



openstax™

# Física

Universitaria

Volumen 3



# Física Universitaria

## Volumen 3

AUTORES PRINCIPALES

**SAMUEL J. LING, UNIVERSIDAD ESTATAL DE TRUMAN**

**JEFF SANNY, UNIVERSIDAD LOYOLA MARYMOUNT**

**WILLIAM MOEBS, ANTERIORMENTE DE LA UNIVERSIDAD LOYOLA MARYMOUNT**



## OpenStax

Rice University  
6100 Main Street MS-375  
Houston, Texas 77005

Para obtener más información sobre OpenStax, visite <https://openstax.org>.  
Pueden adquirirse copias impresas individuales y pedidos al por mayor a través de nuestro sitio web.

©2021 Rice University. El contenido de los libros de texto que produce OpenStax tiene una licencia de atribución internacional de Creative Commons 4.0 (CC BY 4.0). De conformidad con esta licencia, todo usuario de este libro de texto o de su contenido debe proporcionar la atribución adecuada de la siguiente manera:

- Si redistribuye este libro de texto en formato digital (lo que incluye, entre otros, PDF y HTML), entonces debe mantener en cada página la siguiente atribución:  
"Acceso gratuito en [openstax.org](https://openstax.org)".
- Si redistribuye este libro de texto en formato impreso, debe incluir en cada página física la siguiente atribución:  
"Acceso gratuito en [openstax.org](https://openstax.org)".
- Si redistribuye parte de este libro de texto, debe mantener en cada página de formato digital (lo que incluye, entre otros, PDF y HTML) y en cada página física impresa la siguiente atribución:  
"Acceso gratuito en [openstax.org](https://openstax.org)".
- Si utiliza este libro de texto como referencia bibliográfica, incluya <https://openstax.org/details/books/física-universitaria-volumen-3> en su cita.

Si tiene preguntas sobre esta licencia, póngase en contacto con [support@openstax.org](mailto:support@openstax.org).

### Marcas registradas

El nombre de OpenStax, el logotipo de OpenStax, las portadas de los libros de OpenStax, el nombre de OpenStax CNX, el logotipo de OpenStax CNX, el nombre de OpenStax Tutor, el logotipo de Openstax Tutor, el nombre de Connexions, el logotipo de Connexions, el nombre de Rice University y el logotipo de Rice University no están sujetos a la licencia y no se pueden reproducir sin el consentimiento previo y expreso por escrito de Rice University.

**VERSIÓN DE TAPA BLANDA ISBN-13**

**978-1-711494-65-4**

**VERSIÓN DIGITAL ISBN-13**

**978-1-951693-45-9**

**AÑO DE PUBLICACIÓN ORIGINAL**

**2021**

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 JAY 21



## OPENSTAX

OpenStax ofrece libros de texto gratuitos, revisados por expertos y con licencia abierta para cursos de introducción a la universidad y del programa Advanced Placement®, así como software didáctico personalizado de bajo costo que apoyan el aprendizaje de los estudiantes. Es una iniciativa de tecnología educativa sin fines de lucro con sede en Rice University (Universidad Rice), que se compromete a brindarle acceso a los estudiantes a las herramientas que necesitan para terminar sus cursos y alcanzar sus objetivos educativos.

## RICE UNIVERSITY

OpenStax, OpenStax CNX y OpenStax Tutor son iniciativas de Rice University. Como universidad líder en investigación con un compromiso particular con la educación de pregrado, Rice University aspira a una investigación pionera, una enseñanza insuperable y contribuciones para mejorar nuestro mundo. Su objetivo es cumplir esta misión y cultivar una comunidad diversa de aprendizaje y descubrimiento que forme líderes en todo el ámbito del esfuerzo humano.



---

## APOYO FILANTRÓPICO

OpenStax agradece a nuestros generosos socios filantrópicos, que apoyan nuestra visión de mejorar las oportunidades educativas para todos los estudiantes. Para ver el impacto de nuestra comunidad de colaboradores y nuestra lista más actualizada de socios, visite [openstax.org/impact](https://openstax.org/impact).

Arnold Ventures

Chan Zuckerberg Initiative

Chegg, Inc.

Arthur and Carlyse Ciocca Charitable Foundation

Digital Promise

Ann and John Doerr

Bill & Melinda Gates Foundation

Girard Foundation

Google Inc.

The William and Flora Hewlett Foundation

The Hewlett-Packard Company

Intel Inc.

Rusty and John Jagers

The Calvin K. Kazanjian Economics Foundation

Charles Koch Foundation

Leon Lowenstein Foundation, Inc.

The Maxfield Foundation

Burt and Deedee McMurtry

Michelson 20MM Foundation

National Science Foundation

The Open Society Foundations

Jumee Yhu and David E. Park III

Brian D. Patterson USA-International Foundation

The Bill and Stephanie Sick Fund

Steven L. Smith & Diana T. Go

Stand Together

Robin and Sandy Stuart Foundation

The Stuart Family Foundation

Tammy and Guillermo Treviño

Valhalla Charitable Foundation

White Star Education Foundation

Schmidt Futures

William Marsh Rice University



# Contenido

---

Prefacio 1

## UNIDAD 1 ÓPTICA

---

### CAPÍTULO 1

#### La naturaleza de la luz 7

Introducción	7
1.1 La propagación de la luz	8
1.2 La ley de reflexión	12
1.3 Refracción	16
1.4 Reflexión interna total	19
1.5 Dispersión	25
1.6 Principio de Huygens	29
1.7 Polarización	34
Revisión Del Capítulo	46

### CAPÍTULO 2

#### Óptica geométrica y formación de imágenes 57

Introducción	57
2.1 Imágenes formadas por espejos planos	58
2.2 Espejos esféricos	60
2.3 Imágenes formadas por refracción	71
2.4 Lentes delgadas	74
2.5 El ojo	86
2.6 La cámara	94
2.7 La lupa simple	96
2.8 Microscopios y telescopios	99
Revisión Del Capítulo	108

### CAPÍTULO 3

#### Interferencias 121

Introducción	121
3.1 Interferencia de doble rendija de Young	121
3.2 Matemáticas de la interferencia	125
3.3 Interferencias de rendijas múltiples	128
3.4 Interferencia de película delgada	130
3.5 El interferómetro de Michelson	136
Revisión Del Capítulo	141

### CAPÍTULO 4

#### Difracción 149

Introducción	149
4.1 Difracción de una rendija	150
4.2 Intensidad en la difracción de una rendija	154

4.3 Difracción de doble rendija	159
4.4 Rejillas de difracción	162
4.5 Aberturas circulares y resolución	167
4.6 Difracción de rayos X	174
4.7 Holografía	176
Revisión Del Capítulo	179

## UNIDAD 2 FÍSICA MODERNA

---

### CAPÍTULO 5

#### Relatividad

	191
Introducción	191
5.1 Invariancia de las leyes físicas	192
5.2 Relatividad de la simultaneidad	195
5.3 Dilatación del tiempo	197
5.4 Contracción de longitud	207
5.5 La transformación de Lorentz	212
5.6 Transformación relativista de la velocidad	222
5.7 Efecto Doppler para la luz	226
5.8 Momento relativista	229
5.9 Energía relativista	231
Revisión Del Capítulo	241

### CAPÍTULO 6

#### Fotones y ondas de materia

	253
Introducción	253
6.1 Radiación de cuerpo negro	254
6.2 Efecto fotoeléctrico	262
6.3 El efecto Compton	269
6.4 Modelo de Bohr del átomo de hidrógeno	274
6.5 Las ondas de materia de De Broglie	284
6.6 Dualidad onda-partícula	292
Revisión Del Capítulo	298

### CAPÍTULO 7

#### Mecánica cuántica

	311
Introducción	311
7.1 Funciones de onda	312
7.2 El principio de incertidumbre de Heisenberg	324
7.3 La ecuación de Schrödinger	328
7.4 La partícula cuántica en una caja	331
7.5 El oscilador armónico cuántico	337
7.6 El efecto túnel de las partículas a través de las barreras de potencial	343
Revisión Del Capítulo	355

### CAPÍTULO 8

#### Estructura atómica

	365
Introducción	365
8.1 El átomo de hidrógeno	366

8.2 Momento dipolar magnético orbital del electrón	375
8.3 Espín del electrón	379
8.4 El principio de exclusión y la tabla periódica	384
8.5 Espectros atómicos y rayos X	390
8.6 Láseres	401
Revisión Del Capítulo	405

## CAPÍTULO 9

### Física de la materia condensada 413

Introducción	413
9.1 Tipos de enlaces moleculares	414
9.2 Espectros moleculares	419
9.3 Enlaces en los sólidos cristalinos	423
9.4 Modelo de electrones libres de los metales	429
9.5 Teoría de bandas de los sólidos	434
9.6 Semiconductores y dopaje	438
9.7 Dispositivos semiconductores	441
9.8 Superconductividad	447
Revisión Del Capítulo	454

## CAPÍTULO 10

### Física nuclear 463

Introducción	463
10.1 Propiedades de los núcleos	464
10.2 Energía de enlace nuclear	469
10.3 Decaimiento radioactivo	472
10.4 Reacciones nucleares	478
10.5 Fisión	487
10.6 Fusión nuclear	493
10.7 Usos médicos y efectos biológicos de la radiación nuclear	499
Revisión Del Capítulo	508

## CAPÍTULO 11

### Física de partículas y cosmología 519

Introducción	519
11.1 Introducción a la física de partículas	520
11.2 Leyes de conservación de las partículas	525
11.3 Cuarks	530
11.4 Aceleradores y detectores de partículas	535
11.5 El modelo estándar	543
11.6 El Big Bang	549
11.7 Evolución del universo primigenio	554
Revisión Del Capítulo	562

**Apéndice A** Unidades 571

**Apéndice B** Factores de conversión 575

**Apéndice C** Constantes fundamentales 579

**Apéndice D** Datos astronómicos 581

<b>Apéndice E</b>	Fórmulas matemáticas	583
<b>Apéndice F</b>	Química	587
<b>Apéndice G</b>	El alfabeto griego	589
	Clave de Respuestas	591
Índice		625

# PREFACIO

---

Bienvenido a *Física Universitaria*, un recurso de OpenStax. Este libro de texto fue escrito para aumentar el acceso de los estudiantes a material de aprendizaje de alta calidad, a la vez que se mantienen los más altos estándares de rigor académico a bajo o ningún costo.

## Acerca de OpenStax

OpenStax es una organización sin ánimo de lucro con sede en la Universidad Rice. Nuestra misión es brindar a los estudiantes mayor acceso a la educación. Nuestro primer libro de texto universitario con licencia abierta se publicó en 2012. Desde entonces nuestra biblioteca se ha ampliado a más de 25 libros que consultan cientos de miles de estudiantes en todo el mundo. OpenStax Tutor, nuestra herramienta de aprendizaje personalizado de bajo costo, se utiliza en cursos universitarios de todo el país. La misión de OpenStax es posible gracias al generoso apoyo de fundaciones filantrópicas. A través de estas asociaciones y con la ayuda de recursos adicionales de bajo costo de nuestros socios de OpenStax, OpenStax rompe las barreras más comunes para el aprendizaje y otorga poder a los estudiantes e instructores para que triunfen.

## Sobre los recursos de OpenStax

### Personalización

*Física Universitaria* está autorizado conforme a la licencia Creative Commons Atribución 4.0 Internacional (CC BY 4.0), lo que significa que puede distribuir, mezclar y construir sobre el contenido, siempre y cuando proporcione la atribución a OpenStax y sus colaboradores de contenido.

Dado que nuestros libros tienen licencia abierta, usted es libre de utilizar todo el libro o de elegir las secciones que sean más relevantes para las necesidades de su curso. Puede mezclar el contenido en la asignación a sus estudiantes de ciertos capítulos y secciones en su programa de estudios en el orden que usted prefiera. Incluso puede proporcionar un enlace directo en su programa de estudios a las secciones en la vista web de su libro.

Los instructores también tienen la opción de crear una versión personalizada de su libro de OpenStax.

La versión personalizada puede ponerse a disposición de los estudiantes en formato impreso o digital de bajo costo a través de la librería de su campus. Visite la página de su libro en OpenStax.org para obtener más información.

### Errata

Todos los libros de texto de OpenStax se someten a un riguroso proceso de revisión. Sin embargo, al igual que cualquier libro de texto de nivel profesional, a veces se producen errores. Dado que nuestros libros se basan en la web, podemos realizar actualizaciones periódicas cuando se considere pedagógicamente necesario. Si tiene una corrección que sugerir, envíela a través del enlace de la página de su libro en OpenStax.org. Los expertos en la materia revisan todas las sugerencias de erratas. OpenStax se compromete a ser transparente en todas las actualizaciones, por lo que usted también encontrará una lista de los cambios de erratas anteriores en la página de su libro en OpenStax.org.

### Formato

Puede acceder a este libro de texto de forma gratuita en vista web o en PDF a través de OpenStax.org, y por un bajo costo en versión impresa.

## Acerca de *Física Universitaria*

*Física Universitaria* está diseñado para el curso de física de dos o tres semestres con base en cálculo. El texto ha sido desarrollado para cumplir con el alcance y la secuencia de la mayoría de los cursos universitarios de física y proporciona una base para una carrera en matemáticas, ciencias o ingeniería. El libro ofrece una importante oportunidad para que los estudiantes aprendan los conceptos básicos de la física y comprendan cómo esos conceptos se aplican a sus vidas y al mundo que los rodea.

Debido al carácter exhaustivo del material, ofrecemos el libro en tres volúmenes para mayor flexibilidad y eficacia.

### Cobertura y alcance

Nuestro libro de texto de *Física Universitaria* se adhiere al alcance y la secuencia de la mayoría de los cursos de física de dos y tres semestres de todo el país. Hemos trabajado para que la física sea interesante y accesible para los estudiantes, a la vez que se mantiene el rigor matemático inherente a la

asignatura. Con este objetivo en mente, el contenido de este libro de texto se ha desarrollado y organizado para proporcionar una progresión lógica desde los conceptos fundamentales hasta los más avanzados, con base en lo que los estudiantes ya han aprendido y haciendo hincapié en las conexiones entre los temas y entre la teoría y las aplicaciones. La meta de cada sección es que los estudiantes no solo reconozcan los conceptos, sino que trabajen con estos de forma que les resulten útiles en cursos posteriores y en sus futuras carreras. La organización y las características pedagógicas se desarrollaron y examinaron con los aportes de educadores científicos dedicados al proyecto.

## VOLUMEN I

### Unidad 1: Mecánica

- Capítulo 1: Unidades y medidas
- Capítulo 2: Vectores
- Capítulo 3: Movimiento rectilíneo
- Capítulo 4: Movimiento en dos y tres dimensiones
- Capítulo 5: Leyes del movimiento de Newton
- Capítulo 6: Aplicaciones de las leyes de Newton
- Capítulo 7: Trabajo y energía cinética
- Capítulo 8: Energía potencial y conservación de la energía
- Capítulo 9: Momento lineal y colisiones
- Capítulo 10: Rotación de eje fijo
- Capítulo 11: Momento angular
- Capítulo 12: Equilibrio estático y elasticidad
- Capítulo 13: Gravitación
- Capítulo 14: Mecánica de fluidos

### Unidad 2: Ondas y acústica

- Capítulo 15: Oscilaciones
- Capítulo 16: Ondas
- Capítulo 17: Sonido

## VOLUMEN II

### Unidad 1: Termodinámica

- Capítulo 1: Temperatura y calor
- Capítulo 2: La teoría cinética de los gases
- Capítulo 3: La primera ley de termodinámica
- Capítulo 4: La segunda ley de la termodinámica

### Unidad 2: Electricidad y magnetismo

- Capítulo 5: Cargas y campos eléctricos
- Capítulo 6: Ley de Gauss
- Capítulo 7: Potencial eléctrico
- Capítulo 8: Capacidad
- Capítulo 9: Corriente y resistencia

- Capítulo 10: Circuitos de corriente continua
- Capítulo 11: Fuerzas y campos magnéticos
- Capítulo 12: Fuentes de campos magnéticos
- Capítulo 13: Inducción electromagnética
- Capítulo 14: Inductancia
- Capítulo 15: Circuitos de corriente alterna
- Capítulo 16: Ondas electromagnéticas

## VOLUMEN III

### Unidad 1: Óptica

- Capítulo 1: La naturaleza de la luz
- Capítulo 2: Óptica geométrica y formación de imágenes
- Capítulo 3: Interferencia
- Capítulo 4: Difracción

### Unidad 2: Física moderna

- Capítulo 5: Relatividad
- Capítulo 6: Fotones y ondas de materia
- Capítulo 7: Mecánica cuántica
- Capítulo 8: Estructura atómica
- Capítulo 9: Física de la materia condensada
- Capítulo 10: Física nuclear
- Capítulo 11: Física de partículas y cosmología

### Fundamentos pedagógicos

En *Física Universitaria* encontrará derivaciones de conceptos que presentan ideas y técnicas clásicas, así como aplicaciones y métodos modernos. La mayoría de los capítulos comienzan con observaciones o experimentos que sitúan el material en un contexto de experiencia física. Las presentaciones y explicaciones se basan en años de experiencia en el aula por parte de profesores de física de larga trayectoria, que se esfuerzan por lograr un equilibrio de claridad y rigor que ha demostrado ser exitoso con sus estudiantes. En el texto, los enlaces permiten a los estudiantes repasar el material anterior y volver al planteamiento actual para reforzar las conexiones entre los temas. Las figuras históricas y los experimentos más importantes se analizan en el texto principal (en lugar de en recuadros o barras laterales), a la vez que se mantiene el enfoque en el desarrollo de la intuición física. Las ideas clave, las definiciones y las ecuaciones se destacan en el texto y se enumeran en forma de resumen al final de cada capítulo. Los ejemplos y las imágenes que abren los capítulos suelen incluir aplicaciones contemporáneas de la vida cotidiana o de la ciencia y la ingeniería modernas con las que los estudiantes pueden relacionarse: desde los teléfonos inteligentes hasta Internet o los dispositivos GPS.



### Evaluaciones que refuerzan los conceptos clave

Los **Ejemplos** que se encuentran en los capítulos siguen un formato de tres partes de estrategia, solución e importancia, para enfatizar cómo abordar un problema, cómo trabajar con las ecuaciones y cómo comprobar y generalizar el resultado. Los ejemplos van seguidos de preguntas y respuestas de **Compruebe lo aprendido** para que los estudiantes refuerzen las ideas importantes de los ejemplos. Las **Estrategias de resolución de problemas** de cada capítulo desglosan los métodos para abordar diversos tipos de problemas en pasos, que los estudiantes pueden seguir para orientarse. El libro también incluye ejercicios al final de cada capítulo, para que los estudiantes practiquen lo que han aprendido.

- Las **Preguntas conceptuales** no requieren cálculos, sino que ponen a prueba el aprendizaje de los conceptos clave por parte del estudiante.
- Los **Problemas** clasificados por secciones ponen a prueba las habilidades de los estudiantes para resolver problemas y la capacidad para aplicar las ideas a situaciones prácticas.
- Los **Problemas adicionales** aplican los conocimientos de todo el capítulo, lo cual obliga a los estudiantes a identificar qué conceptos y ecuaciones son apropiados para resolver determinados problemas. Al azar, en los problemas, hay ejercicios de **Resultados poco razonables**. Allí se pide a los estudiantes que evalúen la respuesta a un problema y expliquen por qué no es razonable y cuáles de las suposiciones que se hacen serían incorrectas.
- Los **Problemas de desafío** amplían las ideas del texto a situaciones interesantes, pero difíciles.

Las respuestas a los ejercicios seleccionados están disponibles en una **Clave de respuestas** al final del libro.

### Recursos adicionales

#### Recursos para estudiantes e instructores

Hemos recopilado recursos adicionales tanto para los estudiantes como para los instructores, tales como guías de inicio, láminas de PowerPoint y guías de respuestas y soluciones para instructores y estudiantes. Los recursos para instructores requieren una cuenta de instructor verificada, que puede solicitar al iniciar sesión o crear su cuenta en OpenStax.org. Aproveche estos recursos para complementar su libro de OpenStax.

### Centros comunitarios

OpenStax se asocia al Instituto para el Estudio de la Administración del Conocimiento en la Educación (Institute for the Study of Knowledge Management in Education, ISKME) para ofrecer centros comunitarios en OER Commons. Esta plataforma es para que los instructores compartan los recursos creados por la comunidad en apoyo de los libros de OpenStax, de forma gratuita. A través de nuestros centros comunitarios, los instructores pueden cargar sus propios materiales o descargar recursos para utilizarlos en sus propios cursos. Esto abarca anexos adicionales, material didáctico, multimedia y contenido relevante del curso. Animamos a los profesores a que se unan a los centros de los temas más relevantes para su docencia e investigación como una oportunidad, tanto para enriquecer sus cursos como para relacionarse con otros profesores.

Para ponerse en contacto con los centros comunitarios, visite [www.oercommons.org/hubs/OpenStax](http://www.oercommons.org/hubs/OpenStax) (<https://www.oercommons.org/hubs/OpenStax>).

### Recursos asociados

Los socios de OpenStax son nuestros aliados en la misión de hacer asequible y accesible el material de aprendizaje de alta calidad a los estudiantes e instructores de todo el mundo. Sus herramientas se integran perfectamente con nuestros títulos de OpenStax a un bajo costo. Para acceder a los recursos asociados a su texto, visite la página de su libro en OpenStax.org.

### Sobre los autores

#### Autores principales

##### **Samuel J. Ling, Universidad Estatal de Truman**

El Dr. Samuel Ling ha enseñado física introductoria y avanzada durante más de 25 años en la Universidad Estatal de Truman, donde actualmente es profesor de física y jefe del departamento. El Dr. Ling tiene dos doctorados por la Universidad de Boston, uno en Química y otro en Física, y fue becario de investigación en el Instituto Indio de Ciencias de Bangalore antes de incorporarse a Truman. El Dr. Ling también es autor de *Primer Curso en Vibraciones y Ondas (A First Course in Vibrations and Waves)*, publicado por Oxford University Press. El Dr. Ling tiene vasta experiencia en investigación en el campo de la educación en física y ha publicado investigaciones sobre métodos de aprendizaje colaborativo en la enseñanza de la física. Recibió una beca Truman y una beca Jepson en reconocimiento a sus innovadores métodos de

enseñanza. Las publicaciones de investigación del Dr. Ling abarcan la cosmología, la física del estado sólido y la óptica no lineal.

**Jeff Sanny, Universidad Loyola Marymount**

El Dr. Jeff Sanny se licenció en Física en el Colegio Universitario Harvey Mudd en 1974 y se doctoró en física del estado sólido en la Universidad de California, Los Ángeles, en 1980. Se incorporó al cuerpo docente de la Universidad Loyola Marymount en otoño de 1980. Durante su permanencia, ha desempeñado el cargo de jefe de departamento, así como el de decano asociado. El Dr. Sanny disfruta enseñando física introductoria en particular. También le apasiona proporcionar a los estudiantes experiencia en investigación y ha dirigido durante muchos años un activo grupo de investigación en física espacial, conformado por estudiantes universitarios.

**William Moebs, anteriormente de la Universidad Loyola Marymount**

El Dr. William Moebs se licenció y doctoró (1959 y 1965) en la Universidad de Michigan. Después se incorporó al personal como investigador asociado durante un año, donde continuó su investigación doctoral en física de partículas. En 1966, aceptó un nombramiento en el departamento de física de Indiana Purdue Fort Wayne (IPFW), donde ejerció como jefe de departamento de 1971 a 1979. En 1979 se trasladó a la Universidad Loyola Marymount (Loyola Marymount University, LMU), donde fue jefe del departamento de física de 1979 a 1986. Se retiró de la LMU en el 2000. Ha publicado investigaciones sobre física de partículas, cinética química, división celular, física atómica y enseñanza de la física.

**Autores colaboradores**

Stephen D. Druger

Alice Kolakowska, Universidad de Memphis

David Anderson, Colegio Universitario Albion

Daniel Bowman, Colegio Universitario Ferrum

Dedra Demaree, Universidad de Georgetown

Edw. S. Ginsberg, Universidad de Massachusetts

Joseph Trout, Colegio Universitario Richard Stockton

Kevin Wheelock, Colegio Universitario Bellevue

David Smith, Universidad de las Islas Vírgenes

Takashi Sato, Universidad Politécnica de Kwantlen

Gerald Friedman, Colegio Universitario Comunitario Santa Fe

Lev Gasparov, Universidad del Norte de Florida

Lee LaRue, Colegio Universitario Paris Junior

Mark Lattery, Universidad de Wisconsin

Richard Ludlow, Colegio Universitario Daniel

Webster

Patrick Motl, Universidad Kokomo de Indiana

Tao Pang, Universidad de Nevada, Las Vegas

Kenneth Podolak, Universidad Estatal de Plattsburgh

**Revisores**

Salameh Ahmad, Instituto de Tecnología Rochester, Dubai

John Aiken, Universidad de Colorado, Boulder

Raymond Bengel, Colegio Universitario del condado Tarrant

Gavin Buxton, Universidad Robert Morris

Erik Christensen, Colegio Universitario Estatal del Sur de Florida

Clifton Clark, Universidad Estatal Fort Hays

Nelson Coates, Academia Marítima de California

Herve Collin, Colegio Universitario Comunitario Kapi'olani

Carl Covatto, Universidad Estatal de Arizona

Alejandro Cozzani, Colegio Universitario Imperial Valley

Danielle Dalafave, Colegio Universitario de Nueva Jersey

Nicholas Darnton, Instituto de Tecnología de Georgia

Ethan Deneault, Universidad de Tampa

Kenneth DeNisco, Colegio Universitario Comunitario del Área de Harrisburg

Robert Edmonds, Colegio Universitario del condado de Tarrant

William Falls, Colegio Universitario Comunitario Erie

Stanley Forrester, Colegio Universitario Broward

Umesh Garg, Universidad de Notre Dame

Maurizio Giannotti, Universidad Barry

Bryan Gibbs, Colegio Universitario Comunitario del condado de Dallas

Lynn Gillette, Colegio Universitario Comunitario Pima, Campus Oeste

Mark Giroux, Universidad Estatal del Este de Tennessee

Matthew Griffiths, Universidad de New Haven

Alfonso Hinojosa, Universidad de Texas, Arlington

Steward Jensen, Colegio Universitario Alma

David Kagan, Universidad de Massachusetts

Sergei Katsev, Universidad de Minnesota, Duluth

Gregory Lapicki, Universidad del Este de Carolina

Jill Leggett, Colegio Universitario Comunitario Estatal de Florida, Jacksonville

Alfredo Louro, Universidad de Calgary

James Maclaren, Universidad Tulane

Ponn Maheswaranathan, Universidad Winthrop

Seth Major, Colegio Universitario Hamilton

Oleg Maksimov, Colegio Universitario Excelsior  
Aristides Marcano, Universidad Estatal de Delaware  
James McDonald, Universidad de Hartford  
Ralph McGrew, Colegio Universitario Comunitario  
SUNY–Broome  
Paul Miller, Universidad del Oeste de Virginia  
Tamar More, Universidad de Portland  
Farzaneh Najmabadi, Universidad de Phoenix  
Richard Olenick, Universidad de Dallas  
Christopher Porter, Universidad Estatal de Ohio  
Liza Pujji, Instituto de Tecnología Manakau  
Baishali Ray, Universidad Young Harris

Andrew Robinson, Universidad Carleton  
Aruvana Roy, Universidad Young Harris  
Gajendra Tulsian, Colegio Universitario Estatal de  
Daytona  
Adria Updike, Universidad Roger Williams  
Clark Vangilder, Universidad de Arizona Central  
Steven Wolf, Universidad Estatal de Texas  
Alexander Wurm, Universidad de Western New  
England  
Lei Zhang, Universidad Estatal Winston Salem  
Ulrich Zurcher, Universidad Estatal de Cleveland.



# CAPÍTULO 1

## La naturaleza de la luz



**Figura 1.1** Debido a la reflexión interna total, la imagen de un nadador subacuático se refleja en el agua donde se encuentra la cámara. La ondulación circular en el centro de la imagen está realmente en la superficie del agua. Debido al ángulo de visión, la reflexión interna total no se produce en el borde superior de esta imagen, y podemos ver una vista de las actividades en la cubierta de la piscina. (crédito: modificación del trabajo de "jayhem"/Flickr)

### ESQUEMA DEL CAPITULO

- 1.1 La propagación de la luz
- 1.2 La ley de reflexión
- 1.3 Refracción
- 1.4 Reflexión interna total
- 1.5 Dispersión
- 1.6 Principio de Huygens
- 1.7 Polarización

**INTRODUCCIÓN** Nuestra investigación sobre la luz gira en torno a dos preguntas de importancia fundamental: (1) ¿Cuál es la naturaleza de la luz y (2) cómo se comporta la luz en distintas circunstancias? Las respuestas a estas preguntas se encuentran en las ecuaciones de Maxwell (en la sección de [ondas electromagnéticas \(http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-2/pages/16-introduccion\)](http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-2/pages/16-introduccion)), que predicen la existencia de las ondas electromagnéticas y su comportamiento. Algunos ejemplos de luz son las ondas de radio e infrarrojas, la luz visible, la radiación ultravioleta y los rayos X. Curiosamente, no todos los fenómenos de la luz pueden explicarse mediante la teoría de Maxwell. Los experimentos realizados a principios del siglo XX demostraron que la luz tiene propiedades corpusculares, o similares a las de las partículas. La idea de que la luz puede presentar características tanto de onda como de partícula se denomina *dualidad onda-partícula*, que se examina en la sección [Fotones y ondas de la materia](#).

En este capítulo estudiamos las propiedades básicas de la luz. En los próximos capítulos, investigaremos el

comportamiento de la luz cuando interactúa con dispositivos ópticos como espejos, lentes y aberturas.

## 1.1 La propagación de la luz

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

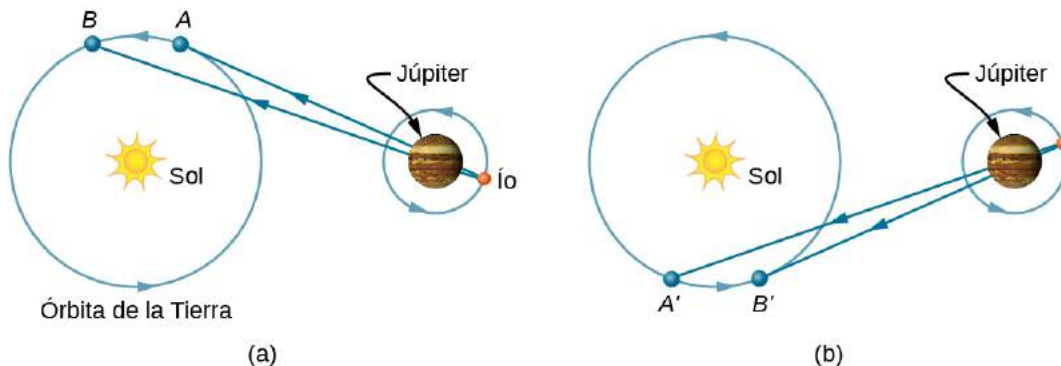
- Determinar el índice de refracción, dada la velocidad de la luz en un medio
- Enumerar las formas en que la luz viaja desde una fuente a otro lugar

La velocidad de la luz en el vacío  $c$  es una de las constantes fundamentales de la física. Cuando llegue a la sección [Relatividad](#), verá que este es un concepto central de la teoría de la relatividad de Einstein. Al mejorar la exactitud de las mediciones de la velocidad de la luz, se comprobó que diferentes observadores, incluso los que se mueven a grandes velocidades entre sí, miden el mismo valor de la velocidad de la luz. Sin embargo, la velocidad de la luz varía de manera precisa según el material que atraviesa. Estos hechos tienen implicaciones de gran alcance, como veremos en capítulos posteriores.

### La velocidad de la luz: Primeras mediciones

En 1675, el astrónomo danés Ole Roemer (1644-1710) realizó la primera medición de la velocidad de la luz. Estudió la órbita de Io, una de las cuatro grandes lunas de Júpiter, y descubrió que tenía un periodo de revolución de 42,5 h alrededor de Júpiter. También descubrió que este valor fluctuaba unos segundos, dependiendo de la posición de la Tierra en su órbita alrededor del Sol. Roemer se dio cuenta de que esta fluctuación se debía a la velocidad finita de la luz y podía utilizarse para determinar  $c$ .

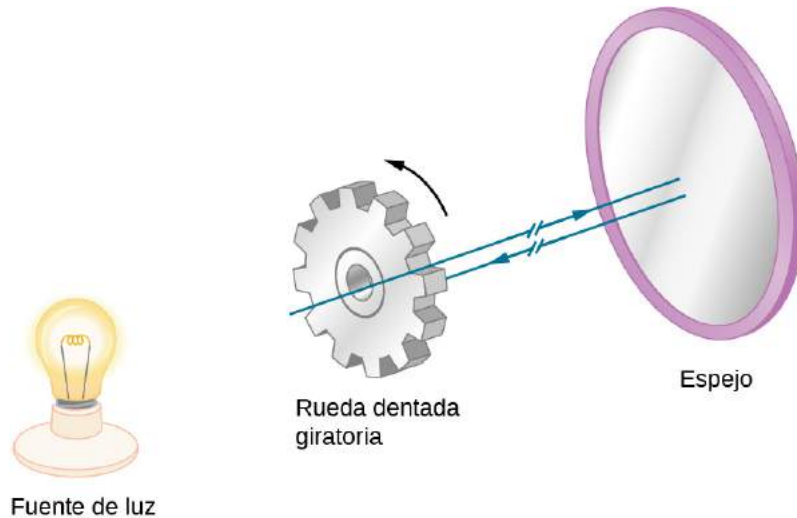
Roemer descubrió el periodo de revolución de Io midiendo el intervalo de tiempo entre los sucesivos eclipses de Júpiter. La [Figura 1.2\(a\)](#) muestra las configuraciones planetarias cuando dicha medición se realiza desde la Tierra en la parte de su órbita en la que se aleja de Júpiter. Cuando la Tierra está en el punto  $A$ , se alinea con Júpiter e Io. La próxima vez que se produzca esta alineación, la Tierra estará en el punto  $B$ , y la luz que lleva esa información a la Tierra deberá viajar hasta ese punto. Dado que  $B$  está más lejos de Júpiter que  $A$ , la luz tarda más tiempo en llegar a la Tierra cuando ésta se encuentra en  $B$ . Ahora imagine que han pasado unos 6 meses y que los planetas están dispuestos como en la parte (b) de la figura. La medición del periodo de Io comienza con la Tierra en el punto  $A'$  e Io eclipsado por Júpiter. El siguiente eclipse se produce entonces cuando la Tierra está en el punto  $B'$ , hasta donde debe viajar la luz que lleva la información de este eclipse. Dado que  $B'$  está más cerca de Júpiter que  $A'$ , la luz tarda menos en llegar a la Tierra cuando está en  $B'$ . Este intervalo de tiempo entre los sucesivos eclipses de Io vistos en  $A'$  y  $B'$  es, por tanto, menor que el intervalo de tiempo entre los eclipses vistos en  $A$  y  $B$ . Al medir la diferencia de estos intervalos de tiempo y con el conocimiento adecuado de la distancia entre Júpiter y la Tierra, Roemer calculó que la velocidad de la luz era  $2,0 \times 10^8$  m/s, que es un 33% inferior al valor aceptado hoy en día.



**FIGURA 1.2** Método astronómico de Roemer para determinar la velocidad de la luz. Las mediciones del periodo de Io realizadas con las configuraciones de las partes (a) y (b) difieren porque la longitud del recorrido de la luz y el tiempo de viaje asociado aumentan de  $A$  a  $B$  (a) pero disminuyen de  $A'$  a  $B'$  (b).

En 1849, Armand Fizeau (1819-1896) realizó la primera medición terrestre con éxito de la velocidad de la luz. Colocó una rueda dentada que podía girar muy rápidamente en la cima de una colina y un espejo en la cima de una segunda colina a 8 km de distancia ([Figura 1.3](#)). Se colocó una fuente de luz intensa detrás de la rueda, de

modo que cuando ésta giraba, cortaba el haz de luz en una sucesión de pulsos. A continuación, se ajustó la velocidad de la rueda de forma que no retornara ninguna luz al observador situado detrás de la rueda. Esto solo podría ocurrir si la rueda giraba a un ángulo correspondiente a un desplazamiento de  $(n + \frac{1}{2})$  dientes, mientras las pulsaciones viajaban hasta el espejo y volvían. Conociendo la velocidad de rotación de la rueda, el número de dientes de la rueda y la distancia al espejo, Fizeau determinó que la velocidad de la luz era  $3,15 \times 10^8$  m/s, que es solo un 5% demasiado alto.



**FIGURA 1.3** Método de Fizeau para medir la velocidad de la luz. Los dientes de la rueda bloquean la luz reflejada al regresar cuando la rueda gira a una velocidad que coincide con el tiempo de viaje de la luz hacia y desde el espejo.

El físico francés Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868) modificó el aparato de Fizeau sustituyendo la rueda dentada por un espejo giratorio. En 1862, midió que la velocidad de la luz era  $2,98 \times 10^8$  m/s, que está dentro del 0,6% del valor actualmente aceptado. Albert Michelson (1852-1931) también utilizó el método de Foucault en varias ocasiones para medir la velocidad de la luz. Sus primeros experimentos se realizaron en 1878; y para 1926, ya había perfeccionado la técnica de tal manera que encontró que  $c$  era  $(2,99796 \pm 4) \times 10^8$  m/s.

Hoy en día, la velocidad de la luz se conoce con gran precisión. De hecho, la velocidad de la luz en el vacío  $c$  es tan importante que se acepta como una de las magnitudes físicas básicas y tiene el valor de

$$c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 3,00 \times 10^8 \text{ m/s} \quad 1.1$$

donde el valor aproximado de  $3,00 \times 10^8$  m/s se utiliza cuando la exactitud de tres dígitos es suficiente.

### Velocidad de la luz en la materia

La velocidad de la luz a través de la materia es menor que en el vacío, porque la luz interactúa con los átomos en un material. La velocidad de la luz depende en gran medida del tipo de material, dado que su interacción varía con los distintos átomos, redes cristalinas y otras subestructuras. Podemos definir una constante de un material que describe la velocidad de la luz en él, llamada **índice de refracción**  $n$ :

$$n = \frac{c}{v} \quad 1.2$$

donde  $v$  es la velocidad de la luz observada en el material.

Dado que la velocidad de la luz es siempre inferior a  $c$  en la materia e igual a  $c$  solo en el vacío, el índice de refracción es siempre mayor o igual a uno; es decir,  $n \geq 1$ . La [Tabla 1.1](#) muestra los índices de refracción de algunas sustancias representativas. Los valores se indican para una determinada longitud de onda de la luz, ya que varían ligeramente con la longitud de onda. (Esto puede tener efectos importantes, como los colores separados por un prisma, como veremos en la sección [Dispersión](#)) Tenga en cuenta que, en el caso de los

gases,  $n$  se aproxima a 1,0. Esto parece razonable, dado que los átomos en los gases están muy separados, y la luz viaja a  $c$  en el vacío entre los átomos. Es habitual tomar  $n = 1$  para los gases a menos que se necesite una gran precisión. Aunque la velocidad de la luz  $v$  en un medio varía considerablemente de su valor  $c$  en el vacío, sigue siendo una gran velocidad.

Medio	$n$
Gases en 0°C, 1 atm	
Aire	1,000293
Dióxido de carbono	1,00045
Hidrógeno	1,000139
Oxígeno	1,000271
Líquidos en 20°C	
Benceno	1,501
Disulfuro de carbono	1,628
Tetracloruro de carbono	1,461
Etanol	1,361
Glicerina	1,473
Agua, fresca	1,333
Sólidos a 20°C	
Diamante	2,419
Fluorita	1,434
Vidrio, crown	1,52
Vidrio, flint	1,66
Hielo (a 0°C)	1,309
Poliestireno	1,49
Plexiglás	1,51
Cuarzo, cristalino	1,544
Cuarzo, fundido	1,458
Cloruro de sodio	1,544



Medio	$n$
Circón	1,923

**TABLA 1.1** Índice de refracción en varios medios Para la luz con una longitud de onda de 589 nm en el vacío

## EJEMPLO 1.1

### Velocidad de la luz en las joyas

Calcule la velocidad de la luz en el circón, un material utilizado en joyería para imitar el diamante.

#### Estrategia

Podemos calcular la velocidad de la luz en un material  $v$  a partir del índice de refracción  $n$  del material, utilizando la ecuación  $n = c/v$ .

#### Solución

Al reordenar la ecuación  $n = c/v$  para  $v$  nos da

$$v = \frac{c}{n}.$$

El índice de refracción del circón es de 1,923 en la [Tabla 1.1](#), y  $c$  se indica en la [Ecuación 1.1](#). Al introducir estos valores en la ecuación, se obtiene

$$v = \frac{3,00 \times 10^8 \text{ m/s}}{1,923} = 1,56 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

#### Importancia

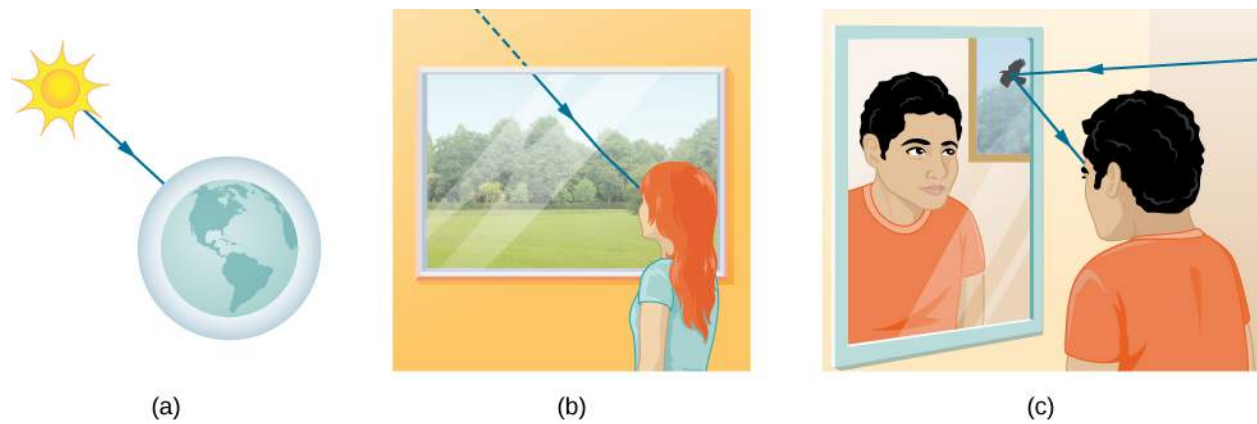
Esta velocidad es ligeramente superior a la mitad de la velocidad de la luz en el vacío y sigue siendo alta en comparación con las velocidades que experimentamos normalmente. La única sustancia que aparece en la [Tabla 1.1](#) que tiene un índice de refracción mayor que el del circón es el diamante. Más adelante veremos que el gran índice de refracción del circón hace que brille más que el vidrio, pero menos que el diamante.

## COMPRUEBE LO APRENDIDO 1.1

[Tabla 1.1](#) muestra que el etanol y el agua dulce tienen índices de refracción muy similares. ¿En qué porcentaje difieren las velocidades de la luz en estos líquidos?

## El modelo del rayo de luz

Ya ha estudiado algunas de las características ondulatorias de la luz en el capítulo anterior sobre las [ondas electromagnéticas](#) (<http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-2/pages/16-introduccion>). En este capítulo, comenzamos principalmente con las características de los rayos. Hay tres formas en las que la luz puede viajar desde una fuente a otro lugar ([Figura 1.4](#)). Puede venir directamente de la fuente a través del espacio vacío, como del Sol a la Tierra. O la luz puede viajar a través de varios medios, como el aire y el vidrio, hasta el observador. La luz también puede llegar después de ser reflejada, por ejemplo, por un espejo. En todos estos casos, podemos modelar la trayectoria de la luz como una línea recta llamada **rayo**.



**FIGURA 1.4** Tres métodos para que la luz viaje desde una fuente a otro lugar. (a) La luz llega a la atmósfera superior de la Tierra, viajando a través del espacio vacío directamente desde la fuente. (b) La luz puede llegar a una persona viajando a través de medios como el aire y el vidrio. (c) La luz también puede reflejarse desde un objeto como un espejo. En las situaciones mostradas aquí, la luz interactúa con objetos lo suficientemente grandes como para viajar en línea recta como un rayo.

Los experimentos demuestran que cuando la luz interactúa con un objeto varias veces mayor que su longitud de onda, viaja en línea recta y actúa como un rayo. Sus características ondulatorias no son pronunciadas en esas situaciones. Dado que la longitud de onda de la luz visible es inferior a una micra (una milésima de milímetro), actúa como un rayo en las numerosas situaciones habituales en las que se encuentra con objetos de tamaño superior a una micra. Por ejemplo, cuando la luz visible se encuentra con algo lo suficientemente grande como para que podamos observarlo a simple vista, como una moneda, actúa como un rayo, con características de onda generalmente insignificantes.

En todos estos casos, podemos modelar la trayectoria de la luz como líneas rectas. La luz puede cambiar de dirección cuando encuentra objetos (como un espejo) o al pasar de un material a otro (como al pasar del aire al vidrio), pero luego continúa en línea recta o como un rayo. La palabra "rayo" proviene de las matemáticas y aquí significa una línea recta que se origina en algún punto. Es aceptable visualizar los rayos de luz como rayos láser. El *modelo de rayos de luz* describe la trayectoria de la luz como líneas rectas.

Dado que la luz se mueve en línea recta, cambiando de dirección cuando interactúa con los materiales, su trayectoria se describe mediante la geometría y la trigonometría simple. Esta parte de la óptica, en la que predomina el aspecto de los rayos de luz, se denomina, por tanto, **óptica geométrica**. Hay dos leyes que rigen el cambio de dirección de la luz cuando esta interactúa con la materia. Se trata de la *ley de reflexión*, para situaciones en las que la luz rebota en la materia, y la *ley de refracción*, para situaciones en las que la luz atraviesa la materia. Examinaremos más sobre cada una de estas leyes en las próximas secciones de este capítulo.

## 1.2 La ley de reflexión

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar la reflexión de la luz en superficies pulidas y rugosas
- Describir el principio y las aplicaciones de los reflectores de esquina

Cada vez que nos miramos en un espejo o entrecerramos los ojos ante la luz del sol que brilla en un lago, estamos viendo un reflejo. Cuando mira un trozo de papel blanco, está viendo la luz que se dispersa en él. Los grandes telescopios utilizan la reflexión para formar una imagen de las estrellas y otros objetos astronómicos.

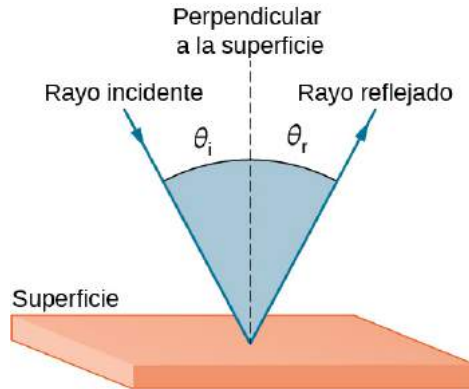
La **ley de reflexión** establece que el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia, o

$$\theta_r = \theta_i$$

1.3

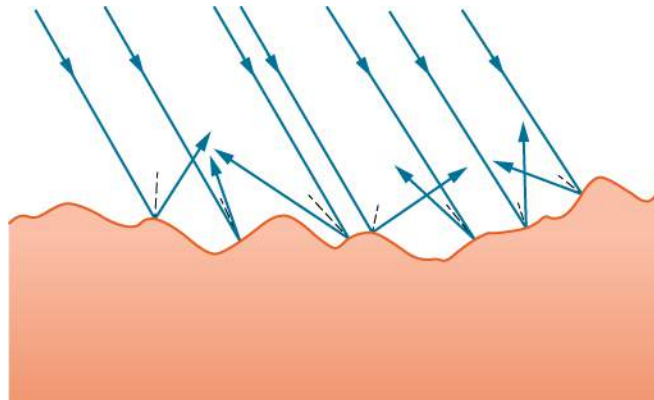
La ley de reflexión se ilustra en la [Figura 1.5](#), que también muestra cómo el ángulo de incidencia y el ángulo de

reflexión se miden con respecto a la perpendicular a la superficie en el punto donde incide el rayo de luz.

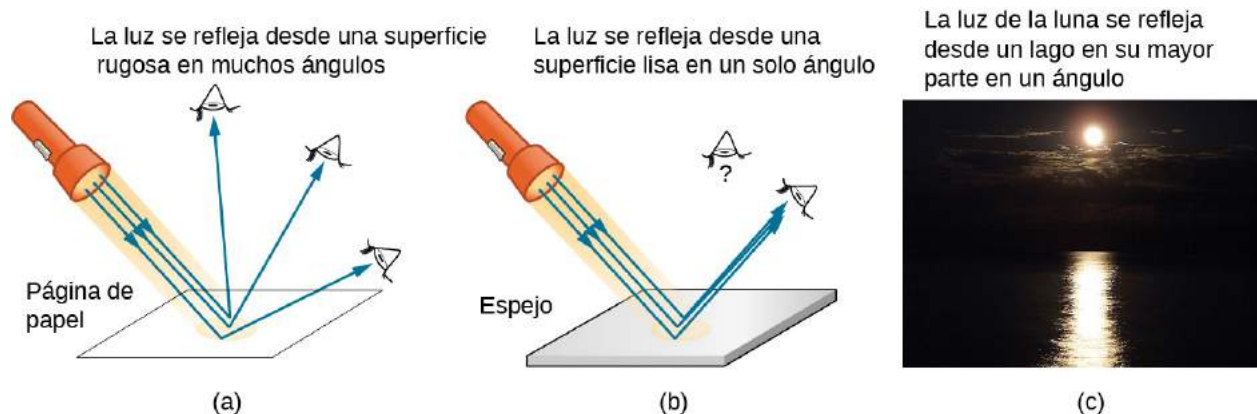


**FIGURA 1.5** La ley de reflexión establece que el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia- $\theta_r = \theta_i$ . Los ángulos se miden con respecto a la perpendicular a la superficie en el punto en el que el rayo incide en la superficie.

Esperamos ver los reflejos de las superficies lisas, pero la [Figura 1.6](#) ilustra cómo una superficie rugosa refleja la luz. Dado que la luz incide en distintas partes de la superficie con ángulos diferentes, se refleja en muchas direcciones diferentes, o se difumina. La luz difusa es la que nos permite ver una hoja de papel desde cualquier ángulo, como se muestra en la [Figura 1.7\(a\)](#). Las personas, la ropa, las hojas y las paredes tienen superficies rugosas y pueden verse desde todos los lados. Un espejo, en cambio, tiene una superficie lisa (comparada con la longitud de onda de la luz) y refleja la luz en ángulos específicos, como se ilustra en la [Figura 1.7\(b\)](#). Cuando la Luna se refleja en un lago, como se muestra en la [Figura 1.7\(c\)](#), se produce una combinación de estos efectos.



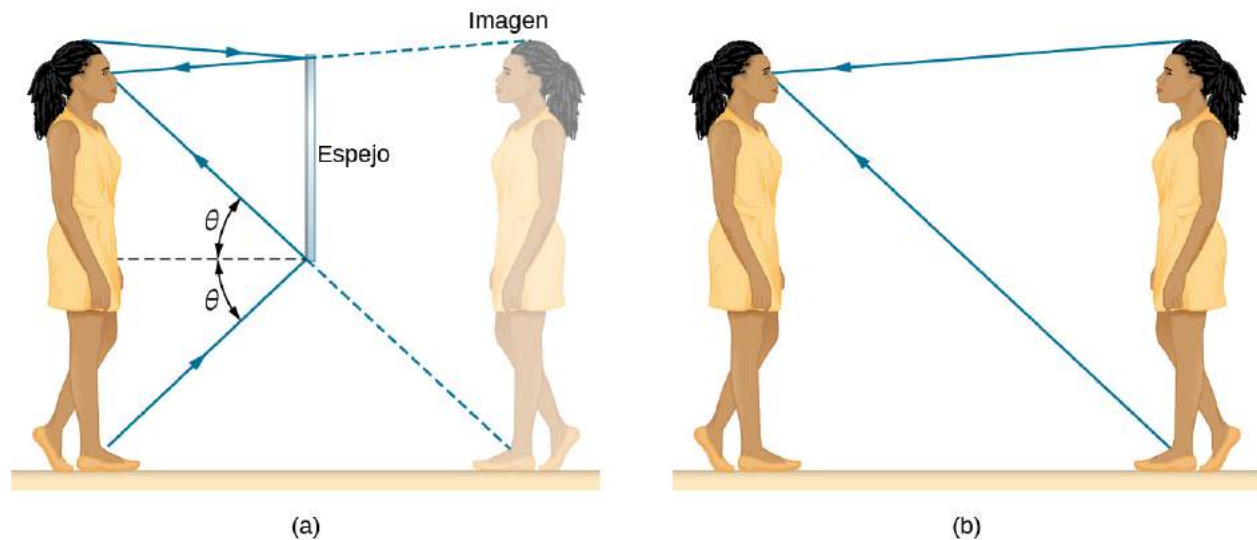
**FIGURA 1.6** La luz se difumina cuando se refleja en una superficie rugosa. Aquí inciden muchos rayos paralelos, pero se reflejan en muchos ángulos diferentes, porque la superficie es rugosa.



**FIGURA 1.7** (a) Cuando una hoja de papel se ilumina con muchos rayos paralelos incidentes, puede verse en muchos ángulos diferentes, porque su superficie es rugosa y difumina la luz. (b) Un espejo iluminado por muchos

rayos paralelos los refleja en una sola dirección, porque su superficie es muy lisa. Solo el observador que se encuentra en un ángulo determinado ve la luz reflejada. (c) La luz de la luna se difunde cuando se refleja en el lago, porque la superficie es brillante pero irregular. (crédito c: modificación del trabajo de Diego Torres Silvestre)

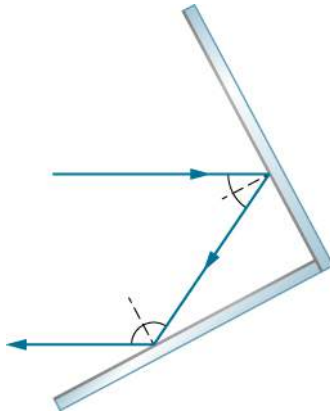
Cuando se ve en un espejo, parece que la imagen está realmente detrás del espejo ([Figura 1.8](#)). Vemos la luz procedente de una dirección determinada por la ley de reflexión. Los ángulos son tales que la imagen se encuentra exactamente a la misma distancia detrás del espejo que la distancia que hay entre la persona que se mira y el espejo. Si el espejo está en la pared de una habitación, las imágenes en ella están todas detrás del espejo, lo que puede hacer que la habitación parezca más grande. Aunque estas imágenes reflejadas en el espejo hacen que los objetos parezcan estar donde no pueden estar (como detrás de una pared sólida), las imágenes no son el producto de su imaginación. Las imágenes en espejo pueden fotografiarse y grabarse en vídeo con instrumentos y tienen el mismo aspecto que con nuestros ojos (que son instrumentos ópticos en sí mismos). El modo preciso en que se forman las imágenes mediante espejos y lentes se analizará en un próximo capítulo sobre [Óptica geométrica y formación de imágenes](#).



**FIGURA 1.8** (a) Su imagen en un espejo está detrás del espejo. Los dos rayos mostrados son los que inciden en el espejo con el ángulo correcto para reflejarse en los ojos de la persona. La imagen parece estar detrás del espejo a la misma distancia que (b) si estuviera mirando a su gemelo directamente, sin espejo.

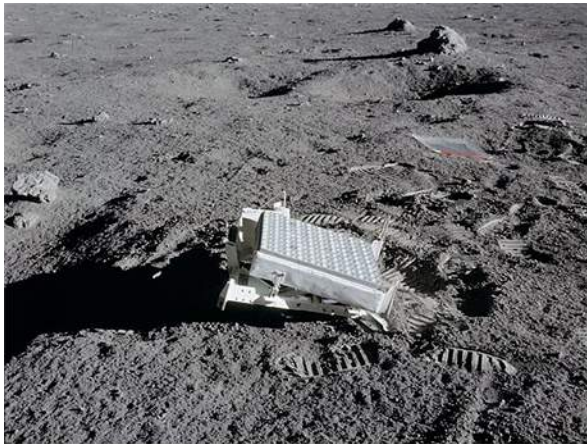
### Reflectores de esquina (retroreflectores)

Un rayo de luz que incide en un objeto formado por dos superficies reflectantes mutuamente perpendiculares se refleja exactamente en paralelo a la dirección de la que procede ([Figura 1.9](#)). Esto es cierto siempre que las superficies reflectantes sean perpendiculares, y es independiente del ángulo de incidencia. (Para comprobarlo, consulte el [link](#) al final de esta sección) Este objeto se denomina **reflector de esquina**, dado que la luz rebota desde su esquina interior. Los reflectores de esquina son una subclase de los retroreflectores, que reflejan los rayos en la dirección de la que proceden. Aunque la geometría de la prueba es mucho más compleja, los reflectores de esquina también pueden construirse con tres superficies reflectantes mutuamente perpendiculares y son útiles en aplicaciones tridimensionales.



**FIGURA 1.9** Un rayo de luz que incide en dos superficies reflectantes mutuamente perpendiculares se refleja exactamente en paralelo a la dirección de la que procede.

Muchas luces reflectantes baratas de las bicicletas, los automóviles y las señales de advertencia tienen reflectores de esquina diseñados para devolver la luz en la dirección en la que se originó. En lugar de limitarse a reflejar la luz en un ángulo amplio, la retrorreflexión garantiza una gran visibilidad si el observador y la fuente de luz están situados juntos, como el conductor y los faros de un automóvil. Los astronautas del Apolo colocaron un verdadero reflector de esquina en la Luna ([Figura 1.10](#)). Las señales láser de la Tierra pueden rebotar en ese reflector de esquina para medir la distancia gradualmente creciente a la Luna de unos pocos centímetros por año.



(a)



(b)

**FIGURA 1.10** (a) Los astronautas colocaron un reflector de esquina en la Luna para medir su distancia orbital, que aumentaba gradualmente. (b) Los puntos brillantes de estos reflectores de seguridad para bicicletas son reflejos del flash de la cámara que tomó esta foto en una noche oscura. (crédito a: modificación del trabajo de la NASA; crédito b: modificación del trabajo de "Julo"/Wikimedia Commons)

Siguiendo el mismo principio que estos reflectores ópticos, los reflectores de esquina se utilizan habitualmente como reflectores de radar ([Figura 1.11](#)) para aplicaciones de radiofrecuencia. En la mayoría de las circunstancias, las pequeñas embarcaciones de fibra de vidrio o de madera no reflejan con fuerza las ondas de radio emitidas por los sistemas de radar. Para que estas embarcaciones sean visibles al radar (para evitar colisiones, por ejemplo), se colocan reflectores de radar en las embarcaciones, normalmente en lugares altos.





**FIGURA 1.11** Un reflector de radar izado en un velero es un tipo de reflector de esquina. (crédito: Tim Sheerman-Chase)

Como ejemplo de lo contrario, si está interesado en construir un avión furtivo, hay que minimizar los reflejos del radar para evitar la detección. Una de las consideraciones de diseño sería entonces evitar construir esquinas de  $90^\circ$  en el fuselaje.

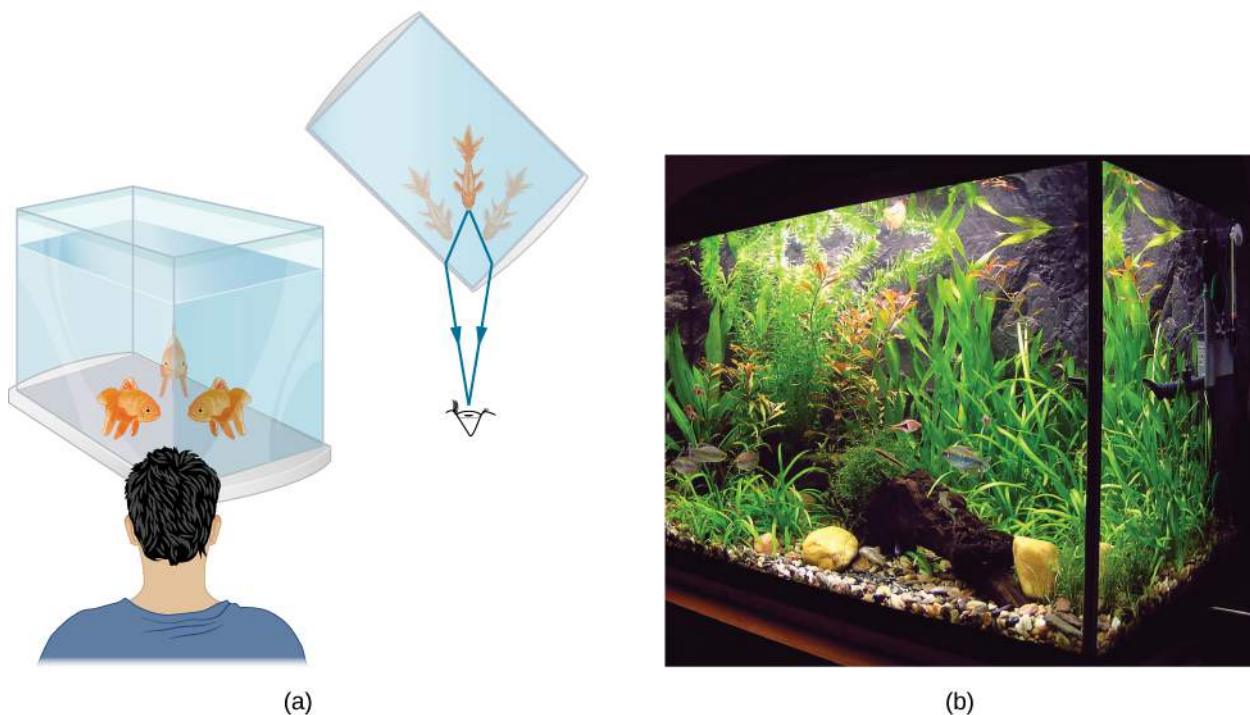
### 1.3 Refracción

#### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

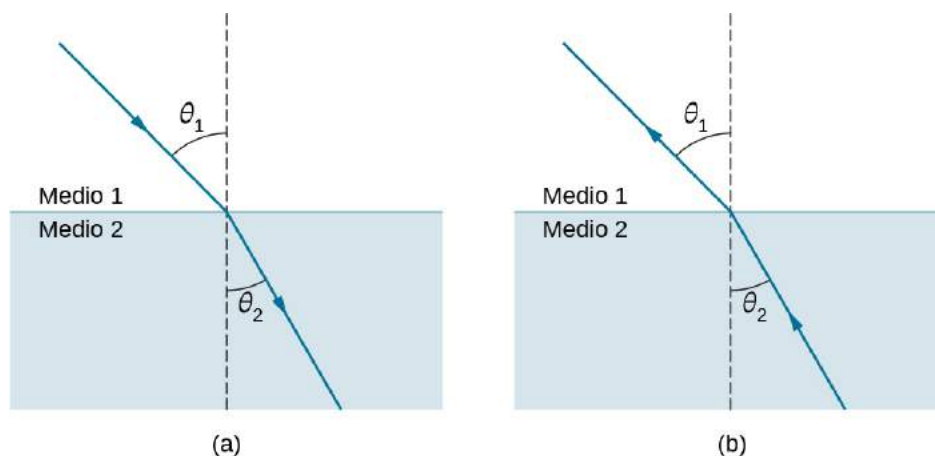
- Describir cómo los rayos cambian de dirección al entrar en un medio
- Aplicar la ley de refracción en la resolución de problemas

Es posible que a menudo observe cosas extrañas al mirar dentro de una pecera. Por ejemplo, puede ver que el mismo pez aparece en dos lugares diferentes ([Figura 1.12](#)). Esto ocurre porque la luz que viene del pez hacia usted cambia de dirección cuando sale de la pecera, y en este caso, puede recorrer dos caminos diferentes para llegar a los ojos de la persona que mira. El cambio de dirección de un rayo de luz (llamado de manera general curvatura) cuando pasa a través de sustancias de diferentes índices de refracción se llama **refracción** y se relaciona con los cambios en la velocidad de la luz,  $v = c/n$ . La refracción es responsable de una gran variedad de fenómenos ópticos, que van desde la acción de las lentes hasta la transmisión de datos a través de las fibras ópticas.



**FIGURA 1.12** (a) Al mirar la pecera como se muestra, podemos ver el mismo pez en dos lugares diferentes, porque la luz cambia de dirección cuando pasa del agua al aire. En este caso, la luz puede llegar al observador por dos caminos diferentes, por lo que el pez parece estar en dos lugares distintos. Esta curvatura de la luz se llama refracción y es responsable de muchos fenómenos ópticos. (b) Esta imagen muestra la refracción de la luz de un pez cerca de la parte superior de una pecera.

La [Figura 1.13](#) muestra cómo un rayo de luz cambia de dirección cuando pasa de un medio a otro. Como antes, los ángulos se miden con respecto a una perpendicular a la superficie en el punto en que el rayo de luz la atraviesa. (Parte de la luz incidente se refleja en la superficie, pero por ahora nos concentramos en la luz que se transmite) El cambio de dirección del rayo luminoso depende de los valores relativos de los índices de refracción ([la propagación de la luz](#)) de los dos medios implicados. En las situaciones mostradas, el medio 2 tiene un mayor índice de refracción que el medio 1. Tenga en cuenta que, como se muestra en la [Figura 1.13\(a\)](#), la dirección del rayo se acerca a la perpendicular cuando pasa de un medio con un índice de refracción menor a otro con un índice de refracción mayor. Por el contrario, como se muestra en la [Figura 1.13\(b\)](#), la dirección del rayo se aleja de la perpendicular cuando progresa desde un medio con un índice de refracción más alto a otro con un índice de refracción más bajo. El camino es exactamente reversible.



**FIGURA 1.13** El cambio de dirección de un rayo de luz depende de cómo cambia el índice de refracción cuando pasa de un medio a otro. En las situaciones mostradas aquí, el índice de refracción es mayor en el medio 2 que en el

medio 1. (a) Un rayo de luz se acerca a la perpendicular cuando entra en un medio con un índice de refracción mayor. (b) Un rayo de luz se aleja de la perpendicular cuando entra en un medio con un índice de refracción menor.

La magnitud en que un rayo de luz cambia su dirección depende tanto del ángulo de incidencia como de la magnitud en que cambia la velocidad. Para un rayo con un ángulo de incidencia determinado, un gran cambio de velocidad provoca un gran cambio de dirección y, por tanto, un gran cambio de ángulo. La relación matemática exacta es la **ley de refracción**, o ley de Snell. Lleva ese nombre por Willebrord Snell (1591-1626), el matemático holandés que la descubrió en 1621. La ley de refracción se expresa en forma de ecuación como

$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2. \quad 1.4$$

Aquí  $n_1$  y  $n_2$  son los índices de refracción de los medios 1 y 2, y  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son los ángulos entre los rayos y la perpendicular en los medios 1 y 2. El rayo entrante se llama rayo incidente, el rayo saliente se llama rayo refractado, y los ángulos asociados son el ángulo incidente y el ángulo refractado, respectivamente.

Los experimentos de Snell demostraron que la ley de refracción se cumple y que se puede asignar un índice de refracción característico  $n$  a un medio determinado y medir su valor. Snell no sabía que la velocidad de la luz variaba en diferentes medios, un hecho clave que se utiliza cuando derivamos la ley de refracción de manera teórica utilizando el principio de Huygens en la sección [Principio de Huygens](#).

## EJEMPLO 1.2

### Determinación del índice de refracción

Calcule el índice de refracción del medio 2 en la [Figura 1.13\(a\)](#), suponiendo que el medio 1 es aire y dado que el ángulo de incidencia es  $30,0^\circ$  y el ángulo de refracción es  $22,0^\circ$ .

#### Estrategia

El índice de refracción del aire se considera 1 en la mayoría de los casos (y hasta cuatro cifras significativas, es 1,000). Así,  $n_1 = 1,00$  aquí. De la información dada,  $\theta_1 = 30,0^\circ$  y  $\theta_2 = 22,0^\circ$ . Con esta información, la única incógnita de la ley de Snell es  $n_2$ , por lo que podemos utilizar la ley de Snell para calcular.

#### Solución

De la ley de Snell tenemos

$$\begin{aligned} n_1 \text{ sen } \theta_1 &= n_2 \text{ sen } \theta_2 \\ n_2 &= n_1 \frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2}. \end{aligned}$$

Introducción de valores conocidos,

$$n_2 = 1,00 \frac{\text{sen } 30,0^\circ}{\text{sen } 22,0^\circ} = \frac{0,500}{0,375} = 1,33.$$

#### Importancia

Este es el índice de refracción del agua, y Snell podría haberlo determinado midiendo los ángulos y realizando este cálculo. Entonces habría encontrado que 1,33 es el índice de refracción apropiado para el agua en todas las demás situaciones, como cuando un rayo pasa del agua al vidrio. Hoy en día podemos comprobar que el índice de refracción está relacionado con la velocidad de la luz en un medio midiendo directamente esa velocidad.

## INTERACTIVO

Explore la [desviación de la luz \(https://openstax.org/l/21bendoflight\\_es\)](https://openstax.org/l/21bendoflight_es) entre dos medios con diferentes índices de refracción. Utilice la simulación "Intro" y compruebe cómo el cambio de aire a agua y a vidrio modifica el ángulo de flexión. Utilice el transportador para medir los ángulos y vea si puede recrear la configuración del [Ejemplo 1.2](#). También por medición, confirme que el ángulo de reflexión es igual al ángulo



de incidencia.

### EJEMPLO 1.3

#### Un mayor cambio de dirección

Supongamos que en una situación como la del [Ejemplo 1.2](#), la luz pasa del aire al diamante y que el ángulo de incidencia es  $30,0^\circ$ . Calcule el ángulo de refracción  $\theta_2$  en el diamante.

#### Estrategia

Una vez más, el índice de refracción para el aire se toma como  $n_1 = 1,00$ , y nos da  $\theta_1 = 30,0^\circ$ . Podemos buscar el índice de refracción del diamante en la [Tabla 1.1](#), al calcular  $n_2 = 2,419$ . La única incógnita de la ley de Snell es  $\theta_2$ , que deseamos determinar.

#### Solución

Al resolver la ley de Snell para  $\sin \theta_2$  se obtiene

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1.$$

Introducción de valores conocidos,

$$\sin \theta_2 = \frac{1,00}{2,419} \sin 30,0^\circ = (0,413)(0,500) = 0,207.$$

Por lo tanto, el ángulo es el siguiente

$$\theta_2 = \sin^{-1}(0,207) = 11,9^\circ.$$

#### Importancia

Para el mismo ángulo de incidencia de  $30,0^\circ$ , el ángulo de refracción en el diamante es significativamente menor que en el agua ( $11,9^\circ$  en lugar de  $22,0^\circ$ -consulte el [Ejemplo 1.2](#)). Esto significa que hay un mayor cambio de dirección en el diamante. La causa de un gran cambio de dirección es un gran cambio en el índice de refracción (o velocidad). En general, cuanto mayor sea el cambio de velocidad, mayor será el efecto sobre la dirección del rayo.

### COMPRUEBE LO APRENDIDO 1.2

En la [Tabla 1.1](#), el sólido con el siguiente índice de refracción más alto después del diamante es el circón. Si se sustituyera el diamante del [Ejemplo 1.3](#) por un trozo de circón, ¿cuál sería el nuevo ángulo de refracción?

