

Resolução de Exame de Matemática – 12ª. classe

Ano: 2018/ 1ª Época



❖ **Conceitos básicos****Operações sobre proposições lógicas**

Na lógica matemática estuda-se as seguintes operações sobre proposições:

Negação de uma proposição

Conjunção de proposições

Disjunção de proposições

Implicação material

Equivalência material

Expressão algébrica

Uma expressão algébrica diz-se **irracional** quando a variável aparece sob forma de um radicando.

Repare que a expressão do número 3, a variável aparece dentro do radical com índice 3, e a variável aparece também sob forma de denominador, visto que não existem um número real que pode anular o denominador, razão pelo qual todo número real define a expressão dada.

Equação

Já foi dito que uma equação é a comparação de duas expressões designatórias por meio de símbolo de igualdade.

Equação exponencial: é toda equação em que a incógnita aparece sob forma de um expoente de base a , sendo a positivo e diferente de unidade.

Determinantes de sistemas de equações lineares

A representação da forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ chama-se}$$

determinante proveniente de uma matriz de 3 por 3

Exame de Matemática – 12ª classe, Ano: 2018/ 1ª Época
Resoluções

1. Resposta:

Na lógica bivalente existem 7 operações lógicas, sendo todas sete operáveis sobre proposições e condições, as últimas duas operáveis a condições: negação, conjunção, disjunção (inclusiva e exclusiva), equivalência material e implicação material. A operação que é verdadeira quando associa duas proposições lógicas com o mesmo valor lógico é a equivalência material, veja na tabela de verdade que se segue:

p	q	$p \leftrightarrow q$		p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	ou	1	1	1
V	F	F		1	0	0
F	V	F		0	1	0
F	F	V		0	0	1

2. Resposta:

Vamos determinar a negação da proposição $p \Rightarrow q$, mas antes, sabe-se que $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$, negar $p \Rightarrow q$ equivale a negar $\sim p \vee q$, segue então $\sim(\sim p \vee q)$, essa é a negação de uma disjunção, as primeiras leis de De Morgan dizem que a negação transforma a disjunção em conjunção das proposições, assim: $\sim(\sim p \vee q) = \sim\sim p \wedge \sim q$, de acordo com a propriedade da dupla negação temos que $\sim\sim p = p$, logo, $\sim(p \Rightarrow q) = \sim(\sim p \vee q) = p \wedge \sim q$

3. Resposta:

As expressões polinomiais são idênticas se os coeficientes dos termos do mesmo grau são iguais, por exemplo, consideremos os polinómios A e B,

$$A(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \dots + a_n$$

$$B(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + b_3x^{n-3} + \dots + b_n$$

Os polinómios A e B são idênticos se e somente se $a_0 = b_0; a_1 = b_1; a_2 = b_2; a_3 = b_3; a_n = b_n$

Vamos considerar $A(x) = x^3 + 1$ e $B(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)$ para verificar se os polinómios A e B são ou não idênticos, há duas possibilidades: ou factorizar o $A(x)$ e manter o $B(x)$ factorizado, ou desenvolver o $B(x)$ e manter o $A(x)$, assim,

Vamos via primeira possibilidade, pela regra de **Briot- Ruffin**: repare que o número -1, anula o polinómio $A(x)$ assim, $A(x) = x^3 + 0x^2 + 0x + 1$ e $x = -1$

	1	0	0	1
-1				
	1	-1	1	0

Portanto a decomposição em factores do polinómio $A(x)$ fica:

$$A(x) = (x+1)(x^2 - x + 1), \text{ repare que } x^3 + 1 \text{ e } (x+1)(x^2 - x + 1) \text{ são idênticos.}$$

Vamos pela via segunda possibilidade, expansão de $B(x)$: Por aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e/ou subtração, teremos:

$$(x+1)(x^2 - x + 1) \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - x^2 + x - x + 1 \Leftrightarrow x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \Leftrightarrow x^3 + 1$$

4. Resposta:

Uma expressão diz-se algébrica irracional, à expressão cuja variável aparece na expressão sob forma de radicando. Das expressões dadas, a variável aparece sob forma de radicando

na expressão, $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2}$, portanto essa é uma expressão algébrica irracional.

