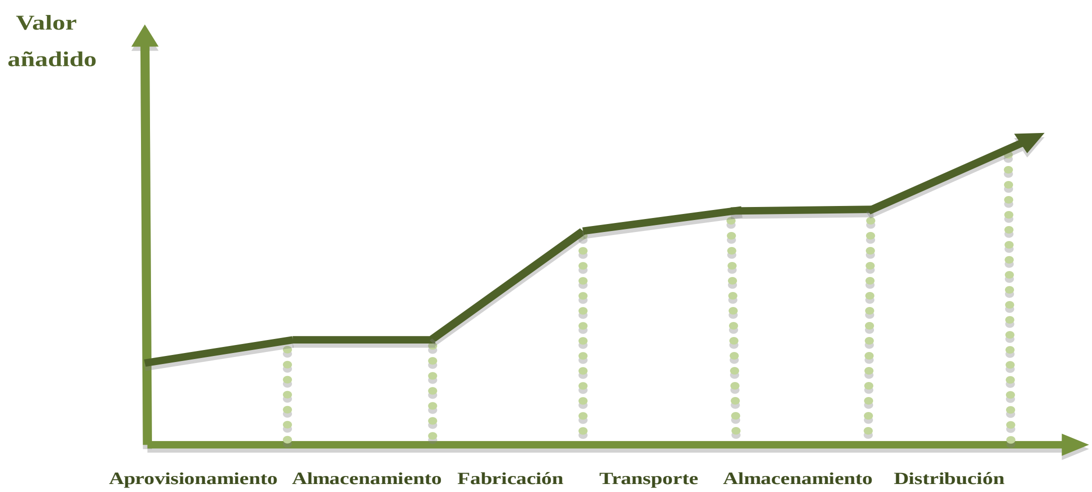
Las empresas que utilizan la logística de manera estratégica buscan explotar sus competencias características con la finalidad de alcanzar, mantener y potenciar sus ventajas competitivas. El desarrollo de esas ventajas adquiere mayor relevancia cuando las organizaciones se enfrentan a mercados altamente competitivos. En ese sentido, Porter (2002) sostiene que se debe considerar a la ventaja competitiva, valorando la interacción entre las diversas disciplinas o áreas que interactúan dentro de la organización, es decir, desde una perspectiva holística o integral de la empresa. Por tanto, señala que la ventaja competitiva tiene su origen, fundamentalmente, en el valor que una empresa logra crear para su cliente, definiendo el concepto de valor como la suma de los beneficios percibidos por éste menos los costos percibidos al adquirir y usar un producto o servicio. Así, una empresa obtiene ventaja competitiva haciendo sus actividades estratégicamente importantes mejor que sus competidores o a un coste menor.

Partiendo de las definiciones expresadas en el epígrafe anterior, la logística está constituida por el proceso de planificar, desarrollar y controlar el movimiento y almacenamiento, tanto de flujos físicos como de información, a lo largo de la cadena de valor, es decir, el proceso que consigue poner a disposición de los clientes los productos y servicios procedentes de las empresas en condiciones de máxima eficacia y mínimos costes (Anaya Tejero, 2011). De esa manera, la función logística se enmarca dentro del conjunto de actividades primarias que componen la cadena de valor de una empresa. Por ello, como se comentó previamente, la logística se considera una herramienta estratégica que permite obtener ventajas competitivas, realizando servicios de valor añadido que redundan en el incremento de la rentabilidad de las empresas, permitiendo conseguir una cadena de suministro más eficaz y eficiente con respecto a la competencia (Bowersox et al., 2006).

Así, se puede decir que la cadena de valor logística está constituida por una serie de procesos que crean valor mediante la entrega de productos y servicios a los clientes y su objetivo consiste en, una vez determinado el nivel de servicio que se quiere ofrecer al cliente, hacerlo de la manera más económica posible (Ganeshan y Harrison, 1995; Ballou, 2004). Desde ese punto de vista, la inquietud por ofrecer un buen servicio al consumidor y la creciente competitividad que se exige hoy en día a las empresas, han incrementado la importancia de la logística y el marketing en las organizaciones (Parra Guerrero, 2005).

Las actividades que componen la cadena de valor logística, son la suma de diferentes tareas o actividades, tales como la gestión de los aprovisionamientos, la gestión de las órdenes de compra, la distribución, las operaciones de venta y el servicio postventa ofrecido por la empresa. De todo ello, se desprende que la gestión de la cadena de suministro, consiste en la integración de los procesos esenciales de negocio, desde los proveedores iniciales al consumidor final, proporcionando productos, servicios e información que incorporen valor para los clientes y el conjunto de los participantes, lo cual supone una integración en la dirección y en los procesos a lo largo de la cadena de suministro (Lambert et al., 1998).

Gráfico 1.1: Generación de valor añadido a lo largo de la cadena de suministro



Fuente: Anaya Tejero (2011). Elaboración propia

Por su parte, Bowersox et al. (2000), plantean el concepto de valor como una combinación de eficiencia, efectividad y relevancia. Así, diferencian entre la generación de valor económico, que busca la consecución de economías de coste para operar y generar eficiencia en el mercado; el valor de mercado, que se construye desde la efectividad de la relación con los canales de distribución y se basa en la disponibilidad de una gama amplia de productos; y el valor relevante que se fundamenta en realizar un esfuerzo en diferenciar el producto o servicio, de tal manera que sea único para los clientes de la organización.

Como sostiene Kotler et al. (2000), la clave del éxito de las organizaciones en el mercado descansa en sus habilidades para atraer y retener a sus clientes, mediante la creación de valor, satisfaciendo sus necesidades y, desde esa perspectiva, una logística integrada, tanto interna como externamente, contribuye a generar ese incremento de valor (Bowersox, et al., 2006). Siguiendo a Mentzer et al. (2001), la excelencia logística es una fuente de ventajas competitivas que permite mejorar, de manera significativa, la estrategia competitiva de las organizaciones, proporcionando una mayor eficiencia, lo cual se traduce en costes más bajos, con los consiguientes incrementos de participación en el mercado o de rentabilidad, así como en una mejora del servicio al consumidor, con ciclos de pedidos más cortos y mayor disponibilidad de stocks.

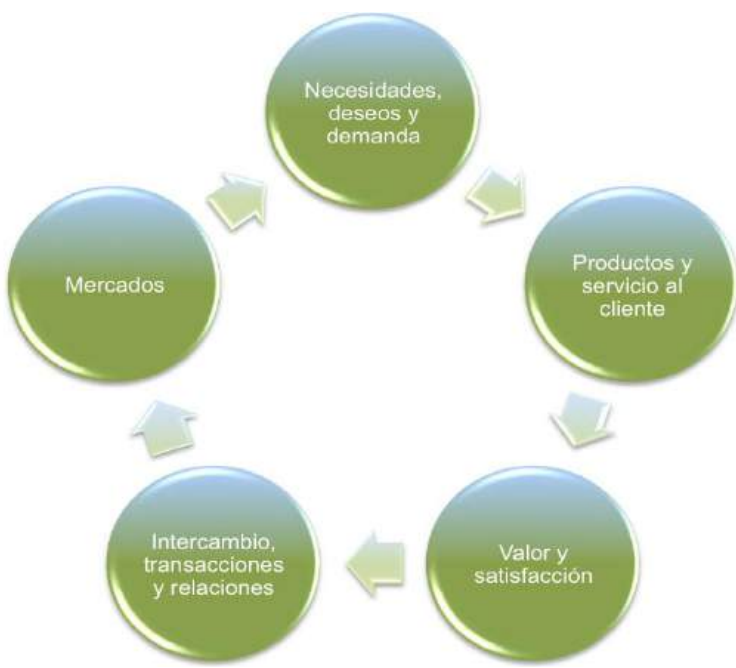
Casanovas y Cuatrecasas (2001), argumentan que la consideración estratégica de la actividad logística se basa en la capacidad de integrar las funciones de producción y de marketing en un primer momento y, progresivamente, al resto de actividades de valor de la empresa. Por su parte, como sostiene Anaya Tejero (2011), la logística integral se basa en una filosofía concreta para el control del flujo de materiales. Se podría decir que es una especial cultura de la dirección de la empresa, ante un entorno competitivo, en el cual los conceptos de oportunidad y rapidez en el suministro de productos, así como los de servicio y calidad total, constituyen un complemento imprescindible a las clásicas variables de calidad del producto y precio competitivo que exige el mercado. De esa manera, hoy en día se puede afirmar que el concepto de logística integral a largo plazo es el único camino para mantener una competitividad continuada en el mercado, disminuyendo, a su vez, de forma drástica la inversión global en stocks, con el consiguiente aumento de la rentabilidad de las diferentes unidades operativas de la organización.

1.1.3.- El marketing, la distribución comercial y el servicio al cliente

La relación entre las actividades de marketing con la logística y la distribución comercial es íntima e intensa, hasta el punto de que, dependiendo del enfoque aplicado a su análisis, es complejo establecer sus respectivos límites y diferencias. El nacimiento de la logística al amparo del marketing, como disciplina científica, hace que posean una historia y contenidos claramente compartidos.

La mayor parte de los autores coinciden al concebir el marketing como un sistema total de actividades, que incluye un conjunto de procesos mediante los cuales se identifican las necesidades y deseos de los consumidores para satisfacerlas de la mejor manera posible, promoviendo el intercambio de productos y/o servicios de valor con ellos, a cambio de una utilidad o beneficio para la empresa u organización (Cruz Roche, 1991; Martin Armario, 1993; Lambin, 1993; Miquel Peris et al., 1995; Vázquez y Trespalacios, 2002; Kotler et al., 2006; Esteban Talaya et al., 2008; Rufin, 2010). Por su parte, la American Marketing Association (A.M.A., 1985), lo define como el proceso de planificar y ejecutar el concepto, precio, promoción y distribución de ideas, bienes y servicios para crear intercambios que satisfacen los objetivos de consumidores, empresas y organizaciones.

Figura 1.4: Elementos centrales del marketing



Fuente: Kotler et al. (2000). Elaboración propia

Para Stanton (1985) el marketing consiste en un sistema total de actividades empresariales encaminadas a planificar, fijar precios, promover y distribuir productos y servicios que satisfacen las necesidades de los consumidores actuales y potenciales. Según Santesmases (1991), es un modo de concebir y ejecutar la relación de intercambio, con la finalidad de que sea satisfactoria a las partes que intervienen y a la sociedad, mediante el desarrollo, distribución y promoción, por una de las partes, de los bienes, servicios o ideas que la otra parte necesita. Kotler et al. (2000) añaden que es una actividad humana dirigida a satisfacer las necesidades y los deseos mediante procesos de intercambio, de manera más eficaz y eficiente que los competidores. La nueva revisión de su definición (A.M.A., 2008) describe al marketing como una función de las organizaciones y un conjunto de procesos orientados a crear, comunicar y entregar valor a los consumidores, clientes, socios y a la sociedad en general. De ahí que la gestión del marketing sea el arte y la ciencia de elegir mercados y lograr mantener y aumentar el número de consumidores mediante la creación, entrega y comunicación de un valor añadido superior para el cliente (Santesmases, 2012).

Por su parte, la distribución comercial es una de las materias que mayor tratamiento ha recibido en la literatura de la gestión empresarial y el marketing, como consecuencia de su importancia capital en la eficacia y eficiencia de cualquier sistema económico (Díez de Castro, 1997). La separación geográfica entre comprador y vendedor, y la imposibilidad de situar el centro de fabricación frente al consumidor, hacen necesario el traslado de los bienes y servicios desde su lugar de producción hasta el cliente. De ahí, que la mayor parte de los autores coincidan en entender por distribución comercial al conjunto de operaciones llevadas a cabo para que el producto recorra el camino que dista desde su punto de producción hasta el de consumo, satisfaciendo al máximo la demanda del mercado en las diferentes vertientes de plazo, coste, calidad y oportunidad (Miquel Peris et al., 1995; De Juan Vigaray, 2005; Casares y Rebollo, 2005).

Lógicamente, los esfuerzos de marketing realizados por las organizaciones resultan ineficaces si, en última instancia, el producto no se encuentra en el punto de venta donde el consumidor pueda adquirirlo (Kotler et al., 2000). De ahí que, la distribución, como instrumento que relaciona la producción con el consumo, tenga como misión principal poner el producto a disposición del consumidor final en la cantidad demandada, en el momento en que lo necesite, en el lugar que desee o pueda adquirirlo (Cruz Roche, 1991; Díez de Castro, 1997; De Juan Vigaray, 2005; Miquel Peris, 2008), y todo ello con el mínimo coste posible.

Es preciso resaltar que la distribución comercial se configura como una posible fuente de ventaja competitiva, en la medida en que ayuda a que las empresas aseguren una mejor posición en el mercado de manera sostenible. Como aspectos básicos de esta disciplina hay que destacar que su epicentro, al igual que en el marketing, es el intercambio. Además, como instrumento de marketing, requiere de una adecuada planificación y control, así como de un diseño estratégico (Kotler, et al., 2000). A ello hay que añadir que debido a los constantes cambios producidos en la oferta y la demanda, tiene un carácter dinámico y, debidamente gestionada, constituye una fuente de ventaja competitiva al servicio de la organización (Díez de Castro, 1997).

Efectivamente, para la mayoría de los autores, la distribución comercial es un área de decisión caracterizada por su naturaleza estratégica, con incidencia en el largo plazo, dada su complejidad, ya que se deben adoptar decisiones sobre múltiples aspectos relacionados entre sí, así como por la estrecha relación que tiene con otras áreas de decisión y con los objetivos generales de la empresa. Asimismo, desde la perspectiva del análisis estratégico de la empresa, la distribución comercial se configura como una de las disciplinas del marketing que puede contribuir a la diferenciación competitiva, y a una mayor eficacia y eficiencia en la gestión comercial (Díez de Castro, 1997; Vázquez y Trespalacios, 2006).

Una de las características de la evolución económica actual es el constante aumento de los costes de distribución y las elevadas cifras que éstos alcanzan (Díez de Castro y Fernández, 1993). El coste total de la distribución comercial se podría definir como el total de gastos en que se incurre a lo largo del proceso de intermediación, para hacer disponibles, temporal y espacialmente, los productos a los consumidores. Más exactamente, se trata de los costes derivados de las actividades mayoristas y minoristas, así como de las funciones de transporte, almacenamiento, fraccionamiento, transmisión de la propiedad, financiación, información y asunción de riesgos (Díez de Castro, 1997). Por ello, las empresas tratan de equilibrar la mayor exigencia de servicios comerciales por parte de los clientes, con la generación de costes que estos implican (Fernández et al., 2007).

La distribución comercial se puede analizar desde el punto de vista de los fabricantes y el de los intermediarios. Desde el punto de vista de los fabricantes, al igual que el resto de variables controlables por la empresa, forma parte de la oferta del mercado, y su organización, ejecución y control han de planificarse con el máximo cuidado. Desde el punto de vista de los distribuidores o intermediarios, hace referencia a la actividad final, así como a los pasos necesarios para hacer llegar un producto, o facilitar servicios, a los consumidores (Díez de Castro, 1997).

Por lo tanto, el papel que juega la distribución comercial en los sistemas económicos desarrollados consiste en posibilitar que los dos ejes fundamentales que los sustentan, la producción y el consumo, funcionen de manera adecuada, precisa y armonizada (Díez de Castro y Fernández, 1993). De ahí que el sistema comercial haga de puente entre el momento inicial y final del ciclo de los productos, convirtiéndose en un instrumento cada vez más relevante a medida que se incrementan los intercambios, el desarrollo del conjunto de actividades y el nivel de exigencia de los consumidores, creándoles utilidad de lugar, de tiempo, de forma y de posesión (Vázquez y Trespalacios, 1997).

La utilidad de forma se refiere a la transformación en volumen y composición de la mercancía, haciéndola más adecuada y disponible al consumo final; la utilidad de tiempo pone el producto a disposición del consumidor en el momento que éste lo precisa; la utilidad de lugar se genera mediante el establecimiento de suficientes puntos de venta en lugares próximos a los lugares en los que el consumidor necesite el producto; y la utilidad de posesión se produce con la entrega del producto para su consumo o disfrute. Estas utilidades creadas para los consumidores, tienen una relación directa con los servicios que a su vez generan a los productores, que son los de transporte, almacenamiento, fraccionamiento del producto, información, financiación y asunción de riesgos (Díez de Castro, 1997; Vázquez y Trespalacios, 2006).

Uno de los primeros pasos de la planificación estratégica, para la comercialización de los productos, consiste en encontrar las asignaciones de demanda que produzcan el menor coste, así como fijar o determinar el servicio a ofrecer al consumidor (Díez de Castro, 1997).

Gráfico 1.2: Relación entre nivel de inventario y el servicio al cliente

Fuente: García Sabater et al. (2005). Elaboración propia

Así, como señalan García Sabater et al.(2005), el servicio al cliente tiene una relación asintótica con el nivel de inventario disponible o existente ya que cuanto mejor es el nivel de servicio ofrecido, mayor es la necesidad de inventario adicional para mejorarlo. La función del decisor consistirá en modificar los parámetros para ofrecer un mejor servicio al cliente con menor inventario.

Por tanto, con la finalidad de realizar una eficiente planificación en el almacén, es necesario establecer los niveles de stock adecuados para satisfacer la demanda de los clientes, y para determinar los niveles óptimos de servicio es necesario establecer la relación entre las ventas y el servicio logístico a proporcionar al consumidor, así como la relación entre los costes del servicio y el nivel a ofertar del mismo. En todo caso, la política de servicio que se establezca ha de guardar un equilibrio entre el servicio óptimo que desearían los consumidores y el coste que éste supone (Parra Guerrero, 2005). A medida que se incrementan los niveles de servicio al cliente para satisfacer mayores demandas del mismo, los costes aumentan progresivamente. Dado que existe un punto en la curva donde se maximizan los beneficios, éste será el nivel de servicio ideal o meta a plantearse por el sistema logístico (Anaya Tejero, 2011).

1.2.- Modelización matemática en la Economía de la Empresa

La Economía de la Empresa es una ciencia que se ha ido configurando mediante la integración permanente de diferentes materias de conocimiento y áreas de investigación, recogiendo contenidos que puedan ser de utilidad para la toma de decisiones económicas en la organización empresarial (Soldevilla, 1986). Su finalidad específica consiste en el logro de la eficacia y la eficiencia en la dirección y administración de las empresas para alcanzar sus objetivos, lo cual diferencia y determina su contenido científico (García Echevarría, 1975). Así, constituye, por una parte, un sistema objetivo y universal que pretende explicar fenómenos en un campo extenso de la realidad y, por otra, un sistema individualizador, referido a problemas concretos surgidos en el ámbito de la actividad empresarial (Soldevilla, 1995).

También, es importante resaltar que la Economía de la Empresa es una disciplina que responde a los planteamientos de las ciencias básicas, aunque es necesario complementarla con un marco de referencia histórico (Soldevilla, 1987a). De esa manera, como ciencia básica ha de ser interpretada a la luz de las matemáticas, para conseguir una racionalización lo más exacta y precisa posible de la realidad, interpretando las relaciones que se dan entre los diversos fenómenos empresariales a los que tiene acceso la acción directiva, para constituir un cuerpo sistematizado de relaciones formales explicativas del acontecer empresarial (Soldevilla, 1986).

Autores como Bueno et al. (1996) sostienen que el equilibrio económico de la empresa se sustenta en las condiciones de racionalidad establecidas con un fin optimizador. No obstante, debido a la complejidad de la organización empresarial y a la dificultad para cuantificar todos los aspectos de la realidad, suele resultar difícil alcanzar condiciones óptimas, lo que conduce a planteamientos de equilibrio del tipo de sub-optimización o satisfacción de los agentes implicados (Rodríguez Castellanos et al., 2005).

Como señala Gutenberg (1973), la Economía de la Empresa se sustenta en el principio de economicidad o racionalidad económica de la actividad empresarial, para la búsqueda de la solución más favorable; el principio de productividad de los recursos o eficiencia, que compara los productos obtenidos y los medios empleados; así como el principio de rentabilidad del capital o eficiencia económica, obtenida de la aplicación de los recursos a la actividad de la organización.

En la Economía de la Empresa, el método debe aportar una visión de la realidad que responda a una interpretación verdadera y ofrecer un sistema operativo capaz de aportar soluciones a los problemas reales planteados mediante el uso de procedimientos matemáticos (Fernández Pirla, 1981). En concreto, el método matemático se basa en las relaciones que pueden establecerse entre los elementos definidos en el sistema de axiomas, postulados y reglas propias de la ciencia matemática, estableciendo procedimientos convencionales para poder cuantificar la realidad (Soldevilla, 1995) e incorporando los imperativos matemáticos de simplicidad, generalidad y rigor (Debreu, 1991). Así, esta disciplina, al poseer, en parte, las características de ciencia básica mencionadas anteriormente, puede aplicar la matemática a su objeto de estudio, siempre que los problemas tratados involucren variables cuantificables que reflejen el comportamiento del sistema a estudiar.

La concepción de la empresa como un sistema, constituido por partes o subsistemas que interactúan entre sí e interaccionan con su entorno, evolucionando hacía unos fines u objetivos que se suponen bien definidos, es la aceptación de lo complejo (Sarabia, 1996). El problema es que, a medida que se percibe la complejidad y la especialización de una organización o sistema, se hace más difícil la adopción de decisiones correctas relativas a la asignación de los diferentes recursos disponibles, en orden a conseguir la mayor eficacia de la organización, concebida como un sistema global.

La integración de conocimientos procedentes de muy diversos ámbitos ha llevado a la Economía de la Empresa a su actual configuración multidisciplinar. No obstante, como elemento nuclear de la misma, sigue teniendo como objeto material a la empresa y las relaciones con su entorno, desde el punto de vista de la administración y la gestión de los recursos disponibles, y teniendo en cuenta principios como la eficacia, la eficiencia y la adaptación competitiva, entre otros (Rodríguez et al, 2005).

En la actualidad, la modelización matemática es esencial para el progreso de la economía, tanto desde un punto de vista teórico como para la adopción de decisiones empresariales. Como señala Oreja (1993), las matemáticas son de gran utilidad en muchos campos del saber, ya que obligan al teórico a delimitar los problemas, proporcionando un campo de análisis para su resolución, o la reducción a niveles más simples de aquellos que alcanzan un alto grado de complejidad.

La necesidad de proporcionar un soporte riguroso a la toma de decisiones ha potenciado que se desarrollara espectacularmente, junto con la Economía de la Empresa, la ciencia de la Investigación Operativa, cuyo principal objetivo consiste en ayudar científicamente a resolver problemas reales. De esa manera, se puede afirmar que las soluciones que aporta, conjuntamente con el buen juicio, la experiencia y el discernimiento, son herramientas clave en el proceso de gestión empresarial (Mathur y Solow, 1996).

1.3.- La Investigación Operativa y su aplicación a la logística empresarial

Como materia básica y fundamental en la toma de decisiones, la Investigación Operativa es una ciencia y un arte. Es una ciencia por las técnicas matemáticas con las que trabaja, y es un arte porque el éxito de todas las fases que anteceden y siguen a la resolución del modelo matemático depende mucho del proceso de modelización realizado por el factor humano (Mathur y Solow, 1996; Hillier y Lieberman, 2006).

Las primeras actividades formales de la ciencia de la Investigación Operativa se dieron en Inglaterra durante la Segunda Guerra Mundial, cuando se encomendó a un equipo de científicos adoptar decisiones acerca de la mejor utilización de los materiales bélicos disponibles. Al término de la guerra, las ideas formuladas en operaciones militares fueron adaptadas para mejorar la eficiencia y la productividad en el sector civil (Colerus, 1972), resurgiendo el interés por los modelos matemáticos, así como desarrollando y mejorando nuevas herramientas cuantitativas para la toma de decisiones. Durante las siguientes décadas continuó el auge de estas técnicas y en los últimos tiempos, los avances en las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, han contribuido a relanzar aún con más fuerza el interés por estos modelos.

En términos generales, podemos decir que la Investigación Operativa recoge una filosofía de actuación del ser humano ante los diferentes problemas con los que se enfrenta en la vida real. En ese sentido, existen diferencias a la hora de entender y delimitar las atribuciones y el campo de acción de esta disciplina, lo que lleva a no tener una única definición concisa y clara (Sarabia, 1996; Hillier y Lieberman, 2006). Para unos autores, es un cuerpo de materias formado por problemas y técnicas de solución que surgen, fundamentalmente, en los campos de la gestión empresarial, en la planificación logística y en la distribución comercial. Para otros, es una actividad intelectual más amplia que requiere un compendio de conocimientos y que, por su propia naturaleza, permite su aplicación en la resolución de muchos problemas donde se busca optimizar unos objetivos.

Miller y Starr (1960) definen la Investigación Operativa como la aplicación de la teoría de la decisión, recurriendo a cualquier medio científico, matemático o lógico, para tratar de controlar los problemas a los que se enfrenta la dirección, cuando intenta aplicar la racionalidad en el tratamiento de los problemas de toma de decisiones. En la mayoría de las ocasiones, a la hora de describirla, se citan las definiciones propuestas por las dos sociedades de referencia a nivel mundial como son la Operational Research Society of United Kingdom (ORS) y la Operations Research Society of America (ORSA). Ambas destacan que la Investigación Operativa se caracteriza por su validez para tomar decisiones dentro de los sistemas u organizaciones, el uso de modelos como su esencia, el empleo del enfoque científico mediante el análisis cuantitativo, así como su casi ilimitada amplitud de aplicaciones.

Una definición que sintetiza y resalta las características fundamentales de esta disciplina establece que es aquel conjunto de modelos, desarrollos teóricos y procedimientos algorítmicos que permiten abordar la solución de problemas reales, intentando optimizar cierta medida de eficiencia o función objetivo (Ventsel, 1983; Rios, 1995; Mathur y Solow, 1996). Desde esa perspectiva, es imprescindible destacar que un elemento esencial de esta materia es su capacidad de abstracción para realizar la modelización matemática de los problemas reales (Ackoff y Sasieni, 1971; Shamblin y Stevens, 1975; Schroeder, 1992; Monks, 1994; Eppen y Gould, 2000; Taha, 2004; Hillier y Lieberman, 2006).

Para la resolución de los problemas en los sistemas u organizaciones, se utiliza una metodología que se apoya en el proceso de modelización (Rios, 1995), como representación simplificada de algún sistema real (Prawda, 1991), de forma que se pueda trabajar en un marco apropiado que permita buscar las mejores soluciones posibles a los problemas planteados. Aunque sea menos completo que el sistema al cual sustituye, y a pesar de las dificultades que se pueden originar al representar problemas reales a través del recurso a los modelos, existen múltiples razones positivas para su utilización en la investigación, en lugar de trabajar directamente sobre la realidad (Rios, 1995). Entre las principales razones se encuentran el ahorro de dinero, tiempo u otro bien de valor, el evitar riesgos de daños al sistema real cuando se está solucionando el problema, así como entender mejor las condiciones y el entorno que rodea al sistema cuando éste es muy complicado. En todo caso, es preciso destacar que, en la actualidad, la complejidad de los problemas y la imprecisión de las situaciones ha hecho necesario introducir esquemas matemáticos más flexibles y adecuados al entorno empresarial contemporáneo (Sarabia, 1996).

Además, en todo proceso de decisión va implícito un cierto nivel de riesgo, ya que existen elementos, no controlables por parte del decisor, que pueden modificar su eficacia, por lo cual un análisis sistemático de las variables que influyen en el proceso decisor puede hacer disminuir, de manera considerable, ese nivel de riesgo (Miranda et al., 2005). En ese sentido, aunque la solución del modelo matemático establece una base para tomar una decisión, se deben tener en cuenta factores intangibles o no cuantificables, como por ejemplo, el comportamiento humano para llegar a una decisión final (Taha, 2004; Hillier y Lieberman, 2006).

Efectivamente, en la toma de decisiones el análisis puede tomar dos formas: cualitativo y cuantitativo. El análisis cualitativo se basa principalmente en el juicio y experiencia del decisor y es más un arte que una ciencia, mientras que el análisis cuantitativo se concentra en hechos medibles o datos asociados con los problemas, y desarrolla expresiones matemáticas que describen las relaciones existentes en ellos, obteniendo resultados con los que se hacen recomendaciones basadas en los aspectos cuantitativos del problema (Hillier y Lieberman, 2006). De ahí que, en algunas situaciones, cuando el problema, el modelo y los insumos permanecen iguales, el análisis puede llevar a adoptar una decisión automática con los resultados obtenidos al usar los métodos cuantitativos adecuados. Evidentemente, en otros casos, el análisis cuantitativo es sólo una ayuda para tomar la decisión y sus resultados deben ser apoyados con información de carácter cualitativa.

Los modelos matemáticos utilizados en el marco de la Investigación Operativa son la base del análisis cuantitativo y representan sistemas del mundo real, cuantificando sus variables y combinándolas en expresiones y fórmulas matemáticas. Así, éstos permiten capturar características selectas de un sistema, proceso o realidad, combinándolas en una representación abstracta del original (Mathur y Solow, 1996). Por tanto, como señalan Eppen y Gould (2000), se tratan de idealizaciones de problemas de la vida real basadas en supuestos claves, relacionando variables de decisión con parámetros o coeficientes fijos que, frecuentemente, buscan maximizar o minimizar una función objetivo sujeta a restricciones.

La Investigación Operativa, al ser un campo científico dedicado al estudio y resolución de problemas reales, integra como parte esencial el análisis de los problemas de optimización y control (Monks, 1994). En muchos de los problemas a analizar se desea optimizar, en general, un conjunto de funciones en un contexto de restricciones representadas, en la mayoría de los casos, por otras funciones que definen un conjunto de posibilidades para elegir la correspondiente solución óptima. La programación matemática se ocupa entonces de edificar una estructura de conceptos, propiedades, algoritmos, etc., con los que se pretende resolver problemas de optimización formulados matemáticamente (Schroeder, 1992).

Si bien, la programación matemática proporciona un conjunto de técnicas y procedimientos generales para la optimización de funciones objetivo, existen un conjunto de métodos específicos que estudian problemas reales en diversas materias recogidas en la Investigación Operativa, como pueden ser la planificación y secuenciación de tareas o actividades, la programación de proyectos, la teoría de colas, el análisis de redes, la localización de servicios y la gestión de los inventarios. Esta última tiene un enorme interés empresarial, así como una importante incidencia estratégica en los resultados de las organizaciones, debido a su aplicación a los sectores productivo y comercial de la economía.

1.4.- La gestión y el control de inventarios en el marco de la Investigación Operativa y la Economía de la Empresa

En el ámbito de la Economía de la Empresa y de la Investigación Operativa, el control de los inventarios es, por excelencia, una de las disciplinas más estudiada por parte de los académicos, para la adopción de decisiones empresariales. La consideración del inventario como una inmovilización financiera lo convierte en un valor económico determinante para las organizaciones, ya que esas inversiones representan una gran proporción de sus activos (Tersine, 1988). De ahí que su eficiente administración se haya convertido en un factor crítico de la cadena de suministro para lograr los objetivos de gestión de la organización.

Figura 1.5: La adopción de decisiones empresariales

Fuente: Elaboración propia

El almacenamiento de stocks es una actividad económica que tiene como objetivo la satisfacción de las necesidades humanas con medios materiales escasos, apropiados y susceptibles de usos alternativos. Castañeda (1979) entiende como la utilidad de un bien su capacidad para satisfacer una necesidad, entendida en el sentido de deseabilidad. Por tanto, la utilidad es la cualidad que poseen los bienes para satisfacer los deseos y tiene un carácter objetivo y subjetivo a la vez, siendo una medida del beneficio o satisfacción que el individuo recibe por la posesión de diversas cantidades de distintos bienes y servicios. De ahí que, si se considera a los stocks como bienes económicos, éstos tienen su razón de ser en la utilidad que reportan, pues permiten disponer de un artículo atendiendo a los requerimientos del cliente (Parra Guerrero, 2005).

El término “stock” es un concepto estático que indica depósito de mercancías, materias primas u otro objeto cualquiera, mientras que la expresión “gestión de stock”, tiene una connotación totalmente dinámica, como cualquier aspecto de la gestión empresarial (Parra Guerrero, 2005). La mayor parte de las definiciones del concepto de inventario son coincidentes al afirmar que este término se refiere a acumulaciones de materias primas que esperan ser utilizadas en la producción de artículos, componentes, productos semiterminados o productos almacenados temporalmente durante el proceso de producción y productos terminados que intervienen en diferentes puntos a lo largo del canal logístico de la empresa (Zermati, 2004; Parra Guerrero, 2005). También, pueden concebirse como la cantidad de artículos, mercancías y otros recursos económicos que son almacenados o se mantienen inactivos durante un determinado período, variando en cantidad con el tiempo, en respuesta al proceso de demanda que los reduce y el proceso de abastecimiento que los eleva.

Figura 1.6: Ciclo de inventario en la cadena de suministro

Fuente: Elaboración propia

Al hablar de existencias en almacén o inventarios, hay que considerar el stock activo o cíclico que se constituye para hacer frente a las exigencias normales del proceso productivo o de los clientes. Éste alcanza su valor máximo cuando llega un pedido al almacén, consumiéndose progresivamente en el transcurso del tiempo hasta que finalmente se agota totalmente, recuperando su valor máximo cuando llega un nuevo pedido al almacén y reiterando este proceso de manera sucesiva (Waters, 1992). Por otra parte, ha de tenerse en cuenta el stock de seguridad que complementa al stock activo y se constituye para hacer frente a las demoras en el plazo de entrega de los proveedores o a una demanda externa no esperada, no siendo necesario cuando la demanda es conocida.

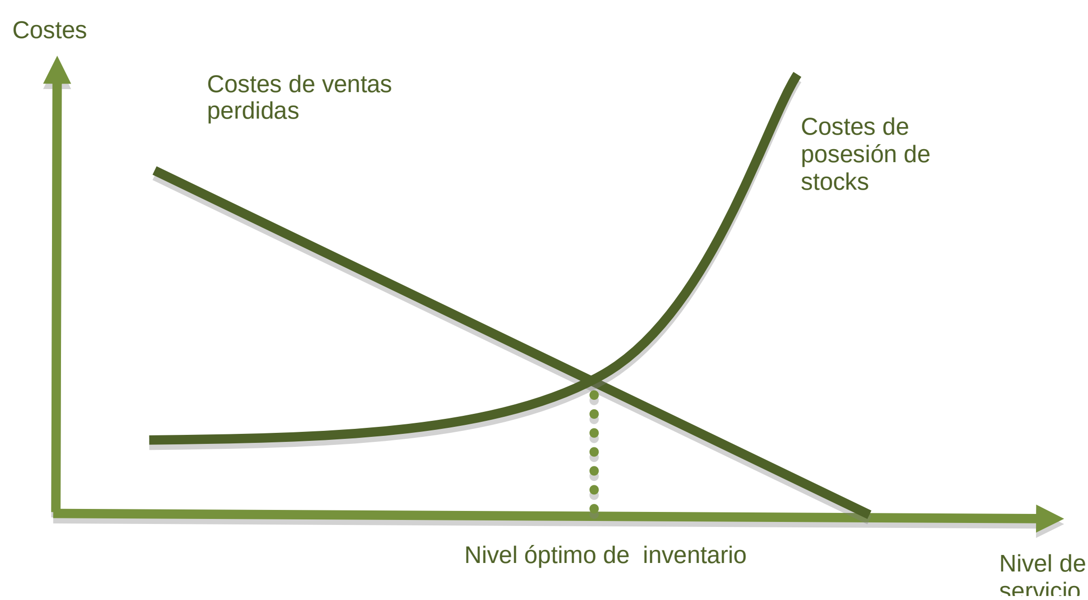
La adecuada gestión y control de los inventarios ha sido siempre un capítulo estratégico de gran relevancia en la ciencia empresarial, ya que la mayor parte de los autores coinciden en que es una de las áreas que ofrece mayores posibilidades para conseguir una reducción de los costes (Antier, 1969; Carrallo, 1978; Waters, 1992; Cuatrecasas, 1999; Ballou, 2004; Parra Guerrero, 2005). En esa línea, es preciso destacar que los costes derivados del almacenamiento de los productos tienen un protagonismo esencial dentro de los costes empresariales. Desde esa perspectiva, como sostiene Parra Guerrero (2005), ahora más que nunca, se ha de procurar la protección del beneficio empresarial mediante mecanismos distintos del incremento de las ventas y de los ingresos. Tal es así, que es probable que la palabra clave hoy en la gestión empresarial sea la productividad más que el crecimiento, configurándose el control de stocks como una de las parcelas de actividad de la empresa que ofrece mayores posibilidades de reducción en los costes, sin merma en la eficacia.

La dependencia de las áreas organizativas de la empresa con respecto a la gestión de stocks, o interdependencia de la gestión de los stocks con respecto a los diferentes subsistemas de la empresa es sumamente relevante (Ballou, 2004). Así, se puede afirmar que cualquier departamento o área organizativa de la empresa depende directa o indirectamente de los stocks y de su gestión. Por ello, frecuentemente, hay que estimar como un todo el sistema constituido por el conjunto de la red de distribución comercial, los centros de expedición, las actividades de producción, los almacenes y el departamento de aprovisionamiento. Por su parte, el control de los stocks está también enlazado con la previsión de las ventas, la planificación de la producción y la política de reposición. El no comprender hasta qué punto estas áreas son interdependientes, puede conducir a la empresa a tomar decisiones que incrementen sus costes y reduzcan su rentabilidad.

Efectivamente, la gestión, administración y control de los inventarios se deriva de la importancia que tienen las existencias para la empresa, siendo esta actividad un elemento básico en la cadena de abastecimiento, y constituyendo uno de los aspectos logísticos más complejos para cualquier organización de cualquier sector económico (Cuatrecasas, 1999). Esta función está destinada a optimizar el conjunto de elementos almacenados por la empresa, coordinando las necesidades físicas del proceso productivo con sus necesidades financieras. El objetivo fundamental consiste en mantener un nivel de inventario que permita, a un mínimo costo, proporcionar un máximo nivel de satisfacción a los clientes, asegurando la disposición de los materiales en las mejores condiciones económicas para cubrir sus necesidades y las del proceso productivo (Zermati, 2004; Anaya Tejero, 2011).

Por tanto, las técnicas de gestión de stocks tienen entre sus principales fines conciliar la minimización de los costes de almacenamiento de los productos, con hacerlos llegar al cliente, sin que éste tenga que incurrir en tiempos de espera, o logrando que este tiempo sea el mínimo posible, permitiendo maximizar las ventas y los beneficios (Christopher, 1994; Domínguez Machuca et al., 1995; Lambert et al., 1998; Cuatrecasas, 1999; Anaya Tejero, 2011). De acuerdo con García Sabater et al. (2005), el objetivo principal de la gestión de inventarios ha sido el de maximizar la rentabilidad de la compañía, minimizando el costo de capital inmovilizado en el inventario y al mismo tiempo satisfaciendo los requerimientos de servicio al cliente.

Gráfico 1.3: Optimización del servicio



Fuente: Anaya Tejero (2011). Elaboración propia

Los elementos críticos que deben considerarse para la toma de decisiones en los procesos de gestión de inventarios tienen que ver con su distribución, el tipo de producto, la demanda, así como los sistemas de pronóstico que sirven para determinar su evolución en base a las necesidades de los consumidores (Parra Guerrero, 2005). Por ello, el problema fundamental de la gestión de stocks se centra en determinar cuál debe ser la cantidad que se debe mantener en el almacén para evitar la ruptura del proceso productivo, así como el establecimiento de la inversión máxima en existencias, considerando que cuanto mayor sea la cantidad de elementos almacenados, menor será el riesgo de ruptura de stocks y mayores serán los costes en los que se incurrirá (Norbert, 1981; Anaya Tejero, 2011), incluyendo el coste de oportunidad derivado de la inmovilización de recursos financieros materializados en existencias.

En relación con la gestión de stocks, Roux (2002) distingue entre la adopción de decisiones estratégicas y tácticas. Las decisiones estratégicas pretenden determinar qué artículos hay que tener en almacén y en qué cantidad, así como seleccionar las formas de aprovisionamiento. Por su parte, las decisiones tácticas u operativas comprenden el control de las entradas y salidas de artículos del almacén, el conocimiento de su estado, la vigilancia constante de su nivel, la comprobación de su procedencia, la administración de las entregas, la elección de las fuentes de abastecimiento, así como la realización de los pedidos.

La gestión del inventario ha de implementar las políticas operativas para mantener y controlar los bienes que se van almacenar (Chase y Aquilano, 1994). De ahí que mantener niveles adecuados de stocks, permitan a la organización mantener una mayor independencia en las operaciones, ajustarse a las variaciones de la demanda, flexibilizar la programación de la producción, proporcionar margen de tiempo para la entrega de los productos, sacar un mejor rendimiento al tamaño del pedido de compra y ofrecer un mejor servicio al cliente (Anaya Tejero, 2011).

El nivel mínimo de existencias en almacén ha de renovarse al ritmo condicionado por la demanda del proceso productivo y de los clientes, lo cual determina su índice de rotación, considerando que el objetivo de un sistema de reposición de inventario supone llevar a cabo un balance entre el coste de mantener los niveles de stock y el servicio que se presta a los clientes (Rusthon y Oxley, 1989; García Sabater et al., 2005). La decisión que se debe adoptar se centra en decidir entre tener altos niveles de stock, que proporcionarán altos niveles de servicio a los clientes, o tener bajos niveles de stock, que generarán menores costes (Zipkin, 2000; Zermati, 2004). En ese sentido, las desventajas de poseer bajos niveles de stocks se traducen en que los pedidos no pueden satisfacerse de manera íntegra, lo cual podría llevar a una pérdida, tanto de clientes reales como potenciales. Por su parte, mantener elevados niveles de inventario puede suponer importantes desventajas debido a que el capital almacenado podría estar invertido en otros activos más productivos, a lo que habría que añadir el riesgo de deterioro de los productos, de obsolescencia o de caducidad.