## 1.4 Reflexión interna total

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

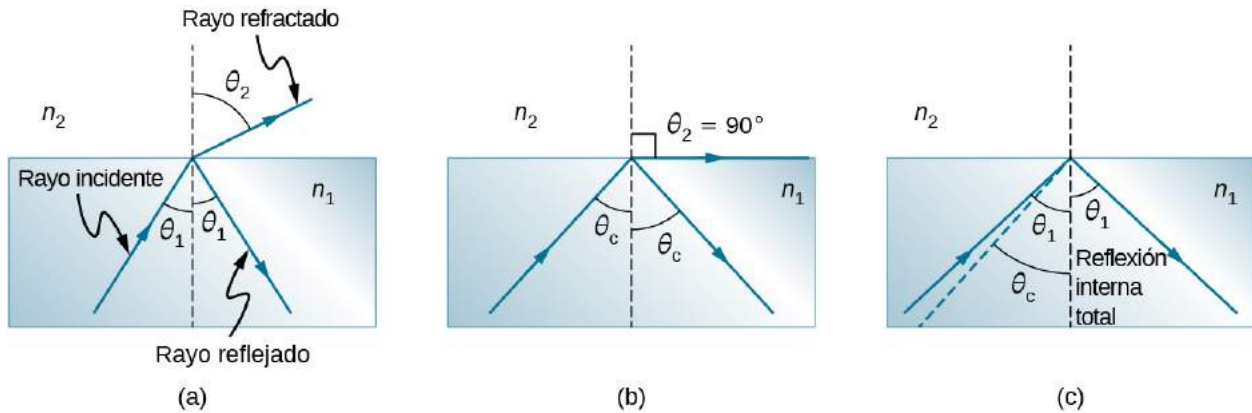
Al final de esta sección, podrá:

- Explicar el fenómeno de la reflexión interna total
- Describir el funcionamiento y los usos de las fibras ópticas
- Analizar la razón del brillo de los diamantes

Un espejo de buena calidad puede reflejar más de 90% de la luz que incide sobre él, absorbiendo el resto. Pero sería útil tener un espejo que refleje toda la luz que incide sobre él. Es interesante señalar que podemos producir una reflexión total utilizando un aspecto de la refracción.

Considere lo que ocurre cuando un rayo de luz incide en la superficie entre dos materiales, como se muestra en la [Figura 1.14\(a\)](#). Una parte de la luz atraviesa el límite y se refracta; el resto se refleja. Si el índice de refracción del segundo medio es menor que el del primero, como se muestra en la figura, el rayo se desvía de la perpendicular. (Dado que  $n_1 > n_2$ , el ángulo de refracción es mayor que el ángulo de incidencia, es decir,

$\theta_2 > \theta_1$  .). Imagine ahora lo que ocurre al aumentar el ángulo de incidencia. Esto hace que  $\theta_2$  aumente también. Lo más grande que el ángulo de refracción  $\theta_2$  puede ser es  $90^\circ$ , como se muestra en la parte (b). El **ángulo crítico**  $\theta_c$  para una combinación de materiales se define como el ángulo de incidencia  $\theta_1$  que produce un ángulo de refracción de  $90^\circ$ . Es decir,  $\theta_c$  es el ángulo de incidencia para el que  $\theta_2 = 90^\circ$ . Si el ángulo de incidencia  $\theta_1$  es mayor que el ángulo crítico, como se muestra en la [Figura 1.14\(c\)](#), entonces toda la luz se refleja de nuevo en el medio 1, una condición que se denomina **reflexión interna total**. (Como muestra la figura, los rayos reflejados obedecen a la ley de reflexión, de modo que el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia en los tres casos)



**FIGURA 1.14** (a) Un rayo de luz atraviesa un límite donde el índice de refracción disminuye. Es decir,  $n_2 < n_1$ . El rayo se aleja de la perpendicular. (b) El ángulo crítico  $\theta_c$  es el ángulo de incidencia que tiene un ángulo de refracción de  $90^\circ$ . (c) La reflexión interna total se produce cuando el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo crítico.

La ley de Snell establece la relación entre los ángulos y los índices de refracción. Viene dado por

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2.$$

Cuando el ángulo incidente es igual al ángulo crítico ( $\theta_1 = \theta_c$ ), el ángulo de refracción es de  $90^\circ$  ( $\theta_2 = 90^\circ$ ). Si observamos que  $\sin 90^\circ = 1$ , la ley de Snell en este caso se convierte en

$$n_1 \sin \theta_c = n_2.$$

Por tanto, el ángulo crítico para una determinada combinación de materiales  $\theta_c$  es el siguiente

$$\theta_c = \sin^{-1} \left( \frac{n_2}{n_1} \right) \text{ para } n_1 > n_2. \quad 1.5$$

La reflexión interna total se produce para cualquier ángulo de incidencia que sea mayor que el ángulo crítico  $\theta_c$ , y solo puede ocurrir cuando el segundo medio tiene un índice de refracción menor que el primero. Tome en cuenta que esta ecuación está escrita para un rayo de luz que viaja en el medio 1 y se refleja en el medio 2, como se muestra en la [Figura 1.14](#).

## EJEMPLO 1.4

### Determinación del ángulo crítico

¿Cuál es el ángulo crítico para la luz que viaja en un tubo de poliestireno (un tipo de plástico) rodeado de aire? El índice de refracción del poliestireno es de 1,49.

#### Estrategia

Considere que el índice de refracción del aire es 1,00, como se había mencionado antes. Por lo tanto, se cumple la condición de que el segundo medio (aire) debe tener un índice de refracción menor que el primero (plástico), y podemos utilizar la ecuación

$$\theta_c = \text{sen}^{-1} \left( \frac{n_2}{n_1} \right)$$

para encontrar el ángulo crítico  $\theta_c$ , donde  $n_2 = 1,00$  y  $n_1 = 1,49$ .

### Solución

Al sustituir los valores identificados, se obtiene

$$\theta_c = \text{sen}^{-1} \left( \frac{1,00}{1,49} \right) = \text{sen}^{-1}(0,671) = 42,2^\circ.$$

### Importancia

Este resultado significa que cualquier rayo de luz dentro del plástico que incida en la superficie con un ángulo mayor de  $42,2^\circ$  se refleje totalmente. Esto hace que la superficie interior del plástico transparente sea un espejo perfecto para dichos rayos, sin necesidad del plateado que se utiliza en los espejos comunes. Diferentes combinaciones de materiales tienen diferentes ángulos críticos, pero cualquier combinación con  $n_1 > n_2$  puede producir una reflexión interna total. El mismo cálculo realizado aquí muestra que el ángulo crítico para un rayo que va del agua al aire es de  $48,6^\circ$ , mientras que el ángulo crítico del rayo que va del diamante al aire es de  $24,4^\circ$ , y que del vidrio flint al vidrio crown es de  $66,3^\circ$ .

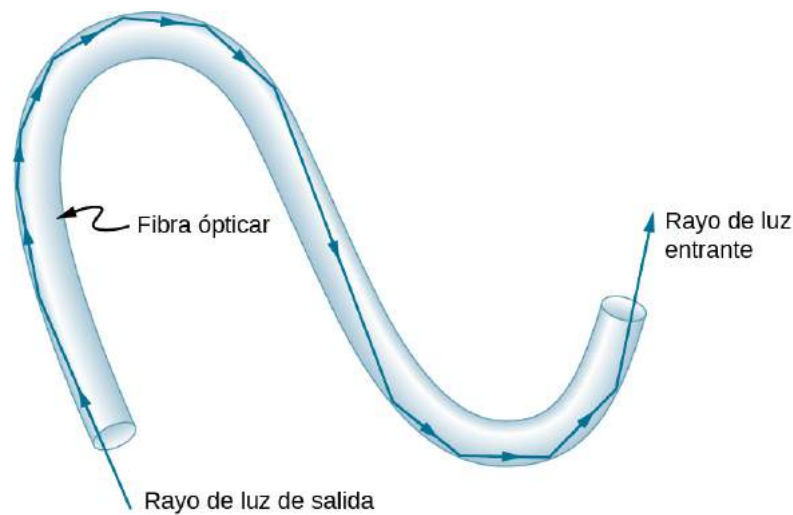
## ✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 1.3

En la superficie entre el aire y el agua, los rayos de luz pueden ir del aire al agua y del agua al aire. ¿Para qué tipo de rayo no hay posibilidad de reflexión interna total?

En la foto que abre este capítulo, la imagen de una nadadora bajo el agua es captada por una cámara que también está sumergida. La nadadora de la mitad superior de la fotografía, aparentemente mirando hacia arriba, es, de hecho, una imagen reflejada de la nadadora que está abajo. La ondulación circular cerca del centro de la fotografía está en realidad en la superficie del agua. El agua inalterada que la rodea constituye una buena superficie reflectante cuando se ve desde abajo, gracias a la reflexión interna total. Sin embargo, en el borde superior de esta fotografía, los rayos procedentes de la parte inferior golpean la superficie con ángulos de incidencia inferiores al ángulo crítico, lo que permite a la cámara captar una vista de las actividades en la terraza de la piscina por encima del agua.

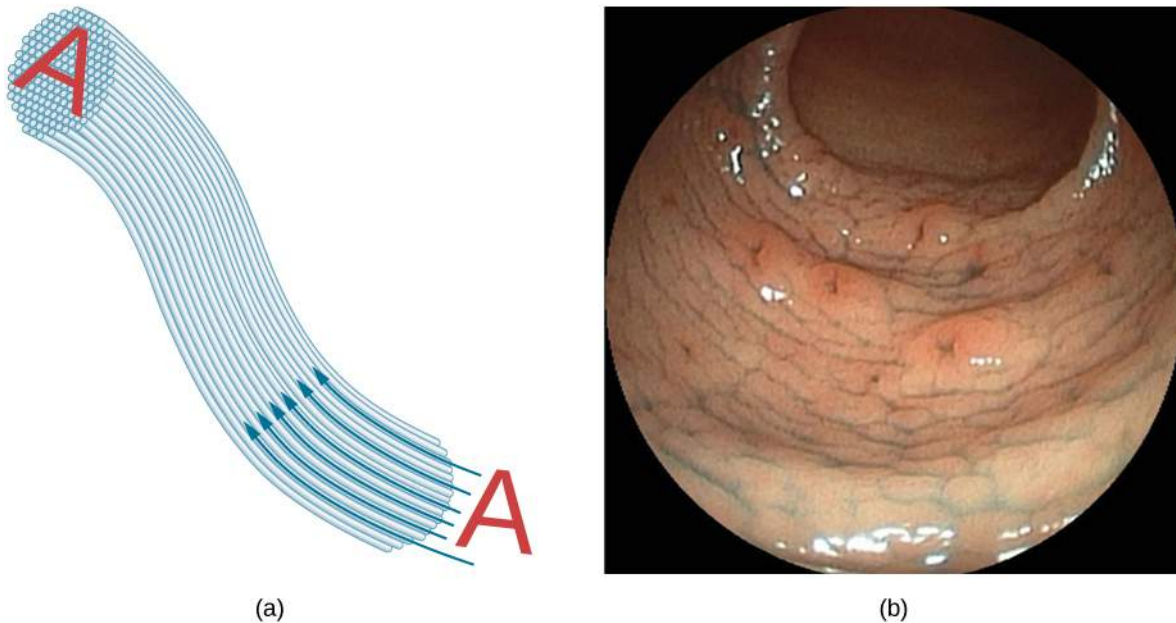
### Fibra óptica: Desde endoscopios hasta teléfonos

La fibra óptica es una de las aplicaciones de la reflexión interna total más utilizadas. En el ámbito de las comunicaciones, se utiliza para transmitir señales de teléfono, internet y televisión por cable. La **fibra óptica** emplea la transmisión de luz a través de fibras de plástico o de vidrio. Como las fibras son delgadas, es probable que la luz que entra en una de ellas incida en la superficie interior con un ángulo mayor que el ángulo crítico y, por tanto, se refleje totalmente. Consulte la [Figura 1.15](#). El índice de refracción fuera de la fibra debe ser menor que dentro de ella. De hecho, la mayoría de las fibras tienen un índice de refracción variable para permitir que se guíe más luz a lo largo de la fibra mediante la refracción interna total. Los rayos se reflejan alrededor de las esquinas, como se muestra, convirtiendo las fibras en pequeños tubos de luz.



**FIGURA 1.15** La luz que entra en una fibra óptica delgada puede incidir en la superficie interior con ángulos grandes o de roce, lo que causa que esta se refleje completamente si estos ángulos superan el ángulo crítico. Dichos rayos continúan por la fibra, incluso siguiéndola por las esquinas, dado que los ángulos de reflexión e incidencia siguen siendo grandes.

Se pueden utilizar grupos unidos de fibras para transmitir una imagen sin necesidad de una lente, como se ilustra en la [Figura 1.16](#). En la [Figura 1.16\(b\)](#) se muestra la imagen resultante de un dispositivo llamado endoscopio. Los endoscopios se utilizan para explorar el interior del cuerpo a través de sus orificios naturales o de pequeñas incisiones. La luz se transmite por grupos unidos de fibras para iluminar las partes internas, y la luz reflejada se transmite de nuevo a través de otro grupo unido para ser observada.

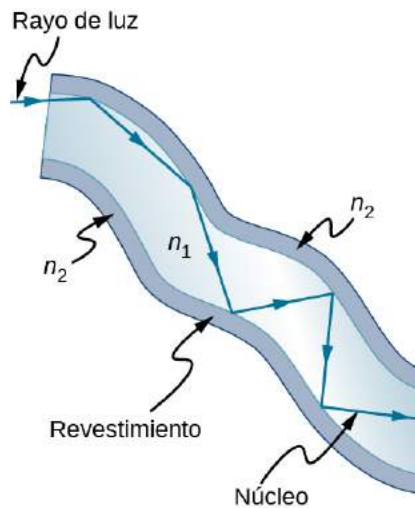


**FIGURA 1.16** (a) Un grupo unido de fibras ópticas transmite una imagen "A". (b) Un endoscopio se utiliza para explorar el cuerpo, al transmitir luz al interior y devolver una imagen como la que se muestra de una epiglotis humana (una estructura en la base de la lengua). (crédito b: modificación del trabajo de "Med\_Chaos"/Wikimedia Commons)

La fibra óptica ha revolucionado las técnicas quirúrgicas y las observaciones en el interior del cuerpo, con multitud de usos médicos de diagnóstico y terapéuticos. Se puede realizar una intervención quirúrgica, como la cirugía artroscópica en una articulación de la rodilla o del hombro, empleando herramientas de corte acopladas y observadas con el endoscopio. También se pueden obtener muestras como, por ejemplo, al

realizar una polipectomía endoscópica con asa para su examen externo. La flexibilidad del grupo unido de fibras ópticas permite a los médicos desplazarlas por regiones del cuerpo pequeñas y de difícil acceso, como los intestinos, el corazón, los vasos sanguíneos y las articulaciones. Se han convertido en procedimientos habituales la transmisión de un intenso rayo láser para quemar las placas que obstruyen las arterias principales, así como la irradiación de luz para activar los medicamentos de quimioterapia. De hecho, las fibras ópticas han permitido la microcirugía y la cirugía a distancia, en las que las incisiones son pequeñas y los dedos del cirujano no necesitan tocar el tejido enfermo.

Los grupos unidos de fibras ópticas están recubiertos de un material de revestimiento que tiene un índice de refracción inferior al del núcleo (Figura 1.17). El revestimiento impide que la luz se transmita entre el grupo unido de fibras. Sin el revestimiento, la luz podría pasar entre las fibras que están en contacto, dado que sus índices de refracción son idénticos. Dado que no entra luz en el revestimiento (hay una reflexión interna total hacia el núcleo), no se puede transmitir ninguna luz entre las fibras revestidas que están en contacto entre sí. Por el contrario, la luz se propaga a lo largo de la fibra, minimizando la pérdida de señal y asegurando que se forme una imagen de calidad en el otro extremo. El revestimiento y una capa protectora adicional hacen que las fibras ópticas sean duraderas y flexibles.



**FIGURA 1.17** Las fibras de los grupos unidos están revestidas por un material que tiene un índice de refracción inferior al del núcleo para garantizar una reflexión interna total, incluso cuando las fibras están en contacto entre sí.

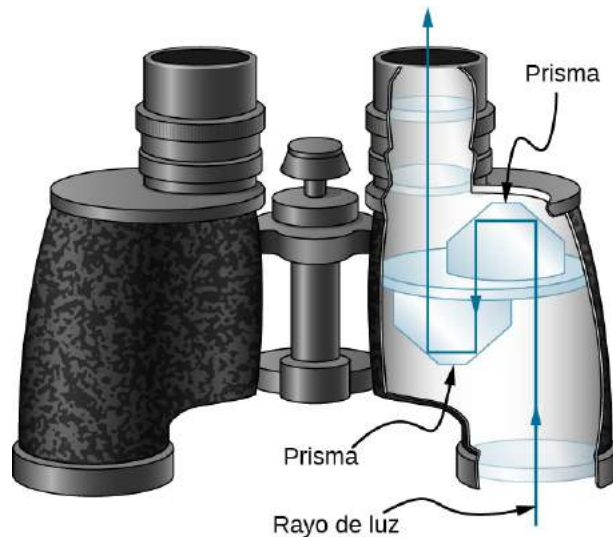
Se han diseñado y fabricado pequeñas lentes especiales que pueden fijarse a los extremos de los grupos unidos de fibras. La luz que emerge de un grupo unido de fibras puede enfocarse a través de una lente de este tipo, obteniendo imágenes de un punto diminuto. En algunos casos, se puede escanear el punto, lo que permite obtener imágenes de calidad de una región del interior del cuerpo. Los diminutos filtros ópticos especiales insertados en el extremo del grupo unido de fibras tienen la capacidad de obtener imágenes del interior de los órganos situados a decenas de micras por debajo de la superficie, sin necesidad de cortarla, lo que se conoce como diagnóstico no intrusivo. Esto es particularmente útil para determinar la extensión de los cánceres del estómago y del intestino.

En otro tipo de aplicaciones, las fibras ópticas se utilizan habitualmente para transmitir señales para conversaciones telefónicas y comunicaciones por internet. Se han colocado extensos cables de fibra óptica en el fondo del océano y bajo tierra para permitir las comunicaciones ópticas. Los sistemas de comunicación por fibra óptica ofrecen varias ventajas respecto a los sistemas eléctricos (de cobre), sobre todo para las largas distancias. Las fibras pueden hacerse tan transparentes que la luz puede viajar muchos kilómetros antes de volverse lo suficientemente tenue como para requerir amplificación, algo muy superior a los conductores de cobre. Esta propiedad de las fibras ópticas se llama baja pérdida. Los láseres emiten luz con características que permiten muchas más conversaciones en una fibra que las que son posibles con las señales eléctricas en un solo conductor. Esta propiedad de las fibras ópticas se denomina ancho de banda elevado. Las señales ópticas en una fibra no producen efectos indeseables en otras fibras adyacentes. Esta propiedad de las fibras ópticas se denomina diafonía reducida. En un capítulo posterior exploraremos las características únicas de la

radiación láser.

### Reflectores de esquina y diamantes

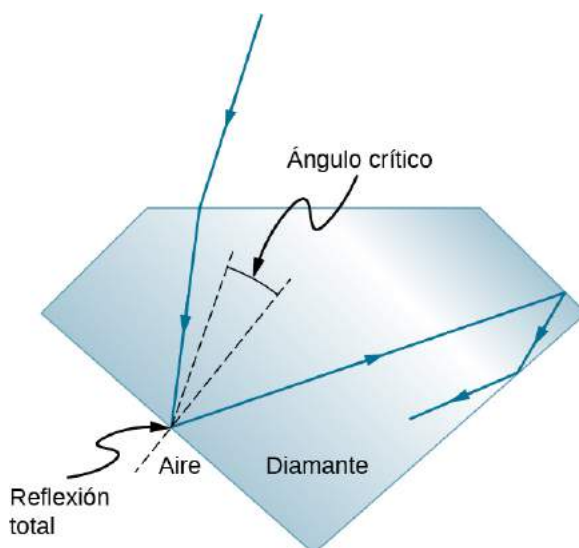
Los reflectores de esquina ([la ley de reflexión](#)) son perfectamente eficaces cuando se cumplen las condiciones de la reflexión interna total. Con los materiales habituales, es fácil obtener un ángulo crítico inferior a  $45^\circ$ . Un uso de estos espejos perfectos es en los binoculares, como se muestra en la [Figura 1.18](#). También se utiliza en los periscopios de los submarinos.



**FIGURA 1.18** Estos binoculares emplean reflectores de esquina (prismas) con reflexión interna total para hacer llegar la luz a los ojos del observador.

La reflexión interna total, junto con un gran índice de refracción, explica por qué los diamantes brillan más que otros materiales. El ángulo crítico para una superficie diamante-aire es de solo  $24,4^\circ$ , por lo que cuando la luz entra en un diamante, le cuesta volver a salir ([Figura 1.19](#)). Aunque la luz entra libremente en el diamante, solo puede salir si forma un ángulo inferior a  $24,4^\circ$ . Las facetas de los diamantes están pensadas específicamente para que esto sea poco probable. Los buenos diamantes son muy claros, por lo que la luz hace muchos reflejos internos y se concentra antes de salir, de ahí el brillo. (El circón es una piedra preciosa natural que tiene un índice de refracción excepcionalmente grande, pero no es tan grande como el diamante, por lo que no es tanpreciado. Se fabrica circonio cúbico que tiene un índice de refracción aún mayor ( $\approx 2,17$ ), pero sigue siendo menor que la del diamante). Los colores que se ven salir de un diamante claro no se deben al color del diamante, que suele ser casi incoloro. Los colores son el resultado de la dispersión, de la que hablamos en la sección [Dispersión](#). Los diamantes coloreados obtienen su color a partir de defectos estructurales de la red cristalina y de la inclusión de cantidades mínimas de grafito y otros materiales. La mina de Argyle, en Australia Occidental, produce alrededor del 90% de los diamantes rosas, rojos, champán y coñac del mundo, mientras que alrededor del 50% de los diamantes claros del mundo proceden del centro y sur de África.





**FIGURA 1.19** La luz no puede escapar fácilmente de un diamante, porque su ángulo crítico con el aire es muy pequeño. La mayoría de los reflejos son totales, y las facetas están colocadas de forma que la luz solo pueda salir por determinadas vías, concentrando así la luz y haciendo que el diamante brille con fuerza.

### INTERACTIVO

Explore la [refracción y la reflexión de la luz \(https://openstax.org/l/21bendoflight\\_es\)](https://openstax.org/l/21bendoflight_es) entre dos medios con diferentes índices de refracción. Intente hacer desaparecer el rayo refractado con la reflexión interna total. Utilice el transportador para medir el ángulo crítico y compárelo con la predicción de la [Ecuación 1.5](#).

## 1.5 Dispersión

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar la causa de la dispersión en un prisma
- Describir los efectos de la dispersión en la producción del arcoíris
- Resumir las ventajas y desventajas de la dispersión

A todo el mundo le gusta el espectáculo de un arcoíris resplandeciendo en un oscuro cielo de tormenta. ¿Cómo se descompone la luz del sol que incide sobre gotas de lluvia en el arcoíris de colores que vemos? El mismo proceso hace que la luz blanca se descomponga en colores mediante un prisma de vidrio transparente o un diamante ([Figura 1.20](#)).



(a)

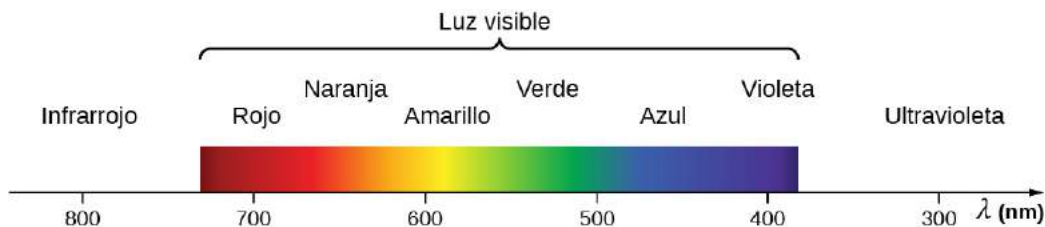


(b)

**FIGURA 1.20** Los colores del arcoíris (a) y los producidos por un prisma (b) son idénticos. (crédito a: modificación de la obra de "Alfredo55"/Wikimedia Commons; crédito b: modificación de la obra de la NASA)

Vemos unos seis colores en el arcoíris: rojo, naranja, amarillo, verde, azul y violeta; a veces también aparece el índigo. Estos colores están asociados a diferentes longitudes de onda de la luz, como se muestra en la [Figura 1.21](#). Cuando nuestro ojo recibe luz de longitud de onda pura, tendemos a ver solo uno de los seis colores,

según la longitud de onda. Los miles de tonalidades que podemos percibir en otras situaciones son la respuesta de nuestro ojo a diversas mezclas de longitudes de onda. La luz blanca, en particular, es una mezcla bastante uniforme de todas las longitudes de onda visibles. La luz solar, considerada blanca, parece en realidad un poco amarilla, debido a su mezcla de longitudes de onda, pero contiene todas las longitudes de onda visibles. Los colores de la figura son iguales a la secuencia de colores del arcoíris. Esto implica que la luz blanca se distribuye en un arcoíris según la longitud de onda. La **dispersión** se define como la propagación de la luz blanca en todo su espectro de longitudes de onda. Más técnicamente, la dispersión se produce siempre que la propagación de la luz depende de la longitud de onda.



**FIGURA 1.21** Aunque el arcoíris se asocia con seis colores, este es una distribución continua de colores según las longitudes de onda.

Cualquier tipo de onda puede presentar dispersión. Por ejemplo, las ondas sonoras, todos los tipos de ondas electromagnéticas y las ondas de agua pueden dispersarse según la longitud de onda. La dispersión puede requerir circunstancias especiales y puede dar lugar a manifestaciones espectaculares, como la producción de un arcoíris. Esto también es cierto para el sonido, dado que todas las frecuencias viajan normalmente a la misma velocidad. Si escucha el sonido a través de un tubo largo, como la manguera de una aspiradora, puede oírlo fácilmente dispersado por la interacción con el tubo. La dispersión, de hecho, puede revelar mucho sobre lo que la onda ha encontrado y lo que dispersa sus longitudes de onda. La dispersión de la radiación electromagnética del espacio exterior, por ejemplo, ha revelado mucho sobre lo que existe entre las estrellas, el llamado medio interestelar.

### INTERACTIVO

En su [vídeo \(https://openstax.org/l/21nickmoorevid\)](https://openstax.org/l/21nickmoorevid) Nick Moore habla de la dispersión de un pulso al presionar y soltar un resorte largo. Siga su explicación mientras Moore repite las imágenes de alta velocidad que muestran que las ondas de alta frecuencia superan a las de baja frecuencia.

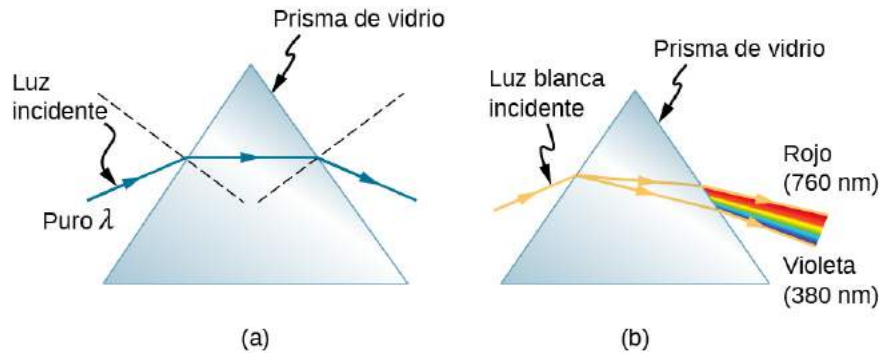
La refracción es responsable de la dispersión en el arcoíris y en muchas otras situaciones. El ángulo de refracción depende del índice de refracción, como sabemos por la ley de Snell. Sabemos que el índice de refracción  $n$  depende del medio. Pero para un medio determinado,  $n$  también depende de la longitud de onda ([Tabla 1.2](#)). Observe que para un medio determinado,  $n$  aumenta a medida que disminuye la longitud de onda y es mayor para la luz violeta. Así, la luz violeta se desvía más que la roja, como se muestra para un prisma en [Figura 1.22\(b\)](#). La luz blanca se dispersa en la misma secuencia de longitudes de onda que se ve en la [Figura 1.20](#) y la [Figura 1.21](#).

Medio	Rojo (660 nm)	Naranja (610 nm)	Amarillo (580 nm)	Verde (550 nm)	Azul (470 nm)	Violeta (410 nm)
Agua	1,331	1,332	1,333	1,335	1,338	1,342
Diamante	2,410	2,415	2,417	2,426	2,444	2,458
Vidrio crown	1,512	1,514	1,518	1,519	1,524	1,530
Vidrio, flint	1,662	1,665	1,667	1,674	1,684	1,698



Medio	Rojo (660 nm)	Naranja (610 nm)	Amarillo (580 nm)	Verde (550 nm)	Azul (470 nm)	Violeta (410 nm)
Poliestireno	1,488	1,490	1,492	1,493	1,499	1,506
Cuarzo, fundido	1,455	1,456	1,458	1,459	1,462	1,468

**TABLA 1.2** Índice de refracción  $n$  en medios seleccionados a distintas longitudes de onda

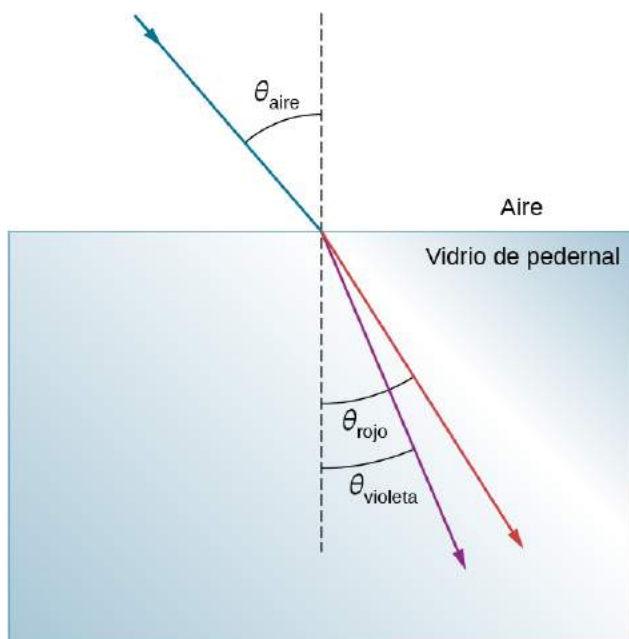


**FIGURA 1.22** (a) Una longitud de onda pura de luz cae sobre un prisma y se refracta en ambas superficies. (b) La luz blanca es dispersada por el prisma (se muestra exagerada). Dado que el índice de refracción varía con la longitud de onda, los ángulos de refracción varían con la longitud de onda. Se produce una secuencia del rojo al violeta, ya que el índice de refracción aumenta constantemente con la disminución de la longitud de onda.

### EJEMPLO 1.5

#### Dispersión de la luz blanca a través de un vidrio flint

Un haz de luz blanca pasa del aire al vidrio flint con un ángulo de incidencia de  $43,2^\circ$ . ¿Cuál es el ángulo entre las partes roja (660 nm) y violeta (410 nm) de la luz refractada?



#### Estrategia

Los valores de los índices de refracción del vidrio flint a distintas longitudes de onda se indican en la [Tabla 1.2](#).

Utilice estos valores para calcular el ángulo de refracción de cada color y luego use la diferencia para encontrar el ángulo de dispersión.

### Solución

Aplicación de la ley de refracción para la parte roja del rayo

$$n_{\text{aire}} \sin \theta_{\text{aire}} = n_{\text{rojo}} \sin \theta_{\text{rojo}},$$

podemos resolver el ángulo de refracción como

$$\theta_{\text{rojo}} = \sin^{-1} \left( \frac{n_{\text{aire}} \sin \theta_{\text{aire}}}{n_{\text{rojo}}} \right) = \sin^{-1} \left[ \frac{(1,000) \sin 43,2^\circ}{(1,512)} \right] = 27,0^\circ.$$

Del mismo modo, el ángulo de incidencia para la parte violeta del haz es

$$\theta_{\text{violeta}} = \sin^{-1} \left( \frac{n_{\text{aire}} \sin \theta_{\text{aire}}}{n_{\text{violeta}}} \right) = \sin^{-1} \left[ \frac{(1,000) \sin 43,2^\circ}{(1,530)} \right] = 26,4^\circ.$$

La diferencia entre estos dos ángulos es

$$\theta_{\text{rojo}} - \theta_{\text{violeta}} = 27,0^\circ - 26,4^\circ = 0,6^\circ.$$

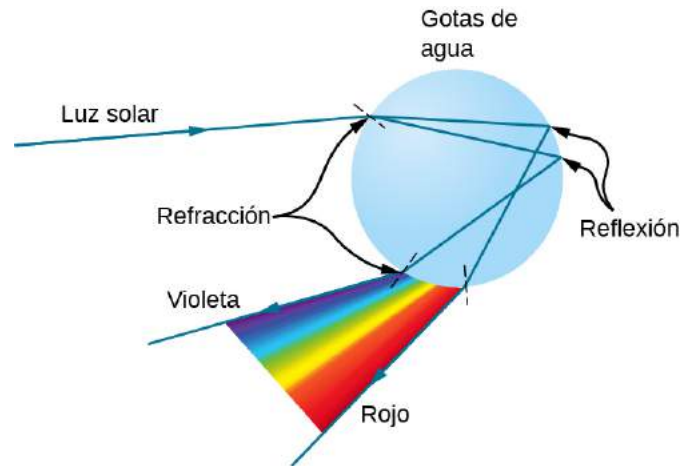
### Importancia

Aunque  $0,6^\circ$  puede parecer un ángulo insignificante, si se deja que este haz se propague a una distancia lo suficientemente larga, la dispersión de los colores se hace bastante notable.

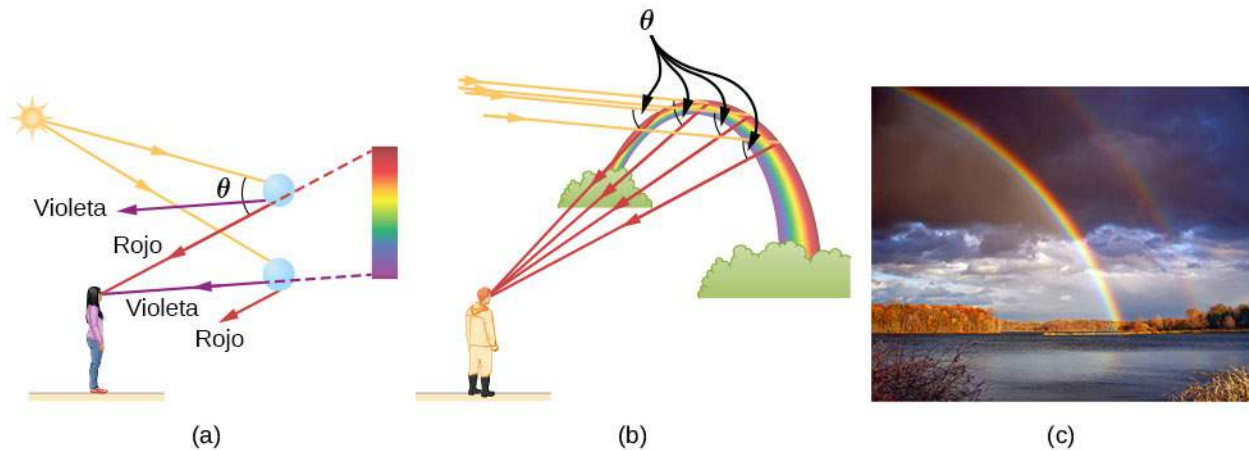
## ✓ **COMPRUEBE LO APRENDIDO 1.4**

En el ejemplo anterior, ¿a qué distancia dentro del bloque de vidrio flint tendrían que avanzar los rayos rojos y violetas antes de que se separen 1,0 mm?

El arcoíris se produce por una combinación de refracción y reflexión. Es posible que se haya dado cuenta de que el arcoíris solo se ve cuando se aparta la vista del Sol. La luz entra en una gota de agua y se refleja en la parte posterior de la gota ([Figura 1.23](#)). La luz se refracta cuando entra y cuando sale de la gota. Dado que el índice de refracción del agua varía con la longitud de onda, la luz se dispersa y se observa el arcoíris ([Figura 1.24\(a\)](#)). (No hay dispersión en la superficie posterior, porque la ley de reflexión no depende de la longitud de onda) El arcoíris real de colores que un observador ve depende de la gran cantidad de rayos que se refractan y reflejan hacia sus ojos desde muchas gotas de agua. El efecto es más espectacular cuando el fondo es oscuro, como en las tormentas, pero también puede observarse en las cascadas y los aspersores de césped. El arco de un arcoíris proviene de la necesidad de mirar a un ángulo específico en relación con la dirección del Sol, como se ilustra en la parte (b). Si se producen dos reflejos de luz dentro de la gota de agua, se produce otro arcoíris "secundario". Este raro acontecimiento produce un arco que se sitúa por encima del arcoíris primario, como en la parte (c), y produce colores en el orden inverso al del arcoíris primario, con el rojo en el ángulo más bajo y el violeta en el más grande.



**FIGURA 1.23** Un rayo de luz que cae sobre esta gota de agua entra y se refleja en la parte posterior de la gota. Esta luz se refracta y se dispersa al entrar y al salir de la gota.



**FIGURA 1.24** (a) Los diferentes colores surgen en diferentes direcciones, por lo que hay que mirar en diferentes lugares para ver los diferentes colores de un arcoíris. (b) El arco de un arcoíris es el resultado del hecho de que una línea entre el observador y cualquier punto del arco debe formar el ángulo correcto con los rayos paralelos de la luz solar para que el observador reciba los rayos refractados. (c) Arcoíris doble. (crédito c: modificación del trabajo de "Nicholas"/Wikimedia Commons)

La dispersión puede producir hermosos arcoíris, pero puede causar problemas en los sistemas ópticos. La luz blanca que se utiliza para transmitir mensajes en una fibra se dispersa, extendiéndose en el tiempo y acabando por superponerse con otros mensajes. Dado que un láser produce una longitud de onda casi pura, su luz experimenta poca dispersión, una ventaja sobre la luz blanca para transmitir información. En cambio, la dispersión de las ondas electromagnéticas que nos llegan del espacio exterior puede utilizarse para determinar la cantidad de materia que atraviesan.

## 1.6 Principio de Huygens

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

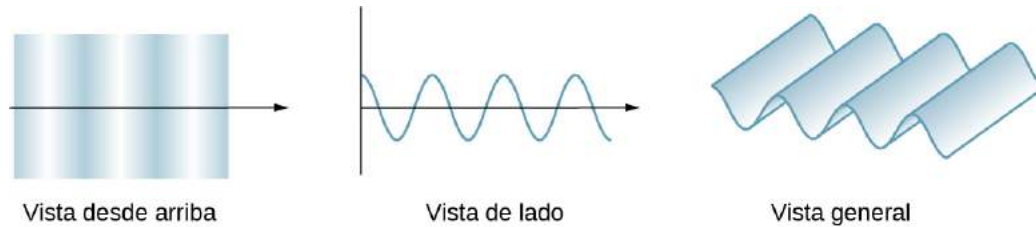
Al final de esta sección, podrá:

- Describir el principio de Huygens
- Utilizar el principio de Huygens para explicar la ley de reflexión
- Utilizar el principio de Huygens para explicar la ley de refracción
- Utilizar el principio de Huygens para explicar la difracción

Hasta ahora, hemos hablado en este capítulo de los fenómenos ópticos utilizando el modelo de rayos de luz. Sin embargo, algunos fenómenos requieren análisis y explicaciones basadas en las características

ondulatorias de la luz. Esto es especialmente cierto cuando la longitud de onda no es despreciable en comparación con las dimensiones de un dispositivo óptico, como una rendija en el caso de la *difracción*. El principio de Huygens es una herramienta indispensable para este análisis.

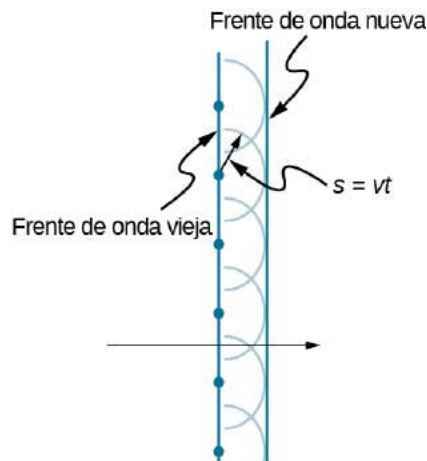
La [Figura 1.25](#) muestra el aspecto de una onda transversal vista desde arriba y desde un lado. Se puede imaginar que una onda de luz se propaga así, aunque en realidad no la vemos contonearse por el espacio. Desde arriba, vemos los frentes de las olas (o crestas de las olas) como si estuviéramos mirando las olas del océano. La vista lateral sería un gráfico del campo eléctrico o magnético. La vista desde arriba es quizá más útil para desarrollar conceptos sobre la **óptica de onda**.



**FIGURA 1.25** Una onda transversal, como una onda de luz electromagnética, vista desde arriba y desde un lado. La dirección de propagación es perpendicular a los frentes de onda (o crestas de onda) y se representa mediante un rayo.

El científico holandés Christiaan Huygens (1629-1695) desarrolló una técnica útil para determinar con detalle cómo y dónde se propagan las ondas. Partiendo de una posición conocida, el **principio de Huygens** establece que cada punto de un frente de onda es una fuente de ondículas que se propagan hacia adelante con la misma velocidad que la propia onda. El nuevo frente de onda es tangente a todas las ondículas.

La [Figura 1.26](#) muestra cómo se aplica el principio de Huygens. Un frente de onda es el borde largo que se mueve, por ejemplo, con la cresta o la depresión. Cada punto del frente de onda emite una onda semicircular que se mueve a la velocidad de propagación  $v$ . Podemos dibujar estas ondículas en un momento  $t$  posterior, de forma que se hayan desplazado una distancia  $s = vt$ . El nuevo frente de onda es un plano tangente a las ondículas y es donde esperaríamos que la onda estuviera un tiempo  $t$  después. El principio de Huygens funciona para todos los tipos de ondas, incluidas las ondas de agua, las ondas sonoras y las ondas de luz. Es útil no solo para describir cómo se propagan las ondas de luz, sino también para explicar las leyes de la reflexión y la refracción. Además, veremos que el principio de Huygens nos dice cómo y dónde interfieren los rayos de luz.

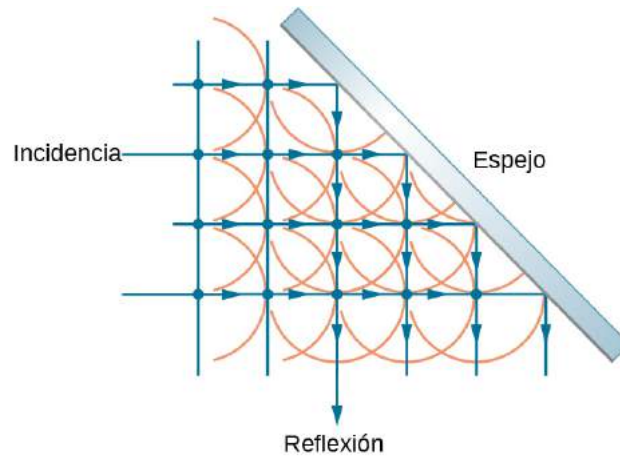


**FIGURA 1.26** El principio de Huygens aplicado a un frente de onda recto. Cada punto del frente de onda emite una onda semicircular que se desplaza una distancia  $s = vt$ . El nuevo frente de onda es una línea tangente a las ondículas.

## Reflexión

La [Figura 1.27](#) muestra cómo un espejo refleja una onda entrante en un ángulo igual al ángulo incidente,

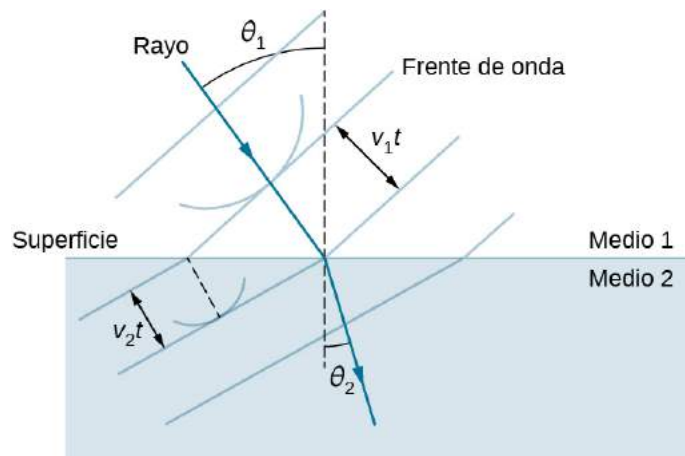
verificando la ley de reflexión. Cuando el frente de onda incide en el espejo, las ondículas se emiten primero por la parte izquierda del espejo y luego por la derecha. Las ondículas más cercanas a la izquierda han tenido tiempo de viajar más lejos, produciendo un frente de onda que viaja en la dirección indicada.



**FIGURA 1.27** El principio de Huygens aplicado a un frente de onda plano que choca con un espejo. Las ondículas mostradas se emitieron cuando cada punto del frente de onda golpeó el espejo. La tangente a estas ondículas muestra que el nuevo frente de onda se ha reflejado en un ángulo igual al ángulo de incidencia. La dirección de propagación es perpendicular al frente de onda, como muestran las flechas que apuntan hacia abajo.

### Refracción

La ley de refracción puede explicarse aplicando el principio de Huygens a un frente de onda que pasa de un medio a otro ([Figura 1.28](#)). Cada onda de la figura se emitió cuando el frente de onda cruzó la interfase entre los medios. Dado que la velocidad de la luz es menor en el segundo medio, las ondas no viajan tan lejos en un tiempo determinado, y el nuevo frente de onda cambia de dirección como se muestra. Esto explica por qué un rayo cambia de dirección para acercarse a la perpendicular cuando la luz se ralentiza. La ley de Snell puede derivarse de la geometría en la [Figura 1.28](#) ([Ejemplo 1.6](#)).



**FIGURA 1.28** El principio de Huygens se aplica a un frente de onda plano que viaja de un medio a otro, donde su velocidad es menor. El rayo se dobla hacia la perpendicular, dado que las ondículas tienen una velocidad menor en el segundo medio.

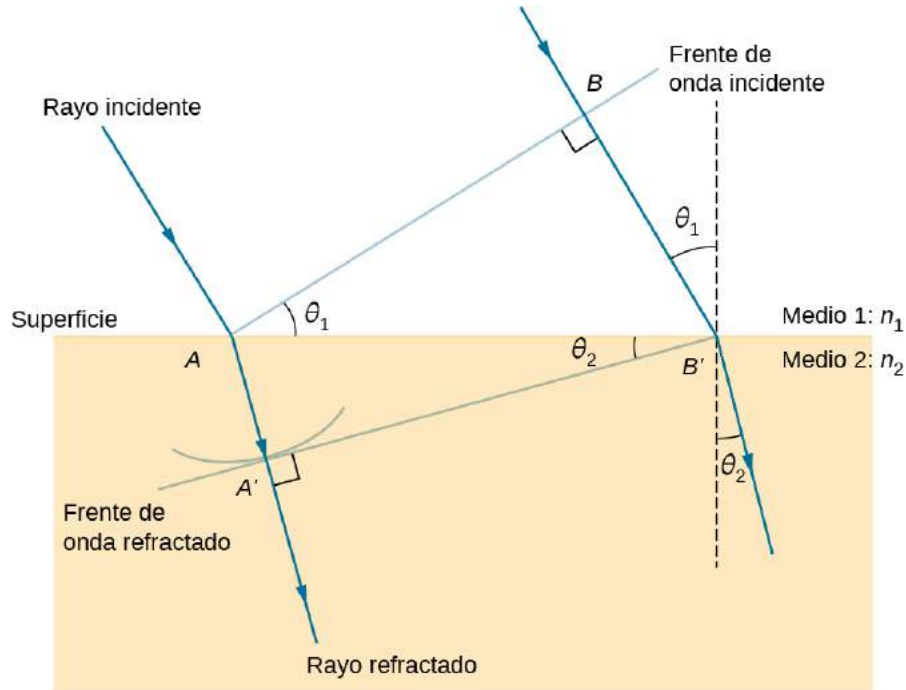
### EJEMPLO 1.6

#### Deducir la ley de refracción

Al examinar la geometría de los frentes de onda, deduzca la ley de refracción.

**Estrategia**

Considere la [Figura 1.29](#), que es una ampliación de la [Figura 1.28](#). Muestra que el frente de onda incidente acaba de llegar a la superficie en el punto  $A$ , mientras que el punto  $B$  está todavía bien dentro del medio 1. En el tiempo  $\Delta t$  que tarda una ondícula desde  $B$  en llegar a  $B'$  en la superficie a velocidad  $v_1 = c/n_1$ , una ondícula desde  $A$  viaja al medio 2 una distancia de  $AA' = v_2 \Delta t$ , donde  $v_2 = c/n_2$ . Tenga en cuenta que en este ejemplo,  $v_2$  es más lento que  $v_1$  porque  $n_1 < n_2$ .



**FIGURA 1.29** Geometría de la ley de refracción del medio 1 al medio 2.

**Solución**

El segmento de la superficie  $AB'$  es compartido por el triángulo  $ABB'$  que está dentro del medio 1 y el triángulo  $AA'B'$  que está dentro del medio 2. Observe que a partir de la geometría, el ángulo  $\angle BAB'$  es igual al ángulo de incidencia,  $\theta_1$ . De la misma manera, el  $\angle AB'A'$  es  $\theta_2$ .

La longitud del  $AB'$  se da de dos maneras como

$$AB' = \frac{BB'}{\sin \theta_1} = \frac{AA'}{\sin \theta_2}.$$

Al invertir la ecuación y sustituir  $AA' = c\Delta t/n_2$  desde arriba y de forma similar  $BB' = c\Delta t/n_1$ , obtenemos

$$\frac{\sin \theta_1}{c\Delta t/n_1} = \frac{\sin \theta_2}{c\Delta t/n_2}.$$

La cancelación de  $c\Delta t$  nos permite simplificar esta ecuación en la forma conocida

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2.$$

**Importancia**

Aunque Snell estableció la ley de refracción de forma experimental y se expuso en la sección [Refracción](#), para deducirla aquí se requiere el principio de Huygens y la comprensión de que la velocidad de la luz es diferente en diferentes medios.

---

**✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 1.5**

En el [Ejemplo 1.6](#), tuvimos  $n_1 < n_2$ . Si  $n_2$  se redujera de tal manera que  $n_1 > n_2$  y la velocidad de la luz en el

medio 2 es más rápida que en el medio 1, ¿qué pasaría con la longitud de  $AA'$ ? ¿Qué pasaría con el frente de onda  $A'B'$  y la dirección del rayo refractado?

## INTERACTIVO

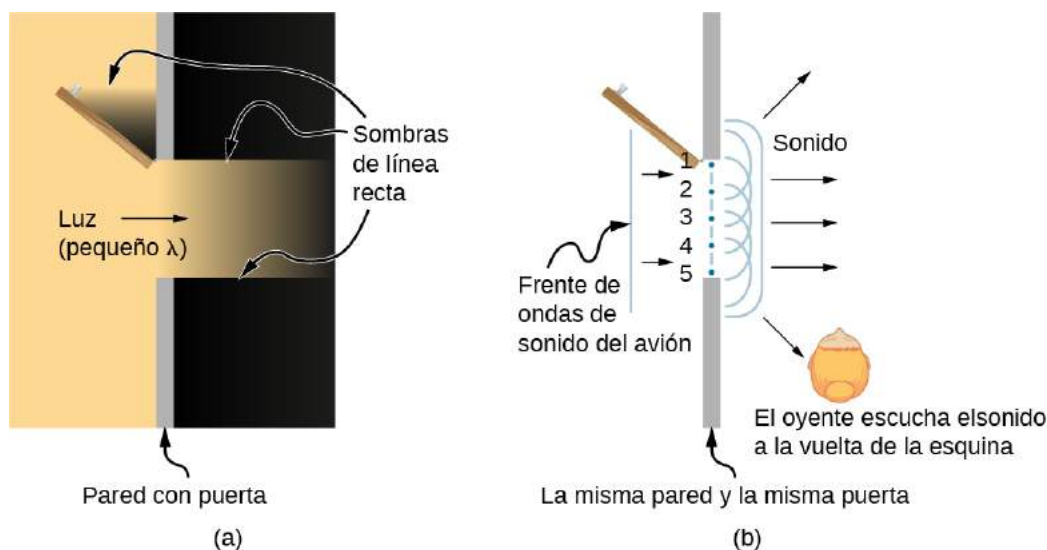
Esta [applet \(https://openstax.org/l/21walfedaniref\)](https://openstax.org/l/21walfedaniref) de Walter Fendt muestra una animación de reflexión y refracción utilizando las ondículas de Huygens mientras usted controla los parámetros. Asegúrese de presionar en "Next step" (Paso siguiente) para visualizar las ondículas. Se pueden ver los frentes de onda reflejados y refractados que se forman.

## Difracción

¿Qué ocurre cuando una onda atraviesa una abertura, como la luz que entra por una puerta abierta en una habitación oscura? Con respecto a la luz, observamos una sombra nítida de la puerta en el suelo de la habitación, y ninguna luz visible se desvía por las esquinas hacia otras partes de la habitación. Cuando el sonido pasa a través de una puerta, lo escuchamos en toda la habitación y, por tanto, observamos que el sonido se propaga al pasar por una abertura de este tipo (Figura 1.30). ¿Cuál es la diferencia entre el comportamiento de las ondas sonoras y las ondas de luz en este caso? La respuesta es que la luz tiene longitudes de onda muy cortas y actúa como un rayo. El sonido tiene una longitud de onda del orden del tamaño de la puerta y se curva en las esquinas (para una frecuencia de 1000 Hz,

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{330 \text{ m/s}}{1.000 \text{ s}^{-1}} = 0,33 \text{ m,}$$

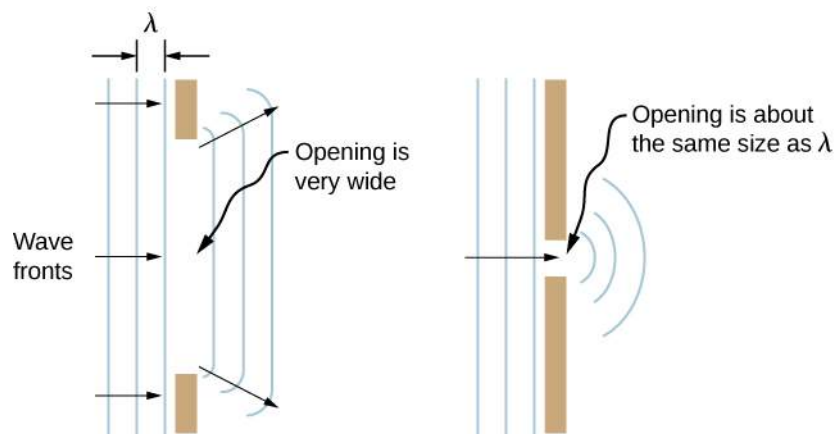
unas tres veces menor que el ancho de la puerta).



**FIGURA 1.30** (a) La luz que pasa a través de una puerta hace un contorno nítido en el suelo. Dado que la longitud de onda de la luz es muy pequeña comparada con el tamaño de la puerta, actúa como un rayo. (b) Las ondas sonoras se curvan hacia todas las partes de la habitación, un efecto de onda, porque su longitud de onda es similar al tamaño de la puerta.

Si hacemos pasar la luz a través de aberturas más pequeñas, como las rendijas, podemos utilizar el principio de Huygens para comprender que la luz se curva como lo hace el sonido (Figura 1.31). La curvatura de una onda alrededor de los bordes de una abertura o de un obstáculo se llama difracción. La difracción es una característica de las ondas y se produce para todos los tipos de ondas. Si se observa la difracción en algún fenómeno, es una prueba de que el fenómeno es una onda. Así, la difracción horizontal del rayo láser después de pasar por las rendijas en la Figura 1.31 es una prueba de que la luz es una onda. Aprenderá sobre la difracción con mucho más detalle en el capítulo sobre [Difracción](#).





**FIGURA 1.31** El principio de Huygens aplicado a un frente de onda plano que choca con una abertura. Los bordes del frente de onda se doblan después de pasar por la abertura, un proceso llamado difracción. La cantidad de curvatura es más extrema para una abertura pequeña, lo que concuerda con el hecho de que las características de las ondas son más notables para las interacciones con objetos del mismo tamaño que la longitud de onda.

## 1.7 Polarización

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar el cambio de intensidad al pasar la luz polarizada por un filtro polarizador
- Calcular el efecto de la polarización por reflexión y el ángulo de Brewster
- Describir el efecto de la polarización por dispersión
- Explicar el uso de materiales polarizantes en dispositivos como las pantallas de cristal líquido (liquid-crystal display, LCD)

La mayoría de nosotros conoce los lentes de sol polarizados. Tienen una capacidad especial para cortar el resplandor de la luz reflejada por el agua o el vidrio ([Figura 1.32](#)). Tienen esta capacidad debido a una característica de onda de la luz llamada polarización. ¿Qué es la polarización? ¿Cómo se produce? ¿Cuáles son algunos de sus usos? Las respuestas a estas preguntas están relacionadas con el carácter ondulatorio de la luz.

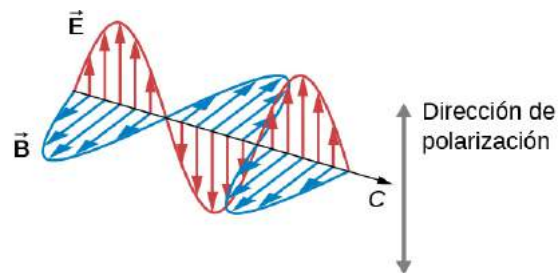


**FIGURA 1.32** Estas dos fotografías de un río muestran el efecto de un filtro polarizador para reducir el brillo de la luz que se refleja en la superficie del agua. La parte (b) de esta figura se tomó con un filtro polarizador y la parte (a) no. Como resultado, el reflejo de las nubes y el cielo observado en la parte (a) no se observa en la parte (b). Los lentes de sol polarizadores son especialmente útiles en la nieve y el agua. (crédito a y crédito b: modificaciones de la obra de "Amithshs"/Wikimedia Commons)



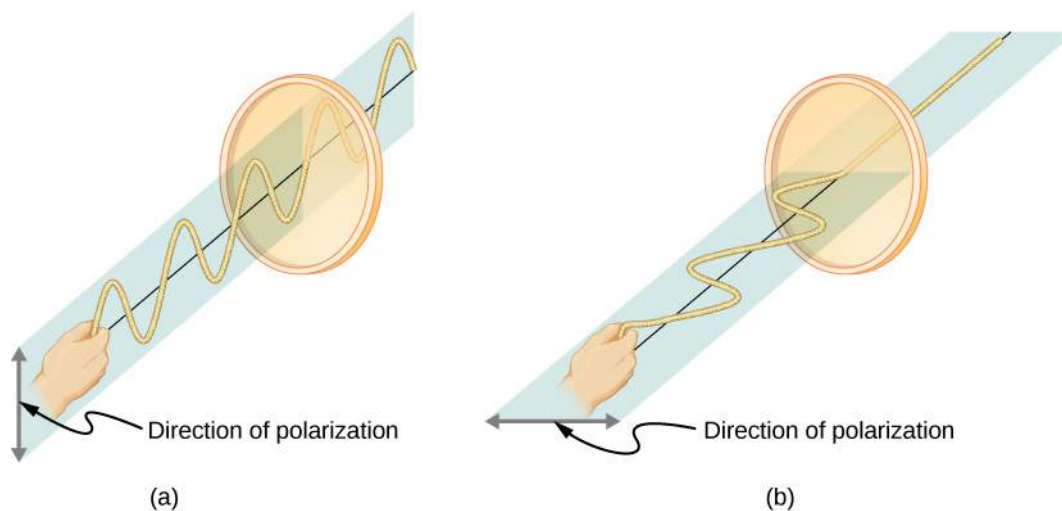
## Ley de Malus

La luz es un tipo de onda electromagnética (electromagnetic, EM). Como se señaló en el capítulo anterior sobre las [ondas electromagnéticas](http://openstax.org/books/física-universitaria-volumen-2/pages/16-introduccion) (<http://openstax.org/books/física-universitaria-volumen-2/pages/16-introduccion>), las ondas EM son *ondas transversales* que consisten en campos eléctricos y magnéticos variables que oscilan perpendicularmente a la dirección de propagación ([Figura 1.33](#)). Sin embargo, en general, no hay direcciones específicas para las oscilaciones de los campos eléctricos y magnéticos; vibran en cualquier plano orientado al azar perpendicular a la dirección de propagación. La **polarización** es el atributo por el cual las oscilaciones de una onda tienen una dirección definida con respecto a la dirección de propagación de la onda. (Este no es el mismo tipo de polarización que se discute para la separación de cargas) Se dice que las ondas que tienen esa dirección están **polarizadas**. Para una onda EM, definimos la **dirección de polarización** como la dirección paralela al campo eléctrico. Así, podemos pensar que las flechas del campo eléctrico muestran la dirección de polarización, como en la [Figura 1.33](#).



**FIGURA 1.33** Una onda EM, como la luz, es una onda transversal. Los campos eléctrico ( $\vec{E}$ ) y magnético ( $\vec{B}$ ) son perpendiculares a la dirección de propagación. La dirección de polarización de la onda es la dirección del campo eléctrico.

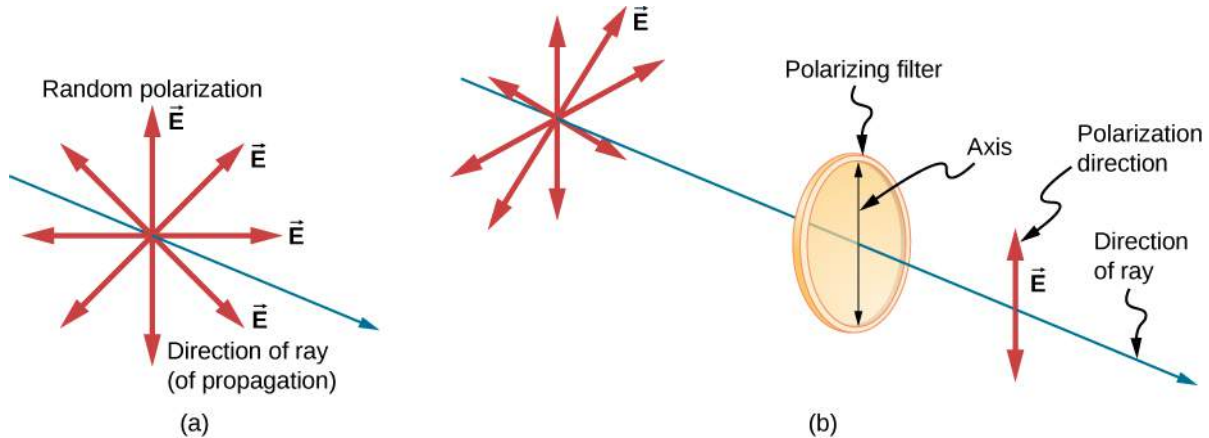
Para examinar esto con más detalle, imaginemos las ondas transversales en las cuerdas que se muestran en la [Figura 1.34](#). Las oscilaciones en una cuerda están en un plano vertical y se dice que están **polarizadas verticalmente**. Los de la otra cuerda están en un plano horizontal y están **polarizadas horizontalmente**. Si se coloca una rendija vertical en la primera cuerda, las ondas pasan. Sin embargo, una rendija vertical bloquea las ondas polarizadas horizontalmente. En el caso de las ondas EM, la dirección del campo eléctrico es análoga a las perturbaciones en las cuerdas.



**FIGURA 1.34** Las oscilaciones transversales en una cuerda (a) están en un plano vertical, y las de la otra cuerda (b) están en un plano horizontal. Se dice que las primeras oscilaciones están polarizadas verticalmente, y las otras se dice que están polarizadas horizontalmente. Las rendijas verticales permiten el paso de las ondas polarizadas verticalmente y bloquean el paso de las ondas polarizadas horizontalmente.

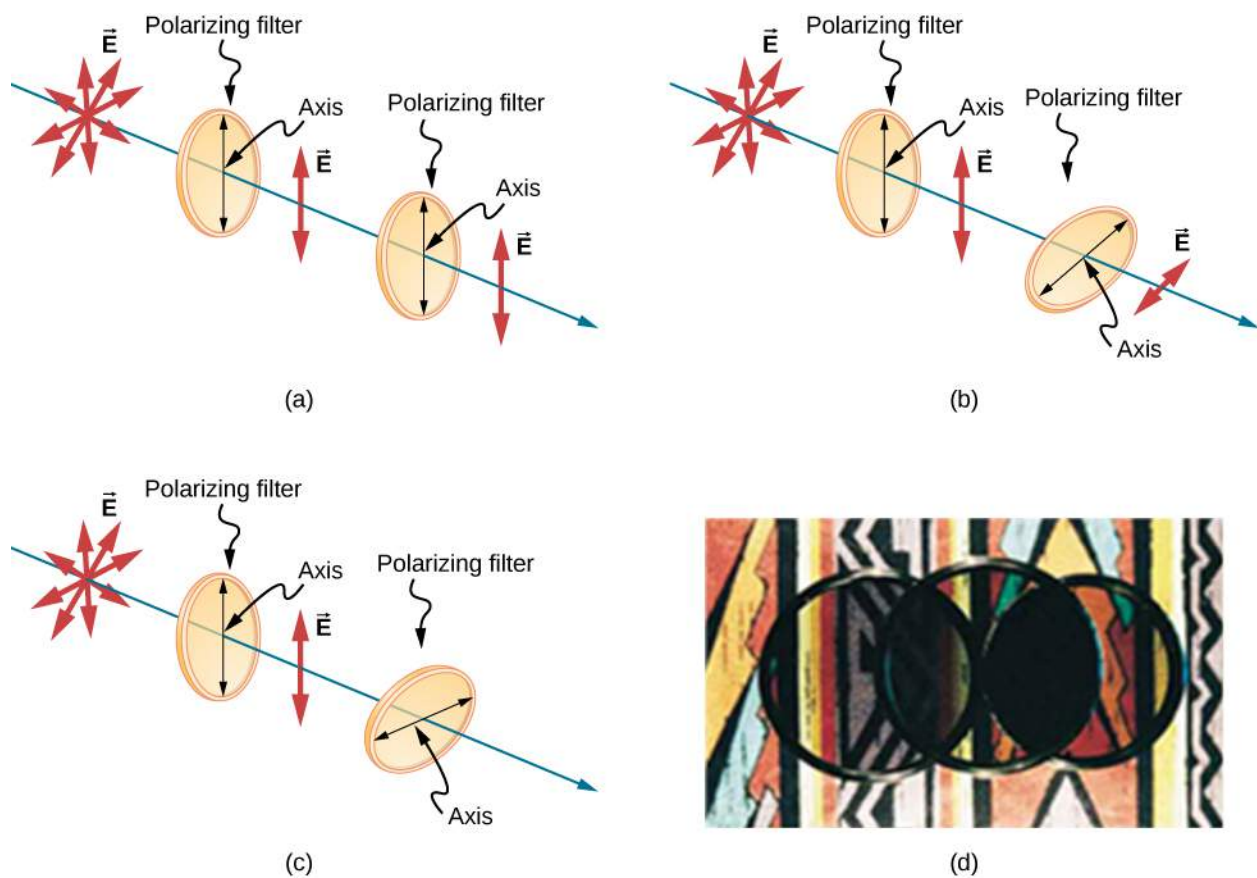
El Sol y muchas otras fuentes de luz producen ondas que tienen los campos eléctricos en direcciones aleatorias ([Figura 1.35\(a\)](#)). Se dice que esa luz es **no polarizada**, porque está compuesta por muchas ondas con

todas las direcciones posibles de polarización. Los materiales Polaroid -inventados por el fundador de la Polaroid Corporation, Edwin Land- actúan como una rendija polarizadora para la luz, permitiendo que solo pase la polarización en una dirección. Los filtros polarizadores están compuestos por moléculas largas alineadas en una dirección. Si pensamos en las moléculas como muchas rendijas, análogas a las de las cuerdas oscilantes, podemos entender por qué solo puede pasar la luz con una polarización específica. El eje de un filtro polarizador es la dirección a lo largo de la cual el filtro pasa el campo eléctrico de una onda EM.



**FIGURA 1.35** La flecha delgada representa un rayo de luz no polarizado. Las flechas en negrita representan la dirección de polarización de las ondas individuales que componen el rayo. (a) Si la luz no está polarizada, las flechas apuntan en todas las direcciones. (b) Un filtro polarizador tiene un eje de polarización que actúa como una rendija que atraviesa campos eléctricos paralelos a su dirección. La dirección de polarización de una onda EM se define como la dirección de su campo eléctrico.

La [Figura 1.36](#) muestra el efecto de dos filtros polarizadores sobre una luz originalmente no polarizada. El primer filtro polariza la luz a lo largo de su eje. Cuando los ejes del primer y segundo filtro están alineados (paralelos), toda la luz polarizada que pasa por el primer filtro también pasa por el segundo. Si se gira el segundo filtro polarizador, solo pasa el componente de luz paralela al eje del segundo filtro. Cuando los ejes son perpendiculares, el segundo filtro no deja pasar la luz.

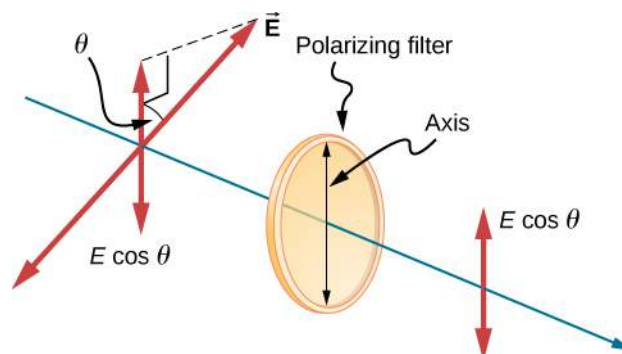


**FIGURA 1.36** Efecto de la rotación de dos filtros polarizadores, donde el primero polariza la luz. (a) Toda la luz polarizada pasa por el segundo filtro polarizador, porque su eje es paralelo al primero. (b) Al girar el segundo filtro, solo pasa una parte de la luz. (c) Cuando el segundo filtro es perpendicular al primero, no pasa ninguna luz. (d) En esta fotografía, un filtro polarizador está colocado sobre otros dos. Su eje es perpendicular al filtro de la derecha (zona oscura) y paralelo al filtro de la izquierda (zona más clara). (crédito d: modificación del trabajo de P.P. Urone)

Solo pasa el componente de la onda EM paralela al eje de un filtro. Llamemos al ángulo entre la dirección de polarización y el eje de un filtro  $\theta$ . Si el campo eléctrico tiene una amplitud  $E$ , entonces la parte transmitida de la onda tiene una amplitud  $E \cos \theta$  (Figura 1.37). Dado que la intensidad de una onda es proporcional a su amplitud al cuadrado, la intensidad  $I$  de la onda transmitida está relacionada con la onda incidente por

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad 1.6$$

donde  $I_0$  es la intensidad de la onda polarizada antes de pasar por el filtro. Esta ecuación se conoce como **ley de Malus**.



**FIGURA 1.37** Un filtro polarizador transmite solo la componente de la onda paralela a su eje, reduciendo la

intensidad de cualquier luz no polarizada paralela a su eje.

### INTERACTIVO

Esta [animación de Open Source Physics \(https://openstax.org/l/21phyanielefe\)](https://openstax.org/l/21phyanielefe) le ayuda a visualizar los vectores del campo eléctrico cuando la luz se encuentra con un filtro polarizador. Puede girar el filtro; tenga en cuenta que el ángulo mostrado está en radianes. También puede girar la animación para visualizarla en 3D.

## EJEMPLO 1.7

### Calcular la reducción de la intensidad mediante un filtro polarizador

¿Qué ángulo es necesario entre la dirección de la luz polarizada y el eje de un filtro polarizador para reducir su intensidad en 90,0%?