5. Resposta:

Razões trigonométricas de alguns arcos

x	0	30	45	60	90
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tag	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0
ctg	ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	ND

Fórmula fundamental da trigonometria

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Outras relações trigonométricas

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\operatorname{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Módulo ou valor absoluto de um número real

Chama-se módulo ou valor absoluto de um número real x ao próprio número se este for não negativo ou ao seu simétrico se este for negativo.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Equação modular: é toda equação que por meio de princípios de equivalência é redutível a forma:

$$|x| = a$$

A solução da equação acima segue:

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$$

Factorial de um número natural

O factorial de um número natural n é dado por:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$

Exemplo:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$5! = 120$$

A expressão $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{1-x}$ é algébrica irracional, o seu domínio é:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 1-x \geq 0 \wedge x^2-1 > 0\} \Rightarrow 1-x \geq 0 \wedge x^2+1 > 0 \Leftrightarrow 1 \geq x \wedge x^2+1 > 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \wedge x^2+1 > 0$$

A primeira condição é possível se $x \in]-\infty; 1]$ e a segunda condição é possível em $\mathbb{R}$, ou seja é uma condição universal, assim $\forall x \in \mathbb{R} : x^2+1 \geq 0$, o domínio é dado por:

$$D =]-\infty; 1] \cap \mathbb{R} \Leftrightarrow D =]-\infty; 1] \Leftrightarrow x \leq 1$$

Observe isso no eixo real:

**6. Resposta:**

Dada a equação $x^3 + x^2 - 6x = 0$, essa é uma equação cúbica incompleta, vamos calcular as raízes reais da equação $x^3 + x^2 - 6x = 0$ e depois somar essas raízes, colocando em evidência o factor comum e em seguida aplicar a lei de anulamento do produto teremos:

$$x^3 + x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + x - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+3)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x+3 = 0 \vee x-2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = -3 \vee x_3 = 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 + (-3) + 2 = -1 \Rightarrow S = -1$$

7. Resposta:

Considere o sistema de duas equações lineares a duas incógnitas x e y : $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$;

pretende-se calcular o determinante principal Δ ; que se calcula da seguinte maneira:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \Delta = 1 \times (-1) - 1 \times 1 \Leftrightarrow \Delta = -1 - 1 \Leftrightarrow \Delta = -2$$

8. Resposta:

Considere a equação $3^{2x+1} - 1 = 8$, essa equação é uma equação exponencial, vamos resolver-la analiticamente, assim:

Aplicando o princípio da equivalência da adição teremos:

$$3^{2x+1} - 1 = 8 \Leftrightarrow 3^{2x+1} - 1 + 1 = 8 + 1 \Leftrightarrow 3^{2x+1} = 9 \Leftrightarrow 3^{2x+1} = 3^2$$

$f(x) = 3^{2x+1} \wedge g(x) = 3^2$. A primeira função é injectiva em $\mathbb{R}$, pois o gráfico de $f(x)$ intersecta o gráfico da função $g(x)$ em $2x+1 = 2$.

$$2x+1 = 2 \Leftrightarrow 2x = 2-1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \therefore S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$



Permutação

A permutação de n elementos tomados p a p , é dado por:

$$P_n = n! \text{ ou}$$

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$

$$n \equiv p$$

Exemplo:

$$p_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$p_4 = 24$$

Aranjos Simples

Aranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}, n > p$$

Exemplo:

$$A_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} \Leftrightarrow A_2^4 = \frac{4!}{2!}$$

$$A_2^4 = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} \Leftrightarrow A_2^4 = 12$$

Combinação simples

Combinação simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}, n > p$$

Exemplo:

$$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{4!}{2! \times 2!}$$

$$C_2^4 = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 1 \times 2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{12}{2}$$

$$C_2^4 = 6$$

Binómio de Newton

Binómio de Newton é uma expressão que envolve combinação simples, essa expressão é usada para desenvolver os polinómios que aparecem sob forma de binómios potenciais