Los sistemas de reposición de inventarios se diseñan para minimizar los efectos de las ventajas o desventajas derivadas de poseer diferentes niveles de stocks. Existe una gran variedad de sistemas de reposición, pero los más utilizados por las organizaciones son el sistema de revisión periódica del nivel de stock y el sistema de pedido en punto fijo. Los sistemas de revisión periódica se fundamentan en revisar el nivel de stock de productos a intervalos regulares de tiempo, de tal forma que en el momento de su recepción, el stock recupere el nivel deseado, mientras que los sistemas de pedido en punto fijo, determinan el nivel de stock y la cantidad a pedir cuando se alcanza el punto de pedido o nivel de reaprovisionamiento.

El problema que surge entonces es cuánto pedir y la respuesta a ese interrogante no es fácil de contestar, ya que hay diferentes respuestas posibles (Naddor, 1966; Waters, 1992; Rambaux, 1998; Zipkin, 2000; Zermati, 2004). Para calcular la cantidad adecuada que se debería solicitar habría que determinar el tamaño del lote óptimo, analizando los costes relacionados con el inventario. También, debería especificarse el momento idóneo para ejecutar las órdenes de reposición. La repercusión de esas decisiones sobre los costes de mantenimiento supondrá que a mayor pedido de cierto artículo, mayores serán dichos costes. Por otro lado, realizar un gran número de pedidos en pequeñas cantidades generará un volumen medio más bajo de stocks, pero unos costes de reposición y entrega mayores.

Desde una perspectiva complementaria, en un entorno económico turbulento como el actual, caracterizado por un exceso de oferta sobre la demanda, en el que las exigencias de los consumidores son cada vez mayores, el mundo empresarial está destinando un gran número de recursos y esfuerzos para atraer, retener y fidelizar al cliente con el fin de mantener relaciones positivas a largo plazo (Kotler et al., 2000), ya que es mucho más fácil conservarlo que ganar nuevos clientes. En ese sentido, cuando hay rotura de stocks o escasez es complicado que los clientes esperen por la llegada de la siguiente reposición, ya que algunos de ellos adquirirán sus productos a la competencia, siendo probable que la empresa los pierda como clientes, afectando, además, negativamente a su imagen.

De ahí que, los inventarios actúen como reguladores entre los ritmos de salida de productos en unas fases y los de entrada a las siguientes (Ballou, 2004), siendo frecuente que los proveedores entreguen materiales periódicamente y que las empresas los precisen de forma prácticamente continua. De la misma manera, el ritmo de ventas no suele coincidir con el de generación de productos, por lo cual se hace precisa la utilización de inventarios de productos terminados. Si los aprovisionamientos fueran instantáneos, adquiriendo el bien o artículo en el momento y lugar en el que surge la necesidad, con la calidad especificada, cantidad deseada y al precio mínimo, el acumular existencias para su posterior utilización no tendría sentido, pero llegar a esa perfecta sincronización es muy complejo.

Con la finalidad de seguir profundizando en nuestro análisis, en el siguiente capítulo presentamos los fundamentos y conceptos básicos relacionados con la gestión y el control de los stocks en las organizaciones, junto con una revisión teórica de los modelos de inventarios deterministas que incorporan demanda variable en el tiempo.

CAPÍTULO 2

LOS MODELOS DE GESTIÓN DE INVENTARIOS

CAPÍTULO 2

LOS MODELOS DE GESTIÓN DE INVENTARIOS

2.1.- Introducción

En la actualidad, la economía mundial se encuentra inmersa en una profunda crisis económica que está generando un decrecimiento de la producción de las empresas debido a la contracción de la demanda, con sus consiguientes consecuencias en la disminución de las ventas y los beneficios. Ello obliga a las organizaciones a tener que ahorrar en todo lo que se refiere a los costes asociados con la administración y gestión de los negocios empresariales, con la finalidad de compensar sus pérdidas de ingresos y la posible minoración de los beneficios.

La creciente competitividad en los negocios requiere reducir el costo de las operaciones de las compañías para intentar sobrevivir y no perder la posición actual que mantienen en su sector de actividad (Parra Guerrero, 2005). Una de las componentes más importantes del costo de las operaciones empresariales está vinculada al capital cautivo que mantienen, como consecuencia de las inversiones en stocks necesarias para ofrecer el servicio que el mercado requiere. Así, una de las principales decisiones de gestión, en la cual es factible la reducción de costos, se centra en la regulación de los niveles de productos almacenados por las empresas, es decir, en la gestión y control de stocks. De esa manera, aunque los inventarios almacenan valor, son considerados, en algunos casos, como pérdidas, cuando no se les logra dar salida, ya que absorben capital que podría estar disponible para usos alternativos orientados a mejorar la productividad o la competitividad. Por tanto, la reducción de los costes de inventario no es un hecho aislado, sino que se enmarca dentro de la tendencia general orientada a la reducción de costes que caracteriza a la empresa moderna.

En esta área de conocimiento, el objetivo que se ha de centrar en el análisis de modelos de gestión de inventarios enfocados a la cuantificación de variables de decisión que permitan minimizar los costos, en la medida de lo posible, e incrementar así los beneficios de las empresas.

La gestión de inventarios, fundamentalmente, trata de dar respuesta a las preguntas relativas a cuándo se debe realizar un pedido y cuál ha de ser el tamaño del lote de reaprovisionamiento (Naddor, 1966; Miranda, 2005). De ahí que, un modelo de gestión de stocks sirva para establecer una política óptima con el propósito de adoptar decisiones encaminadas a minimizar el coste total del inventario, alcanzando un equilibrio entre la calidad de servicio ofrecido a los clientes y el coste económico en el que se ha de incurrir (Rambaux, 1988; Lambert et al., 1998; Zermati, 2004; García Sabater el al., 2005).

Como señala Parra Guerrero (2005), a la hora de gestionar los stocks se han de considerar una serie de factores básicos y variables de decisión que influyen en los inventarios. En términos generales y absolutos, no se puede hablar de factores controlables y no controlables puesto que la incidencia de una variable sobre la gestión de stocks depende de cada sistema concreto, ya que, en ocasiones, un mismo factor puede ser controlable, en unos casos, y limitativo en otros.

Los factores controlables o variables de decisión suelen ser la cantidad a pedir, el punto de pedido, el nivel de stock inicial y el plazo de aprovisionamiento o periodo de programación o gestión, ya que están sujetos a decisiones que se adoptan en el ámbito de la empresa y, por lo tanto, forman parte de su gestión y política estratégica. Por su parte, entre los factores que no suelen ser controlables se encuentran la demanda, que puede ser determinista o aleatoria; algunos de los costes de gestión, en los que se incluyen los de adquisición, de pedido, de mantenimiento y de rotura; el plazo de reposición o entrega de la mercancía solicitada para reponer el inventario, también denominado periodo de retardo, que puede ser nulo, positivo, conocido o aleatorio; el posible deterioro o la caducidad de los bienes; el espacio en almacén; así como la financiación necesaria que puede ser propia, ajena, de los proveedores o proveniente de otras fuentes.

A lo largo de este capítulo hablaremos de aquellos factores que, de una forma u otra, influyen en la gestión de los stocks, describiendo las principales características y variables de decisión que permiten analizar los sistemas de inventario. Posteriormente, presentaremos una revisión de trabajos relacionados con la gestión y el control de los inventarios, en los cuales la demanda de los clientes se expresa como una función dependiente del tiempo.

2.2.- La demanda y la gestión de stocks

En términos generales, la demanda puede definirse como el volumen físico o monetario de un producto o servicio que los clientes o compradores están dispuestos a solicitar y adquirir en un lugar y período de tiempo dado, bajo determinadas condiciones. De esta definición se desprende que la demanda no tiene un carácter absoluto, sino relativo, cuyas condiciones se han de precisar para delimitar su amplitud.

Desde una perspectiva orientada al cliente, autores como Kotler et al. (2000) definen la demanda como el deseo que se tiene de un determinado producto pero que está respaldado por una capacidad de pago. La mayor parte de las descripciones que incorporan una visión enfocada al marketing revelan que la estructura de la demanda está conformada por un conjunto de partes: la cantidad de bienes o servicios, los compradores o consumidores que adquieren determinados productos para satisfacer sus necesidades o deseos, la disposición a adquirir el producto o servicio, la capacidad de pago y el precio, dado que es la expresión de valor expresado (Santesmases, 2012).

Además, la función de demanda es la ecuación matemática que expresa la influencia simultánea de las diferentes variables que afectan a la evolución de las cantidades demandadas por los consumidores de un determinado producto o servicio (Rufin, 2010). En concreto, dentro del ámbito de la gestión de stocks, podemos definir la demanda como las necesidades de salida de mercancía del almacén que se van a producir durante un cierto período de tiempo.

En la cadena de suministro se establece una demanda en cada uno de sus eslabones (Ballou, 2004). La demanda final es la ocasionada en el último eslabón de la cadena de producción y distribución, es decir, la demanda de los consumidores. Por su parte, la demanda derivada es aquélla que se origina como consecuencia de las actividades de producción de una determinada industria u organización.

Los determinantes de la demanda son aquellos elementos o factores que pueden ejercer una influencia en su evolución (Parra Guerrero, 2005). Por una parte, están los factores controlables, que son aquellos sobre los que la empresa puede actuar para influir en la demanda de acuerdo con sus objetivos. Estos son, entre otros, el precio, la promoción, la publicidad, la distribución, el número de vendedores, la calidad del producto, el nivel de existencias, los plazos de entrega del artículo demandado y el servicio postventa. Por otra parte, están los factores no controlables, que son aquellos sobre los que la empresa no ejerce ninguna capacidad de decisión y, por lo tanto, no pueden ser utilizados por ésta para influir en la demanda. Entre ellos destacan los factores de entorno, los factores relativos a la competencia y los factores inherentes a las características del consumidor.

La cadena de producción y distribución que sigue el producto, desde su punto de origen hasta que es utilizado por el consumidor, está conformada por un número variable de eslabones, cada uno de los cuales representa una fase de transformación o distribución en la que éste necesita ser almacenado (Díez de Castro, 1997; Ballou, 2004). En un extremo de la cadena logística se encuentran los almacenes que contienen productos que sirven de suministro para el siguiente eslabón de la cadena y la demanda que reciben dependerá de las necesidades del proceso productivo. El distribuidor también ejercerá una demanda sobre el productor y así sucesivamente, hasta llegar al último eslabón, en el cual los almacenes del distribuidor estarán dirigidos a satisfacer la demanda de los consumidores. En este último eslabón es donde tiene su origen el proceso de demanda real que depende, en exclusiva, del consumo final.

Por tanto, para la adopción de decisiones el directivo debe conocer la cuantía de la demanda real, las salidas de productos del almacén y el tamaño de su demanda efectiva, referidas a un determinado período de tiempo, que se corresponde con la demanda satisfecha. La demanda efectiva es lo que se ha demandado al almacén durante un período de tiempo, mientras que la demanda real es una previsión que se efectúa tras analizar las peticiones de los clientes, o las peticiones realizadas a los proveedores para cualquier análisis que incluya una producción planificada. De ahí que las decisiones relativas a cuanto producir o a la cantidad de artículos que se han de almacenar, deben basarse en información sobre la demanda real, la cual puede ser diferente de la efectiva.

Ballou (2004) hace especial énfasis en la necesidad de prever y pronosticar los niveles de demanda, con la finalidad de obtener información relevante para la planificación y control de todas las áreas funcionales de la empresa, relacionándose los pronósticos en logística con su naturaleza espacial y temporal, su grado de variabilidad y aleatoriedad. El autor señala que la previsión de la demanda es una de las actividades generales de mayor importancia para cualquier empresa, ya que proporciona los datos básicos de entrada para la planificación y el control de todas las áreas funcionales, incluida la logística, comercialización, producción y finanzas. En efecto, la importancia de tener información sobre la previsión de ventas para la empresa dentro del campo de la logística, se debe a que está relacionada con la gestión de aprovisionamientos, la programación del transporte, la planificación de la producción, la gestión de stocks y almacenes y otras áreas de la organización. Por todo ello, debe considerarse el análisis de la demanda como un factor fundamental para el éxito de la empresa con grandes consecuencias en el área logística.

De acuerdo con Ballou (2004), se dispone de varios métodos de pronóstico estandarizados: cualitativos, de proyección histórica, y causales. Cada método difiere en términos de la precisión relativa en el pronóstico sobre el largo plazo y el corto plazo, en el nivel de sofisticación cuantitativa utilizada, así como en la base lógica de la que se deriva el pronóstico.

Las suposiciones que se hacen respecto a la demanda son las más importantes, ya que suelen ser las que determinan la complejidad de los modelos de gestión de inventarios (Naddor, 1966). En ese sentido, el comportamiento de la demanda juega un papel esencial a la hora de establecer un modelo de gestión, pudiendo ser continua o discreta, determinista o aleatoria, así como de naturaleza independiente, dependiente o mixta (Díez de Castro, 1997; Parra Guerrero, 2005).

Generalmente, los modelos de inventario se clasifican de acuerdo a si se conoce la demanda en un período determinado, llamándose en este caso deterministas, o por el contrario, si la demanda es desconocida y debe ser estimada, en cuyo caso se trabaja con cantidades posibles o probables, denominándose aleatorios o estocásticos (Rios et al., 2004). Además, hay modelos deterministas que asumen una demanda constante y conocida, lo cual significa que no cambia y puede ser fija o estimada a priori. También, existen modelos que contemplan una demanda determinista variable en el tiempo, en los cuales la cantidad demandada no es constante. La variación de esa demanda en el tiempo es producto del incremento o disminución de los índices de ventas, la variación estacional del patrón de demanda, así como de las variaciones globales ocasionadas por factores diversos (Naddor, 1966). Por otra parte, la demanda se puede clasificar como independiente, cuando no se relaciona con la demanda de otros artículos producidos en la empresa, y dependiente, cuando está relacionada con la demanda de otros artículos y no está determinada por el mercado (Miranda, 2005).

Sea como fuere la naturaleza de la demanda, es decir, determinista o aleatoria, independiente o dependiente de la demanda de otros productos, se ha de analizar y estudiar cómo influye su evolución en la gestión y control de los materiales almacenados. Esa influencia se cuantifica mediante la determinación de los costes relacionados con la gestión de los inventarios.

2.3.- Costes que intervienen en la gestión de stocks

El análisis de los inventarios implica el control de sus niveles y la adopción de decisiones relativas a la reposición de los mismos, manteniendo el equilibrio entre fuerzas de sentido contrario que contribuyen a determinar el volumen de las existencias almacenadas (Parra Guerrero, 2005). Por una parte, la empresa debe asegurar la continuidad de su ritmo de producción y la satisfacción de la demanda de sus clientes pero, por otra parte, la tenencia de existencias le hace incurrir en costes que se incrementan al aumentar el nivel de stocks.

En ese sentido, tener demasiado inventario entraña un riesgo, ya que podría provocar serias pérdidas de beneficios, generando costos adicionales innecesarios, entre los que están los de deterioro u obsolescencia de los artículos almacenados. Por su parte, disponer de pocos bienes podría generar roturas o falta de existencias, lo cual se traduciría en la generación de costos por la falta de artículos en el momento de ser demandados, pérdidas de beneficios, así como deterioro de la imagen comercial de la empresa. De esa manera, cuando se produce rotura y no se puede atender satisfactoriamente a un cliente, es probable que éste decida adquirir los productos a la competencia, lo cual implica para la empresa la pérdida de los beneficios derivados de esa venta y, si se repite esa rotura con frecuencia, puede ocasionar la posible pérdida del cliente a corto o a largo plazo. A ello hay que añadir que puede transmitirse la experiencia fallida a otros clientes y que los mismos se pierdan también, proporcionando una oportunidad a la competencia.

Dado que el objetivo, normalmente, consiste en minimizar los costes totales de inventario, las hipótesis que se hacen sobre la estructura de dichos costes también influyen en la complejidad de los modelos. En general, por la importancia que revisten, es necesario hacer un análisis detallado de los distintos tipos de costos que pueden intervenir en cualquier problema de inventario, pudiendo ser agrupados de la siguiente forma:

- Coste de compra o adquisición, cuya importancia a la hora de comprar es decisiva y se origina por la adquisición de las existencias, siendo, en general, igual al producto del precio unitario del bien por el número de unidades que se compran. En algunos modelos se supone que el precio por unidad de artículo es independiente del tamaño del pedido, y por eso no se suele incluir, pero cuando el precio por unidad de producto depende de la cantidad pedida, el coste de compra se convierte en un factor determinante. Téngase en cuenta que en muchos modelos de inventario se incorpora el costo de compra o adquisición como un elemento más dentro del costo de reposición, el cual comentaremos a continuación.

- Coste de reposición, que está asociado con los pedidos y comprende todos los gastos ocasionados por la tramitación y el suministro de los artículos solicitados. Por tanto, incluye los salarios de los agentes de los servicios de aprovisionamiento, los trámites administrativos de lanzamiento del pedido, impuestos, seguros, etc. Además, cada pedido lleva incorporado su coste de recepción y, en ocasiones, los costes de transporte y control de calidad del lote recibido, cuando estos van a cargo del comprador. La hipótesis más simple consiste en suponer que hay un coste fijo por reposición que es independiente de la cantidad solicitada. También, se puede admitir que este coste sea lineal, es decir, un coste de reposición proporcional a la cantidad pedida. Sin embargo, otra posibilidad consiste en asumir que dicho coste está formado por dos componentes, uno fijo y otro variable que depende del tamaño de la reposición.

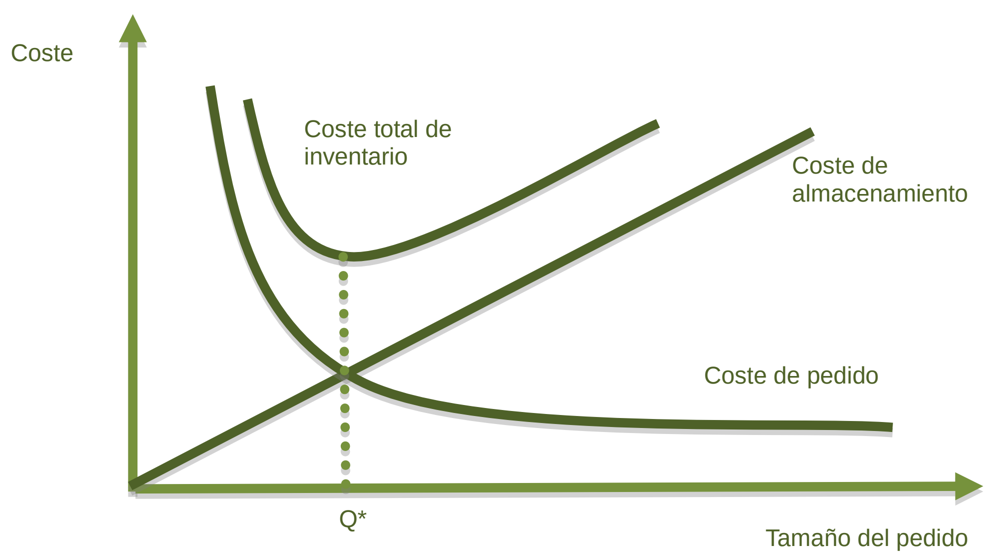
- Coste de mantenimiento o almacenamiento que es inherente a la existencia misma del stock y se subdivide en costes financieros y costes de almacenaje.

  Los costes de mantenimiento de tipo financiero, a su vez, se clasifican en intereses, costes de oportunidad del dinero comprometido en inventario, el cual se podría haber invertido de otra manera, así como otros costes financieros. Por su parte, los costes de almacenamiento están constituidos por los costes de funcionamiento del almacén, gastos del local, energía eléctrica, agua, teléfono, seguros, los costes de obsolescencia, las pérdidas, los robos y las mermas en los productos. El coste de mantenimiento se cuantifica a partir del stock medio existente en el almacén durante cada período de tiempo y se puede calcular en porcentaje sobre el valor monetario de las existencias medias por unidad de tiempo, en unidades monetarias por unidad de artículo en stock, o una parte como cuota fija y otra como proporcional al volumen de existencias.

- Coste de rotura, el cual se deriva de la carencia de stocks para satisfacer la demanda en el lugar y el momento en que se necesitan los productos por parte de los clientes. Está asociado con la demora a la hora de satisfacer la demanda o con la incapacidad de servir la orden de pedido en el momento en que se solicita. En general, la estimación de este costo tiene un importante componente subjetivo, ya que a veces es muy difícil estimar la pérdida ocasionada por la no llegada de un pedido en el momento en que se carece de existencias. En el ámbito de la logística empresarial, la carencia de los stocks puede ocasionar diferentes grados de perjuicio, provocando diversos efectos según sean las características del artículo y la importancia de su utilidad. Si la finalidad de los stocks consiste en abastecer un proceso productivo, su rotura generará pérdidas a la organización. Por su parte, si los stocks pertenecen a una empresa comercial y su utilidad consiste en disponer del artículo en el lugar y tiempo en que el cliente lo necesita, se pueden dar situaciones diferentes.

En primer lugar, podría suceder que el cliente esté dispuesto a esperar por la llegada de nuevos artículos, con lo que el coste derivado de la rotura sería pequeño y, únicamente, supondría un retraso en el cobro del importe de la venta. No obstante, no disponer del importe económico derivado de la venta conllevará la no recepción de los correspondientes intereses monetarios. Además, debe subrayarse que si los clientes tuviesen que soportar esta situación de forma continuada se correría el peligro de pérdida de ventas y se vería afectada la imagen de la empresa. En segundo lugar, podría suceder que el cliente trate de abastecerse puntualmente en otro lugar, pero permaneciendo siendo fiel a la empresa, en cuyo caso los costes vendrían definidos por la pérdida o la no obtención del beneficio derivado de la compra no atendida. En tercer lugar, podría ocurrir que se pierda al cliente, de tal manera que los costes de rotura serían iguales a la pérdida del beneficio que habría generado esa compra, junto con todos los beneficios futuros que podría haber proporcionado dicho cliente**.**

Gráfico 2.1. Representación de costos relacionados con la gestión de los inventarios



Fuente: Elaboración propia

Una vez comentados los costos principales que intervienen en la gestión de los inventarios, en la siguiente sección abordaremos los fundamentos básicos que permiten estudiar y analizar los modelos de gestión de stocks.

2.4.- Fundamentos de los modelos de gestión de inventarios

En general, cualquier sistema de inventario debe incluir las siguientes características que influyen y delimitan la formalización del problema de inventario:

- Una demanda de ciertos artículos que se expresa en función del tiempo y que puede ser determinista o aleatoria.

- La existencia de un inventario de artículos orientados a satisfacer la demanda, el cual debe ser reaprovisionado o renovado de manera continua, periódica o a intervalos cualesquiera.

- Costos asociados a las operaciones de compra o adquisición, mantenimiento o almacenamiento y a la reposición, incluyendo los relacionados con la rotura, que juegan un papel esencial en algunos problemas.

- Objetivos a alcanzar y restricciones que intervienen en razón de la naturaleza misma del problema.

A su vez, para una mejor concreción y delimitación del problema a analizar, se requiere considerar ciertos conceptos básicos relacionados con los modelos de gestión de stocks:

- Periodo de retardo o plazo de entrega, el cual se define como el tiempo que transcurre desde que se realiza el pedido hasta que se recibe el producto o la mercancía en el almacén. Representa una medida del tiempo de respuesta del proveedor. La suposición más simple consiste en admitir que su valor es cero, aunque esto no es frecuente en la práctica. Dicha hipótesis tiene sentido cuando el tiempo requerido para suministrar las reposiciones es pequeño y despreciable en comparación con el tiempo entre reposiciones. De ahí que, lo más común sea suponer que el periodo de retardo es una constante fija. También, se podría plantear el supuesto de que el periodo de retardo sea una variable aleatoria, pudiendo suceder que los pedidos no lleguen en el mismo orden en el que fueron solicitados.

- Roturas, que se definen como la falta de existencias para satisfacer la demanda. En ese sentido, se deben realizar suposiciones acerca de cómo reacciona el sistema cuando la demanda excede al stock existente. En ese caso, se puede asumir que todo el exceso de demanda es rotura, lo que implica un nivel de inventario negativo, aunque es posible que no se pierdan las ventas, ya que los clientes estarían dispuestos a esperar a la llegada del siguiente pedido para satisfacer sus necesidades. También se puede suponer que todo el exceso de demanda se traduce en pérdida de ventas, lo cual significa que las roturas no son recuperables.

- Proceso de revisión, referido a la manera en la que se realiza la revisión del inventario, que puede ser continua o periódica. Si la revisión es continua, en todo momento se conoce, exactamente, el nivel de inventario, mientras que si la revisión es periódica, sólo se conoce en determinados puntos, cuando se realiza la revisión. Lo más común es suponer que la revisión es periódica, aunque a veces también se realizan aproximaciones a la revisión continua. Lógicamente, en los sistemas en los que se asume revisión continua, las reposiciones pueden realizarse en cualquier instante, mientras que cuando se asume revisión periódica, las reposiciones tienen lugar al principio de los periodos de reposición.

- Punto de pedido o reposición, el cual es aquel nivel de inventario que señala cuando debe solicitarse un nuevo pedido para reponer el inventario.

- Ciclo de inventario o período de gestión, que es el tiempo que transcurre entre dos reposiciones consecutivas del inventario.

- Modo de reaprovisionamiento, referido a cómo se reciben los pedidos, que puede ser mediante una entrega única o una entrega paulatina.

- Tamaño de la reposición, que equivale a la cantidad solicitada o producida para reponer el inventario. También se denomina tamaño del lote.

- Nivel de inventario: es una función dependiente del tiempo, que representa la cantidad que hay en el inventario en un momento determinado.

- Nivel de inventario inicial: es la cantidad en el inventario en el momento de iniciar un nuevo ciclo.

- Nivel máximo y nivel mínimo de inventario: se corresponden con el punto más alto y más bajo, respectivamente, que puede alcanzar el inventario.

- Tamaño o nivel de demanda: cantidad total de cierto artículo solicitada por los clientes durante un determinado periodo de tiempo.

- Periodo de reposición: tiempo que transcurre desde que se recibe la mercancía hasta que ésta está disponible para su venta.

2.5.- Modelos básicos en la gestión de inventarios

Una vez expuestos, en el apartado anterior, los fundamentos de los sistemas de gestión de stocks, a continuación, en esta sección, describimos dos modelos básicos que abordan determinados problemas clásicos de inventario.

Uno de los primeros análisis científicos existentes sobre la administración y gestión de los inventarios consistió en el estudio y desarrollo del modelo de tamaño del lote económico realizado por Harris en 1913, quien desarrolló una fórmula matemática para decidir la cantidad de stock a pedir en función de los costes de mantenimiento y reposición.

A partir de ahí, han sido numerosos los autores que se han dedicado a la tarea de resolver múltiples problemas relacionados con la gestión de stocks, planteando modelos orientados a la resolución de los mismos e intentando determinar la política de abastecimiento óptima, esto es, la cantidad a pedir y el período de programación adecuado para lograr el costo mínimo de gestión del inventario (Wagner y Whitin, 1958; Silver y Meal, 1973; Shamblin y Stevens, 1975; Ventsel, 1983; Bose et al., 1995; Mathur y Solow, 1996; Waters, 2001; Ghosh y Chaudhuri, 2005; Singh et al., 2009; Hung, 2011 y otros).

El enfoque clásico en la modelización de inventarios deterministas se basa en el supuesto de la existencia de una tasa de demanda uniforme, y tiene como principal objetivo establecer la cantidad que se debe solicitar para reponer el stock, de forma que se minimice su costo total. Sin embargo, muchos investigadores han estudiado otras formas de la demanda para profundizar en el análisis, haciéndolo más práctico y completo, con la finalidad de afrontar una mayor variedad de problemas reales.

Como hemos comentado, el modelo más básico y conocido es el modelo de cantidad económica de pedido, denotado por EOQ (Economic Order Quantity), el cual recoge las principales características o componentes que determinan la estructura de un sistema de inventario con demanda determinista constante, constituyendo la base de todos los modelos de control de inventarios desarrollados posteriormente. Las hipótesis del modelo EOQ son las siguientes:

- La demanda es conocida y constante, solicitándose cierta cantidad de artículos por unidad de tiempo.

- La cantidad a pedir puede ser un número no entero y no hay restricciones sobre su tamaño.

- Los costes son constantes y no varían con el tiempo. Existe un coste de reposición fijo por pedido, así como un coste de mantenimiento constante por unidad mantenida a lo largo del tiempo.

- Los costes de reposición de los artículos no dependen de la cantidad a reponer, es decir, no hay descuentos dependiendo del tamaño del lote.

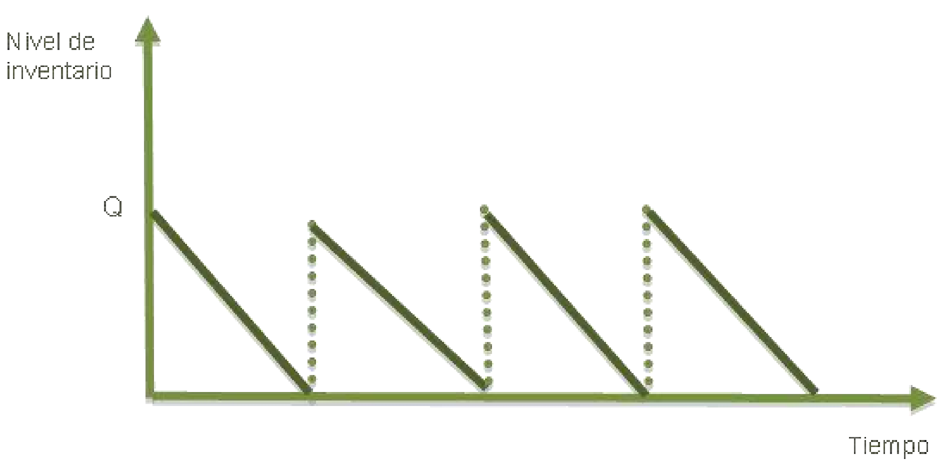
- Las reposiciones son instantáneas, es decir, el periodo de reposición es cero. Todo el pedido se entrega al mismo tiempo.

- No se permiten roturas, es decir, no existe la posibilidad de que haya insuficiencia de artículos en el almacén para satisfacer la demanda.

- El horizonte de planificación es infinito o muy largo, es decir, se asume que los parámetros toman el mismo valor durante un extenso periodo de tiempo.

Como el periodo de retardo es cero y la demanda es conocida, es evidente que sólo se debe realizar un pedido cuando el nivel de inventario llega a cero. En el gráfico 2.2 se muestra una figura que refleja el nivel de inventario a lo largo del tiempo.

Gráfico 2.2: Nivel de inventario en el modelo EOQ



Fuente: Elaboración propia

Si consideramos que r es la razón de demanda por unidad de tiempo, A es el coste fijo de reposición y h es el coste unitario de mantenimiento por unidad de tiempo, la función de coste del modelo EOQ es

$$C(Q) = h\frac{Q}{2} + A\frac{r}{Q} \qquad (2.1)$$

Derivando e igualando a cero, se deduce fácilmente que la cantidad de reposición óptima para este modelo es

$$Q = \sqrt{\frac{2rA}{h}} \qquad (2.2)$$

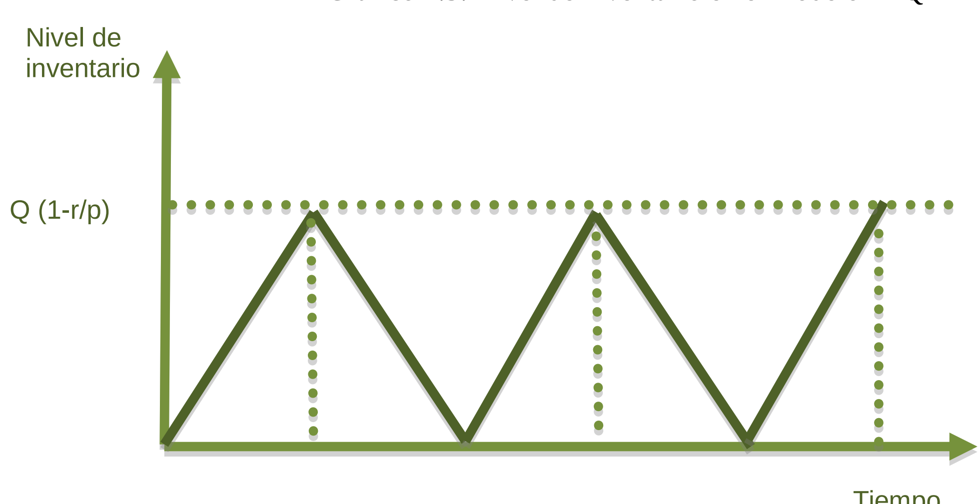
Esta expresión es conocida como la fórmula de Harris (1913a, 1913b) o de Wilson (1934), ya que estos autores fueron los primeros que la recogieron en sus respectivos trabajos.

El costo mínimo para este sistema de inventario también depende de los mismos parámetros y viene dado por

$$C = \sqrt{2rAh} \qquad (2.3)$$

Veamos ahora un segundo modelo básico de gestión de stocks. Una extensión natural del modelo EOQ es el modelo de cantidad de producción económica, denotado por EPQ (Economic Production Quantity). En el modelo EOQ, toda la cantidad pedida se añade al inventario en el mismo instante de tiempo ya que la reposición es instantánea. Sin embargo, en este modelo la reposición se produce a una razón finita de p unidades por unidad de tiempo, donde p > r. De esa manera, el gráfico del nivel de inventario para este sistema se recoge en la Figura 2.3.

Gráfico 2.3: Nivel de inventario en el modelo EPQ



Fuente: Elaboración propia

La función de coste en el modelo EPQ es

$$C(Q) = h\frac{Q}{2}(1-\frac{r}{p}) + A\frac{r}{Q} \qquad (2.4)$$

Derivando e igualando a cero, se obtiene que la cantidad económica de producción o tamaño del lote, viene expresada por

$$Q = \sqrt{\frac{2rA}{h\left(1-\frac{r}{p}\right)}} \qquad (2.5)$$

El costo mínimo asociado con la gestión del inventario en este sistema es

$$C = \sqrt{2rAh(1-r/p)} \qquad (2.6)$$

Tanto en el modelo EOQ como en el EPQ, la demanda es conocida y constante a lo largo del tiempo. Esa hipótesis puede modificarse, considerando que la demanda varíe con el tiempo. En este trabajo de investigación estudiamos modelos de inventario cuya razón de demanda depende del tiempo por lo cual, en la siguiente sección, abordamos una revisión de diferentes trabajos que estudian modelos de gestión de stocks que tienen esa característica.

2.6.- Revisión de la literatura sobre modelos de inventarios deterministas

2.6.1.- Modelos de inventario deterministas con demanda variable en el tiempo

Existe un consenso generalizado a la hora de considerar que las propiedades de la demanda representan las características más importantes y determinantes de un sistema de inventario. En general, los modelos que se diseñan con la finalidad de adoptar decisiones encaminadas a realizar una adecuada gestión y control de stocks se orientan a satisfacer las necesidades de los clientes, y se caracterizan porque la demanda, tal como se ha comentado, puede ser constante o variable en el tiempo, determinista o aleatoria, predecible o impredecible.

En ese sentido, hemos visto en la sección anterior como en los modelos clásicos EOQ y EPQ la demanda es determinista y se considera constante. Posteriormente, con el transcurso del tiempo, se han introducido y analizado nuevos modelos en los que los patrones de la demanda, durante el ciclo de inventario, dependen del tiempo. Estos modelos, caracterizados por permitir variabilidad de la demanda, han atraído la atención de los investigadores, los cuales han aportado nuevas contribuciones a esta materia.

En los modelos de inventarios deterministas con demanda dependiente del tiempo se asume que ésta es conocida y varía con el tiempo, contrariamente a los modelos EOQ y EPQ. Por ello, el análisis del sistema de inventario se hace más complejo, ya que el nivel de stock no varía de forma lineal.

En la literatura sobre modelos de inventario podemos encontrar diversos trabajos en los cuales la demanda depende del tiempo. Uno de esos primeros trabajos fue el desarrollado por Wagner y Whitin (1958), los cuales estudiaron una versión dinámica del problema de cantidad de pedido económico, suponiendo variabilidad de la demanda. Posteriormente, Silver y Meal (1973) analizaron un procedimiento de solución aproximada para el caso general de un patrón de demanda determinista variable en el tiempo.

Autores, como Resh et al. (1976) propusieron un algoritmo con la finalidad de encontrar la política óptima de reposición para una demanda proporcional al tiempo con patrón linealmente creciente. Más adelante, Donaldson (1977) resolvió la política de inventario clásica, sin roturas, para una demanda con tendencia lineal y otros autores, como Barbosa y Friedman (1978), profundizaron en el cálculo de soluciones para modelos de inventario de tamaño del lote con demanda dependiente del tiempo.

Más tarde, Ritchie (1984) estudió la solución exacta para un modelo EOQ con demanda lineal creciente, y Mitra et al. (1984) analizaron el modelo EOQ para patrones de demanda con tendencia lineal creciente o decreciente. Por su parte, Deb y Chaudhuri (1987) ampliaron el problema de inventario de tamaño del lote con demanda lineal creciente, pero admitiendo roturas en el sistema y planteando un método heurístico para determinar la política óptima de reposición.

Dave (1989) propuso una política de reposición para un sistema sin roturas con demanda lineal. Además, Goswami y Chaudhuri (1991) desarrollaron un modelo EOQ considerando tendencia lineal de la demanda, roturas y una tasa finita de reposición. Datta y Pal (1992) analizaron un modelo de inventario para demanda lineal, permitiendo roturas y asumiendo que los intervalos de reposición siguen una progresión aritmética. A su vez, Goyal et al. (1992) estudiaron un modelo de reposición de inventario considerando roturas y demanda dependiente del tiempo. Por su parte, Teng et al. (1997) investigaron un método iterativo óptimo para varios modelos de reposición de inventarios con demanda creciente y asumiendo roturas.

Posteriormente, Teng y Yan (2004) trabajaron con modelos deterministas de inventario, considerando roturas y donde la demanda y los costos fluctúan con el tiempo. También, Teng et al. (2005) plantearon modelos deterministas de cantidad económica de producción con demanda y costo variable en el tiempo. Asimismo, Lin y Lin (2006) propusieron un modelo de compra para artículos con demanda variable en el tiempo, considerando inflación y descuento en el tiempo.

Por su parte, Sana (2010) desarrolló un modelo de producción-inventario en un proceso de producción imperfecta con demanda variable en el tiempo y Jeong (2011) propuso un modelo dinámico para la planificación de la producción-inventario en la cadena de suministro.

Desde una perspectiva complementaria, muchos investigadores y profesionales de marketing han reconocido que la demanda de muchos artículos de venta al por menor también puede depender de la cantidad de inventario exhibida o expuesta en los puntos de venta por lo que, recientemente, se han estudiado nuevos modelos de control de inventario que reflejan dicha relación. En estos modelos la tasa de demanda de un producto es, o bien una función del nivel de inventario inicial o es dependiente del nivel de inventario instantáneo (véase, por ejemplo, Baker y Urban (1988a, 1988b), Datta y Pal (1990), Khmelnitsky y Gerchak (2002), Chung (2003), Urban (2005), Dye y Ouyang (2005), Chang et al. (2006), Jolai et al. (2006), Wu et al. (2006), Dye et al. (2008), Chang et al. (2010) y Yang et al. (2011)).

En los modelos mencionados, se supone que la presencia de inventario en los puntos de venta minoristas tiene un efecto motivador en los consumidores, predisponiéndoles a adquirir los productos. Por ello, algunos establecimientos comerciales y almacenes exhiben grandes cantidades de artículos específicos para estimular las ventas. En consecuencia, se podría concluir que la política de inventario del responsable de adoptar decisiones puede influir en la tasa de demanda.

En esos últimos modelos, se supone que la demanda de un determinado artículo no es una variable exógena, como ocurre con los modelos clásicos de inventario, sino que es considerada como endógena a la empresa y como una función propia de la política de inventario. El posible efecto de esa dependencia es que el minorista podría tener un incentivo para ordenar tamaños del lote más grandes o para mantener mayores niveles de inventario, a pesar del incremento de los costos de reposición o de los costos de mantenimiento, ya que la aplicación de dicha política se traduciría en ventas adicionales, mayores tasas de utilización y beneficios potencialmente mayores.

Dentro de los modelos de inventario con demanda dependiente del tiempo, existe un conjunto de los mismos que consideran una forma, secuencia o manera especial de solicitar los productos, por parte de los clientes, conocida como patrón potencial de demanda. En lo que sigue mostraremos diferentes situaciones que reflejan ese comportamiento de la demanda y comentaremos los principales trabajos relacionados con dicho patrón.

2.6.2.- Modelos de inventario deterministas con deterioro

Por lo general, los inventarios pueden sufrir daño, decadencia, obsolescencia y pérdida de valor a lo largo de tiempo, lo cual se traduce en una disminución de su utilidad y funcionamiento.