#### Estrategia

Cuando la intensidad se reduce en 90,0%, es el 10,0% o 0,100 veces su valor original. Es decir,  $I = 0,100 I_0$ . Al utilizar esta información, se puede usar la ecuación  $I = I_0 \cos^2 \theta$  para resolver el ángulo necesario.

#### Solución

Resolver la ecuación  $I = I_0 \cos^2 \theta$  para el  $\cos \theta$  y sustituir con la relación entre  $I$  y  $I_0$  da como resultado

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{I}{I_0}} = \sqrt{\frac{0,100 I_0}{I_0}} = 0,3162.$$

Al resolver para  $\theta$  se obtiene

$$\theta = \cos^{-1} 0,3162 = 71,6^\circ.$$

#### Importancia

Se necesita un ángulo bastante grande entre la dirección de polarización y el eje del filtro para reducir la intensidad a 10,0% de su valor original. Esto parece razonable basándose en experimentos con películas polarizadoras. Es interesante que en un ángulo de  $45^\circ$ , la intensidad se reduce a 50% de su valor original. Tenga en cuenta que  $71,6^\circ$  es  $18,4^\circ$  al reducir la intensidad a cero, y que en un ángulo de  $18,4^\circ$ , la intensidad se reduce a 90,0% de su valor original, dando muestras de simetría.

### COMPRUEBE LO APRENDIDO 1.6

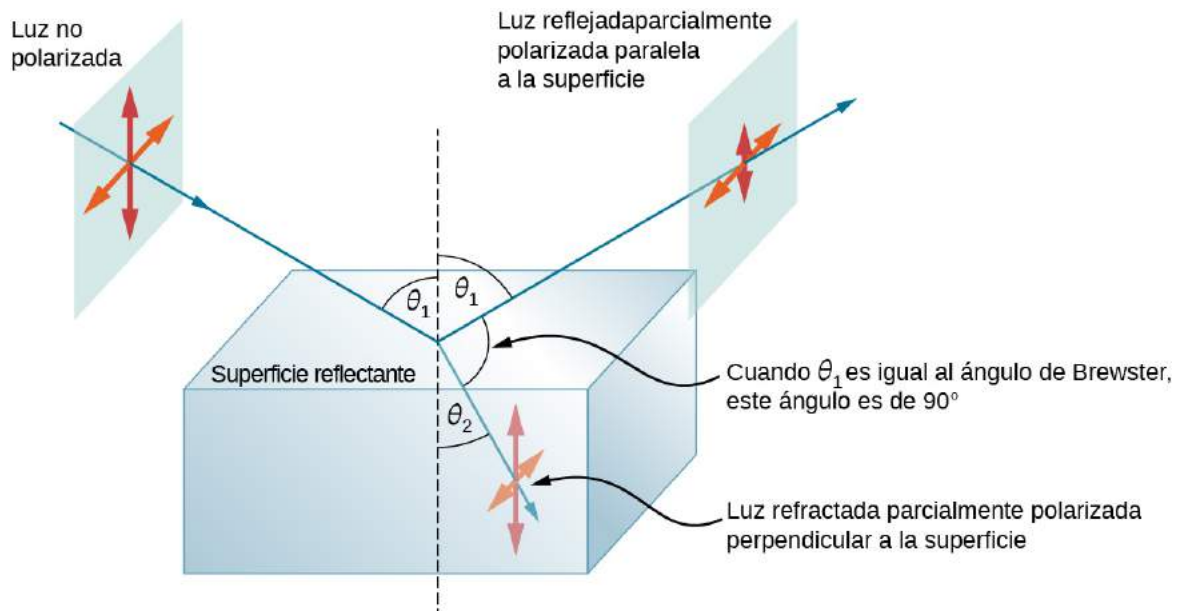
Aunque no hemos especificado la dirección en el [Ejemplo 1.7](#), digamos que el filtro polarizador fue girado en el sentido de las agujas del reloj  $71,6^\circ$  para reducir la intensidad de la luz en 90,0%. ¿Cuál sería la reducción de intensidad si el filtro polarizador se girara en el sentido contrario a las agujas del reloj  $71,6^\circ$ ?

## Polarización por reflexión

Es probable que a estas alturas pueda adivinar que los lentes de sol polarizados reducen el resplandor de la luz reflejada, porque esa luz está polarizada. Puede comprobarlo usted mismo al sostener unos lentes de sol polarizados delante de usted y hacerlos girar mientras mira la luz reflejada en el agua o el cristal. Al girar los lentes de sol, notará que la luz se vuelve brillante y tenue, pero no completamente negra. Esto implica que la luz reflejada está parcialmente polarizada y un filtro polarizador no puede bloquearla completamente.

La [Figura 1.38](#) ilustra lo que ocurre cuando la luz no polarizada se refleja en una superficie. La luz polarizada verticalmente se refracta preferentemente en la superficie, por lo que la luz reflejada queda más polarizada horizontalmente. Las razones de este fenómeno están fuera del alcance de este texto, pero una mnemotecnica conveniente para recordarlo es imaginar que la dirección de polarización es como una flecha. La polarización vertical es como una flecha perpendicular a la superficie y es más probable que se pegue y no se refleje. La

polarización horizontal es como una flecha que rebota en su lado y es más probable que se refleje. Así, los lentes de sol con eje vertical bloquean más la luz reflejada que la luz no polarizada procedente de otras fuentes.



**FIGURA 1.38** Polarización por reflexión. La luz no polarizada tiene cantidades iguales de polarización vertical y horizontal. Tras la interacción con una superficie, los componentes verticales se absorben o refractan preferentemente, dejando la luz reflejada más polarizada horizontalmente. Esto es similar a las flechas que golpean en sus lados y rebotan, mientras que las flechas que golpean en sus puntas entran en la superficie.

Dado que la parte de la luz que no se refleja se refracta, la cantidad de polarización depende de los índices de refracción de los medios implicados. Se puede demostrar que la luz reflejada está completamente polarizada en un ángulo de reflexión  $\theta_b$  dado por

$$\tan \theta_b = \frac{n_2}{n_1} \quad 1.7$$

donde  $n_1$  es el medio por el que viajan la luz incidente y la reflejada y  $n_2$  es el índice de refracción del medio que forma la interfase que refleja la luz. Esta ecuación se conoce como **ley de Brewster** y  $\theta_b$  se conoce como **ángulo de Brewster**, llamado así por el físico escocés del siglo XIX que los descubrió.

### INTERACTIVO

Esta [animación de Open Source Physics \(https://openstax.org/l/21phyaniinref\)](https://openstax.org/l/21phyaniinref) muestra la luz incidente, reflejada y refractada como rayos y ondas EM. Pruebe girar la animación para visualizarla en 3D y también cambiar el ángulo de incidencia. Cerca del ángulo de Brewster, la luz reflejada se vuelve altamente polarizada.

## EJEMPLO 1.8

### Cálculo de la polarización por reflexión

(a) ¿A qué ángulo se polariza completamente en sentido horizontal la luz que viaja en el aire cuando se refleja en el agua? (b) ¿Y en el vidrio?

#### Estrategia

Todo lo que necesitamos para resolver estos problemas son los índices de refracción. El aire tiene  $n_1 = 1,00$ , el agua tiene  $n_2 = 1,333$ , y el vidrio crown tiene  $n_2' = 1,520$ . La ecuación  $\tan \theta_b = \frac{n_2}{n_1}$  puede aplicarse

directamente para encontrar  $\theta_b$  en cada caso.

### Solución

- a. Al introducir las cantidades conocidas en la ecuación

$$\tan \theta_b = \frac{n_2}{n_1}$$

da como resultado

$$\tan \theta_b = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1,333}{1,00} = 1,333.$$

Al resolver el ángulo  $\theta_b$  se obtiene

$$\theta_b = \tan^{-1} 1,333 = 53,1^\circ.$$

- b. Del mismo modo, para el vidrio crown y el aire,

$$\tan \theta'_b = \frac{n'_2}{n_1} = \frac{1,520}{1,00} = 1,52.$$

Por lo tanto,

$$\theta'_b = \tan^{-1} 1,52 = 56,7^\circ.$$

### Importancia

La luz reflejada en estos ángulos podría bloquearse completamente con un buen filtro polarizador sostenido con su eje vertical. Los ángulos de Brewster para el agua y el aire son similares a los del vidrio y el aire, de modo que los lentes de sol son igualmente eficaces para la luz reflejada por el agua o el vidrio en circunstancias similares. La luz que no se refleja se refracta en estos medios. Por lo tanto, con un ángulo de incidencia igual al ángulo de Brewster, la luz refractada está ligeramente polarizada en sentido vertical. No está completamente polarizada verticalmente, porque solo una pequeña fracción de la luz incidente se refleja, por lo que una cantidad significativa de luz polarizada horizontalmente se refracta.

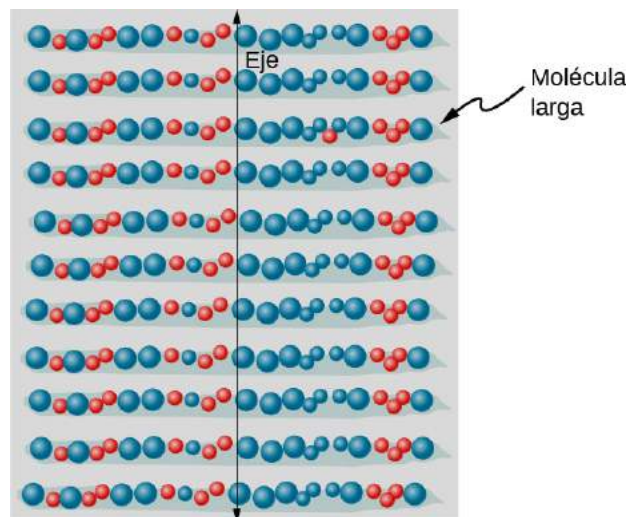
### ✓ **COMPRUEBE LO APRENDIDO 1.7**

¿Qué ocurre en el ángulo de Brewster si la luz incidente original ya está 100% polarizada verticalmente?

### Explicación atómica de los filtros polarizadores

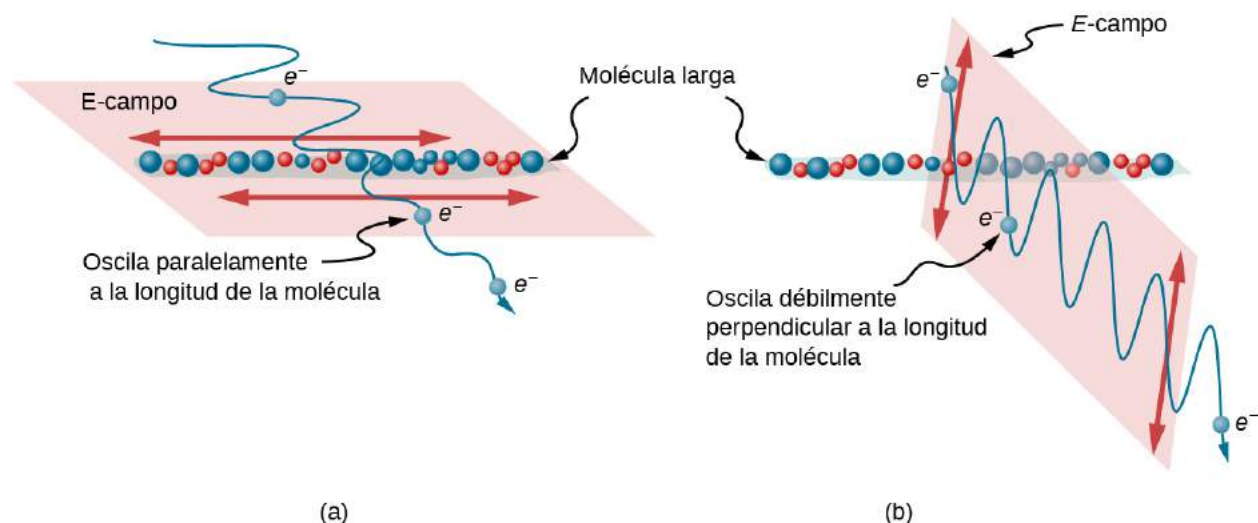
Los filtros polarizadores tienen un eje de polarización que actúa como una rendija. Esta rendija deja pasar las ondas EM (a menudo luz visible) que tienen un campo eléctrico paralelo al eje. Esto se consigue con moléculas largas alineadas perpendicularmente al eje, como se muestra en la [Figura 1.39](#).





**FIGURA 1.39** Las moléculas largas se alinean perpendicularmente al eje de un filtro polarizador. En una onda EM, la componente del campo eléctrico perpendicular a estas moléculas pasa a través del filtro, mientras que la componente paralela a las moléculas se absorbe.

La [Figura 1.40](#) ilustra cómo se absorbe la componente del campo eléctrico paralela a las moléculas largas. Una onda EM está compuesta por campos eléctricos y magnéticos oscilantes. El campo eléctrico es fuerte en comparación con el campo magnético y es más eficaz a la hora de ejercer fuerza sobre las cargas de las moléculas. Las partículas cargadas más afectadas son los electrones, dado que las masas de los electrones son pequeñas. Si un electrón es forzado a oscilar, puede absorber energía de la onda EM. Esto reduce el campo en la onda y, por lo tanto, reduce su intensidad. En las moléculas largas, los electrones pueden oscilar más fácilmente en paralelo a la molécula que en la dirección perpendicular. Los electrones están unidos a la molécula y están más restringidos en su movimiento perpendicular hacia la molécula. Así, los electrones pueden absorber las ondas EM que tienen un componente de su campo eléctrico paralelo a la molécula. Los electrones responden mucho menos a los campos eléctricos perpendiculares a la molécula y dejan pasar estos campos. Así, el eje del filtro polarizador es perpendicular a la longitud de la molécula.

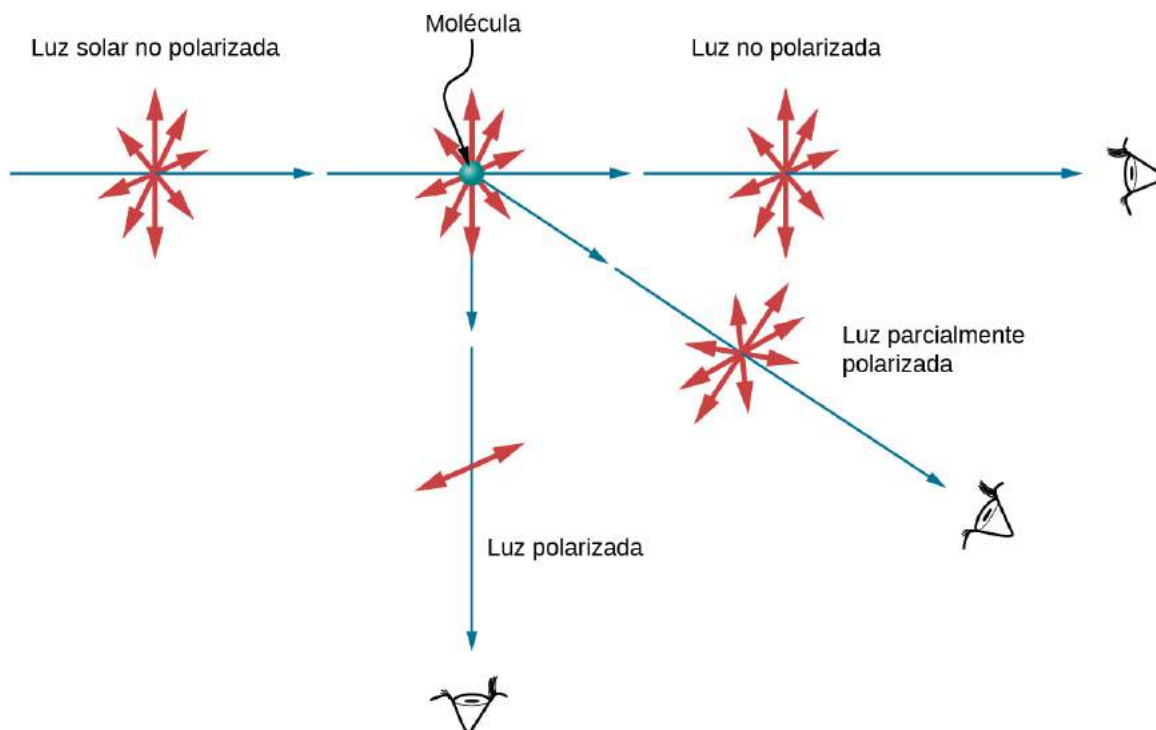


**FIGURA 1.40** Diagrama de un electrón en una molécula larga que oscila en paralelo a la molécula. La oscilación del electrón absorbe energía y reduce la intensidad de la componente de la onda EM que es paralela a la molécula.

### Polarización por dispersión

Si sostiene sus lentes de sol polarizados frente a usted y los gira mientras mira el cielo azul, verá cómo el cielo se vuelve brillante y se oscurece. Esto es una clara indicación de que la luz dispersada por el aire está parcialmente polarizada. La [Figura 1.41](#) ayuda a ilustrar cómo ocurre esto. Dado que la luz es una onda EM

transversal, hace vibrar los electrones de las moléculas de aire perpendicularmente a la dirección en la que viaja. Los electrones irradian entonces como pequeñas antenas. Dado que oscilan perpendicularmente a la dirección del rayo de luz, producen una radiación electromagnética polarizada perpendicularmente a la dirección del rayo. Cuando se ve la luz a lo largo de una línea perpendicular al rayo original, como en la figura, no puede haber polarización en la luz dispersa paralela al rayo original, porque eso requeriría que el rayo original fuera una onda longitudinal. En otras direcciones, un componente de la otra polarización puede proyectarse a lo largo de la línea de visión, y la luz dispersa solo está parcialmente polarizada. Además, la dispersión múltiple puede hacer que la luz llegue a sus ojos desde otras direcciones y puede contener diferentes polarizaciones.



**FIGURA 1.41** Polarización por dispersión. La dispersión de la luz no polarizada de las moléculas de aire agita sus electrones perpendicularmente a la dirección del rayo original. Por lo tanto, la luz dispersa tiene una polarización perpendicular a la dirección original y ninguna paralela a la dirección original.

Las fotografías del cielo pueden oscurecerse con filtros polarizadores, un truco que utilizan muchos fotógrafos para hacer más brillantes las nubes por contraste. La dispersión de otras partículas, como el humo o el polvo, también puede polarizar la luz. La detección de la polarización en las ondas EM dispersas puede ser una herramienta analítica útil para determinar la fuente de dispersión.

En los lentes de sol se utilizan diversos efectos ópticos. Además de ser polarizantes, los lentes de sol pueden tener pigmentos de color incrustados, mientras que otros utilizan un revestimiento no reflectante o reflectante. Un avance reciente son las lentes fotocromáticas, que se oscurecen con la luz del sol y se vuelven claras en interiores. Las lentes fotocromáticas llevan incrustadas moléculas orgánicas microcristalinas que cambian sus propiedades cuando se exponen a los rayos ultravioleta de la luz solar, pero se vuelven transparentes con luz artificial sin rayos ultravioleta.

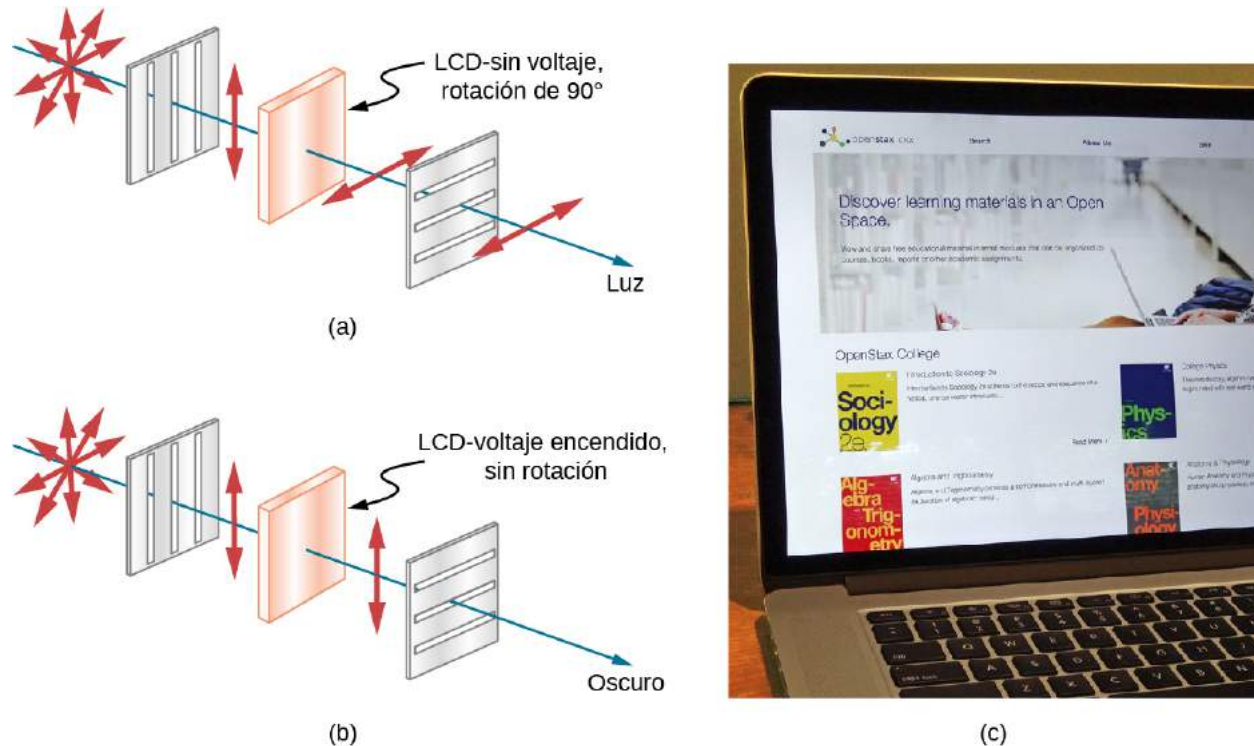
### Cristales líquidos y otros efectos de polarización en los materiales

Aunque sin duda conoce las pantallas de cristal líquido (LCD) que se encuentran en los relojes, las calculadoras, las pantallas de las computadoras, los teléfonos móviles, los televisores de pantalla plana y que tienen muchos otros usos, es posible que no sepa que se basan en la polarización. Los cristales líquidos se llaman así porque sus moléculas pueden alinearse aunque estén en un líquido. Los cristales líquidos tienen la propiedad de poder girar la polarización de la luz que los atraviesa a  $90^\circ$ . Además, esta propiedad puede desactivarse mediante la aplicación de un voltaje, como se ilustra en la [Figura 1.42](#). Es posible manipular esta



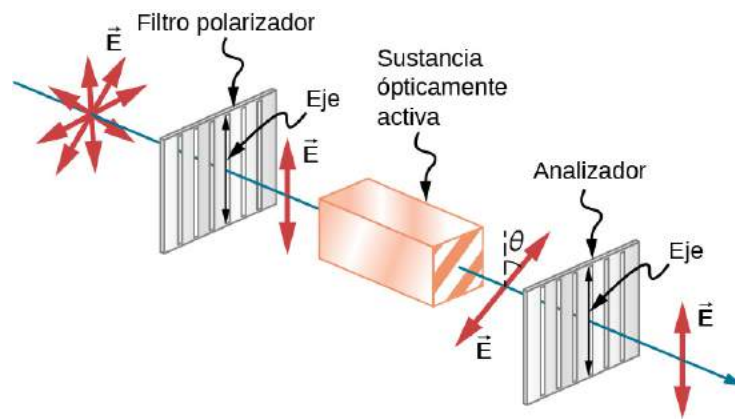
característica rápidamente y en regiones pequeñas y bien definidas para crear los patrones de contraste que vemos en tantos dispositivos LCD.

En los televisores LCD de pantalla plana, se genera una gran luz en la parte posterior del televisor. La luz viaja hasta la pantalla frontal a través de millones de unidades diminutas llamadas píxeles (elementos de imagen). Una de ellas se muestra en la [Figura 1.42](#) (a) y (b). Cada unidad tiene tres celdas, con filtros rojos, azules o verdes, cada una de ellas controlada de forma independiente. Cuando se desconecta el voltaje a través de un cristal líquido, este hace pasar la luz a través del filtro correspondiente. Podemos variar el contraste de la imagen variando la intensidad del voltaje aplicado al cristal líquido.



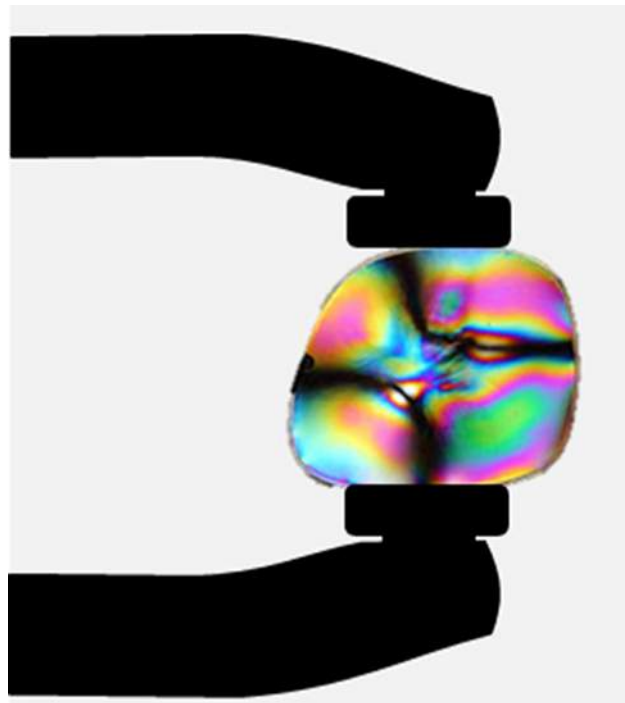
**FIGURA 1.42** (a) La luz polarizada se hace girar  $90^\circ$  por un cristal líquido y luego pasa por un filtro polarizador que tiene su eje perpendicular a la dirección de la polarización original. (b) Cuando se aplica un voltaje al cristal líquido, la luz polarizada no gira y el filtro la bloquea, lo que hace que la región sea oscura en comparación con su entorno. (c) Las pantallas de cristal líquido pueden hacerse de un color específico, ser lo suficientemente pequeñas y rápidas como para usarlas en computadores portátiles y televisores. (crédito c: modificación del trabajo de Jane Whitney)

Muchos cristales y soluciones hacen girar el plano de polarización de la luz que los atraviesa. Se dice que estas sustancias son **ópticamente activas**. Algunos ejemplos son el agua azucarada, la insulina y el colágeno ([Figura 1.43](#)). Además de depender del tipo de sustancia, la cantidad y el sentido de la rotación dependen de otros factores. Entre ellas, la concentración de la sustancia, la distancia que recorre la luz a través de ella y la longitud de onda de la luz. La actividad óptica se debe a la forma asimétrica de las moléculas de la sustancia, como por ejemplo si son helicoidales. Así, las mediciones de la rotación de la luz polarizada que atraviesa las sustancias pueden utilizarse para medir las concentraciones, una técnica estándar para los azúcares. También puede dar información sobre las formas de las moléculas, como las proteínas, y los factores que afectan a sus formas, como la temperatura y el pH.



**FIGURA 1.43** La actividad óptica es la capacidad de algunas sustancias de girar el plano de polarización de la luz que las atraviesa. La rotación se detecta con un filtro polarizador o un analizador.

El vidrio y el plástico se vuelven ópticamente activos cuando se les somete a estrés: cuanto mayor sea el estrés, mayor será el efecto. El análisis de estrés óptico en formas complicadas puede realizarse haciendo modelos plásticos de las mismas y observándolas a través de filtros cruzados, como se ve en la [Figura 1.44](#). Es evidente que el efecto depende tanto de la longitud de onda como del estrés. La dependencia de la longitud de onda también se utiliza a veces con fines artísticos.

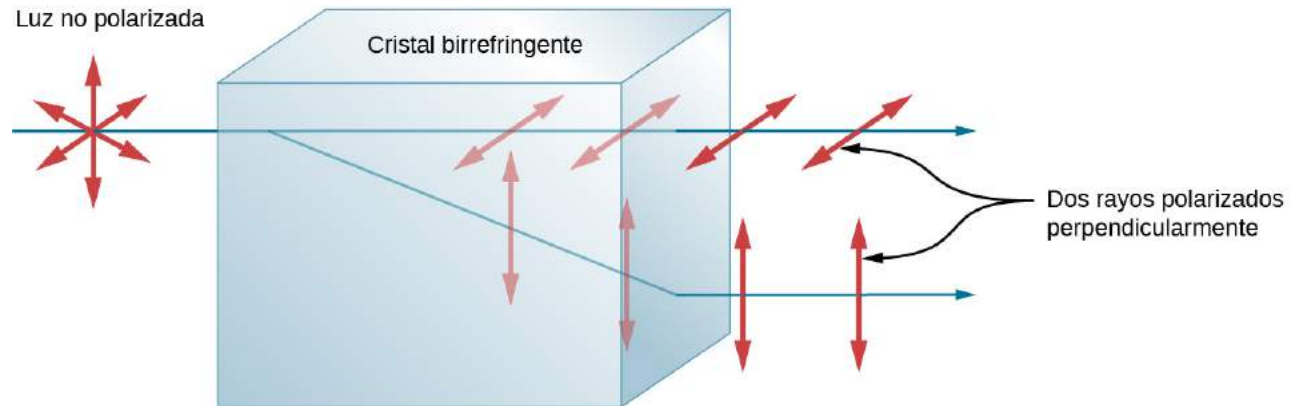


**FIGURA 1.44** Análisis de estrés óptico de una lente de plástico colocada entre polarizadores cruzados. (crédito: "Infopro"/Wikimedia Commons)

Otro fenómeno interesante asociado a la luz polarizada es la capacidad de algunos cristales de dividir un haz de luz no polarizado en dos haces polarizados. Esto ocurre porque el cristal tiene un valor para el índice de refracción de la luz polarizada pero un valor diferente para el índice de refracción de la luz polarizada en la dirección perpendicular, de modo que cada componente tiene su propio ángulo de refracción. Se dice que estos cristales son **birrefringentes** y, cuando se alinean correctamente, salen del cristal dos haces polarizados perpendicularmente ([Figura 1.45](#)). Los cristales birrefringentes pueden utilizarse para producir haces polarizados a partir de luz no polarizada. Algunos materiales birrefringentes absorben preferentemente una de las polarizaciones. Estos materiales se denominan **dicroicos** y pueden producir polarización por esta absorción preferencial. Así es como funcionan fundamentalmente los filtros polarizadores y otros

polarizadores.

Luz no polarizada



**FIGURA 1.45** Los materiales birrefringentes, como el mineral común calcita, dividen los haces de luz no polarizados en dos con dos valores diferentes de índice de refracción.

## Revisión Del Capítulo

### Términos Clave

**ángulo crítico** ángulo incidente que produce un ángulo de refracción de  $90^\circ$

**Ángulo de Brewster** ángulo de incidencia en el que la luz reflejada está completamente polarizada

**birrefringente** se refiere a los cristales que dividen un haz de luz no polarizado en dos haces

**dirección de polarización** dirección paralela al campo eléctrico para las ondas EM

**dispersión** descomposición de la luz en su espectro de longitudes de onda

**índice de refracción** para un material, la relación entre la velocidad de la luz en el vacío y en un material

**Ley de Brewster**  $\tan \theta_b = \frac{n_2}{n_1}$ , donde  $n_1$  es el medio por el que viajan la luz incidente y la reflejada y  $n_2$  es el índice de refracción del medio que forma la interfase que refleja la luz

**Ley de Malus** donde  $I_0$  es la intensidad de la onda polarizada antes de pasar por el filtro

**ley de reflexión** el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia

**ley de refracción** cuando un rayo de luz cruza de un medio a otro, cambia de dirección en una cantidad que depende del índice de refracción de cada medio y de los senos del ángulo de incidencia y del ángulo de refracción

**no polarizada** se refiere a las ondas que se polarizan aleatoriamente

**óptica de fibras** campo de estudio de la transmisión de la luz por fibras de plástico o de vidrio, aplicando el principio de la reflexión interna total

**óptica de ondas** parte de la óptica que trata del aspecto ondulatorio de la luz

**óptica geométrica** parte de la óptica que trata del aspecto de los rayos de luz

**ópticamente activa** sustancias que rotan el plano de polarización de la luz que las atraviesa

**polarización** atributo por el que las oscilaciones de las ondas tienen una dirección definida con respecto a la dirección de propagación de la onda

**polarizada** se refiere a las ondas que tienen las oscilaciones del campo eléctrico y magnético en una dirección definida

**polarizada verticalmente** las oscilaciones son en un plano vertical

**polarizado horizontalmente** las oscilaciones son en un plano horizontal

**principio de Huygens** cada punto de un frente de onda es una fuente de ondículas que se extienden hacia delante con la misma velocidad que la propia onda; el nuevo frente de onda es un plano tangente a todas las ondículas

**rayo** línea recta que se origina en algún punto

**reflector de esquina** objeto formado por dos (o tres) superficies reflectantes mutuamente perpendiculares, de modo que la luz que entra se refleja exactamente en paralelo a la dirección de la que procede

**reflexión interna total** fenómeno que se produce en la frontera entre dos medios, de manera que toda la luz se refleja y no se produce refracción

**refracción** cambio de la dirección de un rayo de luz cuando pasa por variaciones de la materia

### Ecuaciones Clave

Velocidad de la luz  $c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$

Índice de refracción  $n = \frac{c}{v}$

Ley de reflexión  $\theta_r = \theta_i$

Ley de refracción (ley de Snell)  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$

Ángulo crítico  $\theta_c = \sin^{-1} \left( \frac{n_2}{n_1} \right)$  para  $n_1 > n_2$

Ley de Malus  $I = I_0 \cos^2 \theta$

Ley de Brewster

$$\tan \theta_b = \frac{n_2}{n_1}$$

## Resumen

### 1.1 La propagación de la luz

- La velocidad de la luz en el vacío es de  $c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$ .
- El índice de refracción de un material es de  $n = c/v$ , donde  $v$  es la velocidad de la luz en un material y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío.
- El modelo de rayos de luz describe la trayectoria de la luz como líneas rectas. La parte de la óptica que se ocupa del aspecto de los rayos de luz se denomina óptica geométrica.
- La luz puede viajar de tres maneras desde una fuente a otro lugar: (1) directamente desde la fuente a través del espacio vacío; (2) a través de varios medios; y (3) después de reflejarse en un espejo.

### 1.2 La ley de reflexión

- Cuando un rayo de luz incide sobre una superficie lisa, el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia.
- Un espejo tiene una superficie lisa y refleja la luz en ángulos específicos.
- La luz se difumina cuando se refleja en una superficie rugosa.

### 1.3 Refracción

- El cambio de dirección de un rayo de luz cuando atraviesa variaciones de la materia se llama refracción.
- La ley de refracción, también llamada ley de Snell, relaciona los índices de refracción de dos medios en una interfase con el cambio de ángulo de un rayo de luz que atraviesa esa interfase.

### 1.4 Reflexión interna total

- El ángulo de incidencia que produce un ángulo de refracción de  $90^\circ$  se llama el ángulo crítico.
- La reflexión interna total es un fenómeno que se produce en la frontera entre dos medios, de manera que si el ángulo de incidencia en el primer medio es mayor que el ángulo crítico, toda la luz se refleja en ese medio.
- La fibra óptica consiste en la transmisión de la luz a través de fibras de plástico o vidrio, aplicando el principio de la reflexión interna total.

- El revestimiento impide que la luz se transmita entre las fibras de un grupo unido de fibras.
- Los diamantes brillan debido a la reflexión interna total, junto con un gran índice de refracción.

### 1.5 Dispersión

- La dispersión de la luz blanca en todo su espectro de longitudes de onda se llama dispersión.
- El arcoíris se produce por una combinación de refracción y reflexión, e implica que la luz solar se dispersa en una distribución continua de colores.
- La dispersión produce hermosos arcoíris, pero también causa problemas en ciertos sistemas ópticos.

### 1.6 Principio de Huygens

- Según el principio de Huygens, cada punto de un frente de onda es una fuente de ondículas que se propagan hacia adelante a la misma velocidad que la propia onda. El nuevo frente de onda es tangente a todas las ondículas.
- Un espejo refleja una onda entrante en un ángulo igual al ángulo incidente, lo que comprueba la ley de reflexión.
- La ley de refracción puede explicarse aplicando el principio de Huygens a un frente de onda que pasa de un medio a otro.
- La curvatura de una onda alrededor de los bordes de una abertura o de un obstáculo se llama difracción.

### 1.7 Polarización

- La polarización es el atributo de que las oscilaciones de las ondas tienen una dirección definida con respecto a la dirección de propagación de la onda. La dirección de polarización se define como la dirección paralela al campo eléctrico de la onda EM.
- La luz no polarizada se compone de muchos rayos con direcciones de polarización aleatorias.
- La luz no polarizada se puede polarizar haciéndola pasar por un filtro polarizador u otro material polarizador. El proceso de polarización de la luz disminuye su intensidad en un factor de 2.

- La intensidad,  $I$ , de la luz polarizada después de pasar por un filtro polarizador es  $I = I_0 \cos^2 \theta$ , donde  $I_0$  es la intensidad incidente y  $\theta$  es el ángulo entre la dirección de polarización y el eje del filtro.
- La polarización también se produce por reflexión.
- La ley de Brewster establece que la luz reflejada

está completamente polarizada en el ángulo de reflexión  $\theta_b$ , conocido como el ángulo de Brewster.

- La polarización también puede producirse por dispersión.
- Varios tipos de sustancias ópticamente activas hacen girar la dirección de la polarización de luz que las atraviesa.

## Preguntas Conceptuales

### 1.1 La propagación de la luz

1. ¿En qué condiciones se puede modelar la luz como un rayo? ¿Como una onda?
2. ¿Por qué el índice de refracción es siempre mayor o igual a 1?
3. ¿El hecho de que el destello de luz del rayo llegue antes que su sonido demuestra que la velocidad de la luz es extremadamente grande o simplemente que es mayor que la del sonido? Discuta cómo podría utilizar este efecto para obtener una estimación de la velocidad de la luz.
4. Especule sobre qué proceso físico podría ser responsable de que la luz viaje más lentamente en un medio que en el vacío.

### 1.2 La ley de reflexión

5. Utilizando la ley de la reflexión, explique cómo el polvo quita el brillo a la nariz de una persona. ¿Cómo se llama el efecto óptico?

### 1.3 Refracción

6. En este capítulo se describe la difusión por reflexión desde una superficie rugosa. La luz también puede difundirse por refracción. Describa cómo ocurre esto en una situación concreta, como la interacción de la luz con el hielo picado.
7. ¿La luz cambia de dirección al acercarse a la perpendicular o al alejarse de esta cuando pasa del aire al agua? ¿Del agua al vidrio? ¿Del vidrio al aire?
8. Explique por qué un objeto en el agua siempre parece estar a una profundidad menor de la que realmente está
9. Explique por qué las piernas de una persona parecen muy cortas cuando vadea en una piscina. Justifique su explicación con un diagrama de rayos que muestre la trayectoria de los rayos desde los pies hasta el ojo de un observador que está fuera del agua.
10. Explique por qué un remo que está

parcialmente sumergido en el agua parece doblado.

### 1.4 Reflexión interna total

11. Un anillo con una gema incolora se deja caer en el agua. La piedra preciosa se vuelve invisible cuando se sumerge. ¿Puede ser un diamante? Explique.
12. El tipo más común de espejismo es la ilusión de que la luz de los objetos lejanos se refleja en un charco de agua que realmente no existe. Los espejismos se observan generalmente en los desiertos, cuando hay una capa de aire caliente cerca del suelo. Dado que el índice de refracción del aire es menor que para el aire a mayor temperatura, explique cómo se pueden formar espejismos.
13. ¿Cómo se puede utilizar la reflexión interna total para estimar el índice de refracción de un medio?

### 1.5 Dispersión

14. ¿Es posible que la reflexión interna total desempeñe un papel en el arcoíris? Explique en términos de índices de refracción y ángulos, quizás refiriéndose a lo que se muestra a continuación. Algunos hemos visto la formación de un arcoíris doble; ¿es físicamente posible observar un arco iris triple? (crédito: "Chad"/Flickr)





- 15.** Un diamante de alta calidad puede ser bastante claro e incoloro, transmitiendo todas las longitudes de onda visibles con poca absorción. Explique cómo puede brillar con destellos de colores brillantes cuando se ilumina con luz blanca.

### 1.6 Principio de Huygens

- 16.** ¿Cómo dependen los efectos de las ondas del tamaño del objeto con el que interactúan? Por ejemplo, ¿por qué el sonido se dobla en la esquina de un edificio y la luz no?
- 17.** ¿Se aplica el principio de Huygens a todos los tipos de ondas?
- 18.** Si se observa la difracción en algún fenómeno, es una prueba de que el fenómeno es una onda. ¿Lo contrario a esto es cierto? Es decir, si no se observa difracción, ¿significa que el fenómeno no es una onda?

### 1.7 Polarización

- 19.** ¿Puede polarizarse una onda sonora en el aire? Explique.
- 20.** Ninguna luz pasa a través de dos filtros polarizadores perfectos con ejes perpendiculares. Sin embargo, si se coloca un tercer filtro polarizador entre los dos originales,

puede pasar algo de luz. ¿Por qué? ¿En qué circunstancias pasa la mayor parte de la luz?

- 21.** Explique qué ocurre con la energía que la luz transporta que se atenúa al pasarla por dos filtros polarizadores cruzados.
- 22.** Cuando las partículas que dispersan la luz son mucho más pequeñas que su longitud de onda, la cantidad de dispersión es proporcional a  $\frac{1}{\lambda}$ . ¿Significa esto que hay más dispersión para las pequeñas  $\lambda$  que para las grandes  $\lambda$ ? ¿Qué relación tiene esto con el hecho de que el cielo sea azul?
- 23.** A partir de la información dada en la pregunta anterior, explique por qué las puestas de sol son rojas.
- 24.** Cuando la luz se refleja con el ángulo de Brewster desde una superficie lisa, es polarizada 100% paralela a la superficie. Parte de la luz se refractará en la superficie. Describa cómo se haría un experimento para determinar la polarización de la luz refractada. ¿Qué dirección espera que tenga la polarización y que sea de un 100%?
- 25.** Si se tumba en una playa mirando al agua con la cabeza ligeramente inclinada hacia un lado, sus lentes de sol polarizados no funcionan muy bien. ¿Por qué no?

## Problemas

### 1.1 La propagación de la luz

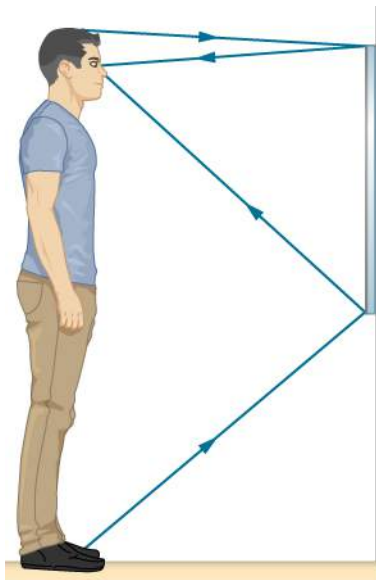
- 26.** ¿Cuál es la velocidad de la luz en el agua? ¿En la glicerina?
- 27.** ¿Cuál es la velocidad de la luz en el aire? ¿En un vidrio crown?
- 28.** Calcule el índice de refracción para un medio en el que la velocidad de la luz es  $2,012 \times 10^8$  m/s, e identifique la sustancia más probable según la [Tabla 1.1](#).
- 29.** ¿En qué sustancia de la [Tabla 1.1](#) se encuentra la velocidad de la luz  $2,290 \times 10^8$  m/s?
- 30.** Hubo una gran colisión de un asteroide con la Luna en la época medieval. Los monjes de la catedral de Canterbury (Inglaterra) lo describieron como un resplandor rojo por encima de la Luna y a su alrededor. ¿Cuánto tiempo después de que el asteroide golpeará la Luna, que está a  $3,84 \times 10^5$  km de distancia, llegaría por primera vez la luz a la Tierra?
- 31.** Los componentes de algunos computadores se comunican entre sí a través de fibras ópticas que tienen un índice de refracción de  $n = 1,55$ .

¿Qué tiempo en nanosegundos es necesario para que una señal recorra 0,200 m a través de dicha fibra?

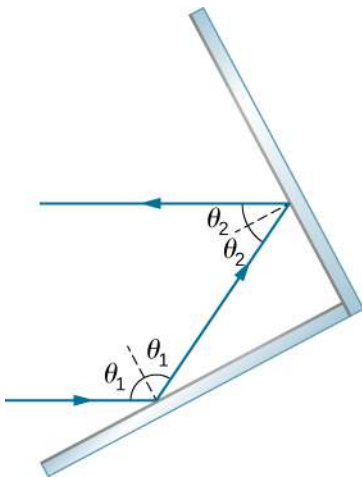
- 32.** Compare el tiempo que tarda la luz en recorrer 1000 m en la superficie de la Tierra y en el espacio exterior.
- 33.** ¿Qué distancia recorre la luz bajo el agua durante un intervalo de tiempo de  $1,50 \times 10^{-6}$  s?

### 1.2 La ley de reflexión

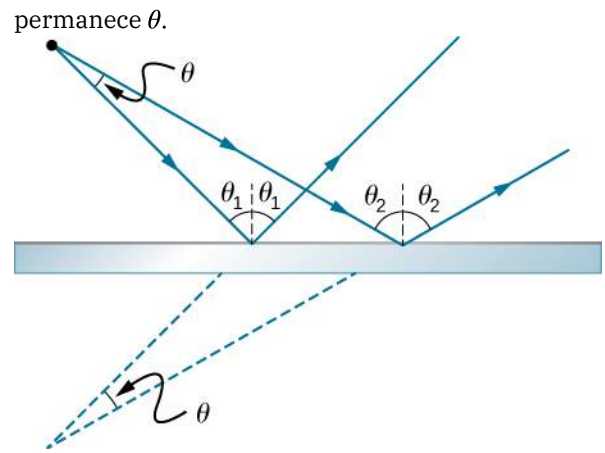
- 34.** Supongamos que un hombre se encuentra frente a un espejo como el que se muestra a continuación. Sus ojos están a 1,65 m del suelo y la parte superior de su cabeza está 0,13 m más alta. Calcule la altura sobre el suelo de la parte superior e inferior del espejo más pequeño en el que pueda verse la parte superior de la cabeza y los pies. ¿Cómo se relaciona esta distancia con la altura del hombre?



35. Demuestre que cuando la luz se refleja en dos espejos que se encuentran en un ángulo recto, el rayo saliente es paralelo al rayo entrante, como se ilustra a continuación.



36. En la superficie de la Luna, los astronautas lunares colocaron un reflector de esquina, en el que se refleja periódicamente un rayo láser. La distancia a la Luna se calcula a partir del tiempo de ida y vuelta. ¿Qué porcentaje de corrección es necesario para tener en cuenta el retraso en el tiempo debido a la ralentización de la luz en la atmósfera terrestre? Supongamos que la distancia a la Luna es exactamente  $3,84 \times 10^8$  m y la atmósfera terrestre (cuya densidad varía con la altitud) equivale a una capa de 30,0 km de espesor con un índice de refracción constante de  $n = 1,000293$ .
37. Un espejo plano no es ni convergente ni divergente. Para demostrarlo, considere dos rayos que parten de un mismo punto y divergen en un ángulo  $\theta$  (vea más abajo). Demuestre que después de chocar con un espejo plano, el ángulo entre sus direcciones

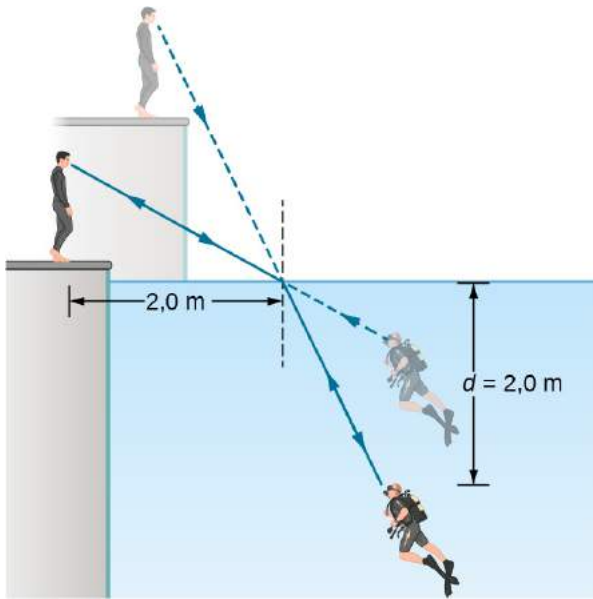


### 1.3 Refracción

A menos que se especifique lo contrario, para los problemas 1 a 10, los índices de refracción del vidrio y del agua deben tomarse como 1,50 y 1,333, respectivamente.

38. Un haz de luz en el aire tiene un ángulo de incidencia de  $35^\circ$  en la superficie de una placa de vidrio. ¿Cuáles son los ángulos de reflexión y refracción?
39. Un haz de luz en el aire incide sobre la superficie de un estanque, formando un ángulo de  $20^\circ$  con respecto a la superficie. ¿Cuáles son los ángulos de reflexión y refracción?
40. Cuando un rayo de luz cruza del agua al vidrio, emerge con un ángulo de  $30^\circ$  con respecto a la normal de la interfase. ¿Cuál es su ángulo de incidencia?
41. Una linterna tipo lápiz sumergida en el agua envía un haz de luz hacia la superficie con un ángulo de incidencia de  $30^\circ$ . ¿Cuál es el ángulo de refracción en el aire?
42. Los rayos de luz del Sol hacen un ángulo de  $30^\circ$  con respecto a la vertical cuando se ve desde debajo de la superficie de una reserva de agua. ¿A qué ángulo sobre el horizonte se encuentra el Sol?
43. La trayectoria de un haz de luz en el aire va desde un ángulo de incidencia de  $35^\circ$  a un ángulo de refracción de  $22^\circ$  cuando entra en un bloque rectangular de plástico. ¿Cuál es el índice de refracción del plástico?
44. Un buceador que se entrena en una piscina mira a su instructor como se muestra a continuación. ¿Qué ángulo forma el rayo que sale de la cara del instructor con la perpendicular al agua en el punto donde entra el rayo? El ángulo entre el rayo en el agua y la perpendicular al agua es  $25,0^\circ$ .





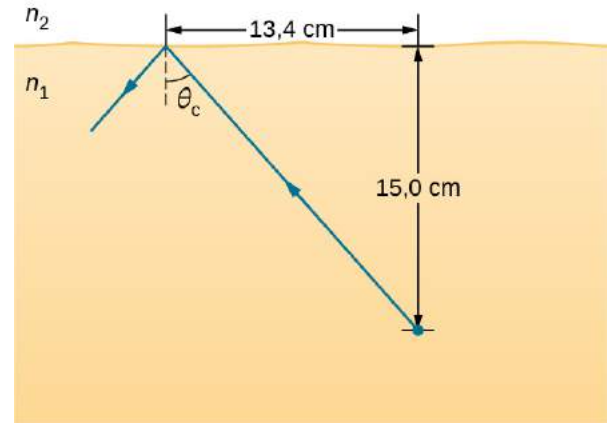
45. (a) Al utilizar la información del problema anterior, halle la altura de la cabeza del instructor por encima del agua, teniendo en cuenta que primero tendrá que calcular el ángulo de incidencia. (b) Calcule la profundidad aparente de la cabeza del buceador por debajo del agua vista por el instructor.

#### 1.4 Reflexión interna total

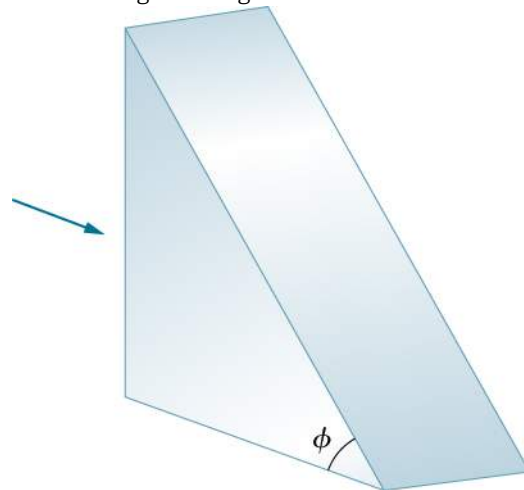
46. Compruebe que el ángulo crítico de la luz que pasa del agua al aire es de  $48,6^\circ$ , tal y como se comenta al final del [Ejemplo 1.4](#) sobre el ángulo crítico para la luz que viaja en un tubo de poliestireno (un tipo de plástico) rodeado de aire.
47. (a) Al final del [Ejemplo 1.4](#), se afirmó que el ángulo crítico para la luz que va del diamante al aire es de  $24,4^\circ$ . Verifíquelo. (b) ¿Cuál es el ángulo crítico para que la luz pase del circón al aire?
48. Una fibra óptica utiliza vidrio flint revestido con vidrio crown. ¿Cuál es el ángulo crítico?
49. ¿A qué ángulo mínimo se obtiene la reflexión interna total de la luz que viaja en el agua y se refleja en el hielo?
50. Supongamos que se utiliza la reflexión interna total para hacer un reflector de esquina eficiente. Si hay aire en el exterior y el ángulo de incidencia es  $45,0^\circ$ , ¿cuál debe ser el índice de refracción mínimo del material del que está hecho el reflector?
51. Puede determinar el índice de refracción de una sustancia determinando su ángulo crítico. (a) ¿Cuál es el índice de refracción de una sustancia que tiene un ángulo crítico de  $68,4^\circ$  cuando se

sumerge en el agua? ¿Cuál es la sustancia, según la [Tabla 1.1](#)? (b) ¿Cuál sería el ángulo crítico de esta sustancia en el aire?

52. Un rayo de luz, emitido bajo la superficie de un líquido desconocido con aire por encima, sufre una reflexión interna total como se muestra a continuación. ¿Cuál es el índice de refracción del líquido y su probable identificación?



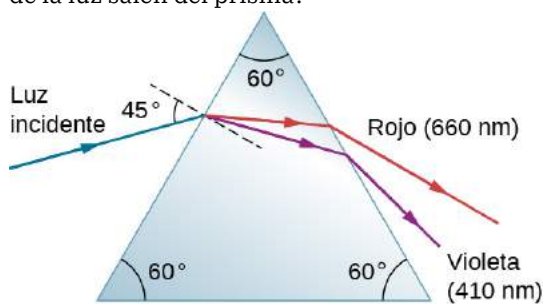
53. Los rayos de luz inciden normalmente sobre la superficie vertical del prisma de vidrio ( $n = 1,50$ ) que se muestra a continuación. (a) ¿Cuál es el mayor valor de  $\phi$  de manera que el rayo se refleje totalmente en la cara inclinada? (b) Repita el cálculo de la parte (a) si el prisma está sumergido en agua.



#### 1.5 Dispersión

54. (a) ¿Cuál es la relación entre la velocidad de la luz roja y la luz violeta en un diamante, según la [Tabla 1.2](#)? (b) ¿Cuál es esta relación en el poliestireno? (c) ¿Cuál es más dispersivo?
55. Un haz de luz blanca pasa del aire al agua con un ángulo de incidencia de  $75,0^\circ$ . ¿A qué ángulos se refractan las partes roja (660 nm) y violeta (410 nm) de la luz?

56. ¿En qué medida difieren los ángulos críticos para la luz roja (660 nm) y la violeta (410 nm) en un diamante rodeado de aire?
57. (a) Un estrecho haz de luz con longitudes de onda amarilla (580 nm) y verde (550 nm) va del poliestireno al aire, incidiendo en la superficie con un ángulo de incidencia de  $30,0^\circ$ . ¿Cuál es el ángulo entre los colores cuando emergen? (b) ¿Qué distancia tendrían que recorrer para estar separados por 1,00 mm?
58. Un haz de luz paralelo con longitudes de onda naranja (610 nm) y violeta (410 nm) va desde el cuarzo fundido hasta el agua, incidiendo en la superficie entre ambos a  $60,0^\circ$ . ¿Cuál es el ángulo entre los dos colores en el agua?
59. Un rayo de luz de 610 nm pasa del aire al cuarzo fundido con un ángulo de incidencia de  $55,0^\circ$ . ¿Con qué ángulo de incidencia debe entrar la luz de 470 nm en el vidrio flint para tener el mismo ángulo de refracción?
60. Un estrecho haz de luz con longitudes de onda rojas (660 nm) y azules (470 nm) viaja desde el aire a través de una pieza plana de vidrio crown de 1,00 cm de grosor y vuelve al aire de nuevo. El rayo incide en un ángulo de incidencia de  $30,0^\circ$  (a) ¿Con qué ángulos emergen los dos colores? (b) ¿A qué distancia están separados el rojo y el azul cuando emergen?
61. Un estrecho haz de luz blanca entra en un prisma hecho de vidrio crown con un ángulo de incidencia de  $45,0^\circ$ , como se muestra a continuación. ¿Con qué ángulos,  $\theta_R$  y  $\theta_V$ , los componentes rojo (660 nm) y violeta (410 nm) de la luz salen del prisma?



### 1.7 Polarización

62. ¿Qué ángulo es necesario entre la dirección de la luz polarizada y el eje de un filtro polarizador para reducir su intensidad a la mitad?
63. El ángulo entre los ejes de dos filtros polarizadores es de  $45,0^\circ$ . ¿En qué medida el segundo filtro reduce la intensidad de la luz que entra por el primero?
64. Dos hojas polarizadoras  $P_1$  y  $P_2$  se colocan
- juntos con sus ejes de transmisión orientados en un ángulo  $\theta$  entre sí. ¿Cuál es el valor de  $\theta$  cuando solo 25% de la intensidad máxima de luz transmitida pasa a través de ellos?
65. Supongamos que en el problema anterior la luz que incide en  $P_1$  no está polarizada. Con el valor determinado de  $\theta$ , ¿qué fracción de la luz incidente atraviesa la combinación?
66. Si se tiene una luz completamente polarizada de intensidad  $150 \text{ W/m}^2$ , ¿cuál será su intensidad después de pasar por un filtro polarizador con su eje a un ángulo de  $89,0^\circ$  con respecto a la dirección de polarización de la luz?
67. ¿Qué ángulo tendría que formar el eje de un filtro polarizador con la dirección de la luz polarizada a una intensidad de  $1,00 \text{ kW/m}^2$  para reducir la intensidad a  $10,0 \text{ W/m}^2$ ?
68. Al final del [Ejemplo 1.7](#), se afirmó que la intensidad de la luz polarizada se reduce a 90,0% de su valor original al pasar por un filtro polarizador con su eje en un ángulo de  $18,4^\circ$  hacia la dirección de polarización. Compruebe esta afirmación.
69. Demuestre que si tiene tres filtros polarizadores, con el segundo en un ángulo de  $45,0^\circ$  al primero y al tercero con un ángulo de  $90,0^\circ$ , la intensidad de la luz que pasa el primero se reducirá a 25,0% de su valor. (Esto contrasta con tener solo el primero y el tercero, que reduce la intensidad a cero, por lo que colocar el segundo entre ellos aumenta la intensidad de la luz transmitida)
70. Se colocan tres láminas polarizadoras juntas de forma que el eje de transmisión de la segunda lámina se orienta a  $25,0^\circ$  con respecto al eje de la primera, mientras que el eje de transmisión de la tercera hoja está orientado a  $40,0^\circ$  (en el mismo sentido) con respecto al eje de la primera. ¿Qué fracción de la intensidad de un rayo no polarizado incidente es transmitida por la combinación?
71. Para girar el eje de polarización de un haz de luz linealmente polarizado a  $90,0^\circ$ , un estudiante coloca hojas  $P_1$  y  $P_2$  con sus ejes de transmisión a  $45,0^\circ$  y  $90,0^\circ$ , respectivamente, con respecto al eje de polarización del haz. (a) ¿Qué fracción de la luz incidente atraviesa  $P_1$  y (b) a través de la combinación? (c) Repita sus cálculos de la parte (b) para ángulos del eje de transmisión de  $30,0^\circ$  y  $90,0^\circ$ , respectivamente.
72. Se ha observado que cuando la luz que viaja en el agua cae sobre un bloque de plástico, el

ángulo de Brewster es  $50,0^\circ$ . ¿Cuál es el índice de refracción del plástico?

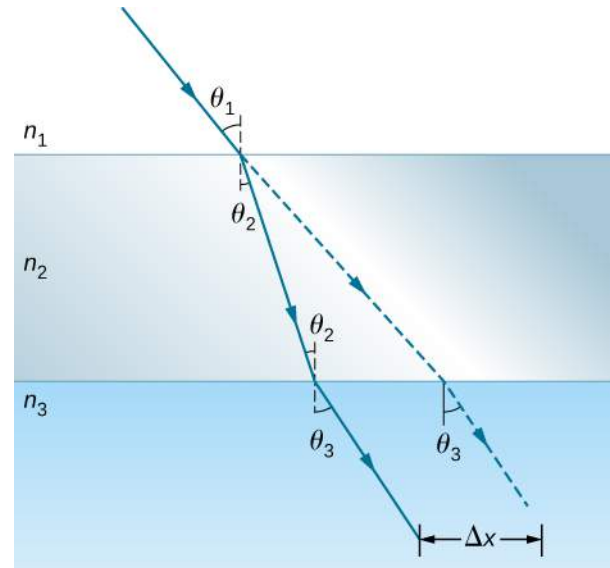
73. ¿Con qué ángulo se polariza completamente la luz reflejada por el diamante?  
74. ¿Cuál es el ángulo de Brewster de la luz que

### Problemas Adicionales

76. A partir de sus mediciones, Roemer estimó que la luz tardaba 22 minutos en recorrer una distancia igual al diámetro de la órbita de la Tierra alrededor del Sol. (a) Utilice esta estimación junto con el diámetro conocido de la órbita de la Tierra para obtener un valor aproximado de la velocidad de la luz. (b) La luz tarda realmente 16,5 minutos en recorrer esta distancia. Utilice este tiempo para calcular la velocidad de la luz.
77. Cornu realizó la medición de Fizeau de la velocidad de la luz utilizando una rueda de 4,00 cm de diámetro que contenía 180 dientes. La distancia de la rueda al espejo era de 22,9 km. Suponiendo que midiera la velocidad de la luz con precisión, ¿cuál era la velocidad angular de la rueda?
78. Supongamos que tenemos una sustancia transparente desconocida sumergida en agua, y queremos identificarla encontrando su índice de refracción. Se dispone que un haz de luz entra en él con un ángulo de  $45,0^\circ$ , y se observa que el ángulo de refracción es de  $40,3^\circ$ . ¿Cuál es el índice de refracción de la sustancia y su probable identidad?
79. A continuación se muestra un rayo de luz que pasa del aire al agua a través de un vidrio crown, como el que entra en una pecera. Calcule la cantidad de rayo desplazado por el vidrio ( $\Delta x$ ), dado que el ángulo de incidencia es de  $40,0^\circ$  y el vidrio tiene un grosor de 1,00 cm.

viaja en el agua y que se refleja en el vidrio crown?

75. Un buceador ve la luz reflejada en la superficie del agua. ¿A qué ángulo relativo a la superficie del agua se polarizará completamente esta luz?



80. Considerando el problema anterior, demuestre que  $\theta_3$  es la misma que la que se daría si el segundo medio no estuviera presente.
81. ¿Con qué ángulo se polariza completamente la luz dentro del vidrio crown cuando se refleja en el agua, como en una pecera?
82. La luz reflejada a  $55,6^\circ$  de una ventana está completamente polarizada. ¿Cuál es el índice de refracción de la ventana y la sustancia probable de la que está hecha?
83. (a) La luz reflejada a  $62,5^\circ$  de una piedra preciosa en un anillo está completamente polarizada. ¿Puede ser la gema un diamante? (b) ¿Con qué ángulo se polarizaría completamente la luz si la gema estuviera en el agua?
84. Si  $\theta_b$  es el ángulo de Brewster para la luz reflejada desde la parte superior de una interfase entre dos sustancias, y  $\theta'_b$  es el ángulo de Brewster para la luz reflejada desde abajo, demuestre que  $\theta_b + \theta'_b = 90,0^\circ$ .
85. **Resultados irrazonables** Supongamos que la luz viaja del agua a otra sustancia, con un ángulo de incidencia de  $10,0^\circ$  y un ángulo de refracción de  $14,9^\circ$ . (a) ¿Cuál es el índice de refracción de la otra sustancia? (b) ¿Qué es lo irrazonable de este resultado? (c) ¿Qué suposiciones son irrazonables o incoherentes?
86. **Resultados irrazonables** La luz que viaja desde

el agua hasta una piedra preciosa incide en la superficie con un ángulo de  $80,0^\circ$  y tiene un ángulo de refracción de  $15,2^\circ$ . (a) ¿Cuál es la velocidad de la luz en la piedra preciosa? (b) ¿Qué es lo irrazonable de este resultado? (c) ¿Qué suposiciones son irrazonables o incoherentes?

87. Si un filtro polarizador reduce la intensidad de la luz polarizada a 50,0% de su valor original, ¿en cuánto se reducen los campos eléctricos y magnéticos?
88. Supongamos que se pone dos pares de lentes de sol polarizados con sus ejes en un ángulo de  $15,0^\circ$ . ¿Cuánto tiempo tardará la luz en depositar una determinada cantidad de energía en su ojo en comparación con unos lentes de

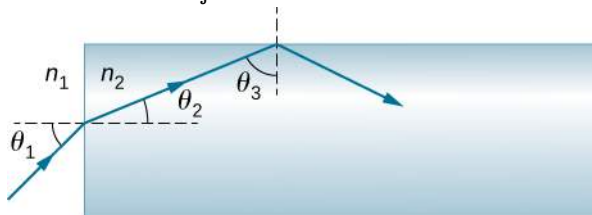
sol? Supongamos que las lentes son claras, excepto por sus características de polarización.

89. (a) En un día en que la intensidad de la luz solar es  $1,00 \text{ kW/m}^2$ , una lente circular de  $0,200 \text{ m}$  de diámetro enfoca la luz sobre el agua en un vaso negro. Dos láminas polarizadoras de plástico se colocan delante de la lente con sus ejes en un ángulo de  $20,0^\circ$ . Supongamos que la luz solar no está polarizada y los polarizadores son 100% eficientes, ¿cuál es la tasa inicial de calentamiento del agua en  $^\circ\text{C/s}$ , suponiendo que sea 80,0% absorbida? El vaso de aluminio tiene una masa de 30,0 gramos y contiene 250 gramos de agua. (b) ¿Se calientan los filtros polarizadores? Explique.

### Problemas De Desafío

90. Los espectáculos de luz montados con láseres utilizan espejos móviles para hacer oscilar los haces y crear efectos de color. Demuestre que un rayo de luz reflejado en un espejo cambia de dirección en  $2\theta$  cuando el espejo se gira en un ángulo  $\theta$ .
91. Considere la luz solar que entra en la atmósfera de la Tierra al amanecer y al atardecer, es decir, a un ángulo de incidencia de  $90,0^\circ$ . Al tomar como súbito el límite entre el espacio casi vacío y la atmósfera, calcule el ángulo de refracción de la luz solar. Esto alarga el tiempo que el Sol parece estar sobre el horizonte, tanto al amanecer como al atardecer. Ahora construya un problema en el que determine el ángulo de refracción para diferentes modelos de la atmósfera, como varias capas de densidad variable. Su instructor puede orientarle sobre el nivel de complejidad a considerar y sobre cómo varía el índice de refracción con la densidad del aire.

92. Un rayo de luz que entra en una fibra óptica rodeada de aire se refracta primero y se refleja después como se muestra a continuación. Demuestre que si la fibra está hecha de vidrio crown, cualquier rayo incidente se reflejará totalmente de forma interna.

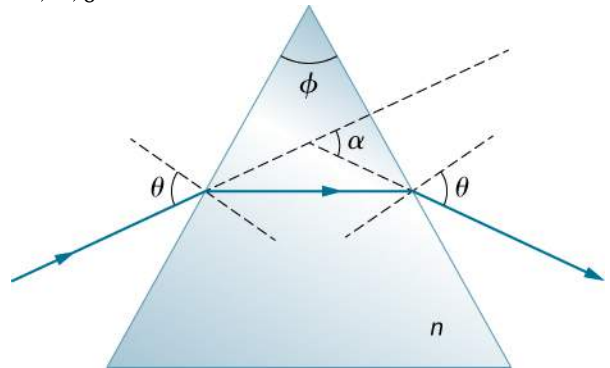


93. Un rayo de luz incide en la cara izquierda de un prisma (ver más abajo) en el ángulo de incidencia  $\theta$

para el que el haz emergente tiene un ángulo de refracción  $\theta$  en la cara derecha. Demuestre que el índice de refracción  $n$  del prisma de vidrio viene dado por

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \phi)}{\sin \frac{1}{2}\phi}$$

donde  $\phi$  es el ángulo del vértice del prisma y  $\alpha$  es el ángulo por el que se ha desviado el rayo. Si  $\alpha = 37,0^\circ$  y los ángulos de la base del prisma son cada uno  $50,0^\circ$ , ¿cuál es el valor de  $n$ ?



94. Si el ángulo del vértice  $\phi$  en el problema anterior es  $20,0^\circ$  y  $n = 1,50$ , ¿cuál es el valor de  $\alpha$ ?
95. La luz que incide en la lámina polarizadora  $P_1$  se polariza linealmente con un ángulo de  $30,0^\circ$  con respecto al eje de transmisión de  $P_1$ . La lámina  $P_2$  se coloca de forma que su eje sea paralelo al eje de polarización de la luz incidente, es decir, también en  $30,0^\circ$  con respecto a  $P_1$ . (a) ¿Qué fracción de la luz incidente atraviesa  $P_1$ ? (b) ¿Qué fracción de la luz incidente pasa por la combinación? (c) Al girar  $P_2$ , se obtiene un máximo en la intensidad

transmitida. ¿Cuál es la relación entre esta intensidad máxima y la intensidad de la luz transmitida cuando  $P_2$  está a  $30,0^\circ$  con respecto a  $P_1$ ?

96. Demuestre que si  $I$  es la intensidad de la luz transmitida por dos filtros polarizadores con

ejes en ángulo  $\theta$  y  $I'$  es la intensidad cuando los ejes están en ángulo  $90,0^\circ - \theta$ , entonces  $I + I' = I_0$ , la intensidad original. (*Pista:* Utilice las identidades trigonométricas  $\cos 90,0^\circ - \theta = \sin \theta$  y  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ .)





## CAPÍTULO 2

# Óptica geométrica y formación de imágenes



**Figura 2.1** *Cloud Gate* es una escultura pública de Anish Kapoor situada en el Millennium Park de Chicago. Sus placas de acero inoxidable reflejan y distorsionan las imágenes a su alrededor, incluido el perfil de la ciudad de Chicago. Inaugurado en 2006, se ha convertido en una popular atracción turística, que ilustra cómo el arte puede utilizar los principios de la óptica física para sobresaltar y entretener (crédito: modificación de la obra de Dhillung Kirat)

### ESQUEMA DEL CAPITULO

#### 2.1 Imágenes formadas por espejos planos

#### 2.2 Espejos esféricos

#### 2.3 Imágenes formadas por refracción

#### 2.4 Lentes delgadas

#### 2.5 El ojo

#### 2.6 La cámara

#### 2.7 La lupa simple

#### 2.8 Microscopios y telescopios

---

**INTRODUCCIÓN** Este capítulo presenta las principales ideas de la óptica geométrica, que describen la formación de imágenes debido a la reflexión y la refracción. Se denomina óptica “geométrica” porque las imágenes pueden caracterizarse mediante construcciones geométricas, como los diagramas de rayos. Hemos visto que la luz visible es una onda electromagnética; sin embargo, su naturaleza ondulatoria solo se hace evidente cuando la luz interactúa con objetos de dimensiones comparables a la longitud de onda (unos 500 nm para la luz visible). Por lo tanto, las leyes de la óptica geométrica solo se aplican a la luz que interactúa con objetos mucho más grandes que su longitud de onda.