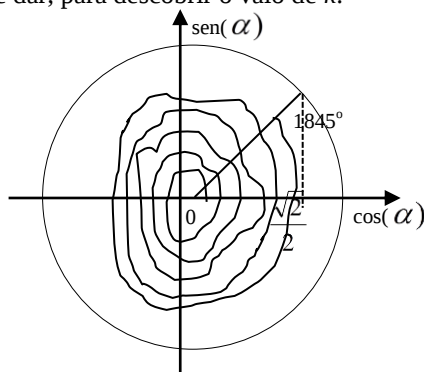
$$(x+y)^n = C_0^n x^n + \dots + C_n^n y^n$$

Definição clássica de**Probabilidade**

Se os acontecimentos elementares forem equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o

9. Pergunta se qual é o valor de $\cos(1845^\circ)$?

Resposta: Seja $\alpha = 1845^\circ$, não sabemos em que quadrante pertence o ângulo $\alpha = 1845^\circ$, vamos representar no círculo trigonométrico, para ver quantas voltas havemos de dar, para descobrir o valor de k :



Repara que, foram necessários 5 voltas do ângulo 1845° , daí que coincide com um dos ângulos a quadrante, 45° , portanto:

$$\cos(1845^\circ) = +\cos(1845^\circ - 5 \times 360^\circ)$$

$$\cos(1845^\circ) = +\cos(1845^\circ - 1800^\circ) =$$

$$\cos(1845^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

10. Resposta:

Sendo $0 < \alpha < 90^\circ$, isto é, α é do primeiro quadrante, portanto, $\pi - \alpha$, será um arco de segundo quadrante. Vamos mostrar este facto com um exemplo específico: seja

$$\alpha = \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \in IQ \Rightarrow \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi - \pi}{3} = \frac{2}{3}\pi; \frac{2}{3}\pi \in IIQ$$

11. Resposta:

Sendo n , o número par, $\sqrt[n]{(x-5)^n} = ?$

$$\text{Seja } \sqrt[n]{(x-5)^n} = a$$

$$\sqrt[n]{(x-5)^n} = a \Leftrightarrow a = |x-5|.$$

12. Resposta:

Considere a equação modular $|x-2|=8$, vamos determinar as suas raízes analiticamente e depois somar as mesmas, assim,

$$|x-2|=8 \Rightarrow x-2=8 \vee x-2=-8 \vee x=8+2 \vee x=-8+2 \Leftrightarrow x_1=10 \vee x_2=-6$$

$$\text{A soma de } x_1 \text{ e } x_2 \Rightarrow S = x_1 + x_2 \Rightarrow S = 10 + (-6) \Leftrightarrow S = 10 - 6 \Leftrightarrow S = 4$$

13. Resposta:

O desenvolvimento de $(x+3)^6$ tem 6+1 termos que é igual a 7 termos.

14. Resposta:

Considerando U , como conjunto universal, a cada um dos agrupamentos que podemos formar, com todos elementos de U , diferindo apenas pela posição, da se o nome de **permutação, porque o número de elementos agrupados é igual a número total de elementos do conjunto universal.**

15. Resposta:

Este problema pode ser resolvido aplicando a fórmula de combinação de n elementos agrupados p a p , visto que existem 5 elementos que podem ser escolhido dois a dois e a ordem aqui não é relevante, assim,

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \times p!} \Rightarrow C_2^5 = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} \Leftrightarrow C_2^5 = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

são 10 maneiras possíveis.



número de casos possíveis.

$$P(A) = \frac{n(C.F)}{n(C.P)}, n(CF) \geq n(CP)$$

Límite de uma sucessão

Sucessão convergente

Diz-se que uma sucessão (a_n) converge para um número real L (escreve-se $\lim a_n = L$)

Se, por muito pequeno que seja o número positivo δ se existir uma ordem p a partir da qual se tem

$|a_n - L| < \delta$, isto é, $|a_n - L|$ torna-se tão pequena quando se queira.