En efecto, el deterioro y la obsolescencia de los bienes son fenómenos comunes que aparecen con frecuencia en muchos sistemas de gestión de stocks. La obsolescencia se refiere a los inventarios que se descomponen con el paso del tiempo debido a los cambios en la tecnología o a la introducción y distribución en el mercado de un producto nuevo que ofrece mejores prestaciones a un precio más bajo. En ese sentido, hay artículos tales como ordenadores, chips, teléfonos móviles, artículos de moda y de temporada, etc., que pierden valor a través del tiempo, como consecuencia de la aparición de nuevas tecnologías o la introducción de sustitutivos alternativos. Por su parte, el deterioro se refiere a los productos que se han dañado, caducado, se han evaporado, anulado o se han devaluado a través del tiempo, como las verduras, frutas, flores, pescado, carne, medicinas, películas fotográficas, baterías, etc. Además, los productos como el alcohol, gasolina, lubricantes, pegamentos, pinturas, sustancias químicas y otros de características similares, son considerados bienes que pueden descomponerse fácilmente con el tiempo.

Téngase en cuenta que la edad de los inventarios tiene un impacto negativo en la demanda debido a la pérdida de confianza, por parte del consumidor, en la calidad de dichos productos y a la pérdida física que sufren los materiales debido a su deterioro. Por otra parte, es preciso aclarar que la asunción de una tasa de demanda constante no siempre es aplicable a muchos artículos como pueden ser los productos electrónicos, los ordenadores, la ropa de moda, etc. ya que la demanda de esos productos puede disminuir debido a la introducción de otros más atractivos. Esos fenómenos han llevado a los investigadores a estudiar los modelos de inventario que incorporan una tasa de deterioro.

Uno de los primeros estudios sobre la gestión de inventario para artículos deteriorados fue realizado por Within (1957), quien analizó el deterioro que sufren ciertos artículos de moda al final del período de almacenamiento. Posteriormente, Ghare y Schrader (1963) estudiaron un modelo para un sistema de inventario con demanda constante, pero que se deteriora exponencialmente. Más tarde, Misra (1975) desarrolló un modelo de tamaño de lote de producción para un sistema de inventario con productos deteriorados. Seguidamente, Shah y Jaiswal (1977) presentaron un modelo de nivel de inventario para artículos deteriorados con una tasa constante de deterioro, y Aggarwal (1978) desarrolló un modelo de inventario mediante la corrección y la modificación del costo de inventario promedio de mantenimiento propuesto por Shah y Jaiswal.

Más adelante, Dave y Patel (1981) presentaron un modelo de inventario para artículos deteriorados con demanda proporcional en el tiempo, reposición instantánea y sin roturas permitidas. Además, Hollier y Mak (1983) analizaron un modelo de inventario con decrecimiento exponencial de la demanda, en los que las unidades se van deteriorando a un ritmo constante y otros autores, como Roychowdhury y Chaudhuri (1983), estudiaron un modelo de inventario para productos con deterioro, considerando tasas finitas de reposición y permitiendo roturas.

Bahari-Kashani (1989) discutió un programa de reposición de artículos deteriorados con demanda proporcional al tiempo. Por su parte, Raafat (1991) realizó una revisión exhaustiva de la literatura sobre modelos de inventario para artículos deteriorados y Bose et al. (1995) plantearon un modelo de cantidad económica de pedido para bienes deteriorados con tendencia lineal de la demanda, asumiendo que las roturas de inventario, son posteriormente cubiertas con la llegada del siguiente pedido. También, Giri et al. (1996)

realizaron otras aportaciones, analizando un modelo EOQ para productos deteriorados dónde la demanda y los costes de mantenimiento varían con el tiempo. Adicionalmente, Chang y Dye (1999) profundizaron en el análisis de un modelo EOQ para artículos deteriorados con demanda variable en el tiempo.

En la primera década de este siglo se han seguido realizando nuevas e interesantes aportaciones a esta materia. Así, Goyal y Giri (2001) hicieron una revisión detallada de las investigaciones sobre modelos de inventario con deterioro. Wu (2002) estudió un modelo EOQ con demanda variable en el tiempo, asumiendo deterioro y roturas. Asimismo, Mehta y Shah (2003) analizaron un sistema de inventario para productos con posibilidad de deterioro, demanda exponencialmente creciente, permitiendo que la rotura sea atendida posteriormente, con la llegada de la nueva reposición, así como considerando descuento.

Por su parte, Lee y Wu (2004) estudiaron un modelo de inventario con deterioro exponencial, roturas y demanda variable en el tiempo. Samanta y Roy (2004) presentaron un modelo de inventario determinista de productos deteriorados con dos tasas de producción y permitiendo roturas. También, Balkhi y Benkherouf (2004) analizaron un modelo de inventario para artículos deteriorados con tasa de demanda variable en el tiempo y dependiente del stock, considerando un horizonte temporal de planificación finita.

Ghosh y Chaudhuri (2005) estudiaron un modelo EOQ para artículos deteriorados con demanda variable en el tiempo y roturas, bajo el supuesto de que éstas son totalmente recuperables. Es decir, los clientes están totalmente dispuestos a esperar a la llegada de nuevos productos. También, Moon, Giri y Ko (2005) analizaron modelos de cantidad económica de pedido para ítems deteriorados con demanda en función del tiempo y teniendo en cuenta la inflación.

En los últimos años, se han publicado nuevos artículos en revistas científicas sobre modelos de inventario con demanda variable en el tiempo. En ese sentido, Deng et al (2006) realizaron aportaciones respecto a un modelo de inventario con deterioro, demanda exponencial variable en el tiempo, rotura y demanda parcialmente diferida, mediante la cual una parte de los clientes estarían dispuestos a esperar por la siguiente reposición. Como contribuciones complementarias, Jaggi, Aggarwal y Goel (2006) estudiaron la política óptima de pedido para artículos deteriorados, con demanda variable en el tiempo inducida por la inflación. Además, Lin et al. (2006) determinaron el ciclo de producción para un problema de planificación del lote económico con deterioro en los artículos. Asimismo, Deng et al. (2007) desarrollaron modelos de inventario para artículos deteriorados con una tasa de demanda escalonada.

Posteriormente, Chern et al. (2008) estudiaron un modelo de tamaño del lote para bienes deteriorados, donde la función de demanda fluctúa en el tiempo y la tasa de demanda diferida en el tiempo hasta la llegada del siguiente pedido es una función decreciente del tiempo de espera. Balkhi y Tadj (2008) estudiaron un modelo generalizado de cantidad económica de pedido para elementos deteriorados con demanda variable en el tiempo y Hsu et al. (2009) calcularon el tamaño óptimo del lote para artículos deteriorados con demanda en forma de triángulo y tiempo de espera incierto.

Investigaciones como la de Shah (2009) permitieron resolver la política óptima para un sistema de inventario con deterioro, demanda exponencial decreciente en el tiempo y parcialmente pendiente del nuevo suministro de stocks. A su vez, Singh et al. (2009) analizaron un modelo EOQ para productos perecederos, donde la demanda varía con el tiempo, en el cual una parte de los clientes están dispuestos a esperar a la llegada del siguiente pedido.

Autores como Skouri et al. (2009) estudiaron modelos de inventario para artículos deteriorados donde la demanda sigue una función tipo escalonada y el deterioro tiene una distribución de Weibull. Otros documentos interesantes analizan la influencia del deterioro en los stocks y consideran la posibilidad de arreglo o recuperación de los artículos (reworking). En ese sentido, los trabajos de Cárdenas-Barrón (2008, 2009a, 2009b) siguen ese enfoque en los sistemas de producción de una sola etapa y de múltiples etapas.

Recientemente, Li et al. (2010) presentaron una revisión de los trabajos relacionados con artículos que incorporan la posibilidad de deterioro. Además, autores como Liao y Huang (2010) introdujeron un modelo de inventario determinista para ítems deteriorados, considerando crédito comercial financiero y restricciones de capacidad.

En un nuevo estudio, Hung (2011) trabajó en un modelo de inventario con demanda variable en el tiempo, deterioro y roturas que son satisfechas con la llegada de la siguiente reposición y Teng et al. (2011) analizaron un modelo de cantidad económica de pedido para artículos con deterioro, clientes parcialmente dispuestos a esperar a la llegada de la siguiente reposición, así como demanda cuadrática en el tiempo.

Por su parte, autores como Abdul y Murata (2011) estudiaron un modelo de inventario para artículos con deterioro, demanda variable en el tiempo y horizonte de tiempo desconocido. También, Yan et al. (2011) desarrollaron un modelo integrado de producción y distribución para artículos deteriorados y Widyadana et al. (2011) analizaron la cantidad económica de pedido para ítems deteriorados con nivel planeado de roturas. Además, Maihami y Kamalabadi (2012) plantearon un modelo de inventario para ítems deteriorados no instantáneamente, con una parte de los clientes dispuestos a esperar a la llegada del siguiente pedido y considerando el precio dependiente de la demanda.

A continuación, en los siguientes capítulos, procederemos a presentar y desarrollar el análisis de diferentes modelos de inventario que incorporan algunas de las características presentadas en la revisión bibliográfica, con la finalidad de realizar nuevas aportaciones en esta materia. En concreto, para comenzar el estudio, en el próximo capítulo formalizaremos el patrón de demanda potencial y especificaremos la expresión matemática que representa la tasa de demanda para estudiar varios sistemas de inventario deterministas con patrón potencial, determinando su política de inventario óptima.

2.6.3.- Modelos de inventario deterministas con patrón de demanda potencial

En la gestión de los inventarios es posible reconocer diferentes formas mediante las cuales la demanda puede ser extraída del inventario. En general, los modelos de inventario analizados consideran con frecuencia que la demanda se extrae del inventario a una tasa constante de artículos por unidad de tiempo. Sin embargo, hay otras maneras por las cuales las cantidades pueden ser retiradas a lo largo de todo el período de programación.

En ese sentido, Naddor (1966) realizó una interesante aportación, identificando varios componentes de los sistemas de inventario y justificando que las propiedades de la demanda son las más relevantes de los sistemas. También, introdujo el patrón de demanda potencial como una función útil para modelar la demanda de los consumidores, asumiendo que la misma depende del período del ciclo de pedido y varía con el tiempo. De esa manera, este patrón recoge no solo la posibilidad de que la tasa de demanda sea constante durante el ciclo de inventario, sino también permite reflejar situaciones en las cuales las unidades de artículos solicitados por los clientes pueden ser retiradas, principalmente, al comienzo del período, o situaciones donde una mayor parte de la demanda se produce al final del período de gestión. Por lo tanto, dicho patrón de demanda reconoce y modela diferentes formas o maneras de extraer las cantidades del inventario.

A la hora de hacer referencia a la aplicabilidad práctica de la introducción del patrón potencial en los análisis de los modelos de gestión de inventarios, podríamos plantear la siguiente cuestión: ¿es posible identificar en la vida real demandas de productos que reflejan estos supuestos, es decir, podemos identificar artículos cuyo comportamiento se aproxime al reflejado en este tipo de demanda?.

Efectivamente, hay situaciones donde la demanda es mayor al comienzo del período de gestión, como puede ser el caso de los productos cocinados o preparados, tales como panes, pasteles, helados, dulces, comidas preparadas, etc., ya que los consumidores quieren adquirir productos alimenticios que estén recién hechos. Este tipo de demanda también se puede dar con respecto a productos perecederos como el pescado, la carne fresca, las frutas, las verduras, los yogures, etc., porque las ventas se reducen cuando se acerca su fecha de caducidad.

Además, la demanda de nuevos productos con un alto componente tecnológico es mayor al principio que al final del período. Por ejemplo, los bienes tales como computadoras, ordenadores portátiles, teléfonos móviles, consolas y videojuegos, etc. son más demandados cuando aparecen en el mercado por primera vez, debido a la innovación que representan y a las nuevas aplicaciones, utilidades y servicios que ofrecen.

Sin embargo, al contrario, hay productos donde la demanda es mayor al final del ciclo de inventario. Esta situación se da para artículos como la gasolina o el gasoil, cuya demanda se incrementa cuando el producto escasea. También, hay bienes indispensables para el hogar que pueden entrar dentro de esta categoría, tales como el aceite, la harina, el café, el azúcar, el agua, la leche, etc. Así, los aumentos en su demanda se producen cuando la cantidad en inventario exhibida en los puntos de venta comienza a disminuir debido a su uso diario. Otros ejemplos incluyen la demanda de entradas en los teatros, cines, espectáculos musicales, eventos deportivos, etc., la cual suele ser más alta al final del período, esto es, cuando el evento está a punto de tener lugar.

Por último, hay otros productos para los cuales la demanda se mantiene más o menos estable a una tasa uniforme a lo largo del período de programación. Los artículos que pueden reflejar ese comportamiento pueden ser, por ejemplo, los aparatos eléctricos, los materiales de construcción y suministros, los artículos vendidos en ferreterías, los productos de decoración, muebles, artículos para el hogar, productos de limpieza, utensilios de cocina y electrodomésticos, bisutería, complementos, etc. En general, la demanda de estos bienes suele ser constante y no depende de una parte específica del período de programación del inventario.

En la literatura sobre modelos de inventario, existen varios trabajos en los cuales la demanda varía con el tiempo y sigue un patrón potencial. Así, Goel y Aggarwal (1981) formularon un sistema de inventario con patrón de demanda potencial para artículos que tienen un determinado porcentaje de deterioro. Más adelante, Datta y Pal (1988) presentaron un modelo de inventario con patrón de demanda potencial, pero considerando tasa variable de deterioro.

También, Lee y Wu (2002) estudiaron un modelo de inventario para artículos con patrón de demanda potencial, posibilidad de deterioro y permitiendo la existencia de roturas. Seguidamente, Dye (2004) amplió el modelo de Lee y Wu, contemplando un porcentaje de roturas que se satisfacen con retraso, el cual es proporcional al tiempo. Recientemente, Rajeswari y Vanjikkodi (2011) estudiaron un modelo de inventario con patrón de demanda potencial, asumiendo deterioro y permitiendo que la rotura no satisfecha se cubra, parcialmente, en función del tiempo de espera.

En la siguiente sección, comentaremos los principales trabajos de gestión de stocks relacionados con la posibilidad de permitir un cierto porcentaje de deterioro de los artículos almacenados. Los mismos nos han servido de base para abordar el estudio de algunos de los modelos de gestión de inventarios que expondremos a lo largo de la presente memoria.

UNIVERSIDAD DE
LA LAGUNA

CAPÍTULO 3

SISTEMAS DE INVENTARIOS DETERMINISTAS CON PATRÓN DE DEMANDA POTENCIAL

CAPÍTULO 3

SISTEMAS DE INVENTARIOS DETERMINISTAS CON PATRÓN DE DEMANDA POTENCIAL

3.1.- Introducción

En este capítulo presentamos un detallado análisis de los sistemas deterministas de inventario con patrón de demanda potencial, en los cuales el período de programación es variable en el tiempo y no está fijado previamente. Estos sistemas representan una buena aproximación para modelar el comportamiento de la demanda de determinados artículos, cuando dicha demanda no se reparte uniformemente a lo largo del ciclo del inventario sino que puede haber una mayor concentración de la misma al principio o al final del periodo de gestión.

En concreto, analizamos tres escenarios diferentes: en primer lugar, la ausencia de roturas en el sistema; a continuación, el caso en que se permiten roturas y éstas son recuperables, es decir, la demanda es diferida en el tiempo y, en tercer lugar, el supuesto en el que las roturas de stocks se traducen en pérdida de ventas. En el primer sistema considerado, la variable de decisión es el nivel de stock inicial y la función de coste del inventario recoge el costo de mantenimiento y el de reposición. En los otros dos sistemas de inventario planteados, en los cuales se admiten roturas, las variables de decisión son el nivel de stock inicial y el período de programación, considerándose, en la función a minimizar, los costos de rotura, así como el costo de mantenimiento y de reposición. Teniendo en cuenta los supuestos del sistema de inventario, nuestro objetivo consiste en obtener la expresión óptima para determinar el nivel de stock inicial, el período de programación y el coste mínimo de gestión del inventario.

Existen varios trabajos sobre modelos de inventario donde la demanda sigue un patrón potencial. Así, Goel y Aggarwal (1981), Datta y Pal (1988), Lee y Wu (2002), Dye (2004) y Rajeswari y Vanjikkodi (2011) han estudiado modelos de inventario para artículos con patrón de demanda potencial. En dichos trabajos el periodo de gestión está fijado previamente y se busca determinar la cantidad económica de pedido que minimiza el costo total relativo a la gestión del inventario.

En esos trabajos, citados en la revisión bibliográfica del capítulo anterior, relativos a modelos de gestión de stocks en los cuales la demanda varía con el tiempo y sigue un patrón potencial, el período de programación o duración de cada ciclo de inventario siempre se considera que es fijo. Al estar establecido dicho período, el costo total promedio por unidad de tiempo es una función dependiente de una sola variable: el nivel inicial de stock. Sin embargo, en la presente investigación, el ciclo de reposición no está determinado ni preestablecido y el costo total de inventario por unidad de tiempo, cuando se permiten roturas, depende del nivel de stock inicial y el período de programación.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 mostramos la notación general empleada para el desarrollo de los modelos. En la sección 3 planteamos las hipótesis de los sistemas de inventario a estudiar. A continuación, en la sección 4, presentamos el modelo matemático y determinamos las políticas óptimas para un sistema de inventario con patrón de demanda potencial y roturas no permitidas. En la sección 5, analizamos un sistema de inventario con patrón de demanda potencial y clientes dispuestos a esperar a la llegada de la siguiente reposición para satisfacer sus demandas de artículos. Posteriormente, en la sección 6, estudiamos un sistema de inventario en el cual las roturas se traducen en pérdida de ventas. Finalmente, en la sección 7 proporcionamos algunos ejemplos numéricos que ayudan a entender los resultados teóricos expuestos en las secciones anteriores.

3.2.- Notación general empleada

A lo largo del presente capítulo, en el cual presentamos sistemas de inventario deterministas con patrón de demanda potencial, empleamos la siguiente notación:

T: duración del ciclo de inventario, período de programación o de gestión.
S: nivel de stock inicial.
s: punto de pedido. Se refiere a una cantidad específica que indica que el inventario debe ser repuesto.
Q: tamaño del lote o tamaño de la reposición.
h: costo unitario de mantenimiento por unidad de tiempo.
A: costo de pedido o costo de reposición.
w: costo unitario de rotura por unidad de tiempo, cuando las roturas son recuperables.
π: costo unitario de rotura cuando las roturas se traducen en pérdida de ventas.
d: demanda total durante el período de programación.
r: demanda promedio por período de programación ($r = d/T$).
D(t): demanda acumulada hasta el momento t ($0 \leq t \leq T$).
n: índice de patrón de demanda ($0 < n < \infty$).
I(t): cantidad o nivel de inventario en el tiempo t ($0 \leq t \leq T$).
$I_1(S)$: cantidad promedio mantenida en inventario cuando no hay roturas.
$I_2(S)$: rotura promedio en inventario cuando no hay roturas, que es igual a 0.
R(S): número de reposiciones por unidad de tiempo cuando no hay roturas.
$C_1(S)$: costo de mantenimiento por unidad de tiempo cuando no hay roturas.
$C_3(S)$: costo de reposición por unidad de tiempo cuando no hay roturas.
C(S): costo total por unidad de tiempo cuando no hay roturas.
τ_1: período de tiempo donde hay stocks en el inventario.
τ_2: período de tiempo donde no hay stocks y las roturas son permitidas.
$I_1(S,T)$: cantidad promedio mantenida en inventario cuando las roturas son permitidas.
$I_2(S,T)$: rotura promedio en el inventario cuando hay posibilidad de roturas.
R(T): número de reposiciones por unidad de tiempo cuando las roturas son permitidas.
$C_1(S,T)$: costo de mantenimiento por unidad de tiempo cuando el sistema admite roturas.
$C_2(S,T)$: costo de rotura por unidad de tiempo.
$C_3(T)$: costo de reposición por unidad de tiempo cuando las roturas son permitidas.
C(S,T): costo total por unidad de tiempo del sistema de inventario, cuando se aceptan las roturas.

3.3.- Hipótesis de los modelos

Los modelos de inventario que estudiamos a continuación se desarrollan bajo los siguientes supuestos:

1. El período de programación o gestión T representa la duración de cada ciclo de inventario. Se trata de una variable de decisión del sistema.

2. El inventario se repone al inicio de cada período de programación hasta el nivel de stock inicial S. Dicho nivel de stock, obtenido después de la reposición, es otra variable de decisión del sistema.

3. El inventario debe ser repuesto cuando el nivel de stock sea igual o inferior a s unidades (s representa el punto de pedido o de reposición). Cuando hay roturas, y si se admite la posibilidad de que la demanda pendiente sea totalmente atendida con la siguiente reposición, s puede ser una cantidad negativa y, en ese caso, -s representa el número de unidades de demanda a cubrir al final del ciclo de inventario.

4. El tamaño del lote Q representa el tamaño de la reposición. Si las roturas no están permitidas o cuando todas las roturas son pérdida de ventas, entonces Q = S. En el caso en que haya demanda diferida en el tiempo, esto es, cuando la rotura es recuperable y se satisface posteriormente, con la llegada de la siguiente reposición, ya que los clientes están dispuestos a esperar, Q es la suma del nivel inicial de stock (S) más el número total de pedidos pendientes en el ciclo de inventario (Q = S – s).

5. La tasa de reposición es infinita, es decir, la reposición es instantánea.

6. El tiempo de retardo es cero.

7. Se supone que el comportamiento del sistema durante el periodo T se repite sucesivamente a lo largo del tiempo.

8. El costo unitario de mantenimiento h es una constante, cuya dimensión es (dinero) / (cantidad) (tiempo).

9. El costo por pedido, que denotamos por A, es una constante, cuya dimensión es (dinero).

10. Cuando las roturas son completamente atendidas con la siguiente reposición, el costo unitario de rotura w

es constante y su dimensión es (dinero) / (cantidad) (tiempo).

11. Cuando las roturas se traducen en pérdida de ventas, el costo unitario de rotura π es una constante y su dimensión es (dinero) / (cantidad). En este caso, el costo de la rotura depende únicamente de la cantidad de roturas existente al final del período de programación y no de la duración de las mismas.

12. Sea d la demanda total durante el tiempo de programación T, y sea r la demanda promedio por período, es decir, r = d/T. La demanda promedio por periodo es determinista, pero la forma mediante la cual las cantidades de artículos son sacadas del inventario depende del momento en que éstos son retirados. Esa manera por la cual la demanda se distribuye durante el período de gestión será conocida como el patrón de demanda.

Así, la demanda D(t) hasta el momento t ($0 \le t \le T$) varía con el tiempo y se supone que es

$$D(t) = d\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (3.1)$$

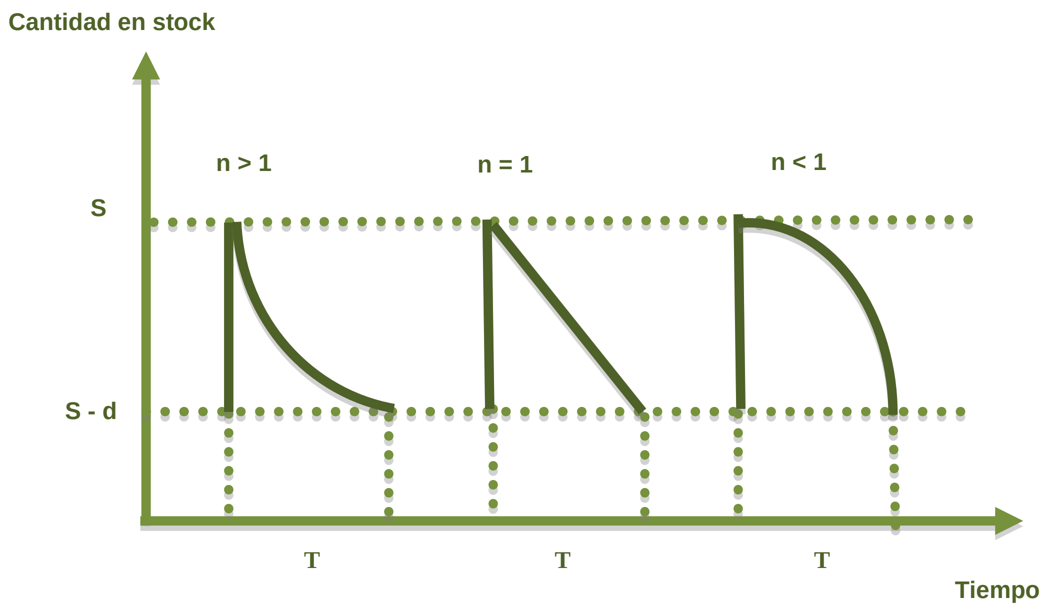
donde n es el índice de patrón de demanda, con $0 < n < \infty$. Por su parte, la tasa de demanda en el tiempo t ($0 \le t \le T$) es

$$\frac{dt^{\frac{1-n}{n}}}{nT^{\frac{1}{n}}} = \frac{r}{n}\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1-n}{n}} \qquad (3.2)$$

Este patrón de la demanda se conoce como "patrón de demanda potencial" (ver Naddor (1966), Datta y Pal (1988), Lee y Wu (2002)).

El gráfico 3.1 ilustra la cantidad de inventario durante el período de programación T para diferentes patrones de demanda potencial. T representa el periodo de programación, d es el tamaño de la demanda durante dicho periodo, S es el nivel inicial de stock y n es el patrón de demanda potencial. En todos los patrones hay S unidades en inventario al comienzo del período. Cuando n > 1, una porción mayor de la demanda se produce hacia el comienzo del período. Cuando n = 1, la demanda sigue un patrón uniforme, de forma que está repartida, de manera constante, a lo largo del período. Finalmente, cuando n < 1, se produce una parte mayor de la demanda al final del período.

Gráfico 3.1: Patrones de demanda potencial



Fuente: Elaboración propia

Teniendo en cuenta los supuestos del sistema de inventario, la cantidad de stock almacenada I(t) en el tiempo t, para $0 \leq t \leq T$, viene dada por su nivel inicial menos la demanda acumulada hasta el instante t, esto es,

$$I(t) = S - d\sqrt[n]{t/T} \qquad (3.3)$$

El nivel de inventario I(t) es una función decreciente, continua y diferenciable en el intervalo [0,T). Al comienzo del período de programación hay I(0) = S unidades en stock y, posteriormente, el nivel de stock se va reduciendo con el tiempo. Al final del período, el inventario es repuesto instantáneamente hasta el nivel S y, por tanto, comienza otra vez un nuevo ciclo de inventario.

En los apartados siguientes estudiaremos las políticas óptimas de inventario, tanto para el sistema en el cual no se admite la existencia de roturas, como para otros sistemas de inventario en los cuales las roturas están permitidas.

3.4.- Sistema de inventario con patrón de demanda potencial, sin roturas permitidas

Comenzamos analizando el sistema de inventario con patrón de demanda potencial cuando no se permiten roturas. En este caso, el nivel inicial de stock S al comienzo del ciclo de inventario T debe cubrir la demanda total d durante ese periodo T. Por lo tanto, S = d y la cantidad media $I_1(S)$ mantenida en inventario es

$$I_1(S) = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T (S - S\sqrt[n]{t/T})dt = \frac{S}{n+1} \qquad (3.4)$$

Por su parte, la rotura promedio en inventario $I_2(S)$ es igual a 0 porque no existen roturas. Además, como el nivel de stock inicial S debe ser igual a la demanda total d, y dicha demanda es igual a rT durante el período de programación, entonces tenemos que T = S/r. Así, el número de reposiciones por unidad de tiempo es R(S) = 1/T = r/S.

El costo de mantenimiento por unidad de tiempo es $C_1(S) = hI_1(S)$, el costo de rotura es cero y el costo de reposición por unidad de tiempo es $C_3(S) = AR(S) = Ar/S$. Así, el costo total C(S) por unidad de tiempo es la suma de estos costos y viene dado por la expresión

$$C(S) = h\frac{S}{n+1} + A\frac{r}{S} \qquad (3.5)$$

Para determinar el nivel óptimo que minimiza la función de coste C(S), calculamos la derivada de dicha función:

$$C'(S) = \frac{h}{n+1} - \frac{Ar}{S^2} \qquad (3.6)$$

Resolviendo la ecuación C´(S) = 0, encontramos la solución óptima S_0. Por tanto, el nivel de stock óptimo es

$$S_0 = \sqrt{\frac{(n+1)Ar}{h}} \qquad (3.7)$$

y el periodo de gestión óptimo es

$$T_0 = \frac{1}{r} S_0 = \sqrt{\frac{(n+1)A}{rh}} \qquad (3.8)$$

Sustituyendo S_0 en C(S) podemos obtener el costo mínimo total por unidad de tiempo, el cual es

$$C_0 = \sqrt{\frac{4hAr}{n+1}} \qquad (3.9)$$

Nótese que el nivel de existencias S_0 es un punto mínimo, ya que la segunda derivada de C(S) es siempre positiva

$$C''(S) = \frac{2Ar}{S^3} > 0 \qquad (3.10)$$

En el caso particular de que n = 1 (patrón de demanda uniforme), la política ya mencionada coincide con la clásica cantidad económica de pedido (EOQ). Además, cuando el índice n del patrón de la demanda es mayor que 1, el costo mínimo de la política óptima es siempre menor que el costo $(2hAr)^{1/2}$ de la política EOQ. Sin embargo, si n < 1, entonces el costo mínimo de la política óptima es mayor que el costo de la política EOQ, ya que la demanda se concentra más al final del periodo y hay mayor coste de mantenimiento.

3.5.- Sistema de inventario con patrón de demanda potencial y roturas recuperables

Cuando se permite la existencia de roturas en el sistema, la variación del nivel de inventario dependerá del valor relativo del nivel inicial de stock S frente a la demanda total d = rT. Hay tres situaciones posibles. Si S ≤ 0, sólo hay roturas; si $0 \leq S \leq rT$, al principio hay stock en el sistema y luego se dan situaciones de rotura; y si $S \geq rT$, no hay roturas y, únicamente hay stock en el inventario.

Tanto la cantidad promedio mantenida en inventario $I_1(S,T)$, como la rotura promedio $I_2(S,T)$ dependen de las variables que representan el nivel de stock inicial y el período de programación.

Téngase en cuenta que cuando $S \leq 0$, no hay stocks y, por tanto, $I_1(S,T) = 0$. Si $S \geq rT$, entonces siempre hay inventario en todo el periodo de programación y la cantidad promedio mantenida en el inventario es

$$I_1(S,T) = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T (S - rT\sqrt[n]{t/T})dt = S - \frac{nrT}{n+1} \qquad (3.11)$$

Cuando $0 \leq S \leq rT$, hay stocks en la primera parte del ciclo del inventario y en la otra se presentan las roturas. Ahora, sea τ_1 el período de tiempo donde hay stocks en inventario, y sea τ_2 el período de tiempo donde no hay stocks y aparecen las roturas. Lógicamente, el período de programación T es igual a la suma de τ_1 y τ_2 . El periodo de tiempo τ_1 durante el cual existe inventario, se puede calcular, ya que en ese instante el nivel de stock debe ser cero, esto es

$$I(\tau_1) = S - d\sqrt[n]{\tau_1 / T} = 0 \qquad (3.12)$$

Por lo tanto

$$\tau_1 = T(S/d)^n = T(S/rT)^n = S^n / r^n T^{n-1} \qquad (3.13)$$

Ahora, podemos hallar la cantidad promedio mantenida en inventario cuando $0 \leq S \leq rT$. Esa cantidad está dada por la expresión

$$I_1(S,T) = \frac{1}{T}\int_0^{\tau_1} I(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^{S^n/r^nT^{n-1}} \left(S - rT\sqrt[n]{t/T}\right)dt = \frac{S}{n+1}\left(\frac{S}{rT}\right)^n \qquad (3.14)$$

Así, en conjunto, la cantidad promedio mantenida en inventario en el sistema viene dada por

$$I_1(S,T) = \begin{cases} 0, & \text{si } S \le 0 \\ \dfrac{S}{n+1}\left(\dfrac{S}{rT}\right)^n, & \text{si } 0 \le S \le rT \\ S - \dfrac{nrT}{n+1}, & \text{si } S \ge rT \end{cases} \qquad (3.15)$$

De manera similar, si S ≥ rT, entonces no hay roturas en el sistema y, por tanto, $I_2(S,T) = 0$. Por su parte, cuando S ≤ 0, sólo hay roturas en todo el ciclo de inventario y la rotura promedio durante el periodo T viene dada por

$$I_2(S,T) = \frac{1}{T}\int_0^{T} [-I(t)]dt = \frac{1}{T}\int_0^{T} \left(-S + rT\sqrt[n]{t/T}\right)dt = \frac{nrT}{n+1} - S \qquad (3.16)$$

Si 0 ≤ S ≤ rT, existe stock durante τ_1 y hay solamente roturas durante τ_2. De esa manera, la cantidad promedio de rotura durante el período de programación es

$$I_2(S,T) = \frac{1}{T}\int_{\tau_1}^{T} [-I(t)]dt = \frac{1}{T}\int_{S^n/r^nT^{n-1}}^{T} \left(-S + rT\sqrt[n]{t/T}\right)dt = \frac{nrT}{n+1} + \frac{S}{n+1}\left(\frac{S}{rT}\right)^n - S \qquad (3.17)$$

En consecuencia, la rotura promedio en el sistema de inventario es

$$I_2(S,T) = \begin{cases} \dfrac{nrT}{n+1} - S, & \text{si } S \le 0 \\ \dfrac{nrT}{n+1} + \dfrac{S}{n+1}\left(\dfrac{S}{rT}\right)^n - S, & \text{si } 0 \le S \le rT \\ 0, & \text{si } S \ge rT \end{cases} \qquad (3.18)$$

Además, tenemos que el número de reposiciones por unidad de tiempo para todas las diferentes situaciones posibles que se pueden dar en el sistema de inventario es siempre R(T) = 1/T.

Ahora debemos calcular los tres tipos fundamentales de costos que intervienen en el sistema de inventario: el costo de mantenimiento, el costo de rotura y el costo de reposición. El costo de mantenimiento por unidad de tiempo es $C_1(S,T) = hI_1(S,T)$, el costo de rotura por unidad de tiempo es $C_2(S,T) = wI_2(S,T)$, y el costo derivado de la reposición de la mercancía por unidad de tiempo es $C_3(T) = AR(T)$.

El costo total por unidad de tiempo del inventario C(S,T) es la suma de estos tres costos. Así, el costo total del sistema de inventario es

$$C(S,T) = \begin{cases} w\left[\dfrac{nrT}{n+1} - S\right] + A\dfrac{1}{T}, & \text{si } S \leq 0 \\ h\dfrac{S}{n+1}\left(\dfrac{S}{rT}\right)^n + w\left[\dfrac{nrT}{n+1} + \dfrac{S}{n+1}\left(\dfrac{S}{rT}\right)^n - S\right] + A\dfrac{1}{T}, & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } \; 0 \leq S \leq rT & \\ h\left[S - \dfrac{nrT}{n+1}\right] + A\dfrac{1}{T}, & \text{si } S \geq rT \end{cases} \tag{3.19}$$

La función C(S,T) es lineal con respecto a S cuando $S \leq 0$ y cuando $S \geq rT$, y es no lineal con respecto a S cuando $0 \leq S \leq rT$. Vamos ahora a demostrar que el mínimo debe caer dentro del intervalo $0 \leq S \leq rT$. El mínimo no puede estar en la región $S < 0$, ya que el costo $C(S = 0,T)$ es siempre menor que el costo C(S,T). Del mismo modo, el mínimo no puede estar en la otra región en la cual $S > rT$ ya que, en este caso, $C(S = rT,T)$ es siempre menor que el costo C(S,T). En consecuencia, para encontrar la solución del sistema de inventario, tenemos que buscar el mínimo de la función C(S,T) dentro del rango $0 \leq S \leq rT$, es decir, tenemos que minimizar

$$C(S,T) = h\frac{S}{n+1}\left(\frac{S}{rT}\right)^n + w\left[\frac{nrT}{n+1} + \frac{S}{n+1}\left(\frac{S}{rT}\right)^n - S\right] + A\frac{1}{T} \tag{3.20}$$

sujeta a $0 \leq S \leq rT$.

3.5.1.- Política óptima de inventario

La solución óptima puede encontrarse calculando las derivadas parciales de la función de coste citada anteriormente. Las derivada parcial de C(S,T) con respecto a S es

$$\frac{\partial C(S,T)}{\partial S} = (h+w)\left(\frac{S}{rT}\right)^n - w \qquad (3.21)$$

y la derivada parcial de C(S,T) con respecto a T es

$$\frac{\partial C(S,T)}{\partial T} = -\frac{hS^{n+1}n}{r^n(n+1)T^{n+1}} + \frac{wnr}{n+1} - \frac{wnS^{n+1}}{r^n(n+1)T^{n+1}} - \frac{A}{T^2} \qquad (3.22)$$

Igualando ambas derivadas parciales a cero, podemos encontrar la solución óptima (S_1,T_1) del sistema de inventario con patrón de demanda potencial y roturas recuperables o totalmente cubiertas con la siguiente reposición.

Las ecuaciones resultantes son:

$$S = rT\sqrt[n]{\frac{w}{h+w}} \qquad (3.23)$$

$$(h+w)nS\left(\frac{S}{T}\right)^n = wnr^{n+1}T - \frac{A(n+1)r^n}{T} \qquad (3.24)$$

Al resolver el sistema determinado por ambas ecuaciones, tenemos que el periodo de gestión es

$$T_1 = \sqrt{\frac{A(n+1)}{wnr(1-\sqrt[n]{w/(h+w)})}} \qquad (3.25)$$

y el nivel de stock inicial es

$$S_1 = rT_1\sqrt[n]{\frac{w}{h+w}} = \sqrt{\frac{A(n+1)r}{wn(1-\sqrt[n]{w/(h+w)})}}\sqrt[n]{\frac{w}{h+w}} \qquad (3.26)$$

La cantidad óptima de reposición Q_1 se obtiene de T_1, donde $Q_1 = rT_1$.

Téngase en cuenta que $0 \le S_1 \le rT_1$ y por lo tanto (S_1,T_1) está siempre dentro de la región caracterizada por $0 \le S \le rT$. Las segundas derivadas parciales de C(S,T) son

$$\frac{\partial^2 C(S,T)}{\partial S^2} = (h+w)n\frac{S^{n-1}}{r^n T^n} \qquad (3.27)$$

$$\frac{\partial^2 C(S,T)}{\partial T^2} = \frac{(h+w)S^{n+1}n}{r^n T^{n+2}} + \frac{2A}{T^3} \qquad (3.28)$$

$$\frac{\partial^2 C(S,T)}{\partial S \partial T} = \frac{\partial^2 C(S,T)}{\partial T \partial S} = -\frac{(h+w)S^n n}{r^n T^{n+1}} \qquad (3.29)$$

Teniendo en cuenta que las primeras dos derivadas son siempre positivas y el Hessiano H también es positivo, es decir,

$$H = \left[\frac{\partial^2 C(S,T)}{\partial S^2}\right]\left[\frac{\partial^2 C(S,T)}{\partial T^2}\right] - \left[\frac{\partial^2 C(S,T)}{\partial S \partial T}\right]^2 = \frac{2A(h+w)S^{n-1}n}{r^n T^{n+3}} > 0 \qquad (3.30)$$

se puede concluir que el punto (S_1,T_1) es un punto mínimo de la función C(S,T).

Por tanto, la política óptima para el sistema de inventario con roturas recuperables y completamente satisfechas con la llegada del siguiente pedido, viene dada por esas fórmulas, es decir, $(S^*,T^*) = (S_1,T_1)$.

3.5.2.- Costo mínimo

El costo mínimo C_1 puede ser calculado mediante la sustitución de los valores de S_1 y T_1 en la función de coste C(S,T). Así, tenemos que

$$C_1 = C(S_1, T_1) = C(rT_1(w/(h+w))^{1/n}, T_1) = \alpha r T_1 + \frac{A}{T_1} \qquad (3.31)$$

con

$$\alpha = \frac{wn}{n+1}\left[1-\left(\frac{w}{h+w}\right)^{1/n}\right] \qquad (3.32)$$

Usando la expresión de T_1 previamente determinada en (3.25), el valor del costo mínimo viene dado por

$$C_1 = \sqrt{\frac{4nwAr(1-\sqrt[n]{w/(h+w)})}{n+1}} \qquad (3.33)$$

En el caso particular de que n = 1 (patrón de demanda uniforme), la solución óptima y el coste mínimo se reducen a la política óptima del sistema de inventario clásico con roturas posteriormente atendidas (véase, por ejemplo, Hadley y Whitin (1963), Naddor (1966), Waters (1992) y Zipkin (2000)), es decir, el periodo de programación es

$$T^* = \sqrt{\frac{2A(h+w)}{hwr}} \qquad (3.34)$$

y el stock inicial es

$$S^* = \sqrt{\frac{2Arw}{h(h+w)}} \qquad (3.35)$$

En este caso, el coste mínimo total por unidad de tiempo viene dado por

$$C^* = \sqrt{\frac{2Arhw}{h+w}} \qquad (3.36)$$

Como consecuencia, el sistema de inventario con patrón de demanda potencial y roturas totalmente recuperables, es decir, atendidas con la llegada de la siguiente reposición, generaliza al modelo clásico con patrón de demanda uniforme (EOQ).