## 2.1 Imágenes formadas por espejos planos

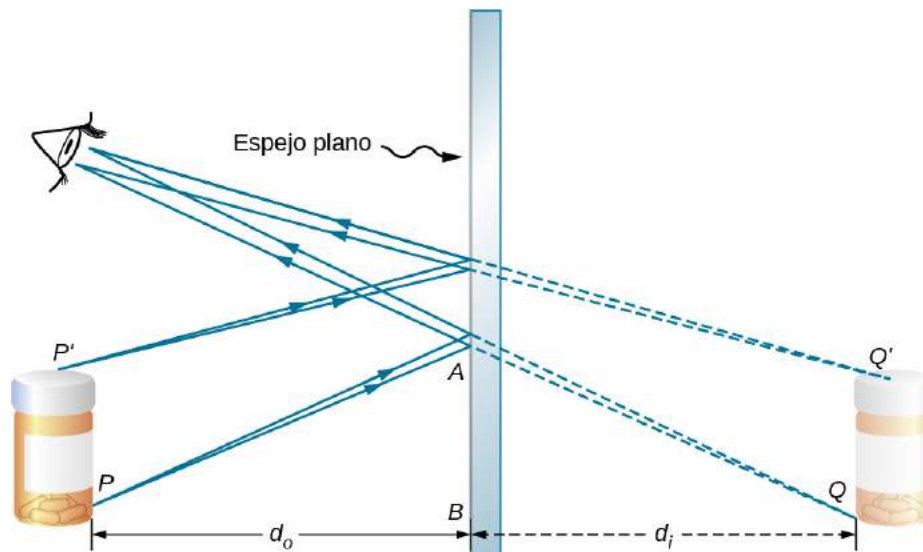
### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir cómo se forma una imagen en un espejo plano.
- Distinguir entre imágenes reales y virtuales.
- Encontrar la ubicación y caracterizar la orientación de una imagen creada por un espejo plano.

Basta con ir al baño más cercano para encontrar un ejemplo de una imagen formada por un espejo. Las imágenes en un **espejo** plano tienen el mismo tamaño que el objeto, están situadas detrás del espejo y están orientadas en la misma dirección que el objeto (es decir, “en posición vertical”).

Para entender cómo sucede esto, considere la [Figura 2.2](#). Dos rayos salen del punto  $P$ , golpean el espejo y se reflejan en el ojo del observador. Tome en cuenta que utilizamos la ley de reflexión para construir los rayos reflejados. Si los rayos reflejados se extienden hacia atrás, por detrás del espejo (vea las líneas discontinuas en la [Figura 2.2](#)), parece que se originan en el punto  $Q$ . Allí se encuentra la imagen del punto  $P$ . Si repetimos este proceso para el punto  $P'$ , obtenemos su imagen en el punto  $Q'$ . Debe convencerse, utilizando la geometría básica, de que la altura de la imagen (la distancia de  $Q$  a  $Q'$ ) es igual a la altura del objeto (la distancia de  $P$  a  $P'$ ). Al formar imágenes de todos los puntos del objeto, obtenemos una imagen vertical del objeto detrás del espejo.



**FIGURA 2.2** Dos rayos de luz que parten del punto  $P$  de un objeto se reflejan en un espejo plano en el ojo de un observador. Los rayos reflejados se obtienen utilizando la ley de reflexión. Extendiendo estos rayos reflejados hacia atrás, parecen venir del punto  $Q$  detrás del espejo, que es donde se encuentra la imagen virtual. Repitiendo este proceso para el punto  $P'$  da el punto de la imagen  $Q'$ . Por lo tanto, la altura de la imagen es la misma que la del objeto, la imagen está en posición vertical y la distancia del objeto  $d_o$  es la misma que la distancia de imagen  $d_i$ . (crédito: modificación del trabajo de Kevin Dufendach)

Tenga en cuenta que al observador le parece que los rayos reflejados provienen directamente de la imagen que está detrás del espejo. En realidad, estos rayos proceden de los puntos donde se reflejan en el espejo. La imagen detrás del espejo se llama **imagen virtual** porque no se puede proyectar en una pantalla: los rayos sólo parecen originarse en un punto común detrás del espejo. Si se pasa por detrás del espejo, no se puede ver la imagen, porque los rayos no van allí. Sin embargo, delante del espejo, los rayos se comportan exactamente como si vinieran de detrás del espejo, por lo que es ahí donde se encuentra la imagen virtual.

Más adelante en este capítulo, hablaremos de las imágenes reales; una **imagen real** puede proyectarse en una pantalla porque los rayos atraviesan físicamente la imagen. Sin duda, se pueden ver tanto imágenes reales como virtuales. La diferencia es que una imagen virtual no puede proyectarse en una pantalla, mientras que una imagen real, sí.



## Localización de una imagen en un espejo plano

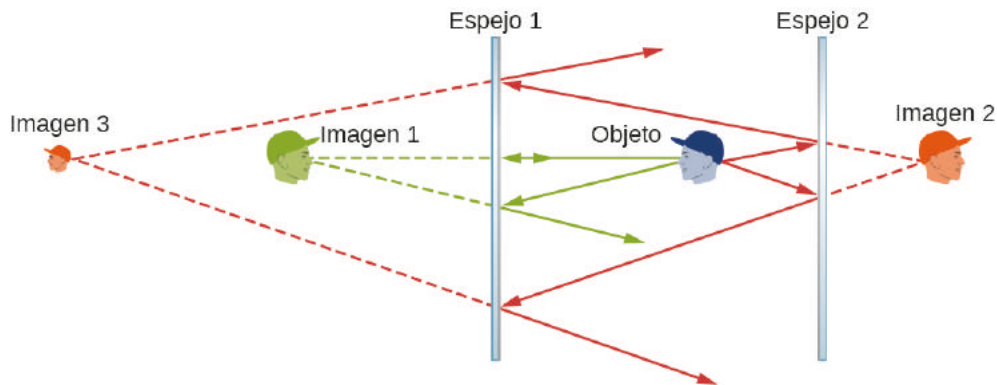
La ley de reflexión nos dice que el ángulo de incidencia es el mismo que el de reflexión. Aplicando esto a los triángulos  $PAB$  y  $QAB$  en la [Figura 2.2](#) y utilizando la geometría básica se demuestra que son triángulos congruentes. Esto significa que la distancia  $PB$  del objeto al espejo es la misma que la distancia  $BQ$  del espejo a la imagen. La **distancia del objeto** (denominada  $d_o$ ) es la distancia del espejo al objeto (o, más generalmente, del centro del elemento óptico que crea su imagen). Del mismo modo, la **distancia de imagen** (denominada  $d_i$ ) es la distancia del espejo a la imagen (o, más generalmente, del centro del elemento óptico que la crea). Si medimos las distancias desde el espejo, entonces el objeto y la imagen están en direcciones opuestas, por lo que para un espejo plano, las distancias del objeto y la imagen deben tener los signos opuestos:

$$d_o = -d_i. \quad 2.1$$

Un objeto extendido como el contenedor de la [Figura 2.2](#) puede tratarse como una colección de puntos, y podemos aplicar el método anterior para localizar la imagen de cada punto en el objeto extendido, formando así la imagen extendida.

## Imágenes múltiples

Si un objeto está situado frente a dos espejos, se pueden ver imágenes en ambos espejos. Además, la imagen en el primer espejo puede actuar como un objeto para el segundo espejo, por lo que el segundo espejo puede formar una imagen de esta imagen. Si los espejos se colocan paralelos entre sí y el objeto se sitúa en un punto distinto del punto medio entre ellos, este proceso de imagen-de-una-imagen continúa sin fin, como habrá podido comprobar al estar en un pasillo con espejos a cada lado. Esto se muestra en la [Figura 2.3](#), donde se presentan tres imágenes producidas por el objeto azul. Observe que en que cada reflejo invierte el anverso y el reverso, al igual que si tira de un guante de la derecha al revés se produce un guante de la izquierda (por eso un reflejo de la mano derecha es una mano izquierda). Así, los frentes y los reversos de las imágenes 1 y 2 están invertidos con respecto al objeto, y el frente y el reverso de la imagen 3 están invertidos con respecto a la imagen 2, que es el objeto de la imagen 3.

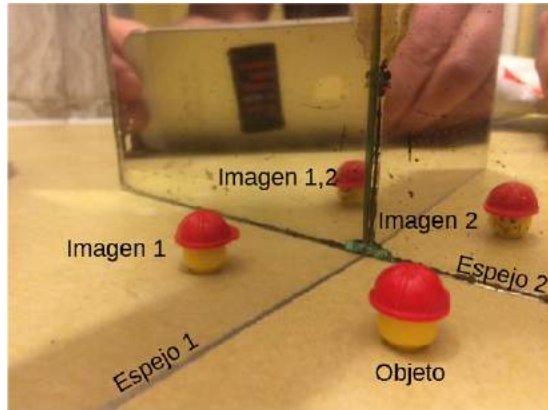


**FIGURA 2.3** Dos espejos paralelos pueden producir, en teoría, un número infinito de imágenes de un objeto colocado fuera del centro entre los espejos. En esta figura se muestran tres de estas imágenes. El anverso y el reverso de cada imagen están invertidos con respecto a su objeto. Tenga en cuenta que los colores son únicamente para identificar las imágenes. En los espejos normales, el color de una imagen es esencialmente el mismo que el de su objeto.

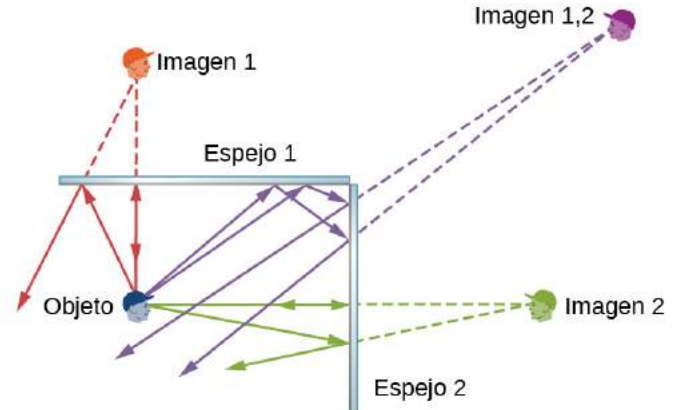
Habrás observado que la imagen 3 es más pequeña que el objeto, mientras que las imágenes 1 y 2 tienen el mismo tamaño que el objeto. La relación de la altura de la imagen con respecto a la altura del objeto se denomina **aumento**. En la siguiente sección se hablará más sobre el aumento.

Las reflexiones infinitas pueden terminar. Por ejemplo, dos espejos en ángulo recto forman tres imágenes, como se muestra en la parte (a) de la [Figura 2.4](#). Las imágenes 1 y 2 son el resultado de los rayos que se reflejan en un solo espejo, pero la imagen 1,2 está formada por los rayos que se reflejan en ambos espejos. Esto se muestra en el diagrama de trazado de rayos de la parte (b) de la [Figura 2.4](#). Para encontrar la imagen 1,2, hay

que mirar detrás de la esquina de los dos espejos.



(a)



(b)

**FIGURA 2.4** Dos espejos pueden producir múltiples imágenes. (a) Tres imágenes de una cabeza de plástico son visibles en los dos espejos en ángulo recto. (b) Un solo objeto que se refleja en dos espejos en ángulo recto puede producir tres imágenes, como lo muestran las imágenes verde, morada y roja.

## 2.2 Espejos esféricos

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir la formación de imágenes mediante espejos esféricos.
- Utilizar los diagramas de rayos y la ecuación del espejo para calcular las propiedades de una imagen en un espejo esférico.

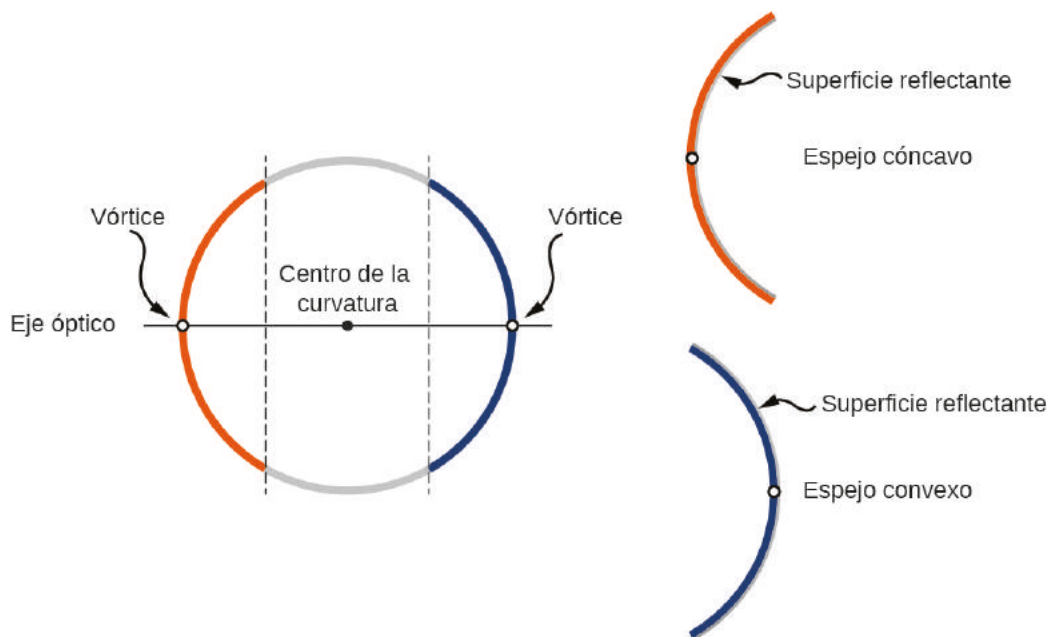
La imagen en un espejo plano tiene el mismo tamaño que el objeto, está en posición vertical y se encuentra a la misma distancia detrás del espejo que el objeto frente a él. Un **espejo curvo**, por el contrario, puede formar imágenes que pueden ser más grandes o más pequeñas que el objeto y pueden formarse delante o detrás del espejo. En general, cualquier superficie curva formará una imagen, aunque algunas imágenes pueden estar tan distorsionadas que no se pueden reconocer (piense en los espejos de las casas de diversión).

Dado que los espejos curvos pueden crear una gran variedad de imágenes, se utilizan en muchos dispositivos ópticos que tienen muchos usos. Nos centraremos principalmente en los espejos esféricos, ya que son más fáciles de fabricar que los espejos parabólicos y, por tanto, son más comunes.

### Espejos curvos

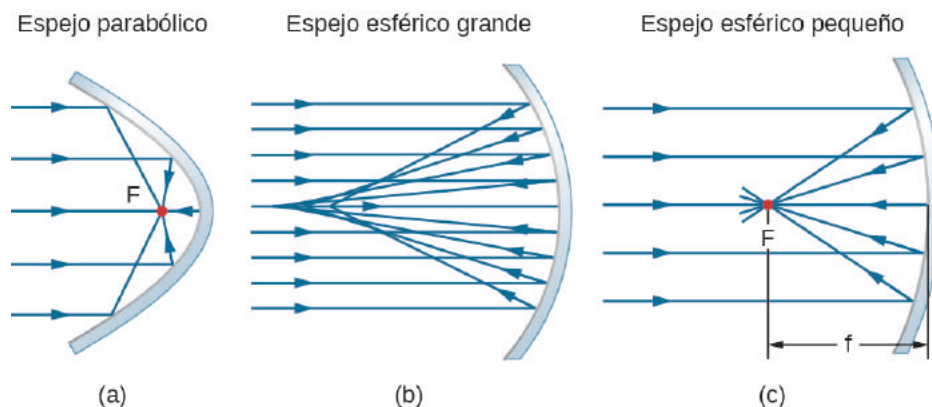
Podemos definir dos tipos generales de espejos esféricos. Si la superficie reflectante es la cara exterior de la esfera, el espejo se llama **espejo convexo**. Si la superficie interior es la superficie reflectante, se denomina **espejo cóncavo**.

La simetría es una de las principales características de muchos dispositivos ópticos, como los espejos y las lentes. El eje de simetría de estos elementos ópticos suele denominarse eje principal o **eje óptico**. Para un espejo esférico, el eje óptico pasa por el centro de curvatura del espejo y el **vértice** del mismo, como se muestra en la [Figura 2.5](#).



**FIGURA 2.5** Un espejo esférico se forma cortando un trozo de esfera y plateando la superficie interior o exterior. Un espejo cóncavo tiene un plateado en la superficie interior (piense en una "cueva"), y un espejo convexo tiene un plateado en la superficie exterior.

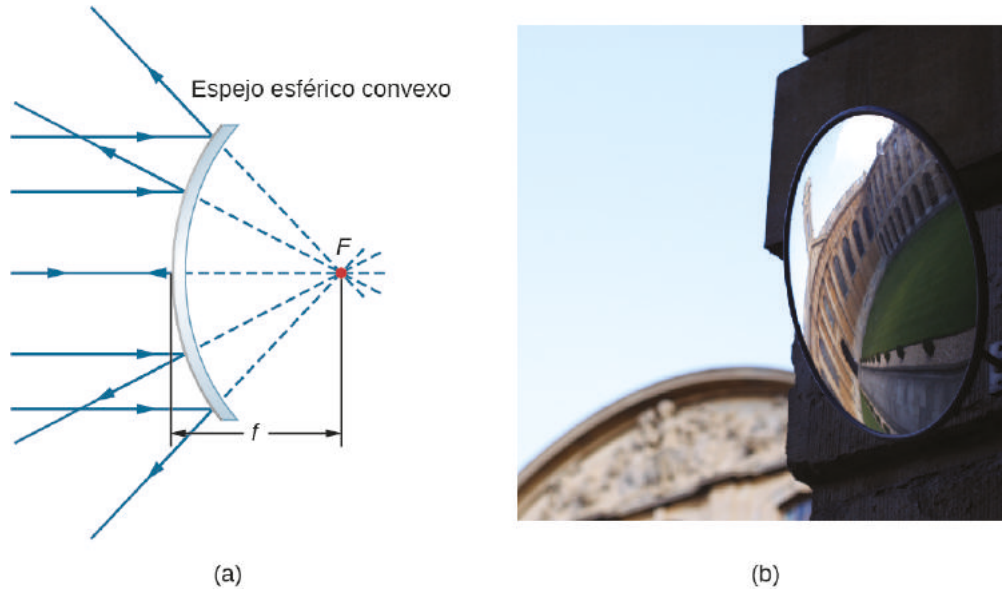
Considere los rayos paralelos al eje óptico de un espejo parabólico, como se muestra en la parte (a) de la [Figura 2.6](#). Siguiendo la ley de reflexión, estos rayos se reflejan de manera que convergen en un punto, llamado **punto focal**. La parte (b) de esta figura muestra un espejo esférico que es grande en comparación con su radio de curvatura. En este espejo, los rayos reflejados no se cruzan en el mismo punto, por lo que el espejo no tiene un punto focal bien definido. Esto se llama aberración esférica y da lugar a una imagen borrosa de un objeto extendido. La parte (c) muestra un espejo esférico que es pequeño en comparación con su radio de curvatura. Este espejo es una buena aproximación a un espejo parabólico, por lo que los rayos que llegan paralelos al eje óptico se reflejan en un punto focal bien definido. La distancia a lo largo del eje óptico desde el espejo hasta el punto focal se denomina **distancia focal** del espejo.



**FIGURA 2.6** (a) Los rayos paralelos reflejados en un espejo parabólico se cruzan en un único punto llamado punto focal  $F$ . (b) Los rayos paralelos reflejados en un espejo esférico grande no se cruzan en un punto común. (c) Si un espejo esférico es pequeño comparado con su radio de curvatura, se aproxima mejor a la parte central de un espejo parabólico, por lo que los rayos paralelos se cruzan esencialmente en un punto común. La distancia a lo largo del eje óptico desde el espejo hasta el punto focal es la distancia focal  $f$  del espejo.

Un espejo esférico convexo también tiene un punto focal, como se muestra en la [Figura 2.7](#). Los rayos incidentes paralelos al eje óptico se reflejan en el espejo y parecen originarse en el punto  $F$  a la distancia focal  $f$  detrás del espejo. Por lo tanto, el punto focal es virtual porque ningún rayo real lo atraviesa realmente; solo

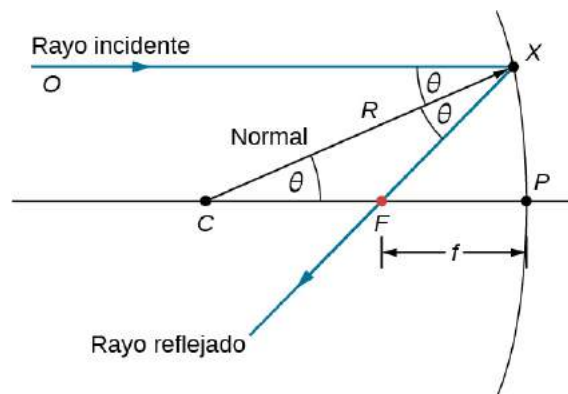
parece que se origina en él.



**FIGURA 2.7** (a) Rayos reflejados por un espejo esférico convexo: Los rayos de luz incidentes paralelos al eje óptico se reflejan en un espejo esférico convexo y parecen proceder de un punto focal bien definido a la distancia focal  $f$  en el lado opuesto del espejo. El punto focal es virtual porque ningún rayo real lo atraviesa. (b) Fotografía de una imagen virtual formada por un espejo convexo. (crédito b: modificación del trabajo de Jenny Downing)

¿Cómo se relaciona la distancia focal de un espejo con el radio de curvatura del mismo? La [Figura 2.8](#) muestra un único rayo que se refleja en un espejo esférico cóncavo. El rayo incidente es paralelo al eje óptico. El punto en el que el rayo reflejado cruza el eje óptico es el punto focal. Obsérvese que todos los rayos incidentes que son paralelos al eje óptico se reflejan a través del punto focal; solo mostramos un rayo para simplificar. Queremos encontrar la relación entre la distancia focal  $FP$  (señalada con una  $f$ ) y el radio de curvatura del espejo,  $R$ , cuya longitud es  $R = CF + FP$ . La ley de reflexión nos dice que los ángulos  $OXC$  y  $CXF$  son iguales, y como el rayo incidente es paralelo al eje óptico, los ángulos  $OXC$  y  $XCP$  también son iguales. Así, el triángulo  $CXF$  es un triángulo isósceles con  $CF = FX$ . Si el ángulo  $\theta$  es pequeño (por lo que  $\sin \theta \approx \theta$ ; esto se denomina «aproximación para ángulos pequeños»), entonces  $FX \approx FP$  o  $CF \approx FP$ . Al insertar esto en la ecuación del radio  $R$ , obtenemos

$$R = CF + FP = FP + FP = 2FP = 2f$$



**FIGURA 2.8** Reflexión en un espejo cóncavo. En la aproximación para ángulos pequeños, un rayo paralelo al eje óptico  $CP$  se refleja a través del punto focal  $F$  del espejo.

En otras palabras, en la aproximación para ángulos pequeños, la distancia focal  $f$  de un espejo esférico cóncavo es la mitad de su radio de curvatura,  $R$ :

$$f = \frac{R}{2}.$$

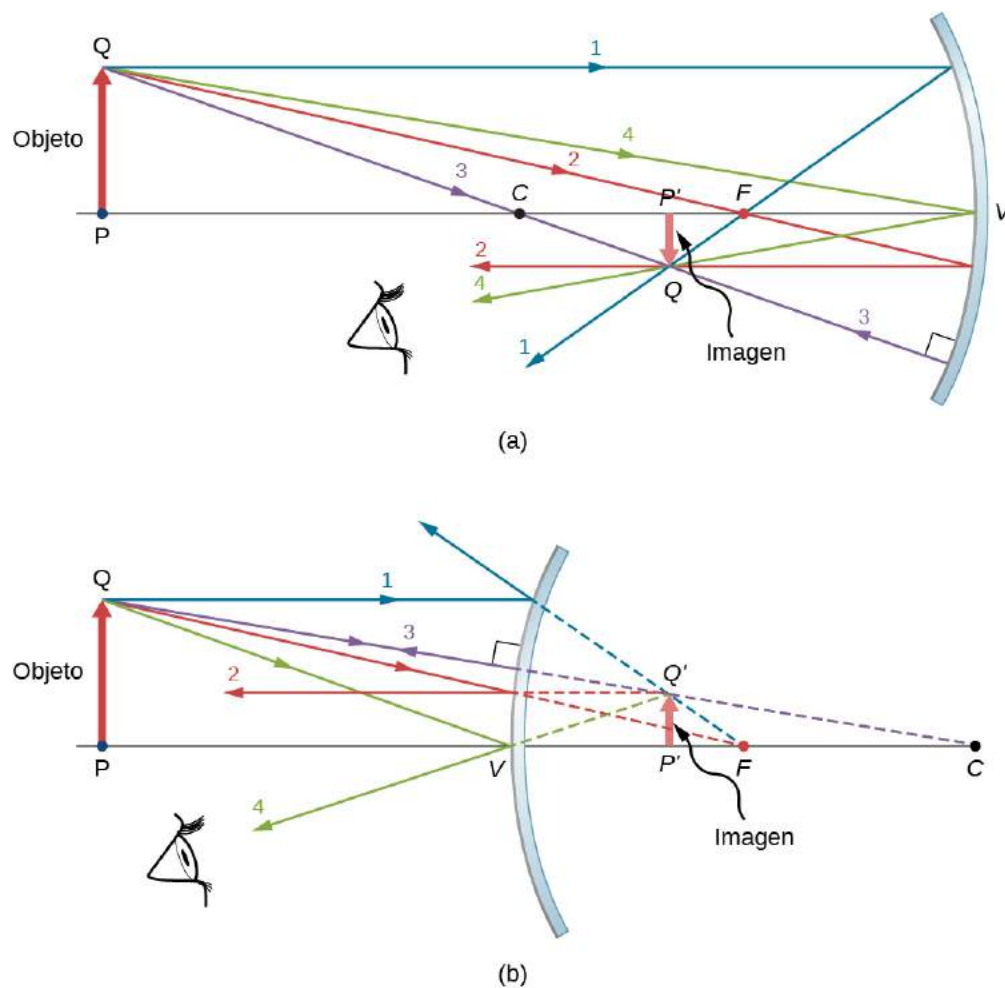
2.2

En este capítulo, asumimos que la **aproximación para ángulos pequeños** (también llamada aproximación paraxial) es siempre válida. En esta aproximación, todos los rayos son paraxiales, lo que significa que forman un pequeño ángulo con el eje óptico y están a una distancia mucho menor que el radio de curvatura del eje óptico. En este caso, sus ángulos  $\theta$  de reflexión son ángulos pequeños, por lo que  $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ .

### Uso del trazado de rayos para localizar imágenes

Para encontrar la ubicación de una imagen formada por un espejo esférico, primero utilizamos el trazado de rayos, que es la técnica de dibujar rayos y utilizar la ley de reflexión para determinar los rayos reflejados (posteriormente, para las lentes, utilizamos la ley de refracción para determinar los rayos refractados). Combinado con algo de geometría básica, podemos utilizar el trazado de rayos para encontrar el punto focal, la ubicación de la imagen y otra información sobre cómo un espejo manipula la luz. Anteriormente utilizamos el trazado de rayos para localizar el punto focal de los espejos esféricos o la distancia de imagen de los espejos planos. Para localizar la imagen de un objeto, hay que localizar al menos dos puntos de la imagen. La localización de cada punto requiere dibujar al menos dos rayos desde un punto del objeto y construir sus rayos reflejados. El punto en el que se cruzan los rayos reflejados, ya sea en el espacio real o en el virtual, es donde se encuentra el punto correspondiente de la imagen. Para facilitar el trazado de rayos, nos concentramos en cuatro rayos "principales" cuyas reflexiones son fáciles de construir.

La [Figura 2.9](#) muestra un espejo cóncavo y otro convexo, cada uno con un objeto en forma de flecha adelante. Estos son los objetos cuyas imágenes queremos localizar mediante el trazado de rayos. Para ello, trazamos rayos desde el punto  $Q$  que está en el objeto pero no en el eje óptico. Elegimos dibujar nuestro rayo desde la punta del objeto. El rayo principal 1 parte del punto  $Q$  y viaja paralelo al eje óptico. La reflexión de este rayo debe pasar por el punto focal, como se ha comentado anteriormente. Así, para el espejo cóncavo, la reflexión del rayo principal 1 pasa por el punto focal  $F$ , como se muestra en la parte (b) de la figura. Para el espejo convexo, la prolongación hacia atrás de la reflexión del rayo principal 1 pasa por el punto focal (es decir, un foco virtual). El rayo principal 2 recorre primero la línea que pasa por el punto focal y luego se refleja a lo largo de una línea paralela al eje óptico. El rayo principal 3 se desplaza hacia el centro de curvatura del espejo, por lo que incide en el espejo con incidencia normal y se refleja a lo largo de la línea de la que procede. Por último, el rayo principal 4 incide en el vértice del espejo y se refleja simétricamente alrededor del eje óptico.



**FIGURA 2.9** Se muestran los cuatro rayos principales para (a) un espejo cóncavo y para (b) en un espejo convexo. La imagen se forma donde se cruzan los rayos (para imágenes reales) o donde se cruzan sus prolongaciones hacia atrás (para imágenes virtuales).

Los cuatro rayos principales se cruzan en el punto  $Q'$ , que es donde se encuentra la imagen del punto  $Q$ . Para localizar el punto  $Q'$ , basta con dibujar dos de estos rayos principales. Por lo tanto, somos libres de elegir cualquiera de los rayos principales que deseemos para ubicar la imagen. Dibujar más de dos rayos principales a veces es útil para verificar que el trazado de rayos es correcto.

Para localizar completamente la imagen extendida, necesitamos localizar un segundo punto en la imagen, para saber cómo está orientada la imagen. Para hacerlo, trazamos los rayos principales desde la base del objeto. En este caso, los cuatro rayos principales recorren el eje óptico, se reflejan en el espejo y vuelven a recorrer el eje óptico. La dificultad radica en que, como estos rayos son colineales, no podemos determinar un punto único en el que se cruzan. Solo sabemos que la base de la imagen está en el eje óptico. Sin embargo, como el espejo es simétrico de arriba a abajo, no cambia la orientación vertical del objeto. Así, como el objeto es vertical, la imagen debe ser vertical. Por lo tanto, la imagen de la base del objeto está en el eje óptico directamente por encima de la imagen de la punta, como se dibuja en la figura.

Para el espejo cóncavo, la imagen extendida se forma en este caso entre el punto focal y el centro de curvatura del espejo. Está invertida con respecto al objeto, es una imagen real y es más pequeña que el objeto. Si acercáramos o alejáramos el objeto al espejo, las características de la imagen cambiarían. Por ejemplo, mostramos, como ejercicio posterior, que un objeto colocado entre un espejo cóncavo y su punto focal conduce a una imagen virtual que está en posición vertical y es más grande que el objeto. En el caso del espejo convexo, la imagen extendida se forma entre el punto focal y el espejo. Está en posición vertical con respecto al objeto, es una imagen virtual y es más pequeña que el objeto.



## Resumen de las reglas de trazado de rayos

El trazado de rayos es muy útil para los espejos. Las reglas para el trazado de rayos se resumen aquí como referencia:

- Un rayo que viaja paralelo al eje óptico de un espejo esférico se refleja a lo largo de una línea que pasa por el punto focal del espejo (rayo 1 en la [Figura 2.9](#)).
- Un rayo que viaja a lo largo de una línea que pasa por el punto focal de un espejo esférico se refleja a lo largo de una línea paralela al eje óptico del espejo (rayo 2 en la [Figura 2.9](#)).
- Un rayo que viaja a lo largo de una línea que pasa por el centro de curvatura de un espejo esférico se refleja a lo largo de la misma línea (rayo 3 en la [Figura 2.9](#)).
- Un rayo que incide en el vértice de un espejo esférico se refleja simétricamente alrededor del eje óptico del espejo (rayo 4 en la [Figura 2.9](#)).

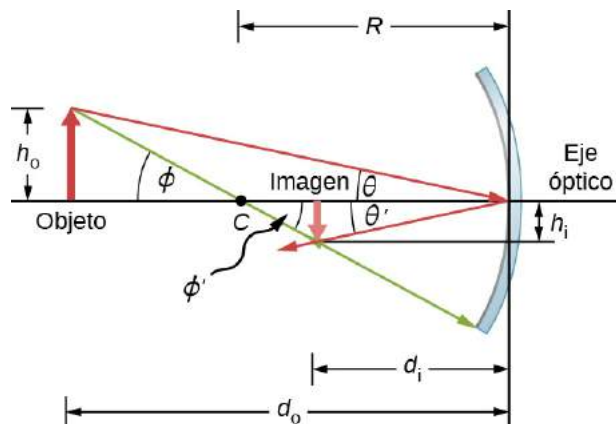
Utilizamos el trazado de rayos para ilustrar cómo se forman las imágenes en los espejos y para obtener información numérica sobre las propiedades ópticas del espejo. Si suponemos que un espejo es pequeño en comparación con su radio de curvatura, también podemos utilizar el álgebra y la geometría para derivar una ecuación del espejo, lo que haremos en la siguiente sección. La combinación del trazado de rayos con la ecuación del espejo es una buena manera de analizar los sistemas de espejos.

## Formación de imágenes por reflexión: la ecuación del espejo

Para un espejo plano, demostramos que la imagen que se forma tiene la misma altura y orientación que el objeto, y se encuentra a la misma distancia detrás del espejo que el objeto frente a él. Aunque la situación es un poco más complicada en el caso de los espejos curvos, el uso de la geometría conduce a fórmulas sencillas que relacionan las distancias del objeto y de la imagen con las distancias focales de los espejos cóncavos y convexos.

Considere el objeto  $OP$  mostrado en la [Figura 2.10](#). El centro de curvatura del espejo se denomina  $C$  y está a una distancia  $R$  del vértice del espejo, como se marca en la figura. Las distancias del objeto y de la imagen se marcan como  $d_o$  y  $d_i$ , y las alturas del objeto y de la imagen se marcan como  $h_o$  y  $h_i$ , respectivamente. Ya que los ángulos  $\phi$  y  $\phi'$  son ángulos interiores alternos, sabemos que tienen la misma magnitud. Sin embargo, deben diferir en el signo si medimos los ángulos desde el eje óptico, por lo que  $\phi = -\phi'$ . Una situación análoga se da para los ángulos  $\theta$  y  $\theta'$ . La ley de reflexión nos dice que tienen la misma magnitud, pero sus signos deben diferir si medimos los ángulos desde el eje óptico. Así,  $\theta = -\theta'$ . Al tomar la tangente de los ángulos  $\theta$  y  $\theta'$ , y al utilizar la propiedad de que la  $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ , obtenemos

$$\left. \begin{aligned} \tan \theta &= \frac{h_o}{d_o} \\ \tan \theta' &= -\tan \theta = \frac{h_i}{d_i} \end{aligned} \right\} \frac{h_o}{d_o} = -\frac{h_i}{d_i} \text{ o } -\frac{h_o}{h_i} = \frac{d_o}{d_i}. \quad 2.3$$



**FIGURA 2.10** Imagen formada por un espejo cóncavo.

Del mismo modo, al tomar la tangente de  $\phi$  y  $\phi'$  da como resultado



$$\left. \begin{array}{l} \tan \phi = \frac{h_o}{d_o - R} \\ \tan \phi' = -\tan \phi = \frac{h_i}{R - d_i} \end{array} \right\} \frac{h_o}{d_o - R} = -\frac{h_i}{R - d_i} \text{ o } -\frac{h_o}{h_i} = \frac{d_o - R}{R - d_i}.$$

Combinando estos dos resultados se obtiene

$$\frac{d_o}{d_i} = \frac{d_o - R}{R - d_i}.$$

Después de un poco de álgebra, esto se convierte en

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{2}{R}. \quad 2.4$$

No se requiere ninguna aproximación para este resultado, por lo que es exacto. Sin embargo, como se ha comentado anteriormente, en la aproximación para ángulos pequeños, la distancia focal de un espejo esférico es la mitad del radio de curvatura del espejo o  $f = R/2$ . Al insertar esto en la [Ecuación 2.3](#) se obtiene la *ecuación del espejo*:

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}. \quad 2.5$$

La ecuación del espejo relaciona las distancias de la imagen y del objeto con la distancia focal y solo es válida en la aproximación para ángulo pequeño. Aunque se derivó para un espejo cóncavo, también es válida para espejos convexos (la demostración de esto se deja como ejercicio). Podemos extender la ecuación del espejo al caso de un espejo plano observando que un espejo plano tiene un radio de curvatura infinito. Esto significa que el punto focal está en el infinito, por lo que la ecuación del espejo se simplifica a

$$d_o = -d_i \quad 2.6$$

que es la misma que la [Ecuación 2.1](#) obtenida anteriormente.

Observe que hemos sido muy cuidadosos con los signos al derivar la ecuación del espejo. Para un espejo plano, la distancia de la imagen tiene el signo contrario a la distancia del objeto. Además, la imagen real formada por el espejo cóncavo en la [Figura 2.10](#) está en el lado opuesto del eje óptico con respecto al objeto. En este caso, la altura de la imagen debe tener el signo contrario a la altura del objeto. Para tener en cuenta los signos de las distintas cantidades en la ecuación del espejo, introducimos ahora una convención de signos.

### Convención de signos para espejos esféricos

El utilizar una convención de signos coherente es muy importante en la óptica geométrica. Asigna valores positivos o negativos a las magnitudes que caracterizan un sistema óptico. La comprensión de la convención de signos permite describir una imagen sin construir un diagrama de rayos. Este texto utiliza la siguiente convención de signos:

1. La distancia focal  $f$  es positiva para los espejos cóncavos y negativa para los convexos.
2. La distancia de imagen  $d_i$  es positiva para las imágenes reales y negativa para las virtuales.

Observe que la regla 1 significa que el radio de curvatura de un espejo esférico puede ser positivo o negativo. ¿Qué significa que tenga un radio de curvatura negativo? Esto significa simplemente que el radio de curvatura de un espejo convexo se define como negativo.

### Aumento de la imagen

Utilicemos la convención de signos para interpretar mejor la derivación de la ecuación del espejo. Al derivar esta ecuación, encontramos que las alturas del objeto y de la imagen están relacionadas por

$$-\frac{h_o}{h_i} = \frac{d_o}{d_i}. \quad 2.7$$

Consulte la [Ecuación 2.3](#). El objeto y la imagen formada por el espejo en la [Figura 2.10](#) son reales, por lo que las distancias del objeto y de la imagen son ambas positivas. El punto más alto del objeto está por encima del eje

óptico, por lo que la altura del objeto es positiva. La imagen, sin embargo, está por debajo del eje óptico, por lo que la altura de la imagen es negativa. Por tanto, esta convención de signos es coherente con nuestra derivación de la ecuación del espejo.

La [Ecuación 2.7](#) describe, de hecho, el **aumento lineal** (a menudo llamado simplemente "aumento") de la imagen en términos de las distancias del objeto y de la imagen. Por lo tanto, definimos el aumento adimensional  $m$  de la siguiente manera:

$$m = \frac{h_i}{h_o}. \quad 2.8$$

Si  $m$  es positivo, la imagen está en posición vertical, y si  $m$  es negativo, la imagen está invertida. Si  $|m| > 1$ , la imagen es mayor que el objeto, y si  $|m| < 1$ , la imagen es más pequeña que el objeto. Con esta definición de aumento, obtenemos la siguiente relación entre las distancias vertical y horizontal del objeto y la imagen:

$$m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o}. \quad 2.9$$

Es una relación muy útil porque permite obtener el aumento de la imagen a partir de las distancias del objeto y de la imagen, que se pueden obtener a partir de la ecuación del espejo.

## EJEMPLO 2.1

### Sistema de generación eléctrica solar

Una de las tecnologías solares utilizadas hoy en día para generar electricidad consiste en un dispositivo (llamado colector parabólico o de concentración) que concentra la luz solar en un tubo ennegrecido que contiene un fluido. Este fluido calentado se bombea a un intercambiador de calor, donde la energía térmica se transfiere a otro sistema que se utiliza para generar vapor y, finalmente, genera electricidad mediante un ciclo de vapor convencional. La [Figura 2.11](#) muestra un sistema de este tipo en funcionamiento en el sur de California. El espejo real es un cilindro parabólico con su foco situado en el tubo; sin embargo, podemos aproximar el espejo como exactamente un cuarto de cilindro circular.



**FIGURA 2.11** Los colectores cilindro-parabólicos se utilizan para generar electricidad en el sur de California (crédito: "kjkolb"/Wikimedia Commons)

- Si queremos que los rayos del Sol se enfoquen a 40,0 cm del espejo, ¿cuál es el radio del espejo?
- ¿Cuál es la cantidad de luz solar concentrada en la tubería, por metro de longitud de la misma, suponiendo que la insolación (radiación solar incidente) es de  $900 \text{ W/m}^2$ ?
- Si la tubería que transporta el fluido tiene un diámetro de 2,00 cm, ¿cuál es el aumento de temperatura del fluido por metro de tubería durante un período de 1 minuto? Supongamos que toda la radiación solar que incide en el reflector es absorbida por el tubo y que el fluido es aceite mineral.

**Estrategia**

Primero hay que identificar los principios físicos implicados. La parte (a) está relacionada con la óptica de los espejos esféricos. La parte (b) implica un poco de matemáticas, principalmente geometría. La parte (c) requiere una comprensión del calor y la densidad.

**Solución**

- a. El Sol es el objeto, por lo que la distancia del objeto es esencialmente infinita  $d_o = \infty$ . La distancia de imagen deseada es  $d_i = 40,0$  cm. Utilizamos la ecuación del espejo para encontrar la distancia focal del espejo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} &= \frac{1}{f} \\ f &= \left( \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} \right)^{-1} \\ &= \left( \frac{1}{\infty} + \frac{1}{40,0 \text{ cm}} \right)^{-1} \\ &= 40,0 \text{ cm}\end{aligned}$$

Por lo tanto, el radio del espejo es  $R = 2f = 80,0$  cm.

- b. La radiación es de  $900 \text{ W/m}^2$ . Hay que encontrar el área de la sección transversal  $A$  del espejo cóncavo, dado que la potencia irradiada es de  $900 \text{ W/m}^2 \times A$ . El espejo en este caso se estima como un cuarto de sección de un cilindro, por lo que el área para una longitud  $L$  del espejo es  $A = \frac{1}{4}(2\pi R) L$ . El área para una longitud de  $1,00$  m es entonces

$$A = \frac{\pi}{2} R (1,00 \text{ m}) = \frac{(3,14)}{2} (0,800 \text{ m}) (1,00 \text{ m}) = 1,26 \text{ m}^2.$$

La radiación en el tubo de  $1,00$  m de longitud es entonces

$$\left( 9,00 \times 10^2 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right) (1,26 \text{ m}^2) = 1130 \text{ W}.$$

- c. El aumento de la temperatura viene dado por  $Q = mc\Delta T$ . La masa  $m$  del aceite mineral en la sección de un metro de tubería es

$$\begin{aligned}m &= \rho V = \rho \pi \left( \frac{d}{2} \right)^2 (1,00 \text{ m}) \\ &= (8,00 \times 10^2 \text{ kg/m}^3) (3,14) (0,0100 \text{ m})^2 (1,00 \text{ m}) \\ &= 0,251 \text{ kg}\end{aligned}$$

Por lo tanto, el aumento de la temperatura en un minuto es

$$\begin{aligned}\Delta T &= Q/mc \\ &= \frac{(1130 \text{ W})(60,0 \text{ s})}{(0,251 \text{ kg})(1.670 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{C}^{-1})} \\ &= 162^\circ\text{C}\end{aligned}$$

**Importancia**

Un conjunto de estos tubos en el desierto de California puede proporcionar una potencia térmica de  $250 \text{ MW}$  en un día soleado, con fluidos que alcanzan temperaturas de hasta  $400^\circ\text{C}$ . Estamos considerando solo un metro de tubería y no tenemos en cuenta las pérdidas de calor a lo largo de la tubería.


**EJEMPLO 2.2**
**Imagen en un espejo convexo**

Un queratómetro es un dispositivo que se utiliza para medir la curvatura de la córnea del ojo, especialmente para adaptar las lentes de contacto. La luz se refleja en la córnea, que actúa como un espejo convexo, y el queratómetro mide el aumento de la imagen. Cuanto menor sea el aumento, menor será el radio de curvatura

de la córnea. Si la fuente de luz está a 12 cm de la córnea y el aumento de la imagen es de 0,032, ¿cuál es el radio de curvatura de la córnea?

### Estrategia

Si encuentra la distancia focal del espejo convexo formado por la córnea, entonces conoce su radio de curvatura (es el doble de la distancia focal). La distancia del objeto es  $d_o = 12$  cm y el aumento es  $m = 0,032$ . Primero hay que encontrar la distancia de imagen  $d_i$  y luego resolver la distancia focal  $f$ .

### Solución

Empiece con la ecuación del aumento,  $m = -d_i/d_o$ . Al resolver para  $d_i$  e insertar los valores dados se obtiene

$$d_i = -md_o = -(0,032)(12 \text{ cm}) = -0,384 \text{ cm}$$

donde hemos retenido una cifra significativa adicional porque se trata de un paso intermedio en el cálculo. Resuelva la ecuación del espejo para la distancia focal  $f$  e inserte los valores conocidos para las distancias del objeto y la imagen. El resultado es

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} &= \frac{1}{f} \\ f &= \left( \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} \right)^{-1} \\ &= \left( \frac{1}{12 \text{ cm}} + \frac{1}{-0,384 \text{ cm}} \right)^{-1} \\ &= -0,40 \text{ cm} \end{aligned}$$

El radio de curvatura es el doble de la distancia focal, por lo que

$$R = 2f = -0,80 \text{ cm}$$

### Importancia

La distancia focal es negativa, por lo que el enfoque es virtual, como se espera para un espejo cóncavo y un objeto real. El radio de curvatura encontrado aquí es razonable para una córnea. La distancia de la córnea a la retina en un ojo adulto es de unos 2,0 cm. En la práctica, las córneas pueden no ser esféricas, lo que complica el trabajo de adaptación de las lentes de contacto. Tenga en cuenta que la distancia de la imagen aquí es negativa, lo que concuerda con el hecho de que la imagen está detrás del espejo. Por lo tanto, la imagen es virtual porque ningún rayo la atraviesa realmente. En los problemas y ejercicios, demostrará que, para una distancia del objeto fija, un menor radio de curvatura corresponde a un menor aumento.



## ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

### Espejos esféricos

Paso 1. En primer lugar, asegúrese de que se trata de la formación de la imagen mediante un espejo esférico.

Paso 2. Determine si se requiere el trazado de rayos, la ecuación del espejo o ambos. Un boceto es muy útil, incluso si el problema no requiere específicamente el trazado de rayos. Escriba los símbolos y los valores conocidos en el boceto.

Paso 3. Identifique exactamente lo que hay que determinar en el problema (identifique las incógnitas).

Paso 4. Haga una lista de lo que se conoce o puede deducirse del problema tal y como está planteado (identifique los conocidos).

Paso 5. Si el trazado de rayos es necesario, utilice las reglas de trazado de rayos que se indican al principio de esta sección.

Paso 6. La mayoría de los problemas cuantitativos requieren el uso de la ecuación del espejo. Utilice los ejemplos como guía para utilizar la ecuación del espejo.

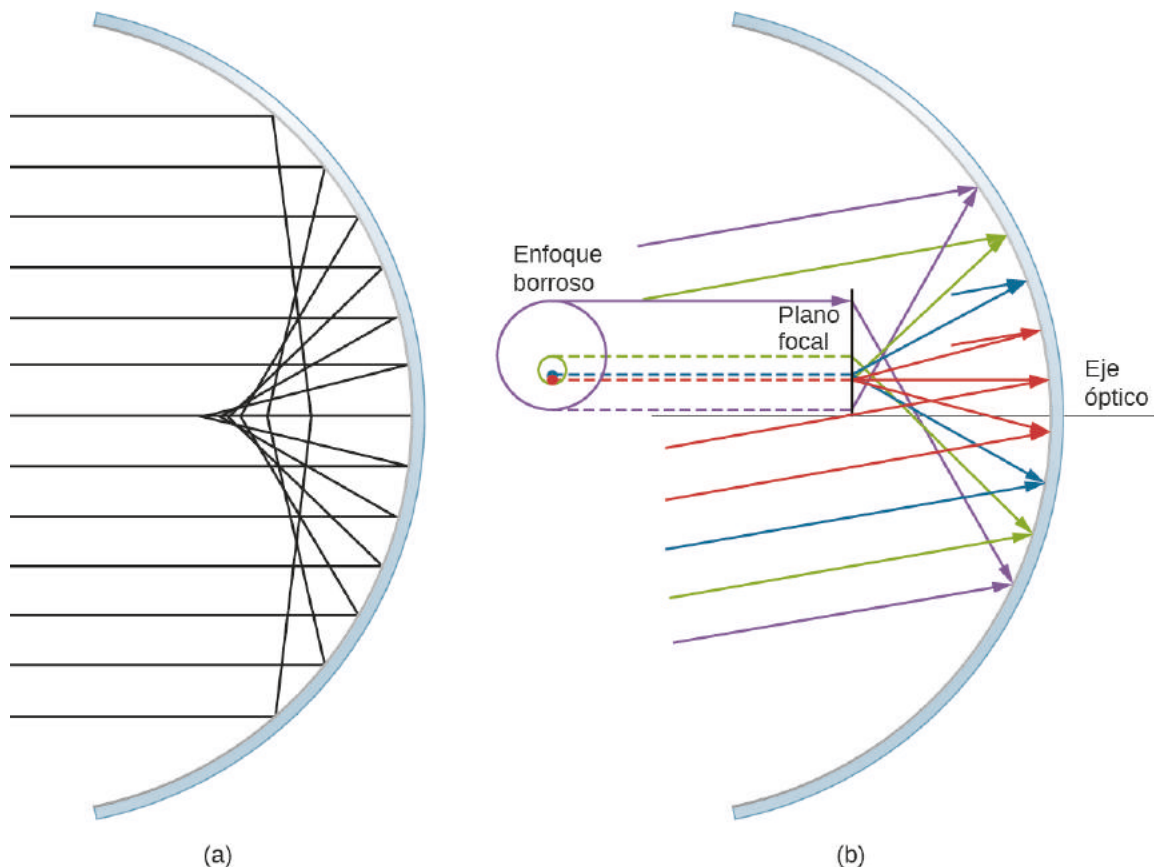
Paso 7. Compruebe si la respuesta tiene sentido. ¿Los signos de la distancia del objeto, la distancia de imagen y la distancia focal se corresponden con lo que se espera del trazado de rayos? ¿Es correcto el signo del aumento? ¿Son razonables las distancias del objeto y de la imagen?

### Desviación de la aproximación para ángulos pequeños

La aproximación para ángulos pequeños es la piedra angular de la discusión anterior sobre la formación de imágenes en un espejo esférico. Cuando se viola esta aproximación, la imagen que se crea en un espejo esférico se distorsiona. Esta distorsión se llama **aberración**. A continuación, se analizan brevemente dos tipos específicos de aberraciones: la aberración esférica y la coma.

#### Aberración esférica

Considere un haz ancho de rayos paralelos que inciden en un espejo esférico, como se muestra en la [Figura 2.12](#).



**FIGURA 2.12** (a) Con la aberración esférica, los rayos que están más lejos del eje óptico y los rayos que están más cerca del eje óptico se enfocan en puntos diferentes. Observe que la aberración empeora para los rayos más alejados del eje óptico. (b) En el caso de la aberración comática, los rayos paralelos que no son paralelos al eje óptico se enfocan a diferentes alturas y a diferentes distancias focales, por lo que la imagen contiene una "cola" como la de un cometa (que es "coma" en latín). Tenga en cuenta que los rayos coloreados son solo para facilitar la visualización; los colores no indican el color de la luz.

Cuanto más lejos del eje óptico inciden los rayos, peor se aproxima el espejo esférico a un espejo parabólico. Por lo tanto, estos rayos no se enfocan en el mismo punto que los rayos que están cerca del eje óptico, como se muestra en la figura. Debido a la **aberración esférica**, la imagen de un objeto extendido en un espejo esférico será borrosa. Las aberraciones esféricas son características de los espejos y lentes que consideramos en la siguiente sección de este capítulo (se necesitan espejos y lentes más sofisticados para eliminar las aberraciones esféricas).

### Coma o aberración comática

La **coma** es similar a la aberración esférica, pero surge cuando los rayos entrantes no son paralelos al eje óptico, como se muestra en la parte (b) de la [Figura 2.12](#). Recordemos que la aproximación para ángulos pequeños es válida para los espejos esféricos que son pequeños en comparación con su radio. En este caso, los espejos esféricos son buenas aproximaciones a los espejos parabólicos. Los espejos parabólicos enfocan todos los rayos paralelos al eje óptico en el punto focal. Sin embargo, los rayos paralelos que *no* son paralelos al eje óptico se enfocan a diferentes alturas y a diferentes distancias focales, como se muestra en la parte (b) de la [Figura 2.12](#). Dado que un espejo esférico es simétrico con respecto al eje óptico, los distintos rayos de color de esta figura crean círculos del color correspondiente en el plano focal.

Aunque en la parte (b) de la [Figura 2.12](#) se muestra un espejo esférico, la aberración comática también se produce en los espejos parabólicos, y no es el resultado de un fallo en la aproximación para ángulos pequeños. Sin embargo, la aberración esférica solo se produce para los espejos esféricos y es el resultado de una ruptura de la aproximación para ángulos pequeños. Más adelante, en este mismo capítulo, hablaremos del coma y de la aberración esférica en relación con los telescopios.

## 2.3 Imágenes formadas por refracción

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

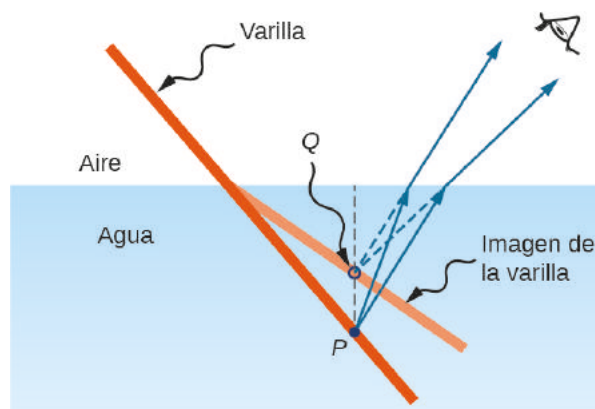
Al final de esta sección, podrá:

- Describir la formación de imágenes por una sola superficie refractante
- Determinar la ubicación de una imagen y calcular sus propiedades mediante un diagrama de rayos
- Determinar la ubicación de una imagen y calcular sus propiedades utilizando la ecuación para una única superficie refractante

Cuando los rayos de luz se propagan de un medio a otro, estos sufren refracción, que es cuando las ondas de luz se doblan en la interfase entre dos medios. La superficie refractante puede formar una imagen de forma similar a la de una superficie reflectante, salvo que la ley de refracción (ley de Snell) está en el centro del proceso en lugar de la ley de reflexión.

### Refracción en una interfase plana: profundidad aparente

Si se observa una varilla recta parcialmente sumergida en el agua, parece que se dobla en la superficie ([Figura 2.13](#)). La razón de este curioso efecto es que la imagen de la varilla dentro del agua se forma un poco más cerca de la superficie que la posición real de la varilla, por lo que no se alinea con la parte de la varilla que está por encima del agua. El mismo fenómeno explica por qué un pez en el agua parece estar más cerca de la superficie de lo que realmente está.

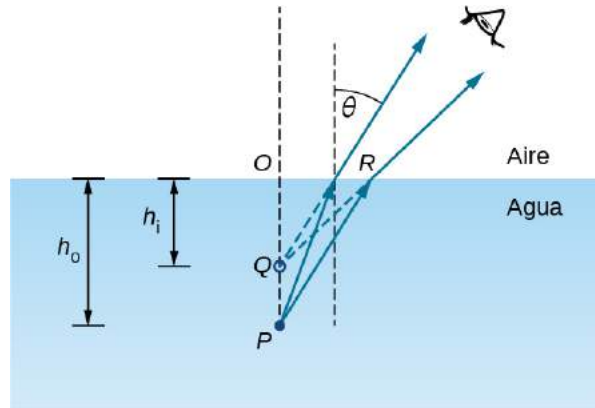


**FIGURA 2.13** Flexión de una varilla en una interfase agua-aire. El punto *P* de la varilla parece estar en el punto *Q*, que es donde se forma la imagen del punto *P* debido a la refracción en la interfase aire-agua.

Para estudiar la formación de imágenes como resultado de la refracción, considere las siguientes preguntas:

1. ¿Qué ocurre con los rayos de luz cuando entran o atraviesan un medio diferente?
2. ¿Los rayos refractados que parten de un mismo punto se juntan en algún punto o divergen entre sí?

Para concretar, consideramos un sistema sencillo formado por dos medios separados por una interfase plana (Figura 2.14). El objeto está en un medio y el observador en el otro. Por ejemplo, cuando mira un pez desde la superficie del agua, el pez está en el medio 1 (el agua) con un índice de refracción de 1,33, y su ojo está en el medio 2 (el aire) con un índice de refracción de 1,00, y la superficie del agua es la interfase. La profundidad que se “ve” es la altura de la imagen  $h_i$  y se denomina **profundidad aparente**. La profundidad real del pez es la altura del objeto  $h_o$ .



**FIGURA 2.14** Profundidad aparente debida a la refracción. El objeto real en el punto  $P$  crea una imagen en el punto  $Q$ . La imagen no está a la misma profundidad que el objeto, por lo que el observador ve la imagen a una "profundidad aparente"

La profundidad aparente  $h_i$  depende del ángulo en el que se vea la imagen. Para una vista desde arriba (la llamada vista “normal”), podemos aproximar el ángulo de refracción  $\theta$  para que sea pequeño, y sustituir  $\sin \theta$  en la ley de Snell por  $\tan \theta$ . Con esta aproximación, puede utilizar los triángulos  $\triangle OPR$  y  $\triangle OQR$  para demostrar que la profundidad aparente viene dada por

$$h_i = \left( \frac{n_2}{n_1} \right) h_o. \quad 2.10$$

La derivación de este resultado se deja como ejercicio. Así, un pez aparece a 3/4 de la profundidad real cuando se ve desde arriba.

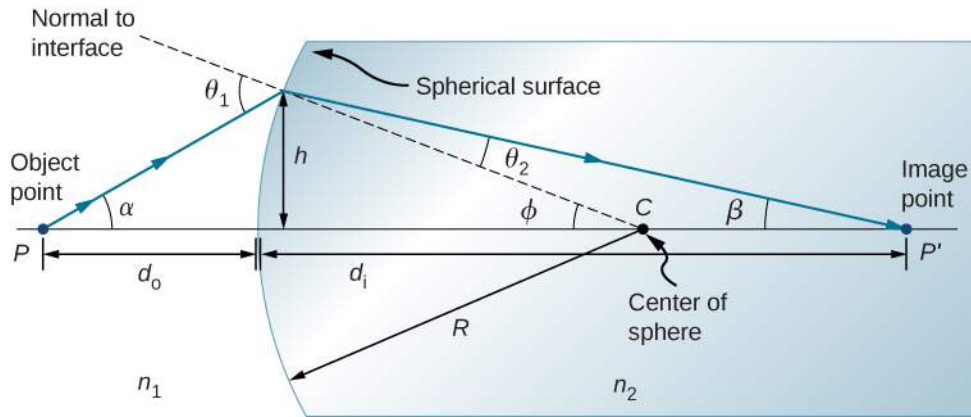
### Refracción en una interfase esférica

Las formas esféricas desempeñan un papel importante en la óptica, principalmente porque las formas esféricas de alta calidad son mucho más fáciles de fabricar que otras superficies curvas. Para estudiar la refracción en una única superficie esférica, suponemos que el medio con la superficie esférica en un extremo continúa indefinidamente (un medio “semiinfinito”).

#### Refracción en una superficie convexa

Considere una fuente de luz puntual en el punto  $P$  frente a una superficie convexa de vidrio (consulte la Figura 2.15). Supongamos que  $R$  es el radio de curvatura,  $n_1$  es el índice de refracción del medio en el que se encuentra el punto  $P$ , y  $n_2$  es el índice de refracción del medio con la superficie esférica. Queremos saber qué ocurre como resultado de la refracción en esta interfase.





**FIGURA 2.15** Refracción en una superficie convexa ( $n_2 > n_1$ ).

Debido a la simetría, basta con examinar los rayos en un solo plano. La figura muestra un rayo de luz que parte del punto  $P$  del objeto, se refracta en la interfase y pasa por el punto de la imagen  $P'$ . Derivamos una fórmula que relaciona la distancia del objeto  $d_o$ , la distancia de imagen  $d_i$ , y el radio de curvatura  $R$ .

Aplicando la ley de Snell al rayo que emana del punto  $P$  se obtiene  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ . Trabajamos en la aproximación para ángulos pequeños, por lo que  $\sin \theta \approx \theta$  y la ley de Snell toma entonces la forma

$$n_1 \theta_1 \approx n_2 \theta_2.$$

Por la geometría de la figura, vemos que

$$\theta_1 = \alpha + \phi, \quad \theta_2 = \phi - \beta.$$

Al insertar estas expresiones en la ley de Snell se obtiene

$$n_1 (\alpha + \phi) \approx n_2 (\phi - \beta).$$

Utilizando el diagrama, calculamos la tangente de los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $\phi$ :

$$\tan \alpha \approx \frac{h}{d_o}, \quad \tan \beta \approx \frac{h}{d_i}, \quad \tan \phi \approx \frac{h}{R}.$$

Utilizando de nuevo la aproximación para ángulos pequeños, encontramos que  $\tan \theta \approx \theta$ , por lo que las relaciones anteriores se convierten en

$$\alpha \approx \frac{h}{d_o}, \quad \beta \approx \frac{h}{d_i}, \quad \phi \approx \frac{h}{R}.$$

Poniendo estos ángulos en la ley de Snell se obtiene

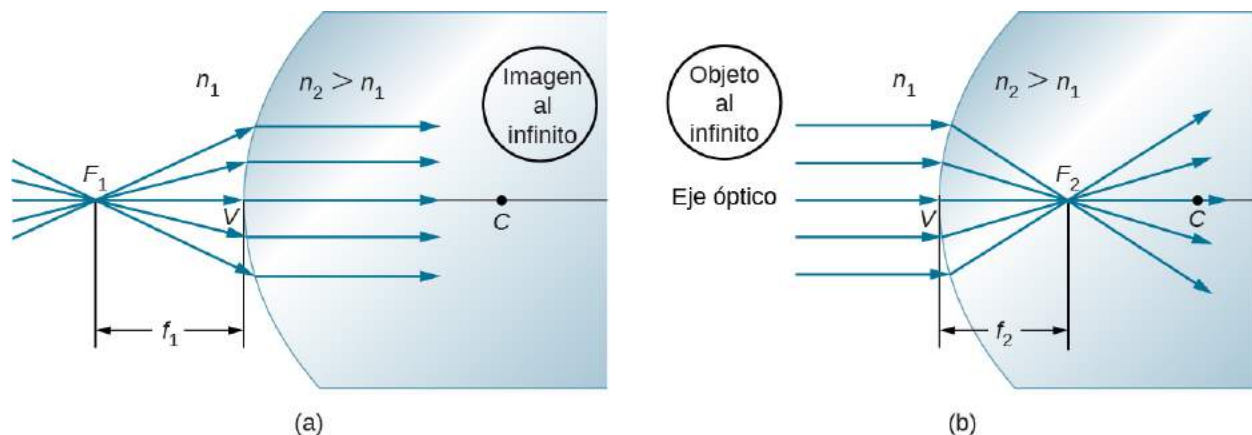
$$n_1 \left( \frac{h}{d_o} + \frac{h}{R} \right) = n_2 \left( \frac{h}{R} - \frac{h}{d_i} \right).$$

Podemos escribirlo más cómodamente como

$$\frac{n_1}{d_o} + \frac{n_2}{d_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

**2.11**

Si el objeto se coloca en un punto especial llamado **primer foco**, o el **objetivo focal**  $F_1$ , entonces la imagen se forma en el infinito, como se muestra en la parte (a) de la [Figura 2.16](#).



**FIGURA 2.16** (a) Primer foco (llamado “objetivo focal”) para la refracción en una superficie convexa. (b) Segundo foco (llamado “foco de imagen”) para la refracción en una superficie convexa.

Podemos encontrar la ubicación  $f_1$  del primer foco  $F_1$  si le asignamos a  $d_i = \infty$  en la ecuación anterior.

$$\frac{n_1}{f_1} + \frac{n_2}{\infty} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad 2.12$$

$$f_1 = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1} \quad 2.13$$

Del mismo modo, podemos definir un **segundo foco** o **foco de imagen**  $F_2$  donde se forma la imagen para un objeto que está lejos [parte (b)]. La ubicación del segundo foco  $F_2$  se obtiene a partir de la [Ecuación 2.11](#) si le asignamos a  $d_o = \infty$ :

$$\frac{n_1}{\infty} + \frac{n_2}{f_2} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$f_2 = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}.$$

Tenga en cuenta que el objetivo focal está a una distancia diferente del vértice que el foco de la imagen porque  $n_1 \neq n_2$ .

### Convención de signos para superficies refractantes simples

Aunque derivamos esta ecuación para la refracción en una superficie convexa, la misma expresión es válida para una superficie cóncava, siempre que utilicemos la siguiente convención de signos:

1.  $R > 0$  si la superficie es convexa hacia el objeto; en caso contrario,  $R < 0$ .
2.  $d_i > 0$  si la imagen es real y está en el lado opuesto del objeto; en caso contrario,  $d_i < 0$ .

## 2.4 Lentes delgadas

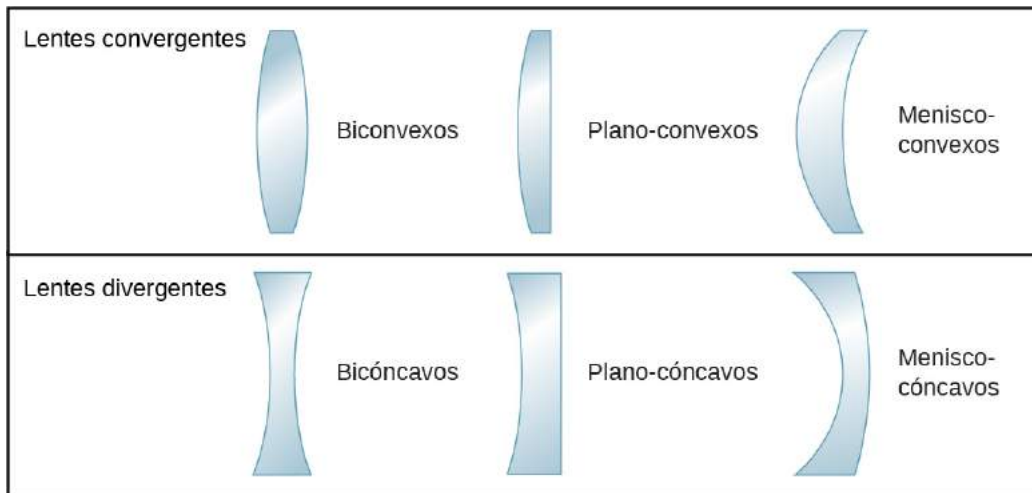
### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Utilizar los diagramas de rayos para localizar y describir la imagen formada por una lente
- Emplear la ecuación de lentes delgadas para describir y localizar la imagen formada por una lente

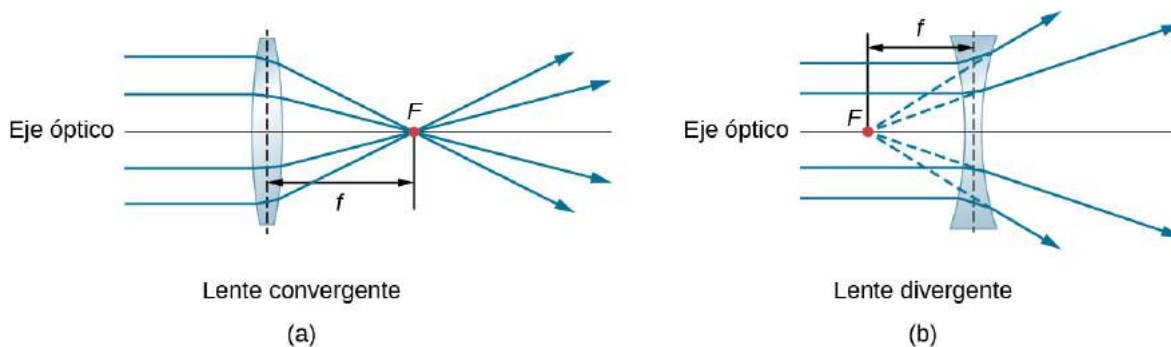
Las lentes se encuentran en una enorme variedad de instrumentos ópticos, desde una simple lupa hasta el zoom de una cámara o el propio ojo. En esta sección, utilizamos la ley de Snell para explorar las propiedades de las lentes y cómo forman las imágenes.

La palabra “lente” deriva del latín que designa un grano de lenteja, cuya forma es similar a la de una lente convexa. Sin embargo, no todas las lentes tienen la misma forma. La [Figura 2.17](#) muestra diferentes formas de lentes. El vocabulario utilizado para describir las lentes es el mismo que se utiliza para los espejos esféricos: El eje de simetría de una lente se denomina eje óptico, el punto donde este eje se cruza con la superficie de la lente se denomina vértice de la lente, y así sucesivamente.



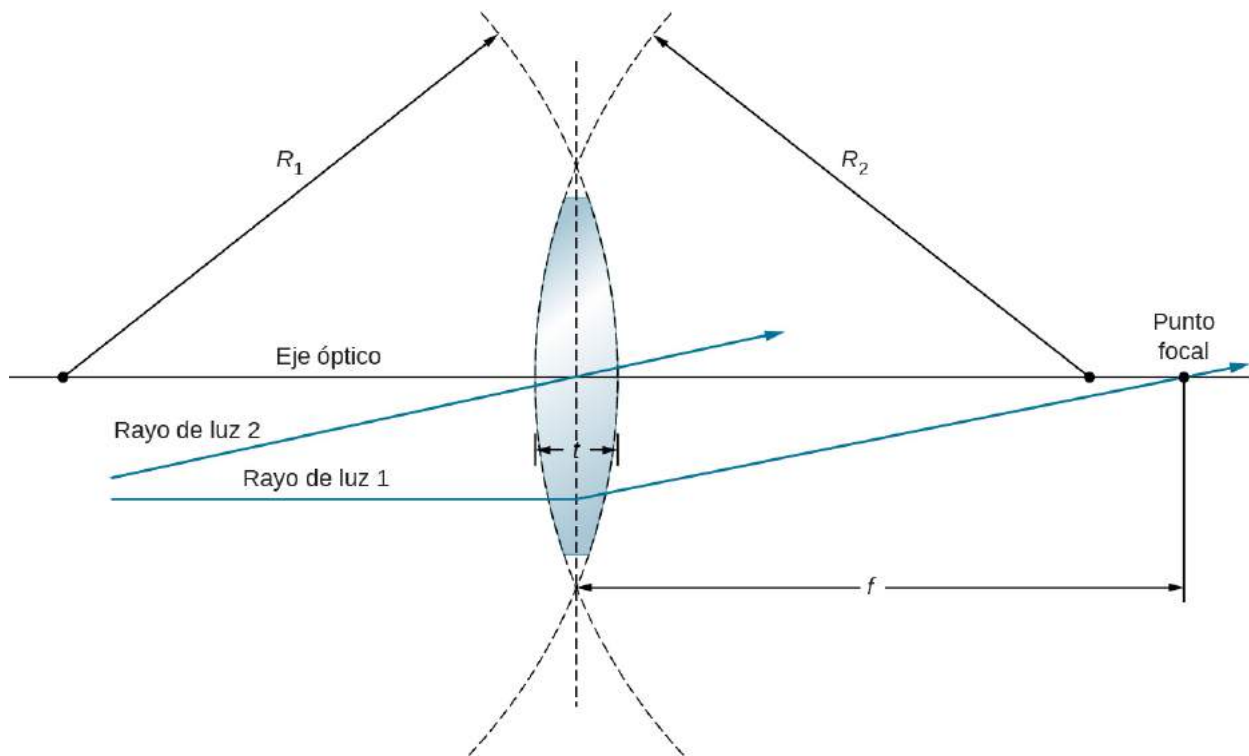
**FIGURA 2.17** Varios tipos de lentes: Tenga en cuenta que una lente convergente tiene una "cintura" más gruesa, mientras que una lente divergente tiene una cintura más delgada.