Progressão aritmética (PA)

Uma sucessão (a_n) é uma progressão aritmética (P.A) se existe um número real r , tal que

$$a_{n+1} - a_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ao número r chama-se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.A:

$$a_n = a_1 + (n-1) \times r$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão aritmética é dada por:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \times r}{2} \times n$$

Progressão geométrica (PG)

Uma sucessão (a_n) é uma progressão geométrica (P.G) se existe um número real r , tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ao número r chama-se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.G:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão geométrica é dada por:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

Algumas operações com infinitos

$$k \times \infty = \infty$$

16. Resposta:

Para resolver este problema, vamos aplicar a fórmula: $P(M) + P(\overline{M}) = 1$ dado que $P(M) = 0.4$ então $P(\overline{M}) + 0.4 = 1 \Leftrightarrow P(\overline{M}) = 1 - 0.4 \Leftrightarrow P(\overline{M}) = 0.6$

17. Resposta:

Dada uma sucessão de termo geral a_n , diz-se infinitamente pequena se e somente se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

18. Resposta:

O limite dado, é um limite do caso notável, conhecido por limite Neperiano, ele muitas vezes é usado para levantar outros casos notáveis, o seu valor é um número irracional que

$$\text{segue: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182818285 \dots \rightarrow \text{constante de Euler.}$$

19. Resposta:

Considere a soma: $3 + 4 + 5 + \dots + a_n = 75$, vamos determinar o valor de n , ou seja quantos termos dessa sucessão foram somados para que o resultado seja 75?

$$\text{Seja } a_1 = 3; a_2 = 4; a_3 = 5 \wedge S_n = 75,$$

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = 1 \Rightarrow r = 1$ a sucessão dada é uma progressão aritmética (PA) de razão 1 e primeiro termo igual a 3. A soma de n termos de uma P.A é dado por:

$$S_n = n \times \frac{a_1 + a_n}{2} \Rightarrow 75 = n \times \frac{3 + [3 + (n-1) \times 1]}{2} \Leftrightarrow n \times \frac{3 + 3 + n - 1}{2} = 75 \Leftrightarrow n \times \frac{6 + n - 1}{2} = 75 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 5n = 2 \times 75 \Leftrightarrow n^2 + 5n = 150 \Leftrightarrow n^2 + 5n - 150 = 0 \Leftrightarrow (n-10)(n+15) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n-10 = 0 \vee n+15 = 0 \Rightarrow n = 10 \vee n = -15; n \in \mathbb{N} \therefore n = 10$$

20. Resposta:

Seja $a_1 = -2; \wedge r = 3$, foi dito que são dados de uma progressão geométrica (PG), portanto, pretende-se calcular a soma de 5 termos dessa PG, assim,

A soma de n termos de uma P.G é dado por:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_5 = -2 \times \frac{1-3^5}{1-3} \Leftrightarrow S_5 = -2 \times \frac{1-243}{-2} = 1-243 = -242$$

21. Resposta:

Vamos extrair os dados do problema:

A Maria no:

Primeiro dia poupou 50 Meticais, $a_1 = 50$

No segundo dia poupou 100 Meticais, $a_2 = 100$

No terceiro dia poupou 150 Meticais, $a_3 = 150$

.....
.....
.....

No vigésimo dia poupou x meticais, $a_{20} = 50$

Fazendo uma análise: $150 - 100 = 100 - 50 = 50 \Rightarrow r = 50 \wedge a_1 = 50$ trata-se de uma progressão aritmética de razão 50 e primeiro termo 50. Neste caso, pretende-se saber qual é o valor que a Maria poupou no vigésimo dia, ou seja a_{20} o termo de ordem 20 da sucessão. Vamos determinar o termo geral da PA, assim,

$$a_n = a_1 + (n-1) \times 50 \Rightarrow a_n = 50 + (n-1) \times 50 \Leftrightarrow a_n = 50 + 50n - 50 \Leftrightarrow a_n = 50n - 50$$

$$\Leftrightarrow a_n = 50n; n = 20 \Rightarrow a_{20} = 50 \times 20 \Leftrightarrow a_{20} = 1000 \text{ Mt}$$

A Maria no vigésimo dia poupou 1000 Mt.