3.6.- Sistema de inventario con patrón de demanda potencial, donde las roturas son ventas perdidas

A continuación, presentamos el estudio de un sistema de inventario en el cual todas las roturas se traducen en pérdida de ventas.

En este modelo, el tamaño de la reposición Q es igual al nivel de stock S. En consecuencia, la variable S no puede ser negativa y, por tanto, debe ser mayor o igual a 0. Las cantidades promedio $I_1(S,T)$, mantenidas en inventario en el sistema cuando $0 \leq S \leq rT$ y $S \geq rT$, son las mismas que en el caso anterior (ver sección 3.5) y, por ello, no es necesario volver a calcularlas.

Sin embargo, en el sistema con pérdida de ventas, el costo de rotura depende únicamente de la cantidad de roturas existente al final del periodo de programación y no de la duración de las mismas. Por lo tanto, debemos determinar el número de estas unidades. Téngase en cuenta que, si $S \geq rT$, entonces no hay roturas en el sistema, mientras que en la situación definida por $0 \leq S \leq rT$, hay $rT - S$ roturas al final del ciclo de inventario. El cociente entre el número de roturas y el período de programación representa la rotura media $I_2(S,T)$. Esa rotura media puede ser expresada como

$$I_2(S,T) = \begin{cases} \dfrac{rT-S}{T}, & \text{si } 0 \leq S \leq rT \\ 0, & \text{si } S \geq rT \end{cases} \qquad (3.37)$$

También, en este sistema de inventario, el número de reposiciones por unidad de tiempo es $R(T) = 1/T$.

Además, cuando el costo de rotura se determina por el costo de la pérdida de ventas, el costo unitario de rotura π representa la suma del beneficio perdido por unidad de rotura y cualesquiera otros costos relacionados con la pérdida de ventas.

Teniendo en cuenta lo comentado, el costo de almacenamiento de inventario por unidad de tiempo sigue siendo $C_1(S,T) = hI_1(S,T)$, mientras que el costo de rotura por unidad de tiempo es, en esta nueva situación, $C_2(S,T) = \pi I_2(S,T)$. Por su parte, el costo de reposición por unidad de tiempo para el sistema analizado es $C_3(T) = AR(T) = A/T$. Por tanto, el costo total por unidad de tiempo $C(S,T)$ del sistema de inventario con patrón de demanda potencial y pérdida de ventas es la suma de los costos citados anteriormente, y dicho costo viene dado por la siguiente función

$$C(S,T)=\begin{cases} h\dfrac{S}{n+1}\left(\dfrac{S}{rT}\right)^n+\pi\dfrac{(rT-S)}{T}+A\dfrac{1}{T}, & \text{si } 0\le S\le rT \\ h\left[S-\dfrac{nrT}{n+1}\right]+A\dfrac{1}{T}, & \text{si } S\ge rT \end{cases} \qquad (3.38)$$

Téngase en cuenta que la política óptima también debe encontrarse dentro de la región caracterizada por 0 ≤ S ≤ rT. El mínimo no puede estar en S ≥ rT, debido a que en esa región el costo C(S = rT,T) es siempre menor que el costo C(S,T).

De esa manera, para encontrar la solución del sistema de inventario con un patrón de demanda potencial y pérdida de ventas, tenemos que minimizar la función C(S,T) en el rango 0 ≤ S ≤ rT. Eso es, minimizar la función de coste

$$C(S,T)=h\frac{S}{n+1}\left(\frac{S}{rT}\right)^n+\pi\left[\frac{rT-S}{T}\right]+A\frac{1}{T} \qquad (3.39)$$

sujeta a la restricción 0 ≤ S ≤ rT.

Para determinar la solución óptima en el sistema con pérdida de ventas, comenzamos calculando las derivadas parciales del costo total por unidad de tiempo. Así, calculando la derivada parcial de C(S,T) con respecto a S, tenemos

$$\frac{\partial C(S,T)}{\partial S}=h\left(\frac{S}{rT}\right)^n-\pi\frac{1}{T} \qquad (3.40)$$

y haciendo la derivada parcial de C(S,T) con respecto a T, tenemos

$$\frac{\partial C(S,T)}{\partial T}=-\frac{hS^{n+1}n}{(n+1)r^nT^{n+1}}+\frac{\pi S-A}{T^2} \qquad (3.41)$$

Igualando ambas derivadas parciales a cero, podemos encontrar un punto (S_2,T_2), que podría ser la solución óptima del sistema de inventario. Las ecuaciones resultantes son:

$$S = rT\sqrt[n]{\frac{\pi}{hT}} \qquad (3.42)$$

$$T^{n-1} = \frac{hnS^{n+1}}{(n+1)(\pi S - A)r^n} \qquad (3.43)$$

De la primera ecuación, tenemos

$$T^{n-1} = \frac{hS^n}{\pi r^n} \qquad (3.44)$$

y sustituyendo T^{n-1} en la segunda ecuación anterior obtenemos la expresión

$$(n+1)(\pi S-A) = nS\pi \qquad (3.45)$$

Solucionando esta ecuación, llegamos a la fórmula

$$S_2 = \frac{(n+1)A}{\pi} \qquad (3.46)$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$T = \frac{S}{r}\sqrt[n-1]{\frac{hS}{\pi r}} \qquad (3.47)$$

y sustituyendo S_2 en la ecuación anterior, determinamos el período de programación, esto es

$$T_2 = \frac{(n+1)A}{\pi r}\sqrt[n-1]{\frac{hA(n+1)}{\pi^2 r}} \qquad (3.48)$$

Las segundas derivadas parciales de C(S,T) son

$$\frac{\partial^2 C(S,T)}{\partial S^2} = hn\frac{S^{n-1}}{r^n T^n} > 0 \qquad (3.49)$$

$$\frac{\partial^2 C(S,T)}{\partial T^2} = \frac{hnS^{n+1}}{r^n T^{n+2}} + \frac{2A - 2\pi S}{T^3} \qquad (3.50)$$

$$\frac{\partial^2 C(S,T)}{\partial S \partial T} = \frac{\partial^2 C(S,T)}{\partial T \partial S} = -\frac{hnS^n}{r^n T^{n+1}} + \frac{\pi}{T^2} \qquad (3.51)$$

Los valores de estas derivadas en el punto (S_2,T_2) son

$$\frac{\partial^2 C(S_2,T_2)}{\partial S^2} = \frac{n\pi^2}{A(n+1)T_2} = \frac{nr\pi^3}{A^2(n+1)^2}\sqrt[n-1]{\frac{\pi^2 r}{hA(n+1)}} > 0 \qquad (3.52)$$

$$\frac{\partial^2 C(S_2,T_2)}{\partial T^2} = \frac{(n-1)nA}{T_2{}^3} = \frac{(n-1)nr^3\pi^3}{(n+1)^3 A^2}\sqrt[n-1]{\frac{\pi^6 r^3}{(n+1)^3 A^3 h^3}} \qquad (3.53)$$

$$\frac{\partial^2 C(S_2,T_2)}{\partial S \partial T} = \frac{\partial^2 C(S_2,T_2)}{\partial T \partial S} = \frac{\pi(1-n)}{T_2{}^2} = \frac{\pi^3 r^2(1-n)}{(n+1)^2 A^2}\sqrt[n-1]{\frac{\pi^4 r^2}{h^2 A^2 (n+1)^2}} \qquad (3.54)$$

y el Hessiano viene dado por

$$H(S_2,T_2) = \left[\frac{\partial^2 C(S_2,T_2)}{\partial S^2}\right]\left[\frac{\partial^2 C(S_2,T_2)}{\partial T^2}\right] - \left[\frac{\partial^2 C(S_2,T_2)}{\partial S \partial T}\right]^2 = \frac{n^2(n-1)\pi^2}{(n+1)T_2{}^4} - \frac{(1-n)^2\pi^2}{T_2{}^4}$$
$$= \frac{(n-1)\pi^2}{(n+1)T_2{}^4} = \frac{\pi^6 r^4 (n-1)}{A^4 (n+1)^5}\sqrt[n-1]{\left(\frac{\pi^2 r}{hA(n+1)}\right)^4} \qquad (3.55)$$

Téngase en cuenta que la segunda derivada parcial de C(S,T) con respecto a S es siempre positiva. Además, el signo del Hessiano H está determinado por el índice del patrón de demanda. De esa manera, H es positivo si $n > 1$, y negativo si $n < 1$.

Así, podemos concluir que el punto (S_2,T_2) es un punto mínimo de la función C(S,T) si $n > 1$ y $0 \leq S_2 \leq rT_2$. Sin embargo, si $n < 1$, el punto (S_2,T_2) es un punto de silla y no es ni mínimo ni máximo. También, tenemos que comprobar si el punto (S_2,T_2) está incluido dentro de la región $0 \leq S \leq rT$. Desafortunadamente, la restricción $0 \leq S_2 \leq rT_2$ no siempre es cierta ya que dependerá del valor de n, y de los valores de $\pi^2 r$ y hA(n+1).

Teniendo en cuenta los comentarios anteriores, necesitamos analizar diferentes casos para determinar la política óptima de inventario de acuerdo con el valor del índice de patrón de demanda potencial.

3.6.1.- Política óptima cuando n > 1

Cuando $n > 1$, entonces $S_2 \leq rT_2$ si, y sólo si, $hA(n+1) \geq \pi^2 r$. Por ello, cuando estas dos condiciones se cumplen, la política óptima para el sistema de inventario con patrón de demanda potencial y pérdida de ventas está dada por $(S^*,T^*) = (S_2,T_2)$. El mínimo coste C_2 se puede calcular mediante la sustitución de los valores óptimos de S_2 y T_2 en la función de coste C(S,T). Así, tenemos que

$$C^* = C_2 = C(S_2,T_2) = h\frac{S_2}{n+1}\left(\frac{S_2}{rT_2}\right)^n + \pi\left[\frac{rT_2 - S_2}{T_2}\right] + A\frac{1}{T_2} \qquad (3.56)$$

Después de realizar algunas operaciones, obtenemos

$$C^* = C_2 = \frac{(1-n)\pi r}{n+1}\sqrt[n-1]{\frac{\pi^2 r}{hA(n+1)}} + \pi r \qquad (3.57)$$

Sin embargo, cuando $n > 1$ y $hA(n+1) < \pi^2 r$, entonces el punto (S_2,T_2) se encuentra en la región caracterizada por $S \geq rT$. En esa región la solución óptima debe estar en la frontera $S = rT$ debido a que $C(S,T) \geq C(S,T=S/r)$ para $S \geq rT$. Por lo tanto, cuando la restricción $S_2 \leq rT_2$ no es cierta y los parámetros de entrada del sistema no satisfacen la restricción adecuada, la solución óptima será el valor del nivel de existencias que minimiza

$$C(S) = C(S, T = S/r) = h\frac{S}{n+1} + A\frac{r}{S} \qquad (3.58)$$

Ese valor es el mismo nivel de stock óptimo obtenido para el sistema sin roturas, que es

$$S_0 = \sqrt{\frac{(n+1)Ar}{h}} \qquad (3.59)$$

En consecuencia, $S^* = S_0$ y $T^* = S_0/r$ será la solución óptima para este sistema y el costo mínimo correspondiente vendrá dado por

$$C^* = C_0 = \sqrt{\frac{4hAr}{n+1}} \qquad (3.60)$$

Además, téngase en cuenta que cuando $hA(n+1) = \pi^2 r$ tenemos

$$S_2 = \frac{(n+1)A}{\pi} = \sqrt{\frac{(n+1)Ar}{h}} = S_0 \qquad (3.61)$$

Así, en este caso, ambas soluciones son las mismas.

3.6.2.- Política óptima cuando 0 < n < 1

Cuando $0 < n < 1$, el punto (S_2,T_2) es un punto de silla y no puede representar la política óptima. Por lo tanto, igualar ambas derivadas parciales a cero, no dará lugar a un punto que sea la solución óptima del sistema. Para buscar posibles puntos que se correspondan con la política óptima de inventario en el interior de la región $0 \le S \le rT$, podemos considerar las direcciones o los rayos que son determinados por $rT = mS$, con $m \ge 1$.

Así, la función de coste queda expresada de la forma siguiente

$$C(S,T) = C(S,m) = h\frac{S}{n+1}\left(\frac{S}{mS}\right)^n + \pi\left[\frac{(mS-S)r}{mS}\right] + A\frac{r}{mS} = \frac{hS}{(n+1)m^n} + \frac{\pi r(m-1)}{m} + \frac{Ar}{mS} \quad (3.62)$$

En primer lugar, consideremos que m sea fijo. La derivada parcial de C(S,m) con respecto a S es

$$\frac{\partial C(S,m)}{\partial S} = \frac{h}{(n+1)m^n} - \frac{Ar}{mS^2} \qquad (3.63)$$

Igualando esa derivada parcial a cero, tenemos que un punto crítico S_3(m) viene dado por

$$S_3(m) = \sqrt{\frac{Ar(n+1)}{hm^{1-n}}} \qquad (3.64)$$

Como la segunda derivada parcial es positiva, es decir,

$$\frac{\partial^2 C(S,m)}{\partial S^2} = \frac{2Ar}{mS^3} > 0 \qquad (3.65)$$

tenemos que S_3(m) es un punto mínimo de la función C(S,m), considerando m fija. El período de programación puede calcularse por

$$T_3(m) = \frac{m}{r}S_3(m) = \sqrt{\frac{A(n+1)m^{n+1}}{rh}} \qquad (3.66)$$

y el costo es

$$C_3 = C(S_3,T_3) = C(m) = 2\sqrt{\frac{Arh}{(n+1)m^{n+1}}} + \frac{\pi r(m-1)}{m} \qquad (3.67)$$

Ese valor C(m) depende de m, y representa el costo mínimo de C(S,T) cuando (S,T) varía en la línea recta o dirección rT = mS.

La primera derivada de C(m) es

$$C'(m) = -\frac{\sqrt{Arh(n+1)}}{m^{(n+3)/2}} + \frac{\pi r}{m^2} \qquad (3.68)$$

Haciendo la derivada igual a cero, tenemos que el punto crítico de la función C(m) se obtiene en el punto

$$m_0 = \left(\frac{\pi^2 r}{Ah(n+1)}\right)^{1/(1-n)} > 0 \qquad (3.69)$$

Ese valor es un punto máximo, ya que en este caso tenemos que $0 < n < 1$ y, además, la segunda derivada de C(m) es negativa, es decir

$$C''(m_0) = \frac{\pi r(n-1)}{2(m_0)^3} = \frac{\pi r(n-1)}{2\left(\frac{\pi^2 r}{Ah(n+1)}\right)^{3/(1-n)}} < 0 \qquad (3.70)$$

Por lo tanto, la función C(m) es creciente en el intervalo $[0,m_0)$ y decreciente en el intervalo (m_0,∞). Luego, tenemos dos posibles situaciones de acuerdo con el valor m_0.

a) Si $m_0 < 1$, es decir, $Ah(n+1) > \pi^2 r$, entonces la función C(m) es decreciente en $[1,\infty)$ y por lo tanto el coste mínimo se obtiene cuando $m = \infty$. En este caso, la política óptima es una solución degenerada con $S^* = 0$, $T^* = \infty$ y costo mínimo $C^* = \pi r$.

b) Si $m_0 \geq 1$, es decir, $Ah(n+1) \leq \pi^2 r$, entonces C(m) es creciente en el intervalo $(1,m_0)$ y decreciente en (m_0,∞). Por lo tanto, el mínimo posible debe estar en uno de los extremos $m = 1$ o $m = \infty$. Téngase en cuenta que los valores de C(m) en los extremos son

$$C(m=1) = 2\sqrt{\frac{Arh}{(n+1)}} \qquad (3.71)$$

y

$$C(m=\infty)=\lim_{m\to\infty} C(m)=\pi r \qquad (3.72)$$

De esa manera, al comparar los valores podemos identificar el punto mínimo de la función C(m), con m variando de 1 a ∞. Así, es posible determinar el valor mínimo de la función C(S,T) en la región determinada por $0 \leq S \leq rT$. De esa manera, tenemos los dos casos siguientes:

(i) Si $0 < n < 1$, $Ah(n+1) \leq \pi^2 r$, y se satisface la siguiente condición

$$\frac{4Ah}{(n+1)} \leq \pi^2 r \qquad (3.73)$$

entonces el costo mínimo de la función C(S,T) en la región $0 \leq S \leq rT$ se obtiene cuando m = 1. Por lo tanto, la política óptima es

$$S_0 = rT_0 = \sqrt{\frac{(n+1)Ar}{h}} \qquad (3.74)$$

y el costo mínimo es

$$C_0 = \sqrt{\frac{4hAr}{n+1}} \qquad (3.75)$$

(ii) Por el contrario, cuando $0 < n < 1$, $Ah(n+1) \leq \pi^2 r$, y

$$\frac{4Ah}{(n+1)} > \pi^2 r \qquad (3.76)$$

entonces, la política óptima se logra cuando m tiende a infinito. La política óptima en este caso lleva a una solución degenerada para el sistema, con $S^* = 0$, $T^* = \infty$ y $C^* = \pi r$. Esto implica que incurrir en el costo de pérdida de ventas todo el tiempo es más barato que el funcionamiento de un sistema de inventario, donde la pérdida de ventas nunca se produzca. En la práctica, no debería existir ningún sistema real de inventario que permita pérdida de ventas permanente, durante todo el ciclo de programación.

3.6.3.- Política óptima cuando n = 1.

Finalmente, en el caso particular de que el índice de patrón de demanda sea n = 1 (patrón de demanda uniforme), tenemos que minimizar la función de coste

$$C(S,T) = h\frac{S^2}{2rT} + \pi\left[\frac{rT-S}{T}\right] + A\frac{1}{T} \qquad (3.77)$$

sujeta a $0 \leq S \leq rT$. En este caso, es imposible encontrar la solución óptima mediante la derivación parcial. De este modo, la política óptima no se puede determinar mediante el uso de las derivadas parciales con respecto a S y T, debido a que el sistema de ecuaciones obtenido calculando las derivadas e igualándolas a 0 no puede ser resuelto. Por ello, planteamos el siguiente enfoque que conducirá a la obtención de la solución.

La búsqueda de la política óptima en el interior de la región $0 \leq S \leq rT$ debe tener en cuenta una nueva variable definida por $y = S/rT$. Téngase en cuenta que la región $0 \leq S \leq rT$ es equivalente a $0 \leq y \leq 1$. Por lo tanto, la función de coste a minimizar es entonces

$$C(y,T) = h\frac{rTy^2}{2} + \pi r(1-y) + A\frac{1}{T} \qquad (3.78)$$

sujeta a la restricción $0 \leq y \leq 1$. Para una y fija, tenemos

$$\frac{\partial C(y,T)}{\partial T} = \frac{hy^2 r}{2} - \frac{A}{T^2} \qquad (3.79)$$

Igualando a cero esta derivada parcial, se obtiene el periodo de gestión

$$T(y) = \frac{1}{y}\sqrt{\frac{2A}{hr}} \qquad (3.80)$$

y sustituyendo T(y) en la función de coste, tenemos

$$C(y,T(y)) = h\frac{rT(y)y^2}{2} + \pi r(1-y) + A\frac{1}{T(y)} = \sqrt{2hy^2Ar} + \pi r(1-y) = y(\sqrt{2rhA} - \pi r) + \pi r \qquad (3.81)$$

con $0 \leq y \leq 1$. Teniendo en cuenta que C(y,T(y)) es una función lineal con respecto a la variable y, ello implica que el costo mínimo se encuentra ya sea en y = 0 o en y = 1, dependiendo de si la pendiente es positiva o no. Así, tenemos que la solución óptima puede ser y* = 0 (y por lo tanto T* = ∞) si se cumple que $(2rhA)^{1/2} - \pi r > 0$, o bien y* = 1 (y por lo tanto $T^* = [2A/rh]^{1/2}$) si $(2rhA)^{1/2} - \pi r \leq 0$.

De ahí que la política óptima para el sistema de inventario con pérdida de ventas dependa de si la restricción $2hA \leq \pi^2 r$ es satisfecha o no. Por lo tanto, si n = 1 y $2hA \leq \pi^2 r$, la solución óptima (S*,T*) se corresponde con la fórmula clásica del sistema de tamaño del lote sin roturas, esto es

$$S^* = \sqrt{\frac{2Ar}{h}} \qquad (3.82)$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2A}{rh}} \qquad (3.83)$$

y el coste mínimo se reduce a

$$C^* = \sqrt{2Ahr} \qquad (3.84)$$

Sin embargo, cuando n = 1 y $2hA > \pi^2 r$, la política óptima (S*,T*) se trata de una solución degenerada, con S* = 0, T* = ∞ y el costo mínimo C* = πr. Esto implica que no se realiza la reposición del inventario, y es más rentable incurrir en pérdidas de ventas todo el tiempo porque el costo unitario de rotura es relativamente pequeño. Este caso no es muy realista y no se ajusta adecuadamente a un sistema de inventario.

Los resultados obtenidos anteriormente para el sistema de pérdida de ventas con patrón de demanda uniforme (n = 1) son coincidentes con los presentados por otros autores (ver Hadley y Within (1963), Naddor (1966), Pentico y Drake (2009) y San José et al (2009)).

La Tabla 3.1 ilustra y resume los resultados anteriores. Las condiciones indicadas en la segunda columna de la Tabla 3.1 son las mismas condiciones que ya se han comentado, pero han sido modificadas con el fin de simplificar la adopción de decisiones en la gestión del inventario. De esa manera, si n = 1, el costo óptimo de utilizar el modelo básico sin roturas puede compararse con el costo de no almacenar stocks y tener todas las ventas perdidas. Cuando n < 1 o n > 1, también es posible comparar un factor del costo básico óptimo con el costo debido a tener pérdida de ventas todo el tiempo.

Tabla 3.1

Política óptima y coste mínimo para el sistema de inventario con patrón de demanda potencial y pérdida de ventas			
Índice	**Condiciones**	**Política Óptima**	**Costo Mínimo**
0 < n < 1	$(Ah(n+1)r)^{1/2} > \pi r$	$S^* = 0$ $T^* = \infty$	$C^* = \pi r$
	$(Ah(n+1)r)^{1/2} \leq \pi r$ y $(4Ahr/(n+1))^{1/2} \leq \pi r$	$S^* = S_0$ $T^* = S_0/r$	$C^* = C_0$
	$(Ah(n+1)r)^{1/2} \leq \pi r$ y $(4Ahr/(n+1))^{1/2} > \pi r$	$S^* = 0$ $T^* = \infty$	$C^* = \pi r$
n = 1	$(2Ahr)^{1/2} \leq \pi r$	$S^* = (2Ar/h)^{1/2}$ $T^* = (2A/rh)^{1/2}$	$C^* = (2Arh)^{1/2}$
	$(2Ahr)^{1/2} > \pi r$	$S^* = 0$ $T^* = \infty$	$C^* = \pi r$
n > 1	$((n+1)Ahr)^{1/2} \leq \pi r$	$S^* = S_0$ $T^* = S_0/r$	$C^* = C_0$
	$((n+1)Ahr)^{1/2} > \pi r$	$S^* = S_2$ $T^* = T_2$	$C^* = C_2$

Fuente: Elaboración propia

En la siguiente sección presentamos varios ejemplos numéricos para ilustrar los resultados que hemos obtenido.

3.7.- Ejemplos numéricos

En este apartado consideramos un sistema de inventario que tiene las mismas hipótesis y características descritas en la sección 3.3, asumiendo los siguientes parámetros:

- La demanda promedio es de r = 1.000 unidades/año. En el quinto y sexto ejemplo vamos a modificar los valores de esta demanda promedio para estudiar los diferentes casos obtenidos en el análisis del sistema de pérdida de ventas.

- La demanda sigue un patrón potencial con un índice de n = 2 para el primero, tercero y quinto ejemplos y n = 1/2 para el resto de ejemplos.

- El costo unitario de mantenimiento es h = 4 euros por unidad y año.

- El costo unitario de reposición o costo de pedido es A = 400 euros por reposición. En el sexto ejemplo vamos a cambiar el valor de este costo con la finalidad de mostrar los resultados para uno de los casos obtenidos en el estudio del sistema con pérdida de ventas.

- El costo unitario de rotura recuperable y atendida posteriormente es w = 5 euros por unidad y año.

- El coste unitario de rotura debido a ventas perdidas es π = 10 euros por unidad.

A continuación, vamos a determinar la solución óptima para cada sistema de inventario, teniendo en cuenta las diferentes situaciones previamente analizadas.

3.7.1.- Sistema sin roturas con índice de patrón de demanda n = 2

Si en el sistema de inventario no se permiten las roturas, de acuerdo con el sub-apartado 3.4.1, la política óptima consiste en considerar el nivel de stock inicial

$$S_0 = \sqrt{\frac{(n+1)Ar}{h}} = \sqrt{\frac{(2+1)400(1000)}{4}} = 547{,}723 \text{ unidades}$$

y el período de gestión

$$T_0 = \frac{S_0}{r} = \frac{547{,}723}{1000} = 0{,}547723 \text{ años} = 199{,}919 \text{ días}$$

El costo mínimo para este sistema es

$$C_0 = \sqrt{\frac{4hAr}{n+1}} = \sqrt{\frac{4(4)400(1000)}{2+1}} = 1.460{,}594 \text{ euros/año}$$

3.7.2.- Sistema sin roturas con índice de patrón de demanda n = 1/2

Cuando el índice del patrón de demanda es n = 1/2 y no se admiten situaciones de rotura de stocks, el nivel óptimo de inventario es

$$S_0 = \sqrt{\frac{(n+1)Ar}{h}} = \sqrt{\frac{(1/2+1)400(1000)}{4}} = 387{,}298 \text{ unidades}$$

y el período de programación es

$$T_0 = \frac{S_0}{r} = \frac{387{,}298}{1000} = 0{,}387298 \text{ años} = 141{,}364 \text{ días}$$

El costo mínimo para este sistema es

$$C_0 = \sqrt{\frac{4hAr}{n+1}} = \sqrt{\frac{4(4)400(1000)}{1/2+1}} = 5.333{,}334 \text{ euros/año}$$

3.7.3.- Sistema con roturas recuperables e índice de patrón de demanda n = 2

A continuación, consideramos que las roturas están permitidas y son satisfechas posteriormente, con la nueva reposición de artículos.

En este caso la política óptima se caracteriza por el periodo de gestión

$$T_1 = \sqrt{\frac{A(n+1)}{wnr(1-\sqrt[n]{w/(h+w)})}} = \sqrt{\frac{400(2+1)}{5(2)1000(1-\sqrt{5/(4+5)})}} = 0{,}686474 \text{ años} = 250{,}563 \text{ días}$$

y el nivel de stock inicial

$$S_1 = \sqrt{\frac{A(n+1)r}{wn(1-\sqrt[n]{w/(h+w)})}}\sqrt[n]{\frac{w}{h+w}} = \sqrt{\frac{400(2+1)1000}{(5)2(1-\sqrt{5/(4+5)})}}\sqrt{\frac{5}{4+5}} = 511{,}667 \text{ unidades}$$

Por lo tanto, las roturas pendientes de atender son $-s_1 = rT_1 - S_1 = 174{,}807$ unidades. Por otra parte, el costo mínimo es

$$C_1 = \sqrt{\frac{4nwAr(1-\sqrt[n]{w/(h+w)})}{n+1}} = \sqrt{\frac{4(2)5(400)1000(1-\sqrt{5/(4+5)})}{2+1}} = 1.165{,}376 \text{ euros/año}$$

3.7.4- Sistema con roturas recuperables e índice de patrón de demanda n = 1/2

Vamos ahora a considerar, al igual que en el ejemplo anterior, que los clientes están dispuestos a esperar para satisfacer sus necesidades y, por tanto, las roturas son completamente atendidas con la llegada del siguiente pedido. Para esta situación analizada, suponemos que el índice de patrón de demanda es menor que la unidad (n = 1/2). En este caso, el periodo de gestión óptimo es

$$T_1 = \sqrt{\frac{A(n+1)}{wnr(1-\sqrt[n]{w/(h+w)})}} = \sqrt{\frac{400(1/2+1)}{(5000/2)(1-\left(5/(4+5)\right)^2)}} = 0{,}589188 \text{ años} = 215{,}054 \text{ días}$$

y el nivel de inventario óptimo viene dado por

$$S_1 = \sqrt{\frac{A(n+1)r}{wn(1-\sqrt[n]{w/(h+w)})}}\sqrt[n]{\frac{w}{h+w}} = \sqrt{\frac{400(\frac{1}{2}+1)1000}{(5)(\frac{1}{2})\left[1-\left(\frac{5}{4+5}\right)^2\right]}}\left(\frac{5}{4+5}\right)^2 = 181{,}848 \text{ unidades}$$

Por tanto, las roturas que deben satisfacer posteriormente son $-s_1 = rT_1 - S_1 = 407{,}340$ unidades. El costo mínimo asociado a (S_1,T_1) es

$$C_1 = \sqrt{\frac{4nwAr(1-\sqrt[n]{w/(h+w)})}{n+1}} = \sqrt{\frac{4(1/2)5(400)1000(1-(5/(4+5))^2)}{\frac{1}{2}+1}} = 1.357{,}800 \text{ euros/año}$$

3.7.5.- Sistema con pérdida de ventas e índice de patrón de demanda n = 2

Analizamos ahora el sistema en el cual todas las roturas se traducen en pérdida de ventas. En este caso, como el valor del índice del patrón de la demanda es $n = 2$, la solución óptima depende de si la restricción $hA(n+1) \le \pi^2 r$ se satisface o no.

Teniendo en cuenta los valores de los parámetros, la condición anterior se cumple, porque

$$hA(n+1) = 4(400)3 = 4.800 \le \pi^2 r = (100)1000 = 100.000$$

Por tanto, la solución óptima es la misma que la política óptima para el sistema sin roturas, es decir,

$$S_0 = \sqrt{\frac{(n+1)Ar}{h}} = 547{,}723 \text{ unidades}$$

$$T_0 = \sqrt{\frac{(n+1)A}{rh}} = 0{,}547723 \text{ años} = 199{,}919 \text{ días}$$

y el costo mínimo es

$$C_0 = \sqrt{\frac{4hAr}{n+1}} = 1.460{,}593 \text{ euros/año}$$

Téngase en cuenta que en el sistema de pérdida de ventas con un índice n > 1, cuando $hA(n+1) \le \pi^2 r$, la política óptima del sistema de inventario consiste en no permitir nunca roturas.

Ahora, considérese la posibilidad de cambiar el valor de la tasa de demanda a r = 40 unidades por año, mientras se mantienen al resto de parámetros constantes. En este caso, la condición $hA(n+1) \le \pi^2 r$ no se satisface porque

$$hA(n+1) = 4(400)3 = 4.800 > \pi^2 r = (100)40 = 4.000$$

Por lo tanto, la solución óptima para el sistema con pérdida de ventas se caracteriza por el periodo de gestión

$$T_2 = \frac{(n+1)A}{r\pi} \sqrt[n-1]{\frac{hA(n+1)}{\pi^2 r}} = \frac{(2+1)400}{(40)10} \frac{(4)400(2+1)}{(10)^2 40} = 3{,}6 \text{ años} = 1.314 \text{ días}$$

y el nivel de stock inicial

$$S_2 = \frac{(n+1)A}{\pi} = \frac{(2+1)400}{10} = 120 \text{ unidades}$$

Donde la diferencia $rT_2 - S_2 = 22$ representa el número de unidades de ventas perdidas al final del período de programación.

Además, el costo mínimo es

$$C_2 = \frac{(1-n)\pi r}{n+1} \sqrt[n-1]{\frac{\pi^2 r}{hA(n+1)}} + \pi r = \frac{(1-2)10(40)}{2+1} \frac{(10)^2 40}{(4)400(2+1)} + 10(40) = 288{,}889 \text{ euros/año}$$

3.7.6.- Sistema con pérdida de ventas e índice de patrón de demanda n = 1/2

Por último, tenemos el sistema en el cual se supone que todas las roturas son pérdida de ventas y n < 1. La solución óptima depende del índice de patrón de demanda (n = 1/2) y de si, además, se cumplen ciertas restricciones a considerar. En primer lugar, tenemos que comprobar si la condición $\pi^2 r \ge Ah(n+1)$ es verdadera o falsa.

Esa condición es verdadera, porque

$$\pi^2 r = (100)1000 = 100.000 > Ah(n+1) = 400(4)3/2 = 2.400$$

A continuación, tenemos que analizar si la restricción dada por $4Ah \leq (n+1)\pi^2 r$ se satisface o no. Con los parámetros actuales, la condición anterior se cumple porque

$$4Ah = 4(400)4 = 6.400 \leq (n+1)\pi^2 r = (3/2)(10)^2 1000 = 150.000$$

Por lo tanto, la política óptima para el sistema con pérdida de ventas es la misma que la solución óptima para el sistema sin roturas, es decir,

$$S_0 = \sqrt{\frac{(n+1)Ar}{h}} = \sqrt{\frac{(3/2)400(1000)}{4}} = 387{,}298 \text{ unidades}$$

$$T_0 = \sqrt{\frac{(n+1)A}{rh}} = 0{,}387298 \text{ años} = 141{,}364 \text{ días}$$

y el costo mínimo es

$$C_0 = \sqrt{\frac{4hAr}{n+1}} = \sqrt{\frac{4(4)400(1000)}{1/2 + 1}} = 5.333{,}334 \text{ euros/año}$$

Ahora, vamos a modificar el valor de la tasa de demanda a r = 40 unidades por año, dejando el resto de parámetros sin cambios. En esta nueva situación, la restricción $\pi^2 r \geq Ah(n+1)$ sigue siendo cierta, porque

$$\pi^2 r = (10)^2 40 = 4.000 > Ah(n+1) = 400(4)3/2 = 2.400$$

Sin embargo, la condición $4Ah \leq (n+1)\pi^2 r$ no se satisface porque

$$4Ah = 4(400)4 = 6.400 > (3/2)(10)^2 40 = 6.000$$

Por lo tanto, la solución óptima del sistema de inventario es un caso degenerado con $S^* = 0$, $T^* = \infty$, y el costo mínimo $C^* = \pi r = 400$ euros/año.

A continuación, consideramos la misma tasa de demanda $r = 40$ unidades por año y vamos a cambiar el costo de pedido que hemos recogido en los ejemplos anteriores. Así, suponemos un nuevo costo de pedido $A = 800$ euros por reposición, dejando los mismos valores para el resto de parámetros. En este caso, tenemos

$$\pi^2 r = (10)^2 40 = 4.000 < Ah(n+1) = 800(4)3/2 = 4.800$$

y la política óptima es de nuevo una solución degenerada con $S^* = 0$, $T^* = \infty$, así como un costo mínimo de inventario $C^* = \pi r = 400$ euros / año.

Por último, teniendo en cuenta los resultados anteriores y como resumen final, hemos visto que la expresión de la solución óptima es única en los sistemas sin roturas permitidas y en los sistemas con roturas recuperables o con pedidos pendientes de satisfacer en la próxima reposición. Sin embargo, la estructura de la solución óptima para el sistema con pérdida de ventas no es única y depende del índice del patrón de demanda y de los valores de los parámetros. Estos resultados se muestran claramente en los ejemplos expuestos anteriormente.

En el siguiente capítulo, estudiaremos sistemas de inventario con patrón de demanda potencial, pero admitiendo que los artículos sufren un proceso de deterioro que afecta a los costos relacionados con la gestión de los inventarios.

UNIVERSIDAD DE
LA LAGUNA

CAPÍTULO 4

SISTEMAS DE INVENTARIO DETERMINISTAS CON PATRÓN DE DEMANDA POTENCIAL Y DETERIORO

CAPÍTULO 4

SISTEMAS DE INVENTARIO DETERMINISTAS CON PATRÓN DE DEMANDA POTENCIAL Y DETERIORO

4.1.- Introducción

En el presente capítulo estudiamos sistemas de inventario para productos con patrón de demanda potencial, considerando que el stock se va agotando a lo largo del ciclo o período de gestión, pero no únicamente como consecuencia de la demanda de los clientes sino también por el proceso de deterioro que sufren los artículos. En concreto, desarrollamos diferentes modelos matemáticos con la finalidad de estudiar la política de reposición óptima para un sistema de cantidad económica de pedido, considerando artículos con deterioro, donde la demanda varía en función del tiempo y sigue un patrón potencial. El sistema opera a través de un horizonte de planificación infinito, la reposición es instantánea y el período de retardo es nulo o insignificante. Nuestro objetivo consiste en minimizar el coste total medio de inventario por unidad de tiempo y, para ello, proponemos procedimientos que permitan determinar la política más eficiente, así como el costo mínimo de gestión de stocks.

Como hemos señalado, en los modelos planteados por algunos autores que contemplan un patrón de demanda potencial, la longitud del ciclo de inventario está fijada. Dicha condición limita la formulación matemática del problema de inventario y restringe la búsqueda de una solución óptima. En el capítulo anterior, estudiamos el problema de inventario con patrón de demanda potencial considerando al ciclo o período de programación como una variable y determinando las mejores políticas y los costos mínimos para los diferentes modelos de gestión de stocks. En ningún caso, se contempló la posibilidad de que hubiera deterioro en los artículos.

Ahora, en este capítulo, analizamos dos escenarios diferentes: en primer lugar, el problema de inventario para artículos con deterioro y ausencia de roturas en el sistema, donde el ciclo de reposición no se considera fijo y el costo total promedio depende de esa variable de decisión. En ese caso, teniendo en cuenta los supuestos del sistema, formulamos el costo total promedio por unidad de tiempo y calculamos la duración del ciclo óptimo, así como el costo mínimo de inventario. En segundo lugar, considerando también una tasa constante de deterioro, suponemos que las roturas están permitidas y son recuperables, es decir, todos los clientes están dispuestos a esperar a la llegada de la siguiente reposición para satisfacer sus necesidades. Aquí, el costo total de inventario incluye el costo de realización del pedido, el costo de almacenamiento, el costo de rotura recuperable, así como el costo de las unidades deterioradas. En ese sentido, planteamos un procedimiento para calcular la cantidad económica de pedido, la duración óptima del ciclo de inventario y el costo mínimo de inventario.

Este capítulo está estructurado de la siguiente manera. En la sección 2 mostramos la notación utilizada para el estudio de los modelos. A continuación, en la sección 3 recogemos las hipótesis que rigen los sistemas de inventario que vamos a analizar. Seguidamente, en la sección 4, desarrollamos el modelo, sin permitir roturas, determinando la política óptima para el sistema de inventario con deterioro y patrón de demanda potencial. Abordamos el caso particular en que la demanda sigue un patrón uniforme y proporcionamos algunos ejemplos numéricos que sirven para ilustrar el modelo propuesto. En la sección 5, investigamos un modelo de cantidad económica de pedido, considerando la existencia de un patrón de demanda potencial, admitiendo deterioro y asumiendo roturas recuperables. Formulamos el modelo matemático que representa y describe el problema de la gestión de inventarios y aportamos un método para resolverlo, determinando la política óptima. Finalmente, presentamos algunos ejemplos numéricos que ayudan a comprender el modelo propuesto y a refrendar los resultados teóricos obtenidos.

4.2.- Notación general empleada

T: duración del ciclo de inventario, período de programación o de gestión.

S: nivel de stock inicial.

s: punto de pedido.

Q: tamaño del lote o tamaño de la reposición.

h: costo unitario de mantenimiento por unidad de tiempo.

A: costo de pedido o costo de reposición.

w: costo unitario de rotura por unidad de tiempo, cuando los clientes están dispuestos a esperar a la llegada de la siguiente reposición.

θ: tasa o fracción constante de deterioro por unidad de tiempo, con $0 < \theta < 1$.

v: costo unitario de deterioro.

d: demanda total durante el período de programación.

r: demanda promedio por período de programación ($r = d/T$).

D(t): demanda acumulada hasta el momento t ($0 \leq t \leq T$).

n: índice de patrón de demanda ($0 < n < \infty$).

τ: Momento en que el nivel de inventario llega a cero.

I(t): cantidad o nivel de inventario en el tiempo t ($0 \leq t \leq T$).

$I_1(T)$: cantidad promedio en inventario cuando no hay roturas.

U(T): cantidad total de unidades deterioradas cuando el sistema no admite existencia de roturas.

$C_1(T)$: costo de mantenimiento por unidad de tiempo cuando no hay roturas..

$C_3(T)$: costo de reposición o pedido por unidad de tiempo.

$C_4(T)$: costo de unidades deterioradas por unidad de tiempo cuando no hay roturas.

C(T): costo total del sistema de inventario por unidad de tiempo cuando no hay roturas.

$I_1(\tau,T)$: cantidad promedio mantenida en inventario cuando el sistema admite existencia de roturas.

$I_2(\tau,T)$: rotura promedio en inventario.

R(T): Número de reposiciones por unidad de tiempo.

$U(\tau,T)$: cantidad total de unidades deterioradas cuando el sistema admite existencia de roturas.

$C_1(\tau,T)$: costo de mantenimiento por unidad de tiempo cuando se permite la existencia de roturas.

$C_2(\tau,T)$: costo de rotura por unidad de tiempo con roturas recuperables.

$C_4(\tau,T)$: costo de unidades deterioradas por unidad de tiempo cuando el sistema admite roturas.

$C(\tau,T)$: costo total del sistema de inventario por unidad de tiempo cuando se admiten roturas en el modelo.