Una lente **convexa** o **convergente** tiene una forma tal que todos los rayos de luz que entran en ella paralelos a su eje óptico se cruzan (o enfocan) en un único punto del eje óptico en el lado opuesto de la lente, como se muestra en la parte (a) de [Figura 2.18](#). Asimismo, una lente **cóncava** o **divergente** tiene una forma tal que todos los rayos que entran en ella paralelos a su eje óptico divergen, como se muestra en la parte (b). Para entender con más precisión cómo una lente manipula la luz, observe atentamente el rayo superior que atraviesa la lente convergente en la parte (a). Como el índice de refracción de la lente es mayor que el del aire, la ley de Snell nos dice que el rayo se dobla hacia la perpendicular de la interfase al entrar en la lente. Del mismo modo, cuando el rayo sale de la lente, se desvía de la perpendicular. El mismo razonamiento se aplica a las lentes divergentes, como se muestra en la parte (b). El efecto general es que los rayos de luz se desvían hacia el eje óptico en el caso de las lentes convergentes y se alejan del eje óptico en el caso de las lentes divergentes. Para una lente convergente, el punto en el que se cruzan los rayos es el punto focal  $F$  de la lente. Para una lente divergente, el punto desde el que parecen originarse los rayos es el punto focal (virtual). La distancia desde el centro del objetivo hasta su punto focal es la distancia focal  $f$  de la lente.



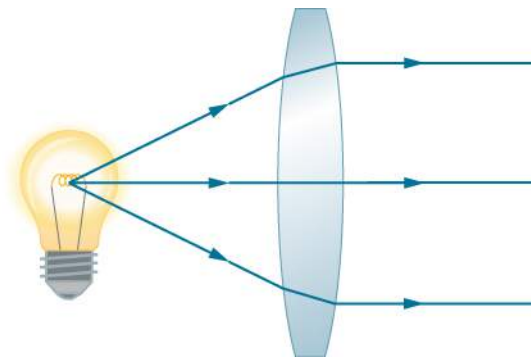
**FIGURA 2.18** Los rayos de luz que entran en (a) una lente convergente y (b) una lente divergente, paralelos a su eje, convergen en su punto focal  $F$ . La distancia desde el centro de la lente al punto focal es la distancia focal  $f$  de la lente. Tome en cuenta que los rayos de luz se desvían al entrar y salir de la lente, con el efecto global de desviar los rayos hacia el eje óptico.

Se considera que una lente es delgada si su espesor  $t$  es mucho menor que los radios de curvatura de ambas superficies, como se muestra en la [Figura 2.19](#). En este caso, se puede considerar que los rayos se doblan una vez que inciden en el centro de la lente. Para el caso dibujado en la figura, el rayo de luz 1 es paralelo al eje óptico, por lo que el rayo saliente se dobla una vez que incide en el centro de la lente y pasa por el punto focal. Otra característica importante de las lentes delgadas es que los rayos de luz que pasan por el centro de la lente no se desvían, como muestra el rayo de luz 2.



**FIGURA 2.19** En la aproximación de lentes delgadas, el espesor  $t$  de la lente es mucho, mucho menor que los radios  $R_1$  y  $R_2$  de la curvatura de las superficies de la lente. Se estima que los rayos de luz se doblan en el centro de la lente, como el rayo de luz 1. El rayo de luz 2 pasa por el centro de la lente y no se desvía en la aproximación de lentes delgadas.

Como se señaló en la discusión inicial de la ley de Snell, las trayectorias de los rayos de luz son exactamente reversibles. Esto significa que la dirección de las flechas podría invertirse para todos los rayos en la [Figura 2.18](#). Por ejemplo, si se coloca una fuente de luz puntual en el punto focal de una lente convexa, como se muestra en la [Figura 2.20](#), del otro lado salen rayos de luz paralelos.



**FIGURA 2.20** Una pequeña fuente de luz, como el filamento de una bombilla, colocada en el punto focal de una lente convexa produce rayos de luz paralelos que salen por el otro lado. Las trayectorias son exactamente las inversas a las mostradas en la [Figura 2.18](#) en lentes convergentes y divergentes. Esta técnica se utiliza en los faros y a veces en los semáforos para producir un haz de luz direccional desde una fuente que emite luz en todas las direcciones.

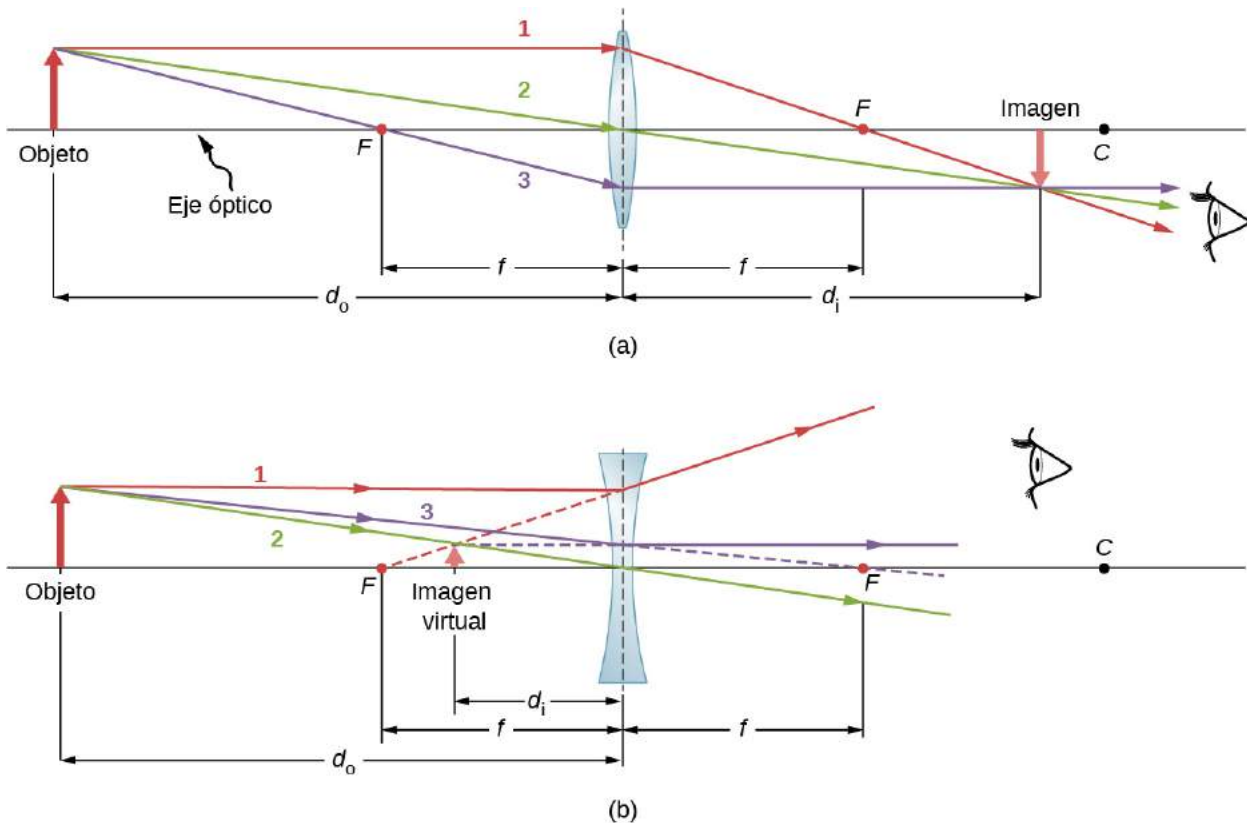
### Trazado de rayos y lentes delgadas

El **trazado de rayos** es la técnica para determinar o seguir (trazar) las trayectorias que siguen los rayos de luz.

El trazado de rayos para las lentes delgadas es muy similar a la técnica que utilizamos con los espejos esféricos. En cuanto a los espejos, el trazado de rayos puede describir con precisión el funcionamiento de una

lente. Las reglas de trazado de rayos para las lentes delgadas son similares a las de los espejos esféricos:

1. Un rayo que entra en una lente convergente paralela al eje óptico pasa por el punto focal del otro lado de la lente (rayo 1 en la parte (a) de la [Figura 2.21](#)). Un rayo que entra en una lente divergente paralela al eje óptico sale por la línea que pasa por el punto focal del *mismo* lado de la lente (rayo 1 en la parte (b) de la figura).
2. Un rayo que pasa por el centro de una lente convergente o divergente no se desvía (rayo 2 en las partes (a) y (b)).
3. Para una lente convergente, un rayo que pasa por el punto focal sale de la lente paralela al eje óptico (rayo 3 en la parte (a)). Para una lente divergente, un rayo que se aproxima a lo largo de la línea que pasa por el punto focal en el lado opuesto sale de la lente paralelamente al eje (rayo 3 en la parte (b)).



**FIGURA 2.21** Las lentes delgadas tienen las mismas distancias focales a ambos lados. (a) Los rayos de luz paralelos procedentes del objeto que se dirigen a una lente convergente se cruzan en su punto focal a la derecha. (b) Los rayos de luz paralelos procedentes del objeto que entran en una lente divergente a la izquierda parecen proceder del punto focal a la izquierda.

Las lentes delgadas funcionan bastante bien para la luz monocromática (es decir, la luz de una sola longitud de onda). Sin embargo, para la luz que contiene varias longitudes de onda (por ejemplo, la luz blanca), las lentes funcionan peor. El problema es que, como aprendimos en el capítulo anterior, el índice de refracción de un material depende de la longitud de onda de la luz. Este fenómeno es responsable de muchos efectos de color, como el arcoíris. Por desgracia, este fenómeno también provoca aberraciones en las imágenes formadas por las lentes. En particular, como la distancia focal de la lente depende del índice de refracción, también depende de la longitud de onda de la luz incidente. Esto significa que la luz de diferentes longitudes de onda se enfocará en diferentes puntos, lo que da lugar a las llamadas "aberraciones cromáticas". En particular, los bordes de una imagen de un objeto blanco se colorearán y difuminarán. Unas lentes especiales denominadas dobletes son capaces de corregir las aberraciones cromáticas. Un doblete se forma pegando una lente convergente y otra divergente. El doblete combinado de lentes produce una reducción significativa de las aberraciones cromáticas.

## Formación de imágenes mediante lentes delgadas

Utilizamos el trazado de rayos para investigar los diferentes tipos de imágenes que una lente puede crear. En algunas circunstancias, una lente forma una imagen real, como cuando un proyector de cine proyecta una imagen en una pantalla. En otros casos, la imagen es una imagen virtual, que no puede proyectarse en una pantalla. ¿Dónde está, por ejemplo, la imagen formada por los anteojos? Utilizamos el trazado de rayos para las lentes delgadas para ilustrar cómo forman imágenes, y luego desarrollamos ecuaciones para analizar cuantitativamente las propiedades de las lentes delgadas.

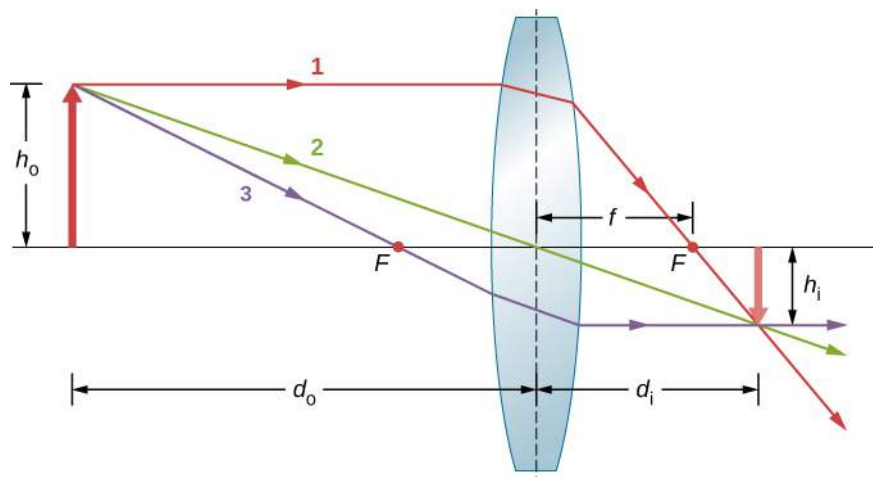
Considere un objeto a cierta distancia de una lente convergente, como se muestra en la [Figura 2.22](#). Para encontrar la ubicación y el tamaño de la imagen, trazamos las trayectorias de los rayos de luz seleccionados que se originan en un punto del objeto, en este caso, la punta de la flecha. La figura muestra tres rayos a partir de muchos rayos que emanan de la punta de la flecha. Estos tres rayos pueden trazarse utilizando las reglas de trazado de rayos dadas anteriormente.

- El rayo 1 entra en la lente paralela al eje óptico y pasa por el punto focal del lado opuesto (regla 1).
- El rayo 2 pasa por el centro de la lente y no se desvía (regla 2).
- El rayo 3 pasa por el punto focal en su camino hacia la lente y sale de la lente paralela al eje óptico (regla 3).

Los tres rayos se cruzan en un único punto en el lado opuesto de la lente. Así, la imagen de la punta de la flecha se sitúa en este punto. Todos los rayos que salen de la punta de la flecha y entran en la lente se refractan y se cruzan en el punto indicado.

Después de localizar la imagen de la punta de la flecha, necesitamos otro punto de la imagen para orientar toda la imagen de la flecha. Elegimos situar la base de la imagen de la flecha, que está en el eje óptico. Como se ha explicado en el apartado de los espejos esféricos, la base estará en el eje óptico justo por encima de la imagen de la punta de la flecha (debido a la simetría arriba-abajo de la lente). Así, la imagen abarca el eje óptico hasta la altura (negativa) indicada. Los rayos procedentes de otro punto de la flecha, como el centro de la misma, se cruzan en otro punto común, rellenando así el resto de la imagen.

Aunque en esta figura se trazan tres rayos, solo son necesarios dos para localizar un punto de la imagen. Lo mejor es trazar rayos para los que existen reglas sencillas de trazado de rayos.



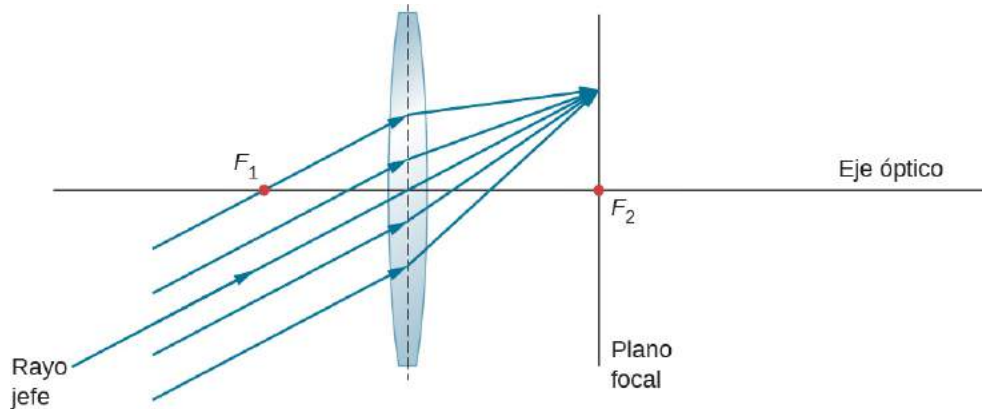
**FIGURA 2.22** El trazado de rayos se utiliza para localizar la imagen formada por una lente. Los rayos que se originan en el mismo punto del objeto se trazan, los tres rayos elegidos siguen cada uno una de las reglas de trazado de rayos, de modo que sus trayectorias son fáciles de determinar. La imagen se sitúa en el punto en el que se cruzan los rayos. En este caso, se forma una imagen real que puede proyectarse en una pantalla.

En la figura aparecen varias distancias importantes. Para un espejo, definimos que  $d_o$  es la distancia del objeto o la distancia de un objeto desde el centro de una lente. La distancia de imagen  $d_i$  se define como la distancia de la imagen desde el centro de una lente. La altura del objeto y la altura de la imagen se indican con  $h_o$  y  $h_i$ , respectivamente. Las imágenes que aparecen en posición vertical con respecto al objeto tienen alturas

positivas, y las que están invertidas tienen alturas negativas. Al utilizar las reglas del trazado de rayos y realizar un dibujo a escala con papel y lápiz, como el que aparece en la [Figura 2.22](#), podemos describir con exactitud la ubicación y el tamaño de una imagen. Pero la verdadera ventaja del trazado de rayos consiste en visualizar cómo se forman las imágenes en diversas situaciones.

### Rayos paralelos oblicuos y plano focal

Hemos visto que los rayos paralelos al eje óptico se dirigen al punto focal de una lente convergente. En el caso de una lente divergente, salen en una dirección tal que parecen proceder del punto focal del lado opuesto de la lente (es decir, el lado por el que entran los rayos paralelos en la lente). ¿Qué ocurre con los rayos paralelos que no son paralelos al eje óptico ([Figura 2.23](#))? En el caso de una lente convergente, estos rayos no convergen en el punto focal. En cambio, se unen en otro punto del plano llamado **plano focal**. El plano focal contiene el punto focal y es perpendicular al eje óptico. Como se muestra en la figura, los rayos paralelos se enfocan donde el rayo que pasa por el centro de la lente cruza el plano focal.



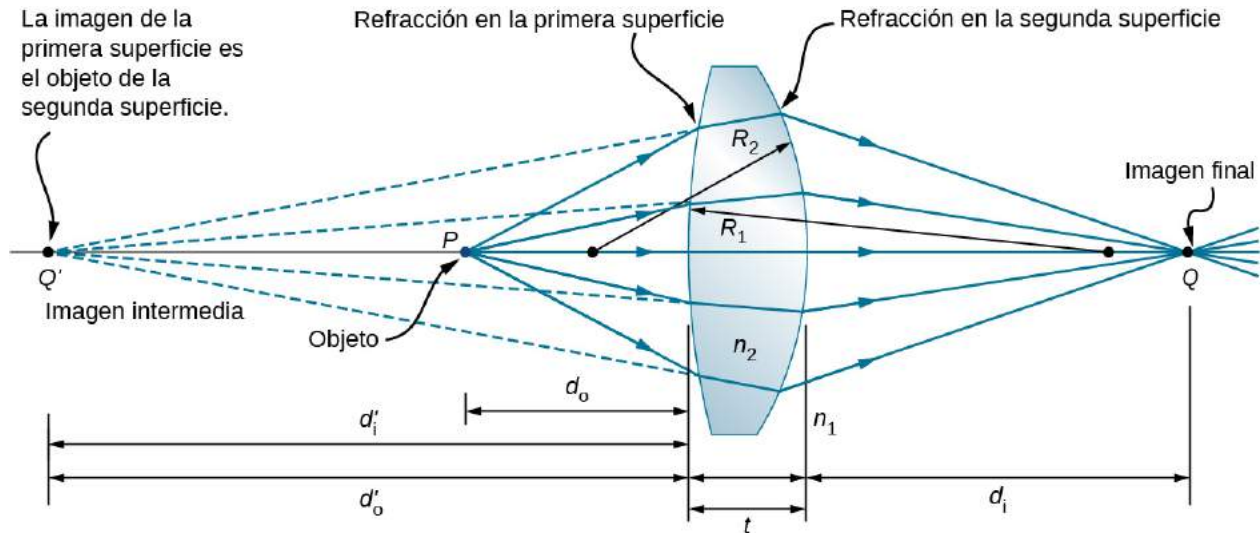
**FIGURA 2.23** Los rayos oblicuos paralelos se concentran en un punto del plano focal.

### Ecuación de lentes delgadas

El trazado de rayos nos permite obtener una imagen cualitativa de la formación de la imagen. Para obtener información numérica, derivamos un par de ecuaciones a partir de un análisis geométrico de trazado de rayos para lentes delgadas. Estas ecuaciones, denominadas ecuación de lentes delgadas y ecuación del fabricante de lentes, nos permiten analizar cuantitativamente las lentes delgadas.

Considere la lente gruesa biconvexa que se muestra en la [Figura 2.24](#). El índice de refracción del medio circundante es  $n_1$  (si la lente está en el aire, entonces  $n_1 = 1,00$ ) y el de la lente es  $n_2$ . Los radios de curvatura de los dos lados son  $R_1$  y  $R_2$ . Queremos encontrar una relación entre la distancia del objeto  $d_o$ , la distancia de imagen  $d_i$ , y los parámetros de la lente.





**FIGURA 2.24** Esta figura se utiliza para derivar la ecuación del fabricante de lentes. Aquí,  $t$  es el grosor de la lente,  $n_1$  es el índice de refracción del medio exterior, y  $n_2$  es el índice de refracción de la lente. Tomamos el límite de  $t \rightarrow 0$  para obtener la fórmula de una lente delgada.

Para derivar la ecuación de lentes delgadas, consideramos la imagen formada por la primera superficie refractante (es decir, la superficie izquierda) y luego utilizamos esta imagen como objeto para la segunda superficie refractante. En la figura, la imagen de la primera superficie refractante es  $Q'$ , que se forma al extender hacia atrás los rayos del interior de la lente (estos rayos son consecuencia de la refracción en la primera superficie). Esto se muestra en las líneas discontinuas de la figura. Tome en cuenta que esta imagen es virtual porque ningún rayo pasa realmente por el punto  $Q'$ . Para encontrar la distancia de imagen  $d'_i$  correspondiente a la imagen  $Q'$ , utilizamos la [Ecuación 2.11](#). En este caso, la distancia del objeto es  $d_o$ , la distancia de imagen es  $d'_i$ , y el radio de curvatura es  $R_1$ . Al insertar esto en la [Ecuación 2.3](#) se obtiene

$$\frac{n_1}{d_o} + \frac{n_2}{d'_i} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}. \quad 2.14$$

La imagen es virtual y está en el mismo lado que el objeto, por lo que  $d'_i < 0$  y  $d_o > 0$ . La primera superficie es convexa hacia el objeto, por lo que  $R_1 > 0$ .

Para hallar la distancia del objeto para el objeto  $Q$  formado por la refracción de la segunda interfase, observe que la función de los índices de refracción  $n_1$  y  $n_2$  se intercambian en la [Ecuación 2.11](#). En la [Figura 2.24](#), los rayos se originan en el medio con índice  $n_2$ , mientras que en la [Figura 2.15](#), los rayos se originan en el medio con índice  $n_1$ . Por lo tanto, debemos intercambiar  $n_1$  y  $n_2$  en la [Ecuación 2.11](#). Además, consultando de nuevo la [Figura 2.24](#), vemos que la distancia del objeto es  $d'_o$  y la distancia de imagen es  $d_i$ . El radio de curvatura es  $R_2$ . Al insertar estas cantidades en la [Ecuación 2.11](#) se obtiene

$$\frac{n_2}{d'_o} + \frac{n_1}{d_i} = \frac{n_1 - n_2}{R_2}. \quad 2.15$$

La imagen es real y está en el lado opuesto del objeto, por lo que  $d_i > 0$  y  $d'_o > 0$ . La segunda superficie es convexa en dirección contraria al objeto, por lo que  $R_2 < 0$ . La [Ecuación 2.15](#) se puede simplificar tomando en cuenta que  $d'_o = |d'_i| + t$ , donde hemos tomado el valor absoluto porque  $d'_i$  es un número negativo, mientras que ambos  $d'_o$  y  $t$  son positivos. Podemos prescindir del valor absoluto si negamos  $d'_i$ , lo que da como resultado  $d'_o = -d'_i + t$ . Al insertar esto en la [Ecuación 2.15](#) se obtiene

$$\frac{n_2}{-d'_i + t} + \frac{n_1}{d_i} = \frac{n_1 - n_2}{R_2}. \quad 2.16$$

Al sumar la [Ecuación 2.14](#) y la [Ecuación 2.16](#) se obtiene

$$\frac{n_1}{d_o} + \frac{n_1}{d_i} + \frac{n_2}{d'_i} + \frac{n_2}{-d'_i + t} = (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad 2.17$$

En la **aproximación de lentes delgadas**, suponemos que la lente es muy delgada en comparación con la primera distancia de imagen, o  $t \ll d'_i$  (o, lo que es lo mismo,  $t \ll R_1$  y  $R_2$ ). En este caso, los términos tercero y cuarto del lado izquierdo de la [Ecuación 2.17](#) se cancelan, dejándonos con

$$\frac{n_1}{d_o} + \frac{n_1}{d_i} = (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Al dividir entre  $n_1$  obtenemos finalmente

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad 2.18$$

El lado izquierdo se parece sospechosamente a la ecuación del espejo que derivamos anteriormente para los espejos esféricos. Al igual que en el caso de los espejos esféricos, podemos utilizar el trazado de rayos y la geometría para demostrar que, para una lente delgada,

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f} \quad 2.19$$

donde  $f$  es la distancia focal de la lente delgada (esta derivación se deja como ejercicio). Esta es la ecuación de lentes delgadas. La distancia focal de una lente delgada es la misma a la izquierda y a la derecha de la lente. Al combinar la [Ecuación 2.18](#) y la [Ecuación 2.19](#) se obtiene

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad 2.20$$

que se llama la ecuación del fabricante de lentes. Esto demuestra que la distancia focal de una lente delgada depende únicamente de los radios de curvatura y del índice de refracción de la lente y del medio circundante. Para una lente en el aire,  $n_1 = 1,0$  y  $n_2 \equiv n$ , por lo que la ecuación del fabricante de lentes se reduce a

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad 2.21$$

### Convenciones de signos para las lentes

Para utilizar correctamente la ecuación de lentes delgadas, deben respetarse las siguientes convenciones de signos:

1.  $d_i$  es positivo si la imagen está en el lado opuesto al objeto (es decir, la imagen real); en caso contrario,  $d_i$  es negativo (es decir, imagen virtual).
2.  $f$  es positivo para una lente convergente y negativo para una lente divergente.
3.  $R$  es positivo para una superficie convexa hacia el objeto, y negativo para una superficie cóncava hacia el objeto.

### Aumento

Al utilizar un objeto de tamaño finito en el eje óptico y el trazado de rayos, se puede demostrar que el aumento  $m$  de una imagen es

$$m \equiv \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o} \quad 2.22$$

(donde las tres líneas significan "se define como"). Esta es exactamente la misma ecuación que obtuvimos para los espejos (consulte la [Ecuación 2.8](#)). Si  $m > 0$ , entonces la imagen tiene la misma orientación vertical que el objeto (llamada imagen "vertical"). Si  $m < 0$ , entonces la imagen tiene la orientación vertical opuesta a la del objeto (llamada imagen "invertida").

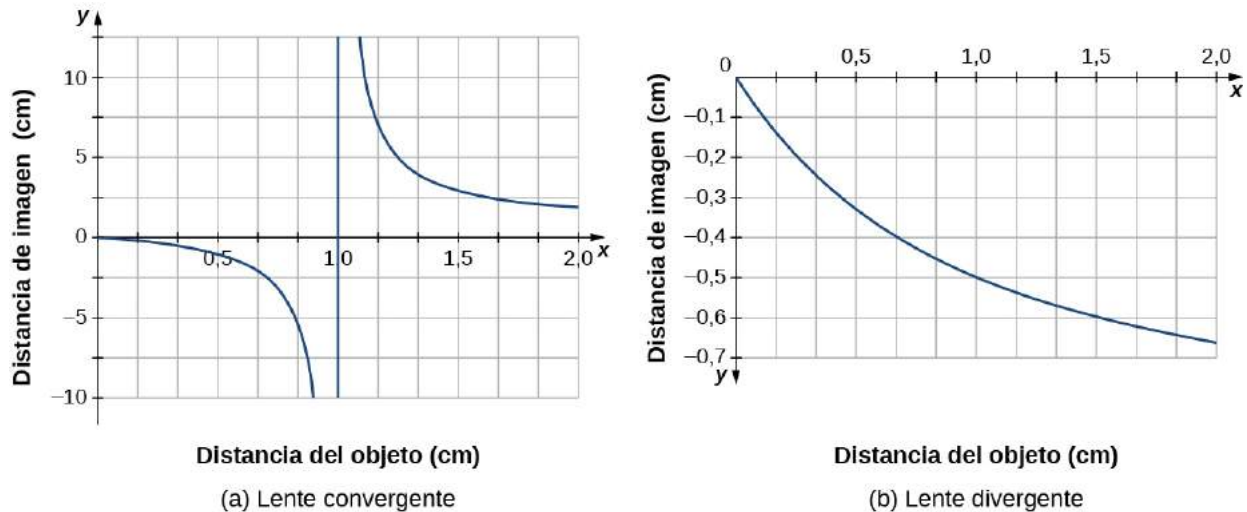
## Uso de la ecuación de lentes delgadas

La ecuación de lentes delgadas y la ecuación del fabricante de lentes son ampliamente aplicables a las situaciones que implican lentes delgadas. En los siguientes ejemplos exploramos muchas características de la formación de imágenes.

Considere una lente convergente delgada. ¿Dónde se forma la imagen y qué tipo de imagen se forma cuando el objeto se acerca a la lente desde el infinito? Esto se puede ver utilizando la ecuación de lentes delgadas para una distancia focal determinada para trazar la distancia de la imagen en función de la distancia del objeto. En otras palabras, trazamos

$$d_i = \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{d_o} \right)^{-1}$$

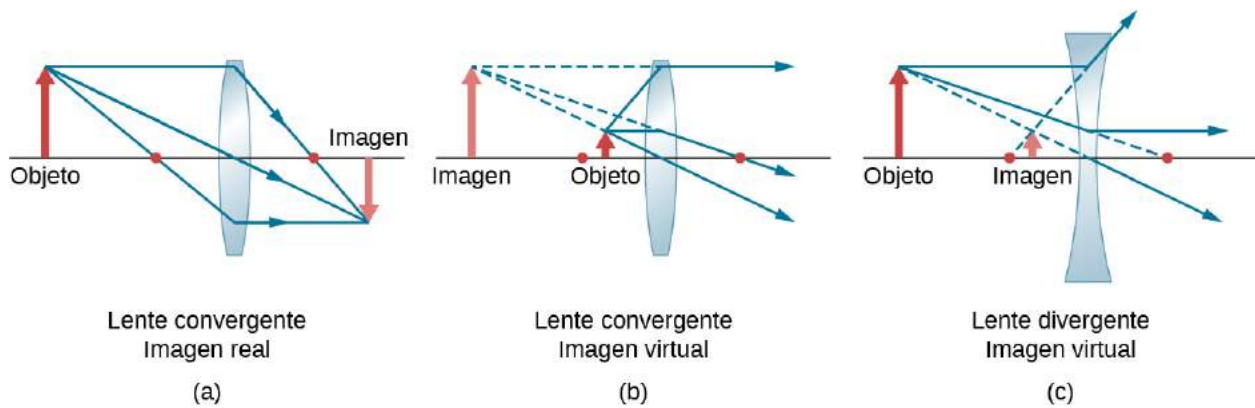
para un valor dado de  $f$ . Para  $f = 1$  cm, el resultado se muestra en la parte (a) de la [Figura 2.25](#).



**FIGURA 2.25** (a) Distancia de imagen para una lente convergente delgada con  $f = 1,0$  cm en función de la distancia del objeto. (b) Lo mismo, pero para una lente divergente con  $f = -1,0$  cm.

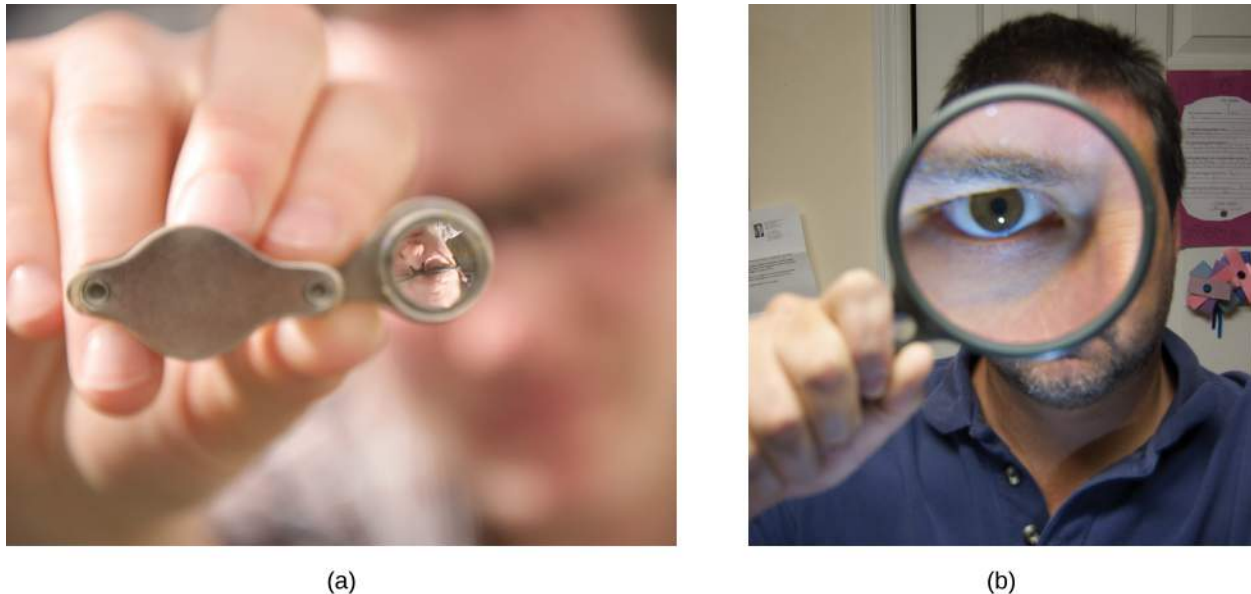
Un objeto mucho más alejado de la distancia focal  $f$  de la lente debería producir una imagen cerca del plano focal, porque el segundo término del lado derecho de la ecuación anterior se vuelve insignificante en comparación con el primer término, por lo que tenemos  $d_i \approx f$ . Esto puede verse en el gráfico de la parte (a) de la figura, que muestra que la distancia de imagen se aproxima asintóticamente a la distancia focal de 1 cm cuando las distancias del objeto son más grandes. A medida que el objeto se acerca al plano focal, la distancia de imagen diverge hasta el infinito positivo. Es de esperarse porque un objeto en el plano focal produce rayos paralelos que forman una imagen en el infinito (es decir, muy lejos de la lente). Cuando el objeto está más lejos que la distancia focal de la lente, la distancia de imagen es positiva, por lo que la imagen es real, en el lado opuesto de la lente del objeto, e invertida (porque  $m = -d_i/d_o$ ). Cuando el objeto está más cerca que la distancia focal de la lente, la distancia de imagen se vuelve negativa, lo que significa que la imagen es virtual, en el mismo lado de la lente que el objeto, y en posición vertical.

Para una lente divergente delgada de distancia focal  $f = -1,0$  cm, en la parte (b) se muestra un gráfico similar de la distancia de imagen frente a la distancia del objeto. En este caso, la distancia de imagen es negativa para todas las distancias de objeto positivas, lo que significa que la imagen es virtual, está en el mismo lado de la lente que el objeto y es vertical. Estas características también pueden verse mediante diagramas de trazado de rayos (consulte la [Figura 2.26](#)).



**FIGURA 2.26** Los puntos rojos muestran los puntos focales de las lentes. (a) Una imagen real e invertida formada a partir de un objeto que está más lejos que la distancia focal de una lente convergente. (b) Una imagen virtual y vertical formada a partir de un objeto que está más cerca que la distancia focal de la lente. (c) Una imagen virtual y vertical formada a partir de un objeto que está más lejos que la distancia focal de una lente divergente.

Para ver un ejemplo concreto de imágenes verticales e invertidas, consulte la [Figura 2.27](#), que muestra las imágenes formadas por lentes convergentes cuando el objeto (la cara de una persona en este caso) se coloca a diferentes distancias de la lente. En la parte (a) de la figura, la cara de la persona está a más de una distancia focal del objetivo, por lo que la imagen está invertida. En la parte (b), la cara de la persona está más cerca de una distancia focal del objetivo, por lo que la imagen es vertical.



**FIGURA 2.27** (a) Cuando una lente convergente se mantiene a más de una distancia focal de la cara del hombre, se forma una imagen invertida. Observe que la imagen está enfocada, pero no la cara, porque la imagen está mucho más cerca de la cámara con la que se toma esta fotografía que la cara. (b) Se produce una imagen vertical de la cara del hombre cuando se mantiene una lente convergente a menos de una distancia focal de su cara. (crédito a: modificación del trabajo de "DaMongMan"/Flickr; crédito b: modificación del trabajo de Casey Fleser)

Trabaje con los siguientes ejemplos para entender mejor el funcionamiento de las lentes delgadas.



## ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

### Lentes

Paso 1. Determine si sería útil el trazado de rayos, la ecuación de lentes delgadas o ambos. Aunque no se utilice

el trazado de rayos, siempre es muy útil realizar un boceto cuidadoso. Escriba los símbolos y los valores en el boceto.

Paso 2. Identifique lo que hay que determinar en el problema (identificar las incógnitas).

Paso 3. Haga una lista de lo que se sabe o se puede inferir del problema (identifique los conocidos).

Paso 4. Si el trazado de rayos es necesario, utilice las reglas de trazado de rayos que se indican al principio de esta sección.

Paso 5. La mayoría de los problemas cuantitativos requieren el uso de la ecuación de lentes delgadas o la ecuación del fabricante de lentes. Resuelva estas incógnitas e inserte las cantidades dadas o utilice ambas para encontrar dos incógnitas.

Paso 7. Compruebe si la respuesta es razonable. ¿Son correctos los signos? ¿Es el croquis o el trazado de rayos coherente con el cálculo?

### EJEMPLO 2.3

#### Uso de la ecuación del fabricante de lentes

Halle el radio de curvatura de una lente bicóncava rectificada simétricamente a partir de un vidrio con índice de refracción 1,55 de forma que su distancia focal en el aire sea de 20 cm (para una lente bicóncava, ambas superficies tienen el mismo radio de curvatura).

#### Estrategia

Utilice la forma de lente delgada de la ecuación del fabricante de lentes:

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

donde  $R_1 < 0$  y  $R_2 > 0$ . Dado que estamos haciendo una lente bicóncava simétrica, tenemos  $|R_1| = |R_2|$ .

#### Solución

Podemos determinar el radio  $R$  de curvatura a partir de

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( -\frac{2}{R} \right).$$

Se resuelve para  $R$  y se inserta  $f = -20$  cm,  $n_2 = 1,55$ , y  $n_1 = 1,00$  da como resultado

$$R = -2f \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) = -2(-20 \text{ cm}) \left( \frac{1,55}{1,00} - 1 \right) = 22 \text{ cm}.$$

### EJEMPLO 2.4

#### Lente convergente y diferentes distancias del objeto

Encuentre la ubicación, la orientación y el aumento de la imagen de un objeto de 3,0 cm de altura en cada una de las siguientes posiciones frente a una lente convexa de longitud focal de 10,0 cm (a)  $d_o = 50,0$  cm, (b)  $d_o = 5,00$  cm y (c)  $d_o = 20,0$  cm.

#### Estrategia

Comenzamos con la ecuación de lentes delgadas  $\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_o} = \frac{1}{f}$ . Resuelva lo siguiente para la distancia de imagen  $d_i$  e inserte la distancia del objeto y la distancia focal dadas.

**Solución**

- a. Para  $d_o = 50 \text{ cm}$ ,  $f = +10 \text{ cm}$ , esto da como resultado

$$\begin{aligned} d_i &= \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{d_o} \right)^{-1} \\ &= \left( \frac{1}{10,0 \text{ cm}} - \frac{1}{50,0 \text{ cm}} \right)^{-1} \\ &= 12,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

La imagen es positiva, por lo que la imagen, es real, está en el lado opuesto de la lente del objeto, y está a 12,6 cm de la lente. Para encontrar el aumento y la orientación de la imagen, utilice

$$m = -\frac{d_i}{d_o} = -\frac{12,5 \text{ cm}}{50,0 \text{ cm}} = -0,250.$$

El aumento negativo significa que la imagen está invertida. Dado que  $|m| < 1$ , la imagen es más pequeña que el objeto. El tamaño de la imagen viene dado por

$$|h_i| = |m| h_o = (0,250)(3,0 \text{ cm}) = 0,75 \text{ cm}$$

- b. Para  $d_o = 5,00 \text{ cm}$ ,  $f = +10,0 \text{ cm}$

$$\begin{aligned} d_i &= \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{d_o} \right)^{-1} \\ &= \left( \frac{1}{10,0 \text{ cm}} - \frac{1}{5,00 \text{ cm}} \right)^{-1} \\ &= -10,0 \text{ cm} \end{aligned}$$

La distancia de la imagen es negativa, por lo que la imagen es virtual, está en el mismo lado de la lente que el objeto y está a 10 cm de la lente. El aumento y la orientación de la imagen se encuentran a partir de

$$m = -\frac{d_i}{d_o} = -\frac{-10,0 \text{ cm}}{5,00 \text{ cm}} = +2,00.$$

El aumento positivo significa que la imagen está en posición vertical (es decir, tiene la misma orientación que el objeto). Dado que  $|m| > 1$ , la imagen es más grande que el objeto. El tamaño de la imagen es

$$|h_i| = |m| h_o = (2,00)(3,0 \text{ cm}) = 6,0 \text{ cm}.$$

- c. Para  $d_o = 20 \text{ cm}$ ,  $f = +10 \text{ cm}$

$$\begin{aligned} d_i &= \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{d_o} \right)^{-1} \\ &= \left( \frac{1}{10,0 \text{ cm}} - \frac{1}{20,0 \text{ cm}} \right)^{-1} \\ &= 20,0 \text{ cm} \end{aligned}$$

La distancia de imagen es positiva, por lo que la imagen es real, está en el lado opuesto de la lente del objeto y está a 20,0 cm de la lente. El aumento es

$$m = -\frac{d_i}{d_o} = -\frac{20,0 \text{ cm}}{20,0 \text{ cm}} = -1,00.$$

El aumento negativo significa que la imagen está invertida. Dado que  $|m| = 1$ , la imagen tiene el mismo tamaño que el objeto.

Al resolver problemas de óptica geométrica, a menudo tenemos que combinar el trazado de rayos y las ecuaciones de las lentes. El siguiente ejemplo demuestra este enfoque.

## EJEMPLO 2.5

### Elegir la distancia focal y el tipo de lente

Para proyectar una imagen de una bombilla en una pantalla a 1,50 m de distancia, hay que elegir el tipo de lente que se va a utilizar (convergente o divergente) y su distancia focal ([Figura 2.28](#)). La distancia entre la lente y la bombilla se fija en 0,75 m. Además, ¿cuál es el aumento y la orientación de la imagen?

#### Estrategia

La imagen debe ser real, por lo que se opta por utilizar una lente convergente. La distancia focal se puede encontrar utilizando la ecuación de lentes delgadas y resolviendo la distancia focal. La distancia del objeto es  $d_o = 0,75$  m y la distancia de imagen es  $d_i = 1,5$  m.

#### Solución

Encuentre la distancia focal de las lentes delgadas e inserte las distancias del objeto y de imagen:

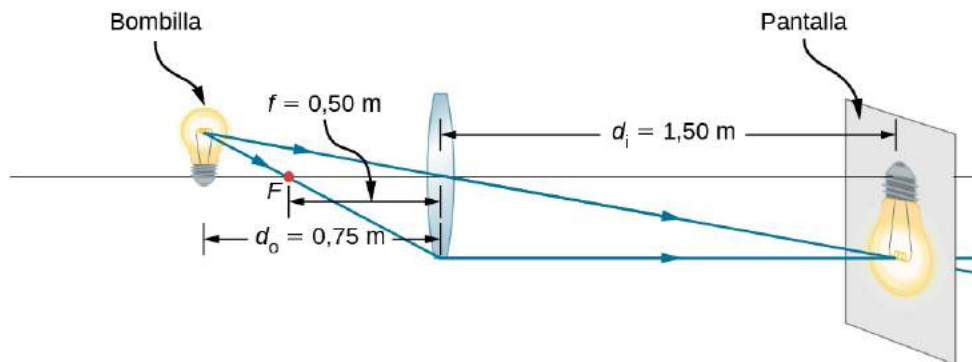
$$\begin{aligned}\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} &= \frac{1}{f} \\ f &= \left( \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} \right)^{-1} \\ &= \left( \frac{1}{0,75 \text{ m}} + \frac{1}{1,5 \text{ m}} \right)^{-1} \\ &= 0,50 \text{ m}\end{aligned}$$

El aumento es

$$m = -\frac{d_i}{d_o} = -\frac{1,5 \text{ m}}{0,75 \text{ m}} = -2,0.$$

#### Importancia

El signo negativo del aumento significa que la imagen está invertida. La distancia focal es positiva, como se espera de una lente convergente. Se puede utilizar el trazado de rayos para comprobar el cálculo (consulte la [Figura 2.28](#)). Como se esperaba, la imagen está invertida, es real y es más grande que el objeto.



**FIGURA 2.28** Una bombilla colocada a 0,75 m de un objetivo con una distancia focal de 0,50 m produce una imagen real en una pantalla, como se explica en el ejemplo. El trazado de rayos predice la ubicación y el tamaño de la imagen.

## 2.5 El ojo

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Comprender la física básica de la formación de las imágenes en el ojo humano.
- Reconocer varios problemas de la visión, así como los principios ópticos para tratar estas afecciones

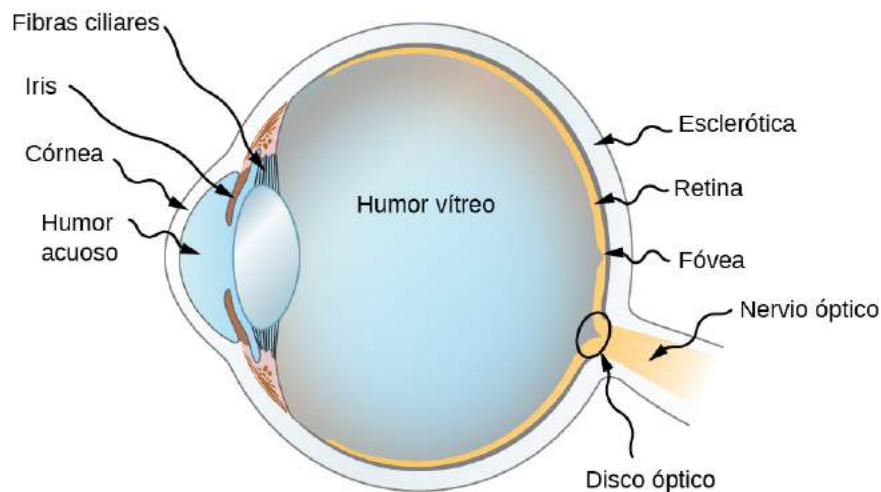


El ojo humano es quizás el más interesante e importante de todos los instrumentos ópticos. Nuestros ojos realizan una gran cantidad de funciones: Nos permiten percibir la dirección, el movimiento, los colores y la distancia. En esta sección, exploramos la óptica geométrica del ojo.

### Física del ojo

Es impresionante la manera cómo el ojo forma imágenes y la riqueza de detalles y colores que puede detectar. Sin embargo, nuestros ojos suelen necesitar cierta corrección para alcanzar lo que se denomina visión "normal". En realidad, la visión normal debería llamarse visión "ideal" porque casi la mitad de la población humana necesita algún tipo de corrección de la vista, por lo que necesitar anteojos no es en absoluto "anormal". La formación de imágenes por parte de nuestros ojos y la corrección común de la visión pueden analizarse con la óptica que se ha tratado anteriormente en este capítulo.

La [Figura 2.29](#) muestra la anatomía básica del ojo. La córnea y el cristalino forman un sistema que, en una buena aproximación, actúa como una única y fina lente. Para una visión clara, es necesario proyectar una imagen real sobre la retina, sensible a la luz, que se encuentra a una distancia fija del cristalino. El cristalino es flexible, lo que permite ajustar el radio de la curvatura de esta lente para producir una imagen en la retina para objetos que están a diferentes distancias. El centro de la imagen incide en la fovea, que tiene la mayor densidad de receptores de luz y la mayor agudeza (nitidez) en el campo visual. La apertura variable (es decir, la pupila) del ojo, junto con la adaptación química, permite al ojo detectar intensidades de luz desde la más baja observable hasta  $10^{10}$  veces mayor (sin daños). Se trata de un rango de detección increíble. El procesamiento de los impulsos nerviosos visuales comienza con las interconexiones en la retina y continúa en el cerebro. El nervio óptico transmite las señales recibidas por el ojo al cerebro.



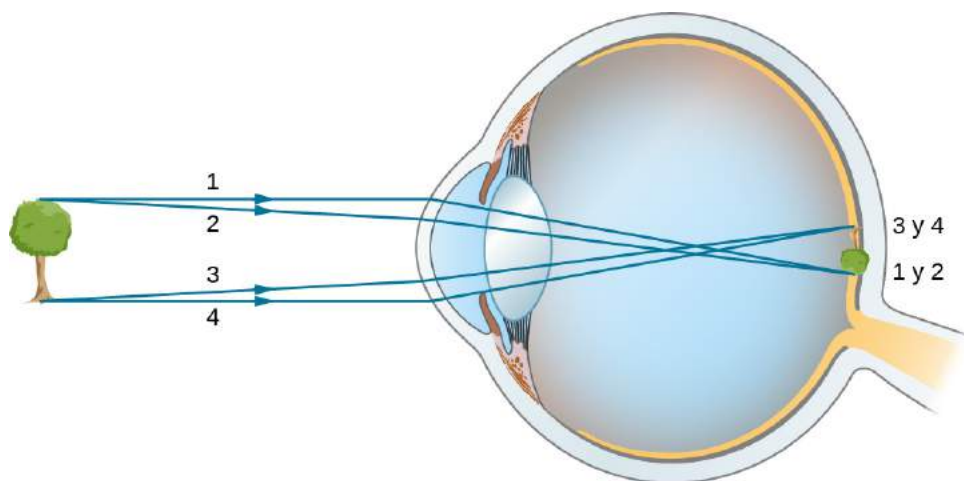
**FIGURA 2.29** La córnea y el cristalino del ojo actúan de forma conjunta para formar una imagen real en la retina, sensible a la luz, que tiene su mayor concentración de receptores en la fovea y en un punto ciego sobre el nervio óptico. El radio de curvatura del cristalino es ajustable para formar una imagen en la retina a diferentes distancias del objeto. En esta figura se muestran capas de tejidos con diferentes índices de refracción en el cristalino. Sin embargo, se han omitido en otras imágenes para mayor claridad.

Los índices de refracción del ojo son esenciales para su capacidad de formar imágenes. La [Tabla 2.1](#) enumera los índices de refracción relevantes para el ojo. El mayor cambio en el índice de refracción, que es donde los rayos de luz se doblan más, se produce en la interfase aire-córnea y no en la interfase humor acuoso-cristalino. El diagrama de rayos en la [Figura 2.30](#) muestra la formación de imágenes por la córnea y el cristalino. La córnea, que es en sí misma una lente convergente con una distancia focal de aproximadamente 2,3 cm, proporciona la mayor parte de la capacidad de enfoque del ojo. El cristalino, que es una lente convergente con una distancia focal de unos 6,4 cm, proporciona el enfoque más fino necesario para producir una imagen clara en la retina. La córnea y el cristalino pueden tratarse como una sola lente fina, aunque los rayos de luz atraviesen varias capas de material (como la córnea, el humor acuoso, varias capas en el cristalino y el humor vítreo), cambiando de dirección en cada interfase. La imagen que se forma es muy parecida a la que produce una lente convexa simple (es decir, una imagen real invertida). Aunque las imágenes que se forman

en el ojo están invertidas, el cerebro las invierte de nuevo para que parezcan verticales.

Material	Índice de refracción
Agua	1,33
Aire	1,0
Córnea	1,38
Humor acuoso	1,34
Cristalino	1,41*
Humor vítreo	1,34

**TABLA 2.1** Índices de refracción relevantes para el ojo \*Es un valor medio. El índice de refracción real varía en todo el cristalino y es mayor en el centro del mismo.



**FIGURA 2.30** En el ojo humano, se forma una imagen en la retina. Se trazan los rayos de la parte superior e inferior del objeto para mostrar cómo se produce una imagen real e invertida en la retina. La distancia al objeto no está a escala.

Como se ha señalado, la imagen debe incidir con exactitud sobre la retina para producir una visión clara, es decir, la distancia de imagen  $d_i$  debe ser igual a la distancia entre la lente y la retina. Dado que la distancia del cristalino a la retina no cambia, la distancia de imagen  $d_i$  debe ser igual para los objetos a todas las distancias. Los músculos ciliares ajustan la forma del cristalino para enfocar objetos cercanos o lejanos. Al cambiar la forma del cristalino, el ojo cambia la distancia focal de esta lente. Este mecanismo del ojo se llama **acomodación**.

El punto más cercano en el que se puede colocar un objeto para que el ojo pueda formar una imagen clara en la retina se llama **punto cercano** del ojo. Del mismo modo, el **punto lejano** es la distancia más lejana a la que un objeto es claramente visible. Una persona con una visión normal puede ver los objetos con claridad a distancias que van desde 25 cm hasta prácticamente el infinito. El punto cercano aumenta con la edad, llegando a ser de varios metros para algunas personas mayores. En este texto, consideramos que el punto cercano es de 25 cm.

Podemos utilizar las ecuaciones de lentes delgadas para examinar cuantitativamente la formación de imágenes por el ojo. En primer lugar, definimos la **potencia óptica** de una lente como

$$P = \frac{1}{f} \quad 2.23$$

con la distancia focal  $f$  expresada en metros. Las unidades de potencia óptica se denominan "dioptrías" (D). Es decir,  $1 \text{ D} = \frac{1}{\text{m}}$ , o  $1 \text{ m}^{-1}$ . Los optometristas prescriben los anteojos y lentes de contacto comunes en unidades de dioptrías. Con esta definición de potencia óptica, podemos reescribir las ecuaciones de lentes delgadas como

$$P = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} \quad 2.24$$

Trabajar con la potencia óptica es conveniente porque, para dos o más lentes cercanas, la potencia óptica eficaz del sistema de lentes es aproximadamente la suma de la potencia óptica de las lentes individuales:

$$P_{\text{total}} = P_{\text{lente 1}} + P_{\text{lente 2}} + P_{\text{lente 3}} + \dots \quad 2.25$$



## EJEMPLO 2.6

### Distancia focal eficaz del ojo

La córnea y el cristalino tienen una distancia focal de 2,3 y 6,4 cm, respectivamente. Encuentre la distancia focal neta y la potencia óptica del ojo.

#### Estrategia

Se suman las potencias ópticas de las lentes poco espaciadas, por lo que  $P_{\text{ojo}} = P_{\text{córnea}} + P_{\text{lente}}$ .

#### Solución

Si se escribe la ecuación de la potencia en términos de las distancias focales, se obtiene

$$\frac{1}{f_{\text{ojo}}} = \frac{1}{f_{\text{córnea}}} + \frac{1}{f_{\text{lente}}} = \frac{1}{2,3 \text{ cm}} + \frac{1}{6,4 \text{ cm}}.$$

Por lo tanto, la distancia focal del ojo (córnea y cristalino juntos) es

$$f_{\text{ojo}} = 1,69 \text{ cm}.$$

La potencia óptica del ojo es

$$P_{\text{ojo}} = \frac{1}{f_{\text{ojo}}} = \frac{1}{0,0169 \text{ m}} = 59 \text{ D}.$$

Para una visión clara, la distancia de imagen  $d_i$  debe ser igual a la distancia entre la lente y la retina. La visión normal es posible para los objetos a distancias de  $d_o = 25 \text{ cm}$  hasta el infinito. El siguiente ejemplo muestra cómo calcular la distancia de imagen para un objeto situado en el punto cercano del ojo.



## EJEMPLO 2.7

### Imagen de un objeto situado en el punto cercano

La distancia focal neta de un ojo humano concreto es de 1,7 cm. Se coloca un objeto en el punto cercano del ojo. ¿A qué distancia del objetivo se forma una imagen enfocada?

#### Estrategia

El punto cercano está a 25 cm del ojo, por lo que la distancia del objeto es  $d_o = 25 \text{ cm}$ . Determinamos la distancia de imagen a partir de la ecuación de la lente:

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_o}$$

**Solución**

$$\begin{aligned}d_i &= \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{d_o} \right)^{-1} \\ &= \left( \frac{1}{1,7 \text{ cm}} - \frac{1}{25 \text{ cm}} \right)^{-1} \\ &= 1,8 \text{ cm}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la imagen se forma 1,8 cm detrás del objetivo.

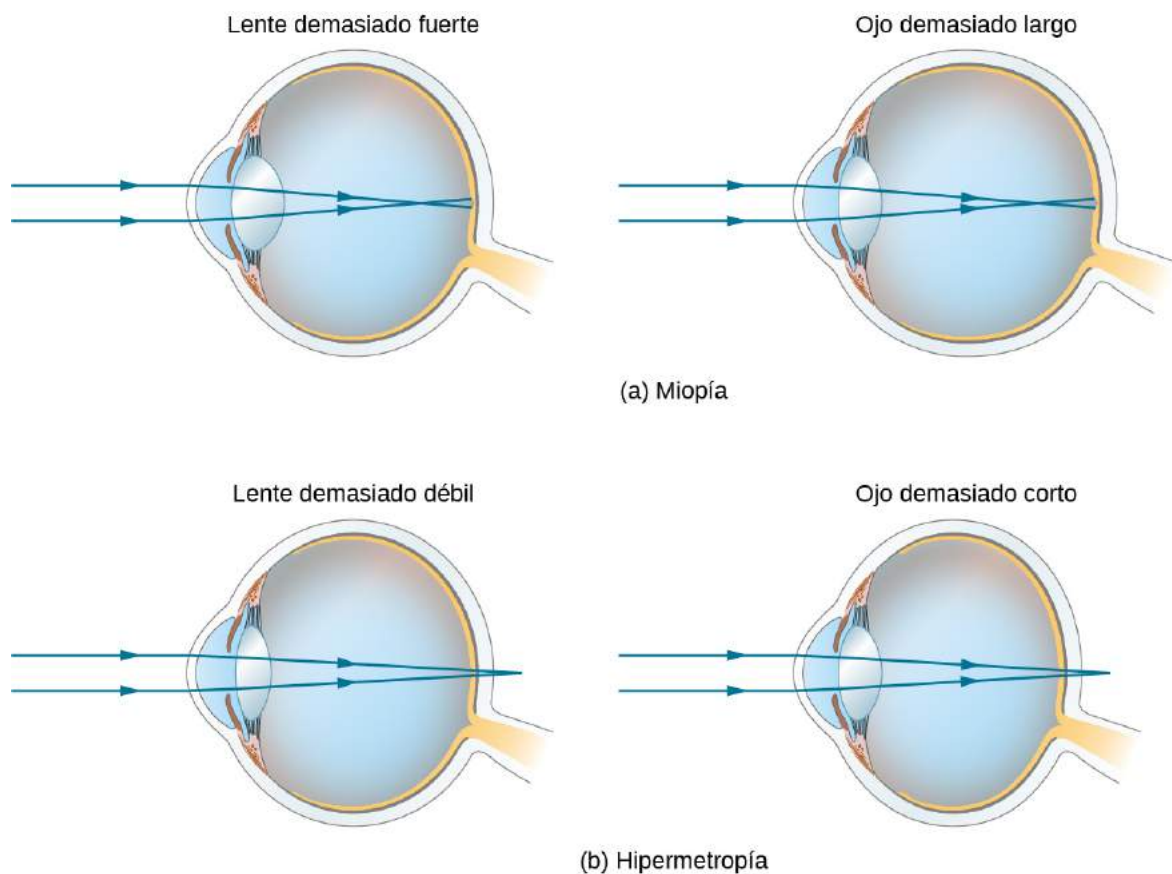
**Importancia**

A partir de la fórmula de aumento, encontramos  $m = -\frac{1,8 \text{ cm}}{25 \text{ cm}} = -0,073$ . Dado que  $m < 0$ , la orientación de la imagen se invierte con respecto al objeto. A partir del valor absoluto de  $m$  vemos que la imagen es mucho más pequeña que el objeto; de hecho, es solo el 7% del tamaño del objeto.

---

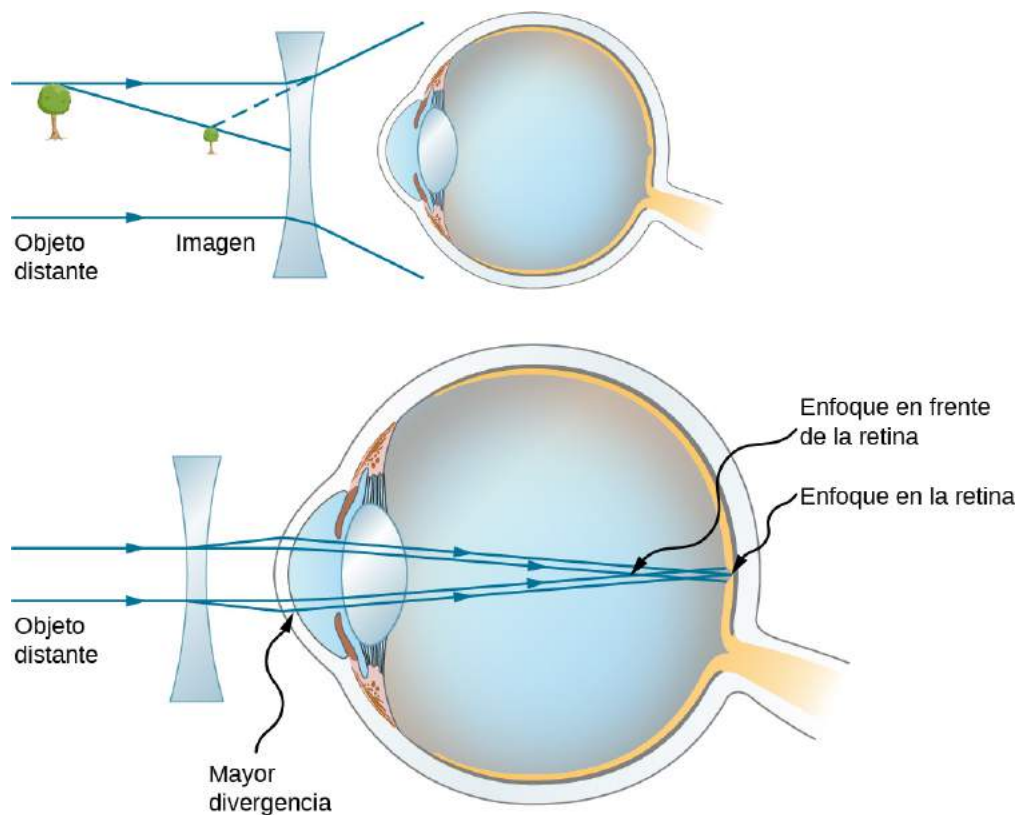
**Corrección de la vista**

La necesidad de algún tipo de corrección visual es muy común. Los defectos típicos de la visión son fáciles de entender con la óptica geométrica, y algunos son sencillos de corregir. La [Figura 2.31](#) muestra dos defectos comunes de la visión. La **visión corta** o **miopía** es la capacidad de ver objetos cercanos, mientras que los objetos lejanos se ven borrosos. El ojo sobreconverge los rayos casi paralelos de un objeto lejano, y estos rayos se cruzan delante de la retina. Los rayos más divergentes de un objeto cercano convergen en la retina para obtener una imagen clara. La distancia al objeto más lejano, que se puede ver con claridad, se llama punto lejano del ojo (normalmente el punto lejano está en el infinito). La **hipermetropía** o **hiperopía** es la capacidad de ver claramente los objetos lejanos, mientras que los objetos cercanos se ven borrosos. Un ojo hipermetrope no hace converger suficientemente los rayos de un objeto cercano para que los rayos se encuentren en la retina.



**FIGURA 2.31** (a) El ojo miope hace converger los rayos procedentes de un objeto lejano delante de la retina, por lo que divergen cuando inciden en ella, produciendo una imagen borrosa. Un cristalino demasiado potente puede causar miopía, o el ojo puede ser demasiado largo. (b) El ojo hipermetrope es incapaz de hacer converger los rayos de un objeto cercano en la retina, produciendo una visión borrosa de cerca. Un cristalino con una potencia óptica insuficiente o un ojo demasiado corto pueden causar hipermetropía.

Dado que el ojo miope sobreconverge los rayos de luz, la corrección de la miopía consiste en colocar una lente divergente de anteojos delante del ojo, como se muestra en la [Figura 2.32](#). Esto reduce la potencia óptica de un ojo demasiado potente (recordemos que la distancia focal de una lente divergente es negativa, por lo que su potencia óptica es negativa). Otra forma de entender esta corrección es que una lente divergente hará que los rayos entrantes se desvíen más para compensar la excesiva convergencia causada por el sistema de lentes del ojo. La imagen producida por la lente divergente del antejo sirve de objeto (óptico) para el ojo, y como el ojo no puede enfocar objetos más allá de su punto lejano, la lente divergente debe formar una imagen de objetos lejanos (físicos) en un punto más cercano que el punto lejano.



**FIGURA 2.32** La corrección de la miopía requiere una lente divergente que compense la sobreconvergencia del ojo. La lente divergente produce una imagen más cercana al ojo que el objeto físico. Esta imagen sirve de objeto óptico para el ojo, y el miope puede verla claramente porque está más cerca que su punto lejano.

## EJEMPLO 2.8

### Corrección de la miopía

¿Qué potencia óptica deben tener los anteojos para corregir la visión de una persona miope cuyo punto lejano es de 30,0 cm? Supongamos que la lente correctora está fijada a 1,50 cm del ojo.

#### Estrategia

Usted quiere que esta persona miope pueda ver con claridad los objetos lejanos, lo que significa que la lente de los anteojos debe producir una imagen a 30,0 cm del ojo para un objeto en el infinito. Una imagen a 30,0 cm del ojo estará a  $30,0 \text{ cm} - 1,50 \text{ cm} = 28,5 \text{ cm}$  de la lente de los anteojos. Por lo tanto, debemos tener  $d_i = -28,5 \text{ cm}$  cuando  $d_o = \infty$ . La distancia de imagen es negativa porque está en el mismo lado de la lente de los anteojos al igual que el objeto.

#### Solución

Dado que  $d_i$  y  $d_o$ , podemos encontrar la potencia óptica de la lente de los anteojos utilizando [Ecuación 2.24](#):

$$P = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-0,285 \text{ m}} = -3,51\text{D}.$$

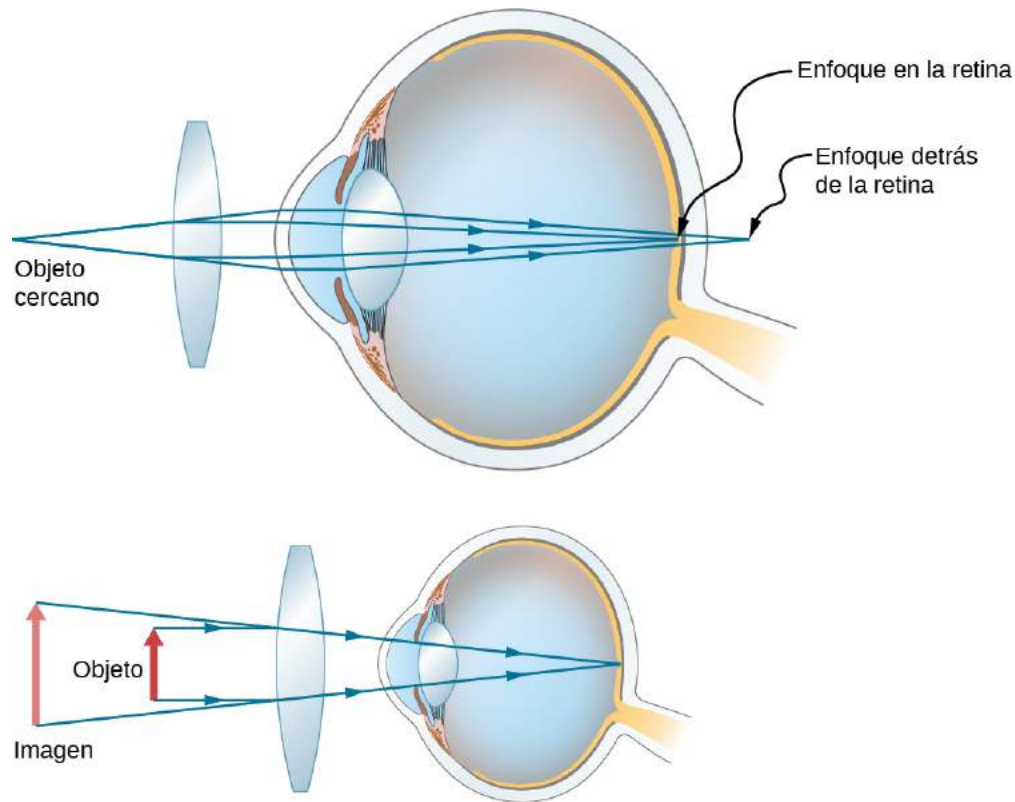
#### Importancia

La potencia óptica negativa indica una lente divergente (o cóncava), como era de esperarse. Si examina los anteojos para miopes, verá que las lentes son más finas en el centro. Además, si examina una receta de anteojos para miopes, verá que la potencia óptica prescrita es negativa y se da en unidades de dioptrías.

La corrección de la hipermetropía consiste simplemente en utilizar el tipo de lente opuesto al de la miopía (es

decir, una lente convergente), como se muestra en la [Figura 2.33](#).

Una lente de este tipo producirá una imagen de los objetos físicos que están más cerca que el punto cercano a una distancia que está entre el punto cercano y el punto lejano, de modo que la persona pueda ver la imagen con claridad. Por lo tanto, para determinar la potencia óptica necesaria para la corrección, hay que conocer el punto cercano de la persona, como se explica en el [Ejemplo 2.9](#).



**FIGURA 2.33** La corrección de la hipermetropía utiliza una lente convergente que compensa la subconvergencia del ojo. La lente convergente produce una imagen más alejada del ojo que el objeto, de modo que la persona hipermetrope puede verlo con claridad.

## EJEMPLO 2.9

### Corrección de la hipermetropía

¿Qué potencia óptica se necesita en la lente de anteojos para que una persona hipermetrope, cuyo punto cercano está a 1,00 m, pueda ver con claridad un objeto que está a 25,0 cm del ojo? Supongamos que la lente correctora está fijada a 1,5 cm del ojo.

#### Estrategia

Cuando un objeto está a 25,0 cm de los ojos de la persona, la lente de los anteojos debe producir una imagen a 1,00 m de distancia (el punto cercano), para que la persona pueda verlo con claridad. Una imagen a 1,00 m del ojo estará a  $100\text{ cm} - 1,5\text{ cm} = 98,5\text{ cm}$  de la lente de los anteojos porque la lente de los anteojos está a 1,5 cm del ojo. Por lo tanto,  $d_i = -98,5\text{ cm}$ , el signo menos indica que la imagen está en el mismo lado del objetivo que el objeto. El objeto está a  $25,0\text{ cm} - 1,5\text{ cm} = 23,5\text{ cm}$  de los anteojos, por lo que  $d_o = 23,5\text{ cm}$ .