22. Consideremos a figura que representa uma função real de variável real:



$$\begin{aligned}\infty^k &= \infty \\ \infty \times \infty &= \infty \\ k + \infty &= \infty \\ k - \infty &= -\infty \\ \frac{\infty}{\infty} &= \infty \\ \frac{k}{\infty} &= 0 \\ \frac{\infty}{k} &= 0\end{aligned}$$

Limite de uma função real de variável real

Dada uma função $f(x)$ definida no domínio D_f , a , L são números reais. Diz-se, L é o limite da função $f(x)$ quando x tende para a (a não necessariamente pertencente ao domínio de $f(x)$) sse:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

e escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Conheça alguns limites notáveis

• Limites Neperianos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^k$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

• Limites trigonométricos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Continuidade de funções reais de variáveis reais

Uma função real de variável real é contínua num ponto de abscissa $x = a$ sse,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Se existir a diferença entre os membros dessa igualdade, a função é

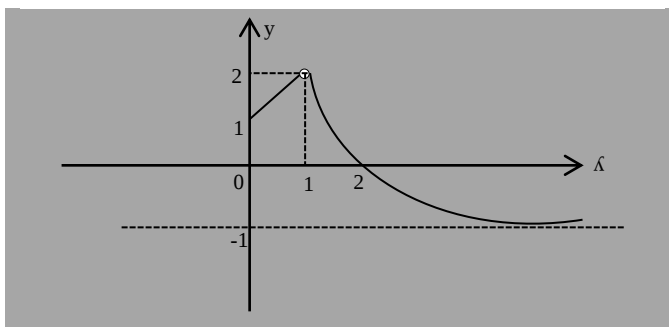


Figura: 22.1- gráfico de função real de variável real definido por 2 troços.

Com base nesta figura acima, o domínio da função é o conjunto de números reais não negativos exceptuando o 1, assim, $D = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$, pois a função não tem sentido em $x=1$.

23. Resposta:

Observando o gráfico do número 22, pode-se concluir que o contradomínio da função é um intervalo de extremos abertos $D' f =]-1; 2[$

24. Resposta:

A função dada é positiva no intervalo: $[0; 2[\setminus \{1\}$

25. Resposta:

A equação da assíntota é dada por: $y = -1$

26. Resposta:

Dada a função real de variável real definida por: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{quando } x \geq 0 \\ -x - 1, & \text{quando } x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} -x - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \therefore$$

não existe o limite da função f . Visto que os limites laterais são diferentes.

27. Resposta:

Uma função real de variável real diz-se contínua num ponto de abscissa $x=a$ se e somente se o valor de limite da função f é igual ao valor da função neste ponto, assim escreve-se:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

28. Resposta:

Vamos determinar o valor do limite: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x}$;

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x} = \frac{3+3}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

29. Resposta:

Vamos determinar o valor do limite: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$;

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{2^3 - 8}{2 - 2} = \frac{8 - 8}{0} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

este resultado não é um número real, chama-se

indeterminação, vamos levantar essa indeterminação resolvendo o limite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 2^2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 2^2 + 2 \times 2 + 4 = 12$$

O valor do limite dado é igual a 12.



descontinua no ponto de abscissa a

Cálculo diferencial

Definição da derivada de uma função

Dada uma função $F(x)$ definida no domínio D_F , sendo a abscissa de um ponto P , tal que $a \in D_F$. A derivada da função $F(x)$ no ponto P é dada pela expressão:

$$F'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{a-h} \text{ ou}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x-h} = f'(x)$$

A função $f(x)$ chama-se a primeira derivada.

Regras de derivação imediata

Função constante

$$f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$$

Função potência

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

Função polinomial

Função composta

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \Rightarrow$$

$$f'(x) = (a_0x^n)' + (a_1x^{n-1})' + \dots + (a_n)'$$

Derivada da soma

$$f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$$

Função afim

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$$

Função produto

$$f(x) = u \times v \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

Função quociente

$$f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Função composta

$$f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = nu^{n-1}u'$$

Derivada da função exponencial

Função exponencial de base e

$$f(x) = e^u \Rightarrow f'(x) = u'e^u$$

Função exponencial de base a

$$f(x) = a^u \Rightarrow f'(x) = u'a^u \ln(a)$$

30. Resposta:

Vamos determinar o valor do limite: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(2x))^{\frac{1}{x}}$; o limite dado é um limite trigonométrico, envolvendo o limite notável Neperiano, vamos substituir a variável x pela respectiva tendência, assim:

$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(2x))^{\frac{1}{x}} = (1 + \sin(2 \times 0))^{\frac{1}{0}} = (1 + 0)^{\infty} = [1^{\infty}]$. Este resultado não é um número real, chama-se indeterminação, vamos levantar essa indeterminação:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(2x))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2x \sin(2x)}{2x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2x \times \frac{\sin(2x)}{2x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$$

vamos trocar a variável x para y fazendo, $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$; se $x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow \frac{1}{0} \Rightarrow y \rightarrow \infty$ neste caso o limite fica:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + 2 \times \frac{1}{y} \right)^y = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{y} \right)^y = e^2;$$

31. Resposta:

Sendo $f(x) = x - x^2$, o cálculo da primeira derivada no ponto de abscissa $x = 2$ segue:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \Leftrightarrow f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - x^2 - (2 - 2^2)}{x - 2} \Leftrightarrow f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - x^2 + 2}{x - 2}$$

32. Resposta:

Sendo $f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$, o cálculo da segunda derivada da função f segue:

Vamos começar por calcular a primeira derivada em IR, assim,

$$f'(x) = (2x^3 + x^2 + 1)' \Leftrightarrow f'(x) = (2x^3)' + (x^2)' + 1' \Leftrightarrow f'(x) = 3 \times 2x^2 + 2x + 0 \Leftrightarrow f'(x) = 6x^2 + 2x$$

Uma vez encontrada a primeira derivada, vamos determinar a segunda derivada a partir da primeira derivada,

$$f''(x) = (6x^2 + 2x)' \Leftrightarrow f''(x) = (6x^2)' + (2x)' \Leftrightarrow f''(x) = 6 \times 2x + 1 \times 2 \Leftrightarrow f''(x) = 12x + 2$$

A segunda derivada da função f é igual a $f''(x) = 12x + 2$

33. Consideremos a figura que representa uma função real de variável real:

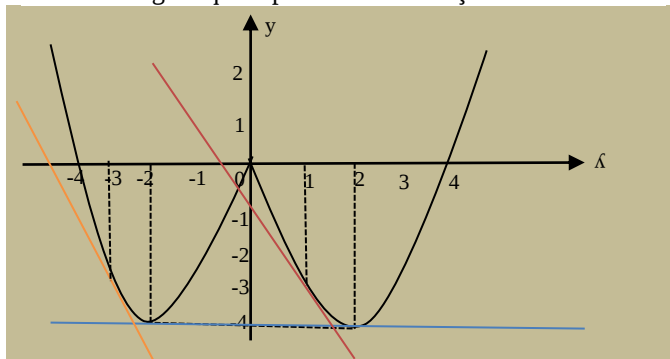


Figura: 33.1- gráfico de função real de variável real definido por 1 troços.



Derivada da função logarítmica**Função logarítmica de base e**

$$f(x) = \ln(u) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u}$$

Função logarítmica de base a

$$f(x) = \log_a(u) \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{u'}{u \ln(a)}$$

Derivada da função trigonométrica**Função seno**

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \sin(u) \Rightarrow f'(x) = u' \cos(u)$$

Função co-seno

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$$

$$f(x) = \cos(u) \Rightarrow f'(x) = -u' \sin(u)$$

Intervalos de monotonia e primeira derivada de uma função**Teorema**

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$.

- Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente crescente em $[a, b]$
- Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente decrescente em $[a, b]$

Máximos e mínimos absolutos e primeira derivada de uma função**Teorema**

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e tem um máximo ou um mínimo em c do intervalo $]a, b[$, então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Um elemento c do domínio de uma função f é um ponto crítico de f se então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Álgebra**Polinómios**

É uma soma de monómios não semelhantes

Um polinómio de uma variável tem a seguinte fórmula geral:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

Duma forma geral, uma função real de variável real não é derivável nos pontos de abcissas onde há vértices, e nem em pontos onde a função não é definida, visto que não se pode traçar recta tangentes nestes pontos, neste caso específico, a função f , não é derivável no ponto de abcissa $x=0$ e ordenada $y=0$, ou seja no ponto $(0;0)$.