4.3.- Hipótesis de los modelos

Los modelos de inventario propuestos se desarrollan bajo las siguientes hipótesis o supuestos:

1. El horizonte de planificación es infinito.

2. Se considera un solo artículo en el sistema de inventario.

3. Las reposiciones se realizan cada vez que el inventario alcanza el nivel cero. El tamaño de la reposición o el tamaño del lote Q es constante e indeterminado.

4. La reposición es instantánea, esto es, la tasa de reposición es infinita. El inventario es repuesto al comienzo de cada período de programación con un tamaño de Q unidades.

5. El periodo de retardo es cero o insignificante.

6. La tasa de deterioro es constante, es decir, los artículos se deterioran a una fracción constante θ por unidad de tiempo, con $0 < \theta < 1$.

7. El período de programación T, es decir, la duración de cada ciclo de inventario, es constante e indeterminada.

8. Se supone que el comportamiento del sistema durante el periodo T se repite continuamente.

9. El costo unitario de mantenimiento h por unidad de tiempo es una constante.

10. El costo unitario de reposición A o costo de pedido es una constante.

11. El costo de cada unidad deteriorada es v.

12. La demanda sigue un patrón potencial, tal y como hemos considerado en el capítulo anterior. Por tanto, la tasa de demanda sigue la fórmula (3.3).

En el siguiente apartado estudiaremos las políticas óptimas de inventario para el sistema de cantidad económica de pedido con artículos deteriorados y patrón de demanda potencial, en el cual las roturas no están permitidas. Posteriormente, analizaremos el sistema de inventario con patrón de demanda potencial, artículos deteriorados, así como roturas permitidas y recuperables con clientes dispuestos a esperar a la llegada de la siguiente reposición para satisfacer su demanda.

4.4.- Sistema de inventario con patrón de demanda potencial y deterioro, sin admitir roturas

Comenzamos analizando el sistema de inventario con patrón de demanda potencial y deterioro, en el cual no se permite la existencia de roturas.

Sea I(t) el nivel de inventario en cualquier instante t, con $0 \le t \le T$. El agotamiento del inventario que es causado debido a la satisfacción de la demanda de los clientes y al deterioro de los artículos, se producirá de forma simultánea. La ecuación diferencial que describe la evolución del nivel de inventario I(t) en (0,T) viene dada por

$$\frac{dI(t)}{dt} + \theta I(t) = -\frac{dt^{(1-n)/n}}{nT^{1/n}}, \quad 0 \le t \le T \tag{4.1}$$

La solución de la ecuación diferencial anterior es

$$I(t) = Qe^{-\theta t} - \frac{d}{nT^{1/n}} e^{-\theta t} \int_0^t e^{\theta t} t^{(1-n)/n} dt, \quad 0 \le t \le T \tag{4.2}$$

siendo el inventario inicial igual al tamaño de la reposición, esto es, I(0) = Q.

Teniendo en cuenta que en t = T se agota el stock, entonces I(T) = 0 y obtenemos

$$Q = \frac{d}{nT^{1/n}} \int_0^T e^{\theta t} t^{(1-n)/n} dt = \frac{r}{nT^{(1-n)/n}} \int_0^T e^{\theta t} t^{(1-n)/n} dt \tag{4.3}$$

Sustituyendo el valor anterior de Q en (4.2), tenemos

$$I(t) = \frac{r}{nT^{(1-n)/n}} e^{-\theta t} \int_t^T e^{\theta t} t^{(1-n)/n} dt, \quad 0 \le t \le T \tag{4.4}$$

Ahora vamos a calcular los costos que intervienen en la gestión del sistema de inventario.

El costo total por ciclo de inventario será la suma del costo de mantenimiento del inventario, el costo de pedido y el costo de las unidades deterioradas. Así, el costo de mantenimiento del inventario o costo de almacenamiento por unidad de tiempo es

$$C_1(T) = hI_1(T) = \frac{h}{T}\int_0^T I(t)dt = \frac{hr}{nT^{1/n}}\int_0^T e^{-\theta t}\left(\int_t^T e^{\theta z} z^{(1-n)/n} dz\right)dt$$
$$= \frac{hr}{n\theta T^{1/n}}\int_0^T e^{\theta z} z^{(1-n)/n} dz - \frac{hr}{\theta} \tag{4.5}$$

Además, el costo de pedido $C_3(T)$ es A/T.

La cantidad total de unidades deterioradas durante el ciclo del inventario es

$$U(T) = Q - \frac{d}{nT^{1/n}}\int_0^T t^{(1-n)/n} dt = Q - rT \tag{4.6}$$

De esa manera, el costo de las unidades deterioradas por unidad de tiempo es

$$C_4(T) = \frac{v(Q-rT)}{T} = v\left[\frac{r}{nT^{1/n}}\int_0^T e^{\theta t} t^{(1-n)/n} dt - r\right] \tag{4.7}$$

Por tanto, el costo total promedio por unidad de tiempo viene dado por

$$C(T) = \left[\frac{h}{\theta} + v\right]\left[\frac{r}{nT^{1/n}}\int_0^T e^{\theta t} t^{(1-n)/n} dt\right] + \frac{A}{T} - r\left[\frac{h}{\theta} + v\right] \tag{4.8}$$

Nuestro problema consiste en determinar el periodo de gestión T* que minimice el coste total promedio C(T).

4.4.1.- Política óptima de inventario

A la hora de calcular el ciclo de inventario óptimo debemos determinar el mínimo de la función de coste C(T). Para calcular ese mínimo, la condición necesaria es que su derivada sea cero, esto es, C'(T) = 0. Su resultado es

$$\frac{-\beta r}{n^2 T^{(1+n)/n}} \int_0^T e^{\theta t} t^{(1-n)/n} dt + \frac{\beta r}{nT} e^{\theta T} - \frac{A}{T^2} = 0 \qquad (4.9)$$

siendo

$$\beta = \frac{h}{\theta} + v \qquad (4.10)$$

Teniendo en cuenta que la serie de Maclaurin para la función exponencial es

$$e^{\theta T} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta^i T^i}{i!} \qquad (4.11)$$

obtenemos

$$\int_0^T e^{\theta t} t^{(1-n)/n} dt = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta^i T^{i+1/n}}{i!(i+1/n)} \qquad (4.12)$$

Sustituyendo (4.11) y (4.12) en (4.9) y haciendo algunas operaciones, tenemos la condición necesaria

$$\frac{\beta r}{n} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta^i T^{i+1} i}{i!(i+1/n)} = A \qquad (4.13)$$

Así, simplificando la expresión anterior, obtenemos la nueva condición que debe verificar la política óptima de inventario

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta^{i} T^{i+1}}{(i-1)!(i+1/n)} = \frac{An}{\beta r} \tag{4.14}$$

Además, sustituyendo la fórmula (4.12) en (4.8), la función de coste C(T) viene dada por

$$C(T) = \frac{\beta r}{n} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta^{i} T^{i}}{i!(i+1/n)} + \frac{A}{T} \tag{4.15}$$

Ahora, la segunda derivada de C(T) es

$$C''(T) = \frac{\beta r}{n} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\theta^{i} T^{i-2} i(i-1)}{i!(i+1/n)} + \frac{2A}{T^{3}} \tag{4.16}$$

la cual es siempre es positiva. Por tanto, el valor T* tal que cumpla la condición (4.14) es el ciclo de inventario óptimo. Además, a partir de (4.3), el tamaño óptimo del lote Q* viene dado por la expresión

$$Q^* = \frac{r}{nT^{*(1-n)/n}} \int_{0}^{T^*} e^{\theta t} t^{(1-n)/n} dt = \frac{r}{n} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta^{i} (T^*)^{i+1}}{i!(i+1/n)} \tag{4.17}$$

y el coste mínimo C* = C(T*) se calcula mediante la fórmula (4.15). Nótese que de (4.15) y (4.17) se verifica la siguiente relación entre Q* y C*

$$Q^* = rT^* + \frac{T^*}{\beta} C^* - \frac{A}{\beta} \tag{4.18}$$

4.4.2.- Una aproximación algorítmica

Consideremos la siguiente función definida sobre los reales positivos

$$f(T) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta^{i} T^{i+1}}{(i-1)!(i+1/n)} \qquad (4.19)$$

Dicha función es creciente y continua en $(0,\infty)$. Podemos calcular el ciclo de inventario óptimo T* utilizando el método numérico de la bisección, el cual es muy simple y robusto. Este enfoque consiste en recurrir a un procedimiento que posibilita determinar soluciones de una ecuación, bisecando un intervalo de manera repetida, así como seleccionando un sub-intervalo en el que debe encontrarse una raíz para su posterior procesamiento.

El método de bisección requiere dos puntos iniciales T_0 y T_1 tales que

$$f(T_0) \leq \frac{An}{\beta r} \leq f(T_1) \qquad (4.20)$$

La función creciente y continua $f(T)$ debe tener un punto en el intervalo (T_0,T_1) tal que sea raíz de la ecuación $f(T) = An/\beta r$. Comenzamos calculando el punto medio del intervalo $T_2 = 1/2\ (T_0 + T_1)$ y comprobando si $An/\beta r$ es menor, igual o mayor que $f(T_2)$. De esa manera, el método nos permite dividir el intervalo en dos. Seguidamente, procedemos a seleccionar el sub-intervalo en el cual se verifique que $f(T_0) < An/\beta r < f(T_2)$ o bien $f(T_2) < An/\beta r < f(T_1)$, y le aplicamos el mismo paso de bisección, a menos que ese punto medio en sí sea una raíz, lo cual es posible pero muy improbable. De este modo, el intervalo que podría contener el valor óptimo T* se reduce en anchura un 50 por ciento en cada paso del algoritmo, continuando hasta que tengamos un soporte suficientemente pequeño y T* sea fácilmente determinada.

Para lograr nuestros propósitos, elegimos los valores de $T_0 = 0$ y

$$T_1 = \sqrt{\frac{A(n+1)}{\beta r \theta}} \qquad (4.21)$$

porque se puede comprobar fácilmente que

$$f(T_0 = 0) = 0 \leq \frac{An}{\beta r} = \frac{\theta T_1^{\,2}}{1 + {}^1\!/_n} \leq f(T_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta^i T_1^{\,i+1}}{(i-1)!(i + {}^1\!/_n)} \tag{4.22}$$

Teniendo en cuenta que la fracción θ del inventario que se deteriora por unidad de tiempo es un valor que está comprendido entre 0 y 1, entonces la potencia θ^i, con $i \geq 1$, tiende a cero cuando i se incrementa. Por tanto, es posible calcular la serie dada en (4.19) mediante el uso de un polinomio aproximado, es decir, por medio del polinomio

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\theta^i T^{i+1}}{(i-1)!(i + {}^1\!/_n)} \tag{4.23}$$

siendo k un número entero adecuado.

4.4.3.- Caso particular: demanda uniforme

En esta sección, analizamos el caso particular obtenido cuando la demanda sigue un patrón uniforme, es decir, n = 1. En esa situación, la condición necesaria (4.13) se reduce a

$$\beta r \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta^{i} T^{i+1} i}{i!(i+1)} = A \tag{4.24}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{i}{i!(i+1)} = \frac{1}{i!} - \frac{1}{(i+1)!} \tag{4.25}$$

la formula (4.24) es equivalente a

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta^{i} T^{i+1}}{i!} - \frac{1}{\theta} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta^{i+1} T^{i+1}}{(i+1)!} = \frac{A}{\beta r} \tag{4.26}$$

y conduce a la ecuación

$$T e^{\theta T} - \frac{e^{\theta T} - 1}{\theta} = \frac{A}{\beta r} \tag{4.27}$$

Así, cuando la demanda sigue un patrón uniforme, el ciclo de inventario óptimo puede ser determinado procediendo a resolver la ecuación anterior. Lógicamente, la resolución de esta ecuación requiere la aplicación de un método numérico como, por ejemplo, el método de Newton - Rapson. Además, a partir de (4.8) y (4.10), cuando n = 1, el costo total medio por unidad de tiempo se reduce a

$$C(T) = \left[\frac{h}{\theta} + v\right]\left[\frac{r}{T}\int_{0}^{T} e^{\theta t} dt\right] + \frac{A}{T} - r\left[\frac{h}{\theta} + v\right] = \frac{\beta r}{T}\left(\frac{e^{\theta T} - 1}{\theta}\right) + \frac{A}{T} - \beta r \tag{4.28}$$

Ahora, sustituyendo la condición necesaria de la optimalidad (4.27) en (4.28), tenemos la expresión del mínimo coste total medio

$$C(T) = \beta r (e^{\theta T} - 1) \tag{4.29}$$

y ese costo es una función exponencial del ciclo de inventario óptimo.

4.4.4.- Ejemplos numéricos

A continuación presentamos algunos ejemplos numéricos que sirven para ilustrar el modelo de inventario propuesto.

Vamos a considerar un modelo de inventario con las hipótesis asumidas en el tercer epígrafe de este capítulo. Los valores de los parámetros del sistema son:

r = 100 unidades al año.
h = 3 euros por unidad y año.
A = 40 euros por pedido.
v = 20 euros por unidad.

Además, elegimos los siguientes valores para la fracción de deterioro:

θ = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 y 0.9.

y consideramos cinco valores para el índice de patrón de demanda potencial n, es decir:

n = 0.2, 0.5, 1, 2 y 10.

Teniendo en cuenta la ecuación (4.22), la fórmula (4.23) con $k = 20$, y aplicando el método de la bisección, se obtiene la longitud óptima del ciclo T^* para cada par (θ,n). A continuación, mediante la función (4.15) se calcula el costo mínimo $C^* = C(T^*)$ para cada combinación (θ,n).

En la Tabla 4.1 se muestran los resultados obtenidos. Teniendo en cuenta un índice n, estos resultados indican que el costo total óptimo por unidad de tiempo C^* aumenta a medida que la fracción de deterioro θ aumenta. Por su parte, T^* disminuye al aumentar dicha fracción. Además, dada una fracción de deterioro θ, el ciclo de inventario óptimo T^* aumenta a medida que el índice de patrón de demanda n crece; sin embargo, el costo mínimo C^* decrece a medida que aumenta el índice n.

En la Tabla 4.1, el costo mínimo por unidad de tiempo se alcanza cuando n = 10 y θ = 0,1. Ello se debe a dos circunstancias: por una parte, a que el costo de almacenamiento disminuye cuando n crece y, por otra, a que el coste de las unidades deterioradas por unidad de tiempo disminuye cuando la proporción de deterioro θ tiende a cero.

Nótese que si se calcula la derivada de la función de coste dada en (4.15) con respecto a n, ésta es siempre negativa y, por lo tanto, la función de coste es una función decreciente con respecto al índice de patrón de demanda potencial. Además, si se calcula la derivada de C(T) con respecto al parámetro θ, tenemos que dicha derivada es siempre positiva. Por lo tanto, el costo total por unidad de tiempo aumenta a medida que aumenta la proporción de deterioro.

Tabla 4.1

Duración del ciclo óptimo y costo mínimo correspondiente para sistemas de inventario con deterioro y patrón de demanda potencial, variando la fracción de deterioro					
r = 100, A = 40, h = 3, v = 20					
Fracción de Deterioro	Índice de Patrón de Demanda n				
	n = 0,2	n = 0,5	n = 1	n = 2	n = 10
θ = 0.1	T*= 0.30586	T*= 0.34205	T*= 0.39484	T*= 0.48295	T*= 0.91635
	C*= 259.891	C*= 232.421	C*= 201.316	C*= 164.482	C*= 86.303
θ = 0.3	T*= 0.22455	T*= 0.25120	T*= 0.28986	T*= 0.35404	T*= 0.66529
	C*= 351.409	C*= 314.215	C*= 272.216	C*= 222.578	C*= 117.402
θ = 0.5	T*= 0.18496	T*= 0.20696	T*= 0.23875	T*= 0.29136	T*= 0.54427
	C*= 424.578	C*= 379.600	C*= 328.902	C*= 269.061	C*= 142.400
θ = 0.7	T*= 0.16049	T*= 0.17959	T*= 0.20715	T*= 0.25262	T*= 0.46988
	C*= 487.544	C*= 435.860	C*= 377.685	C*= 309.086	C*= 164.002
θ = 0.9	T*= 0.14346	T*= 0.16056	T*= 0.18517	T*= 0.22569	T*= 0.41834
	C*= 543.770	C*= 486.093	C*= 421.247	C*= 344.844	C*= 183.356

Fuente: Elaboración propia

A continuación, en la Tabla 4.2, se analiza la política óptima cuando el índice del patrón de demanda potencial n y el costo de pedido varían adoptando diferentes valores, mientras que el resto de los parámetros se mantienen constantes. El costo mínimo por unidad de tiempo se consigue cuando n = 10 y A = 10. Ello es debido a que el costo de mantener el inventario disminuye cuando n aumenta y el costo de pedido disminuye a medida que A decrece.

Nótese que la función de coste total C(T) es una función decreciente con respecto al índice de patrón de demanda n y la derivada de C(T) con respecto al parámetro A es siempre positiva. Por tanto, el costo total por unidad de tiempo disminuye a medida que disminuye el costo unitario de reposición A.

Tabla 4.2

Duración del ciclo óptimo y costo mínimo correspondiente para sistemas de inventario con deterioro y patrón de demanda potencial, considerando diferentes costos de pedido					
r = 100, θ = 0.5, h = 3, v = 20					
Costo de Pedido	Índice de Patrón de Demanda n				
	n = 0,2	n = 0,5	n = 1	n = 2	n = 10
A = 10	T*= 0.09419	T*= 0.10536	T*= 0.12159	T*= 0.14863	T*= 0.28075
	C*= 210.267	C*= 188.029	C*= 162.879	C*= 133.123	C*= 70.018
A = 20	T*= 0.13218	T*= 0.14787	T*= 0.17063	T*= 0.20842	T*= 0.39177
	C*= 298.560	C*= 266.961	C*= 231.276	C*= 189.099	C*= 99.726
A = 30	T*= 0.16095	T*= 0.18007	T*= 0.20776	T*= 0.25364	T*= 0.47513
	C*= 366.769	C*= 327.932	C*= 284.117	C*= 232.370	C*= 122.786
A = 40	T*= 0.18496	T*= 0.20695	T*= 0.23875	T*= 0.29135	T*= 0.54427
	C*= 424.578	C*= 379.600	C*= 328.902	C*= 269.061	C*= 142.400
A = 50	T*= 0.20594	T*= 0.23040	T*= 0.26582	T*= 0.32427	T*= 0.60437
	C*= 475.736	C*= 425.320	C*= 368.535	C*= 301.544	C*= 159.809

Fuente: Elaboración propia

Por otra parte, puede ser analizada la sensibilidad de la política óptima de inventario con respecto al coste de mantenimiento considerando los resultados mostrados en la Tabla 4.3. El mejor resultado se obtiene cuando el índice de patrón de demanda potencial n = 10 y el costo de almacenamiento es h = 1. Esto es debido a que la derivada de la función de costo C(T), dada en (4.15), con respecto a h es positiva siempre y, por lo tanto, el coste total C(T) es una función creciente con respecto al coste unitario de mantenimiento h. Así, el valor de C(T) aumenta a medida que aumenta h, y disminuye cuando n crece.

Tabla 4.3

Duración del ciclo óptimo y costo mínimo correspondiente para sistemas de inventario con deterioro y patrón de demanda potencial, asumiendo diferentes costos de mantenimiento					
r = 100, A = 40, θ = 0.5, v = 20					
Costo de Mantenimiento	Índice de Patrón de Demanda n				
	n = 0,2	n = 0,5	n = 1	n = 2	n = 10
h = 1	T*= 0.20046	T*= 0.22431	T*= 0.25875	T*= 0.31568	T*= 0.58870
	C*= 391.189	C*= 349.737	C*= 303.039	C*= 247.941	C*= 131.355
h = 2	T*= 0.19224	T*= 0.21510	T*= 0.24814	T*= 0.30277	T*= 0.56515
	C*= 408.232	C*= 364.980	C*= 316.241	C*= 258.721	C*= 136.993
h = 3	T*= 0.18496	T*= 0.20695	T*= 0.23875	T*= 0.29135	T*= 0.54427
	C*= 424.578	C*= 379.600	C*= 328.902	C*= 269.061	C*= 142.400
h = 4	T*= 0.17846	T*= 0.19969	T*= 0.23036	T*= 0.28115	T*= 0.52560
	C*= 440.305	C*= 393.666	C*= 341.084	C*= 279.009	C*= 147.602
h = 5	T*= 0.17261	T*= 0.19313	T*= 0.22281	T*= 0.27196	T*= 0.50877
	C*= 455.479	C*= 407.238	C*= 352.838	C*= 288.608	C*= 152.621

Fuente: Elaboración propia

Ahora, calculamos la política óptima cuando varía el índice de patrón de demanda potencial n y el costo v de cada unidad deteriorada, manteniendo constantes los demás parámetros. Para ello, hemos introducido en la Tabla 4.4 los resultados computacionales obtenidos. Así, se puede comprobar que el costo total C(T) aumenta a medida que v aumenta debido a que la derivada parcial de C(T) con respecto a v es estrictamente positiva. Además, se comprueba que C(T) es una función decreciente con respecto a n y, por lo tanto, el costo mínimo por unidad de tiempo se produce cuando n = 10 y v = 10. Nótese que, en ese caso, el ciclo de inventario T es el más largo de los ciclos mostrados en la Tabla 4.4.

Tabla 4.4

Duración del ciclo óptimo y costo mínimo correspondiente para sistemas de inventario con deterioro y patrón de demanda potencial, considerando diferentes costos de deterioro					
r = 100, A = 40, h = 3, θ = 0.5					
Costo de Deterioro v	Índice de Patrón de Demanda n				
	n = 0,2	n = 0,5	n = 1	n = 2	n = 10
v = 10	T*= 0.23354	T*= 0.26.135	T*= 0.30145	T*= 0.36756	T*= 0.68304
	C*= 334.762	C*= 299.269	C*= 259.330	C*= 212.246	C*= 112.681
v = 20	T*= 0.18496	T*= 0.20696	T*= 0.23875	T*= 0.29136	T*= 0.54427
	C*= 424.578	C*= 379.600	C*= 328.902	C*= 269.061	C*= 142.400
v = 30	T*= 0.15804	T*= 0.17681	T*= 0.20400	T*= 0.24906	T*= 0.46671
	C*= 498.189	C*= 445.437	C*= 385.921	C*= 315.623	C*= 166.745
v = 40	T*= 0.14031	T*= 0.15696	T*= 0.18111	T*= 0.22119	T*= 0.41537
	C*= 562.096	C*= 502.597	C*= 435.423	C*= 356.046	C*= 187.874
v = 50	T*= 0.12749	T*= 0.14262	T*= 0.16458	T*= 0.20105	T*= 0.37813
	C*= 619.354	C*= 553.809	C*= 479.775	C*= 392.261	C*= 206.801

Fuente: Elaboración propia

Por último, en el cuadro 4.5, presentamos la evolución del coste total mínimo y el ciclo óptimo de inventario cuando hacemos variar el índice del patrón de demanda potencial n y la tasa de demanda r, dejando el resto de los parámetros constantes. La derivada del coste total C(T) con respecto a la tasa de demanda también es positiva y, por tanto, el mejor resultado se obtiene cuando n = 10 y r = 20. Se puede comprobar que el coste total aumenta a medida que la tasa de demanda crece. Sin embargo, si el índice del patrón de demanda aumenta, entonces decrece el coste del inventario.

Tabla 4.5

Duración del ciclo óptimo y costo mínimo correspondiente para sistemas de inventario con deterioro y patrón de demanda potencial teniendo en cuenta diferentes tasas de demanda					
θ = 0.5, A = 40, h = 3, v = 20					
Tasa de Demanda r	**Índice de Patrón de Demanda n**				
	n = 0,2	n = 0,5	n = 1	n = 2	n = 10
r = 20	T*= 0.39719	T*= 0.44473	T*= 0.51263	T*= 0.62354	T*= 1.14142
	C*= 194.090	C*= 173.457	C*= 150.365	C*= 123.244	C*= 66.056
r = 50	T*= 0.25787	T*= 0.28861	T*= 0.33284	T*= 0.40569	T*= 0.75202
	C*= 302.519	C*= 270.427	C*= 234.352	C*= 191.846	C*= 102.004
r = 100	T*= 0.18496	T*= 0.20696	T*= 0.23876	T*= 0.29136	T*= 0.54427
	C*= 424.578	C*= 379.600	C*= 328.902	C*= 269.061	C*= 142.400
r = 200	T*= 0.13218	T*= 0.14787	T*= 0.17063	T*= 0.20842	T*= 0.39177
	C*= 597.119	C*= 533.922	C*= 462.553	C*= 378.198	C*= 199.452
r = 500	T*= 0.08442	T*= 0.09442	T*= 0.10898	T*= 0.13324	T*= 0.25199
	C*= 939.368	C*= 840.036	C*= 727.658	C*= 594.667	C*= 312.553

Fuente: Elaboración propia

Hasta aquí hemos analizado un sistema de inventario con patrón de demanda potencial, en el cual los artículos sufren un proceso de deterioro y donde las roturas no están permitidas. A continuación, estudiaremos otro sistema de inventario con demanda potencial y permitiendo el deterioro de los artículos, pero admitiendo la posibilidad de que haya roturas en el sistema y que éstas sean recuperables, es decir, que sean atendidas posteriormente cuando se realice una nueva reposición de mercancía.

4.5.- Sistema de inventario con patrón de demanda potencial, deterioro y roturas recuperables

En esta sección, analizamos un sistema de inventario con patrón de demanda potencial, deterioro y roturas permitidas, donde los clientes están dispuestos a esperar a la siguiente reposición de artículos para satisfacer su demanda.

Las hipótesis que rigen este sistema son las mismas que las expuestas en la sección 4.3, teniendo en cuenta que ahora se admite la existencia de roturas. Bajo estos supuestos o hipótesis, las ecuaciones diferenciales que describen la evolución del sistema de inventario vienen dadas por

$$\frac{dI(t)}{dt} + \theta I(t) = -\frac{rt^{\frac{1}{n}-1}}{nT^{\frac{1}{n}-1}}, \quad 0 \le t \le \tau \tag{4.30}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{rt^{\frac{1}{n}-1}}{nT^{\frac{1}{n}-1}}, \quad \tau \le t \le T \tag{4.31}$$

Las condiciones de contorno o frontera son I(0) = S, I(τ) = 0 e I(T) = s. Así, al comienzo del periodo de programación, el stock neto inicial es S unidades. Ese nivel de stock disminuye debido a la demanda y al deterioro de los artículos hasta el instante t = τ, que es cuando éste alcanza un nivel cero. Durante el intervalo [τ,T], se producen roturas en el sistema de inventario. La cantidad demandada por los clientes, a lo largo de ese período, se satisface al final del mismo con la llegada de la siguiente reposición. En t = T, el inventario es repuesto y se inicia un nuevo ciclo.

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales anteriores (4.30) y (4.31) son

$$I(t) = Se^{-\theta t} - \frac{re^{-\theta t}}{nT^{\frac{1}{n}-1}} \int_0^t e^{\theta z} z^{\frac{1}{n}-1} dz, \quad 0 \le t \le \tau \tag{4.32}$$

$$I(t) = -\frac{r}{T^{\frac{1}{n}-1}} \left(t^{\frac{1}{n}} - \tau^{\frac{1}{n}} \right), \quad \tau \le t \le T \tag{4.33}$$

Después de ajustar en (4.32) la condición de frontera I(τ) = 0, obtenemos que el nivel de stock inicial es

$$S = \frac{r}{nT^{\frac{1}{n}-1}} \int_0^{\tau} e^{\theta z} z^{\frac{1}{n}-1} dz \qquad (4.34)$$

Por tanto, el nivel de inventario I(t) en el intervalo [0,τ] viene dado por

$$I(t) = \frac{re^{-\theta t}}{nT^{\frac{1}{n}-1}} \left[\int_0^{\tau} e^{\theta z} z^{\frac{1}{n}-1} dz - \int_0^{t} e^{\theta z} z^{\frac{1}{n}-1} dz\right] \qquad (4.35)$$

Sustituyendo la condición I(T) = s en (4.33), podemos determinar el punto de reposición ó pedido por medio de la expresión

$$s = -\frac{r}{T^{\frac{1}{n}-1}} [\mathrm{T}^{\frac{1}{n}} - \tau^{\frac{1}{n}}] \qquad (4.36)$$

En el instante t = 0, se añade al stock una cantidad o tamaño del lote Q para reponer el inventario, es decir, el nivel de stock sube hasta s + Q = S unidades. Por tanto, a partir de (4.34) y (4.36), el tamaño del lote es

$$Q = S - s = \frac{r}{nT^{\frac{1}{n}-1}} \int_0^{\tau} e^{\theta z} z^{\frac{1}{n}-1} dz + \frac{r}{T^{\frac{1}{n}-1}} [T^{\frac{1}{n}} - \tau^{\frac{1}{n}}] \qquad (4.37)$$

Nótese que Q depende de τ y T, al igual que de s.

La cantidad promedio en inventario durante el período de gestión depende de las variables τ y T.

Ésta viene dada por

$$I_1(\tau,T)=\frac{1}{T}\int_0^{\tau}I(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^{\tau}\frac{re^{-\theta t}}{nT^{\frac{1}{n}-1}}[\int_t^{\tau}e^{\theta z}z^{\frac{1}{n}-1}dz]\,dt=$$

$$=\frac{\mathrm{r}}{n\theta T^{\frac{1}{n}}}\int_0^{\tau}e^{\theta z}z^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{dz}-\frac{\mathrm{r}\tau^{\frac{1}{\mathrm{n}}}}{\theta T^{\frac{1}{n}}} \qquad (4.38)$$

Del mismo modo, la rotura media a lo largo del ciclo de inventario es

$$I_2(\tau,T)=\frac{-1}{T}\int_{\tau}^{T}I(t)dt=\frac{r}{T^{\frac{1}{n}}}\int_{\tau}^{T}[t^{\frac{1}{n}}-\tau^{\frac{1}{n}}]dt=$$

$$=\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{T}^{\frac{1}{\mathrm{n}}}}[\frac{\mathrm{nT}^{\frac{1}{n}+1}}{\mathrm{n}+1}+\frac{\tau^{\frac{1}{n}+1}}{\mathrm{n}+1}-\tau^{\frac{1}{\mathrm{n}}}\mathrm{T}] \qquad (4.39)$$

Además, el número medio de reposiciones es R(T) = 1/T.

Finalmente, la cantidad total de unidades deterioradas es la diferencia entre la cantidad pedida para reponer el inventario y la demanda total a lo largo del ciclo de inventario, es decir,

$$U(\tau,T)=Q-\int_0^{T}\frac{rt^{\frac{1}{n}-1}}{nT^{\frac{1}{n}-1}}dt=Q-rT \qquad (4.40)$$

A continuación, en los siguientes párrafos, vamos a determinar los costos sujetos a control en el sistema de inventario. El costo total del inventario por unidad de tiempo se compone de los siguientes elementos: costo de mantenimiento, costo de rotura con clientes dispuestos a esperar a la siguiente reposición, costo de pedido y costo de unidades deterioradas.

Por una parte, el costo de almacenamiento por unidad de tiempo es

$$C_1(\tau,T)=\frac{\mathrm{hr}}{\mathrm{n}\theta\mathrm{T}^{\frac{1}{\mathrm{n}}}}\int_0^{\tau}e^{\theta z}z^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{dz}-\frac{\mathrm{hr}\tau^{\frac{1}{\mathrm{n}}}}{\mathrm{T}^{\frac{1}{n}}\theta} \qquad (4.41)$$

Por otra parte, el costo de rotura, con clientes dispuestos a esperar a la llegada de la siguiente reposición para satisfacer sus demandas de artículos, es

$$C_2(\tau,T)=\frac{\mathrm{wr}}{\mathrm{T}^{\frac{1}{n}}}[\frac{\mathrm{nT}^{\frac{1}{\mathrm{n}}+1}}{\mathrm{n}+1}+\frac{\tau^{\frac{1}{\mathrm{n}}+1}}{\mathrm{n}+1}-\tau^{\frac{1}{\mathrm{n}}}\mathrm{T}] \qquad (4.42)$$

Además, el costo de pedido por unidad de tiempo viene dado por

$$C_3(T)=\frac{A}{T} \qquad (4.43)$$

A ello hay que añadir que el costo de unidades deterioradas por unidad de tiempo es

$$C_4(\tau,T)=\frac{v(Q-rT)}{T}=\frac{vr}{nT^{\frac{1}{n}}}\int_0^{\tau} e^{\theta z} z^{\frac{1}{n}-1}dz-\frac{vr\tau^{\frac{1}{n}}}{T^{\frac{1}{n}}} \qquad (4.44)$$

De esa manera, el costo total de inventario por unidad de tiempo es la suma de los costos mencionados anteriormente. Por tanto, ese coste total viene dado por

$$C(\tau,T)=\left[\frac{\mathrm{h}}{\theta}+v\right]\frac{r}{nT^{\frac{1}{n}}}\int_0^{\tau} e^{\theta z} z^{\frac{1}{n}-1}dz-\left[\frac{h}{\theta}+v\right]\frac{r\tau^{\frac{1}{n}}}{T^{\frac{1}{n}}}+$$
$$\frac{A}{\mathrm{T}}+\frac{\mathrm{wr}}{\mathrm{T}^{\frac{1}{\mathrm{n}}}}[\frac{\mathrm{nT}^{\frac{1}{\mathrm{n}}+1}}{\mathrm{n}+1}+\frac{\tau^{\frac{1}{\mathrm{n}}+1}}{\mathrm{n}+1}-\tau^{\frac{1}{\mathrm{n}}}\mathrm{T}] \qquad (4.45)$$

Nótese que si $\tau = T$, entonces el costo total de inventario por unidad de tiempo se reduce a

$$C(T)=\left[\frac{\mathrm{h}}{\theta}+v\right]\frac{r}{nT^{\frac{1}{n}}}\int_0^{T} e^{\theta z} z^{\frac{1}{n}-1}dz-\left[\frac{h}{\theta}+v\right]r+\frac{A}{\mathrm{T}} \qquad (4.46)$$

y esa función de coste es, precisamente, el coste del sistema de inventario con patrón de demanda potencial, deterioro y roturas no permitidas, que se ha analizado previamente en este capítulo.

4.5.1.- Política óptima de inventario

Para minimizar el costo total de inventario por unidad de tiempo (4.45), debemos calcular las derivadas parciales de C(τ,T) con respecto a τ y T. Estas derivadas parciales son

$$\frac{\partial C(\tau,T)}{\partial \tau} = \frac{\beta r \tau^{\frac{1}{n}-1} e^{\theta\tau}}{nT^{\frac{1}{n}}} + \frac{wr\tau^{\frac{1}{n}-1}[\tau - T]}{nT^{\frac{1}{n}}} - \frac{\beta r\tau^{\frac{1}{n}-1}}{nT^{\frac{1}{n}}} \qquad (4.47)$$

$$\frac{\partial C(\tau,T)}{\partial T} = \frac{-\beta r}{n^2 T^{\frac{1}{n}+1}} \int_0^{\tau} e^{\theta z} z^{\frac{1}{n}-1} dz + \frac{\beta r \tau^{\frac{1}{n}}}{nT^{\frac{1}{n}+1}} - \frac{A}{T^2} +$$
$$\frac{wrn}{n+1} - \frac{wr\tau^{\frac{1}{n}+1}}{n(n+1)T^{\frac{1}{n}+1}} + \frac{wr(1-n)\tau^{\frac{1}{n}}}{nT^{\frac{1}{n}}} \qquad (4.48)$$

donde β es una constante dada por (4.10), esto es, β = h/θ + v

Igualando ambas derivadas parciales a cero, obtenemos las ecuaciones

$$T = \tau + \frac{\beta}{w}(e^{\theta\tau} - 1) \qquad (4.49)$$

y

$$-\frac{\beta r}{n^2} \int_0^{\tau} e^{\theta z} z^{\frac{1}{n}-1} dz + \frac{\beta r}{n} \tau^{\frac{1}{n}} - AT^{\frac{1}{n}-1} +$$
$$+ \frac{wrnT^{\frac{1}{n}+1}}{n+1} - \frac{wr\tau^{\frac{1}{n}+1}}{n(n+1)} + \frac{wr(1-n)}{n} \tau^{\frac{1}{n}} T = 0 \qquad (4.50)$$

De (4.49), sustituyendo T en (4.50) obtenemos la ecuación no lineal

$$-\frac{\beta r}{n^2}\int_0^{\tau} e^{\theta z} z^{\frac{1}{n}-1}dz + \frac{\beta r}{n}\tau^{\frac{1}{n}} - \mathrm{A}\left[\tau + \frac{\beta}{\mathrm{w}}(e^{\theta\tau}-1)\right]^{\frac{1}{\mathrm{n}}-1} +$$
$$+\frac{\mathrm{nwr}}{1+\mathrm{n}}\left[\tau + \frac{\beta}{\mathrm{w}}(e^{\theta\tau}-1)\right]^{\frac{1}{\mathrm{n}}+1} - \frac{\mathrm{wr}\tau^{\frac{1}{n}+1}}{n(n+1)} +$$
$$+\frac{wr(1-n)}{n}\tau^{\frac{1}{n}}\left[\tau + \frac{\beta}{w}(e^{\theta\tau}-1)\right] = 0 \qquad (4.51)$$

Por su parte, resolviendo la ecuación anterior mediante el uso de algún método numérico, podemos obtener un valor positivo τ donde el nivel de inventario sea cero. A continuación, sustituyendo ese valor en (4.49), determinamos el período de programación T.

Siempre que estos valores de τ y T satisfagan las condiciones

$$\frac{\partial^2 C(\tau,T)}{\partial \tau^2} > 0, \qquad \frac{\partial^2 C(\tau,T)}{\partial T^2} > 0 \qquad \text{y}$$
$$\left[\frac{\partial^2 \mathrm{C}(\tau,\mathrm{T})}{\partial \tau^2}\right]\left[\frac{\partial^2 C(\tau,T)}{\partial T^2}\right] - \left[\frac{\partial^2 C(\tau,T)}{\partial \tau^2 \partial T^2}\right]^2 > 0 \qquad (4.52)$$

el par (τ,T) sería la política óptima de inventario.

A continuación, una vez identificados los valores de τ y T, de (4.36), (4.37) y (4.45) podemos calcular el punto de pedido, el tamaño del lote y el costo de inventario, respectivamente.

Seguidamente, en la siguiente sección presentamos algunos resultados numéricos que se ajustan a las situaciones que hemos planteado, con la finalidad de ilustrar el modelo propuesto.

4.5.2.- Ejemplos numéricos

Consideremos un sistema de inventario con patrón de demanda potencial, deterioro y roturas. A partir de ahí, asumiremos los siguientes valores de los parámetros con sus correspondientes unidades:

r = 100 unidades por año.
h = 2 euros por unidad y año.
A = 50 euros por pedido.
w = 4 euros por unidad y año.
v = 12 euros por unidad.
n = 1/2.
θ = 0,1.

Para esos valores numéricos, a partir de (4.51), debemos resolver la ecuación no lineal

$$
\begin{aligned}
&-12800\int_0^{\tau} ezzdz + 6400\tau^2 - 50\left[\tau + 8(e^{0.1\tau} - 1)\right] + \\
&+ \frac{400}{3}\left[\tau + 8(e^{0.1\tau} - 1)\right]^3 - \frac{1600\tau^3}{3} + \\
&+ 400\tau^2\left[\tau + 8(e^{0.1\tau} - 1)\right] = 0
\end{aligned}
$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos que el tiempo en que el nivel de inventario se iguala a cero equivale a τ = 0,403071 unidades de tiempo. Por su parte, de (4.49), el período óptimo de programación viene dado por T = 0,732115 años.

De (4.34), el stock inicial es S = 22,796778 unidades. Además, de (4.36), tenemos que el punto de pedido es s = - 51,020146 unidades y, a partir de la formula (4.37), el tamaño del lote o cantidad de reposición es Q = 73,816924 unidades. Por último, teniendo como referencia (4.45), el costo total de inventario es C(τ,T) = 136,187934 euros.

Finalmente, examinamos los efectos del cambio en el parámetro de deterioro sobre el período óptimo de programación, el tamaño del lote económico y el costo mínimo de inventario. Para ello, en la Tabla 4.6, mostramos los resultados obtenidos variando el parámetro de deterioro entre 0,1 y 1. Se puede observar que, el aumento del parámetro de deterioro conduce a una disminución del período de programación y de la cantidad de pedido. Sin embargo, como aumenta el valor de θ, el costo total de inventario por unidad de tiempo se incrementa. Ello es debido a que el coste de pedido y el costo de las unidades deterioradas aumentan en mayor medida que la disminución de los otros costes.

Tabla 4.6

Variación de la política óptima cuando se modifica el porcentaje de deterioro				
Valor (θ)	Politica Óptima de Inventario			
	Tiempo τ	Periodo T	Tamaño del Lote Q	Coste C(τ,T)
0.1	0.403071	0.732115	73.816924	136.1879340
0.2	0.323588	0.691305	69.800138	144.8208819
0.3	0.271978	0.668713	67.491835	149.0041140
0.4	0.235303	0.654748	66.024619	152.2194408
0.5	0.207707	0.645459	65.027201	154.4560623
0.6	0.186103	0.638952	64.316119	156.0759377
0.7	0.168684	0.634206	63.789925	157.2872965
0.8	0.154317	0.630633	63.388961	158.2171088
0.9	0.142251	0.627877	63.076439	158.9464773
1.0	0.131965	0.625704	62.827815	159.5292192

Fuente: Elaboración propia

Hasta ahora, en los capítulos 3 y 4 de la presente memoria, hemos estudiado las políticas óptimas de sistemas de inventario con patrón de demanda potencial teniendo en cuenta que la reposición es instantánea, tanto sin considerar el deterioro como permitiendo que los artículos se deterioren a lo largo del tiempo. En el siguiente capítulo, analizamos sistemas de inventario con patrón de demanda potencial, en los cuales la reposición no es instantánea, sino que existe un periodo de reposición durante el cual se añaden artículos al inventario.