#### Solución

Dado que  $d_i$  y  $d_o$ , podemos encontrar la potencia óptica de la lente de los anteojos utilizando [Ecuación 2.24](#):

$$P = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{0,235\text{ m}} + \frac{1}{-0,985\text{ m}} = +3,24\text{ D.}$$



### Importancia

La potencia óptica positiva indica una lente convergente (convexa), como era de esperarse. Si examina los anteojos de los hipermetropes, verá que las lentes son más gruesas en el centro. Además, los anteojos graduados para hipermetropes tienen una potencia óptica prescrita que es positiva.

## 2.6 La cámara

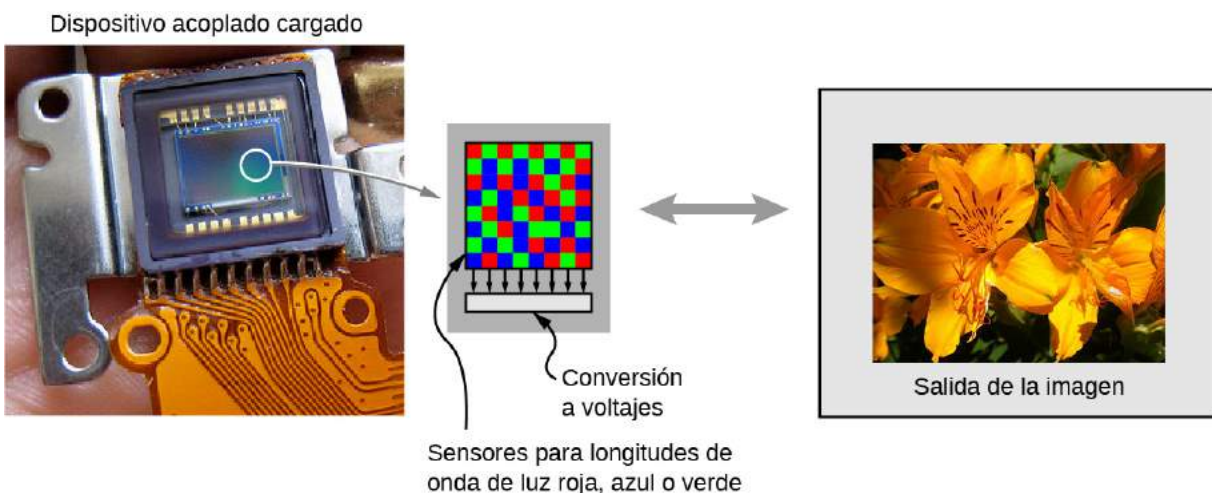
### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir la óptica de una cámara
- Caracterizar la imagen creada por una cámara

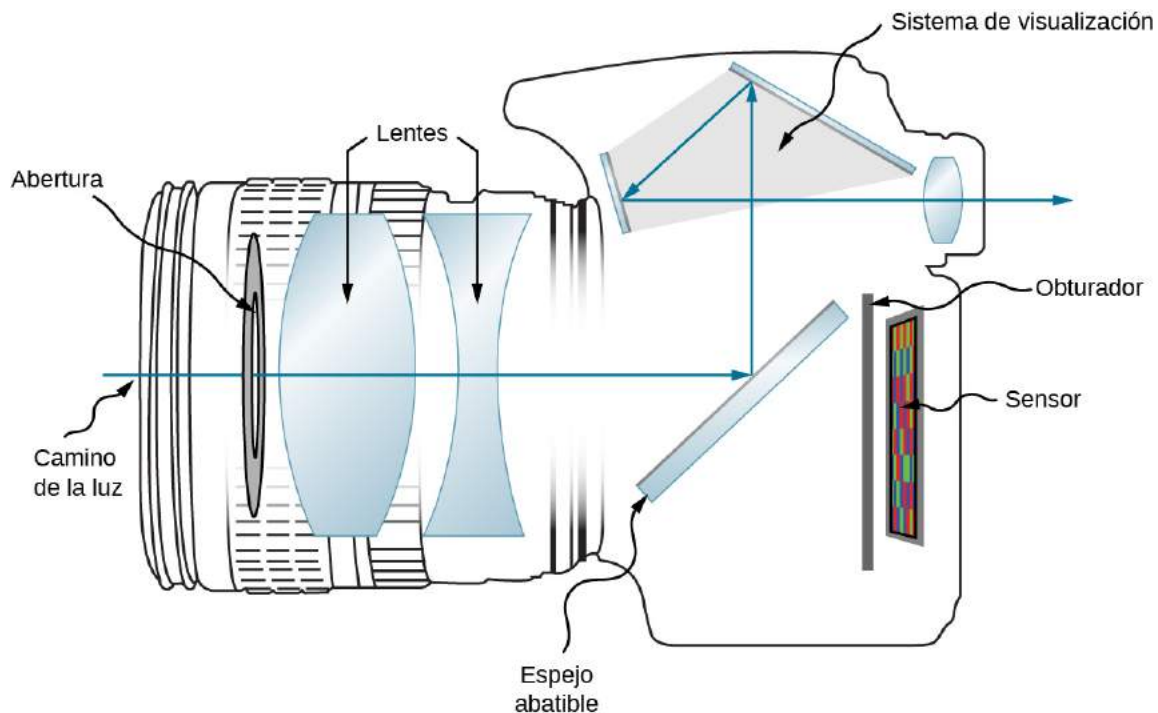
Las cámaras son muy comunes en nuestra vida cotidiana. Entre 1825 y 1827, el inventor francés Nicéphore Niépce logró fotografiar una imagen creada por una cámara primitiva. Desde entonces, se han logrado enormes avances en el diseño de cámaras y detectores con cámaras.

Al principio, las fotografías se grababan utilizando la reacción sensible a la luz de compuestos a base de plata, como el cloruro de plata o el bromuro de plata. El papel fotográfico con base de plata era de uso común hasta la llegada de la fotografía digital en la década de 1980, que está íntimamente relacionada con los detectores de **dispositivos de carga acoplada (CCD)**. En pocas palabras, un CCD es un chip semiconductor que graba las imágenes como una matriz de diminutos píxeles, cada uno de los cuales está situado en una "bandeja" de la superficie. Cada píxel es capaz de detectar la intensidad de la luz que incide sobre él. El color se pone en juego colocando filtros de color rojo, azul y verde sobre los píxeles, lo que da lugar a imágenes digitales coloreadas ([Figura 2.34](#)). En su mejor resolución, un píxel del CCD corresponde a un píxel de la imagen. Para reducir la resolución y disminuir el tamaño del archivo, podemos "agrupar" varios píxeles del CCD en uno solo, lo que da como resultado una imagen más pequeña pero "pixelada".



**FIGURA 2.34** Un dispositivo de carga acoplada (CCD) convierte las señales de luz en señales electrónicas, lo que permite el procesamiento electrónico y el almacenamiento de imágenes visuales. Esta es la base de las imágenes electrónicas en todas las cámaras digitales, desde los teléfonos móviles hasta las cámaras de cine. (crédito a la izquierda: modificación de la obra de Bruce Turner)

Está claro que la electrónica es una parte importante de una cámara digital; sin embargo, la física subyacente es la óptica básica. De hecho, la óptica de una cámara es prácticamente la misma que la de una lente simple con una distancia del objeto significativamente mayor que la distancia focal del objetivo ([Figura 2.35](#)).



**FIGURA 2.35** Las cámaras digitales modernas tienen varios objetivos para producir una imagen clara con una aberración mínima y utilizan filtros rojos, azules y verdes para producir una imagen en color.

Por ejemplo, considere la cámara de un teléfono inteligente. La cámara media de un teléfono inteligente está equipada con un objetivo gran angular fijo con una distancia focal de unos 4 a 5 mm. (Esta distancia focal es aproximadamente igual al grosor del teléfono) La imagen creada por el objetivo se enfoca en el detector del CCD montado en el lado opuesto del teléfono. En un teléfono móvil, el objetivo y el CCD no pueden moverse uno respecto al otro. Entonces, ¿cómo nos aseguramos de que tanto las imágenes de un objeto lejano como las de un objeto cercano estén enfocadas?

Recordemos que el ojo humano puede adaptarse a las imágenes lejanas y cercanas cambiando su distancia focal. Una cámara de teléfono móvil no puede hacerlo porque la distancia del objetivo al detector es fija. Aquí es donde la pequeña distancia focal se vuelve importante. Supongamos que tenemos una cámara con una distancia focal de 5 mm. ¿Cuál es la distancia de imagen para una selfie? La distancia del objeto para una selfie (la longitud de la mano que sostiene el teléfono) es de unos 50 cm. Utilizando la ecuación de lentes delgadas, podemos escribir

$$\frac{1}{5 \text{ mm}} = \frac{1}{500 \text{ mm}} + \frac{1}{d_i}$$

A continuación, obtenemos la distancia de imagen:

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{5 \text{ mm}} - \frac{1}{500 \text{ mm}}$$

Tenga en cuenta que la distancia del objeto es 100 veces mayor que la distancia focal. Podemos ver claramente que el término  $1/(500 \text{ mm})$  es significativamente menor que  $1/(5 \text{ mm})$ , lo que significa que la distancia de imagen es prácticamente igual a la distancia focal del objetivo. Un cálculo real nos da la distancia de imagen  $d_i = 5,05 \text{ mm}$ . Este valor está muy cerca de la distancia focal del objetivo.

Considere ahora el caso de un objeto lejano. Supongamos que queremos fotografiar a una persona que se encuentra a unos 5 m de nosotros. Al utilizar de nuevo la ecuación de lentes delgadas, obtenemos la distancia de imagen de 5,005 mm. Cuanto más lejos esté el objeto del objetivo, más cerca estará la distancia de imagen de la distancia focal. En el caso límite de un objeto infinitamente lejano, obtenemos la distancia de imagen exactamente igual a la distancia focal del objetivo.

Como puedes ver, la diferencia entre la distancia de imagen para una selfi y la distancia de imagen para un objeto lejano es solo de unos 0,05 mm o 50 micras. Incluso una corta distancia del objeto, como la longitud de la mano, es dos órdenes de magnitud mayor que la distancia focal del objetivo, lo que provoca variaciones mínimas en la distancia de imagen. (La diferencia de 50 micras es menor que el grosor de una hoja de papel media) Una diferencia tan pequeña puede ser fácilmente acomodada por el mismo detector, colocado a la distancia focal del objetivo. El software de análisis de imágenes puede ayudar a mejorar la calidad de las mismas.

Las cámaras convencionales de apuntar y disparar suelen utilizar un objetivo móvil para cambiar la distancia entre el objetivo y la imagen. Los complejos objetivos de las cámaras réflex más caras permiten obtener imágenes fotográficas de gran calidad. La óptica de estos objetivos de cámara está fuera del alcance de este libro de texto.

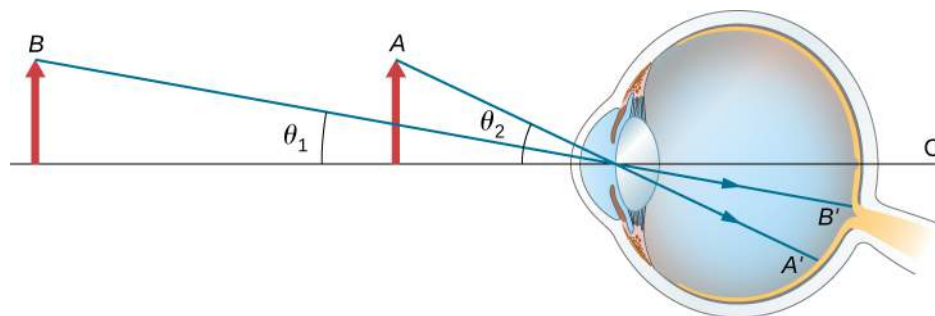
## 2.7 La lupa simple

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrás:

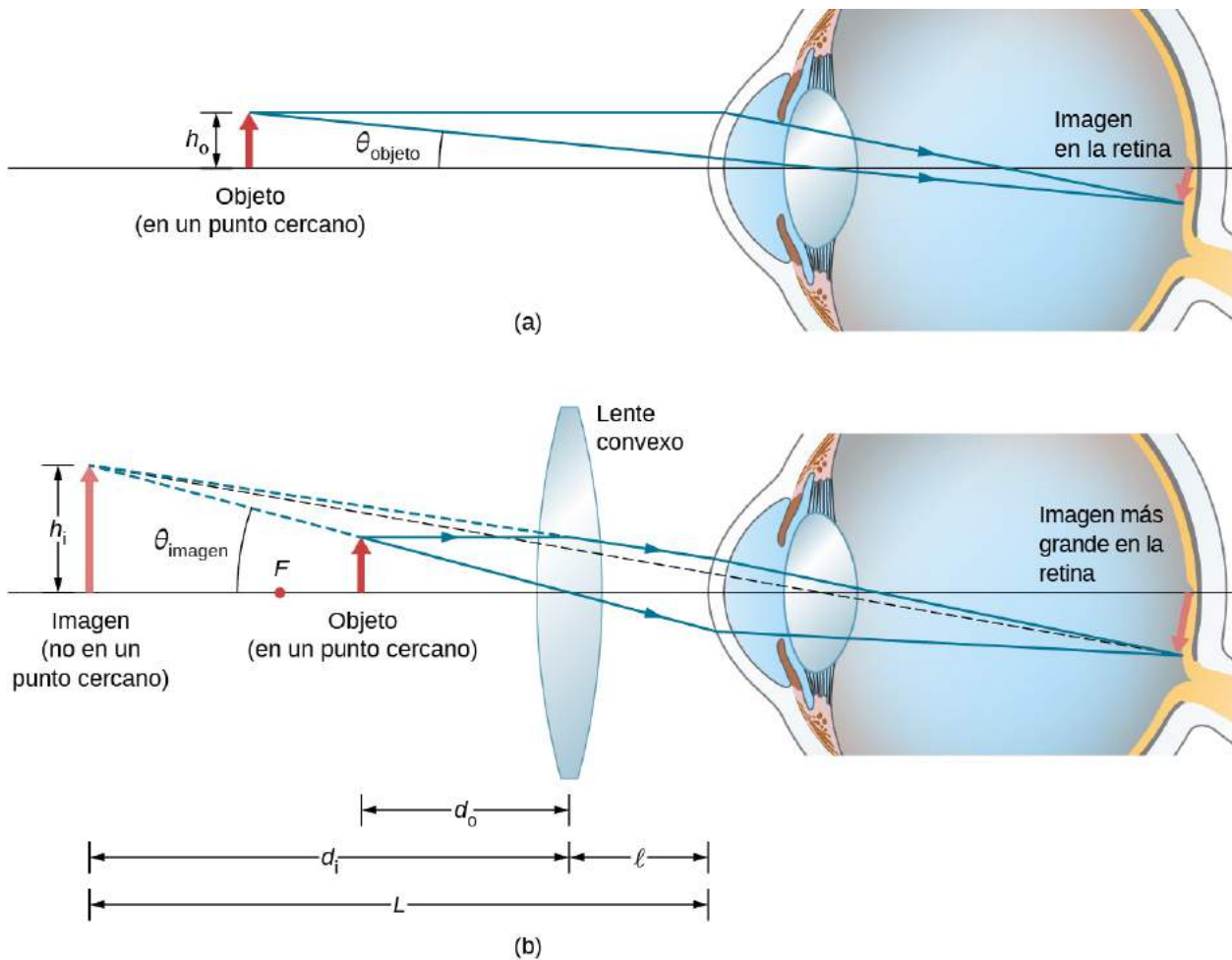
- Comprender la óptica de una lupa simple
- Caracterizar la imagen creada por una lupa simple

El tamaño aparente de un objeto percibido por el ojo depende del ángulo que el objeto subtende desde el ojo. Como se muestra en la [Figura 2.36](#), el objeto en  $A$  subtende un ángulo mayor desde el ojo que cuando está en posición en el punto  $B$ . Por lo tanto, el objeto en  $A$  forma una imagen mayor en la retina (consulte  $OA'$ ) que cuando se sitúa en  $B$  (vea  $OB'$ ). Así, los objetos que subyacen a grandes ángulos del ojo parecen más grandes porque forman imágenes más grandes en la retina.



**FIGURA 2.36** El tamaño percibido por un ojo está determinado por el ángulo subtendido por el objeto. Una imagen formada en la retina por un objeto situado en  $A$  es mayor que una imagen formada en la retina por el mismo objeto situado en  $B$  (alturas de imagen comparadas  $OA'$  a  $OB'$ ).

Hemos visto que, cuando un objeto se coloca dentro de la distancia focal de una lente convexa, su imagen es virtual, vertical y más grande que el objeto (consulte la parte (b) de la [Figura 2.26](#)). Así, cuando una imagen producida por una lente convexa sirve de objeto para el ojo, como se muestra en la [Figura 2.37](#), la imagen en la retina se amplía, porque la imagen producida por la lente subtende un ángulo mayor en el ojo que el objeto. Una lente convexa utilizada con este fin se denomina **lupa** o **lupa simple**.



**FIGURA 2.37** La lupa simple es una lente convexa utilizada para producir una imagen ampliada de un objeto en la retina. (a) Sin lente convexa, el objeto subtende un ángulo  $\theta_{\text{objeto}}$  del ojo. (b) Con la lente convexa colocada, la imagen producida por la lente convexa subtende un ángulo  $\theta_{\text{imagen}}$  del ojo, con  $\theta_{\text{imagen}} > \theta_{\text{objeto}}$ . Así, la imagen en la retina es mayor con la lente convexa colocada.

Para tener en cuenta el aumento de una lente de aumento, comparamos el ángulo subtendido por la imagen (creada por la lente) con el ángulo subtendido por el objeto (visto sin lente), como se muestra en la [Figura 2.37](#). Suponemos que el objeto está situado en el punto cercano del ojo, porque ésta es la distancia del objeto a la que el ojo sin ayuda puede formar la mayor imagen en la retina. Compararemos las imágenes ampliadas creadas por una lente con este tamaño máximo de imagen para el ojo sin ayuda. El aumento de una imagen cuando es observada por el ojo es el **aumento angular**  $M$ , que se define por la relación del ángulo  $\theta_{\text{imagen}}$  subtendido por la imagen al ángulo  $\theta_{\text{objeto}}$  subtendido por el objeto:

$$M = \frac{\theta_{\text{imagen}}}{\theta_{\text{objeto}}}. \quad 2.26$$

Considere la situación que se muestra en la [Figura 2.37](#). La lente de aumento se mantiene a una distancia  $l$  del ojo, y la imagen producida por la lupa se forma a una distancia  $L$  del ojo. Queremos calcular el aumento angular para cualquier  $L$  y  $l$ . En la aproximación para ángulos pequeños, el tamaño angular  $\theta_{\text{imagen}}$  de la imagen es  $h_i/L$ . El tamaño angular  $\theta_{\text{objeto}}$  del objeto en el punto cercano es  $\theta_{\text{objeto}} = h_o/25 \text{ cm}$ . El aumento angular es entonces

$$M = \frac{\theta_{\text{imagen}}}{\theta_{\text{objeto}}} = \frac{h_i (25 \text{ cm})}{L h_o} \quad 2.27$$

Utilizando la [Ecuación 2.8](#) para el aumento lineal

$$m = -\frac{d_i}{d_o} = \frac{h_i}{h_o}$$

y la ecuación de lentes delgadas

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}$$

en la [Ecuación 2.27](#), llegamos a la siguiente expresión para el aumento angular de una lente de aumento:

$$\begin{aligned} M &= \left(-\frac{d_i}{d_o}\right) \left(\frac{25 \text{ cm}}{L}\right) \\ &= -d_i \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{d_i}\right) \left(\frac{25 \text{ cm}}{L}\right) \\ &= \left(1 - \frac{d_i}{f}\right) \left(\frac{25 \text{ cm}}{L}\right) \end{aligned} \quad 2.28$$

En la parte (b) de la figura, vemos que el valor absoluto de la distancia de imagen es  $|d_i| = L - \ell$ . Tenga en cuenta que  $d_i < 0$  porque la imagen es virtual, por lo que podemos prescindir del valor absoluto insertando explícitamente el signo menos  $-d_i = L - \ell$ . Al insertar esto en la [Ecuación 2.28](#) obtenemos la ecuación final para el aumento angular de una lente de aumento:

$$M = \left(\frac{25 \text{ cm}}{L}\right) \left(1 + \frac{L - \ell}{f}\right) \quad 2.29$$

Tenga en cuenta que todas las cantidades de esta ecuación deben expresarse en centímetros. A menudo, queremos que la imagen esté a la distancia del punto cercano ( $L = 25 \text{ cm}$ ) para obtener el máximo aumento, y mantenemos la lente de aumento cerca del ojo ( $\ell = 0$ ). En este caso, la [Ecuación 2.29](#) resulta en

$$M = 1 + \frac{25 \text{ cm}}{f} \quad 2.30$$

que muestra que el mayor aumento se produce para la lente con la menor distancia focal. Además, cuando la imagen está en la distancia de punto cercano y el objetivo se mantiene cerca del ojo ( $\ell = 0$ ), entonces

$L = d_i = 25 \text{ cm}$  y la [Ecuación 2.27](#) se convierte en

$$M = \frac{h_i}{h_o} = m \quad 2.31$$

donde  $m$  es el aumento lineal ([Ecuación 2.32](#)) derivado para espejos esféricos y lentes delgadas. Otra situación de utilidad es cuando la imagen está en el infinito ( $L = \infty$ ). La [Ecuación 2.29](#) entonces toma la siguiente forma:

$$M(L = \infty) = \frac{25 \text{ cm}}{f} \quad 2.32$$

El aumento resultante es simplemente la relación entre la distancia al punto cercano y la distancia focal de la lente de aumento, por lo que una lente con una distancia focal más corta proporciona un aumento mayor. Aunque este aumento tiene un valor menor que 1 en comparación con el aumento obtenido con la imagen en el punto cercano, lo que permite obtener las condiciones de visión más cómodas, ya que el ojo está relajado al ver un objeto lejano.

Comparando la [Ecuación 2.29](#) con la [Ecuación 2.32](#), vemos que el rango de aumento angular de una lente

convergente dada es

$$\frac{25 \text{ cm}}{f} \leq M \leq 1 + \frac{25 \text{ cm}}{f}. \quad 2.33$$



### EJEMPLO 2.10

#### Aumentar la imagen de un diamante

Un joyero desea inspeccionar un diamante de 3,0 mm de diámetro con una lupa. El diamante se sostiene en el punto cercano del joyero (25 cm), y este sostiene la lente de aumento cerca del ojo.

- (a) ¿Cuál debe ser la distancia focal de la lente de aumento para ver una imagen del diamante de 15 mm de diámetro?
- (b) ¿Cuál debe ser la distancia focal de la lente de aumento para obtener  $10 \times$  de aumento?

#### Estrategia

Hay que determinar el aumento necesario de la lupa. Como el joyero sostiene la lente de aumento cerca de su ojo, podemos utilizar la [Ecuación 2.30](#) para encontrar la distancia focal de la lente de aumento.

#### Solución

- a. El aumento lineal necesario es la relación entre el diámetro deseado de la imagen y el diámetro real del diamante ([Ecuación 2.32](#)). Como el joyero sostiene la lente de aumento cerca de su ojo y la imagen se forma en su punto cercano, el aumento lineal es el mismo que el angular, por lo que

$$M = m = \frac{h_i}{h_o} = \frac{15 \text{ mm}}{3,0 \text{ mm}} = 5,0.$$

La distancia focal  $f$  de la lente de aumento se puede calcular resolviendo la [Ecuación 2.30](#) para  $f$ , lo que resulta en

$$M = 1 + \frac{25 \text{ cm}}{f}$$

$$f = \frac{25 \text{ cm}}{M-1} = \frac{25 \text{ cm}}{5,0-1} = 6,3 \text{ cm}$$

- b. Para obtener una imagen aumentada por un factor de diez, volvemos a resolver la [Ecuación 2.30](#) para  $f$ , pero esta vez utilizamos  $M = 10$ . El resultado es

$$f = \frac{25 \text{ cm}}{M-1} = \frac{25 \text{ cm}}{10-1} = 2,8 \text{ cm}.$$

#### Importancia

Tenga en cuenta que un mayor aumento se consigue utilizando un objetivo con una distancia focal menor. Por lo tanto, hay que utilizar una lente con radios de curvatura que sean unos pocos centímetros inferiores y mantenerla muy cerca del ojo. Esto no es muy conveniente. Un microscopio compuesto, que se explora en la siguiente sección, puede superar este inconveniente.

## 2.8 Microscopios y telescopios

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar la física del funcionamiento de los microscopios y telescopios
- Describir la imagen creada por estos instrumentos y calcular sus aumentos

Los microscopios y los telescopios son instrumentos importantes que han contribuido enormemente a nuestra comprensión actual del mundo micro y macroscópico. La invención de estos dispositivos condujo a numerosos descubrimientos en disciplinas como la física, la astronomía y la biología, por nombrar algunas. En esta sección, explicamos la física básica que hace que estos instrumentos funcionen.

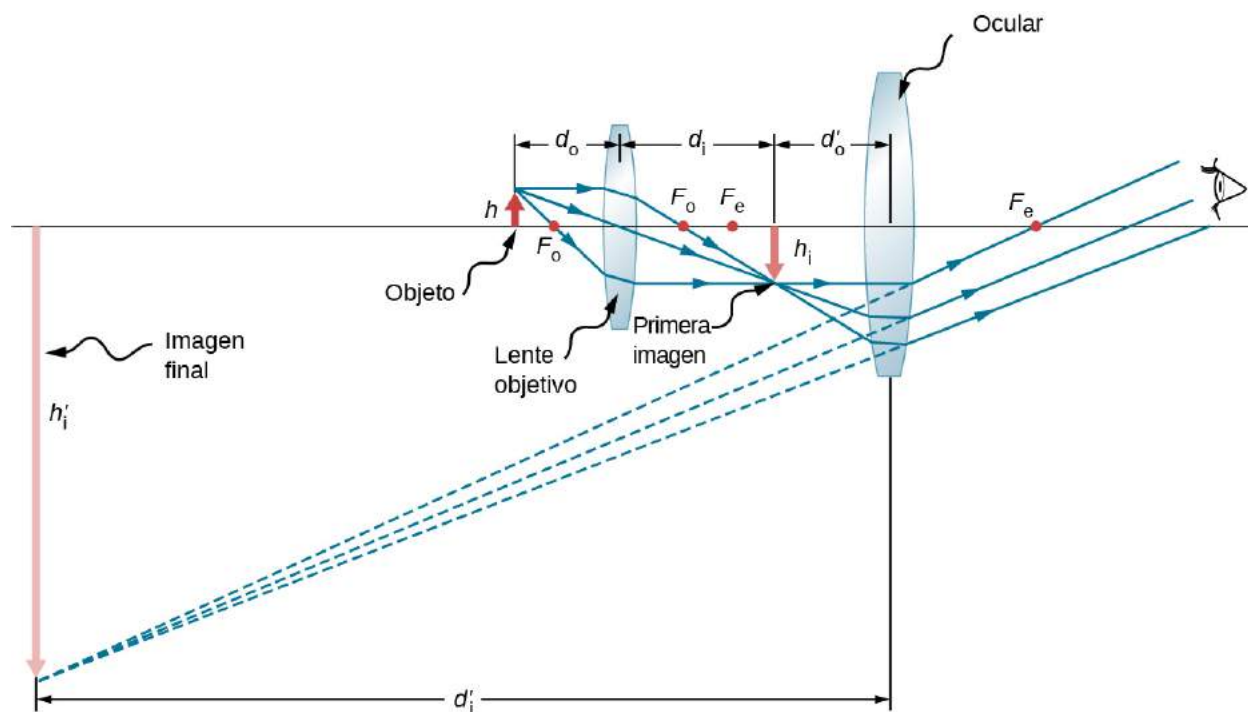


## Microscopios

Aunque el ojo es maravilloso en su capacidad de ver objetos grandes y pequeños, obviamente está limitado en los detalles más pequeños que puede detectar. El deseo de ver más allá de lo que es posible a simple vista condujo al uso de instrumentos ópticos. Hemos visto que una simple lente convexa puede crear una imagen ampliada, pero es difícil conseguir grandes aumentos con una lente de este tipo. Un aumento superior a  $5 \times$  es difícil sin distorsionar la imagen. Para obtener un mayor aumento, podemos combinar la lupa simple con una o varias lentes adicionales. En esta sección, examinamos los microscopios que amplían los detalles que no podemos ver a simple vista.

Los microscopios fueron desarrollados por primera vez a principios de los años 1600 por los fabricantes de anteojos de los Países Bajos y Dinamarca. El **microscopio compuesto** más sencillo se construye a partir de dos lentes convexas (Figura 2.38). La lente **objetivo** es una lente convexa de corta distancia focal (es decir, de alta potencia) con un aumento típico de  $5 \times$  a  $100 \times$ . El **ocular**, también conocido como lente ocular, es una lente convexa de mayor distancia focal.

La finalidad de un microscopio es crear imágenes ampliadas de objetos pequeños, y ambas lentes contribuyen al aumento final. Además, la imagen final ampliada se produce lo suficientemente lejos del observador como para que se pueda ver fácilmente, ya que el ojo no puede enfocar objetos o imágenes que están demasiado cerca (es decir, más cerca que el punto cercano del ojo).



**FIGURA 2.38** Un microscopio compuesto está formado por dos lentes: un objetivo y un ocular. El objetivo forma la primera imagen, que es más grande que el objeto. Esta primera imagen está dentro de la distancia focal del ocular y sirve como objeto para el ocular. El ocular forma la imagen final que se amplía aún más.

Para ver cómo el microscopio en la Figura 2.38 forma una imagen, tenga en cuenta sus dos lentes en sucesión. El objeto está más allá de la distancia focal  $f^{obj}$  de la lente objetivo, produciendo una imagen real e invertida más grande que el objeto. Esta primera imagen sirve de objeto para la segunda lente o el ocular. El ocular se coloca de forma que la primera imagen se encuentre dentro de su distancia focal  $f^{obj}$ , para poder ampliar aún más la imagen. En cierto sentido, actúa como una lupa que amplía la imagen intermedia producida por el objetivo. La imagen producida por el ocular es una imagen virtual ampliada. La imagen final permanece invertida, pero está más lejos del observador que el objeto, lo que facilita su visualización.

El ojo ve la imagen virtual creada por el ocular, que sirve de objeto para el cristalino. La imagen virtual formada por el ocular está muy lejos de la distancia focal del ojo, por lo que el ojo forma una imagen real en la



retina.

El aumento del microscopio es el producto del aumento lineal  $m^{\text{obj}}$  por parte del objetivo y el aumento angular  $M^{\text{ojo}}$  por parte del ocular. Estas vienen dadas por

$$m^{\text{obj}} = -\frac{d_i^{\text{obj}}}{d_o^{\text{obj}}} \approx -\frac{d_i^{\text{obj}}}{f^{\text{obj}}} \quad (\text{aumento lineal por objetivo})$$

$$M^{\text{ojo}} = 1 + \frac{25 \text{ cm}}{f^{\text{ojo}}} \quad (\text{aumento angular por parte del ocular})$$

Aquí,  $f^{\text{obj}}$  y  $f^{\text{ojo}}$  son las distancias focales del objetivo y del ocular, respectivamente. Suponemos que la imagen final se forma en el punto cercano del ojo, proporcionando el mayor aumento. Tome en cuenta que el aumento angular del ocular es el mismo que el obtenido anteriormente para la lupa simple. Esto no debería sorprender, porque el ocular es esencialmente una lupa y aquí se aplica la misma física. El **aumento neto**  $M_{\text{neto}}$  del microscopio compuesto es el producto del aumento lineal del objetivo y el aumento angular del ocular:

$$M_{\text{neto}} = m^{\text{obj}} M^{\text{ojo}} = -\frac{d_i^{\text{obj}} (f^{\text{ojo}} + 25 \text{ cm})}{f^{\text{obj}} f^{\text{ojo}}}. \quad 2.34$$



## EJEMPLO 2.11

### Aumento del microscopio

Calcule el aumento de un objeto situado a 6,20 mm de un microscopio compuesto que tiene un objetivo de 6,00 mm de distancia focal y un ocular de 50,0 mm de distancia focal. El objetivo y el ocular están separados por 23,0 cm.

#### Estrategia

Esta situación es similar a la mostrada en la [Figura 2.38](#). Para hallar el aumento global, debemos conocer el aumento lineal del objetivo y el aumento angular del ocular. Podemos utilizar la [Ecuación 2.34](#), pero necesitamos utilizar la ecuación de lentes delgadas para hallar la distancia de imagen  $d_i^{\text{obj}}$  del objetivo.

#### Solución

Resolviendo la ecuación de lentes delgadas para  $d_i^{\text{obj}}$  obtenemos

$$d_i^{\text{obj}} = \left( \frac{1}{f^{\text{obj}}} - \frac{1}{d_o^{\text{obj}}} \right)^{-1}$$

$$= \left( \frac{1}{6,00 \text{ mm}} - \frac{1}{6,20 \text{ mm}} \right)^{-1} = 186 \text{ mm} = 18,6 \text{ cm}$$

Al insertar este resultado en la [Ecuación 2.34](#) junto con los valores conocidos  $f^{\text{obj}} = 6,00 \text{ mm} = 0,600 \text{ cm}$  y  $f^{\text{ojo}} = 50,0 \text{ mm} = 5,00 \text{ cm}$  obtenemos

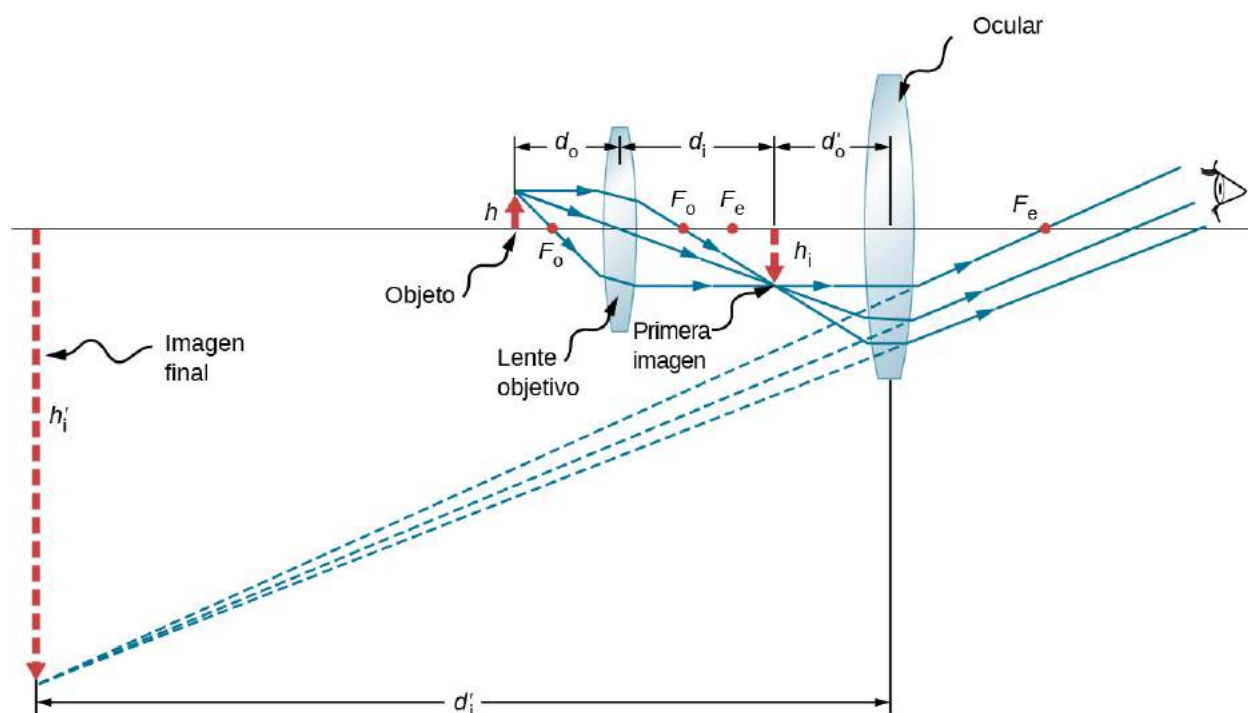
$$M_{\text{neto}} = -\frac{d_i^{\text{obj}} (f^{\text{ojo}} + 25 \text{ cm})}{f^{\text{obj}} f^{\text{ojo}}}$$

$$= -\frac{(18,6 \text{ cm})(5,00 \text{ cm} + 25 \text{ cm})}{(0,600 \text{ cm})(5,00 \text{ cm})}$$

$$= -186$$

#### Importancia

Tanto el objetivo como el ocular contribuyen al aumento global, que es grande y negativo, acorde con la [Figura 2.38](#), donde la imagen se ve grande e invertida. En este caso, la imagen es virtual e invertida, lo que no puede ocurrir para un solo elemento (consulte la [Figura 2.26](#)).



**FIGURA 2.39** Un microscopio compuesto con la imagen creada en el infinito.

A continuación, calculamos la potencia de aumento de un microscopio cuando la imagen está en el infinito, como se muestra en la [Figura 2.39](#), ya que así se consigue una visión más relajada. La potencia de aumento del microscopio es el producto del aumento lineal  $m^{\text{obj}}$  del objetivo y el aumento angular  $M^{\text{ojo}}$  del ocular.

Sabemos que  $m^{\text{obj}} = -d_i^{\text{obj}}/d_o^{\text{obj}}$  y de la ecuación de lentes delgadas obtenemos

$$m^{\text{obj}} = -\frac{d_i^{\text{obj}}}{d_o^{\text{obj}}} = 1 - \frac{d_i^{\text{obj}}}{f^{\text{obj}}} = \frac{f^{\text{obj}} - d_i^{\text{obj}}}{f^{\text{obj}}}. \quad 2.35$$

Si la imagen final está en el infinito, entonces la imagen creada por el objetivo debe estar situada en el punto focal del ocular. Esto puede verse considerando la ecuación de lentes delgadas con  $d_i = \infty$  o recordando que los rayos que pasan por el punto focal salen de la lente paralelos entre sí, lo que equivale a enfocar al infinito. En muchos microscopios, la distancia entre el punto focal del lado de la imagen del objetivo y el punto focal del lado del objeto del ocular está normalizada en  $L = 16$  cm. Esta distancia se denomina longitud del tubo del microscopio. En la [Figura 2.39](#), vemos que  $L = f^{\text{obj}} - d_i^{\text{obj}}$ . Al insertar esto en la [Ecuación 2.35](#) se obtiene

$$m^{\text{obj}} = \frac{L}{f^{\text{obj}}} = \frac{16 \text{ cm}}{f^{\text{obj}}}. \quad 2.36$$

Ahora tenemos que calcular el aumento angular del ocular con la imagen en el infinito. Para ello, tomamos la relación del ángulo  $\theta_{\text{imagen}}$  subtendido por la imagen al ángulo  $\theta_{\text{objeto}}$  subtendido por el objeto en el punto cercano del ojo (esto es lo más cerca que el ojo puede ver el objeto a simple vista y, por lo tanto, esta es la posición donde el objeto formará la imagen más grande en la retina del ojo a simple vista). Al utilizar la [Figura 2.39](#) y trabajar en la aproximación para ángulos pequeños, tenemos  $\theta_{\text{imagen}} \approx h_i^{\text{obj}}/f^{\text{ojo}}$  y  $\theta_{\text{objeto}} \approx h_i^{\text{obj}}/25$  cm, donde  $h_i^{\text{obj}}$  es la altura de la imagen formada por el objetivo, que es el objeto del ocular. Así, el aumento angular del ocular es

$$M^{\text{ojo}} = \frac{\theta_{\text{imagen}}}{\theta_{\text{objeto}}} = \frac{h_i^{\text{obj}}}{f^{\text{ojo}}} \frac{25 \text{ cm}}{h_i^{\text{obj}}} = \frac{25 \text{ cm}}{f^{\text{ojo}}}. \quad 2.37$$

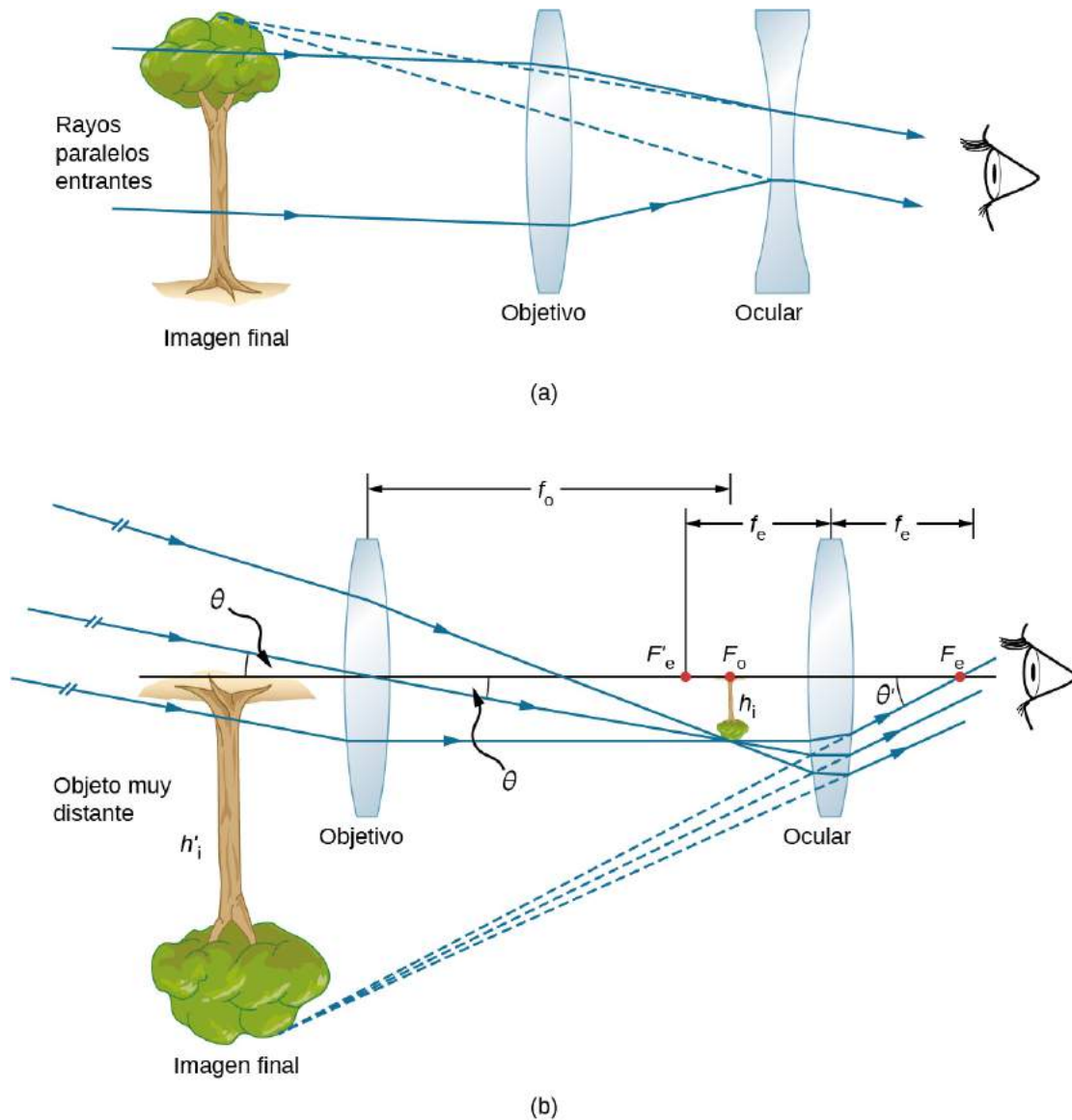
Por lo tanto, la potencia neta de aumento del microscopio compuesto con la imagen en el infinito es

$$M_{\text{neto}} = m^{\text{obj}} M^{\text{ojo}} = -\frac{(16 \text{ cm})(25 \text{ cm})}{f^{\text{obj}} f^{\text{ojo}}}. \quad 2.38$$

Las distancias focales deben estar en centímetros. El signo menos indica que la imagen final está invertida. Tenga en cuenta que las únicas variables de la ecuación son las distancias focales del ocular y del objetivo, lo que hace que esta ecuación sea especialmente útil.

## Telescopios

Los telescopios están pensados para ver objetos lejanos y producen una imagen mayor que la que se produce a simple vista. Los telescopios recogen mucha más luz que el ojo, lo que permite observar los objetos tenues con mayor aumento y mejor resolución. Los telescopios se inventaron en torno al año 1600, y Galileo fue el primero en utilizarlos para estudiar los cielos, con consecuencias monumentales. Observó las lunas de Júpiter, los cráteres y montañas de la Luna, los detalles de las manchas solares y el hecho de que la Vía Láctea está compuesta por un gran número de estrellas individuales.



**FIGURA 2.40** (a) Galileo fabricó telescopios con un objetivo convexo y un ocular cóncavo. Estos producen una imagen vertical y se utilizan en los catalejos. (b) La mayoría de los telescopios refractores simples tienen dos lentes convexas. El objetivo forma una imagen real e invertida en el plano focal del ocular (o justo dentro de él). Esta imagen sirve de objeto para el ocular. El ocular forma una imagen virtual e invertida que se amplía.

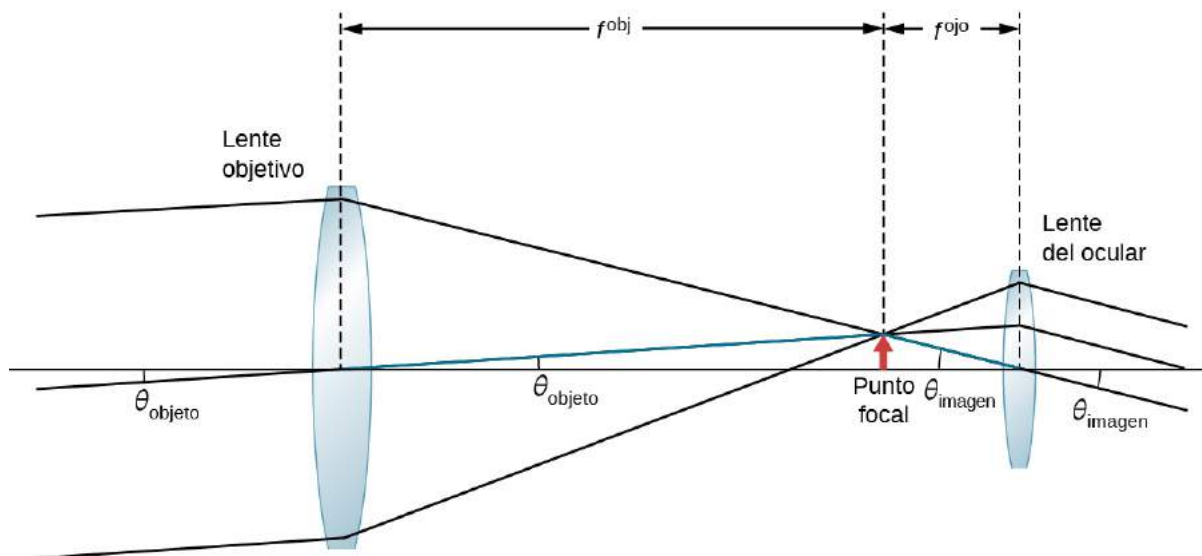
La parte (a) de la [Figura 2.40](#) muestra un telescopio refractor formado por dos lentes. La primera lente, llamada objetivo, forma una imagen real dentro de la distancia focal de la segunda lente, que se llama ocular. La imagen de la lente objetivo sirve de objeto para el ocular, que forma una imagen virtual ampliada que es observada por el ojo. Este diseño es el que utilizó Galileo para observar los cielos.

Aunque la disposición de las lentes en un telescopio refractor es similar a la de un microscopio, existen importantes diferencias. En un telescopio, el objeto real está lejos y la imagen intermedia es más pequeña que el objeto. En un microscopio, el objeto real está muy cerca y la imagen intermedia es más grande que el objeto. Tanto en el telescopio como en el microscopio, el ocular amplía la imagen intermedia; en el telescopio, sin embargo, este es el único aumento.

El telescopio de dos lentes más común se muestra en la parte (b) de la figura. El objeto está tan lejos del telescopio que se encuentra esencialmente en el infinito en comparación con las distancias focales de los objetivos ( $d_o^{\text{obj}} \approx \infty$ ), por lo que los rayos entrantes son esencialmente paralelos y se enfocan en el plano focal. Así, la primera imagen se produce en  $d_i^{\text{obj}} = f^{\text{obj}}$ , como se muestra en la figura, y no es grande en comparación con lo que se podría ver mirando directamente al objeto. Sin embargo, el ocular del telescopio (al igual que el del microscopio) le permite que esta primera imagen parezca más cerca que su punto cercano y así la amplía (al estar cerca de ella, subtendiendo un ángulo mayor desde el ojo y así forma una imagen mayor en su retina). Como en el caso de una lupa simple, el aumento angular de un telescopio es la relación del ángulo subtendido por la imagen  $[\theta_{\text{imagen}}$  en la parte (b)] al ángulo subtendido por el objeto real  $[\theta_{\text{objeto}}$  en la parte (b)]:

$$M = \frac{\theta_{\text{imagen}}}{\theta_{\text{objeto}}}. \quad 2.39$$

Para obtener una expresión para el aumento que implique únicamente los parámetros de la lente, hay que tener en cuenta que el plano focal de la lente objetivo está muy cerca del plano focal del ocular. Si asumimos que estos planos están superpuestos, tenemos la situación que se muestra en la [Figura 2.41](#).



**FIGURA 2.41** El plano focal del objetivo de un telescopio está muy cerca del plano focal del ocular. El ángulo  $\theta_{\text{imagen}}$  subtendido por la imagen vista a través del ocular es mayor que el ángulo  $\theta_{\text{objeto}}$  subtendido por el objeto cuando se ve a simple vista.

Además, suponemos que los ángulos  $\theta_{\text{objeto}}$  y  $\theta_{\text{imagen}}$  son pequeños, por lo que la aproximación para ángulos pequeños se mantiene ( $\tan \theta \approx \theta$ ). Si la imagen formada en el plano focal tiene una altura  $h$ , entonces

$$\theta_{\text{objeto}} \approx \tan \theta_{\text{objeto}} = \frac{h}{f^{\text{obj}}}$$

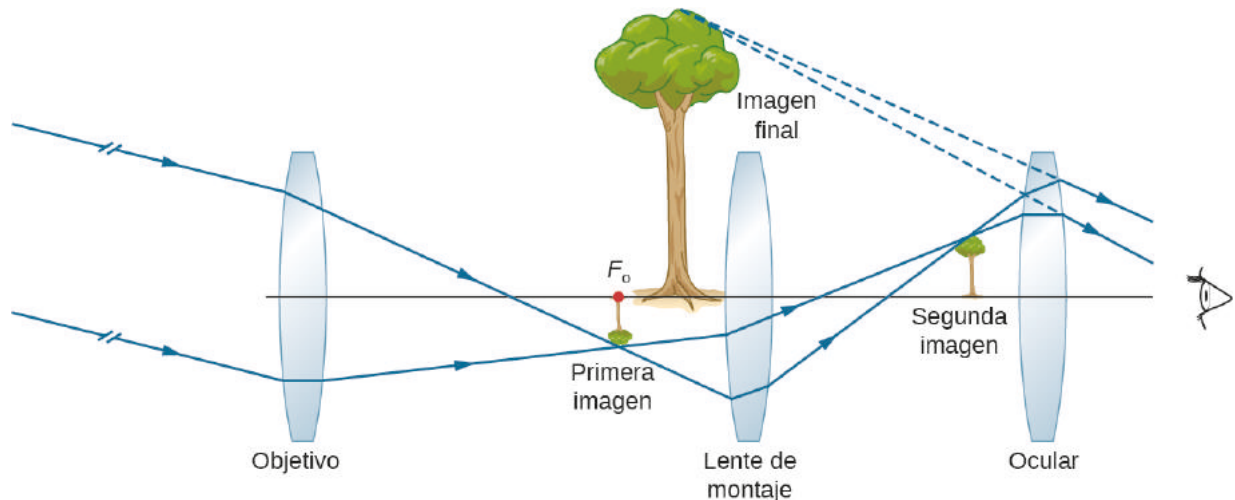
$$\theta_{\text{imagen}} \approx \tan \theta_{\text{imagen}} = \frac{-h}{f^{\text{ojo}}}$$

donde el signo menos se introduce porque la altura es negativa si medimos ambos ángulos en el sentido contrario a las agujas del reloj. Al insertar estas expresiones en la [Ecuación 2.39](#) se obtiene

$$M = \frac{-h_i}{f_{\text{objo}}} \frac{f_{\text{obj}}}{h_i} = -\frac{f_{\text{obj}}}{f_{\text{objo}}}. \quad 2.40$$

Así, para obtener el mayor aumento angular, lo mejor es tener un objetivo con una distancia focal larga y un ocular con una distancia focal corta. Cuanto mayor sea el aumento angular  $M$ , más grande parecerá un objeto cuando se vea a través de un telescopio, lo que hace que más detalles sean visibles. Los límites de los detalles observables vienen impuestos por muchos factores, como la calidad de las lentes y las perturbaciones atmosféricas. Los oculares típicos tienen distancias focales de 2,5 cm o 1,25 cm. Si el objetivo del telescopio tiene una distancia focal de 1 metro, estos oculares dan lugar a aumentos de  $40 \times$  y  $80 \times$ , respectivamente. Así, los aumentos angulares hacen que la imagen parezca 40 u 80 veces más cercana que el objeto real.

El signo menos en el aumento indica que la imagen está invertida, lo que no tiene importancia para la observación de las estrellas, pero es un verdadero problema para otras aplicaciones, como los telescopios de los barcos o las miras telescópicas. Si se necesita una imagen vertical, se puede utilizar la disposición de Galileo en la parte (a) de la [Figura 2.40](#). Pero una disposición más común es utilizar una tercera lente convexa como ocular, aumentando la distancia entre las dos primeras e invirtiendo la imagen una vez más, como se ve en la [Figura 2.42](#).



**FIGURA 2.42** Esta disposición de tres lentes en un telescopio produce una imagen final vertical. Las dos primeras lentes están lo suficientemente separadas como para que la segunda invierta la imagen de la primera. La tercera lente actúa como lupa y mantiene la imagen en posición vertical y en un lugar fácil de observar.

El mayor telescopio refractor del mundo es el telescopio Yerkes, de 40 pulgadas (o 101 cm) de diámetro, situado en el lago Geneva, Wisconsin ([Figura 2.43](#)), y dirigido por la Universidad de Chicago.

Es muy difícil y caro construir grandes telescopios refractores. Se necesitan grandes lentes sin defectos, lo que en sí mismo es una tarea técnicamente exigente. Un telescopio refractor se parece básicamente a un tubo con una estructura de soporte para girarlo en diferentes direcciones. Los telescopios refractores tienen varios problemas. La aberración de las lentes hace que la imagen sea borrosa. Además, al aumentar el grosor de las lentes, se absorbe más luz, lo que dificulta la observación de las estrellas débiles. Las lentes grandes también son muy pesadas y se deforman por su propio peso. Algunos de estos problemas de los telescopios refractores se solucionan evitando la refracción para recoger la luz y utilizando en su lugar un espejo curvo, tal y como lo diseñó Isaac Newton. Estos telescopios se denominan telescopios reflectores.

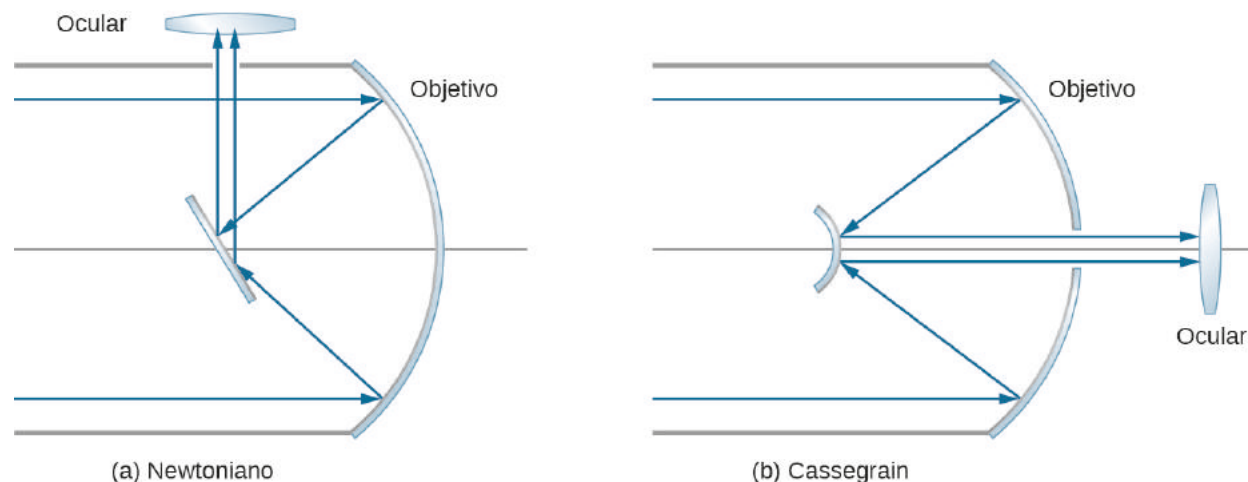


**FIGURA 2.43** En 1897, el Observatorio Yerkes de Wisconsin (EE.UU.) construyó un gran telescopio refractor con una lente objetivo de 40 pulgadas (o 101 cm) de diámetro y una longitud de tubo de 62 pies (o 18,89 metros). (crédito: Observatorio Yerkes, Universidad de Chicago)

### Telescopios reflectores

Isaac Newton diseñó el primer telescopio reflector hacia 1670 para resolver el problema de la aberración cromática que se produce en todos los telescopios refractores. En la aberración cromática, la luz de diferentes colores se refracta en cantidades ligeramente diferentes en la lente. Como consecuencia, aparece un arcoíris alrededor de la imagen y la misma se ve borrosa. En el telescopio reflector, los rayos de luz procedentes de una fuente lejana inciden sobre la superficie de un espejo cóncavo fijado en el extremo inferior del tubo. El uso de un espejo en lugar de un objetivo elimina la aberración cromática. El espejo cóncavo enfoca los rayos en su plano focal. El problema de diseño es cómo observar la imagen enfocada. Newton utilizó un diseño en el que la luz enfocada del espejo cóncavo se reflejaba hacia un lado del tubo en un ocular [parte (a) de la [Figura 2.44](#)]. Esta disposición es común en muchos telescopios de aficionados y se denomina **diseño newtoniano**.

Algunos telescopios reflejan la luz hacia el centro del espejo cóncavo utilizando un espejo convexo. En esta disposición, el espejo cóncavo que recoge la luz tiene un agujero en el centro [parte (b) de la figura]. La luz incide entonces en una lente del ocular. Esta disposición del objetivo y del ocular se denomina **diseño de Cassegrain**. La mayoría de los grandes telescopios, incluido el telescopio espacial Hubble, tienen este diseño. También son posibles otras disposiciones. En algunos telescopios, se coloca un detector de luz justo en el punto donde la luz es enfocada por el espejo curvo.



**FIGURA 2.44** Telescopios reflectores: (a) En el diseño newtoniano, el ocular está situado en el lateral del telescopio; (b) en el diseño de Cassegrain, el ocular está situado más allá de un agujero en el espejo primario.



La mayoría de los telescopios de investigación astronómica son ahora del tipo reflector. Uno de los primeros grandes telescopios de este tipo es el telescopio Hale, de 200 pulgadas (o 5 metros), construido en el monte Palomar, en el sur de California, que tiene un espejo de 200 pulgadas (o 5,08 metros) de diámetro. Uno de los mayores telescopios del mundo es el telescopio Keck, de 10 metros, situado en el Observatorio Keck, en la cima del volcán inactivo Mauna Kea, en Hawái. El Observatorio Keck opera dos telescopios de 10 metros. Ninguno de ellos es de un solo espejo, sino que están formados por 36 espejos hexagonales. Además, los dos telescopios del Keck pueden trabajar juntos, lo que aumenta su potencia hasta un espejo eficaz de 85 metros. El telescopio Hubble ([Figura 2.45](#)) es otro gran telescopio reflector con un espejo primario de 2,4 metros de diámetro. El Hubble fue puesto en órbita alrededor de la Tierra en 1990.



**FIGURA 2.45** El telescopio espacial Hubble visto desde el transbordador espacial Discovery (crédito: modificación de un trabajo de la NASA)

El aumento angular  $M$  de un telescopio reflector también viene dado por la [Ecuación 2.36](#). Para un espejo esférico, la distancia focal es la mitad del radio de curvatura, por lo que hacer un espejo objetivo grande no solo ayuda al telescopio a recoger más luz, sino que también incrementa el aumento de la imagen.



## Revisión Del Capítulo

### Términos Clave

**aberración** distorsión en una imagen causada por desviaciones de la aproximación para ángulos pequeños

**aberración esférica** la distorsión de la imagen formada por un espejo esférico cuando los rayos no están enfocados todos en el mismo punto

**acomodación** uso de los músculos ciliares para ajustar la forma del cristalino para enfocar objetos cercanos o lejanos

**aproximación de lentes delgadas** supuesto de que la lente es muy delgada en comparación con la primera distancia de imagen

**aproximación para ángulos pequeños** la aproximación que es válida cuando el tamaño de un espejo esférico es significativamente menor que el radio del espejo; en esta aproximación, la aberración esférica es despreciable y el espejo tiene un punto focal bien definido

**aumento** relación entre el tamaño de la imagen y el tamaño del objeto

**aumento angular** relación entre el ángulo subtendido por un objeto observado con una lupa y el observado a simple vista

**aumento lineal** la relación entre la altura de la imagen y la altura del objeto

**aumento neto** ( $M_{\text{neto}}$ ) del microscopio compuesto es el producto del aumento lineal del objetivo y el aumento angular del ocular

**coma** similar a la aberración esférica, pero se produce cuando los rayos entrantes no son paralelos al eje óptico

**Diseño de Cassegrain** disposición de un objetivo y un ocular de forma que el espejo cóncavo de captación de luz tenga un agujero en el centro, y la luz incida entonces en una lente del ocular

**Diseño newtoniano** disposición de un objetivo y un ocular de tal manera que la luz enfocada del espejo cóncavo se refleja hacia un lado del tubo en un ocular

**dispositivo de carga acoplada (CCD)** chip semiconductor que convierte una imagen luminosa en pequeños píxeles que pueden convertirse en señales electrónicas de color e intensidad

**distancia de imagen** distancia de la imagen al eje central del elemento óptico que produce la imagen

**distancia del objeto** distancia del objeto al eje central del elemento óptico que produce su imagen

**distancia focal** distancia a lo largo del eje óptico desde el punto focal hasta el elemento óptico que enfoca los rayos de luz

**eje óptico** el eje en torno al cual el espejo es rotacionalmente simétrico; se puede girar el espejo en torno a este eje sin cambiar nada

**espejo cóncavo** espejo esférico con su superficie reflectante en la cara interna de la esfera; el espejo forma una "cueva"

**espejo convexo** espejo esférico con su superficie reflectante en la cara exterior de la esfera

**espejo curvo** espejo formado por una superficie curva, como la esférica, la elíptica o la parabólica

**espejo plano** superficie reflectante plana

**hipermetropía (o hiperopía)** defecto visual en el que los objetos cercanos aparecen borrosos porque sus imágenes se enfocan detrás de la retina en lugar de en la retina; una persona hipermetrope puede ver claramente los objetos lejanos pero los cercanos aparecen borrosos

**imagen real** imagen que se puede proyectar en una pantalla porque los rayos la atraviesan físicamente

**imagen virtual** imagen que no se puede proyectar en una pantalla porque los rayos no atraviesan físicamente la imagen, solo parecen originarse en ella

**lente convergente (o convexa)** lente en la que los rayos de luz que entran en ella en paralelo convergen en un único punto en el lado opuesto

**lente divergente (o cóncava)** lente que hace que los rayos de luz se desvíen de su eje óptico

**lupa simple (o lupa)** lente convergente que produce una imagen virtual de un objeto que está dentro de la distancia focal de la lente

**microscopio compuesto** microscopio construido a partir de dos lentes convexas, la primera de las cuales sirve de ocular y la segunda de objetivo

**miopía** defecto visual en el que los objetos lejanos aparecen borrosos porque sus imágenes se enfocan delante de la retina en lugar de en la retina; una persona miope puede ver claramente los objetos cercanos pero los lejanos aparecen borrosos

**objetivo** lente más cercana al objeto que se examina.

**ocular** lente o combinación de lentes en un instrumento óptico más cercano al ojo del observador

**plano focal** plano que contiene el punto focal y es

perpendicular al eje óptico

**potencia óptica** ( $P$ ) el inverso de la distancia focal de un objetivo, con la distancia focal expresada en metros. La potencia óptica  $P$  de una lente se expresa en unidades de dioptrías  $D$ ; es decir,  $1D = 1/m = 1 \text{ m}^{-1}$

**primer foco o foco del objeto** objeto situado en este punto dará lugar a una imagen creada en el infinito en el lado opuesto de una interfase esférica entre dos medios

**profundidad aparente** profundidad a la que se percibe un objeto con respecto a una interfase entre dos medios

**punto cercano** punto más cercano que un ojo puede ver enfocado

**punto focal** para una lente o un espejo convergente, el punto en el que se cruzan los rayos luminosos convergentes; para una lente o

un espejo divergente, el punto en el que parecen originarse los rayos luminosos divergentes

**punto lejano** punto más lejano que un ojo puede ver enfocado

**segundo foco o enfoque de la imagen** para una interfase convergente, el punto en el que se enfoca un haz de rayos paralelos que se refractan en una interfase esférica; para una interfase divergente, el punto en el que la prolongación hacia atrás de los rayos refractados convergerá entre dos medios

**trazado de rayos** técnica que utiliza construcciones geométricas para encontrar y caracterizar la imagen formada por un sistema óptico

**vértice** el punto de intersección de la superficie del espejo con el eje óptico

## Ecuaciones Clave

Distancia de imagen en un espejo plano

$$d_o = -d_i$$

Distancia focal para un espejo esférico

$$f = \frac{R}{2}$$

Ecuación del espejo

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}$$

Aumento de un espejo esférico

$$m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o}$$

Convención de signos para los espejos

Distancia focal  $f$

+ para espejo cóncavo  
– para espejo convexo

Distancia del objeto  $d_o$

+ para el objeto real  
– para el objeto virtual

Distancia de imagen  $d_i$

+ para la imagen real  
– para la imagen virtual

Aumento  $m$

+ para la imagen vertical  
– para la imagen invertida

Ecuación de la profundidad aparente

$$h_i = \left( \frac{n_2}{n_1} \right) h_o$$

Ecuación de la interfase esférica

$$\frac{n_1}{d_o} + \frac{n_2}{d_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

La ecuación de lentes delgadas

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}$$

La ecuación del fabricante de lentes	$\frac{1}{f} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$
El aumento $m$ de un objeto	$m \equiv \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o}$
Potencia óptica	$P = \frac{1}{f}$
Potencia óptica de las lentes delgadas y poco espaciadas	$P_{\text{total}} = P_{\text{lente1}} + P_{\text{lente2}} + P_{\text{lente3}} + \dots$
Aumento angular $M$ de una lupa simple	$M = \frac{\theta_{\text{imagen}}}{\theta_{\text{objeto}}}$
Aumento angular de un objeto a una distancia $L$ del ojo para una lente convexa de distancia focal $f$ mantenida a una distancia $\ell$ del ojo	$M = \left( \frac{25 \text{ cm}}{L} \right) \left( 1 + \frac{L-\ell}{f} \right)$
Rango de aumento angular para una lente dada para una persona con un punto cercano de 25 cm	$\frac{25 \text{ cm}}{f} \leq M \leq 1 + \frac{25 \text{ cm}}{f}$
Aumento neto del microscopio compuesto	$M_{\text{neto}} = m^{\text{obj}} M^{\text{ojo}} = -\frac{d_i^{\text{obj}} (f^{\text{ojo}} + 25 \text{ cm})}{f^{\text{obj}} f^{\text{ojo}}}$

## Resumen

### 2.1 Imágenes formadas por espejos planos

- Un espejo plano siempre forma una imagen virtual (detrás del espejo).
- La imagen y el objeto están a la misma distancia de un espejo plano, el tamaño de la imagen es el mismo que el del objeto y la imagen está en posición vertical.

### 2.2 Espejos esféricos

- Los espejos esféricos pueden ser cóncavos (convergentes) o convexos (divergentes).
- La distancia focal de un espejo esférico es la mitad de su radio de curvatura  $f = R/2$ .
- La ecuación del espejo y el trazado de rayos permiten dar una descripción completa de una imagen formada por un espejo esférico.
- La aberración esférica se produce en los espejos esféricos pero no en los parabólicos; la aberración comática se produce en ambos tipos de espejos.

### 2.3 Imágenes formadas por refracción

Esta sección explica cómo una interfase refractante única forma imágenes.

- Cuando se observa un objeto a través de una interfase plana entre dos medios, entonces

- aparece a una distancia aparente  $h_i$  que difiere de la distancia real  $h_o$ :  $h_i = (n_2/n_1)h_o$ .
- Una imagen se forma por la refracción de la luz en una interfase esférica entre dos medios de índices de refracción  $n_1$  y  $n_2$ .
- La distancia de la imagen depende del radio de curvatura de la interfase, la ubicación del objeto y los índices de refracción de los medios.

### 2.4 Lentes delgadas

- Existen dos tipos de lentes: convergentes y divergentes. Una lente que hace que los rayos de luz se curven hacia su eje óptico es una lente convergente y si los rayos de luz se alejan de su eje óptico es una lente divergente.
- Para una lente convergente, el punto focal es el lugar donde los rayos de luz se cruzan (o convergen); para una lente divergente, el punto focal es el punto desde el que los rayos de luz parecen originarse (o divergen).
- La distancia desde el centro de una lente delgada hasta su punto focal se denomina distancia focal  $f$ .
- El trazado de rayos es una técnica geométrica para determinar las trayectorias que siguen los rayos de luz a través de lentes delgadas.
- Una imagen real se puede proyectar en una

pantalla.

- Una imagen virtual no puede proyectarse en una pantalla.
- Una lente convergente forma imágenes reales o virtuales, según la ubicación del objeto; una lente divergente solo forma imágenes virtuales.

## 2.5 El ojo

- La formación de imágenes por parte del ojo se describe adecuadamente mediante la ecuación de lentes delgadas.
- El ojo produce una imagen real en la retina ajustando su distancia focal en un proceso llamado acomodación.
- La miopía es la incapacidad de ver objetos lejanos y se corrige con una lente divergente para reducir la potencia óptica del ojo.
- La hipermetropía o hiperopía es la incapacidad de ver objetos cercanos y se corrige con una lente convergente para aumentar la potencia óptica del ojo.
- En el caso de la miopía y la hiperopía, las lentes correctoras producen imágenes a distancias que se encuentran entre los puntos cercanos y lejanos de la persona, de modo que las imágenes pueden verse con claridad.

## 2.6 La cámara

- Las cámaras utilizan combinaciones de objetivos para crear una imagen para la grabación.
- La fotografía digital se basa en dispositivos de carga acoplada (CCD) que dividen una imagen en diminutos “píxeles” que pueden convertirse en señales electrónicas.

## 2.7 La lupa simple

- Una lupa simple es una lente convergente y produce una imagen virtual aumentada de un objeto situado dentro de la distancia focal de la lente.
- El aumento angular representa el aumento de una imagen creada por una lupa. Es igual a la relación entre el ángulo subtendido por la imagen y el subtendido por el objeto cuando este se observa sin lupa.
- El aumento angular es mayor para las lentes de aumento con menor distancia focal.
- Las lupas simples pueden producir hasta diez

veces ( $10 \times$ ) de aumento.