34. Resposta:

Vamos traçar as rectas tangentes nos pontos $(-2;-4)$ e $(2;-4)$, como mostra a figura 33.1. Repare que a recta traçada é paralela ao eixo das abcissas e o coeficiente angular da recta traçada é nula, logo a primeira derivada da função tem a primeira derivada nula $(-2;-4)$ e $(2;-4)$.

35. Resposta:

A função f tem a primeira derivada negativo intervalo onde ela é monótona decrescente, a variação da função (monotonia) anterior segue:

x	$]-\infty; -2[$	-2	$] -2; 0[$	0	$]0; 2[$	2	$]2; +\infty[$
$f(x)$		-4		0		-4	

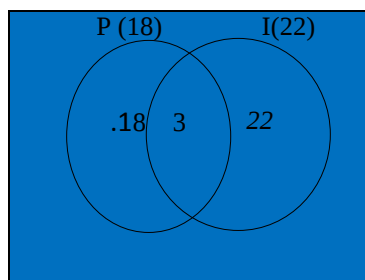
A função $f(x)$ é monótona decrescente em $]-\infty; -2[\cup]0; 2[$, neste intervalo a função admite a primeira derivada negativa (como teste, trace uma recta tangente no qualquer ponto de abcissa que pertence neste intervalo).

- **Somente para Secção de Letras**

36. Resposta:

Consideremos o conjunto definido por compressão $M = \{x : x \text{ e uma letra da palavra Matematica}\}$

Definindo por extensão o conjunto M , tem se: $M = \{m; a; t; e; i; c\}$

37. Resposta ao problema:

$$n(U) = 40$$

$$n(I) = 22$$

$$\Rightarrow n(I) + n(P \cap I) = x$$

$$\Leftrightarrow 22 + 3 = x$$

$$x = 25$$

São 25 pessoas que falam inglês.

38. Resposta:

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

39. Resposta:

Vamos fazer o estudo da variação da função $f(x) = x^3 - 3x$, em primeiro lugar, vamos calcular a primeira derivada da função f , assim,

$$f'(x) = (x^3 - 3x) \Leftrightarrow f'(x) = (x^3) - (3x)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \text{ Vamos determinar os zeros da função da primeira derivada:}$$

$$f'(x) = 0$$



Onde

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}$$

Regra de Ruffin

É uma regra que é usada para determinar o quociente entre o polinómio de grau n e um binómio linear $x - a$.

Teoria de Conjunto

Conjunto é uma colecção de objectos da mesma espécie.

Operações sobre conjuntos

Reunião de conjuntos

Intersecção de conjuntos

Diferença de conjuntos

Complementar de conjuntos

Geometria analítica

Dado um ponto $P(x_0, y_0)$ e recta r :

$Ax + Bx + C = 0$ no plano, a distância entre o ponto P e a recta r representada por $d(P, r)$ é dada por:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Função homográfica

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ com } cx+d \neq 0$$

Números complexos

Para responder o número 38 é preciso ter conhecimentos profundo de números complexos conjugados

Números complexos conjugados

Dois números complexos dizem – se conjugados quando tem partes reais iguais e partes imaginárias simétricas. O onjugado de número complexo z representa – se por $\bar{z}$

Exemplo:

$3+4i \wedge 3-4i$ são dois números complexos conjugados.

Primitiva de uma função

As regras de primitivação de funções obtém – se através das regras de derivação, assim temos:

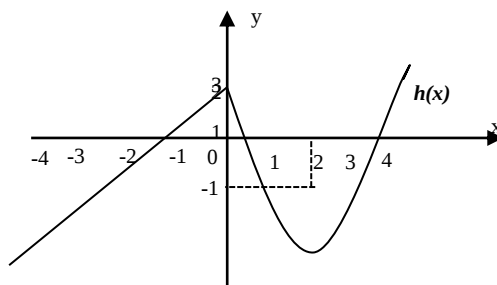
$$\int (k) dx = kx + c$$

$$3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{3} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x_1 = -1 \vee x_2 = 1$$

x	$]-\infty; -1[$	-1	$]-1; 1[$	1	$]1; +\infty[$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$