UNIVERSIDAD DE
LA LAGUNA

CAPÍTULO 5

POLÍTICAS ÓPTIMAS DE INVENTARIO PARA SISTEMAS CON PATRÓN DE DEMANDA POTENCIAL Y REPOSICIÓN NO INSTÁNTANEA.

CAPÍTULO 5

POLÍTICAS ÓPTIMAS DE INVENTARIO PARA SISTEMAS CON PATRÓN DE DEMANDA POTENCIAL Y REPOSICIÓN NO INSTÁNTANEA

5.1.- Introducción

Desde la perspectiva de no restringir el periodo de gestión, en el capítulo 3, estudiamos el problema de inventario con patrón de demanda potencial, considerando el ciclo de inventario como una variable y determinando las políticas óptimas y los costes mínimos para diferentes modelos. Por su parte, en el capítulo 4 incorporamos el deterioro de los artículos con la finalidad de determinar la política óptima, planteando distintos escenarios. Además, en ambos capítulos consideramos que la reposición se realiza de manera instantánea, es decir, el inventario se repone al comienzo de cada período de gestión. Sin embargo, en el presente capítulo, analizamos el problema de inventario con patrón de demanda potencial, dónde el ciclo de inventario no es fijo y considerando que la reposición no es instantánea. Ello supone introducir una tasa de reposición o producción, a lo largo de un período de aprovisionamiento, que permita renovar o restituir el inventario.

En la primera parte del presente capítulo desarrollamos un análisis de los sistemas de inventario de tamaño del lote, en los cuáles la tasa de reposición es uniforme y la demanda sigue un patrón potencial. Además, no se permiten roturas, por lo que los costos considerados en el control del sistema son el costo de almacenamiento y el costo de reposición. Nuestro objetivo persigue encontrar la cantidad de producción económica que minimiza el costo total de inventario por unidad de tiempo. Dado que la cantidad promedio en inventario, durante el período de programación, depende del valor del índice del patrón de demanda, la política óptima será diferente según sea el valor de dicho índice.

En la segunda parte del capítulo 5, estudiamos la gestión de sistemas de inventario con patrón de demanda potencial variable en el tiempo, considerando que hay un período de reposición durante el cual la tasa de producción que va siendo añadida al inventario es mayor y, a la vez, proporcional a la tasa de demanda. Suponemos, en este caso, que se permiten roturas y que éstas son recuperables, es decir, que los clientes están dispuestos a esperar a la llegada de la siguiente reposición para satisfacer su demanda. Los costos considerados en el sistema de inventario son el costo de mantenimiento, el costo de rotura y el costo de pedido. Nuestro objetivo consiste en minimizar el coste total medio asociado a la gestión de stocks, desarrollando una aproximación eficaz para obtener el tamaño óptimo del lote y el punto eficiente de pedido, así como determinando el costo mínimo por unidad de tiempo.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 introducimos la notación utilizada en el desarrollo de los modelos. En la sección 3 presentamos las hipótesis o supuestos que guían los modelos de gestión de inventarios que son objeto de estudio. En la sección 4 analizamos el modelo matemático y determinamos las políticas óptimas para un sistema de inventario con patrón de demanda potencial y tasa de reposición uniforme, sin roturas permitidas. Abordamos, además, algún caso particular y proporcionamos diferentes ejemplos ilustrativos. En la sección 5 estudiamos un sistema de revisión continua del inventario sobre un horizonte infinito, con demanda determinista variable en el tiempo y donde la razón de producción, orientada a realizar las reposiciones, es proporcional al ratio de la demanda. Además, en este modelo se permite la existencia de roturas recuperables, con clientes dispuestos a esperar a la llegada del siguiente pedido. Finalmente, aportamos ejemplos numéricos que sirven para refrendar los resultados teóricos obtenidos en el modelo estudiado.

5.2.- Notación general empleada

La notación empleada en el análisis de los sistemas con patrón de demanda potencial y reposición no instantánea, es la siguiente:

T: duración del ciclo de inventario, período de programación o de gestión.
s: punto de pedido.
Q: tamaño del lote o tamaño de la reposición.
t': período de reposición. Este es el período de tiempo que se necesita para añadir el tamaño del lote al inventario, donde ($0 \leq t' \leq T$).
h: costo unitario de mantenimiento por unidad de tiempo.
w: costo unitario de rotura por unidad de tiempo, cuando las roturas son recuperables
A: costo de pedido o costo de reposición.
d: demanda total durante el período de programación.
r: demanda promedio por período de programación ($r = d/T$).
D(t): demanda acumulada hasta el momento t ($0 \leq t \leq T$).
n: índice de patrón de demanda ($0 < n < \infty$).
I(t): cantidad o nivel de inventario en el tiempo t ($0 \leq t \leq T$).
p: tasa de reposición constante o cantidad fija de producción por unidad de tiempo ($p > r$).
$I_1(Q)$: cantidad promedio mantenida en inventario cuando no hay existencia de roturas.
R(Q): número de reposiciones por unidad de tiempo.
$C_1(Q)$: costo de mantenimiento por unidad de tiempo cuando no hay roturas.
$C_3(Q)$: costo de reposición por unidad de tiempo.
C(Q): coste total del sistema de inventario por unidad de tiempo cuando no hay roturas en el sistema.
P(t): tasa de producción en el tiempo t ($0 \leq t \leq t'$) que es proporcional a la tasa de demanda, es decir, $P(t) = \lambda\, D(t)$ con $\lambda > 1$.
$I_1(s,Q)$: cantidad promedio en inventario cuando se admiten roturas en el modelo.
$I_2(s,Q)$: Rotura promedio en el inventario.
$C_1(s,Q)$: costo de mantenimiento por unidad de tiempo cuando el sistema admite existencia de roturas.
$C_2(s,Q)$: costo de rotura por unidad de tiempo.
C(s,Q): costo total por unidad de tiempo del sistema de inventario cuando se admiten roturas en el modelo.

5.3.- Hipótesis de los modelos

Los modelos de inventario estudiados en este trabajo se desarrollan bajo los siguientes supuestos:

1. El artículo considerado es un único producto con demanda independiente.

2. El inventario se revisa continuamente.

3. El período T de programación es la longitud de cada ciclo de inventario.

4. El horizonte de planificación es infinito. Se supone que el comportamiento del sistema durante el período T se repite continuamente.

5. En el sistema, el inventario debe ser repuesto cuando su nivel es igual o inferior a s unidades (s representa el punto de pedido). Ese nivel indica que debe comenzar la reposición del inventario.

6. El plazo de ejecución o tiempo de entrega es cero o insignificante.

7. El tamaño del lote Q representa el tamaño total de la reposición. Es la variable de decisión del sistema.

8. La reposición no es instantánea, existiendo un periodo de tiempo t` durante el cual se irá reponiendo el inventario hasta completar el tamaño total de la reposición.

9. La unidad del costo de mantenimiento o almacenamiento h es una constante, cuya dimensión es dinero por cantidad y tiempo.

10. El costo de pedido A es una constante, cuya dimensión son unidades monetarias. Dicho costo es fijo, independientemente del tamaño del lote.

11. La demanda sigue un patrón potencial, siguiendo los supuestos planteados en los capítulos anteriores. Así, la tasa de demanda en el tiempo t sigue un patrón potencial y se expresa como $D(t) = rt^{(1-n)/n}/nT^{(1-n)/n}$, con $0 \leq t \leq T$. Por tanto, la demanda hasta el instante t ($0 \leq t \leq T$) se asume como $d(t/T)^{1/n}$, donde d es el tamaño de la demanda durante el periodo de programación T y n es el índice del patrón de demanda, con $0 < n < \infty$.

En este capítulo formulamos modelos matemáticos de gestión de inventarios para estudiar las políticas óptimas de reposición. En el siguiente apartado estudiamos el sistema de inventario con tasa de reposición uniforme p y patrón de demanda potencial, donde las roturas no están permitidas. En concreto, analizamos la evolución del nivel de inventario y las políticas de gestión óptimas que se obtienen según sea el índice del patrón de demanda considerado. Nuestro objetivo consiste en determinar el tamaño óptimo de la reposición o la cantidad de producción económica (EPQ), que optimiza la gestión del sistema de inventario descrito bajo las hipótesis anteriores, siendo las variables de decisión el tamaño del lote Q y el punto de pedido s.

Posteriormente, analizamos las políticas óptimas de inventario para un modelo de tamaño del lote y punto de pedido con patrón de demanda potencial, roturas recuperables y tasa de producción dependiente de la tasa de demanda**.** En dicho estudio, consideramos que la tasa de producción o reposición de stocks es mayor que la tasa de demanda en cualquier momento durante el período de reposición, y que esa tasa de producción P(t) en cualquier instante t depende de la tasa de demanda, viniendo dada esa relación por $P(t) = \lambda D(t)$, con $\lambda > 1$. Además, se permiten roturas y los clientes están dispuestos a esperar a la llegada de la siguiente reposición para satisfacer su demanda.

5.4.- Sistema de inventario con reposición uniforme y patrón de demanda potencial, sin permitir roturas

En esta sección vamos a analizar el problema de determinar la cantidad de producción económica bajo patrón de demanda potencial, tasa de reposición constante y sin admitir la existencia de roturas. Para ello, comenzamos considerando un período de programación de longitud T, donde dicha variable T no está predeterminada y depende del tamaño del lote Q, así como de la demanda de los clientes.

El período de reposición t' es la longitud de tiempo durante la cual se realiza la reposición de stocks. La tasa media de reposición p es la relación entre el tamaño del lote y el período de reposición, es decir, p = Q/t'. El inventario debe ser repuesto cuando la cantidad en stock es igual o inferior a s unidades. Dado que no están permitidas las roturas en este sistema de inventario, se entiende que el punto de pedido debe verificar $s \geq 0$.

La demanda que se produce durante el período de programación es d y la demanda promedio por periodo es r = d/T. Al comienzo del período se inicia la reposición con una tasa uniforme de p unidades por unidad de tiempo y ésta tiene una duración de t' unidades de tiempo. En ese periodo de tiempo se añade al inventario una reposición de tamaño Q. Téngase en cuenta que la cantidad solicitada por los clientes debe ser cubierta con la cantidad ordenada y, por lo tanto, el tamaño de la reposición debe ser igual a la demanda efectuada durante el período de programación, es decir, Q = d en cada ciclo de inventario.

A lo largo del período de reposición se producen dos situaciones claramente diferenciadas. Durante una parte de dicho período, las cantidades en inventario han de ser determinadas, teniendo en cuenta que la demanda y la reposición ocurren de manera simultánea, mientras que en el resto del período de gestión la cantidad en inventario sólo dependerá de la demanda de los correspondientes clientes. Teniendo en cuenta el patrón de demanda potencial n, la cantidad en inventario I(t) en el tiempo t, para $0 \leq t \leq T$, viene dada por

$$I(t) = \begin{cases} s + pt - d\sqrt[n]{t/T} = s + pt - Q\sqrt[n]{t/T}, & si\ \ 0 \leq t \leq t' \\ s + pt' - d\sqrt[n]{t/T} = s + Q - Q\sqrt[n]{t/T}, & si\ \ t' \leq t \leq T \end{cases} \qquad (5.1)$$

En los siguientes párrafos vamos a estudiar cómo es la representación gráfica de la función I(t) en el período de gestión. Esta función I(t) es una función continua en todo el ciclo de inventario y también es diferenciable en los intervalos [0,t') y (t',T].

Sea t_0 el punto en el intervalo (0,T), donde la pendiente de la función de nivel de inventario es igual a cero. La evolución gráfica de I(t) dependerá de la posición relativa de los puntos t_0 y t' (período de reposición). De esa manera, cuando n > 1 las fluctuaciones de inventario son descritas en el siguiente resultado.

Lema 5.1. Si el índice de patrón de demanda es mayor que uno, entonces la función I(t) es una función decreciente en el intervalo $[0,t_0)$, es creciente en $[t_0,t')$ y es decreciente en [t',T). Además, la función I(t) es una función convexa en (0,t') y en (t',T).

Demostración. De (5.1), la función I(t) es diferenciable en el intervalo (0,t') y (t',T). La derivada de la función I'(t) está dada por

$$I'(t)=\begin{cases} p-\dfrac{Q}{n\sqrt[n]{T}}\,t^{\frac{1-n}{n}}, & si \quad 0<t<t' \\ \dfrac{-Q}{n\sqrt[n]{T}}\,t^{\frac{1-n}{n}}, & si \quad t'<t<T \end{cases} \qquad (5.2)$$

Bajo la hipótesis de que el índice de patrón de demanda n sea mayor que uno, una porción mayor de la demanda se produce al principio del período. Así, al comienzo del ciclo de inventario la función I(t) es decreciente debido a que la reposición es menor que la demanda. Por lo tanto, tenemos que I'(t) < 0 en el intervalo $(0,t_0)$, siendo t_0 el punto en el que I'(t) = 0. Teniendo en cuenta que Q = d = rT, y resolviendo la ecuación $I'(t_0) = 0$, en el intervalo (0,t'), obtenemos

$$t_0=\left(\frac{np}{Q}\right)^{\frac{n}{1-n}}T^{\frac{1}{1-n}}=\left(\frac{np}{r}\right)^{\frac{n}{1-n}}T=\left(\frac{r}{np}\right)^{\frac{n}{n-1}}\frac{Q}{r} \qquad (5.3)$$

En el período (0,t') ese valor t_0 representa el instante de tiempo a partir del cual la cantidad demandada sería menor que la reposición del inventario.

Ahora, téngase en cuenta que $t_0 < t'$, si y sólo si,

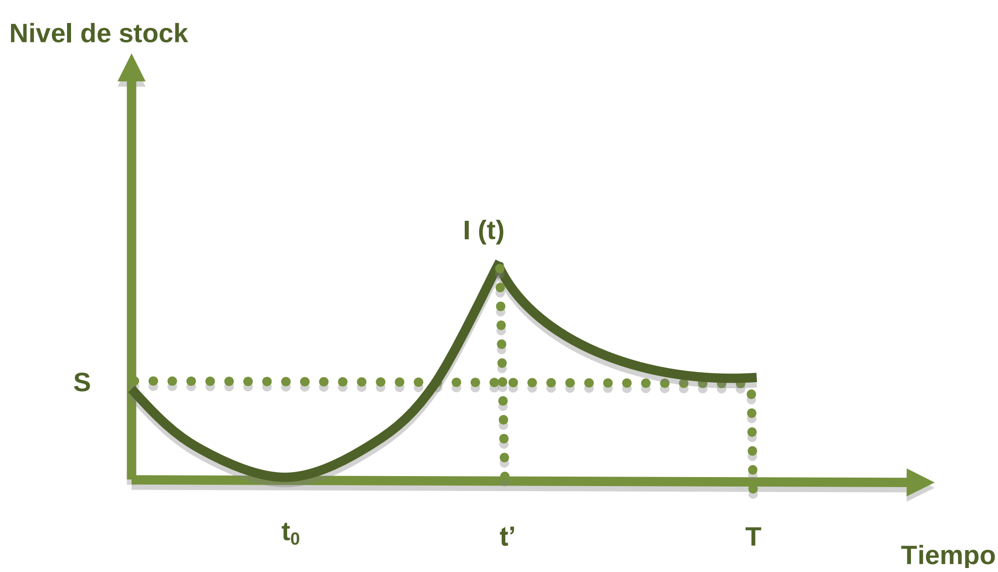
$$\left(\frac{n^n p}{r}\right)^{\frac{1}{1-n}} < 1 \qquad (5.4)$$

y la desigualdad anterior siempre es cierta cuando n > 1. Por lo tanto, la función I(t) es decreciente en $(0,t_0)$ y es creciente en (t_0,t'). Por otra parte I'(t) < 0 en el intervalo (t',T). Así, I(t) es siempre una función decreciente en (t',T). Además, la segunda derivada de I(t) es

$$I''(t) = -\frac{Q}{n\sqrt[n]{T}}\frac{(1-n)}{n}t^{\frac{1-2n}{n}} \qquad (5.5)$$

Como n > 1 la función de I''(t) es siempre positiva. Por lo tanto, si n > 1 la función I(t) es una función convexa en (0,t') y en (t',T), pero no es convexa en el intervalo total (0,T).

Gráfico 5.1: Nivel de stock I(t) cuando el índice de patrón de demanda n > 1



F

Fuente: Elaboración propia

A continuación, vamos a analizar el comportamiento del nivel de stock I(t) cuando $n < 1$.

Lema 5.2. I(t) es una función cóncava en los intervalos (0,t') y (t',T) cuando el índice de patrón de demanda es menor que uno ($n < 1$). Además,

a) Si $n^n p \geq r$, entonces I(t) es una función creciente en (0,t') y es decreciente en (t',T).

b) Si $n^n p < r$, entonces I(t) es una función creciente en $(0,t_0)$ y es decreciente en (t_0,t') y (t',T).

Demostración. De (5.5) la segunda derivada de I(t) es negativa cuando $n < 1$. Por lo tanto, I(t) es una función cóncava en el intervalo (0,t') y (t',T). Además, de (5.2), $I'(t) < 0$ si $t_0 > t'$, y por lo tanto, I(t) es siempre una función decreciente en (t',T).

Ahora, estudiamos cómo es la función I(t) en el intervalo (0,t '). En primer lugar, comprobamos si $t_0 < t'$. La desigualdad anterior es equivalente a la condición dada en (5.4) y como por la hipótesis anterior hemos asumido que $n < 1$, entonces (5.4) se reduce a la condición $n^n p < r$. De lo contrario, cuando $n < 1$ y $n^n p \geq r$, entonces debe ser $t_0 \geq t'$.

De (5.3), tenemos $t_0 \geq t'$, si y sólo si,

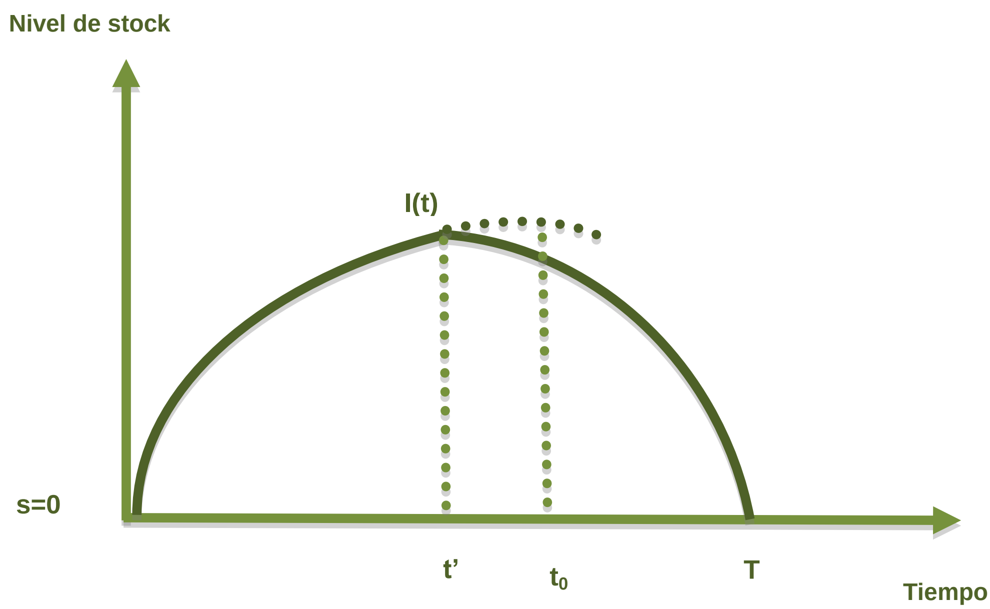
$$np\sqrt[n]{T} \geq Q\, t^{\frac{1-n}{n}} \qquad (5.6)$$

Por lo tanto, cuando $n < 1$ y $n^n p \geq r$, tenemos $t_0 \geq t'$ y, a partir de (5.2) y (5.6), $I'(t) > 0$ en el intervalo $(0,t_0)$ e I(t) es una función creciente en el intervalo (0,t').

Téngase en cuenta que si $n < 1$ y $n^n p < r$, entonces $t_0 < t'$. Por lo tanto, de (5.2), tenemos que $I'(t) > 0$ si $t < t_0$, e $I'(t) < 0$ si $t_0 < t < t'$. Por lo tanto, I(t) es una función creciente en $(0,t_0)$ y es decreciente en (t_0,t').

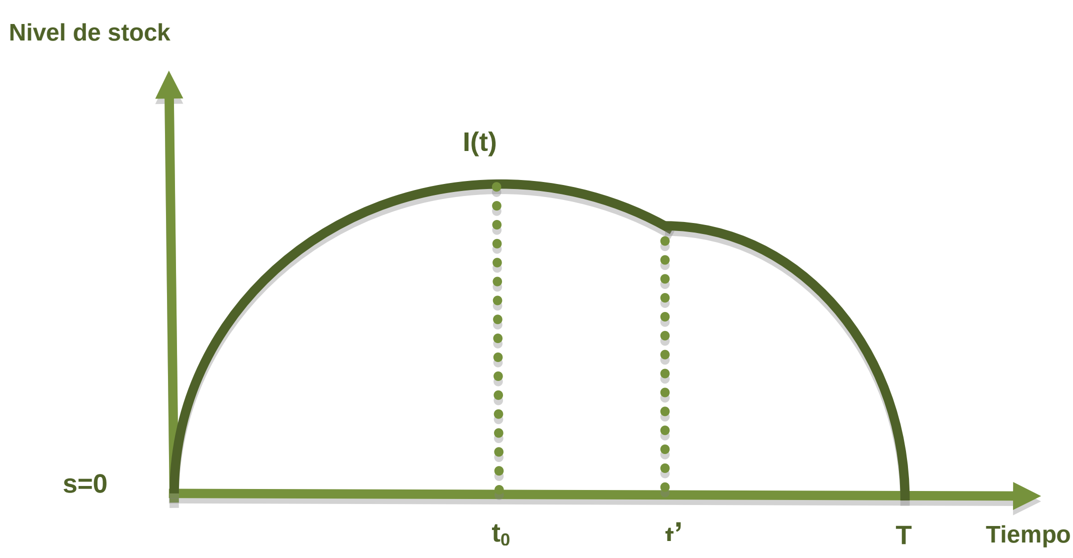
Las figuras 5.2 y 5.3 ilustran los gráficos del nivel de stock I(t) cuando $n < 1$. En concreto, la figura 5.2 muestra las fluctuaciones en el inventario cuando $n^n p \geq r$ (en este caso $t_0 \geq t'$) y la figura 5.3 representa el nivel de stock cuando $n^n p < r$ (es decir, $t_0 < t'$).

Gráfico 5.2: Nivel de stock I(t) cuando n < 1 y $n^n p \geq r$ ($t_0 \geq t'$)



Fuente: Elaboración propia

Gráfico 5.3: Nivel de stock I(t) cuando n < 1 y $n^n p < r$ ($t_0 < t'$)



Fuente: Elaboración propia

Por lo tanto, asumiendo una reposición uniforme, las figuras 5.1, 5.2 y 5.3 ilustran la cantidad en el inventario I(t) durante el período de programación T para diferentes índices de patrón de demanda potencial. En todos los casos hay s unidades en el inventario al inicio del ciclo de inventario y la demanda total durante el período de programación es d unidades. Además, la tasa de demanda sigue un patrón potencial y el tamaño de reposición Q es la cantidad programada para la reposición. Esta cantidad se añade al inventario a una tasa de p unidades por unidad de tiempo a lo largo del período de reposición t'. En el período (t',T), no hay reposición y se reduce el nivel de stock. Al final del período de programación, el inventario se repone cuando el stock está al nivel s y así se inicia otra vez un nuevo ciclo de inventario.

5.4.1.- Política óptima de inventario

A continuación, vamos a estudiar qué condiciones debe satisfacer la política óptima de inventario para un modelo con reposición uniforme y patrón de demanda potencial, en el que no se permiten situaciones de rotura de stocks, lo cual dependerá del índice de dicho patrón de demanda.

Lema 5.3. Si el índice de patrón de demanda es menor o igual a uno ($n \leq 1$), entonces el punto de pedido óptimo debe ser cero.

Demostración. Nos proponemos demostrar que, para establecer una política óptima, el punto de pedido s debe ser cero. Si suponemos que no lo es, entonces s debe ser una cantidad positiva, ya que en este sistema de inventario las roturas no están permitidas.

Supongamos que la cantidad promedio mantenida en el inventario para ese punto de pedido s es $I_{1,s>0}$. Ahora, supongamos que disminuye el punto de pedido a $s = 0$. Obviamente, en cualquier instante t, el nivel de inventario será menor que la cantidad en stock cuando se considere $s > 0$. Así, el promedio de la cantidad mantenida en el inventario también será menor $I_{1,s=0} < I_{1,s>0}$, y el coste de mantenimiento se reducirá. Sin embargo, el costo de reposición seguirá siendo el mismo, dado que es independiente del punto de pedido, es decir, la disminución del punto de pedido no generará costes adicionales de reposición. Por tanto, el costo total será menor si se realiza la orden para reponer el inventario en el punto de pedido $s = 0$. De esa manera, para determinar una política óptima no podemos considerar que el punto de pedido sea positivo.

Lema 5.4. Si el índice de patrón de la demanda es mayor que uno ($n > 1$), entonces el punto óptimo de pedido viene dado por la siguiente fórmula

$$s = \frac{(n-1)Q}{n}\left(\frac{r}{np}\right)^{\frac{1}{n-1}} \qquad (5.7)$$

Demostración. Cuando $n > 1$, el nivel de stock mínimo (ver Figura 5.1) se alcanza en el punto t_0 dado en (5.3). En ese punto, el nivel de inventario debe ser cero, es decir, $I(t_0) = 0$. Suponiendo que ello no fuera cierto, entonces $I(t_0)$ debe ser una cantidad positiva. Si se tratase de una cantidad negativa, entonces existirían roturas y éstas no están permitidas en este sistema de inventario. Ahora, si $I(t_0) > 0$, entonces el nivel de inventario $I(t)$ en cualquier instante t será mayor que la cantidad $I(t)$ en stock en el tiempo t cuando

$I(t_0) = 0$. Así, la cantidad promedio de inventario también se incrementará y por tanto, aumentará el coste de mantenimiento, mientras que el costo de reposición será igual en ambas situaciones. Consecuentemente, el coste total será mayor si asumimos que $I(t_0) > 0$ y, por tanto, la mejor política de inventario requiere que $I(t_0) = 0$.

De esa manera, sustituyendo (5.3) en (5.1) y asumiendo la condición $I(t_0) = 0$, obtenemos

$$s = Q\sqrt[n]{\left(\frac{np}{r}\right)^{\frac{n}{1-n}}} - \frac{Q}{n}\left(\frac{np}{r}\right)^{\frac{1}{1-n}} \qquad (5.8)$$

que es idéntica a la dada en el punto de pedido (5.7). Por lo tanto, la política óptima para un sistema con índice de patrón de demanda mayor que uno debe consistir en reponer el inventario cuando el nivel de stock alcanza el punto de pedido anteriormente reseñado.

5.4.1.1.- Sistema de inventario con índice de patrón de demanda $n \leq 1$

En los gráficos mostrados en las Figuras 5.2 y 5.3 se describe la cantidad en inventario $I(t)$ en el tiempo t si $n < 1$. La función $I(t)$ es una función creciente al comienzo del ciclo de inventario y, a continuación, la función disminuye en el resto del período de programación. El siguiente resultado nos da la política óptima de inventario, cuando $n \leq 1$.

Teorema 5.1. Considérese un sistema de inventario con reposición uniforme y patrón de demanda potencial. Si el índice de patrón de demanda es menor o igual que uno ($n \leq 1$) entonces la cantidad de producción económica es

$$Q_0 = \sqrt{\frac{Ar}{h\left(\frac{1}{n+1} - \frac{r}{2p}\right)}} \qquad (5.9)$$

y el costo mínimo por unidad de tiempo viene dado por

$$C_0 = \sqrt{2hAr\left(\frac{2}{n+1} - \frac{r}{p}\right)} \qquad (5.10)$$

Demostración. La cantidad promedio en inventario es

$$I_1(Q) = \frac{1}{T}\int_0^{t'} I(t)dt + \frac{1}{T}\int_{t'}^{T} I(t)dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{t'} (s + pt - Q\sqrt[n]{t/T})dt + \frac{1}{T}\int_{t'}^{T} (s + Q - Q\sqrt[n]{t/T})dt =$$

$$= s - \frac{Qr}{2p} + \frac{Q}{n+1} \qquad (5.11)$$

Del Lema 5.3, el punto de pedido óptimo debe ser s = 0 y por tanto,

$$I_1(Q) = -\frac{Qr}{2p} + \frac{Q}{n+1} \qquad (5.12)$$

Como el tamaño del lote Q debe ser igual a la demanda total d = rT durante el período de gestión, entonces tenemos que T = Q/r. De ese modo, se tiene que el número de reposiciones por unidad de tiempo es R(Q) = 1/T = r/Q. El costo de mantenimiento por unidad de tiempo es $C_1(Q) = hI_1(Q)$, y el costo de reposición por unidad de tiempo es $C_3(Q) = AR(Q) = Ar/Q$. Por tanto, el costo total C(Q) por unidad de tiempo es la suma de ambos costos y viene dado por la expresión

$$C(Q) = -h\frac{Qr}{2p} + h\frac{Q}{n+1} + A\frac{r}{Q} \qquad (5.13)$$

Seguidamente, para determinar el tamaño del lote óptimo que minimiza la función de costes C(Q), se calcula la derivada de C(Q)

$$C'(Q) = -\frac{hr}{2p} + \frac{h}{n+1} - \frac{Ar}{Q^2} \qquad (5.14)$$

Resolviendo la ecuación C´(Q) = 0, encontramos la solución óptima Q_0 dada en (5.9). Sustituyendo Q_0 en C(Q) se obtiene el mínimo costo total por unidad de tiempo dado en (5.10). Nótese que el nivel de stock Q_0 es un punto mínimo porque la segunda derivada de C(Q) es siempre positiva

$$C''(Q) = \frac{2Ar}{Q^3} > 0 \qquad (5.15)$$

Corolario 5.1. Dado un sistema de inventario con reposición uniforme y patrón de demanda potencial con un índice menor o igual que uno ($n \leq 1$), entonces el ciclo de inventario óptimo es

$$T_0 = \sqrt{\frac{2Ap(n+1)}{rh[2p - r(n+1)]}} \qquad (5.16)$$

Demostración. La cantidad solicitada durante el ciclo de inventario debe ser satisfecha por la cantidad pedida. Así, el tamaño de la reposición Q debe ser igual a la demanda total rT en dicho ciclo de inventario. Por tanto, $T = Q/r$ y sustituyendo (5.9), se obtiene el ciclo de inventario óptimo dado en (5.16).

Obsérvese que si se considera el caso particular de una tasa de demanda uniforme ($n = 1$), entonces el tamaño óptimo del lote Q_0 dado en (5.9) es igual a la fórmula clásica de la cantidad de producción económica (EPQ), esto es

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Ar}{h\left(1 - \frac{r}{p}\right)}} \qquad (5.17)$$

y, a partir de (5.10), el costo mínimo es

$$C^* = \sqrt{2hAr\left(1 - \frac{r}{p}\right)} \qquad (5.18)$$

Así, podemos afirmar que este sistema de inventario representa una generalización del modelo clásico EPQ (véase, por ejemplo, Silver et al. (1998), Zipkin (2000), o Hillier y Lieberman (2001)).

5.4.1.2.- Sistema de inventario con índice de patrón de demanda n > 1

En la Figura 5.1 ilustramos 1as fluctuaciones de inventario en el sistema con n > 1. El siguiente resultado proporciona la solución óptima para el sistema cuando el patrón de demanda n > 1.

Teorema 5.2. Supongamos un sistema de inventario con reposición uniforme y patrón de demanda potencial. Si el índice de patrón de demanda es mayor que uno (n > 1) entonces la cantidad de producción económica viene dada por

$$Q_0 = \sqrt{\frac{Ar}{h\left[\frac{n-1}{n}\sqrt[n-1]{\frac{r}{np}} + \frac{1}{n+1} - \frac{r}{2p}\right]}} \qquad (5.19)$$

y el costo mínimo por unidad de tiempo es

$$C_0 = \sqrt{2hAr\left[\frac{2(n-1)}{n}\sqrt[n-1]{\frac{r}{np}} + \frac{2}{n+1} - \frac{r}{p}\right]} \qquad (5.20)$$

Demostración. Como n > 1, del Lema 5.4, el punto de pedido óptimo está dado por la fórmula (5.7). Entonces, la cantidad promedio en inventario es

$$I_1(Q) = \frac{1}{T}\int_0^{t'} I(t)dt + \frac{1}{T}\int_{t'}^{T} I(t)dt =$$

$$= \frac{(n-1)Q}{n}\left(\frac{r}{np}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \frac{Qr}{2p} + \frac{Q}{n+1} \qquad (5.21)$$

Teniendo en cuenta que el costo de mantenimiento de inventario por unidad de tiempo viene dado por $C_1(Q) = hI_1(Q)$, y el costo de reposición por unidad de tiempo es $C_3(Q) = Ar/Q$, el costo total C(Q) por unidad de tiempo es la suma de ambos costos y es

$$C(Q) = \frac{h(n-1)Q}{n}\left(\frac{r}{np}\right)^{\frac{1}{n-1}} - h\frac{Qr}{2p} + h\frac{Q}{n+1} + A\frac{r}{Q} \qquad (5.22)$$

Para encontrar el tamaño óptimo del lote derivamos C(Q) con respecto a Q, obteniendo

$$C'(Q) = \frac{h(n-1)}{n}\left(\frac{r}{np}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \frac{hr}{2p} + \frac{h}{n+1} - \frac{Ar}{Q^2} \qquad (5.23)$$

Por tanto, para encontrar el tamaño óptimo del lote Q_0, es necesario que se verifique

$$\frac{h(n-1)}{n}\left(\frac{r}{np}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \frac{hr}{2p} + \frac{h}{n+1} - \frac{Ar}{Q^2} = 0 \qquad (5.24)$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtiene la cantidad de producción económica dada en (5.19). Además, la ecuación (5.24) es también una condición suficiente ya que la derivada segunda

$$C''(Q) = \frac{2Ar}{Q^3} \qquad (5.25)$$

es siempre positiva para cualquier tamaño de reposición. Sustituyendo el tamaño óptimo del lote (5.19) en la ecuación de costo total (5.22), se obtiene el costo mínimo (5.20) del sistema de inventario.

Corolario 5.2. Supongamos un sistema de inventario con reposición uniforme e índice de patrón de demanda potencial mayor que uno (n > 1), entonces el punto óptimo de pedido y el ciclo de inventario óptimo son, respectivamente,

$$s_0 = \frac{(n-1)}{n}\left(\frac{r}{np}\right)^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{\frac{Ar}{h\left[\frac{n-1}{n}\sqrt[n-1]{\frac{r}{np}} + \frac{1}{n+1} - \frac{r}{2p}\right]}} \qquad (5.26)$$

y

$$T_0 = \sqrt{\frac{A}{rh\left[\frac{n-1}{n}\sqrt[n-1]{\frac{r}{np}} + \frac{1}{n+1} - \frac{r}{2p}\right]}} \qquad (5.27)$$

Demostración. Teniendo como referencia el Lema 4, el punto de pedido óptimo se da en (5.7). Sustituyendo la cantidad de producción económica (5.19) en (5.7) se obtiene la fórmula (5.26) para el punto óptimo de pedido. Además, considerando que el tamaño del lote Q debe ser igual a la demanda total rT durante el ciclo de inventario, el ciclo óptimo de inventario (5.27) se deduce fácilmente.

Los resultados dados en las ecuaciones (5.19), (5.20), (5.26) y (5.27) constituyen, pues, la solución óptima del sistema de tamaño del lote, sin roturas permitidas, con reposición uniforme e índice de patrón de demanda mayor que uno. Finalmente, es interesante observar que si la tasa de demanda es constante (n = 1), entonces el tamaño óptimo del lote dado en (5.19) coincide también con el tamaño del lote Q* mostrado en (5.17). Además, si n = 1, el costo mínimo (5.20) se reduce a (5.18).

La tabla 5.1 resume las diferentes soluciones óptimas obtenidas para los sistemas de inventario con una tasa de reposición uniforme y patrón de demanda potencial, sin roturas permitidas. Se puede observar que la solución óptima no es necesariamente única, ya que depende del valor del índice del patrón de demanda.

Tabla 5.1

Políticas óptimas para sistemas de inventario con patrón de demanda potencial y razón de reposición uniforme		
Índice del Patrón	**Solución Óptima**	
	Tamaño del Lote Óptimo	**Coste Total Mínimo**
n < 1	$Q_0 = \sqrt{\dfrac{2Ar}{h\left(\dfrac{2}{n+1} - \dfrac{r}{p}\right)}}$	$C_0 = \sqrt{2hAr\left(\dfrac{2}{n+1} - \dfrac{r}{p}\right)}$
n = 1	$Q_0 = \sqrt{\dfrac{2Ar}{h\left(1 - \dfrac{r}{p}\right)}}$	$C_0 = \sqrt{2hAr\left(1 - \dfrac{r}{p}\right)}$
n > 1	$Q_0 = \sqrt{\dfrac{Ar}{h\left[\dfrac{n-1}{n}\sqrt[n-1]{\dfrac{r}{np}} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{r}{2p}\right]}}$	$C_0 = \sqrt{2hAr\left[\dfrac{2(n-1)}{n}\sqrt[n-1]{\dfrac{r}{np}} + \dfrac{2}{n+1} - \dfrac{r}{p}\right]}$

Fuente: Elaboración propia

5.4.2.- Caso especial: la reposición instantánea

Comentemos brevemente el caso especial en el cual el período de reposición es insignificante, es decir, cuando la tasa de reposición es infinita ($p = \infty$). Aquí, asumimos por tanto que la reposición es instantánea. Ahora, consideramos que $n \leq 1$ y sustituyendo $p = \infty$ en (5.9) y (5.10) se obtiene la política óptima

$$Q_1 = \sqrt{\frac{Ar(n+1)}{h}} \qquad (5.28)$$

y

$$C_1 = \sqrt{\frac{4hAr}{n+1}} \qquad (5.29)$$

Por otro lado, si suponemos que $n > 1$ y la reposición es instantánea, sustituyendo $p = \infty$ en las fórmulas (5.19) y (5.20), obtenemos el mismo tamaño óptimo del lote y el costo mínimo dado en (5.28) y (5.29), respectivamente.

Nótese que la solución óptima asociada con (5.28) y (5.29) es igual a la política óptima propuesta en el capítulo 3 para el sistema de inventario con patrón de demanda potencial y roturas no permitidas. Así, el modelo de inventario que aquí se estudia extiende y generaliza al modelo de inventario con patrón de demanda potencial sin roturas permitidas.

5.4.3.- Ejemplos numéricos

Con la finalidad de ilustrar los resultados teóricos obtenidos en el apartado anterior, procedemos a presentar, a continuación, algunos ejemplos numéricos que consideran diferentes patrones de demanda.