## 2.8 Microscopios y telescopios

- Muchos dispositivos ópticos contienen más de una lente o espejo. Se analizan considerando cada elemento de forma secuencial. La imagen formada por la primera es el objeto de la segunda y así sucesivamente. Las mismas técnicas de trazado de rayos y de las lentes delgadas desarrolladas en las secciones anteriores se aplican a cada elemento de la lente.
- El aumento global de un sistema de elementos múltiples es el producto de los aumentos lineales de sus elementos individuales por el aumento angular del ocular. Para un sistema de dos elementos con un objetivo y un ocular, este aumento es

$$M = m^{\text{obj}} M^{\text{ojo}}, \quad 2.41$$

donde  $m^{\text{obj}}$  es el aumento lineal del objetivo y  $M^{\text{ojo}}$  es el aumento angular del ocular.

- El microscopio es un sistema de elementos múltiples que contiene más de una lente o espejo. Nos permite ver detalles que no podríamos ver a simple vista. Tanto el ocular como el objetivo contribuyen al aumento. El aumento de un microscopio compuesto con la imagen en el infinito es

$$M_{\text{neto}} = -\frac{(16 \text{ cm})(25 \text{ cm})}{f^{\text{obj}} f^{\text{ojo}}}. \quad 2.42$$

En esta ecuación, 16 cm es la distancia normalizada entre el punto focal del lado de la imagen de la lente del objetivo y el punto focal del lado del objeto del ocular, 25 cm es la distancia normal del punto cercano,  $f^{\text{obj}}$  y  $f^{\text{ojo}}$  son las distancias focales del objetivo y del ocular, respectivamente.

- Se pueden hacer telescopios sencillos con dos lentes. Se utilizan para ver objetos a grandes distancias.
- El aumento angular  $M$  de un telescopio viene dado por

$$M = -\frac{f^{\text{obj}}}{f^{\text{ojo}}}, \quad 2.43$$

donde  $f^{\text{obj}}$  y  $f^{\text{ojo}}$  son las distancias focales del objetivo y del ocular, respectivamente.

## Preguntas Conceptuales

### 2.1 Imágenes formadas por espejos planos

1. ¿Cuáles son las diferencias entre las imágenes reales y las virtuales? ¿Cómo se puede saber (al mirar) si una imagen formada por una lente o un espejo es real o virtual?
2. ¿Puede ver una imagen virtual? Explique su respuesta.
3. ¿Puede fotografiar una imagen virtual?
4. ¿Puede proyectar una imagen virtual en una pantalla?
5. ¿Es necesario proyectar una imagen real en una pantalla para verla?
6. Organice una disposición de espejos que le permita verse la parte posterior de la cabeza. ¿Cuál es el número mínimo de espejos necesarios para esta tarea?
7. Si desea verse todo el cuerpo en un espejo plano (de la cabeza a los pies), ¿qué altura debe tener el espejo? ¿El tamaño del espejo depende de la distancia de usted con respecto a este? Haga un boceto.

### 2.2 Espejos esféricos

8. ¿A qué distancia se encuentra siempre una imagen: a  $d_o$ ,  $d_i$ , o  $f$ ?
9. ¿En qué circunstancias se situará una imagen en el punto focal de una lente esférica o un espejo?
10. ¿Qué se entiende por un aumento negativo? ¿Qué se entiende por un aumento cuyo valor absoluto es inferior a uno?
11. ¿Puede una imagen ser más grande que el objeto aunque su aumento sea negativo? Explique.

### 2.3 Imágenes formadas por refracción

12. Derive la fórmula de la profundidad aparente de un pez en una pecera utilizando la ley de Snell.
13. Utilice una regla y un transportador para encontrar la imagen por refracción en los siguientes casos. Supongamos una interfase aire-vidrio. Utilice un índice de refracción de 1 para el aire y de 1,5 para el vidrio. (*Pista:* Utilice la ley de Snell en la interfase)
  - (a) Un objeto puntual situado en el eje de una interfase cóncava ubicado en un punto dentro de la distancia focal desde el vértice.
  - (b) Un objeto puntual situado en el eje de una interfase cóncava ubicado en un punto más alejado de la distancia focal del vértice.
  - (c) Un objeto puntual situado en el eje de una

interfase convexa, ubicado en un punto dentro de la distancia focal desde el vértice.

- (d) Un objeto puntual situado en el eje de una interfase convexa, ubicado en un punto más alejado que la distancia focal del vértice.
- (e) Repita (a)-(d) para un objeto puntual fuera del eje.

### 2.4 Lentes delgadas

14. Se puede argumentar que un trozo de vidrio plano, como el de una ventana, es como una lente con una distancia focal infinita. Si es así, ¿dónde se forma la imagen? Es decir, ¿cómo se relacionan  $d_i$  y  $d_o$ ?
15. Cuando se enfoca una cámara, se ajusta la distancia del objetivo a la película. Si el objetivo de la cámara actúa como una lente delgada, ¿por qué no puede estar a una distancia fija de la película tanto para los objetos cercanos como para los lejanos?
16. Una lente delgada tiene dos puntos focales, uno a cada lado de la lente a igual distancia de su centro, y debe comportarse igual para la luz que entra por cualquiera de los dos lados. Mire hacia atrás y hacia adelante a través de unos anteojos y comente si son de cristales delgados.
17. ¿Cambiará la distancia focal de un objetivo cuando se sumerge en el agua? Explique.

### 2.5 El ojo

18. Si se extrae el cristalino del ojo de una persona a causa de las cataratas (como se ha hecho desde la antigüedad), ¿por qué se espera que se prescriba un antejo de aproximadamente 16 D?
19. Cuando se proyecta luz láser en un ojo relajado de visión normal para reparar un desgarro soldando la retina a la parte posterior del ojo, los rayos que entran en el ojo deben ser paralelos. ¿Por qué?
20. ¿Por qué la visión es tan borrosa cuando abres los ojos mientras nadas bajo el agua? ¿Cómo permite una mascarilla una visión clara?
21. Se ha convertido en algo habitual sustituir el cristalino nublado por cataratas con una lente interna. Esta lente intraocular puede elegirse para que la persona tenga una visión lejana perfecta. ¿Podrá la persona leer sin anteojos? Si la persona era miope, ¿la potencia de la lente intraocular es mayor o menor que la de la lente extraída?

22. Si hay que remodelar la córnea (puede hacerse quirúrgicamente o con lentes de contacto) para corregir la miopía, ¿hay que aumentar o reducir su curvatura? Explique.

### 2.8 Microscopios y telescopios

23. La óptica geométrica describe la interacción de la luz con los objetos macroscópicos. ¿Por qué, entonces, es correcto utilizar la óptica geométrica para analizar la imagen de un

microscopio?

24. La imagen producida por el microscopio en la [Figura 2.38](#) no puede proyectarse. ¿Podrían proyectarse en lentes o espejos adicionales? Explique.
25. Si quiere que su microscopio o telescopio proyecte una imagen real en una pantalla, ¿cómo cambiaría la colocación del ocular con respecto al objetivo?

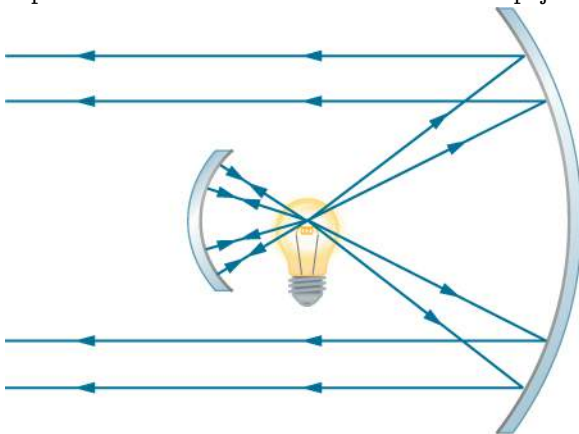
## Problemas

### 2.1 Imágenes formadas por espejos planos

26. Considere un par de espejos planos que se colocan de manera que formen un ángulo de  $120^\circ$ . Se coloca un objeto en la bisectriz entre los espejos. Construya un diagrama de rayos como en la [Figura 2.4](#) para mostrar cuántas imágenes se forman.
27. Considere un par de espejos planos que están colocados de manera que forman un ángulo de  $60^\circ$ . Se coloca un objeto en la bisectriz entre los espejos. Construya un diagrama de rayos como en la [Figura 2.4](#) para mostrar cuántas imágenes se forman.
28. Utilizando más de un espejo plano, construya un diagrama de rayos que muestre cómo crear una imagen invertida.

### 2.2 Espejos esféricos

29. La siguiente figura muestra una bombilla entre dos espejos esféricos. Uno de los espejos produce un haz de luz con rayos paralelos; el otro impide que la luz se escape sin ser introducida en el haz. ¿Dónde está el filamento de la luz en relación con el punto focal o radio de curvatura de cada espejo?



30. ¿Por qué se suelen utilizar espejos divergentes para los retrovisores de los vehículos? ¿Cuál es

la principal desventaja de utilizar un espejo de este tipo en comparación con uno plano?

31. Algunas cámaras de teleobjetivo utilizan un espejo en lugar de un objetivo. ¿Qué radio de curvatura de espejo se necesita para sustituir un teleobjetivo de 800 mm de distancia focal?
32. Calcule la distancia focal de un espejo formado por el dorso brillante de una cuchara que tiene un radio de curvatura de 3,00 cm.
33. Los calefactores eléctricos de ambiente utilizan un espejo cóncavo para reflejar la radiación infrarroja (infrared, IR) de las bobinas calientes. Tenga en cuenta que la radiación IR sigue la misma ley de reflexión que la luz visible. Dado que el espejo tiene un radio de curvatura de 50,0 cm y produce una imagen de las bobinas a 3,00 m del espejo, ¿dónde están las bobinas?
34. Encuentre el aumento del elemento calefactor en el problema anterior. Tenga en cuenta que su gran magnitud ayuda a propagar la energía reflejada.
35. ¿Cuál es la distancia focal de un espejo de maquillaje que produce un aumento de 1,50 cuando la cara de una persona está a 12,0 cm de distancia? Muestre explícitamente cómo sigue los pasos en la [Espejos esféricos](#).
36. Un comprador situado a 3,00 m de un espejo convexo de seguridad ve su imagen con un aumento de 0,250. (a) ¿Dónde está su imagen? (b) ¿Cuál es la distancia focal del espejo? (c) ¿Cuál es su radio de curvatura?
37. Un objeto de 1,50 cm de altura se mantiene a 3,00 cm de la córnea de una persona, y su imagen reflejada se mide a 0,167 cm de altura. (a) ¿Cuál es el aumento? (b) ¿Dónde está la imagen? (c) Encuentre el radio de curvatura del espejo convexo formado por la córnea. (Tenga en cuenta que esta técnica es utilizada por los optometristas para medir la curvatura de la córnea para la adaptación de las lentes de



contacto. El instrumento utilizado se llama queratómetro o medidor de curvas)

38. El trazado de rayos para un espejo plano muestra que la imagen se encuentra a una distancia detrás del espejo igual a la distancia del objeto al espejo. Esto se expresa como  $d_i = -d_o$ , dado que se trata de una distancia de imagen negativa (es una imagen virtual). ¿Cuál es la distancia focal de un espejo plano?
39. Demuestra que, para un espejo plano,  $h_i = h_o$ , dado que la imagen está a la misma distancia detrás del espejo que la distancia del objeto al espejo.
40. Utiliza la ley de reflexión para demostrar que la distancia focal de un espejo es la mitad de su radio de curvatura. Es decir, demostrar que  $f = R/2$ . Tenga en cuenta que esto es cierto para un espejo esférico solo si su diámetro es pequeño en comparación con su radio de curvatura.
41. Refiriéndose al calentador eléctrico de la habitación considerado en el problema 5, calcule la intensidad de la radiación IR en  $\text{W/m}^2$  proyectada por el espejo cóncavo sobre una persona a 3,00 m de distancia. Supongamos que el elemento calefactor irradia 1500 W y tiene una superficie de  $100 \text{ cm}^2$ , y que la mitad de la potencia radiada es reflejada y enfocada por el espejo.
42. Dos espejos están inclinados en un ángulo de  $60^\circ$  y se coloca un objeto en un punto equidistante de los dos espejos. Utilice un transportador para dibujar los rayos con precisión y localizar todas las imágenes. Es posible que tenga que dibujar varias figuras para que los rayos de las diferentes imágenes no saturen su dibujo.
43. Dos espejos paralelos están uno frente al otro y separados por una distancia de 3 cm. Se coloca un objeto puntual entre los espejos a 1 cm de uno de ellos. Encuentre las coordenadas de todas las imágenes.

### 2.3 Imágenes formadas por refracción

44. Un objeto se encuentra en el aire a 30 cm del vértice de una superficie cóncava de vidrio con un radio de curvatura de 10 cm. ¿Dónde se forma la imagen por refracción y cuál es su aumento? Utilice  $n_{\text{aire}} = 1$  y  $n_{\text{vidrio}} = 1,5$ .
45. Un objeto se encuentra en el aire a 30 cm del vértice de una superficie convexa de vidrio con un radio de curvatura de 80 cm. ¿Dónde se forma la imagen por refracción y cuál es su

aumento?

46. Un objeto se encuentra en el agua a 15 cm del vértice de una superficie cóncava de vidrio con un radio de curvatura de 10 cm. ¿Dónde se forma la imagen por refracción y cuál es su aumento? Utilice  $n_{\text{agua}} = 4/3$  y  $n_{\text{vidrio}} = 1,5$ .
47. Un objeto se encuentra en el agua a 30 cm del vértice de una superficie convexa de plexiglás con un radio de curvatura de 80 cm. ¿Dónde se forma la imagen por refracción y cuál es su aumento?  $n_{\text{agua}} = 4/3$  y  $n_{\text{plexiglás}} = 1,65$ .
48. Un objeto se encuentra en el aire a 5 cm del vértice de una superficie cóncava de vidrio con un radio de curvatura de 20 cm. ¿Dónde se forma la imagen por refracción y cuál es su aumento? Utilice  $n_{\text{aire}} = 1$  y  $n_{\text{vidrio}} = 1,5$ .
49. Derive la ecuación de la interfase esférica para la refracción en una superficie cóncava. (Pista: Siga la derivación del texto para la superficie convexa)

### 2.4 Lentes delgadas

50. ¿A qué distancia debe estar la película de una cámara, si el objetivo tiene una distancia focal de 35,0 mm y se está utilizando para fotografiar una flor a 75,0 cm de distancia? Muestre explícitamente cómo sigue los pasos en la [Lentes](#).
51. Un determinado proyector de diapositivas tiene un objetivo de 100 mm de distancia focal. (a) ¿A qué distancia se encuentra la pantalla si una diapositiva se coloca a 103 mm del objetivo y produce una imagen nítida? (b) Si la diapositiva mide 24,0 por 36,0 mm, ¿cuáles son las dimensiones de la imagen? Muestre explícitamente cómo sigue los pasos en la [Lentes](#).
52. Un médico examina un lunar con una lupa de 15,0 cm de distancia focal mantenida a 13,5 cm del lunar. (a) ¿Dónde está la imagen? (b) ¿Cuál es su aumento? (c) ¿Qué tamaño tiene la imagen de un lunar de 5,00 mm de diámetro?
53. Se está utilizando una cámara con un objetivo de 50,0 mm de distancia focal para fotografiar a una persona que está de pie a 3,00 m de distancia. (a) ¿A qué distancia del objetivo debe estar la película? (b) Si la película tiene 36,0 mm de altura, ¿qué fracción de una persona de 1,75 m de altura cabrá en ella? (c) Comente cuán razonable le parece esto, basándose en su experiencia a la hora de tomar o posar para las fotografías.



54. El objetivo de una cámara que se utiliza para hacer fotografías de cerca tiene una distancia focal de 22,0 mm. Lo más lejos que se puede colocar de la película es 33,0 mm. (a) ¿Cuál es el objeto más cercano que se puede fotografiar? (b) ¿Cuál es el aumento de este objeto más cercano?
55. Suponga que el objetivo de su cámara de 50,0 mm de distancia focal está a 51,0 mm de la película de la cámara. (a) ¿A qué distancia se encuentra un objeto que está enfocado? (b) ¿Cuál es la altura del objeto si su imagen tiene 2,00 cm de altura?
56. ¿Cuál es la distancia focal de una lupa que produce un aumento de 3,00 cuando se mantiene a 5,00 cm de un objeto, como una moneda rara?
57. El aumento de un libro sostenido a 7,50 cm de una lente de 10,0 cm de distancia focal es de 4,00. (a) Encuentre el aumento del libro cuando se sostiene a 8,50 cm de la lupa. (b) Repita la operación para el libro sostenido a 9,50 cm de la lupa. (c) Comente cómo cambia el aumento a medida que aumenta la distancia del objeto como en estos dos cálculos.
58. Supongamos que se utiliza un teleobjetivo de 200 mm de distancia focal para fotografiar unas montañas situadas a 10,0 km de distancia. (a) ¿Dónde se encuentra la imagen? (b) ¿Cuál es la altura de la imagen de un acantilado de 1000 m de altura en una de las montañas?
59. Se utiliza una cámara con un objetivo de 100 mm de distancia focal para fotografiar el Sol. ¿Cuál es la altura de la imagen del Sol en la película, dado que el Sol tiene  $1,40 \times 10^6$  km de diámetro y está a  $1,50 \times 10^8$  km de distancia?
60. Utilice la ecuación de lentes delgadas para demostrar que el aumento de una lente delgada viene determinado por su distancia focal y la distancia del objeto y viene dada por  $m = f/(f - d_o)$ .
61. Un objeto de 3,0 cm de altura se coloca a 5,0 cm delante de una lente convergente de 20 cm de distancia focal y se observa desde el otro lado. ¿Dónde está y qué tamaño tiene la imagen?
62. Un objeto de 3,0 cm de altura se coloca a 5,0 cm delante de una lente divergente de 20 cm de distancia focal y se observa desde el otro lado. ¿Dónde está y qué tamaño tiene la imagen?
63. Un objeto de 3,0 cm de altura se coloca a 25 cm delante de una lente divergente de 20 cm de distancia focal. Detrás de la lente divergente hay

una lente convergente de 20 cm de distancia focal. La distancia entre las lentes es de 5,0 cm. Encuentre la ubicación y el tamaño de la imagen final.

64. Dos lentes convexas de distancias focales de 20 cm y 10 cm se colocan a 30 cm de distancia, con la lente de mayor distancia focal a la derecha. Se coloca un objeto de 2,0 cm de altura a medio camino entre ellas y se observa a través de cada lente desde la izquierda y desde la derecha. Describa lo que vea, como por ejemplo dónde aparecerán las imágenes, si estarán en posición vertical o invertida y sus aumentos.

## 2.5 El ojo

*Salvo que se indique lo contrario, la distancia de la lente a la retina es de 2,00 cm.*

65. ¿Cuál es la potencia del ojo cuando ve un objeto a 50,0 cm de distancia?
66. Calcule la potencia del ojo al ver un objeto a 3,00 m de distancia.
67. Las letras de muchos libros tienen una altura media de 3,50 mm. ¿A qué altura se encuentra la imagen de las letras en la retina cuando el libro se sostiene a 30,0 cm del ojo?
68. Supongamos que la agudeza visual de una persona es tal que puede ver con claridad objetos que forman una imagen de  $4,00 \mu\text{m}$  de altura en su retina. ¿Cuál es la distancia máxima a la que puede leer las letras de 75,0 cm de altura en el lateral de un avión?
69. Las personas que realizan trabajos muy detallados de cerca, como los joyeros, a menudo pueden ver los objetos con claridad a una distancia mucho más cercana que la normal de 25 cm. (a) ¿Cuál es la potencia de los ojos de una mujer que puede ver un objeto con claridad a una distancia de solo 8,00 cm? (b) ¿Cuál es el tamaño de la imagen de un objeto de 1,00 mm, como las letras dentro de un anillo, sostenido a esta distancia? (c) ¿Cuál sería el tamaño de la imagen si el objeto se sostuviera a la distancia normal de 25,0 cm?
70. ¿Cuál es el punto lejano de una persona cuyos ojos tienen una potencia relajada de 50,5 D?
71. ¿Cuál es el punto cercano de una persona cuyos ojos tienen una potencia de acomodación de 53,5 D?
72. (a) Un láser que remodela la córnea de un paciente miope reduce la potencia de su ojo en 9,00 D, con un  $\pm 5,0\%$  de incertidumbre en la corrección final. ¿Cuál es el intervalo de

- dioptrías para los anteojos que esta persona podría necesitar después de este procedimiento? b) ¿Era la persona miope o hipermetrope antes del procedimiento? ¿Cómo lo sabe?
- 73.** La potencia para una visión normal de cerca es de 54,0 D. En un procedimiento de corrección de la visión, se aumenta la potencia del ojo del paciente en 3,00 D. Suponiendo que esto produce una visión normal de cerca, ¿cuál era el punto cercano del paciente antes del procedimiento?
- 74.** Para una visión lejana normal, el ojo tiene una potencia de 50,0 D. ¿Cuál era el punto lejano anterior de una paciente que se sometió a una corrección visual con láser que redujo la potencia de su ojo en 7,00 D, produciendo una visión lejana normal?
- 75.** La potencia para la visión lejana normal es de 50,0 D. Un paciente con miopía severa tiene un punto lejano de 5,00 cm. ¿En cuántas dioptrías debe reducirse la potencia de su ojo en la corrección visual con láser para obtener una visión lejana normal para él?
- 76.** Los ojos de un estudiante, mientras lee la pizarra, tienen una potencia de 51,0 D. ¿A qué distancia está la pizarra de sus ojos?
- 77.** La potencia de los ojos de un médico es de 53,0 D mientras examina a un paciente. ¿A qué distancia de sus ojos está el objeto que se examina?
- 78.** La potencia normal para la visión lejana es de 50,0 D. Una mujer joven con una visión lejana normal tiene un 10,0% de capacidad de acomodación (es decir, de aumento) de la potencia de sus ojos. ¿Cuál es el objeto más cercano que puede ver con claridad?
- 79.** El punto lejano de un administrador miope es de 50,0 cm. (a) ¿Cuál es la potencia relajada de sus ojos? (b) Si tiene la capacidad de acomodación normal del 8,00%, ¿cuál es el objeto más cercano que puede ver con claridad?
- 80.** Un hombre muy miope tiene un punto lejano de 20,0 cm. ¿Qué potencia de las lentes de contacto (cuando están en el ojo) corregirá su visión de lejos?
- 81.** Repita el problema anterior para los anteojos mantenidos a 1,50 cm de los ojos.
- 82.** Una persona miope ve que su prescripción de lentes de contacto es de -4,00 D. ¿Cuál es su punto lejano?
- 83.** Repita el problema anterior para unos anteojos que están a 1,75 cm de los ojos.
- 84.** La prescripción de lentes de contacto para una persona con hipermetropía leve es de 0,750 D, y la persona tiene un punto cercano de 29,0 cm. ¿Cuál es la potencia de la capa lagrimal entre la córnea y el cristalino si la corrección es ideal, teniendo en cuenta la capa lagrimal?

### 2.7 La lupa simple

- 85.** Si la imagen formada en la retina subtiende un ángulo de  $30^\circ$  y el objeto subtiende un ángulo de  $5^\circ$ , ¿cuál es el aumento de la imagen?
- 86.** ¿Cuál es el aumento de una lente de aumento con una distancia focal de 10 cm si se mantiene a 3,0 cm del ojo y el objeto está a 12 cm del ojo?
- 87.** ¿A qué distancia se debe sostener una lupa de 2,1 cm de distancia focal de un objeto para obtener un aumento de  $10\times$ ? Suponga que coloca su ojo a 5,0 cm de la lupa.
- 88.** Se sostiene una lupa de 5,0 cm de distancia focal lo más cerca posible del ojo. Si tiene un punto cercano normal, ¿cuál es el aumento?
- 89.** Ve una montaña con una lupa de distancia focal  $f = 10$  cm. ¿Cuál es el aumento?
- 90.** Se observa un objeto sosteniendo una lupa de 2,5 cm de distancia focal a 10 cm de este. A qué distancia del ojo hay que sostener la lupa para obtener un aumento de  $10\times$ ?
- 91.** Una lupa se encuentra a 10 cm encima de un objeto, formando una imagen a 10 cm de distancia ubicada en el lado opuesto de este objeto. ¿Cuál es el aumento de esta lente para una persona con un punto cercano normal si su ojo está a 12 cm del objeto?
- 92.** Un objeto visto a simple vista subtiende un ángulo de  $2^\circ$ . Si se ve el objeto a través de una lupa de  $10\times$  ¿qué ángulo subtiende la imagen formada en la retina?
- 93.** Para un ojo normal y relajado, una lupa produce un aumento angular de 4,0. ¿Cuál es el mayor aumento posible con esta lupa?
- 94.** ¿Qué rango de aumento es posible con una lente convergente de 7,0 cm de distancia focal?
- 95.** Una lupa produce un aumento angular de 4,5 cuando la utiliza un joven con un punto cercano de 18 cm. ¿Cuál es el máximo aumento angular obtenido por un anciano con un punto cercano de 45 cm?

### 2.8 Microscopios y telescopios

- 96.** Un microscopio con un aumento total de 800 tiene un objetivo que aumenta por 200. (a) ¿Cuál es el aumento angular del ocular? (b) Si hay

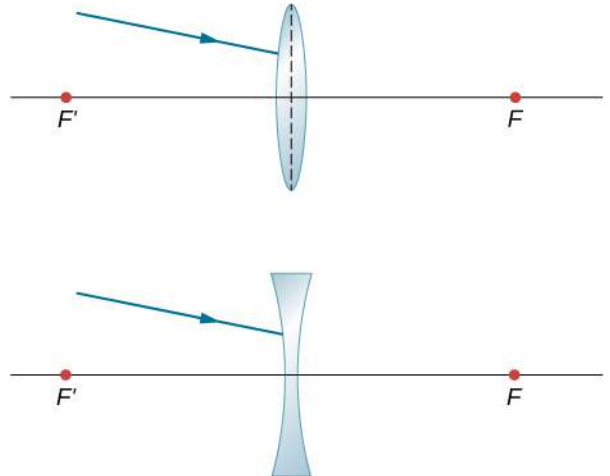
otros dos objetivos que pueden utilizarse, con aumentos de 100 y 400, ¿qué otros aumentos totales son posibles?

97. (a) ¿Qué aumento produce un objetivo de microscopio de 0,150 cm de distancia focal que está a 0,155 cm del objeto que se está viendo? (b) ¿Cuál es el aumento global si se utiliza un ocular de  $8\times$  (que produce un aumento angular de 8,00)?
98. ¿Dónde debe colocarse un objeto respecto a un microscopio para que su objetivo de 0,50 cm de distancia focal produzca un aumento de  $-400\times$ ?
99. Una ameba se encuentra a 0,305 cm del objetivo de 0,300 cm de distancia focal de un microscopio. (a) ¿Dónde se encuentra la imagen formada por el objetivo? (b) ¿Cuál es el aumento de esta imagen? (c) Un ocular de 2,00 cm de distancia focal se coloca a 20,0 cm del objetivo. ¿Dónde está la imagen final? (d) ¿Qué aumento angular produce el ocular? (e) ¿Cuál es el aumento global? (Consulte la [Figura 2.39](#).)
100. **Resultados irrazonables** Sus amigos le muestran una imagen a través de un microscopio. Le dicen que el microscopio tiene un objetivo con una distancia focal de 0,500 cm y un ocular con una distancia focal de 5,00 cm. El aumento global resultante es de 250 000. ¿Son estos valores viables para un microscopio?

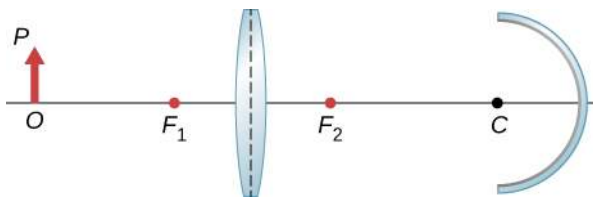
*Salvo que se indique lo contrario, la distancia de la lente a la retina es de 2,00 cm.*

101. ¿Cuál es el aumento angular de un telescopio que tiene un objetivo de 100 cm de distancia focal y un ocular de 2,50 cm de distancia focal?
102. Calcule la distancia necesaria entre las lentes del objetivo y del ocular en el telescopio del problema anterior para producir una imagen final muy lejos del observador, donde la visión es más relajada. Tenga en cuenta que un telescopio se utiliza normalmente para ver objetos muy lejanos.
103. Un gran telescopio reflector tiene un espejo objetivo con un radio de curvatura de 10,0 m. ¿Qué aumento angular se produce cuando se utiliza un ocular de 3,00 m de distancia focal?
104. Un pequeño telescopio tiene un espejo cóncavo con un radio de curvatura de 2,00 m para su objetivo. Su ocular es una lente de 4,00 cm de distancia focal. (a) ¿Cuál es el aumento angular del telescopio? (b) ¿Qué ángulo subtende una mancha solar de 25.000 km de diámetro? (c) ¿Cuál es el ángulo de su imagen telescópica?

105. Un binocular de  $7,5\times$  produce un aumento angular de  $-7,50\times$ , actuando como un telescopio. (Los espejos se utilizan para que la imagen sea vertical). Si los binoculares tienen lentes objetivas con una distancia focal de 75,0 cm, ¿cuál es la distancia focal de las lentes de los oculares?
106. **Construya su propio problema** Considere un telescopio del tipo utilizado por Galileo, con un objetivo convexo y un ocular cóncavo, como se ilustra en la parte (a) de la [Figura 2.40](#). Construya un problema en el que calcule la ubicación y el tamaño de la imagen producida. Entre las cosas que hay que tener en cuenta están las distancias focales de los objetivos y sus colocaciones relativas, así como el tamaño y la ubicación del objeto. Compruebe que el aumento angular es mayor a uno. Es decir, el ángulo subtendido en el ojo por la imagen es mayor que el ángulo subtendido por el objeto.
107. Trace los rayos para hallar en qué dirección saldrán los rayos dados después de la refracción a través de la lente delgada de la siguiente figura. Asuma la aproximación de lentes delgadas. (*Pista:* Elija un punto  $P$  en la semirrecta dada en cada caso. Considere ese punto como un objeto. Ahora, calcule su imagen  $Q$ . Use la regla: Todos los rayos del otro lado de la lente pasarán por  $Q$  o parecerán venir de  $Q$ )



108. Copie y dibuje los rayos para hallar la imagen final en el siguiente diagrama. (*Pista:* Calcule la imagen intermedia solo a través de la lente. Utilice la imagen intermedia como objeto para el espejo y trabaje únicamente con el espejo para hallar la imagen final).



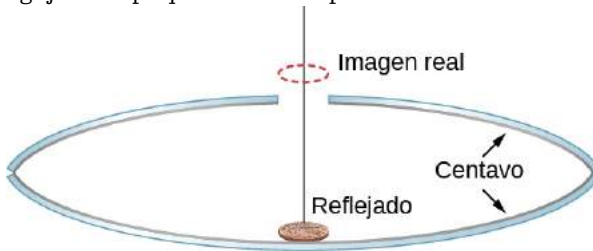
**109.** Un espejo cóncavo de radio de curvatura 10 cm se coloca a 30 cm de una lente convexa delgada de distancia focal 15 cm. Calcule la ubicación y el aumento de una pequeña bombilla situada a 50 cm de la lente utilizando el método algebraico.

**110.** Un objeto de 3 cm de altura se coloca a 25 cm delante de una lente convergente de 20 cm de distancia focal. Detrás del objetivo hay un espejo cóncavo de 20 cm de distancia focal. La distancia entre el objetivo y el espejo es de 5 cm. Calcule la ubicación, la orientación y el tamaño de la imagen final.

**111.** Un objeto de 3 cm de altura se coloca a una distancia de 25 cm delante de una lente convergente de 20 cm de distancia focal, que se denominará primera lente. Detrás de la lente hay otra lente convergente de 20 cm de distancia focal situada a 10 cm del primer objetivo. Hay un espejo cóncavo de 15 cm de distancia focal situado a 50 cm de la segunda lente. Calcule la ubicación, la orientación y el tamaño de la imagen final.

**112.** Un objeto de 2 cm de altura se coloca a 50 cm delante de una lente convergente de 40 cm de distancia focal. Detrás de la lente hay un espejo convexo de 15 cm de distancia focal situado a 30 cm de la lente convergente. Calcule la ubicación, la orientación y el tamaño de la imagen final.

**113.** Se colocan dos espejos cóncavos uno frente al otro. Uno de ellos tiene un pequeño agujero en el centro. Se coloca un centavo en el espejo inferior (vea la figura siguiente). Cuando se mira desde un lado, se observa una imagen real del centavo por encima del agujero. Explique cómo esto puede suceder.



**114.** Una lámpara de 5 cm de altura se coloca a 40 cm delante de una lente convergente de 20 cm de distancia focal. Hay un espejo plano de 15 cm detrás de la lente. ¿Dónde encontrará la

imagen cuando mire en el espejo?

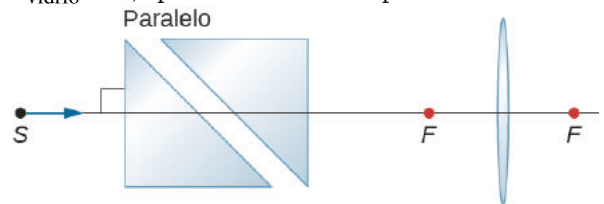
**115.** Unos rayos paralelos procedentes de una fuente lejana inciden en una lente convergente de 20 cm de distancia focal con un ángulo de 15 grados respecto a la dirección horizontal. Calcule la posición vertical de la imagen real observada en una pantalla en el plano focal.

**116.** Unos rayos paralelos procedentes de una fuente lejana inciden en una lente divergente de 20 cm de distancia focal con un ángulo de 10 grados respecto a la dirección horizontal. Al mirar a través de la lente, ¿en qué punto del plano vertical aparecerá la imagen?

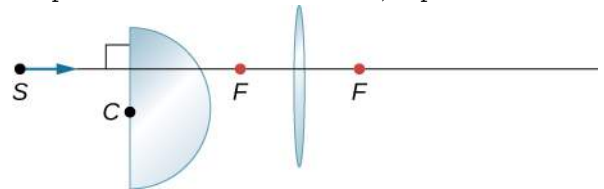
**117.** Se coloca una bombilla a 10 cm de un espejo plano que está frente a un espejo convexo de radio de curvatura de 8 cm. El espejo plano está situado a una distancia de 30 cm del vértice del espejo convexo. Calcule la ubicación de las dos imágenes en el espejo convexo. ¿Hay otras imágenes? Si es así, ¿dónde se encuentran?

**118.** Una fuente de luz puntual se encuentra a 50 cm delante de una lente convergente de 30 cm de distancia focal. Un espejo cóncavo con una distancia focal de 20 cm se coloca a 25 cm detrás de la lente. ¿Dónde se forma la imagen final y cuál es su orientación y aumento?

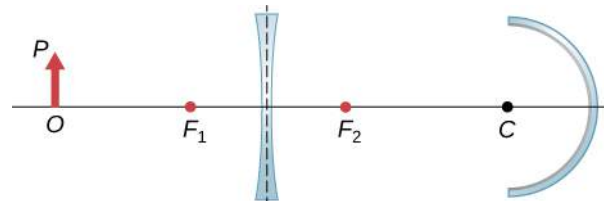
**119.** Copie y trace encontrar cómo sale un rayo horizontal desde  $S$  después de la lente. Utilice  $n_{\text{vidrio}} = 1,5$  para el material del prisma.



**120.** Copie y trace cómo sale un rayo horizontal desde  $S$  después de la lente. Utilice  $n = 1,55$  para el vidrio.

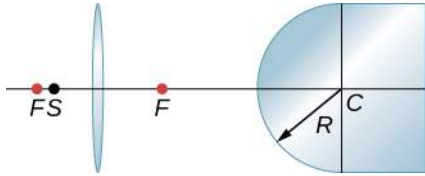


**121.** Copie y dibuje los rayos para determinar la imagen final.



**122.** Mediante el trazado de rayos o el cálculo, halle

el lugar dentro del vidrio donde convergen los rayos procedentes de  $S$  como consecuencia de la refracción a través de la lente y la interfase convexa aire-vidrio. Utilice una regla para estimar el radio de curvatura.



- 123.** Una lente divergente tiene una distancia focal de 20 cm. ¿Cuál es la potencia de la lente en

### Problemas Adicionales

- 127.** Utilice una regla y un transportador para dibujar los rayos y hallar imágenes en los siguientes casos.
- Un objeto puntual situado en el eje de un espejo cóncavo situado en un punto dentro de la distancia focal desde el vértice.
  - Un objeto puntual situado en el eje de un espejo cóncavo situado en un punto más lejano que la distancia focal desde el vértice.
  - Un objeto puntual situado en el eje de un espejo convexo situado en un punto dentro de la distancia focal desde el vértice.
  - Un objeto puntual situado en el eje de un espejo convexo situado en un punto más lejano que la distancia focal desde el vértice.
  - Repita (a)-(d) para un objeto puntual fuera del eje.
- 128.** ¿Dónde debe colocarse un objeto de 3 cm de altura frente a un espejo cóncavo con radio de 20 cm para que su imagen sea real y de 2 cm de altura?
- 129.** Un objeto de 3 cm de altura se coloca a 5 cm delante de un espejo convexo con un radio de curvatura de 20 cm. ¿Dónde se forma la imagen? ¿Qué altura tiene la imagen? ¿Cuál es la orientación de la imagen?
- 130.** Observa un espejo de forma que pueda ver una imagen virtual cuadruplicada de un objeto cuando este se coloca a 5 cm del vértice del espejo. ¿Qué tipo de espejo necesita? ¿Cuál debe ser el radio de curvatura del espejo?
- 131.** Deduzca la siguiente ecuación para un espejo convexo:
- $$\frac{1}{VO} - \frac{1}{VI} = -\frac{1}{VF},$$
- donde  $VO$  es la distancia al objeto  $O$  desde el vértice  $V$ ,  $VI$  la distancia a la imagen  $I$  desde  $V$ , y  $VF$  es la distancia al punto focal  $F$  desde  $V$ . (Pista: utilice dos conjuntos de triángulos similares)
- 132.** (a) Dibuje rayos que formen la imagen de un objeto vertical sobre el eje óptico y más lejos que el punto focal de una lente convergente. (b) Utilice la geometría plana en su figura y demuestre que el aumento  $m$  viene dado por  $m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o}$ .
- 133.** Utilice otro diagrama de trazado de rayos para la misma situación dada en el problema anterior para derivar la ecuación de lentes delgadas,  $\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}$ .
- 134.** Usted fotografía una persona de 2,0 m de altura con una cámara que tiene un objetivo de 5,0 cm de distancia focal. La imagen de la película no debe tener más de 2,0 cm de altura. (a) ¿Cuál es la distancia más cercana a la que puede situarse la persona con respecto al objetivo? (b) Para esta distancia, ¿cuál debe ser la distancia de la lente a la película?
- 135.** Halle la distancia focal de una lente delgada plano-convexa. La superficie frontal de esta lente es plana, y la superficie posterior tiene un radio de curvatura de  $R_2 = -35$  cm. Supongamos que el índice de refracción de la lente es de 1,5.
- 136.** Calcule la distancia focal de una lente de menisco con  $R_1 = 20$  cm y  $R_2 = 15$  cm. Supongamos que el índice de refracción de la lente es de 1,5.
- 137.** Un hombre miope no puede ver claramente los objetos más allá de 20 cm de sus ojos. ¿A qué distancia debe situarse de un espejo para ver lo que hace cuando se afeita?
- 138.** Una madre ve que la graduación de las lentes de contacto de su hijo es de 0,750 D. ¿Cuál es el punto cercano del niño?
- 139.** Repita el problema anterior para anteojos que

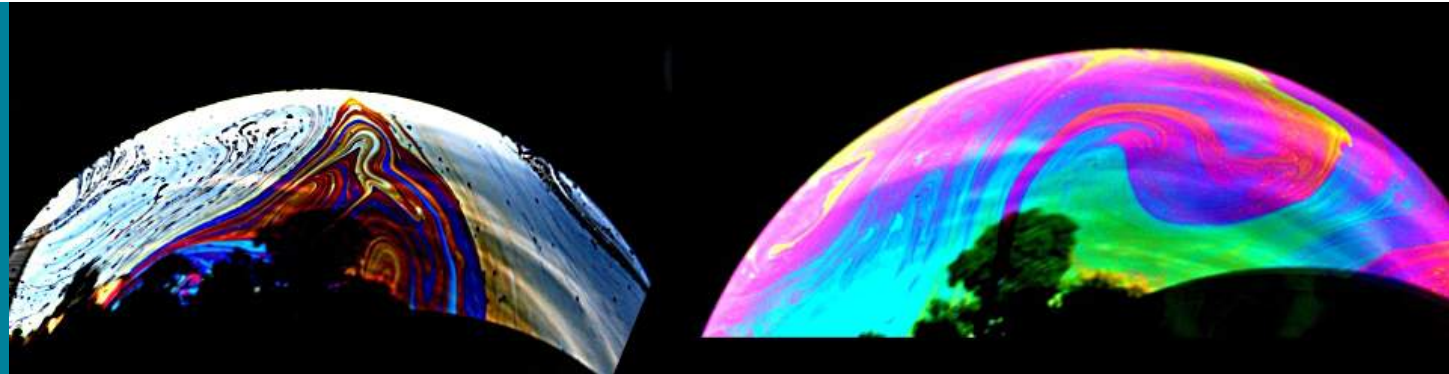


están a 2,20 cm de los ojos.

- 140.** La fórmula de lentes de contacto prescrita para una persona miope es de  $-4,00$  D y la persona tiene un punto lejano de 22,5 cm. ¿Cuál es la potencia de la capa lagrimal entre la córnea y el cristalino si la corrección es ideal, teniendo en cuenta la capa lagrimal?
- 141. Resultados irrazonables** Un niño tiene un punto cercano de 50 cm y un punto lejano de 500 cm. ¿Una lente de  $-4,00$  D corregirá su punto lejano hasta el infinito?
- 142.** Calcule el aumento angular de una imagen mediante una lupa de  $f = 5,0$  cm si el objeto está colocado  $d_o = 4,0$  cm de la lente y la lente está cerca del ojo.
- 143.** Supongamos que el objetivo y el ocular de un microscopio compuesto tienen distancias focales de 2,5 cm y 10 cm, respectivamente, y están separados por 12 cm. Un binocular de  $70\text{-}\mu\text{m}$  se coloca a 6,0 cm del objetivo. ¿Qué tamaño tiene la imagen virtual formada por el sistema objetivo-ocular?
- 144.** Dibuje rayos a escala para localizar la imagen en la retina si el cristalino tiene una distancia focal de 2,5 cm y el punto cercano es de 24 cm. (*Pista:* Coloque un objeto en el punto cercano).
- 145.** El objetivo y el ocular de un microscopio tienen las distancias focales de 3 cm y 10 cm, respectivamente. Decida la distancia entre el objetivo y el ocular si necesitamos un aumento de  $10\times$  del sistema compuesto objetivo-ocular.
- 146.** Una persona hipermetrope tiene un punto cercano de 100 cm. ¿A qué distancia por delante o por detrás de la retina se forma la imagen de un objeto situado a 25 cm del ojo?
- Utilice la distancia de la córnea a la retina de 2,5 cm.
- 147.** Una persona miope tiene un punto lejano de 80 cm. (a) ¿Qué tipo de lente correctora necesitará la persona si la lente debe colocarse a 1,5 cm del ojo? (b) ¿Cuál sería la potencia de la lente de contacto necesaria? Suponga que la distancia de la lente de contacto al ojo es cero.
- 148.** En un telescopio reflector el objetivo es un espejo cóncavo de radio de curvatura de 2 m y el ocular es una lente convexa de distancia focal de 5 cm. Calcule el tamaño aparente de un árbol de 25 m a una distancia de 10 km que percibiría al mirar por el telescopio.
- 149.** Dos estrellas que están a  $10^9$  km se observan con un telescopio y se comprueba que están separadas por un ángulo de  $10^{-5}$  radianes. Si el ocular del telescopio tiene una distancia focal de 1,5 cm y el objetivo tiene una distancia focal de 3 metros, ¿a qué distancia están las estrellas del observador?
- 150.** ¿Cuál es el tamaño angular de la Luna si se ve desde un binocular que tiene una distancia focal de 1,2 cm para el ocular y una distancia focal de 8 cm para el objetivo? Utilice el radio de la Luna  $1,74 \times 10^6$  m y la distancia de la Luna al observador será de  $3,8 \times 10^8$  m.
- 151.** Un planeta desconocido a una distancia de  $10^{12}$  m desde la Tierra se observa con un telescopio que tiene una distancia focal del ocular de 1 cm y una distancia focal del objetivo de 1 m. Si se ve que el planeta lejano subtende un ángulo de  $10^{-5}$  radianes en el ocular, ¿cuál es el tamaño del planeta?

# CAPÍTULO 3

## Interferencias



**Figura 3.1** Las burbujas de jabón se soplan a partir de un fluido claro en forma de películas muy delgadas. Los colores que vemos no se deben a ninguna pigmentación, sino que son el resultado de la interferencia de la luz, que realza longitudes de onda específicas para un espesor determinado de la película.

### ESQUEMA DEL CAPITULO

#### 3.1 Interferencia de doble rendija de Young

#### 3.2 Matemáticas de la interferencia

#### 3.3 Interferencias de rendijas múltiples

#### 3.4 Interferencia de película delgada

#### 3.5 El interferómetro de Michelson

**INTRODUCCIÓN** El indicio más seguro de una onda es la interferencia. Esta característica de la onda es más prominente cuando la onda interactúa con un objeto que no es grande en comparación con la longitud de onda. Las interferencias se observan en las ondas de agua, las ondas de sonido, las ondas de luz y, de hecho, en todos los tipos de ondas.

Si alguna vez ha observado los rojos, azules y verdes de una burbuja de jabón iluminada por el Sol y se ha preguntado cómo es posible que el agua jabonosa de color pajizo los produzca, ha dado con uno de los muchos fenómenos que solo pueden explicarse por el carácter ondulatorio de la luz (consulte la [Figura 3.1](#)). Lo mismo ocurre con los colores que se ven en una mancha de aceite o en la luz que refleja un disco DVD. Estos y otros fenómenos interesantes no pueden explicarse completamente mediante la óptica geométrica. En estos casos, la luz interactúa con los objetos y presenta características ondulatorias. La rama de la óptica que considera el comportamiento de la luz cuando presenta características ondulatorias se denomina óptica de onda (a veces llamada óptica física). Es el tema de este capítulo.

### 3.1 Interferencia de doble rendija de Young

#### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

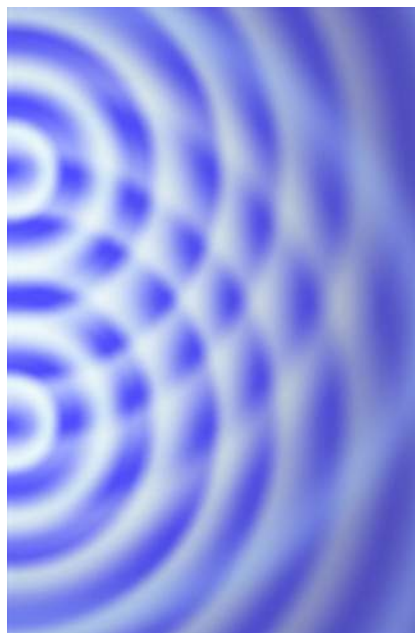
- Explicar el fenómeno de la interferencia
- Definir la interferencia constructiva y destructiva para una doble rendija

El físico holandés Christiaan Huygens (1629-1695) pensaba que la luz era una onda, pero Isaac Newton no pensaba así. Newton pensaba que había otras explicaciones para el color y para los efectos de interferencia y difracción que eran observables en esa época. Debido a la enorme reputación de Newton, su opinión prevaleció en general; el hecho de que el principio de Huygens funcionara no se consideró una prueba directa



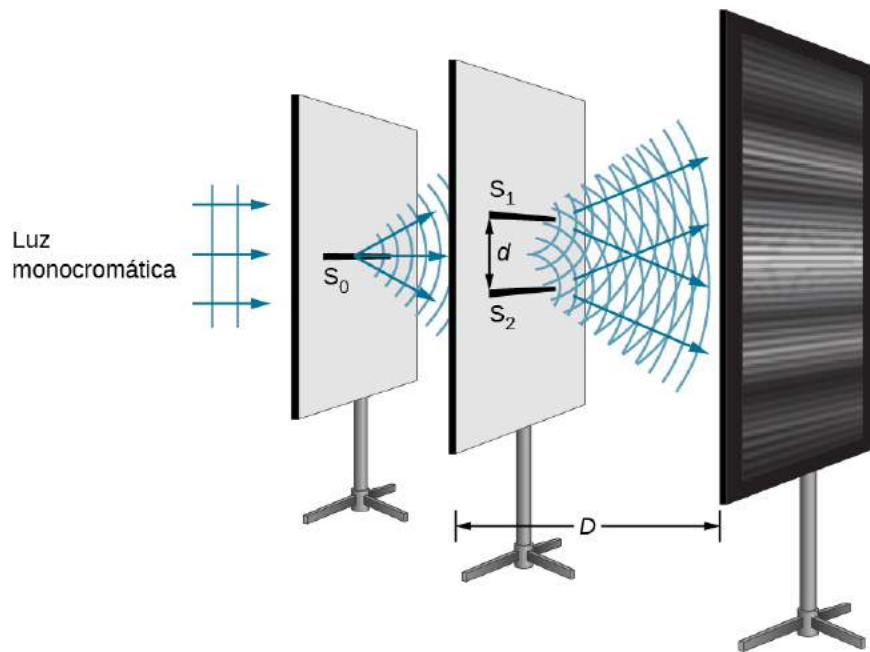
que demostrara que la luz es una onda. La aceptación del carácter ondulatorio de la luz llegó muchos años después, en 1801, cuando el físico y médico inglés Thomas Young (1773-1829) demostró la interferencia óptica con su ya clásico experimento de la doble rendija.

Si no hubiera una sino dos fuentes de ondas, se podría hacer que las ondas interfirieran, como en el caso de las ondas sobre el agua (Figura 3.2). Si la luz es una onda electromagnética, debe presentar efectos de interferencia bajo circunstancias adecuadas. En el experimento de Young, la luz solar pasaba a través de un agujero de alfiler en una tabla. El rayo emergente incidía sobre dos agujeros en una segunda tabla. La luz que emanaba de los dos agujeros de alfiler caía entonces sobre una pantalla en la que se observaba un patrón de puntos brillantes y oscuros. Este patrón, llamado franjas, solo puede explicarse a través de la interferencia, un fenómeno ondulatorio.



**FIGURA 3.2** Fotografía de un patrón de interferencia producido por ondas de agua circulares en un tanque de ondulaciones. Dos finos émbolos vibran hacia arriba y hacia abajo en fase en la superficie del agua. De cada émbolo, se producen y emanan ondas de agua circulares.

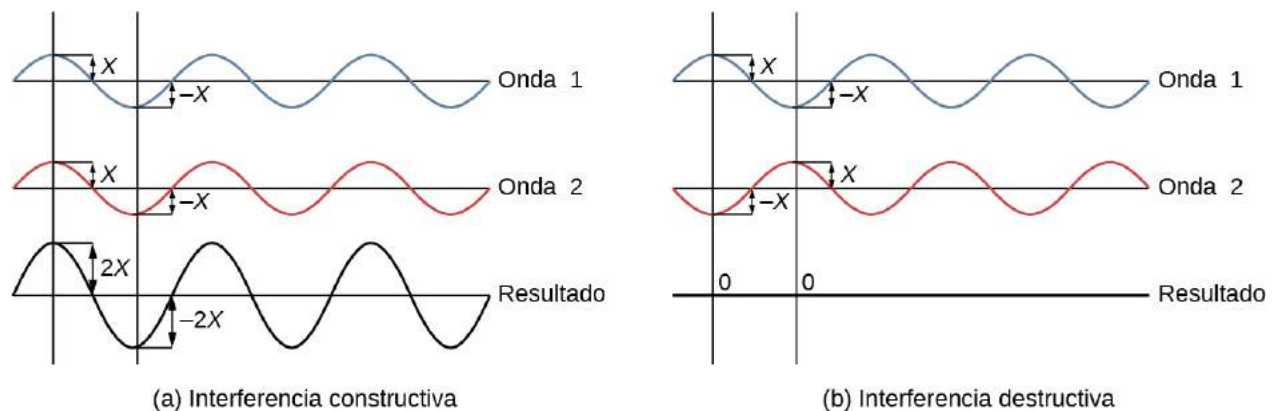
Podemos analizar la interferencia de doble rendija con la ayuda de la Figura 3.3, que representa un aparato análogo al de Young. La luz de una fuente monocromática incide en una rendija  $S_0$ . La luz que emana de  $S_0$  es incidente en otras dos rendijas  $S_1$  y  $S_2$  que son equidistantes de  $S_0$ . Un patrón de *franja de interferencia* en la pantalla se produce por la luz que emana de  $S_1$  y  $S_2$ . Se supone que todas las rendijas son tan estrechas que pueden considerarse fuentes puntuales secundarias para las ondículas de Huygens (La naturaleza de la luz). Las ranuras  $S_1$  y  $S_2$  están a una distancia  $d$  ( $d \leq 1$  mm), y la distancia entre la pantalla y las rendijas es  $D$  ( $\approx 1$  m), que es mucho mayor que  $d$ .



**FIGURA 3.3** El experimento de interferencia de doble rendija utilizando luz monocromática y rendijas estrechas. Franjas producidas por la interferencia de las ondas de Huygens de las rendijas  $S_1$  y  $S_2$  se observan en la pantalla.

Dado que se supone que  $S_0$  es una fuente puntual de luz monocromática, las ondículas secundarias de Huygens que salen de  $S_1$  y  $S_2$  mantienen siempre una diferencia de fase constante (cero en este caso porque  $S_1$  y  $S_2$  son equidistantes de  $S_0$ ) y tienen la misma frecuencia. Se dice entonces que las fuentes de  $S_1$  y  $S_2$  son coherentes. Por **ondas coherentes** se entiende que las ondas están en fase o tienen una relación de fase definida. El término **incoherente** significa que las ondas tienen relaciones de fase aleatorias, lo que ocurriría si  $S_1$  y  $S_2$  fueran iluminadas por dos fuentes de luz independientes, en lugar de una única fuente  $S_0$ . Dos fuentes de luz independientes (que pueden ser dos zonas separadas dentro de la misma lámpara o el Sol) no emitirían, por lo general, su luz al unísono, es decir, no de forma coherente. Además, porque  $S_1$  y  $S_2$  están a la misma distancia de  $S_0$ , las amplitudes de las dos ondas de Huygens son iguales.

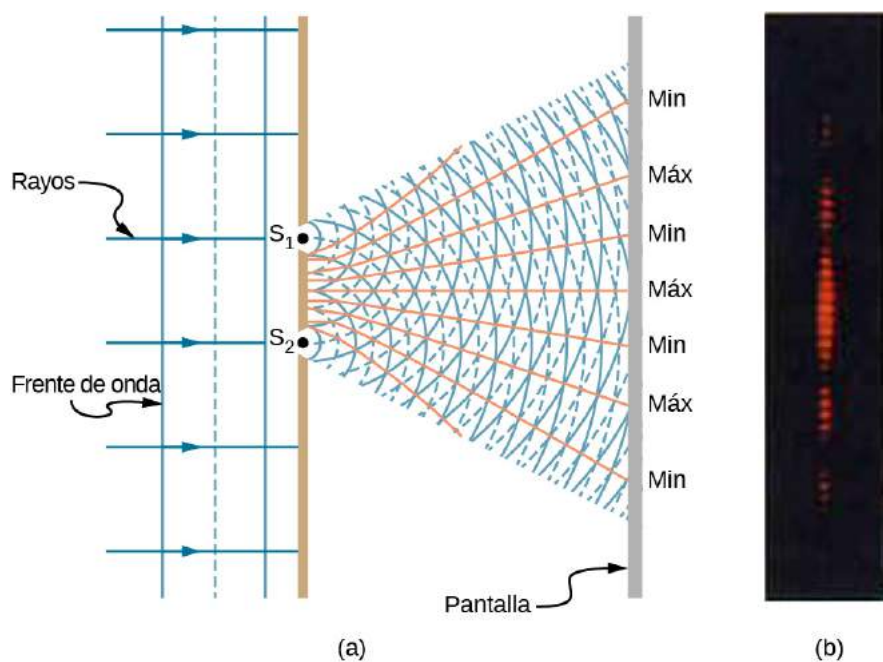
Young utilizó la luz solar, donde cada longitud de onda forma su propio patrón, lo que hace que el efecto sea más difícil de ver. En la siguiente discusión, ilustramos el experimento de la doble rendija con luz **monocromática** (simple  $\lambda$ ) para aclarar el efecto. La [Figura 3.4](#) muestra la interferencia constructiva y destructiva pura de dos ondas que tienen la misma longitud de onda y amplitud.



**FIGURA 3.4** Las amplitudes de las ondas se suman. (a) La interferencia constructiva pura se obtiene cuando ondas idénticas están en fase. (b) La interferencia destructiva pura se produce cuando ondas idénticas están exactamente desfasadas, o desplazadas media longitud de onda.

Cuando la luz pasa a través de rendijas estrechas, estas actúan como fuentes de ondas coherentes y la luz se

propaga en forma de ondas semicirculares, como se muestra en la [Figura 3.5\(a\)](#). La *interferencia constructiva* pura se produce cuando las ondas van de cresta a cresta o de valle a valle. La *interferencia destructiva* pura se produce cuando van de cresta a valle. La luz debe incidir sobre una pantalla y dispersarse hacia nuestros ojos para que podamos ver el patrón. En la [Figura 3.2](#) se muestra un patrón análogo para las ondas de agua. Tome en cuenta que las regiones de interferencia constructiva y destructiva se alejan de las rendijas en ángulos bien definidos con respecto al haz original. Estos ángulos dependen de la longitud de onda y de la distancia entre las rendijas, como veremos a continuación.

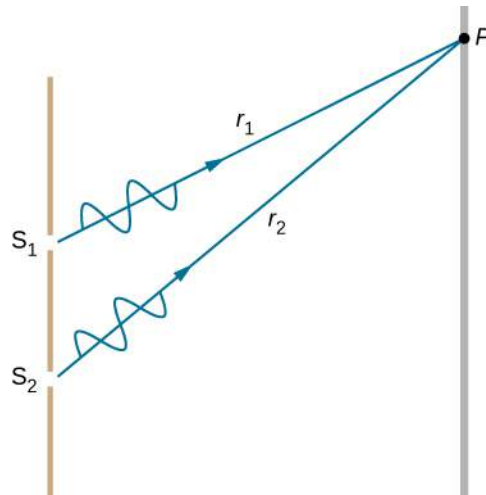


**FIGURA 3.5** Las rendijas dobles producen dos fuentes coherentes de ondas que interfieren. (a) La luz se dispersa (difracta) desde cada rendija, porque las rendijas son estrechas. Estas ondas se superponen e interfieren de forma constructiva (líneas brillantes) y destructiva (regiones oscuras). Solo podemos ver esto si la luz incide en una pantalla y se dispersa en nuestros ojos. (b) Cuando la luz que ha pasado por las dobles rendijas incide en una pantalla, vemos un patrón como este.

Para entender el patrón de interferencia de doble rendija, tenga en cuenta cómo dos ondas viajan desde las rendijas a la pantalla ([Figura 3.6](#)). Cada rendija está a una distancia diferente de un punto determinado de la pantalla. Por lo tanto, en cada trayectoria caben diferentes números de longitudes de onda. Las ondas parten de las rendijas en fase (de cresta a cresta), pero pueden acabar desfasadas (de cresta a valle) en la pantalla si las trayectorias difieren en longitud en media longitud de onda, interfiriendo destructivamente. Si las trayectorias difieren en una longitud de onda entera, las ondas llegan en fase (cresta a cresta) a la pantalla, interfiriendo constructivamente. De forma más general, si la diferencia de longitud del trayecto  $\Delta l$  entre las dos ondas es cualquier número semientero de longitudes de onda  $[(1/2)\lambda, (3/2)\lambda, (5/2)\lambda, \text{etc.}]$ , entonces se produce una interferencia destructiva. Del mismo modo, si la diferencia de longitud de trayectoria es un número entero de longitudes de onda  $(\lambda, 2\lambda, 3\lambda, \text{etc.})$ , entonces se produce una interferencia constructiva. Estas condiciones pueden expresarse en forma de ecuaciones:

$$\Delta l = m\lambda, \quad \text{para } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \text{ (interferencia constructiva)} \quad 3.1$$

$$\Delta l = (m + \frac{1}{2})\lambda, \quad \text{para } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \text{ (interferencia destructiva)} \quad 3.2$$



**FIGURA 3.6** Las ondas siguen diferentes caminos desde las rendijas hasta un punto común  $P$  en una pantalla. La interferencia destructiva se produce cuando una trayectoria es media longitud de onda más larga que la otra: las ondas comienzan en fase, pero llegan desfasadas. La interferencia constructiva se produce cuando una trayectoria es una longitud de onda completa más larga que la otra: las ondas comienzan y llegan en fase.

## 3.2 Matemáticas de la interferencia

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Determinar los ángulos de las franjas brillantes y oscuras para la interferencia de doble rendija
- Calcular las posiciones de las franjas brillantes en una pantalla

La [Figura 3.7\(a\)](#) muestra cómo determinar la diferencia de longitud de la trayectoria  $\Delta l$  para las ondas que viajan desde dos rendijas hasta un punto común en una pantalla. Si la pantalla está a una gran distancia en comparación con la distancia entre las rendijas, entonces el ángulo  $\theta$  entre la trayectoria y una línea desde las rendijas a la pantalla [parte (b)] es casi el mismo para cada trayectoria. En otras palabras,  $r_1$  y  $r_2$  son esencialmente paralelos. Las longitudes de  $r_1$  y  $r_2$  se diferencian por  $\Delta l$ , como indican las dos líneas discontinuas de la figura. La trigonometría simple muestra

$$\Delta l = d \sin \theta \quad 3.3$$

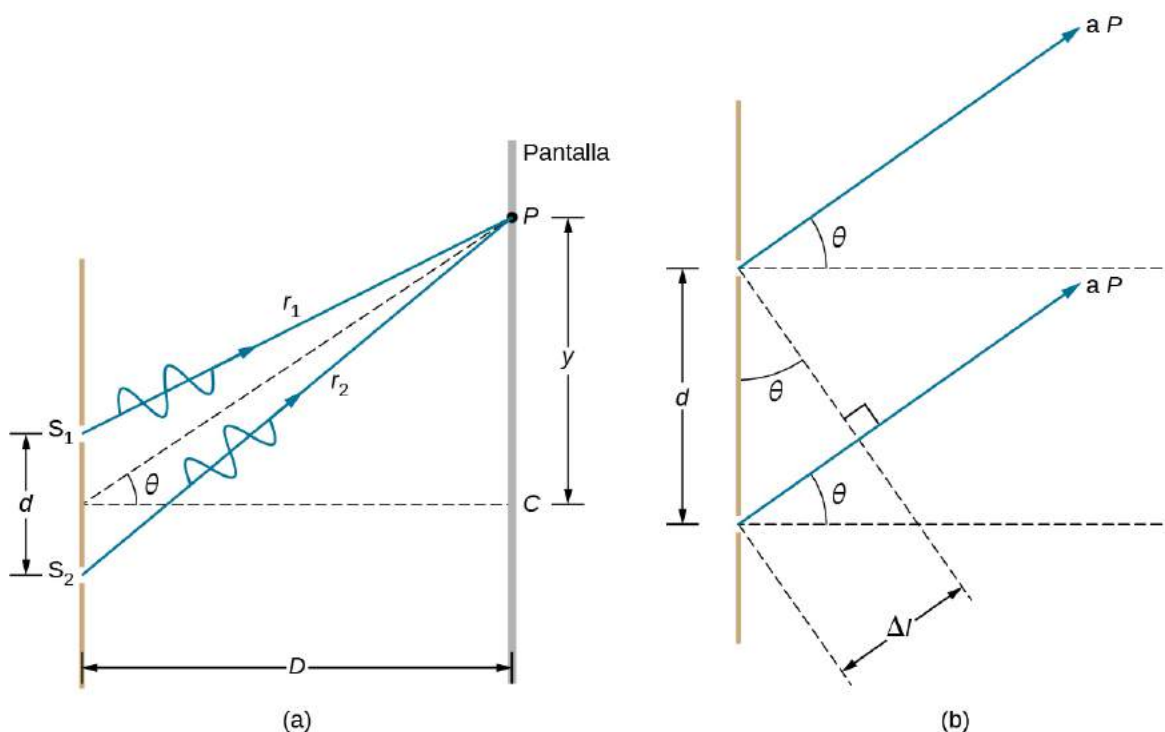
donde  $d$  es la distancia entre las rendijas. Al combinar este resultado con la [Ecuación 3.1](#), obtenemos la interferencia constructiva para una doble rendija cuando la diferencia de la longitud del recorrido es un múltiplo integral de la longitud de onda, o

$$d \sin \theta = m\lambda, \text{ para } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{ (interferencia constructiva)}. \quad 3.4$$

Del mismo modo, para obtener una interferencia destructiva para una doble rendija, la diferencia de la longitud del recorrido debe ser un múltiplo del semientero de la longitud de onda, o

$$d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \text{ para } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{ (interferencia destructiva)} \quad 3.5$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz,  $d$  es la distancia entre las rendijas y  $\theta$  es el ángulo con respecto a la dirección original del rayo, tal y como se ha comentado anteriormente. Llamamos  $m$  al **orden** de la interferencia. Por ejemplo,  $m = 4$  es una interferencia de cuarto orden.



**FIGURA 3.7** (a) Para llegar a  $P$ , las ondas de luz procedentes de  $S_1$  y  $S_2$  deben recorrer distancias diferentes. (b) La diferencia del recorrido entre los dos rayos es  $\Delta l$ .

Las ecuaciones de la interferencia de doble rendija implican que se forma una serie de líneas brillantes y oscuras. En el caso de las rendijas verticales, la luz se propaga horizontalmente a ambos lados del haz incidente en un patrón llamado **franjas** de interferencia (Figura 3.8). Cuanto más cerca estén las rendijas, más se separan las franjas brillantes. Podemos ver esto examinando la ecuación

$d \sin \theta = m\lambda$ , para  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Para los  $\lambda$  y  $m$  fijos, cuanto menor sea  $d$ , mayor debe ser  $\theta$ , ya que  $\sin \theta = m\lambda/d$ . Esto es coherente con nuestra afirmación de que los efectos de las ondas son más notables cuando el objeto con el que se encuentra la onda (en este caso, las rendijas a una distancia  $d$ ) es pequeño. Una  $d$  pequeña da un gran  $\theta$ , por lo tanto, un gran efecto.

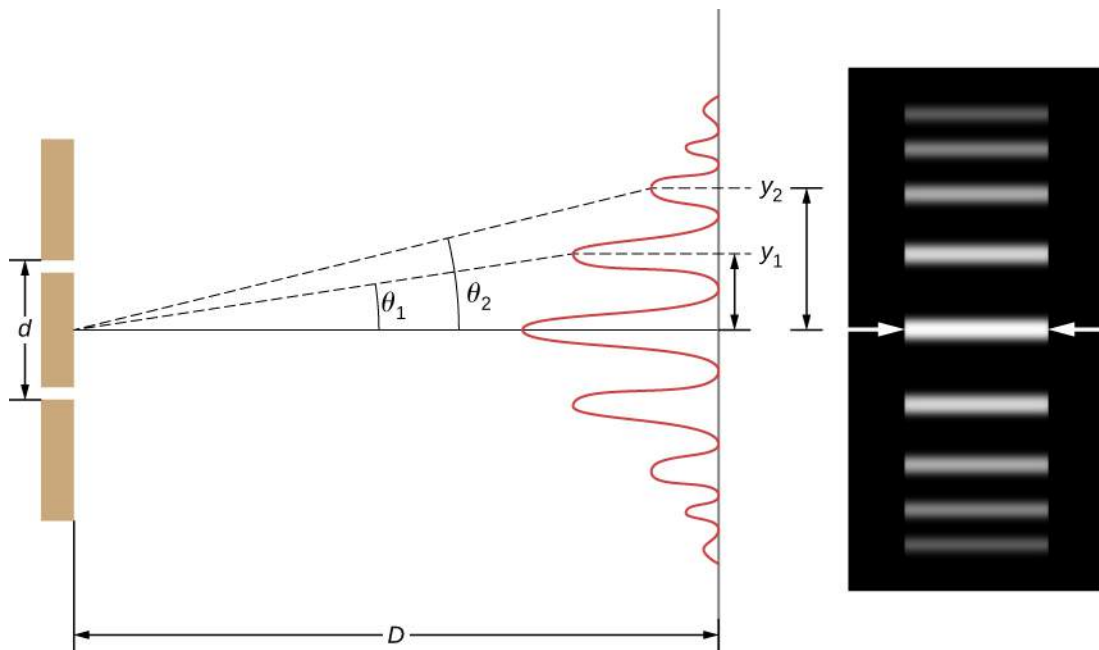
Si volvemos a la parte (a) de la figura, vemos que  $\theta$  suele ser lo suficientemente pequeño como para que  $\sin \theta \approx \tan \theta \approx y_m/D$ , donde  $y_m$  es la distancia del máximo central a la *menésima* franja brillante y  $D$  es distancia entre la rendija y la pantalla. Ecuación 3.4 puede escribirse entonces como

$$d \frac{y_m}{D} = m\lambda$$

o

$$y_m = \frac{m\lambda D}{d}.$$

**3.6**



**FIGURA 3.8** El patrón de interferencia para una doble rendija tiene una intensidad que decae con el ángulo. La imagen muestra múltiples líneas o franjas brillantes y oscuras, formadas por la luz que pasa a través de una doble rendija.

### EJEMPLO 3.1

#### Cálculo de una longitud de onda a partir de un patrón de interferencia

Supongamos que se hace pasar la luz de un láser de helio (He) y neón (Ne) a través de dos rendijas separadas por 0,0100 mm y se encuentra que la tercera línea brillante en una pantalla se forma con un ángulo de  $10,95^\circ$  con respecto al rayo incidente. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz?

#### Estrategia

El fenómeno es una interferencia de dos rendijas como se ilustra en la [Figura 3.8](#) y la tercera línea brillante se debe a una interferencia constructiva de tercer orden, lo que significa que  $m = 3$ . Se nos da  $d = 0,0100$  mm y  $\theta = 10,95^\circ$ . Por lo tanto, la longitud de onda se puede encontrar utilizando la ecuación  $d \sin \theta = m\lambda$  para la interferencia constructiva.

#### Solución

Al resolver  $d \sin \theta = m\lambda$  para la longitud de onda  $\lambda$  se obtiene

$$\lambda = \frac{d \sin \theta}{m}.$$

Al sustituir los valores conocidos se obtiene

$$\lambda = \frac{(0,0100 \text{ mm})(\sin 10,95^\circ)}{3} = 6,33 \times 10^{-4} \text{ mm} = 633 \text{ nm}.$$

#### Importancia

Es la longitud de onda de luz, de tres dígitos, emitida por el láser común de He-Ne. No por casualidad, este color rojo es similar al que emiten las luces de neón. Sin embargo, lo más importante es que los patrones de interferencia pueden utilizarse para medir la longitud de onda. Young hizo esto para las longitudes de onda visibles. Esta técnica analítica se sigue utilizando ampliamente para medir los espectros electromagnéticos. Para un orden determinado, el ángulo de interferencia constructiva aumenta con  $\lambda$ , de modo que se pueden obtener espectros (mediciones de la intensidad en función de la longitud de onda).



## EJEMPLO 3.2

### Cálculo del mayor orden posible

Los patrones de interferencia no tienen un número infinito de líneas, ya que hay un límite en el tamaño de  $m$ . ¿Cuál es la interferencia constructiva de mayor orden posible con el sistema descrito en el ejemplo anterior?

#### Estrategia

La ecuación  $d \sin \theta = m\lambda$  (para  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ ) describe la interferencia constructiva de dos rendijas. Para valores fijos de  $d$  y  $\lambda$ , cuanto mayor sea  $m$ , mayor será  $\sin \theta$ . Sin embargo, el valor máximo que  $\sin \theta$  puede tener es 1, para un ángulo de  $90^\circ$ . (Los ángulos mayores implican que la luz va hacia atrás y no llega a la pantalla) Busquemos qué valor de  $m$  corresponde a este ángulo máximo de difracción.