A função $f(x) = x^3 - 3x$ é monótona decrescente se $x \in]-1; 1[$

40. Resposta: considere o gráfico da função $h(x)$:



A função é definida por dois troços, a expressão analítica do primeiro troço $x \in]-\infty; 0[$ é

$$h(x) = x + 3 \Rightarrow h'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{h(x) - h(2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 3 - (-2 + 3)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 3 - 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} 1 = 1 \therefore h'(-2) = 1$$

Somente para a Secção de Ciências

36. Resposta:

Se o primeiro ponto é origem do S.C.O, então tem as seguintes coordenadas: $O(0;0)$ e outro ponto dado é $P(-2;-7)$. A distância entre dois pontos no plano é dada pela fórmula:

$$d(P_0; P) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \Rightarrow d(O; P) = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (-7 - 0)^2} \Leftrightarrow \Leftrightarrow d(O; P) = \sqrt{(-2)^2 + (-7)^2} \Leftrightarrow d(O; P) = \sqrt{4 + 49} \Rightarrow d(O; P) = \sqrt{53}$$

37. Resposta:

Dados os pontos $P(0;1); Q(3;4) \wedge R(2k;k)$ para que estes três pontos sejam colineares devem pertencer a uma mesma recta.

Vamos determinar uma equação da recta que passa pelos pontos P e Q , $y = mx + b$

$$m = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{4-1}{3-0} \Leftrightarrow m = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = 1(x - 0)$$

$$y = x + 1 \rightarrow x = 2k \wedge y = k \Rightarrow k = 2k + 1 \Leftrightarrow k - 2k = 1 \Leftrightarrow -k = 1 \Rightarrow k = -1$$

Para que os três pontos sejam colineares, o valor de k deve ser igual a -1

38. Resposta:

Dada a função $f(x) = \frac{2-x}{x}$ vamos determinar a sua inversa, portanto, uma função real de variável real admite inversa num dado intervalo ou no seu domínio se e somente se ela



$$\int (ku) dx = k \int u dx$$

$$\int u^n u' dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C$$

$$\int e^u u' dx = e^u + C$$

$$\int a^u u' dx = \frac{a^u}{\ln(a)} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

Integração por parte

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

Função Modular

Para responder o número 40 é preciso ter conhecimentos profundo de tipos de funções modulares

Tipos de funções modulares

Função modular do tipo $y = f(|x|)$

Função modular do tipo $y = |f(x)|$

Função modular do tipo $y = |f(|x|)|$

for injectiva neste mesmo intervalo ou no seu todo domínio. A função f é homográfica e em geral as funções homográficas são injectivas em todo seu domínio, logo f admite inversa em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ logo,

$$f(x) = \frac{2-x}{x} \Rightarrow x = \frac{2-f(x)}{f(x)} \Leftrightarrow x \times f(x) = 2 - f(x) \Leftrightarrow x \times f(x) + f(x) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)[x+1] = 2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{x+1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2}{x+1}$$

39. Resposta:

Considerando a função $f(x) = x^2$ cujo $D_f = [-2; 2] \Rightarrow D'f = [0; 4]$

Consideremos a função $y = 2f(x)$, o contradomínio dessa função é $D'_y = [2 \times 0; 2 \times 4] = [0; 8]$

Já o gráfico o gráfico de $g(x) = 2f(x) + 3$, é obtido a partir do gráfico da função $y = 2f(x)$, onde cada valor da ordenada será adicionada 3 unidades e o contradomínio passa ser: $D'_g = [0 + 3; 8 + 3]$

$$D'_g = [3; 11]$$

40. Resposta:

O número $3 + \sqrt{-25}$, pode ser representado da seguinte maneira:

$$3 + \sqrt{-25} = 3 + \sqrt{-1 \times 25} = 3 + \sqrt{-1} \times \sqrt{25} = 3 + \sqrt{25} \times \sqrt{-1} = 3 + 5\sqrt{-1} = 3 + 5i$$

FIM