Ejemplo 5.1. Supongamos un sistema de inventario determinista con patrón de demanda potencial y tasa de reposición uniforme, donde el índice de patrón de demanda es n = 1/2. La tasa de demanda promedio es de r = 6.000 unidades por año y la tasa de reposición es p = 10.000 unidades por año. El costo de mantenimiento es h = 4 euros por unidad y año. El costo de pedido es A = 50 euros por reposición. Teniendo en cuenta los resultados anteriormente expuestos, el tamaño del lote óptimo debe ser

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2Ar}{h\left(\frac{2}{n+1}-\frac{r}{p}\right)}} = \sqrt{\frac{2.50.6000}{4\left(\frac{2}{3/2}-\frac{6}{10}\right)}} = 452{,}267 \text{ unidades}$$

y el costo mínimo total

$$C_0 = \sqrt{2hAr\left(\frac{2}{n+1}-\frac{r}{p}\right)} = \sqrt{2.4.50.6000\left(\frac{4}{3}-\frac{6}{10}\right)} = 1.326{,}65 \text{ euros/año}$$

El período de reposición o ciclo de inventario viene dado por

$$T_0 = \frac{Q_0}{r} = \frac{452{,}267}{6000} = 0{,}075377 \text{ años} = 27{,}512 \text{ días}$$

Ejemplo 5.2. Consideremos los mismos parámetros del anterior ejemplo, pero modificando el índice de patrón de demanda potencial a n = 2. En este caso n > 1 y siguiendo el Teorema 5.2, el tamaño del lote óptimo es

$$Q_0 = \sqrt{\frac{Ar}{h\left[\frac{n-1}{n}\sqrt[n-1]{\frac{r}{np}}+\frac{1}{n+1}-\frac{r}{2p}\right]}} = \sqrt{\frac{50.6000}{4\left[\frac{6}{40}+\frac{1}{3}-\frac{6}{20}\right]}} = 639{,}602 \text{ unidades}$$

El costo total mínimo viene dado por

$$C_0 = \sqrt{2hAr\left[\frac{2(n-1)}{n}\sqrt[n-1]{\frac{r}{np}} + \frac{2}{n+1} - \frac{r}{p}\right]} = \sqrt{2.4.50.6000.\left[\frac{11}{30}\right]} = 938{,}083 \text{ euros/año}$$

y el período de reposición es

$$T_0 = \frac{Q_0}{r} = \frac{639{,}602}{6000} = 0{,}106600 \text{ años} = 38{,}909 \text{ días}$$

Ejemplo 5.3. Finalmente, vamos a modificar el índice de patrón de demanda potencial para el valor n = 1, manteniendo el resto de parámetros iguales al ejemplo anterior. En este caso, el tamaño del lote óptimo es

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2Ar}{h\left(1-\frac{r}{p}\right)}} = \sqrt{\frac{2.50.6000}{4\left(1-\frac{6}{10}\right)}} = 612{,}372 \text{ unidades}$$

y el coste mínimo es

$$C_0 = \sqrt{2hAr\left(1-\frac{r}{p}\right)} = \sqrt{2.4.50.6000\left(1-\frac{6}{10}\right)} = 979{,}795 \text{ euros/año}$$

Además, el período de programación es

$$T_0 = \frac{Q_0}{r} = \frac{612{,}3724}{6000} = 0{,}102062 \text{ años} = 37{,}252 \text{ días}$$

Como se puede comprobar en los ejemplos anteriores, las políticas óptimas dependen del índice de patrón de demanda potencial. Ello puede llevar a confusión porque, como la ecuación de demanda potencial es única, parece que la política óptima a seguir debería ser también única e independiente del índice de patrón de demanda. Así, podemos concluir que cuando se utiliza un patrón de demanda potencial con la finalidad de modelar la demanda de los clientes para un producto, en primer lugar, deberá indicarse claramente el índice de patrón de demanda que mejor se ajuste a la demanda de los clientes y, a continuación, aplicar la política óptima de inventario para ese índice de patrón de demanda.

Hasta aquí hemos analizado el sistema de reposición uniforme con patrón de demanda potencial, sin permitir roturas de stocks. En la próxima sección, estudiamos un sistema de inventario con patrón de demanda potencial, admitiendo la posibilidad de roturas recuperables, donde la tasa de reposición depende del comportamiento de la razón de demanda a lo largo del periodo de reposición.

5.5.- Sistema de inventario de tamaño del lote y punto de pedido con patrón de demanda potencial, roturas recuperables y tasa de producción dependiente de la tasa de demanda

Para el desarrollo de este nuevo modelo, vamos a considerar un sistema de revisión continua del inventario en un horizonte infinito, con demanda determinista variable en el tiempo, en el cual se permiten roturas y donde los clientes están dispuestos a esperar a la llegada de la siguiente reposición. Al comienzo del periodo de gestión, el stock neto inicial es s unidades y el período de reposición t' es el tiempo durante el cual se va añadiendo el tamaño de la reposición al inventario.

La reposición del inventario, a través de la producción, comienza justo en el instante t = 0 y continua hasta t = t', cuando el stock alcanza un máximo nivel I(t'). Nótese que se considera que en cualquier instante t, con $0 \leq t \leq t'$, la tasa de reposición P(t) debe ser mayor que la tasa de demanda D(t). Así, durante el período [0,t'], el inventario habría aumentado a una tasa de $P(t) - D(t) = (\lambda-1)\, rt^{(1-n)/n}/nT^{(1-n)/n}$.

A continuación, cuando se detiene la reposición del inventario a través de la producción, el nivel de stock empieza a disminuir, debido al efecto de la demanda, hasta t = T. En ese momento se inicia un nuevo ciclo y se repiten nuevamente los mismos movimientos en el inventario.

Bajo los supuestos anteriores, las ecuaciones diferenciales ordinarias que rigen el sistema son

$$\frac{dI(t)}{dt} = (\lambda - 1)\frac{rt^{(1-n)/n}}{nT^{(1-n)/n}}, \quad 0 \leq t \leq t' \qquad (5.30)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{rt^{(1-n)/n}}{nT^{(1-n)/n}}, \quad t' \leq t \leq T \qquad (5.31)$$

Las condiciones de frontera o contorno de las ecuaciones son I(0) = I(T) = s (punto de pedido). Por tanto, las soluciones de las ecuaciones diferenciales vienen determinadas por las formulas siguientes

$$I(t) = s + (\lambda - 1)rT\left(\frac{t}{T}\right)^{1/n}, \quad 0 \leq t \leq t' \qquad (5.32)$$

$$I(t) = s + \lambda r T\left(\frac{t'}{T}\right)^{1/n} - rT\left(\frac{t}{T}\right)^{1/n}, \quad t' \le t \le T \qquad (5.33)$$

El nivel de stock neto, I(t), es una función T - periódica y continua definida en el intervalo [0,∞). Además, I(t) es una función creciente en [0,t') y decreciente en (t',T].

La cantidad total demandada en [0,T] está dada por

$$\int_0^T D(t)dt = \int_0^T \frac{r}{n}\left(\frac{t}{T}\right)^{(1-n)/n} = rT \qquad (5.34)$$

Al final del ciclo de inventario habrá sido incorporada al stock una reposición de tamaño total Q. Ese tamaño del lote es

$$Q = \int_0^{t'} P(t)dt = \lambda\int_0^{t'} \frac{r}{n}\left(\frac{t}{T}\right)^{(1-n)/n} = \lambda r T\left(\frac{t'}{T}\right)^{1/n} \qquad (5.35)$$

La cantidad programada Q para ser repuesta debe cubrir la demanda total rT a lo largo del ciclo de inventario. Por tanto, igualando (5.34) a (5.35), el período de reposición viene dado por

$$t' = \frac{T}{\lambda^n} \qquad (5.36)$$

La cantidad máxima en inventario se obtiene cuando la reposición es completamente añadida al stock. Así, la cantidad máxima en el inventario es

$$I(t') = s + (\lambda - 1) r T\left(\frac{t'}{T}\right)^{1/n} = s + \frac{(\lambda - 1)Q}{\lambda} \qquad (5.37)$$

Como las roturas están permitidas y son recuperables, es decir, los clientes están totalmente dispuestos a esperar a la llegada de la siguiente reposición para satisfacer su demanda, la variación del inventario del sistema dependerá de los valores relativos del punto de pedido s y de la cantidad máxima en inventario.

En ese sentido, se pueden dar tres situaciones posibles: si s ≥ 0, no hay roturas y solo se mantienen inventarios; si $-(\lambda-1)Q/\lambda \leq s \leq 0$, se mantienen algunos inventarios y, también, se producen situaciones de roturas; y si $-(\lambda-1)Q/\lambda \geq s$, hay, únicamente, roturas.

Tanto la cantidad promedio en inventario $I_1(s,Q)$ como la rotura media $I_2(s,Q)$, dependen de las variables punto de pedido y tamaño del lote. Calcularemos dichas cantidades dependiendo de las diferentes posibles situaciones.

A) Si s ≥ 0, entonces no hay roturas y, únicamente, se mantienen stocks. La cantidad promedio mantenida en el inventario es

$$I_1(s,Q) = \frac{1}{T}\int_0^{t'}[s+(\lambda-1)\frac{rT}{\sqrt[n]{T}}t^{1/n}]dt + \frac{1}{T}\int_{t'}^{T}[s+Q-\frac{rT}{\sqrt[n]{T}}t^{1/n}]dt =$$

$$= \frac{1}{T}\left[(s+Q)T - \frac{Q^{n+1}T}{(n+1)(\lambda rT)^n} - \frac{rnT^2}{n+1}\right] = s + \frac{(\lambda^n - 1)Q}{(n+1)\lambda^n} \qquad (5.38)$$

Como, en este caso, no se producen roturas $I_2(s,Q) = 0$. Además, el número promedio de reposiciones por unidad de tiempo es $R(Q) = 1/T = r/Q$.

Asimismo, teniendo en cuenta cada uno de los costos enunciados anteriormente, el costo total por unidad de tiempo es $C(s,Q) = C_1(s,Q) + C_2(s,Q) + C_3(Q) = hI_1(s,Q) + wI_2(s,Q) + AR(Q)$. Por tanto, ese costo viene dado por

$$C(s,Q) = h\left[s + \frac{(\lambda^n - 1)Q}{(n+1)\lambda^n}\right] + A\frac{r}{Q} \qquad (5.39)$$

B) Cuando $-(\lambda-1)Q/\lambda \geq s$, no se mantienen inventarios en stock y, por tanto, $I_1(S,T) = 0$. Sin embargo, la rotura promedio durante el período T viene dada por

$$I_2(s,Q) = \frac{-1}{T}\int_0^{t'}[s+(\lambda-1)\frac{rT}{\sqrt[n]{T}}t^{1/n}]dt - \frac{1}{T}\int_{t'}^{T}[s+Q-\frac{rT}{\sqrt[n]{T}}t^{1/n}]dt =$$

$$=\frac{-1}{T}\left[(s+Q)T-\frac{Q^{n+1}T}{(n+1)(\lambda rT)^{n}}-\frac{rnT^{2}}{n+1}\right]=\frac{(1-\lambda^{n})Q}{(n+1)\lambda^{n}}-s \qquad (5.40)$$

En este caso, el coste total por unidad de tiempo es

$$C(s,Q)=w\left[\frac{(1-\lambda^{n})Q}{(n+1)\lambda^{n}}-s\right]+A\frac{r}{Q} \qquad (5.41)$$

C) Por último, si $-(\lambda-1)Q/\lambda \leq s \leq 0$, entonces se mantienen algunos inventarios y se producen algunas situaciones de rotura de stocks.

Ahora, sea t_1 el momento en el cual el nivel de inventario alcanza el nivel cero durante todo el período de reposición, y sea t_2 el momento en que el nivel de inventario es igual a cero durante el período sin reposición. Como $I(t_1) = 0$, de (5.32), tenemos

$$t_1=\frac{(-s)^{n}T}{[(\lambda-1)rT]^{n}}=\frac{(-s)^{n}Q}{r(\lambda-1)^{n}Q^{n}} \qquad (5.42)$$

De manera similar, $I(t_2) = 0$ y, partiendo de (5.33) y (5.36), se obtiene

$$t_2=\frac{(s+rT)^{n}T}{(rT)^{n}}=\frac{(s+Q)^{n}}{rQ^{n-1}} \qquad (5.43)$$

En este caso, la cantidad promedio mantenida en el inventario viene dada por la expresión

$$I_1(s,Q)=\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t'}[s+(\lambda-1)\frac{rT}{\sqrt[n]{T}}t^{1/n}]dt+\frac{1}{T}\int_{t'}^{t_2}[s+Q-\frac{rT}{\sqrt[n]{T}}t^{1/n}]dt$$

Teniendo en cuenta (5.36), (5.42) y (5.43) y resolviendo las integrales anteriores, se obtiene

$$I_1(s,Q)=\frac{(s+Q)^{n+1}}{(n+1)Q^{n}}-\frac{Q}{(n+1)\lambda^{n}}+\frac{(-s)^{n+1}}{(n+1)(\lambda-1)^{n}Q^{n}} \qquad (5.44)$$

Ahora, tenemos que calcular la rotura promedio durante el ciclo de inventario. Ésta viene dada por

$$I_2(s,Q) = \frac{-1}{T}\int_0^{t_1}[s+(\lambda-1)\frac{rT}{\sqrt[n]{T}}t^{1/n}]dt + \frac{-1}{T}\int_{t_2}^{T}[s+Q-\frac{rT}{\sqrt[n]{T}}t^{1/n}]dt$$

Considerando (5.42) y (5.43), y resolviendo las integrales anteriores, tenemos

$$I_2(s,Q) = \frac{(\text{-s})^{\text{n+1}}}{(\text{n}+1)(\lambda\,\text{-}1)^{\text{n}}Q^n}\text{-}s\text{-}\frac{Q}{n+1}+\frac{(s+Q)^{n+1}}{(n+1)Q^n} \qquad (5.45)$$

Por tanto, el coste total por unidad de tiempo del sistema es

$$C(s,Q) = \text{h}\left[\frac{(s+Q)^{n+1}}{(n+1)Q^n}+\frac{(\text{-s})^{\text{n+1}}}{(\text{n}+1)(\lambda\,\text{-}1)^{\text{n}}Q^n}\text{-}\frac{Q}{(\text{n}+1)\lambda^{\text{n}}}\right]+$$
$$+w\left[\frac{(s+Q)^{n+1}}{(n+1)Q^n}+\frac{(\text{-s})^{\text{n+1}}}{(\text{n}+1)(\lambda\,\text{-}1)^{\text{n}}Q^n}\text{-}s\text{-}\frac{Q}{n+1}\right]+A\frac{r}{Q} \qquad (5.46)$$

Ahora, probaremos que el mínimo de la función C(s,Q), debe caer dentro de la región que se caracteriza por la condición $-(\lambda-1)Q/\lambda \leq s \leq 0$. Así, el mínimo no puede estar en $s \geq 0$, ya que el coste C(s,Q) es siempre mayor que el coste C(s = 0,Q). De manera similar, el mínimo no puede estar en la región donde $-(\lambda-1)Q/\lambda \geq s$ ya que $C(s = -(\lambda-1)Q/\lambda,Q)$ es siempre menor que el costo C(s,Q). Por tanto, para obtener la solución del sistema de inventario, tenemos que encontrar el mínimo de la función de costo C(s,Q) dada por (5.46) dentro del rango determinado por $-(\lambda-1)Q/\lambda \leq s \leq 0$.

5.5.1.- Política óptima de inventario

La solución óptima puede ser encontrada obteniendo las derivadas parciales de la anterior función de costos recogida en (5.46). La derivada parcial de C(s,Q) con respecto a s es

$$\frac{\partial C(s,Q)}{\partial s} = (h+w)\left[\frac{(s+Q)^n}{Q^n} - \frac{(\text{-s})^{\text{n}}}{(\lambda-1)^n Q^n}\right] - w \qquad (5.47)$$

y la derivada parcial de C(s,Q) con respecto a Q es

$$\frac{\partial C(s,Q)}{\partial Q} = (h+w)\left[\frac{(s+Q)^n (Q-ns)}{Q^{n+1}} - \frac{\text{n}(\text{-s})^{\text{n+1}}}{(n+1)(\lambda-1)^n Q^{n+1}}\right] - \frac{h}{(n+1)\lambda^n} - \frac{w}{n+1} - \frac{Ar}{Q^2} \qquad (5.48)$$

Igualando ambas derivadas parciales a cero, podemos encontrar la solución óptima (s*,Q*) del sistema de inventario con patrón de demanda potencial y roturas totalmente cubiertas con la siguiente reposición. Por lo tanto, para obtener la política óptima de inventario tenemos que resolver las ecuaciones

$$(h+w)\left[\frac{(s+Q)^n}{Q^n} - \frac{(\text{-s})^{\text{n}}}{(\lambda-1)^n Q^n}\right] - w = 0 \qquad (5.49)$$

$$(h+w)\left[\frac{(s+Q)^n (Q-ns)}{Q^{n+1}} - \frac{\text{n}(\text{-s})^{\text{n+1}}}{(n+1)(\lambda-1)^n Q^{n+1}}\right] - \frac{h}{(n+1)\lambda^n} - \frac{w}{n+1} - \frac{Ar}{Q^2} = 0 \qquad (5.50)$$

Ahora bien, consideremos una nueva variable x definida por el cociente o relación entre la cantidad de pedidos pendientes y el tamaño del lote, es decir,

$$x = \frac{-s}{Q} \qquad (5.51)$$

Nótese que la región en la que estamos buscando obtener la política óptima es -(λ-1)Q/λ ≤ s ≤ 0, la cual es equivalente a la condición 0 ≤ x ≤ (λ-1)/λ. Por tanto, la nueva variable x debe variar dentro del intervalo [0,(λ-1)/λ].

Teniendo en cuenta la nueva variable x, la ecuación (5.49) es equivalente a

$$(1-x)^n - \frac{x^n}{(\lambda-1)^n} = \frac{\mathrm{w}}{h+w} \qquad (5.52)$$

El siguiente Teorema nos garantiza que podemos encontrar una solución única de esa ecuación que está comprendida entre 0 y (λ-1)/λ.

Teorema 5.3. La ecuación

$$(1-x)^n - \frac{x^n}{(\lambda-1)^n} - \frac{\mathrm{w}}{h+w} = 0 \qquad (5.53)$$

tiene una única solución real en el intervalo [0,(λ-1)/λ].

Demostración. Sea y(x) una función real definida en el intervalo [0,1] dada por

$$y(x) = (1-x)^n - \frac{x^n}{(\lambda-1)^n} - \frac{\mathrm{w}}{h+w} \qquad (5.54)$$

Esa función es continua, derivable y estrictamente decreciente en el intervalo (0,1) ya que su derivada es siempre negativa, esto es,

$$y'(x) = -n(1-x)^{n-1} - \frac{nx^{n-1}}{(\lambda-1)^n} < 0 \qquad (5.55)$$

Además, y(0) = h/(h+w) > 0 y también

$$y((\lambda-1)/\lambda) = -\frac{w}{h+w} < 0 \qquad (5.56)$$

Por lo tanto, aplicando el Teorema de Bolzano, existe un punto x* en el intervalo [0,(λ-1)/λ] donde y(x*) = 0. Ese punto es único porque la función es decreciente en (0,1).

Podemos encontrar esa solución utilizando algún método numérico como, puede ser, el método de la bisección o el método de Newton - Raphson (véase, por ejemplo, Stoer y Bulirsch (2002)).

Ahora, nótese que (5.50) es equivalente a

$$\begin{aligned}&(h+w)(1-x)^n(1+nx) - \frac{n(h+w)x^{n+1}}{(n+1)(\lambda-1)^n}\\ &-\frac{h}{(n+1)\lambda^n} - \frac{w}{n+1} - \frac{Ar}{Q^2} = 0\end{aligned} \qquad (5.57)$$

y de (5.52), tenemos

$$\frac{x^n}{(\lambda-1)^n} = (1-x)^n - \frac{w}{h+w} \qquad (5.58)$$

Sustituyendo la expresión anterior en (5.57) se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned}&\frac{(h+w)}{n+1}(1-x)^n + \frac{nw}{n+1}x\\ &-\frac{h}{(n+1)\lambda^n} - \frac{w}{n+1} - \frac{Ar}{Q^2} = 0\end{aligned} \qquad (5.59)$$

Ahora, resolviendo la ecuación (5.52) y sustituyendo la solución obtenida x* en (5.59), podemos obtener el tamaño del lote económico de reposición Q*. Ese tamaño del lote viene dado por la fórmula

$$Q^* = \sqrt{\frac{\mathrm{Ar}}{\frac{(\mathrm{h}+\mathrm{w})}{\mathrm{n}+1}(1-x^*)^n + \frac{nw}{n+1}x^* - \frac{h}{(n+1)\lambda^n} - \frac{w}{n+1}}} \qquad (5.60)$$

De (5.51), el punto de pedido óptimo es s* = -x*Q* y el costo mínimo por unidad de tiempo del sistema de inventario se obtiene sustituyendo los valores x* y Q* en la ecuación (5.46).

Por último, el siguiente Teorema demuestra que el punto (s*,Q*) es la política óptima del sistema de inventario.

Teorema 5.4. La solución (s*,Q*), obtenida resolviendo las ecuaciones (5.52), (5.60) y (5.51), es la política óptima del sistema de inventario.

Demostración. Consideremos las segundas derivadas parciales de C(s,Q), las cuales son

$$\frac{\partial^2 C(s,Q)}{\partial s^2} = (h+w)\left[\frac{n(s+Q)^{n-1}}{Q^n} + \frac{n(-s)^{n-1}}{(\lambda-1)^n Q^n}\right] \qquad (5.61)$$

$$\frac{\partial^2 C(s,Q)}{\partial Q^2} = (h+w)\left[\frac{ns^2(s+Q)^{n-1}}{Q^{n+2}} + \frac{n(-s)^{n+1}}{(\lambda-1)^n Q^{n+2}}\right] + \frac{2\mathrm{Ar}}{Q^3} \qquad (5.62)$$

$$\frac{\partial^2 C(s,Q)}{\partial s \partial Q} = (h+w)\left[\frac{n(-s)(s+Q)^{n-1}}{Q^{n+1}} + \frac{n(-s)^n}{(\lambda-1)^n Q^{n+1}}\right] \qquad (5.63)$$

Sea H el Hessiano de la función C(s,Q). Este viene dado por

$$H(s,Q) = \left[\frac{\partial^2 C(s,Q)}{\partial s^2}\right]\left[\frac{\partial^2 C(s,Q)}{\partial Q^2}\right] - \left[\frac{\partial^2 C(s,Q)}{\partial s \partial Q}\right]^2 =$$

$$= (h+w)\left[\frac{n(s+Q)^{n-1}}{Q^n} + \frac{n(-s)^{n-1}}{(\lambda-1)^n Q^n}\right]\left[\frac{2Ar}{Q^3}\right] > 0 \qquad (5.64)$$

Teniendo en cuenta que las derivadas parciales (5.61) y (5.62) son siempre positivas y que el Hessiano H es también positivo, llegamos a la conclusión de que el punto (s*,Q*) es un punto mínimo de la función C(s,Q) y, por tanto, es la política óptima del sistema de inventario.

5.5.2.- Procedimiento algorítmico

Con el objeto de sintetizar los resultados anteriores, a continuación describimos un algoritmo que nos permite encontrar la política óptima de inventario:

Paso 0. Introducir los parámetros de entrada del sistema de inventario.

Paso 1. Calcular la solución única x* en el intervalo $[0,(\lambda-1)/\lambda]$ de la ecuación (5.52) mediante el uso de algún método numérico.

Paso 2. Determinar el tamaño económico de la reposición Q* recurriendo a la fórmula (5.60).

Paso 3. Calcular el punto de pedido óptimo dado por la fórmula s* = -x*Q*.

Paso 4. Determinar el costo mínimo C* = C(s*,Q*) del sistema de inventario mediante la fórmula (5.46).

5.5.3.- Casos especiales

Abordaremos, a continuación, dos casos particulares que tienen su origen en el análisis desarrollado previamente. Primero, estudiaremos la política óptima que se obtiene si el patrón de demanda es uniforme (n = 1). Seguidamente, analizaremos la situación derivada de considerar una tasa de producción infinita.

5.5.3.1.- Demanda uniforme

En el caso especial de que el índice del patrón de demanda sea n = 1, a partir de (5.52), tenemos que resolver una ecuación lineal simple, cuya solución es

$$x^* = \frac{(\lambda - 1)h}{\lambda(h + w)} \qquad (5.65)$$

Sustituyendo ese valor de x en (5.60), tenemos el tamaño de la reposición

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Ar\lambda(h + w)}{(\lambda - 1)wh}} \qquad (5.66)$$

Si denotamos por p al producto λr, esto es, p = λr, entonces la expresión anterior se puede escribir como

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Ar(h + w)}{(1 - r / p)wh}} \qquad (5.67)$$

La fórmula (5.67) es la cantidad económica de producción (EPQ) para el sistema de inventario determinísta con tasa de producción uniforme, roturas permitidas, y clientes totalmente dispuestos a esperar a la siguiente reposición para satisfacer su demanda (ver Naddor (1966), Silver et al. (1998) y Zipkin (2000)). Así, el modelo que se analiza aquí, extiende y generaliza al sistema de inventario citado anteriormente.

5.5.3.2.- Tasa de producción infinita

En este apartado vamos a estudiar el comportamiento del sistema de inventario cuando la tasa de reposición no es necesariamente finita, tal como se ha supuesto en las secciones anteriores.

Si consideramos que λ tiende a ∞. la ecuación (5.52) se reduce a

$$(1-x)^n = \frac{\mathrm{w}}{h+w} \tag{5.68}$$

y la solución es

$$x^* = 1 - \sqrt[n]{\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{h}+\mathrm{w}}} \tag{5.69}$$

Sustituyendo ese valor de x en (5.60), tenemos el tamaño del lote óptimo

$$Q^* = \sqrt{\frac{Ar(n+1)}{nw\left(1-\sqrt[n]{\frac{w}{h+w}}\right)}} \tag{5.70}$$

Esa fórmula es igual a la cantidad económica de pedido (EOQ) de un sistema de inventario con patrón de demanda potencial, reposición instantánea y roturas recuperables, donde los clientes están dispuestos a esperar a la siguiente reposición, como la que hemos planteado en el capítulo 3 del presente trabajo.

5.5.4.- Ejemplos numéricos

Ejemplo 5.4. Consideremos un sistema de inventario en el cual se permiten roturas, con las mismas características descritas en este capítulo y asumiendo los siguientes valores de los parámetros:

A = 100 euros por pedido.
h = 4 euros por unidad y año.
w = 6 euros por unidad y año.
r = 1.200 unidades por año.
λ = 1.2.
n = 2.

De (5.52), tenemos que resolver la ecuación

$$(1-x)^2 - 25x^2 = \frac{6}{10}$$

Utilizando el método de Newton - Rapson, la solución única de la ecuación anterior dentro del intervalo $0 \leq x \leq (\lambda-1)/\lambda = 1/6$ es x* = 0,09399017. De (5.60), obtenemos el tamaño de la reposición económica que es Q* = 802,75746163 unidades.

De (5.51), el punto de pedido óptimo es s* = - x*Q* = - 75,45131029 unidades.

De (5.46), el costo mínimo es C* = 274.05540431 euros/año.

El período de programación es T* = Q* /r = 0,66896455 años = 244,17206125 días.

Además, a partir de (5.36), el período de reposición es t' = T^*/λ^2 = 0,46455872 años = 169,56393108 días.

Ejemplo 5.5. Ahora, consideramos los mismos parámetros de entrada pero cambiando, únicamente, el patrón de demanda n = 2 por n = 1/2. Así, la ecuación (5.52) es

$$\sqrt{1-x}-\sqrt{\frac{x}{0.2}}=\frac{6}{10}$$

Resolviendo la ecuación anterior, obtenemos el valor de x* = 0,02965443.

De (5.60), el tamaño económico de la reposición es Q* = 790,44374346 unidades.

El punto de pedido óptimo es s* = -23,44015866 unidades y, a partir de (5.46), el costo mínimo viene dado por C* = 303.62692527 euros/año.

El período de programación es T* = Q*/r = 0,65870312 años = 240,42663880 días, y teniendo en cuenta (5.36), el período de reposición es $t' = T^*/\lambda^{1/2}$ = 0,60131093 años = 219,47848945 días.

Ejemplo 5.6. Vamos a considerar los mismos parámetros de entrada del primer ejemplo, pero modificando el índice de patrón de demanda por n = 1/5 y el costo de mantenimiento por h = 6.

De la ecuación (5.22) tenemos

$$\sqrt[5]{1-x}-\sqrt[5]{\frac{x}{0.2}}=\frac{1}{2}$$

Recurriendo al método de Newton - Raphson, la solución de la anterior ecuación es x* = 0.00617303. También, de (5.60), obtenemos el tamaño económico de la reposición Q* = 239.02990925 unidades. Además, el punto óptimo de pedido es s* = - x*Q* = - 1.47553880 unidades y, de (5.46), el costo mínimo es C* = 543.34168496 euros/año.

El periodo de programación es T* = Q*/r = 0.19919159 años = 72.70493073 días. De (5.36), el periodo de reposición es $t' = T^*/\lambda^{1/5}$ = 0.19205903 años = 70.10154884 días.

En las Tablas 5.2 y 5.3 presentamos algunos resultados adicionales.

En la Tabla 5.2, consideramos el índice de patrón de demanda n = 3 y los parámetros r = 1.200 unidades por año, A = 100 euros por cada reposición, y h = 4 euros por unidad y tiempo. Elegimos para el parámetro de la tasa de producción λ los siguientes valores

λ = 1.1, 1.3, 1.5, 1.7 y 1.9.

Consideramos cinco valores para el coste de rotura w, es decir, w = 0.1, 0.5, 1 y 5.

Tabla 5.2

Punto óptimo de pedido s y tamaño económico de lote Q para sistemas de patrón de demanda potencial con n = 3, r = 1200 unidades por año, A = 100 euros por pedido , h = 4 euros por unidad y tiempo, asumiendo diferentes valores para los parámetros λ y w								
Parámetro Tasa de Producción	Costo unitario de Rotura por unidad de tiempo							
	w = 0.1		w = 0.5		w = 1		w = 5	
	s	Q	s	Q	s	Q	s	Q
λ = 1.1	-176.753	2181.151	-260.092	3001.324	-180.232	2196.351	-76.953	1199.471
λ = 1.3	-259.356	1326.581	-357.929	1659.784	-246.701	1218.584	-92.306	683.115
λ = 1.5	-286.705	1076.650	-394.118	1294.951	-267.236	956.770	-90.142	557.799
λ = 1.7	-293.730	950.555	-411.553	1123.443	-274.542	836.367	-86.339	505.430
λ = 1.9	-292.415	874.916	-420.242	1025.376	-276.170	769.389	-83.406	478.360

Fuente: Elaboración propia

Nótese que el tamaño del lote económico decrece a medida que se incrementa el parámetro de producción λ. Sin embargo, no ocurre lo mismo, respecto al tamaño del lote, cuando el coste de rotura se incrementa.

En la Tabla 5.3 mostramos el costo total mínimo de inventario para la política óptima expuesta en la Tabla 5.1. Se puede comprobar que el costo total mínimo aumenta cuando se incrementan el coste de rotura w o el parámetro de la tasa de producción λ. Finalmente, el ciclo óptimo de inventario o periodo de programación disminuye a medida que se incrementa el parámetro de la tasa de producción λ.

Tabla 5.3

Punto óptimo de pedido s y tamaño económico de lote Q para sistemas de patrón de demanda potencial con n = 3, r = 1200 unidades por año, A = 100 euros por pedido , h = 4 euros por unidad y tiempo, asumiendo diferentes valores para los parámetros λ y w								
Parámetro tasa de producción	Costo unitario de Rotura por unidad de tiempo							
	w = 0.1		w = 0.5		w = 1		w = 5	
	C(s,Q)	T	C(s,Q)	T	C(s,Q)	T	C(s,Q)	T
λ = 1.1	70.264443	1.817626	79.964653	2.501103	109.377192	1.830292	200.088089	0.999559
λ = 1.3	122.561068	1.105484	144.596139	1.383153	196.950628	1.015487	351.331807	0.569262
λ = 1.5	158.404794	0.897208	185.334761	1.079126	250.843463	0.797308	430.262698	0.464832
λ = 1.7	186.394690	0.792129	213.628543	0.936202	286.955267	0.696972	474.843461	0.421192
λ = 1.9	208.518830	0.729097	234.060289	0.854480	311.935737	0.641157	501.713976	0.398633

Fuente: Elaboración propia

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

Conclusiones derivadas del estudio

En el análisis desarrollado en este trabajo hemos profundizado en el diseño de diferentes modelos de gestión de stocks orientados a determinar políticas óptimas, con el propósito de adoptar decisiones encaminadas a minimizar los costes totales del inventario y proporcionar un adecuado nivel de satisfacción a los clientes, asegurando la disposición de bienes o materiales en las mejores condiciones para cubrir sus necesidades y las del proceso productivo. Ello nos ha permitido abordar los problemas planteados y calcular los valores de las principales variables, presentando un resumen de los resultados obtenidos en las presentes conclusiones.

Con la finalidad de completar el marco teórico en el que se ha fundamentado nuestra investigación, hemos realizado una revisión bibliográfica de los trabajos relacionados con la gestión y el control de los inventarios, en los cuales la demanda se expresa como una función dependiente del tiempo. En concreto, hemos recogido una síntesis de la literatura más relevante relativa a los modelos de gestión de stocks que incorporan un patrón de demanda potencial, considerando o no la posibilidad de deterioro en los artículos, la cual ha servido de base para la elaboración del estudio y la realización de nuevas aportaciones.

Adicionalmente, antes de especificar las hipótesis que rigen estos sistemas de inventario y determinar las políticas óptimas de gestión de stocks, hemos presentado diferentes contextos y situaciones reales, en las cuales se puede aplicar el modelo de demanda potencial, ofreciendo una perspectiva práctica del procedimiento propuesto para la determinación de la política eficiente.

En todos los modelos hemos supuesto una demanda de artículos determinista y dependiente del tiempo, con la existencia de un inventario de productos orientados a satisfacerla, el cual debe ser reaprovisionado. Además, hemos considerado los costos asociados a las operaciones de mantenimiento o almacenamiento y a la reposición, incluyendo también los relacionados con la rotura; así como los objetivos a alcanzar y las hipótesis o restricciones que intervienen en razón de la naturaleza misma de cada uno de los problemas planteados.

En nuestra investigación, hemos modificado algunas de las hipótesis de los modelos clásicos EOQ y EPQ, desarrollando un conjunto de siete sistemas deterministas de inventario con demanda variable en el tiempo y asumiendo un patrón potencial, el cual intenta reflejar la concentración temporal de la demanda de los clientes a lo largo del ciclo de inventario.

En ese sentido, en un primer escenario, hemos determinado la política óptima del sistema de inventario con demanda potencial sin permitir la existencia de roturas, obteniendo el nivel óptimo de stock y el período de gestión óptimo. Hemos constatado que en el caso particular en que el patrón de demanda es uniforme, la política óptima coincide con la clásica cantidad económica de pedido (EOQ). Además, cuando el índice del patrón de la demanda es mayor que uno, el costo mínimo de la política óptima es siempre menor que el costo de la política EOQ. Sin embargo, si el patrón de demanda es menor que uno, entonces el costo mínimo de la política óptima es mayor que el costo de la política EOQ, ya que la demanda se concentra más al final del periodo y hay mayor coste de mantenimiento.

También, hemos estudiado dos sistemas diferentes de gestión de stocks con presencia de roturas. Por una parte, el sistema de inventario con roturas recuperables, donde los clientes están dispuestos a esperar a la llegada de la siguiente reposición para satisfacer sus demandas de artículos y, por otra, el sistema de inventario en el que la existencia de roturas se traduce en pérdida de ventas. Los resultados obtenidos nos han permitido determinar las fórmulas que caracterizan las políticas óptimas y los costes mínimos totales por unidad de tiempo para ambos sistemas.

Se puede comprobar que la solución óptima obtenida para el sistema con roturas recuperables es absolutamente diferente de la obtenida para el caso de pérdida de ventas, la cual es especialmente singular. Ello es debido a que en el caso de ventas pérdidas se considera una nueva forma o dimensión para el costo unitario de rotura. Ese cambio de dimensión conduce a la obtención de unos resultados distintos para las variables óptimas, viéndose, además, afectada la estructura de la solución.

Así, hemos observado que en el sistema de inventario con pérdida de ventas la expresión de la solución óptima no es uniforme, ya que depende del valor del índice de patrón de demanda y, también, de si se cumplen o no ciertas condiciones. De esa manera, hemos obtenido siete posibles situaciones, determinando para cada una de las mismas su propia política óptima y su coste mínimo. Es preciso resaltar que cada solución óptima ofrece resultados claramente diferenciados con respecto a las soluciones obtenidas en el sistema de inventario en el cual no se permiten roturas, así como en relación al sistema donde hay existencia de roturas recuperables.

Además, el análisis realizado nos indica que, cuando el índice del patrón de la demanda tiene un valor comprendido entre cero y uno, la estructura de la solución es la siguiente: o bien no se permite la rotura, si se verifican las correspondientes restricciones, o bien no se mantiene ningún inventario y es menos costoso incurrir en pérdidas de ventas todo el tiempo.

Se produce una situación con estructura similar cuando el patrón de demanda potencial es uniforme. En ese caso, o no se permiten roturas y el sistema se reduce al del tamaño del lote (EOQ) con su correspondiente política óptima, o no se mantiene inventario ni se realizan reposiciones. En concreto, cuando los valores del costo unitario de mantenimiento y del costo de reposición son mayores que el costo unitario de la pérdida de ventas y la tasa de demanda, nos encontramos con una solución degenerada y, por tanto, no debería existir ningún sistema real de inventario.

Sin embargo, cuando el patrón de demanda potencial es mayor que uno, la solución óptima no puede ser nunca una solución degenerada. En esta situación, la política óptima consiste, o bien en no permitir roturas o bien en añadir un determinado número de unidades al comienzo del período y no volver a reponer el inventario hasta que se haya contabilizado un número finito de pérdida de ventas.

Con los resultados obtenidos en los tres primeros sistemas de inventarios mencionados, podemos afirmar que los modelos estudiados generalizan algunos modelos analizados por otros autores. Así, el modelo clásico de cantidad económica de pedido es un caso particular del modelo sin rotura (ver Hadley y Whitin (1963) y Naddor (1966)). Por otro lado, cuando se permiten las roturas y las demandas son diferidas en el tiempo, la solución óptima generaliza a la política óptima del sistema de inventario clásico, en la cual la demanda pendiente se satisface totalmente con la llegada del siguiente pedido (ver Waters (1992) y Zipkin (2000)). Además, los resultados obtenidos para el sistema de pérdida de ventas con patrón de demanda potencial también extienden algunas políticas presentadas por otros autores cuando la demanda sigue un patrón uniforme (véase Pentico y Drake (2009) y San José et al (2009)).

En los ejemplos numéricos que han servido para ilustrar cada uno de los tres primeros modelos analizados, hemos asumido diversos valores para los parámetros de entrada del sistema, lo cual nos ha permitido calcular los diferentes resultados óptimos que determinan las políticas de gestión de stocks más eficaces y eficientes en la adopción de decisiones empresariales. Los mismos confirman que las decisiones a adoptar son significativamente diferentes en cada caso.

A continuación, hemos estudiado dos modelos de gestión de inventarios con patrón de demanda potencial, considerando que el stock se va agotando a lo largo del ciclo de inventario, no sólo como consecuencia de la demanda de los clientes, sino también por el proceso de deterioro que sufren los artículos. La incorporación de deterioro en los modelos ha aumentado la complejidad en la resolución del problema de gestión de stocks.

Hemos formulado, por una parte, un modelo orientado a determinar el ciclo de inventario óptimo y el mínimo coste total medio por unidad de tiempo para sistemas de inventario deterministas, con patrón de demanda potencial y considerando la posibilidad de cierto porcentaje de deterioro de los bienes almacenados, pero sin admitir la existencia de roturas. En ese sentido, hemos demostrado que esa función de costo total promedio es siempre convexa cualquiera que sea el índice de patrón de demanda potencial considerado. Asimismo, hemos propuesto una condición necesaria y suficiente que posibilita la caracterización del ciclo óptimo de inventario, y se ha proporcionado un procedimiento iterativo para resolver el problema de gestión de stocks. Ese enfoque nos ha permitido calcular, de manera rápida y eficiente, el período de reposición óptimo mediante el empleo del método numérico de la bisección. La aplicación de dicho procedimiento nos ha aportado, directamente, el costo total medio mínimo y el tamaño óptimo del lote.

También, hemos analizado el sistema de inventario permitiendo deterioro para el caso particular en que la demanda sigue un patrón uniforme, es decir, presenta una tasa constante. La resolución de la correspondiente ecuación, que caracteriza la solución óptima, ha requerido utilizar un método numérico, el cual nos ha permitido obtener el mínimo coste total medio, siendo éste una función exponencial del ciclo de inventario óptimo.

Hemos ilustrado el método teórico con diferentes resultados obtenidos del correspondiente cálculo aplicado a diversos ejemplos, introduciendo una discusión sobre el análisis de sensibilidad del modelo, que ha sido objeto de estudio, con respecto a los parámetros de entrada.

Teniendo en cuenta un índice de patrón de demanda potencial, los resultados indican que el costo total óptimo por unidad de tiempo aumenta a medida que la fracción de deterioro aumenta. Por su parte, se observa que el periodo óptimo de gestión disminuye al aumentar dicha fracción. Además, dada una fracción de deterioro, el ciclo de inventario óptimo aumenta a medida que el índice de patrón de demanda crece; sin embargo, el costo mínimo decrece a medida que aumenta dicho índice.

Lo anterior se debe a dos circunstancias: por una parte, a que el costo de almacenamiento disminuye cuando el índice de patrón de demanda crece y, por otra, a que el coste de las unidades deterioradas por unidad de tiempo disminuye cuando la proporción de deterioro tiende a cero. Hemos comprobado también que la función de coste es decreciente con respecto al índice de patrón de demanda potencial y que el costo total por unidad de tiempo aumenta a medida que aumenta la proporción de deterioro.

A continuación, hemos formulado la política óptima cuando el índice del patrón de demanda potencial y el costo de pedido varían, adoptando diferentes valores, mientras que el resto de los parámetros se mantienen constantes. Hemos demostrado que el costo de mantener el inventario disminuye cuando aumenta el patrón de demanda potencial y el costo de pedido disminuye a medida que su costo unitario decrece. Asimismo, se constata que el costo total por unidad de tiempo se reduce a medida que decrece el costo unitario de reposición.

Por otra parte, hemos analizado la sensibilidad de la política óptima de inventario con respecto al coste de mantenimiento, comprobando que el valor del coste total aumenta a medida que se incrementa el coste unitario de mantenimiento y disminuye cuando el índice de patrón de demanda potencial crece.

Además, calculamos la política óptima cuando varía el costo de cada unidad deteriorada, manteniendo constantes los demás parámetros. Así, se confirma que el costo total crece a medida que aumenta el costo unitario de deterioro. También, se verifica que el costo total es una función decreciente con respecto al índice de patrón de demanda potencial. Por lo tanto, el costo mínimo por unidad de tiempo se produce cuando el índice del patrón y el costo unitario de deterioro alcanzan su valor máximo. A su vez, en ese caso, el ciclo de inventario óptimo es el más largo de los ciclos analizados para los diferentes valores de esos parámetros.

En cuanto a la evolución del coste total mínimo y el ciclo óptimo de inventario cuando hacemos variar la tasa de demanda, dejando el resto de los parámetros constantes, hemos confirmado que el coste total aumenta a medida que dicha tasa de demanda se incrementa.

Seguidamente, hemos estudiado el sistema de inventario con patrón de demanda potencial, considerando una tasa constante de deterioro, existencia de roturas y clientes dispuestos a esperar a la llegada de la siguiente reposición. Aquí, el costo total de inventario incluye el costo de realización del pedido, el costo de almacenamiento, el costo de rotura con demanda diferida en el tiempo, así como el costo de las unidades deterioradas.

En este caso, hemos comprobado que no existe una fórmula explícita para determinar las variables óptimas y poder obtener, de esa manera, la solución deseada. En su lugar, se ha de resolver una ecuación no lineal mediante el uso de algún método numérico, lo cual nos ha permitido calcular la cantidad económica de pedido, la duración óptima del ciclo de inventario y el costo mínimo de gestión de stocks. En ese sentido, hemos presentando algunos ejemplos que reflejan la variación de la política óptima cuando se modifica el porcentaje de deterioro de los artículos.

Del examen de los efectos del cambio en el parámetro de deterioro sobre el período óptimo de programación, el tamaño del lote económico y el costo mínimo de inventario, se puede observar que, el aumento de dicho parámetro de deterioro conduce a una disminución en el período de programación y en la cantidad de pedido o tamaño del lote. Sin embargo, cuando aumenta el valor del parámetro de deterioro, el costo total de inventario por unidad de tiempo se incrementa. Ello es debido a que el coste de pedido y el costo de las unidades deterioradas aumentan en mayor medida que lo que disminuyen los otros costes.

Posteriormente, hemos calculado las políticas óptimas de inventario para dos sistemas deterministas con patrón de demanda potencial y reposición no instantánea.

En primer lugar, hemos analizado un sistema de inventario de tamaño del lote con tasa de reposición uniforme y patrón de demanda potencial, en el cual las roturas no están permitidas. Teniendo en cuenta el valor del índice de patrón de demanda potencial, se han obtenido diferentes soluciones óptimas. Ello nos ha permitido encontrar la cantidad de producción económica (EPQ) que minimiza el costo total de inventario, siendo las variables de decisión el tamaño del lote y el punto de pedido. Podemos afirmar que esas soluciones óptimas obtenidas extienden y generalizan a la fórmula clásica de la cantidad de producción económica (EPQ) cuando la demanda es contante (véase Silver et al. (1998), Zipkin (2000) o Hillier y Lieberman (2001)).

Hemos observado que, cuando el índice de patrón de demanda es menor que la unidad, el tamaño del lote óptimo es menor que la cantidad de producción económica asociada al sistema de inventario con patrón de demanda uniforme. Sin embargo, en ese caso, el coste mínimo correspondiente es mayor que el mínimo coste asociado al sistema de inventario con tasa de demanda uniforme.

Por su parte, si el índice de patrón de demanda es mayor que uno, entonces la solución óptima puede ser mayor, igual o menor que la cantidad de producción económica clásica para el sistema con patrón uniforme. Ello depende de los valores de los siguientes parámetros: tasa de reposición, tasa promedio de la demanda e índice de patrón de demanda potencial. De ahí que, si se satisface cierta condición sobre esos parámetros, entonces el tamaño óptimo del lote es mayor o igual a la cantidad económica de producción clásica para la tasa de demanda uniforme. No obstante, en ese caso, el coste mínimo para el sistema de inventario es menor que el mínimo coste asociado al sistema de inventario con demanda uniforme.

Por otro lado, si el índice de patrón de demanda es mayor que uno y la restricción comentada sobre los parámetros no se satisface, entonces el tamaño del lote óptimo sería inferior a la cantidad económica de producción clásica para una tasa de demanda uniforme. Además, el costo mínimo para el sistema de inventario sería mayor o igual que el mínimo coste asociado al sistema de inventario con demanda uniforme.

También, se ha analizado el caso especial en el cual la reposición es instantánea, demostrando que la solución óptima obtenida es igual a la política óptima propuesta para el sistema de inventario con patrón de demanda potencial y roturas no permitidas, con lo cual se extiende y generaliza dicho modelo.

En segundo lugar, hemos estudiado un sistema de inventario de tamaño del lote y punto de pedido, donde la demanda de los clientes sigue un patrón potencial y la tasa de producción es dependiente de la tasa de demanda. Hemos considerado que se admiten roturas y que éstas son recuperables. También, hemos asumido que la tasa de producción dirigida a reponer el stock es proporcional a la tasa de demanda, por lo cual, si aumentase la demanda, entonces, el ratio de producción también debería aumentar. Por lo tanto, siempre se añade cierta cantidad neta al inventario durante el período de reposición. Cuando ese período finaliza, comienza a disminuir el nivel de existencias en el inventario, debido a los efectos de la demanda, hasta que se completa el período de programación o gestión.

Para resolver el problema de inventario hemos propuesto un enfoque algorítmico que nos ha permitido calcular la política óptima. De esa manera, a partir de la fórmula óptima de tamaño del lote económico y el costo de inventario mínimo, se deduce fácilmente que si el costo del pedido o la tasa de demanda aumentan, entonces el tamaño económico de la reposición disminuye, mientras que se incrementa el costo mínimo de inventario. También, a partir de los resultados experimentales obtenidos, se puede observar que si el parámetro de la tasa de producción aumenta, entonces, el tamaño económico de la reposición disminuye, mientras que el coste mínimo de inventario se incrementa.

Además, en este modelo hemos trabajado dos casos especiales: por una parte, hemos planteado un patrón de demanda uniforme cuyo resultado nos ha permitido extender y generalizar al sistema de inventario determinista con tasa de producción uniforme y roturas recuperables (ver Naddor (1966), Silver et al. (1988)

y Zipkin (2000)); por otra parte, hemos supuesto una tasa de producción o reposición infinita, que nos lleva a extender y generalizar al sistema de inventario con patrón de demanda potencial, reposición instantánea y roturas recuperables.

Al finalizar la presentación de cada uno de esos dos últimos modelos estudiados, hemos ilustrado los resultados obtenidos a través de ejemplos que incorporan diferentes valores de los parámetros. En cada caso, hemos recogido la política óptima que debería aplicarse y el costo mínimo correspondiente.

Por último, en lo referente a las implicaciones empresariales, en este trabajo de investigación se han propuesto nuevos modelos de inventarios que, bajo determinadas hipótesis y restricciones, permiten una mejor aproximación a la realidad en materia de gestión de stocks, pudiendo ayudar a las organizaciones, de manera significativa, en la adopción de decisiones en los campos de la logística, el marketing y la distribución comercial. Los resultados obtenidos nos han permitido realizar algunas aportaciones que contribuyen a determinar las políticas óptimas de gestión de stocks, proporcionando una mayor eficacia y eficiencia en las operaciones empresariales, así como un mejor servicio al cliente.

Futuras líneas de investigación

Conscientes de las limitaciones impuestas por los diferentes supuestos o hipótesis contempladas en los sistemas de inventario estudiados, así como las oportunidades encontradas en nuestro análisis, vemos conveniente sugerir nuevas líneas de investigación que permitan extender el trabajo realizado. Así, destacamos como futuras investigaciones las propuestas que planteamos a continuación:

- Estudio de modelos de inventario con patrón de demanda potencial, en los cuales se considere que solo un porcentaje de los clientes están dispuestos a esperar a la llegada de la siguiente reposición para satisfacer sus necesidades. De esa forma, se recuperaría una parte de la demanda, mientras que la otra se traduciría en pérdida de ventas.

- Análisis de sistemas de inventario de cantidad económica de pedido con patrón de demanda potencial y deterioro, cuando las roturas son permitidas y asumiendo que éstas se traducirán en pérdida de ventas.

- Determinación de la política óptima para sistemas de inventario donde se suprime la restricción de la tasa de deterioro constante de los artículos, permitiendo que dicha tasa de deterioro sea una función dependiente del tiempo.

- Desarrollo de modelos de inventario con reposición uniforme y patrón de demanda potencial, pero asumiendo que las roturas están permitidas.

- Formulación de sistemas de cantidad económica de producción (EPQ) en los que se asuma una tasa de deterioro para los artículos.

- Estudio de modelos de inventario de cantidad económica de producción (EPQ) con patrón de demanda potencial y ratio de producción proporcional a la tasa de demanda, asumiendo roturas y donde las mismas se traducen en pérdida de ventas.

- Obtención de la política óptima de inventario con patrón de demanda potencial cuando estén permitidos los descuentos por volumen de compras. También, otra posible alternativa sería extender los modelos de gestión de inventarios propuestos, considerando la posibilidad de permitir retraso en los pagos.

- Desarrollo de los modelos de cantidad económica de producción con patrón de demanda potencial, considerando que la producción genera un porcentaje de artículos defectuosos, los cuales deberían ser desechados o reparados antes de ser incluidos en el inventario.

- Estudio y resolución de sistemas de cantidad económica de pedido, incluyendo costos de formación y considerando un patrón potencial de demanda, teniendo en cuenta que la formación de los operarios encargados de la manipulación de los artículos en el inventario, así como de los empleados dedicados a la gestión de los pedidos y la reposición de los artículos, hace que disminuyan los costes de mantenimiento y reposición de los bienes.

- Análisis de modelos de tamaño del lote óptimo, considerando costos derivados de la aplicación de técnicas de marketing. Ello conlleva que la demanda potencial de artículos aumentaría como consecuencia del gasto dirigido a la aplicación de los diferentes instrumentos operativos del marketing como, por ejemplo, el gasto derivado de la publicidad. Por tanto, en la función de demanda habría de incluirse una variable que especifique el gasto económico dedicado a la realización de las políticas de marketing orientadas a la comercialización de los productos de la organización.

Finalmente, teniendo en cuenta la importancia de la investigación aplicada y la transferencia de conocimiento, nos gustaría comentar que, mediante el uso y la aplicación de estos modelos de gestión de inventarios, se podrían efectuar diferentes análisis dirigidos a la obtención de resultados empresariales cuantitativos concretos, los cuales podrían permitirnos comparar las políticas actuales de gestión implementadas por las organizaciones con las políticas óptimas propuestas en los modelos planteados. De esa manera se facilitaría la adopción de las decisiones empresariales, necesarias para la mejora de la eficacia y la eficiencia en la gestión comercial operativa de las organizaciones consideradas.

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA

Abdul, I. y Murata, A. (2011). An inventory model for deteriorating items with varying demand pattern and unknown time horizon. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 2, pp. 61 - 86.

Ackoff, R. y Sasieni, M. (1971). *Fundamentos de Investigación de Operaciones*. Limusa-Wiley. México.

Aggarwal, S.P. (1978). A note on an order-level inventory model for a system with constant rate of deterioration. *Opsearch*, 15, pp. 184 - 187.

American Marketing Association (1985). *Marketing News*, 19 (5).

American Marketing Association (2008). *Dictionary of Marketing Terms*.

Anaya Tejero, J.J. (2011). *Logística integral. La gestión operativa de la empresa*. ESIC. Madrid.

Antier, P. (1969). *Manual práctico de la gestión de stocks.* Ibérico Europea. Madrid.

Arbones, E. (1992). *Logística empresarial*. Marcombo. Barcelona.

Bahari-Kashani H. (1989). Replenishment schedule for deteriorating items with time-proportional demand. *Journal of the Operational Research Society*, 40 (1), pp. 75 - 81.

Baker, R.C. y Urban, T.L. (1988a). A deterministic inventory system with an inventory-level-dependent demand rate. *Journal of the Operational Research Society*, 39, pp. 823 - 831.

Baker, R.C. y Urban. T.L. (1988b). Single-period inventory dependent demand models. *Omega*, 16, pp. 605 - 607.

Balkhi, Z.T. y Benkherouf, L. (2004). On an inventory model for deteriorating items with stock dependent and time-varying demand rates. *Computer and Operations Research*, 31, pp. 223 - 240.

Balkhi, Z.T. y Tadj L. (2008). A generalized economic order quantity model with deteriorating items and time varying demand, deterioration and costs. *International Transactions in Operational Research*, 15, pp. 509 - 517.

Ballou, R.H. (1991). *Logística empresarial, control y planificación*. Díaz de Santos. Madrid.

Ballou, R.H. (2004). *Logística. Administración de la cadena de suministro*. Pearson Educación. Prentice-Hall. México.

Barbosa, L.C. y Friedman, M. (1978). Deterministic inventory lot size models - a general root law. *Management Science*, 24, pp. 819 - 826.

Bello, L., Vázquez R. y Trespalacios J.A. (1993). *Investigación de mercados y estrategias de marketing*. Civitas. Madrid.

Bose, S., Goswami, A. y Chauddhuri, K.S. (1995). An EOQ model for deteriorating items with linear time-dependent demand rate and shortages under inflation and time discounting. *Journal of the Operational Research Society*, 46, pp. 771 – 782.

Bowersox, D.J. (1974). *Logistical Management: a systems integration of physical distribution management, material management, and logistical coordination*. New York: Macmillan Publishing Co.

Bowersox, D.J., Closs, D.J. y Bixby, M. (2006). *Supply chain logistics management*. McGraw-Hill. Irwin. New York.

Bowersox, D.J., Closs, D.J. y Stank, T.P. (2000). Ten mega-trends that will revolutionize supply chain logistics. *Journal of Business Logistics*, 2 (2), pp. 1 - 16.

Bueno, E., Cruz, I. y Durán, J. J. (1996). *Economía de la Empresa. Análisis de las decisiones empresariales*. Pirámide. Madrid.

Cárdenas-Barrón, L.E. (2008). Optimal manufacturing batch size with rework in a single-stage production system-a simple derivation. *Computers and Industrial Engineering*, 55, pp. 758 - 765.

Cárdenas-Barrón, L.E. (2009a). On optimal batch sizing in a multi-stage production system with rework consideration. *European Journal of Operational Research*, 196, pp. 1238 - 1244.

Cárdenas-Barrón, L.E. (2009b). Economic production quantity with rework process at a single-stage manufacturing system with planned backorders. *Computers and Industrial Engineering*, 57, pp. 1105 - 1113.

Carrallo, A. (1978). *Logística comercial*. ESIC. Madrid.

Casanovas, A. y Cuatrecasas, L. (2001). *Logística Empresarial*. Gestión 2000. Barcelona.

Casares, J. (2003). El nuevo paisaje del consumo. *Distribución y Consumo*, 70, pp. 5 - 10.

Casares, J. y Martín, V. (2003). Evolución de la distribución comercial y de los hábitos de compra: del dualismo al poliformismo. *Información Comercial Española*. Revista de Economía, 811, pp. 323 - 347.

Casares, J., Pablo, A., Muñoz, P. y Rebollo A. (1990). La distribución comercial en España. *Papeles de Economía Española*, 42, pp. 251 - 261

Casares, J. y Rebollo, A. (2005). *Distribución comercial*. Thomson-Civitas. Madrid.

Castán, J.M., Cabañero, C. y Nuñez, A. (2000). *La logística en la empresa*. Pirámide. Madrid.

Castañeda, J. (1979). *Lecciones de Teoría Económica*. Aguilar. Madrid.

Chang H.J. y Dye, C. Y. (1999). An EOQ model for deteriorating items with time varying demand and partial backlogging. *Journal of the Operational Research Society*, 50 (11), pp. 1176 - 1182.

Chang, C.T., Goyal, S.K. y Teng, J.T. (2006). On an EOQ model for perishable items under stock-dependent selling rate and time-dependent partial backlogging by Dye and Ouyang. *European Journal of Operational Research*, 174, pp. 923 - 929.

Chang, C.T., Teng, J.T. y Goyal, S.K. (2010). Optimal replenishment policies for non-instantaneous deteriorating items with stock-dependent demand. *International Journal of Production Economics*, 123, pp. 62 - 68.

Chase, R.B. y Aquilano, N.J. (1994). *Dirección y administración de la producción y las operaciones*. Addison-Wesley Iberoamericana. México.

Chern, M.S., Yang, H.L., Teng, J.T. y Papachristos, S. (2008). Partial backlogging inventory lot-size models for deteriorating items with fluctuating demand under inflation. *European Journal of Operational Research*, 191, pp. 127 - 141.

Christopher, M. (1994). *Logística y aprovisionamiento*. Folio. Barcelona.

Chung, K.J. (2003). An algorithm for an inventory model with inventory-level-dependent demand rate. *Computers and Operations Research*, 30, pp. 1311 - 1317.

Colerus, E. (1972). *Breve historia de las matemáticas*. Altamira, 1 y 2. Madrid.

Council of Logistics Management (1998). *What It´s About.* Illinois: Oak Brook, IL.

Cruz Roche, I. (1991). *Fundamentos de Marketing*. Ariel. Madrid.

Cuatrecasas, L. (1999). *Gestión de stocks y las necesidades de materiales*. Gestión 2000. Barcelona.

Cuatrecasas, L. (2000). *Organización de la producción y dirección de operaciones. Sistemas actuales de gestión eficiente y competitiva.* Centro de Estudios Ramón Areces. Madrid.

Datta, T.K. y Pal, A.K. (1988). Order level inventory system with power demand pattern for items with variable rate of deterioration. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 19, pp. 1043 - 1053.

Datta, T.K. y Pal, A.K. (1990). A note on an inventory model with inventory-level-dependent demand rate. *Journal of the Operational Research Society*, 41, pp. 971 - 975.

Datta, T.K. y Pal, A.K. (1992). A note on a replenishment policy for an inventory model with linear trend in demand and shortages. *Journal of the Operational Research Society*, 43, pp. 993-1001.

Dave, U. (1989). On a heuristic inventory replenishment rule for items with linearly increasing demand incorporating shortages. *Journal of Operational Research Society*, 40, pp. 827 - 830.

Dave, U. y Patel, R.K. (1981). (T,Si) policy inventory model for deteriorating items with time proportional demand. *Journal of the Operational Research Society*, 32, pp. 137 - 142.

Dawson, J. y Frasquet, M. (2006). Factores determinantes del nuevo papel de la distribución minorista en Europa. *Información Comercial Española*, 828, pp. 11 - 34.

Deb, M. y Chaudhari, K. (1987). A note on the heuristic for replenishment of trended inventories considering shortages. *Journal of Operational Research Society*, 38, pp. 459 - 463.

Debreu, G. (1991). The mathematization of economic theory. *American Economic Review*, 81, pp. 1 - 7.

De Juan Vigaray, M.D. (2005). *Comercialización y retailing. Distribución comercial aplicada*. Pearson Educación. Prentice Hall. Madrid.

Deng, P.S., Yen, C.P., Tung, C.T., Yu, Y.C. y Chu, P. (2006). A technical note for the deteriorating inventory model with exponential time-varying demand and partial backlogging. *International Journal of Information and Management Sciences*, 17, pp. 101 - 108.

Deng, P.S., Lin, R.H.J. y Chu. P. (2007). A note on the inventory models for deteriorating items with ramp type demand rate. *European Journal of Operational Research*, 178, pp. 112 - 120.

Díez de Castro, E.C. (1992). *Logística comercial*. Editorial McGraw-Hill. Madrid.

Díez de Castro, E.C. y Fernández, J. C. (1993). *Distribución comercial*. McGraw-Hill. Madrid.

Díez de Castro, E.C. (1997). *Distribución comercial*. McGraw-Hill. Madrid.

Domínguez Machuca, J.A., García, S., Ruiz, A. y Álvarez Gil, M.J. (1995). *Dirección de operaciones: aspectos estratégicos*. McGraw-Hill. Madrid.

Donaldson, W.A. (1977). Inventory replenishment policy for a linear trend in demand: an analytic solution. *Operational Research Quarterly*, 28, pp. 663 - 670.

Dye, C.Y. (2004). A note on an EOQ model for items with Weibull distributed deterioration, shortages and power demand pattern. *International Journal of Information and Management Sciences*, 15, pp. 81 - 84.

Dye, C.Y. y Ouyang, L.Y. (2005). An EOQ model for perishable items under stock-dependent selling rate and time-dependent partial backlogging. *European Journal of Operational Research*, 163, pp. 776 - 783.

Dye, C.Y., Ouyang, L.Y. y Hsieh, T.P. (2008). A note on EOQ models for perishable items under stock dependent selling rate. *Information and Management Sciences*, 19, pp. 519 - 534.

Esteban Talaya A, García de Madariaga, J., Narros, M.J., Olarte, C., Reinares, E.M. y Saco, M. (2008). *Principios de marketing*. ESIC. Madrid.

Eppen, G.D. y Gould E.J. (2000). *Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa*. Prentice-Hall Hispanoamericana. México.

Fernández, A, Martínez, E. y Rebollo, A. (2007). La reorganización de los canales de comercialización. Nuevos enfoques del marketing y la creación de valor. *Mediterráneo Económico, Colección de Estudios Socioeconómicos*, Cajamar, 11, pp. 195 - 210.

Fernández, A., Martínez, E. y Rebollo, A. (2008). Tendencias de evolución de la distribución comercial en España. *Distribución y Consumo*, 101, pp. 5 - 17.

Fernández Pirla, J. M. (1981). *Economía y gestión de la empresa*. ICE. Madrid.

Flavian C., Martinez E. y Polo Y. (1997). La distribución comercial en España: evolución reciente y perspectivas de futuro. *Boletín ICE Económico*, 2558, pp. 17 - 28.

Ghare, P.M. y Schrader, G.F. (1963). A model for an exponential decaying inventory. *Journal Industrial Engineering*, 14, pp. 238 - 243.

Ganeshan, R. y Harrison, T. P. (1995). *An introduction to supply chain management*. Department of Management Science and Information Systems. Penn Estate University. USA.

García Echevarría, S. (1975). *Introducción a la Economía de la Empresa*. Libros de lectura. CECA. Madrid.

García Sabater, J.P., Cardós, M., Albarracín, G. y García Sabater, J.J. (2005). *Gestión de stocks de demanda independiente*. Universidad Politécnica de Valencia (UPV). Valencia.

Ghosh, S.K. y Chaudhuri, K.S. (2005). An EOQ model for a deteriorating item with trended demand and variable backlogging with shortages in all cycles. *Advanced Modelling and Optimization*, 7, pp. 57 - 68.

Giri, B.C., Goswami, A. y Chaudhuri, K.S. (1996). An EOQ model for deteriorating items with time varying demand and costs. *Journal of the Operational Research Society*, 47, pp. 1398 - 1405.

Gómez, M. y Acevedo, J.A. (2000). *Logística del aprovisionamiento*. Corporación John F. Kennedy. Bogotá.

Goel, V.P. y Aggarwal, S. P. (1981). Order level inventory system with power demand pattern for deteriorating items. *Proceedings of the All India Seminar on Operational Research and Decision Making*, University of Delhi, New Delhi, pp. 19 - 34.

Goswami, A. y Chaudhuri, K.S. (1991). EOQ model for an inventory with a linear trend in demand and finite rate of replenishment considering shortages. *International Journal of Systems Science*, 22, pp. 181 - 187.

Goyal, S.K., Morin, D. y Nebebe, F. (1992). The finite horizon trended inventory replenishment problem with shortages. *Journal of Operational Research Society*, 43, pp. 1173 - 1178.

Goyal, S.K. y Giri, B.C. (2001). Recent trends in modeling of deteriorating inventory. *European Journal of Operational Research*, 134, pp. 1 - 16.

Gutemberg, E. (1973). *Economía de la Empresa. Teoría y práctica de la gestión empresarial*. Deusto. Bilbao.

Gutierrez, G. y Prida, B. (1998). *Logística y distribución fisica*. McGraw-Hill. Madrid.

Hadley, G. y Whitin, T.M. (1963). *Analysis of inventory systems*. Prentice-Hall. New Jersey.

Harris, F. W. (1913a). How many parts to make at once. Factory, *The Magazine of Management*, 10, 135 - 136, 152.

Harris, F. W. (1913b). How much stock to keep on hand. Factory, *The Magazine of Management*, 10, 240 - 241, 281 - 284.

Hillier, F. S. y Lieberman, G.J. (2006). *Investigación de Operaciones*. McGraw-Hill. México.

Hollier, R.H. y Mak, K.L. (1983). Inventory replenishment policies for deteriorating items in a declining market. *International Journal of Production Research*, 21, pp. 813 - 826.

Hopp, W. J. (2004). *Supply chain science*. McGraw-Hill. New York. USA.

Hsu, P.H., Teng, H.M., y Wee, H.M. (2009). Optimal lot sizing for deteriorating items with triangle-shaped demand and uncertain lead time. *European Journal of Industrial Engineering*, 3, pp. 247 - 260.

Hung, K.C. (2011). An inventory model with generalized type demand, deterioration and backorder rates. *European Journal of Operational Research*, 208, pp. 239 - 242.

Jaggi, C.K., Aggarwal, K.K. y Goel, S.K. (2006). Optimal order policy for deteriorating items with inflation induced demand. *International Journal of Production Economics*, 103, pp. 707 - 714.

Jeong I-J. (2011). A dynamic model for the optimization of decoupling point and production planning in a supply chain. *International Journal of Production Economics*, 131 (2), pp. 561 - 567.

Jolai, F., Tavakkoli-Moghaddam, R., Rabbani, M. y Sadoughian, M.R. (2006). An economic production lot size model with deteriorating items, stock-dependent demand, inflation, and partial backlogging. *Applied Mathematics and Computation*, 181, pp. 380 - 389.

Kent, J.L. y Flint, D.J. (1997). Perspectives on the evolution of logistic thought. *Journal of Business Logistics*, 18 (2), pp. 15 - 29.

Khmelnitsky, E. y Gerchak, Y. (2002). Optimal control approach to production systems with inventory-level-dependent demand. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47, pp. 289 - 292.

Kotler, P., Cámara, D., Grande, I. y Cruz I. (1995). *Dirección de marketing. Análisis, planificación, implementación y control*. Pearson Educación. Prentice-Hall. Madrid.

Kotler, P., Cámara, D., Grande, I. y Cruz I. (2000). *Dirección de marketing*. Edición del milenio. Pearson Educación. Prentice-Hall. Madrid.

Kotler, P. y Amstrong, G. (2003). *Fundamentos de marketing*. Pearson Educación. Prentice-Hall. México.

Kotler, P., Lane, K., Cámara, D. y Mollá, A. (2006). *Dirección de marketing*. Pearson Educación. Prentice-Hall. Madrid.

Lambert, D.M., Stock, J.R. y Ellram, L.M. (1998). *Fundamentals of logistics management*. McGraw-Hill. New York.

Lambin, J. J. (1993). *Marketing estratégico*. McGraw-Hill Iberoamericana. México.

Lee, W.C. y Wu, J.W. (2002). An EOQ model for items with Weibull distributed deterioration, shortages and power demand pattern. *International Journal of Information and Management Sciences*, 13, pp. 19 - 34.

Lee, W.C. y Wu, J.W. (2004). A note on EOQ model for items with mixtures of exponential distribution deterioration, shortages and time-varying demand. *Quality and Quantity*, 38, pp. 457 - 473.

Levy, D.L. (1997). Lean production in an international supply chain. *Sloan Management Review*, 38 (2), pp. 94 - 101.

Li, R., Lan, H. y Mawhinney, J.R. (2010). A review on deteriorating inventory study. *Journal of Service Science and Management*, 3, pp. 117 - 129.

Libro Verde del Comercio (1996). *Libro Verde del Comercio.* Comisión Europea. Bruselas.

Libro Blanco del Comercio (1996). *Libro Blanco del Comercio*. Comisión Europea. Bruselas.

Liao, J.J. y Huang, K.N. (2010). Deterministic inventory model for deteriorating items with trade credit financing and capacity constraints. *Computers and Industrial Engineering*, 59, pp. 611 - 618.

Lin, G.C., Kroll, D.E. y Lin, C.J. (2006). Determining a common production cycle time for an economic lot scheduling problem with deteriorating items. *European Journal of Operational Research*, 173, pp. 669 - 682.

Lin Y. y Lin C. (2006). Purchasing model for deteriorating items with time-varying demand under inflation and time discounting. *International Journal Advanced Manufacturing Technology*, 27, pp. 816 - 823.

Maihami, R. y Kamalabadi, I.N. (2012). Joint pricing and inventory control for non-instantaneous deteriorating items with partial backlogging and time price dependent demand. *International Journal of Production Economics*, 136 (1), pp. 116 – 122.

Magee, J. F., Copacino, W. C. y Rosenfield, D.B. (1973). *Modern logistics management*. John Wiley and Sons. New York.

Martin Armario, E. (1993). *Marketing*. Ariel Economía. Barcelona.

Martínez. F.J. y Maraver, G. (2009). *Distribución comercial*. Delta. Madrid.

Mathur, K. y Solow, D. (1996). *Investigación de Operaciones. El arte de la toma de decisiones*. Prentice Hall. México.

Mehta, N.J. y Shah, N.H. (2003). An inventory model for deteriorating items with exponentially increasing demand and shortages under inflation and time discounting. *Investigação Operacional*, 23, pp. 103 - 111.

Mentzer, J.T., Flint, D.J. y Hult, T.M. (2001). Logistics service quality as a segment-customized process. *Journal of Marketing*, 65(4), 82 - 104.

Mentzer, J.T., Min, S. y Bobbitt, L.M. (2004). Toward a unified theory of logistics. *International Journal of Physical Distribution and Logistics Management*, 34 (8), pp. 606 - 627.

Miller, D. y Starr, M.K. (1960). *Executive decisions and Operations Research*. Prentice-Hall. Englewood Cliffs. New York.

Miquel Peris, S., Bigne, E. y Molla, A. (1995). *Introducción al marketing*. McGraw-Hill. Madrid.

Miquel Peris, S, Parra Guerrero, F., Lhermie, C. y Miquel Romero, M. J. (2008). *Distribución comercial*. ESIC. Madrid.

Miranda, F.J., Rubio, S., Chamorro, A. y Bañegil, T.M. (2005). *Manual de dirección de operaciones*. Thomson. Madrid.

Misra, R.B. (1975). Optimum production lot-size model for a system with deteriorating inventory. *International Journal of Production Research*, 13, pp. 495 - 505.

Mitra, A., Cox, J.F. y Jesse, R.R. (1984). A note on deteriorating order quantities which a linear trend in demand. *Journal of the Operational Research Society*, 35, pp. 141 - 144.

Monks, J.G. (1994). *Administración de operaciones.* McGrall-Hill Interamericana. México.

Montero, I. y Oreja, J.R. (1998). *Las empresas de comercio interior en Canarias: diagnóstico y alternativas estratégicas.* El comercio minorista en canarias. Consejería de Economía y Hacienda-Fyde Cajacanarias. IUDE, pp. 69 - 73.

Moon, I., Giri, B.C. y Ko, B. (2005). Economic order quantity models for ameliorating/deteriorating items under inflation and time discounting. *European Journal of Operational Research*, 162, pp. 773 - 785.

Naddor, E. (1966). *Inventory Systems*. John Wiley and Sons. New York.

Norbert, E. (1981). *Gestión de stocks*. Deusto. Bilbao.

Oreja Rodríguez J.R. (1993). *Organización de empresas: teorías y casos*. IUDE. Serie docente nº 93.01. La Laguna. Tenerife.

Park, T.A. y King, R.P. (2007). Evaluating retailing efficiency: the role of information technology. *Journal of Productivity Analysis*, 27, pp. 101 - 113.

Parra Guerrero F. (2005). *Gestión de stocks*. ESIC. Madrid.

Pau C. J. y Navascués, G. R. (2001). *Manual de logística integral*. Díaz de Santos. Madrid.

Pentico, D.W. y Drake, M.J. (2009). The deterministic EOQ with partial backordering: a new approach. *European Journal of Operational Research*, 194, pp. 102 - 113.

Prída, B. y Gutiérrez, C. G. (1995). *Logística de aprovisionamiento: el cambio en las relaciones proveedor-clientes, un nuevo desafío para la empresa del siglo XXI*. McGraw-Hill Interamericana de España. Madrid.

Porter, M. E. (2002). *Ventaja competitiva*. CECSA. México.

Prawda, J. (1991). *Métodos y modelos de Investigación de Operaciones*. I y II. Limusa. México.

Raafat, F. (1991). Survey of literature on continuously deteriorating inventory model. *Journal of the Operational Research Society*, 42, pp. 27 - 37.

Rajeswari, N. y Vanjikkodi, T. (2011). Deteriorating inventory model with power demand and partial backlogging. *International Journal of Mathematical Archive*, 2, pp. 1495 - 1501.

Rambaux, A. (1988). *Gestión económica de los stocks*. Dunod. París.

Rebollo, A. (1993). Clasificación de las formas comerciales: el producto-establecimiento. *Distribución y Consumo*, 10, pp. 10 - 18.

Rebollo, A. (1998). Factores de evolución en la distribución minorista. *Distribución y Consumo*, 42.

Resh, M., Friedman, M., y Barbosa, L.C. (1976). On a general solution of the deterministic lot size problem with time-proportional demand. *Operations Research*, 24 (4), pp. 718 - 725.

Rios, S. (1995). *Modelización*. Alianza Universidad. Madrid.

Rios, S., Mateos, A., Bielza, M.C. y Jimenéz, A. (2004). *Investigación Operativa. Modelos deterministas y estocásticos*. Centro de Estudios Ramón Areces. Madrid.

Ritchie, E. (1984). The EOQ for linear increasing demand: a simple optimal solution. *Journal of the Operational Research Society*, 35, pp. 949 - 952.

Rodríguez Castellanos A., García Merino J.D. y Peña Cerezo, M.A (2005). La metodología científica en Economía de la Empresa en la actualidad. Universidad de Vigo. *Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa*, 11 (2), pp. 143 - 162.

Roux, M. (2009). *Manual de logística para la gestión de almacenes*. Gestión 2000. Barcelona.

Roychowdhury M. y Chaudhuri, K.S. (1983). An order level inventory model for deteriorating items with finite rate of replenishment. *Opsearch*, 20, pp. 99 - 106.

Rufin, R. (2010). *Marketing*. UNED. Sanz y Torres. Madrid.

Rushton, A. y Oxley, J. (1989). *Handbook of logistics and distribution management*. Kogan Page. Reino Unido.

Sainz de Vicuña, J.M. (1996a). Comercio tradicional. Opciones estratégicas. *Distribución y Consumo*, 30, pp. 6 - 29.

Sainz de Vicuña, J.M. (1996b). *La distribución comercial: opciones estratégicas*. Esic. Madrid.

Samanta, G.P. y Roy, A. (2004). A deterministic inventory model of deteriorating items with two rates of production and shortages. *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences*, 20, pp. 205 - 218.

San José, L.A., Sicilia, J. y Garcia-Laguna, J. (2009). A general model for EOQ inventory systems with partial backlogging and linear shortage costs. *International Journal of Systems Science*, 40, 59 - 71.

Sana, S.S. (2010). A production-inventory model in an imperfect production process. *European Journal of Operational Research*, 200, pp. 451 - 464.

Santesmases, M. (1991). *Marketing*. Esic. Madrid.

Santesmases, M. (2012). *Marketing, conceptos y estrategias*. Pirámide. Madrid.

Sarabia, A. (1996). *La Investigación Operativa. Una herramienta para la adopción de decisiones*. UPCO. Madrid.

Servera-Francés, D. (2010). Concepto y evolución de la función logística. *Revista Innovar*, 20 (38), pp. 217 - 234.

Schroeder, R.G. (1992). *Administración de Operaciones: toma de decisiones en la función de operaciones*. McGraw-Hill Interamericana. México.

Shah, N.H. (2009). Vendor's optimal policy for time-dependent deteriorating inventory with exponentially decreasing demand and partial backlogging. *ASOR Bulletin*, 28, pp. 9 - 14.

Shah, Y.K. y Jaiswal, M.C. (1977). An order-level inventory model for a system with constant rate of deterioration. *Opsearch*, 14, pp. 174 - 184.

Shamblin, J.E. y Stevens, G.T. (1975). *Investigación de Operaciones*. McGraw-Hill. México.

Silver, E.A. y Meal, H.C. (1973). A heuristic for selecting lot size quantities for the case of a deterministic time-varying demand rate and discrete opportunities for replenishment. *Production and Inventory Management Journal,* 14, pp. 64 – 74.

Silver E. A., Pyke D.F. y Petersen R.P. (1998). *Inventory management and production planning and scheduling*. John Wiley. New York.

Singh, T.J., Singh, S.R. y Dutt, R. (2009). An EOQ model for perishable items with power demand and partial backordering. *International Journal of Operations and Quantitative Management*, 15, pp. 65 - 72.

Skouri, K., Konstantaras, K., Papachristos, S. y Ganas, I. (2009). Inventory models with ramp type demand rate, partial backlogging and Weibull deterioration rate. *European Journal of Operational Research*, 192, pp. 79 - 92.

Soldevilla, E. (1986). Fuentes y campos científicos de la Economía de la Empresa. *Gestión Científica*, UNED, 2 (1), pp. 5 - 26.

Soldevilla, E. (1987a). Posicionamiento actual de la Economía de la Empresa. *Revista de Economía y Empresa*, 7 (17-18), pp. 13 - 19.

Soldevilla, E. (1995). Metodología de investigación de la Economía de la Empresa. *Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa*, 1 (1), pp. 13 - 63.

Soret los Santos, I. (1999). *Logística y marketing para la distribución comercial*. ESIC. Madrid.

Stanton, W. (1985). *Fundamentos de marketing*. McGraw-Hill. México.

Stoer, J. y Bulirsch, R. (2002). *Introduction to numerical analysis*. Springer-Verlag, New York.

Taha, H.A. (2004). *Investigación de Operaciones, una introducción*. Prentice-Hall. México.

Teng, J.T., Chern, M.S. y Yang, H.L. (1997). An optimal recursive method for various inventory replenishment models with increasing demand and shortage. *Naval Research Logistics*, 44, pp. 791 – 806.

Teng, J.T. y Yang, H.L. (2004). Deterministic economic order quantity models with partial backlogging when demand and cost are fluctuating with time. *Journal of the Operational Research Society*, 55 (5), pp. 495 - 503.

Teng, J.T., Yang, H.L., y Chern, M.S. (2011). Economic order quantity models for deteriorating items and partial backlogging when demand is quadratic in time. *European Journal of Industrial Engineering*, 5, pp. 198 - 214.

Tersine, R. J. (1988). *Principles of inventory and materials management*. New York: North-Holland. New York.

Urban, T.L. (2005). Inventory models with inventory-level-dependent demand: a comprehensive review and unifying theory. *European Journal of Operational Research Society*, 162, pp. 792 - 804.

Vázquez, R. y Trespalacios, J. (1997). *Distribución comercial. Estrategias de fabricantes y detallistas*. Civitas. Madrid.

Vázquez, R. y Trespalacios, J. (2002). *Marketing: estrategias y aplicaciones sectoriales*. Civitas. Madrid.

Vázquez, R. y Trespalacios, J. (2006). *Estrategias de distribución comercial*. Thomson. Madrid.

Ventsel, E.S. (1983). *Investigación de operaciones: problemas, principios, metodología*. MIR. Moscú.

Wagner, H.M. y Whitin, T. (1958). Dynamic version of the economic lot size model. *Management Science*, 5, pp. 89 - 96.

Waters, C.D.J. (1992). *Inventory Control and Management*. John Wiley & Sons. Chichester. England.

Waters, C.D.J. (2001). *Inventory Management*. En Brewer, et. al. (Eds). Handbook of Logistics and Supply Chain Management. Pergamon, Elsevier Science, Ltd.

Whitin, T.M. (1957). *Theory of inventory management*. Princeton University Press. New York.

Widyadana, G.A., Cárdenas-Barrón, L.E. y Wee, H.M. (2011). Economic order quantity model for deteriorating items with planned backorder level. *Mathematical and Computer Modelling*, 54, pp. 1569 - 1575.

Wilson, R. H. (1934). A scientific routine for stock control. *Harvard Bus*, 13, pp. 116 - 128.

Wu, K.S. (2002). Deterministic inventory model for items with time varying demand, Weibull distribution deterioration and shortages. *Yugoslav Journal of Operations Research*, 12, pp. 61 - 71.

Wu, K.S., Ouyang, L.Y. y Yang, C.T. (2006). An optimal replenishment policy for non-instantaneous deteriorating items with stock-dependent demand and partial backlogging. *International Journal of Production Economics*, 101, pp. 369 - 384.

Yan, C., Banerjee, A. y Yang, L. (2011). An integrated production-distribution model for a deteriorating inventory item. *International Journal of Production Economics*, 133, pp. 228 - 232.

Yang, C.T., Ouyang, L.Y., Wu, K.S. y Yen, H.F. (2011). An optimal replenishment policy for deteriorating items with stock-dependent demand and relaxed conditions under limited storage space. *Central European Journal of Operations Research*, 19, pp. 139 - 153.

Zermati, P. (2004). *Gestión de stocks*. Pirámide. Madrid.

Zipkin, P. H. (2000). *Foundations of Inventory Management*. McGraw-Hill. Singapore.

UNIVERSIDAD DE
LA LAGUNA

ANEXO DE FIGURAS, GRÁFICOS Y TABLAS

ANEXO DE FIGURAS, GRÁFICOS Y TABLAS