#### Solución

Al resolver la ecuación  $d \sin \theta = m\lambda$  para  $m$  se obtiene

$$m = \frac{d \sin \theta}{\lambda}.$$

Si tomamos  $\sin \theta = 1$  y sustituimos los valores de  $d$  y  $\lambda$  del ejemplo anterior da

$$m = \frac{(0,0100 \text{ mm})(1)}{633 \text{ nm}} \approx 15,8.$$

Por lo tanto, el mayor número entero que puede ser  $m$  es 15, o  $m = 15$ .

#### Importancia

El número de franjas depende de la longitud de onda y de la separación de las rendijas. El número de franjas es muy grande para grandes separaciones de rendijas. Sin embargo, recordemos (consulte la sección [La propagación de la luz](#) y la introducción de este capítulo) que la interferencia de las ondas solo es prominente cuando la onda interactúa con objetos que no son grandes en comparación con la longitud de onda. Por lo tanto, si la separación de las rendijas y los tamaños de las mismas son mucho mayores que la longitud de onda, el patrón de intensidad de la luz en la pantalla cambia, por lo que simplemente hay dos líneas brillantes proyectadas por las rendijas, como se espera, cuando la luz se comporta como rayos. También observamos que las franjas se hacen más tenues cuanto más se alejan del centro. Por lo tanto, es posible que no se puedan observar las 15 franjas.

## COMPRUEBE LO APRENDIDO 3.1

En el sistema utilizado en los ejemplos anteriores, ¿con qué ángulos se forman la primera y la segunda franja brillante?

## 3.3 Interferencias de rendijas múltiples

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

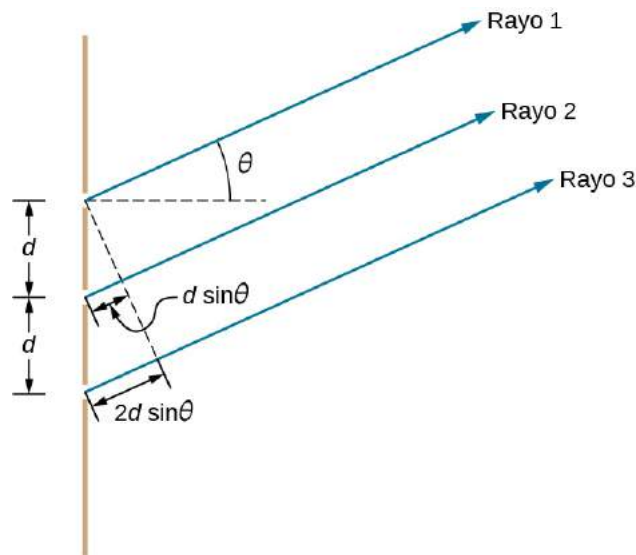
- Describir las ubicaciones e intensidades de los máximos secundarios para la interferencia de rendijas múltiples

El análisis de la interferencia de la luz que pasa a través de dos rendijas establece el marco teórico de la interferencia y nos da una visión histórica de los experimentos de Thomas Young. Sin embargo, gran parte de las aplicaciones modernas de la interferencia de rendijas no utilizan solo dos rendijas, sino muchas, acercándose al infinito a efectos prácticos. El elemento óptico clave se llama rejilla de difracción, una herramienta importante en el análisis óptico, que tratamos en detalle en la sección [Difracción](#). En esta sección, comenzamos el análisis de la interferencia de rendijas múltiples tomando los resultados de nuestro análisis de la doble rendija ( $N = 2$ ) y ampliándolo a configuraciones con tres, cuatro y un número mucho mayor de rendijas.

La [Figura 3.9](#) muestra el caso más simple de interferencia de rendijas múltiples, con tres rendijas, o  $N = 3$ . El espacio entre las rendijas es  $d$  y la diferencia de longitud de recorrido entre las rendijas adyacentes es  $d \sin \theta$ , igual que en el caso de la doble rendija. La novedad es que la diferencia de longitud de recorrido para la primera y la tercera rendija es  $2d \sin \theta$ . La condición para la interferencia constructiva es la misma que para la doble rendija, es decir

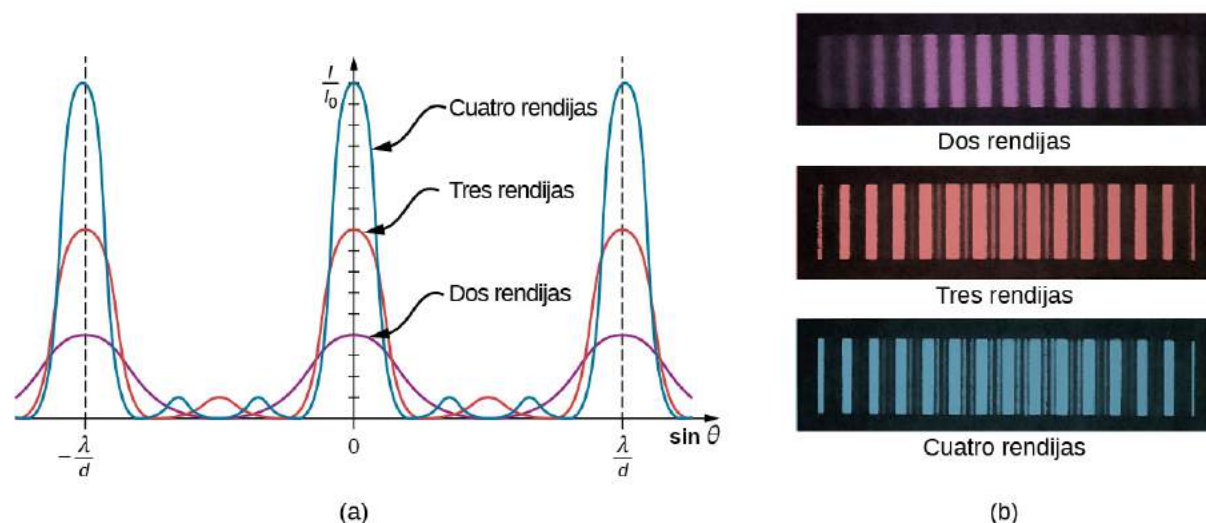
$$d \sin \theta = m\lambda.$$

Cuando se cumple esta condición,  $2d \sin \theta$  es automáticamente un múltiplo de  $\lambda$ , por lo que los tres rayos se combinan constructivamente, y las franjas brillantes que se producen aquí se denominan **máximos principales**. Pero, ¿qué ocurre cuando la diferencia de longitud de recorrido entre las rendijas adyacentes es solo  $\lambda/2$ ? Podemos pensar que el primer y el segundo rayo interfieren destructivamente, pero el tercer rayo permanece inalterado. En lugar de obtener una franja oscura, o un mínimo, como en el caso de la doble rendija, vemos un **máximo secundario** con intensidad inferior a los máximos principales.



**FIGURA 3.9** Interferencia con tres rendijas. Diferentes pares de rayos emergentes pueden combinarse constructiva o destructivamente al mismo tiempo, dando lugar a máximos secundarios.

En general, para  $N$  rendijas, estos máximos secundarios se producen siempre que hay un rayo no apareado que no desaparece debido a la interferencia destructiva. Esto ocurre en  $(N - 2)$  posiciones uniformes entre los máximos principales. La amplitud de la onda electromagnética disminuye en consecuencia a  $1/N$  de la onda en los máximos principales, y la intensidad de la luz, al ser proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda, disminuye a  $1/N^2$  de la intensidad en comparación con los máximos principales. Como muestra la [Figura 3.10](#), entre cada máximo (principal o secundario) se encuentra una franja oscura. A medida que  $N$  aumenta y el número de franjas brillantes y oscuras se incrementa, los anchos de los máximos se estrechan debido a la proximidad de las franjas oscuras. Dado que la cantidad total de energía de la luz permanece inalterada, para que los máximos sean más estrechos es necesario que cada uno de ellos alcance una intensidad correspondientemente mayor.



**FIGURA 3.10** Patrones de franjas de interferencia para dos, tres y cuatro rendijas. A medida que aumenta el número de rendijas, aparecen más máximos secundarios, pero los máximos principales se vuelven más brillantes y estrechos. (a) Gráfico y (b) fotografías de patrones de franjas.

### 3.4 Interferencia de película delgada

#### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir los cambios de fase que se producen con la reflexión
- Describir las franjas establecidas por los rayos reflejados de una fuente común
- Explicar la aparición de colores en películas delgadas

Los colores brillantes que se ven en una mancha de aceite que flota en el agua o en una burbuja de jabón iluminada por el sol se deben a las interferencias. Los colores más brillantes son los que interfieren de forma constructiva. Esta interferencia se produce entre la luz reflejada en diferentes superficies de una película delgada; por ello, el efecto se conoce como **interferencia de película delgada**.

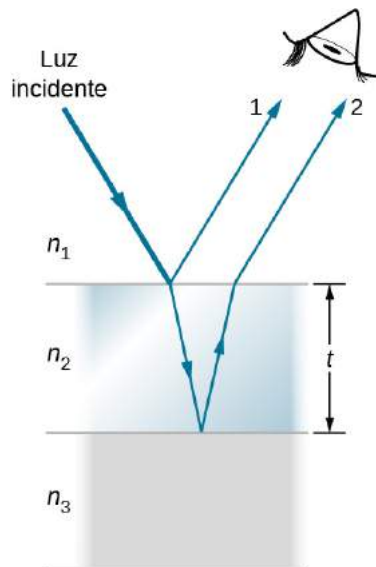
Como hemos señalado antes, los efectos de interferencia son más prominentes cuando la luz interactúa con algo que tiene un tamaño similar a su longitud de onda. Una película delgada es aquella que tiene un grosor  $t$  menor que algunas veces la longitud de onda de la luz,  $\lambda$ . Dado que el color se asocia indirectamente con  $\lambda$  y debido a que toda interferencia depende de alguna manera de la relación de  $\lambda$  al tamaño del objeto en cuestión, deberíamos esperar ver diferentes colores para diferentes grosores de una lámina, como en la [Figura 3.11](#).



**FIGURA 3.11** Estas burbujas de jabón muestran colores brillantes cuando se exponen a la luz solar. (crédito: Scott

Robinson)

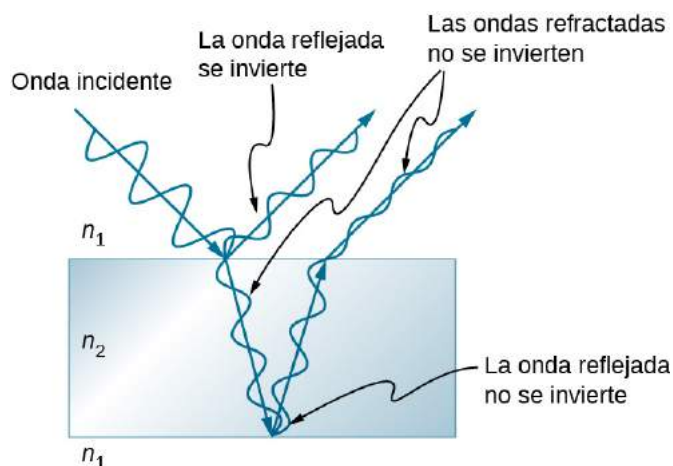
¿Qué causa la interferencia de película delgada? La [Figura 3.12](#) muestra cómo se puede interferir la luz reflejada en las superficies superior e inferior de una película. La luz incidente solo se refleja parcialmente en la superficie superior de la película (rayo 1). El resto entra en la película y se refleja parcialmente en la superficie inferior. Una parte de la luz reflejada en la superficie inferior puede salir de la parte superior de la película (rayo 2) e interferir con la luz reflejada en la parte superior (rayo 1). El rayo que entra en la película recorre una distancia mayor, por lo que puede estar en fase o fuera de fase con el rayo reflejado desde la parte superior. Sin embargo, considere por un momento, de nuevo, las burbujas en la [Figura 3.11](#). Las burbujas son más oscuras donde son más delgadas. Además, si se observa con atención una burbuja de jabón, se observará que se oscurece en el punto donde se rompe. En el caso de películas muy delgadas, la diferencia de longitudes de trayectoria de los rayos 1 y 2 en la [Figura 3.12](#) es insignificante, así que ¿por qué deberían interferir destructivamente y no constructivamente? La respuesta es que puede producirse un cambio de fase por reflexión, como se explica a continuación.



**FIGURA 3.12** La luz que incide en una película delgada se refleja parcialmente (rayo 1) y se refracta parcialmente en la superficie superior. El rayo refractado se refleja parcialmente en la superficie inferior y emerge como rayo 2. Estos rayos interfieren de una manera que depende del grosor de la película y de los índices de refracción de los distintos medios.

### Cambios de fase por reflexión

Ya vimos antes (en la sección [Ondas \(http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-1/pages/16-introduccion\)](http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-1/pages/16-introduccion)) que la reflexión de las ondas mecánicas puede implicar un cambio de fase de  $180^\circ$ . Por ejemplo, una onda viajera en una cuerda se invierte (es decir, un cambio de fase de  $180^\circ$  cambio de fase) al reflejarse en un borde al que se ata una cuerda más pesada. Sin embargo, si la segunda cuerda es más ligera (o más exactamente, de menor densidad lineal), no se produce la inversión. Las ondas luminosas producen el mismo efecto, pero el parámetro decisivo para la luz es el índice de refracción. Las ondas de luz sufren un cambio de fase de  $180^\circ$  o  $\pi$  por reflexión en una interfase más allá de la cual se encuentra un medio de mayor índice de refracción. No se produce ningún cambio de fase cuando se refleja desde un medio de menor índice de refracción ([Figura 3.13](#)). Debido a la naturaleza periódica de las ondas, este cambio de fase o inversión equivale a  $\pm\lambda/2$  en la distancia recorrida, o en la longitud del trayecto. Tanto la longitud del trayecto como los índices de refracción son factores importantes en la interferencia de película delgada.



**FIGURA 3.13** La reflexión en una interfase para la luz que viaja desde un medio con índice de refracción  $n_1$  a un medio con índice de refracción  $n_2$ ,  $n_1 < n_2$ , hace que la fase de la onda cambie en  $\pi$  radianes.

Si la película en la [Figura 3.12](#) es una **burbuja de jabón** (esencialmente agua con aire en ambos lados), entonces se produce un deslizamiento de fase de  $\lambda/2$  para el rayo 1 pero no para el rayo 2. Así, cuando la película es muy delgada y la diferencia de longitud de recorrido entre los dos rayos es insignificante, están exactamente desfasados y se produce una interferencia destructiva en todas las longitudes de onda. Por lo tanto, la burbuja de jabón es oscura aquí. El grosor de la película en relación con la longitud de onda de la luz es el otro factor crucial en la interferencia de película delgada. El rayo 2 en [Figura 3.12](#) recorre una distancia mayor que el rayo 1. Para la luz que incide perpendicularmente a la superficie, el rayo 2 recorre una distancia de aproximadamente  $2t$  más que el rayo 1. Cuando esta distancia es un múltiplo entero o semientero de la longitud de onda en el medio ( $\lambda_n = \lambda/n$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda en el vacío y  $n$  es el índice de refracción), se produce una interferencia constructiva o destructiva, dependiendo también de si hay un deslizamiento de fase en uno u otro rayo.

### EJEMPLO 3.3

#### Cálculo del grosor de un revestimiento de lente antirreflejante

Las cámaras sofisticadas utilizan una serie de varios objetivos. La luz puede reflejarse en las superficies de estas lentes y degradar la claridad de la imagen. Para limitar estos reflejos, las lentes se recubren con una capa delgada de fluoruro de magnesio, que provoca una interferencia destructiva de película delgada. ¿Cuál es el menor grosor que puede tener esta película, si su índice de refracción es de 1,38 y está diseñada para limitar la reflexión de la luz de 550 nm, normalmente la longitud de onda visible más intensa? Supongamos que el índice de refracción del vidrio es de 1,52.

#### Estrategia

Consulte la [Figura 3.12](#) y utilice  $n_1 = 1,00$  para el aire,  $n_2 = 1,38$ , y  $n_3 = 1,52$ . Tanto el rayo 1 como el rayo 2 tienen un cambio de  $\lambda/2$  con la reflexión. Por lo tanto, para obtener una interferencia destructiva, el rayo 2 debe viajar media longitud de onda más lejos que el rayo 1. Para los rayos que inciden perpendicularmente, la diferencia de longitud de trayectoria es de  $2t$ .

#### Solución

Para obtener la interferencia destructiva aquí,

$$2t = \frac{\lambda_{n2}}{2}$$

donde  $\lambda_{n2}$  es la longitud de onda en la película y viene dada por  $\lambda_{n2} = \lambda/n_2$ . Así,

$$2t = \frac{\lambda/n_2}{2}.$$

Al resolver para  $t$  e introducir los valores conocidos se obtiene

$$t = \frac{\lambda/n_2}{4} = \frac{(500 \text{ nm})/1,38}{4} = 90,6 \text{ nm}.$$

### Importancia

Las películas, como la de este ejemplo, son más eficaces en la producción de interferencia destructiva cuando se utiliza la capa más delgada, ya que se reduce la intensidad de la luz en una gama más amplia de ángulos de incidencia. Estas películas se denominan recubrimientos antirreflejantes; sin embargo, esta es solo una descripción aproximadamente correcta, ya que las demás longitudes de onda solo se anulan parcialmente. Los recubrimientos antirreflejantes también se utilizan en los cristales de los automóviles y en los lentes de sol.

### Combinación de la diferencia de longitud de trayectoria con el cambio de fase

La interferencia de película delgada es más constructiva o más destructiva cuando la diferencia de longitud de trayectoria de los dos rayos es una longitud de onda entera o semientera. Es decir, para los rayos que inciden perpendicularmente,

$$2t = \lambda_n, 2\lambda_n, 3\lambda_n, \dots \text{ o } 2t = \lambda_n/2, 3\lambda_n/2, 5\lambda_n/2, \dots$$

Para saber si la interferencia es constructiva o destructiva, también hay que determinar si hay un cambio de fase con la reflexión. Por tanto, la interferencia de película delgada depende del grosor de la película, de la longitud de onda de la luz y de los índices de refracción. En el caso de la luz blanca que incide sobre una película de grosor variable, se pueden observar los colores del arcoíris de la interferencia constructiva para varias longitudes de onda a medida que varía el grosor.



### EJEMPLO 3.4

#### Burbujas de jabón

(a) ¿Cuáles son los tres grosores más pequeños de una burbuja de jabón que producen una interferencia constructiva para la luz roja con una longitud de onda de 650 nm? Se considera que el índice de refracción del jabón es el mismo que el del agua. (b) ¿Qué tres grosores más pequeños dan interferencia destructiva?

#### Estrategia

Utilice la [Figura 3.12](#) para visualizar la burbuja, que actúa como una película delgada entre dos capas de aire. Así,  $n_1 = n_3 = 1,00$  para el aire, y  $n_2 = 1,333$  para el jabón (equivalente al agua). Hay un desplazamiento de  $\lambda/2$  para el rayo 1 reflejado desde la superficie superior de la burbuja y ningún desplazamiento para el rayo 2 reflejado desde la superficie inferior. Para obtener una interferencia constructiva, entonces, la diferencia de la longitud del trayecto ( $2t$ ) debe ser un múltiplo semientero de la longitud de onda: los tres primeros son  $\lambda_n/2$ ,  $3\lambda_n/2$ , y  $5\lambda_n/2$ . Para obtener una interferencia destructiva, la diferencia de longitud de trayecto debe ser un múltiplo integral de la longitud de onda, siendo los tres primeros 0,  $\lambda_n$ , y  $2\lambda_n$ .

#### Solución

a. La interferencia constructiva se produce aquí cuando

$$2t_c = \frac{\lambda_n}{2}, \frac{3\lambda_n}{2}, \frac{5\lambda_n}{2}, \dots$$

Así, el menor grosor constructivo  $t_c$  es

$$t_c = \frac{\lambda_n}{4} = \frac{\lambda/n}{4} = \frac{(650 \text{ nm})/1,333}{4} = 122 \text{ nm}.$$

El siguiente grosor que da la interferencia constructiva es  $t'_c = 3\lambda_n/4$ , de modo que

$$t'_c = 366 \text{ nm}.$$

Por último, el tercer grosor que produce la interferencia constructiva es  $t''_c = 5\lambda_n/4$ , de modo que

$$t'_c = 610 \text{ nm.}$$

b. En el caso de la interferencia destructiva, la diferencia de longitud de trayectoria es un múltiplo entero de la longitud de onda. La primera se produce para un grosor cero, ya que hay un cambio de fase en la superficie superior, es decir,

$$t_d = 0,$$

el caso muy delgado (o insignificamente delgado) comentado anteriormente. El primer grosor distinto a cero que produce una interferencia destructiva es

$$2t'_d = \lambda_n.$$

Al sustituir los valores conocidos se obtiene

$$t'_d = \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda/n}{2} = \frac{(650 \text{ nm})/1,333}{2} = 244 \text{ nm.}$$

Por último, el tercer grosor destructivo es  $2t''_d = 2\lambda_n$ , de modo que

$$t''_d = \lambda_n = \frac{\lambda}{n} = \frac{650 \text{ nm}}{1,333} = 488 \text{ nm.}$$

### Importancia

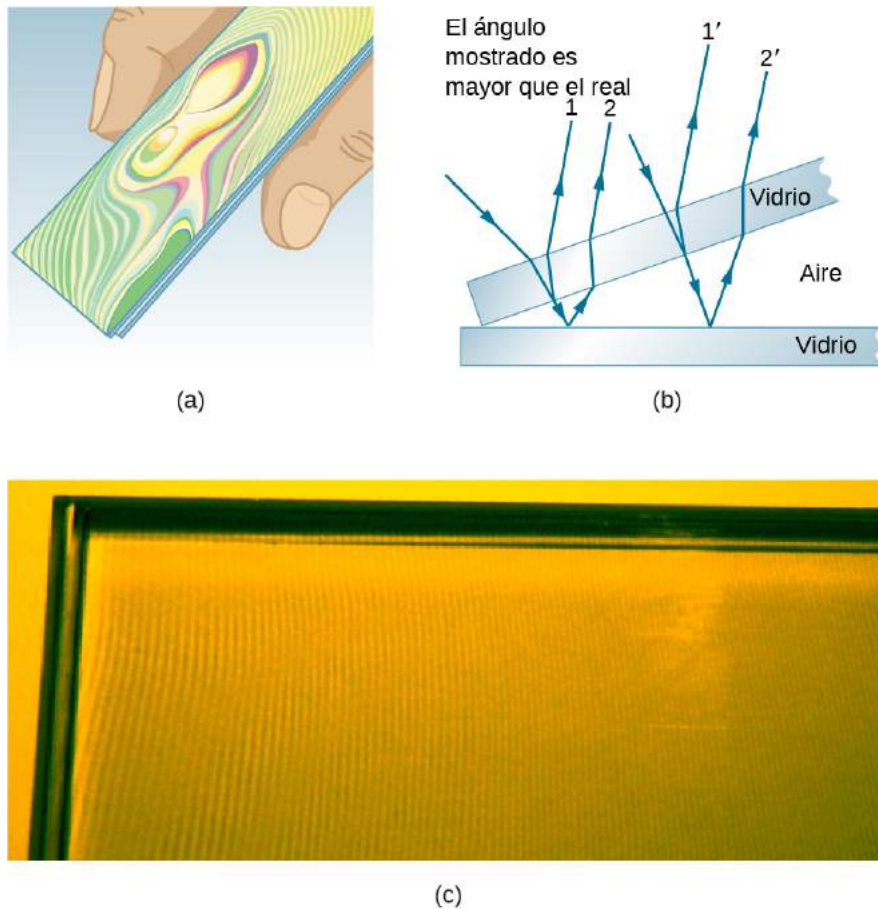
Si la burbuja se iluminara con luz roja pura, veríamos bandas brillantes y oscuras con aumentos de grosor muy uniformes. Primero sería una banda oscura a 0 de grosor, luego brillante a 122 nm de grosor, luego oscura a 244 nm, brillante a 366 nm, oscura a 488 nm y brillante a 610 nm. Si la burbuja variara suavemente de grosor, como una cuña lisa, entonces las bandas estarían espaciadas uniformemente.

### ✓ **COMPRUEBE LO APRENDIDO 3.2**

Siguiendo con el [Ejemplo 3.4](#), ¿cuáles son los dos grosores siguientes de burbuja de jabón que darían lugar a (a) una interferencia constructiva y (b) una interferencia destructiva?

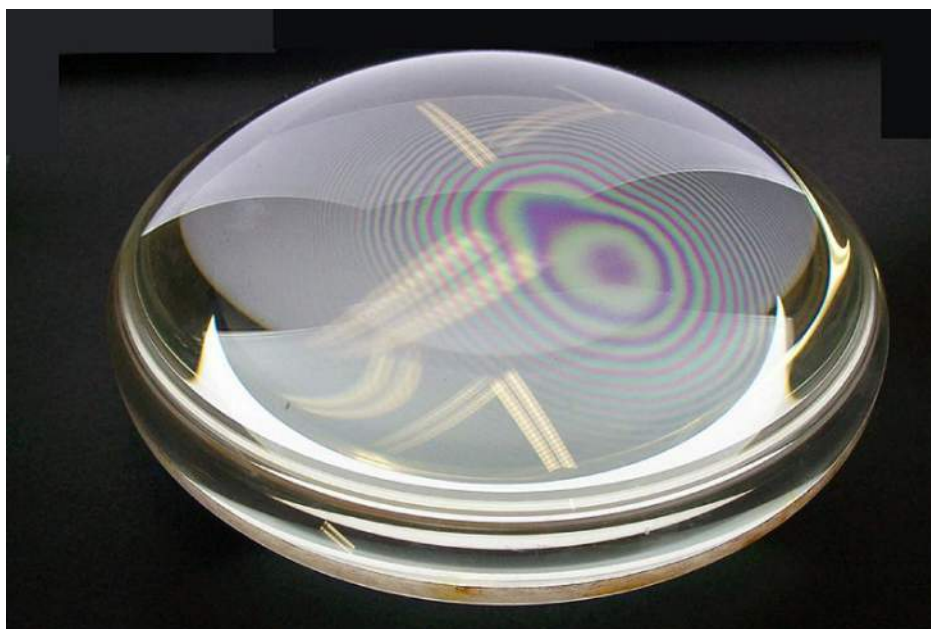
Otro ejemplo de interferencia de película delgada puede verse cuando se separan los portaobjetos del microscopio (consulte la [Figura 3.14](#)). Los portaobjetos son muy planos, de modo que la cuña de aire entre ellos aumenta de grosor de manera muy uniforme. Se produce un cambio de fase en la segunda superficie, pero no en la primera, por lo que se forma una banda oscura donde se tocan los portaobjetos. Los colores del arcoíris de la interferencia constructiva se repiten, pasando del violeta al rojo una y otra vez a medida que aumenta la distancia entre los portaobjetos. A medida que la capa de aire aumenta, las bandas se vuelven más difíciles de ver, porque los pequeños cambios en el ángulo de incidencia tienen mayores efectos en las diferencias de longitud de trayectoria. Si se utiliza luz monocromática en lugar de luz blanca, se obtienen bandas brillantes y oscuras en lugar de repetir los colores del arcoíris.





**FIGURA 3.14** (a) Las bandas de colores del arcoíris se producen por la interferencia de película delgada en el aire entre los dos portaobjetos de vidrio. (b) Esquema de las trayectorias que siguen los rayos en la cuña de aire entre los portaobjetos. (c) Si la cuña de aire se ilumina con luz monocromática, se obtienen bandas brillantes y oscuras en lugar de repetir los colores del arcoíris.

Una importante aplicación de la interferencia de película delgada se encuentra en la fabricación de instrumentos ópticos. Una lente o un espejo pueden compararse con un patrón mientras se forjan, lo que permite darles forma con una exactitud inferior a una longitud de onda en toda su superficie. La [Figura 3.15](#) ilustra el fenómeno denominado **anillos de Newton**, que se produce cuando las superficies planas de dos lentes se colocan juntas. (Las bandas circulares se denominan anillos de Newton porque Isaac Newton las describió con detalle, así como su uso. Newton no los descubrió; lo hizo Robert Hooke, y Newton no creía que se debieran al carácter ondulatorio de la luz). Cada anillo sucesivo de un color determinado indica un aumento de solo media longitud de onda en la distancia entre la lente y el blanco, por lo que se puede obtener una gran precisión. Una vez que la lente es perfecta, no aparecen anillos.



**FIGURA 3.15** Las franjas de interferencia de los “anillos de Newton” se producen cuando se colocan dos lentes planoconvexas con sus superficies planas en contacto. Los anillos se crean por la interferencia entre la luz reflejada en las dos superficies como resultado de un ligero espacio entre ellas, lo que indica que estas superficies no son precisamente planas, sino que son ligeramente convexas. (crédito: Ulf Seifert)

La interferencia de película delgada tiene muchas otras aplicaciones, tanto en la naturaleza como en la fabricación. Las alas de ciertas polillas y mariposas tienen colores casi iridiscentes debido a la interferencia de película delgada. Además de la pigmentación, el color del ala se ve afectado en gran medida por la interferencia constructiva de ciertas longitudes de onda reflejadas por su superficie recubierta por una película. Algunos fabricantes de automóviles ofrecen trabajos de pintura especiales que utilizan la interferencia de película delgada para producir colores que cambian con el ángulo. Esta costosa opción se basa en la variación de las diferencias de longitud de la película delgada con el ángulo. Los elementos de seguridad de las tarjetas de crédito, los billetes, las licencias de conducir y otros artículos similares propensos a la falsificación utilizan interferencia de película delgada, rejillas de difracción u hologramas. Ya en 1998, Australia se puso a la cabeza con billetes de dólar impresos en polímero con un elemento de seguridad de rejilla de difracción, que dificulta la falsificación de la divisa. Otros países, como Canadá, Nueva Zelanda y Taiwán, utilizan tecnologías similares, mientras que la divisa estadounidense incluye un efecto de interferencia de película delgada.

### 3.5 El interferómetro de Michelson

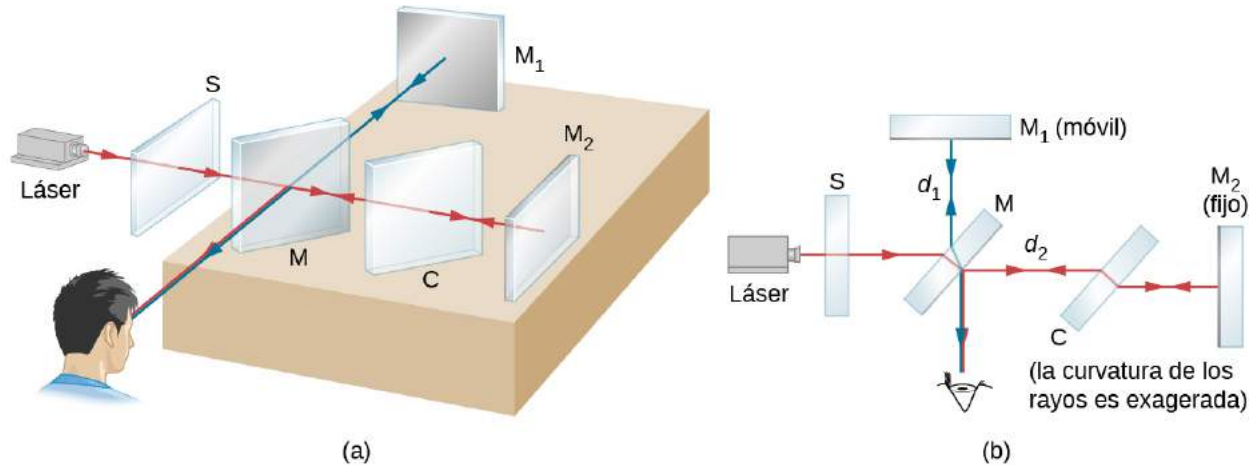
#### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar los cambios en las franjas observadas con un interferómetro de Michelson causados por los movimientos de espejos
- Explicar los cambios en las franjas observadas con un interferómetro de Michelson causados por cambios en el medio

El **interferómetro** de Michelson (inventado por el físico estadounidense Albert A. Michelson, 1852-1931) es un instrumento de precisión que produce franjas de interferencia al dividir un haz de luz en dos partes que recombinan después de haber recorrido caminos ópticos diferentes. La [Figura 3.16](#) representa el interferómetro y la trayectoria de un haz de luz desde un único punto de la fuente extendida  $S$ , que es una lámina de vidrio esmerilado que difunde la luz de una lámpara monocromática de longitud de onda  $\lambda_0$ . El haz incide en un espejo semitransparente  $M$ , donde la mitad se refleja hacia un lado y la otra mitad atraviesa el espejo. La luz reflejada viaja hasta el espejo plano móvil  $M_1$ , donde se refleja a través de  $M$  hacia el observador. La mitad transmitida del haz original es reflejada por el espejo estacionario  $M_2$  y luego hacia el observador

por M.

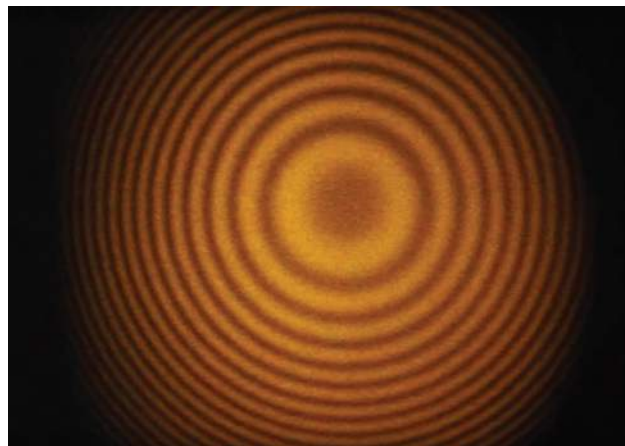


**FIGURA 3.16** (a) El interferómetro de Michelson. La fuente de luz extendida es una lámina de vidrio esmerilado que difunde la luz de un láser. (b) Vista plana del interferómetro.

Como ambos haces se originan en el mismo punto de la fuente, son coherentes y, por tanto, interfieren. Observe en la figura que un rayo pasa tres veces por M y el otro solo una. Para asegurar que ambos haces atraviesen el mismo grosor de vidrio, se coloca una lámina compensadora C de vidrio transparente en el brazo que contiene  $M_2$ . Esta lámina es un duplicado de M (sin el plateado) y suele cortarse de la misma pieza de vidrio utilizada para producir M. Con el compensador colocado, cualquier diferencia de fase entre los dos haces se debe únicamente a la diferencia en las distancias que recorren.

La diferencia de trayectoria de los dos haces cuando se recombinan es  $2d_1 - 2d_2$ , donde  $d_1$  es la distancia entre M y  $M_1$ , y  $d_2$  es la distancia entre M y  $M_2$ . Supongamos que esta diferencia de trayectoria es un número entero de longitudes de onda  $m\lambda_0$ . Entonces, se produce una interferencia constructiva y el observador ve una imagen brillante del punto de la fuente. Ahora, la luz procedente de cualquier otro punto de la fuente cuyos dos haces tienen esta misma diferencia de trayectoria también sufre una interferencia constructiva y produce una imagen brillante. El conjunto de estas imágenes puntuales es una franja brillante que corresponde a una diferencia de trayectoria de  $m\lambda_0$  (Figura 3.17). Cuando  $M_1$  se desplaza una distancia  $\Delta d = \lambda_0/2$ , esta diferencia de trayectoria cambia por  $\lambda_0$ , y cada franja se desplaza a la posición previamente ocupada por una franja adyacente. En consecuencia, contando el número de franjas  $m$  que pasan por un punto determinado mientras  $M_1$  se mueve, un observador puede medir desplazamientos minúsculos con una precisión de una fracción de longitud de onda, como muestra la relación

$$\Delta d = m \frac{\lambda_0}{2}. \quad 3.7$$



**FIGURA 3.17** Franjas producidas con un interferómetro de Michelson (crédito: "SILLAGESvideos"/YouTube)

### EJEMPLO 3.5

#### Mediciones precisas de la distancia mediante el interferómetro de Michelson

En un interferómetro de Michelson se utiliza una luz láser roja de longitud de onda de 630 nm. Mientras se mantiene el espejo  $M_1$  fijo, el espejo  $M_2$  se mueve. Se comprueba que las franjas se mueven más allá de una cruz fija en el visor. Halle la distancia que el espejo  $M_2$  se desplaza para que una sola franja sobrepase la línea de referencia.

#### Estrategia

Consulte la geometría en la [Figura 3.16](#). Utilizamos el resultado de la condición de interferencia del interferómetro de Michelson para hallar la distancia recorrida,  $\Delta d$ .

#### Solución

Para una luz láser roja de 630 nm y para cada cruce de franja ( $m = 1$ ), la distancia recorrida por  $M_2$  si mantiene  $M_1$  fijo es

$$\Delta d = m \frac{\lambda_0}{2} = 1 \times \frac{630 \text{ nm}}{2} = 315 \text{ nm} = 0,315 \mu\text{m}.$$

#### Importancia

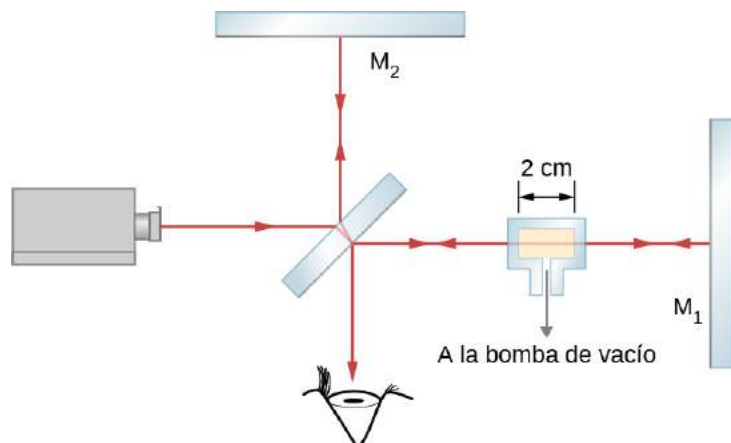
Una aplicación importante de esta medida es la definición del metro estándar. Como se menciona en [Unidades y medidas \(<http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-1/pages/1-introduccion>\)](#), la longitud del metro estándar se definió en su momento como el desplazamiento del espejo en un interferómetro de Michelson correspondiente a 1 650 763,73 longitudes de onda de la franja particular de criptón-86 en un tubo de descarga de gas.

### EJEMPLO 3.6

#### Medición del índice de refracción de un gas

En uno de los brazos de un interferómetro de Michelson se coloca una cámara de vidrio con aditamentos para evacuar el interior e introducir gases en ella. El espacio dentro del contenedor es de 2 cm de ancho.

Inicialmente, el contenedor está vacío. Al dejar entrar lentamente el gas en la cámara, se observa que las franjas oscuras pasan por una línea de referencia en el campo de observación. En el momento en que la cámara se llena hasta la presión deseada, ha contado 122 franjas que se mueven más allá de la línea de referencia. La longitud de onda de la luz utilizada es de 632,8 nm. ¿Cuál es el índice de refracción de este gas?



#### Estrategia

Las franjas  $m = 122$  observadas componen la diferencia entre el número de longitudes de onda que caben en la cámara vacía (vacío) y el número de longitudes de onda que caben en la misma cámara cuando está llena de

gas. La longitud de onda en la cámara llena es más corta por un factor  $n$ , el índice de refracción.

### Solución

El rayo recorre una distancia  $t = 2$  cm a la derecha a través de la cámara de vidrio y otra distancia  $t$  a la izquierda al reflejarse. El recorrido total es  $L = 2t$ . Cuando está vacía, el número de longitudes de onda que caben en esta cámara es

$$N_0 = \frac{L}{\lambda_0} = \frac{2t}{\lambda_0}$$

donde  $\lambda_0 = 632,8$  nm es la longitud de onda en el vacío de la luz utilizada. En cualquier otro medio, la longitud de onda es  $\lambda = \lambda_0/n$  y el número de longitudes de onda que caben en la cámara llena de gas es

$$N = \frac{L}{\lambda} = \frac{2t}{\lambda_0/n}$$

El número de franjas observadas en la transición es

$$\begin{aligned} m &= N - N_0, \\ &= \frac{2t}{\lambda_0/n} - \frac{2t}{\lambda_0}, \\ &= \frac{2t}{\lambda_0}(n - 1). \end{aligned}$$

Al resolver para  $(n - 1)$  se obtiene

$$n - 1 = m \left( \frac{\lambda_0}{2t} \right) = 122 \left( \frac{632,8 \times 10^{-9} \text{ m}}{2(2 \times 10^{-2} \text{ m})} \right) = 0,0019$$

y  $n = 1,0019$ .

### Importancia

Los índices de refracción de los gases son tan cercanos al del vacío que normalmente los consideramos iguales a 1. La diferencia entre 1 y 1,0019 es tan pequeña que para medirla se necesita una técnica muy sensible, como la interferometría. Por ejemplo, no podemos esperar medir este valor utilizando técnicas basadas simplemente en la ley de Snell.

### ✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 3.3

Aunque  $m$ , el número de franjas observadas, es un número entero, que a menudo se considera que tiene cero de incertidumbre, en términos prácticos, es demasiado fácil perder la cuenta cuando se cuentan franjas. En el [Ejemplo 3.6](#), si estima que puede haber omitido hasta cinco franjas cuando informó  $m = 122$  franjas, (a) ¿es el valor del índice de refracción calculado en el [Ejemplo 3.6](#) demasiado grande o demasiado pequeño? (b) ¿En qué medida?



## ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

### Óptica de ondas

**Paso 1.** *Examine la situación para determinar si hay interferencias.* Identifique si en el problema se consideran rendijas, películas delgadas o interferómetros.

**Paso 2.** *Si se trata de rendijas,* observe que las rejillas de difracción y las rendijas dobles producen patrones de interferencia muy similares, pero que las rejillas tienen máximos más estrechos (más agudos). Los patrones de una sola rendija se caracterizan por un gran máximo central y máximos más pequeños a los lados.

**Paso 3.** *Si se trata de una interferencia de película delgada o de un interferómetro,* anote la diferencia de longitud de trayectoria entre los dos rayos que interfieren. Asegúrese de utilizar la longitud de onda en el

medio en cuestión, ya que difiere de la longitud de onda en el vacío. Tenga en cuenta también que hay un deslizamiento de fase  $\lambda/2$  adicional cuando la luz se refleja en un medio con mayor índice de refracción.

**Paso 4.** *Identifique exactamente lo que hay que determinar en el problema (identifique las incógnitas).* Es útil tener una lista escrita. Dibuje un diagrama de la situación. Es útil marcar el diagrama.

**Paso 5.** *Haga una lista de la información dada o puede deducirse del problema tal y como está planteado (identifique los datos conocidos).*

**Paso 6.** *Resuelva la ecuación apropiada para la cantidad a determinar (la incógnita) e introduzca los datos conocidos.* Las rendijas, las rejillas y el límite de Rayleigh implican ecuaciones.

**Paso 7.** *En el caso de la interferencia de película delgada, se tiene una interferencia constructiva para un desplazamiento total que es un número entero de longitudes de onda. Se tiene una interferencia destructiva para un desplazamiento total de un número semientero de longitudes de onda.* Tenga siempre en cuenta que de cresta a cresta es constructiva mientras que de cresta a valle es destructiva.

**Paso 8.** *Compruebe si la respuesta es razonable: ¿Tiene sentido?* Los ángulos en los patrones de interferencia no pueden ser mayores que  $90^\circ$ , por ejemplo.

---

## Revisión Del Capítulo

### Términos Clave

**Anillos de Newton** patrón de interferencia circular creado por la interferencia entre la luz reflejada en dos superficies como resultado de un ligero espacio entre ellas

**franjas** patrones brillantes y oscuros de interferencia

**incoherente** las ondas tienen relaciones de fase aleatorias

**interferencia de película delgada** interferencia entre la luz reflejada en diferentes superficies de una lámina delgada

**interferómetro** instrumento que utiliza la interferencia de ondas para realizar mediciones

**máximo principal** las franjas de interferencia más brillantes observadas con múltiples rendijas

**máximo secundario** franjas de interferencia brillantes de intensidad inferior a los máximos principales

**monocromático** luz compuesta por una sola longitud de onda

**ondas coherentes** las ondas están en fase o tienen una relación de fase definida

**orden** número entero  $m$  utilizado en las ecuaciones de interferencia constructiva y destructiva para una doble rendija

### Ecuaciones Clave

Interferencia constructiva

$$\Delta l = m\lambda, \text{ para } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Interferencia destructiva

$$\Delta l = (m + \frac{1}{2})\lambda, \text{ para } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Diferencia de longitud de camino para las ondas desde dos rendijas hasta un punto común en una pantalla

$$\Delta l = d \sin \theta$$

Interferencia constructiva

$$d \sin \theta = m\lambda, \text{ para } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Interferencia destructiva

$$d \sin \theta = (m + \frac{1}{2})\lambda, \text{ para } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Distancia del máximo central a la *menésima* franja brillante

$$y_m = \frac{m\lambda D}{d}$$

Desplazamiento medido por un interferómetro de Michelson

$$\Delta d = m \frac{\lambda_0}{2}$$

## Resumen

### 3.1 Interferencia de doble rendija de Young

- El experimento de la doble rendija de Young demostró definitivamente el carácter ondulatorio de la luz.
- Un patrón de interferencia se obtiene por la superposición de la luz de dos rendijas.

### 3.2 Matemáticas de la interferencia

- En la difracción de doble rendija, la interferencia constructiva se produce cuando  $d \sin \theta = m\lambda$  (para  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ), donde  $d$  es la distancia entre las rendijas,  $\theta$  es el ángulo relativo a la dirección de incidencia, y  $m$  es el

orden de la interferencia.

- Las interferencias destructivas se producen cuando  $d \sin \theta = (m + \frac{1}{2})\lambda$  para  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

### 3.3 Interferencias de rendijas múltiples

- La interferencia de múltiples rendijas ( $N > 2$ ) produce máximos principales y secundarios.
- Al aumentar el número de rendijas, la intensidad de los máximos principales aumenta y el ancho disminuye.



### 3.4 Interferencia de película delgada

- Cuando la luz se refleja en un medio que tiene un índice de refracción mayor que el del medio en el que viaja, se produce un cambio (o un desplazamiento de fase de  $180^\circ \lambda/2$ ).
- La interferencia de película delgada se produce entre la luz reflejada en las superficies superior e inferior de una película. Además de la

diferencia de longitud de trayectoria, puede haber un cambio de fase.

### 3.5 El interferómetro de Michelson

- Cuando el espejo de un brazo del interferómetro se mueve una distancia de  $\lambda/2$  cada franja del patrón de interferencia se desplaza a la posición previamente ocupada por la franja adyacente.

## Preguntas Conceptuales

### 3.1 Interferencia de doble rendija de Young

1. El experimento de la doble rendija de Young divide un único haz de luz en dos fuentes. ¿Se obtendría el mismo patrón para dos fuentes de luz independientes, como los faros de un automóvil lejano? Explique.
2. ¿Es posible crear un montaje experimental en el que solo haya interferencia destructiva? Explique.
3. ¿Por qué dos pequeñas lámparas de sodio, mantenidas cerca, no producen un patrón de interferencia en una pantalla distante? ¿Y si las lámparas de sodio se sustituyeran por dos punteros láser colocados juntos?

### 3.2 Matemáticas de la interferencia

4. Suponga que utiliza la misma doble rendija para realizar el experimento de la doble rendija de Young en el aire y luego repite el experimento en el agua. ¿Los ángulos de las mismas partes del patrón de interferencia aumentan o disminuyen? ¿El color de la luz cambia? Explique.
5. ¿Por qué se utiliza la luz monocromática en el experimento de la doble rendija? ¿Qué pasaría si se utilizara la luz blanca?

### 3.4 Interferencia de película delgada

6. ¿Qué efecto tiene el aumento del ángulo de la cuña en el espaciado de las franjas de interferencia? Si el ángulo de la cuña es demasiado grande, no se observan las franjas. ¿Por qué?
7. ¿Cómo se relaciona la diferencia de trayectorias de dos ondas luminosas originalmente en fase con el hecho de que interfieran de forma constructiva o destructiva? ¿Cómo puede esto afectar la reflexión? ¿Por refracción?
8. ¿Existe un cambio de fase en la luz reflejada por cualquiera de las dos superficies de una lente de contacto que flota en la capa lagrimal de una

persona? El índice de refracción de la lente es de aproximadamente 1,5 y su superficie superior está seca.

9. Al colocar una muestra en un portaobjetos, se coloca un cubreobjetos sobre una gota de agua en el portaobjetos. La luz que incide desde arriba puede reflejarse en la parte superior e inferior de la cubierta de cristal y en el portaobjetos de cristal que está debajo de la gota de agua. ¿En qué superficies habrá un cambio de fase en la luz reflejada?
10. Responda a la pregunta anterior si el fluido entre las dos piezas de vidrio crown es disulfuro de carbono.
11. Mientras contempla el valor alimentario de una loncha de jamón, se fija en el arcoíris de colores que refleja su superficie húmeda. Explique su origen.
12. Un inventor observa que una burbuja de jabón es oscura en su parte más delgada y se da cuenta de que se está produciendo una interferencia destructiva para todas las longitudes de onda. ¿Cómo podría utilizar estos conocimientos para fabricar un revestimiento antirreflejante para lentes que sea eficaz en todas las longitudes de onda? Es decir, ¿qué límites tendría el índice de refracción y el grosor del revestimiento? ¿Cómo podría ser esto poco práctico?
13. Un revestimiento antirreflejante, como el descrito en el [Ejemplo 3.3](#), funciona idealmente para una sola longitud de onda y para una incidencia perpendicular. ¿Qué ocurre con otras longitudes de onda y otras direcciones de incidencia? Especifique
14. ¿Por qué es mucho más difícil ver las franjas de interferencia de la luz reflejada en un trozo de vidrio grueso que en una película delgada? ¿Sería más fácil si se utilizara luz monocromática?

### 3.5 El interferómetro de Michelson

15. Describa cómo puede utilizarse un

interferómetro de Michelson para medir el índice de refracción de un gas (incluido el aire).

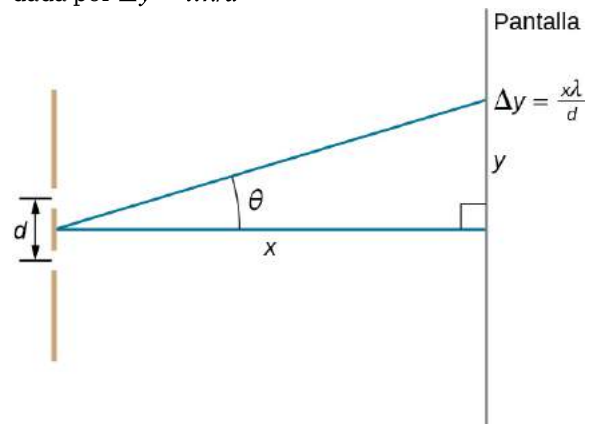
## Problemas

### 3.2 Matemáticas de la interferencia

16. ¿En qué ángulo se encuentra el máximo de primer orden para la luz azul de 450 nm de longitud de onda que incide en rendijas dobles separadas por 0,0500 mm?
17. Calcule el ángulo para el máximo de tercer orden de la luz amarilla de 580 nm de longitud de onda que incide en rendijas dobles separadas por 0,100 mm.
18. ¿Cuál es la separación entre dos rendijas para las que la luz naranja de 610 nm tiene su primer máximo con un ángulo de  $30,0^\circ$ ?
19. Calcule la distancia entre dos rendijas que produce el primer mínimo para la luz violeta de 410 nm con un ángulo de  $45,0^\circ$ .
20. Calcule la longitud de onda de la luz que tiene su tercer mínimo en un ángulo de  $30,0^\circ$  al incidir en rendijas dobles separadas por  $3,00 \mu\text{m}$ . Muestre explícitamente cómo sigue los pasos de la [estrategia de resolución de problemas: Óptica de onda](#), ubicada al final del capítulo.
21. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz que incide en rendijas dobles separadas por  $2,00 \mu\text{m}$  si el máximo de tercer orden está en un ángulo de  $60,0^\circ$ ?
22. ¿En qué ángulo se encuentra el máximo de cuarto orden para la situación del problema anterior?
23. ¿Cuál es el máximo de orden superior para la luz de 400 nm que incide en rendijas dobles separadas por  $25,0 \mu\text{m}$ ?
24. Calcule la mayor longitud de onda de la luz que incide en las rendijas dobles separadas por  $1,20 \mu\text{m}$  para el que existe un máximo de primer orden. ¿Está en la parte visible del espectro?
25. ¿Cuál es la menor separación entre dos rendijas que producirá un máximo de segundo orden para la luz roja de 720 nm?
26. (a) ¿Cuál es la menor separación entre dos rendijas que producirá un máximo de segundo orden para cualquier luz visible? (b) ¿Para toda la luz visible?
27. (a) Si el máximo de primer orden para la luz monocromática que incide en una doble rendija está en un ángulo de  $10,0^\circ$ , ¿con qué ángulo se encuentra el máximo de segundo orden? (b)

¿Cuál es el ángulo del primer mínimo? (c) ¿Cuál es el máximo de mayor orden posible aquí?

28. A continuación, se muestra una rendija doble situada a una distancia  $x$  de una pantalla, con la distancia desde el centro de la pantalla dada por  $y$ . Cuando la distancia  $d$  entre las rendijas es relativamente grande, aparecen numerosos puntos brillantes, llamados franjas. Demuestre que, para ángulos pequeños (donde  $\sin \theta \approx \theta$ , con  $\theta$  en radianes), la distancia entre franjas viene dada por  $\Delta y = x\lambda/d$



29. Utilizando el resultado del problema anterior, (a) calcule la distancia entre franjas para una luz de 633 nm que incide sobre unas rendijas dobles separadas 0,0800 mm, situadas a 3,00 m de una pantalla. (b) ¿Cuál sería la distancia entre franjas si todo el aparato estuviera sumergido en agua, cuyo índice de refracción es 1,33?
30. Utilizando el resultado del problema previo a los dos problemas anteriores, calcule la longitud de onda de la luz que produce franjas separadas por 7,50 mm en una pantalla a 2,00 m de las rendijas dobles separadas por 0,120 mm.
31. En un experimento de doble rendija, el quinto máximo está a 2,8 cm del máximo central en una pantalla que está a 1,5 m de las rendijas. Si las rendijas están separadas 0,15 mm, ¿cuál es la longitud de onda de la luz que se utiliza?
32. La fuente en el experimento de Young emite en dos longitudes de onda. En la pantalla de visualización, el cuarto máximo de una longitud de onda se encuentra en el mismo punto que el quinto máximo de la otra longitud de onda.

¿Cuál es la relación entre las dos longitudes de onda?

33. Si la luz de 500 nm y 650 nm ilumina dos rendijas separadas por 0,50 mm, ¿a qué distancia se encuentran los máximos de segundo orden de estas dos longitudes de onda en una pantalla situada a 2,0 m de distancia?
34. La luz roja de longitud de onda de 700 nm incide en una doble rendija separada por 400 nm. (a) ¿A qué ángulo se encuentra el máximo de primer orden en el patrón de difracción? (b) ¿Qué es lo irrazonable en este resultado? (c) ¿Qué suposiciones son irrazonables o son incoherentes?

### 3.3 Interferencias de rendijas múltiples

35. Diez rendijas estrechas están igualmente separadas 0,25 mm y se iluminan con luz amarilla de longitud de onda 580 nm. (a) ¿Cuáles son las posiciones angulares del tercer y cuarto máximos principales? (b) ¿Cuál es la separación de estos máximos en una pantalla a 2,0 m de las rendijas?
36. El ancho de las franjas brillantes puede calcularse como la separación entre las dos franjas oscuras adyacentes a cada lado. Calcule los anchos angulares de las franjas brillantes de tercer y cuarto orden del problema anterior.
37. Para un patrón de interferencia de tres rendijas, calcule la relación de las intensidades de los picos de un máximo secundario y un máximo principal.
38. ¿Cuál es el ancho angular de la franja central del patrón de interferencia de (a) 20 rendijas separadas por  $d = 2,0 \times 10^{-3}$  mm? (b) ¿50 rendijas con la misma separación? Supongamos que  $\lambda = 600$  nm.

### 3.4 Interferencia de película delgada

39. Una burbuja de jabón de 100 nm de grosor es iluminada por una luz blanca que incide perpendicularmente en su superficie. ¿Qué longitud de onda y color de la luz visible se refleja más constructivamente, suponiendo el mismo índice de refracción que el del agua?
40. Una mancha de aceite en el agua tiene un grosor de 120 nm y está iluminada por una luz blanca que incide perpendicularmente a su superficie. ¿De qué color aparece el aceite (cuál es la longitud de onda más constructivamente reflejada), dado que su índice de refracción es de 1,40?

41. Calcule el grosor mínimo de una mancha de aceite sobre el agua que se ve azul cuando se ilumina con luz blanca perpendicular a su superficie. Tomemos que la longitud de onda del azul es de 470 nm y que el índice de refracción del aceite es de 1,40.
42. Halle el grosor mínimo de una burbuja de jabón que aparezca de color rojo cuando se ilumina con luz blanca perpendicular a su superficie. Tomemos que la longitud de onda es de 680 nm y supongamos que el índice de refracción es el mismo que el del agua.
43. Una película de agua jabonosa ( $n = 1,33$ ) sobre una tabla de cortar de plástico tiene un grosor de 233 nm. ¿Qué color se refleja con más fuerza si se ilumina perpendicularmente a su superficie?
44. ¿Cuáles son los tres grosores más pequeños diferentes de cero del agua jabonosa ( $n = 1,33$ ) en el plexiglás si luce verde (reflejando constructivamente la luz de 520 nm) cuando se ilumina perpendicularmente con luz blanca?
45. Suponga que tiene un sistema de lentes que se va a utilizar principalmente para la luz roja de 700 nm. ¿Cuál es el segundo recubrimiento más fino de fluorita (fluoruro de magnesio) que sería no antirreflejante para esta longitud de onda?
46. (a) A medida que una burbuja de jabón se adelgaza se vuelve oscura, porque la diferencia de longitud de recorrido se vuelve pequeña en comparación con la longitud de onda de la luz y hay un deslizamiento de fase en la superficie superior. Si se oscurece cuando la diferencia de longitud de recorrido es inferior a un cuarto de la longitud de onda, ¿cuál es el mayor grosor que puede tener la burbuja y aparecer oscura en todas las longitudes de onda visibles? Supongamos que el índice de refracción es el mismo que el del agua. (b) Discuta la fragilidad de la película teniendo en cuenta el grosor encontrado.
47. Para ahorrar dinero en hacer que los aviones militares sean invisibles a los radares, un inventor decide recubrirlos con un material antirreflejante que tiene un índice de refracción de 1,20, que está entre el del aire y el de la superficie del avión. El inventor razona que esto debería ser mucho más económico que diseñar bombarderos furtivos. (a) ¿Qué grosor debería tener el revestimiento para inhibir la reflexión del radar de 4,00 cm de longitud de onda? (b) ¿Qué es irrazonable en este resultado? (c) ¿Qué suposiciones son irrazonables o son

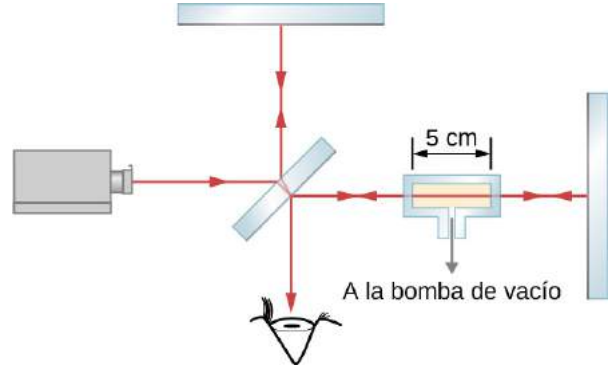
incoherentes?

### 3.5 El interferómetro de Michelson

- 48.** Un interferómetro de Michelson tiene dos brazos iguales. Se utiliza una luz de mercurio de longitud de onda de 546 nm para el interferómetro y se encuentran franjas estables. Uno de los brazos se mueve por  $1,5\ \mu\text{m}$ . ¿Cuántas franjas cruzarán el campo de observación?
- 49.** ¿Cuál es la distancia recorrida por el espejo móvil de un interferómetro de Michelson que corresponde a 1500 franjas que pasan por un punto de la pantalla de observación? Supongamos que el interferómetro está iluminado con una línea espectral de 606 nm de criptón-86.
- 50.** Cuando el espejo móvil de un interferómetro de Michelson se mueve  $2,40 \times 10^{-5}$  m, 90 franjas pasan por un punto de la pantalla de observación. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz utilizada?
- 51.** En un interferómetro de Michelson se utiliza la luz de longitud de onda de 632,8 nm de un láser

de He-Ne. Cuando uno de los espejos se desplaza una distancia  $D$ , 8 franjas pasan por el campo de visión. ¿Cuál es el valor de la distancia  $D$ ?

- 52.** En un brazo de un interferómetro de Michelson se coloca una cámara de 5,0 cm de longitud con ventanas planas y paralelas en los extremos (vea más abajo). La luz utilizada tiene una longitud de onda de 500 nm en el vacío. Mientras se bombea todo el aire de la cámara, 29 franjas pasan por un punto de la pantalla de observación. ¿Cuál es el índice de refracción del aire?



### Problemas Adicionales

- 53.** Para una luz de 600 nm de longitud de onda y una separación entre rendijas de 0,12 mm, ¿cuáles son las posiciones angulares del primer y tercer máximos en el patrón de interferencia de doble rendija?
- 54.** Si en el problema anterior se cambia la fuente de luz, la posición angular del tercer máximo resulta ser  $0,57^\circ$ . ¿Cuál es la longitud de onda de la luz que se utiliza ahora?
- 55.** Luz roja ( $\lambda = 710$  nm) ilumina dos rendijas separadas por una distancia  $d = 0,150$  mm. La pantalla y las rendijas están separadas por 3,00 m. (a) Halle la distancia en la pantalla entre el máximo central y el tercer máximo. (b) ¿Cuál es la distancia entre el segundo y el cuarto máximo?
- 56.** Dos fuentes que están en fase y emiten ondas con  $\lambda = 0,42$  m. Determine si la interferencia constructiva o destructiva se produce en los puntos cuyas distancias a las dos fuentes son (a) 0,84 y 0,42 m, (b) 0,21 y 0,42 m, (c) 1,26 y 0,42 m, (d) 1,87 y 1,45 m, (e) 0,63 y 0,84 m y (f) 1,47 y 1,26 m.
- 57.** Dos rendijas  $4,0 \times 10^{-6}$  m separados son iluminados por una luz de longitud de onda de 600 nm. ¿Cuál es la franja de mayor orden en el

patrón de interferencia?

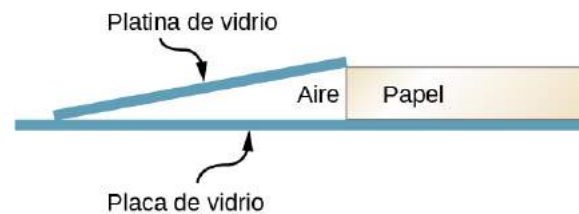
- 58.** Supongamos que la franja de mayor orden que se puede observar es la octava en un experimento de doble rendija en el que se utiliza luz de 550 nm de longitud de onda. ¿Cuál es la separación mínima de las rendijas?
- 59.** El patrón de interferencia de una luz láser He-Ne ( $\lambda = 632,9$  nm) que pasa a través de dos rendijas separadas 0,031 mm se proyecta en una pantalla a 10,0 m de distancia. Determine la distancia entre las franjas brillantes adyacentes.
- 60.** El experimento de la doble rendija de Young se realiza sumergido en agua ( $n = 1,333$ ). La fuente de luz es un láser de He-Ne,  $\lambda = 632,9$  nm en el vacío. (a) ¿Cuál es la longitud de onda de esta luz en el agua? (b) ¿Cuál es el ángulo para el máximo de tercer orden para dos rendijas separadas por 0,100 mm.
- 61.** Se prepara un experimento de doble rendija para que las franjas brillantes aparezcan a 1,27 cm de distancia en una pantalla situada a 2,13 m de las dos rendijas. La fuente de luz tenía una longitud de onda de 500 nm. ¿Cuál debe ser la separación entre las dos rendijas?
- 62.** Un efecto análogo a la interferencia de dos

rendijas puede producirse con las ondas sonoras, en lugar de con la luz. En un campo abierto, dos altavoces colocados a 1,30 m de distancia son alimentados por un generador de una sola función que produce ondas sinusoidales a 1200 Hz de frecuencia. Un alumno camina a lo largo de una línea a 12,5 m de distancia y paralela a la línea entre los altavoces. Escucha un patrón alterno de ruido y silencio, debido a la interferencia constructiva y destructiva. ¿Cuál es (a) la longitud de onda de este sonido y (b) la distancia entre el máximo central y la primera posición máxima (fuerte) a lo largo de esta línea?

63. Una lámpara de descarga de gas hidrógeno emite luz visible en cuatro longitudes de onda,  $\lambda = 410, 434, 486$  y  $656$  nm. (a) Si la luz de esta lámpara incide sobre  $N$  rendijas separadas por  $0,025$  mm, ¿a qué distancia del máximo central están los terceros máximos cuando se ven en una pantalla a  $2,0$  m de las rendijas? (b) ¿A qué distancia están separados los segundos y terceros máximos para  $l = 486$  nm?
64. Luz monocromática de frecuencia  $5,5 \times 10^{14}$  Hz cae en 10 rendijas separadas por  $0,020$  mm. ¿Cuál es la separación entre el primer y el tercer máximo en una pantalla que está a  $2,0$  m de las rendijas?
65. Ocho rendijas igualmente separadas por  $0,149$  mm son iluminadas uniformemente por una luz monocromática a  $\lambda = 523$  nm. ¿Cuál es la anchura del máximo principal central en una pantalla de  $2,35$  m?
66. Ocho rendijas igualmente separadas por  $0,149$  mm son iluminadas uniformemente por una luz monocromática a  $\lambda = 523$  nm. ¿Cuál es la intensidad de un máximo secundario en comparación con la del máximo principal?
67. Una película transparente de  $250$  nm de grosor y un índice de refracción de  $1,40$  está rodeada de aire. ¿Qué longitud de onda de un haz de luz blanca con incidencia casi normal en la lámina sufre una interferencia destructiva cuando se refleja?
68. Se encuentra un mínimo de intensidad para la luz de  $450$  nm transmitida a través de una película transparente ( $n = 1,20$ ) en el aire. (a) ¿Cuál es el grosor mínimo de la película? (b) Si esta longitud de onda es la más larga para la que se produce el mínimo de intensidad, ¿cuáles son los tres siguientes valores inferiores de  $\lambda$  para los que esto sucede?
69. Una película delgada con  $n = 1,32$  está rodeada

de aire. ¿Cuál es el grosor mínimo de esta película para que la reflexión de la luz normalmente incidente con  $\lambda = 500$  nm se minimice?

70. Repita su cálculo del problema anterior con la película delgada colocada sobre una superficie de vidrio plano ( $n = 1,50$ ).
71. Después de un pequeño derrame de petróleo, una película delgada de petróleo ( $n = 1,40$ ) con un grosor de  $450$  nm flota en la superficie del agua en una bahía. (a) ¿Qué color predominante ve un pájaro que sobrevuela? (b) ¿Qué color predominante ve una foca que nada bajo el agua?
72. Un portaobjetos de  $10$  cm de largo está separado de una lámina de vidrio en un extremo por una hoja de papel. Como se muestra a continuación, el otro extremo del portaobjetos está en contacto con la lámina. El portaobjetos se ilumina desde arriba con la luz de una lámpara de sodio ( $\lambda = 589$  nm) y se observan  $14$  franjas por centímetro a lo largo del portaobjetos. ¿Cuál es el grosor del papel? (No a escala)



73. Supongamos que el montaje del problema anterior está sumergido en un líquido desconocido. Si ahora se ven  $18$  franjas por centímetro a lo largo del portaobjetos, ¿cuál es el índice de refracción del líquido?
74. Cuando se colocan dos placas de vidrio planas una encima de la otra y se introduce entre ellas un trozo de papel en uno de sus bordes, se produce una delgada cuña llena de aire. Las franjas de interferencia se observan cuando la luz monocromática que incide verticalmente sobre las láminas se ve reflejada. La primera franja cerca del borde donde las láminas están en contacto, ¿es una franja brillante u oscura? Explique.
75. Para medir el grosor de un cabello se utilizan dos piezas idénticas de lámina de vidrio rectangular. Las láminas de vidrio están en contacto directo en uno de los bordes y se coloca un solo cabello entre ellas cerca del borde opuesto. Cuando se ilumina con una lámpara de sodio ( $\lambda = 589$  nm), el cabello se ve entre las franjas oscuras  $180$  y  $181$ . ¿Cuáles son



- los límites inferior y superior del diámetro del cabello?
- 76.** Dos portaobjetos de vidrio se iluminan con luz monocromática ( $\lambda = 589 \text{ nm}$ ) que incide perpendicularmente. La lámina superior toca a la inferior en un extremo y se apoya en un delgado cable de cobre en el otro, formando una cuña de aire. El diámetro del cable de cobre es  $29,45 \mu\text{m}$ . ¿Cuántas franjas brillantes se ven en estas láminas?
- 77.** Un “objetivo” de cámara de buena calidad es en realidad un sistema de lentes, en lugar de una sola, pero un efecto secundario es que un reflejo de la superficie de una lente puede rebotar muchas veces dentro del sistema, creando objetos en la fotografía. Para contrarrestar este problema, una de las lentes de este sistema se recubre con una delgada capa de material ( $n = 1,28$ ) en un lado. El índice de refracción del cristal de la lente es de 1,68. ¿Cuál es el menor espesor del recubrimiento que reduce la reflexión a  $640 \text{ nm}$  por interferencia destructiva? (En otras palabras, el efecto del revestimiento debe ser optimizado para  $\lambda = 640 \text{ nm}$ ).
- 78.** Se observa una interferencia constructiva directamente por encima de una mancha de petróleo para las longitudes de onda (en el aire) de  $440 \text{ nm}$  y  $616 \text{ nm}$ . El índice de refracción de este petróleo es  $n = 1,54$ . ¿Cuál es el grosor mínimo posible de la película?
- 79.** Una burbuja de jabón se sopla al aire libre. ¿Qué colores (indicados por las longitudes de onda) de la luz solar reflejada se ven realzados? La burbuja de jabón tiene un índice de refracción de 1,36 y un grosor de  $380 \text{ nm}$ .
- 80.** Un interferómetro de Michelson con una fuente de luz láser de He-Ne ( $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ ) proyecta su patrón de interferencia en una pantalla. Si el espejo móvil se mueve por  $8,54 \mu\text{m}$ , ¿cuántas franjas se observarán pasando por un punto de referencia en una pantalla?
- 81.** Un experimentador detecta 251 franjas cuando se desplaza el espejo móvil de un interferómetro de Michelson. La fuente de luz utilizada es una lámpara de sodio, con una longitud de onda de  $589 \text{ nm}$ . ¿A qué distancia se movió el espejo móvil?
- 82.** Un interferómetro de Michelson se utiliza para medir la longitud de onda de la luz que lo atraviesa. Cuando el espejo móvil se desplaza exactamente  $0,100 \text{ mm}$ , el número de franjas observadas en movimiento es de 316. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz?
- 83.** Una cámara de vidrio rectangular de  $5,08 \text{ cm}$  de longitud se introduce en un brazo de un interferómetro de Michelson con una fuente de luz de  $633 \text{ nm}$ . Esta cámara se llena inicialmente de aire ( $n = 1,000293$ ) a la presión atmosférica estándar, pero el aire se bombea gradualmente con una bomba de vacío hasta alcanzar un vacío casi perfecto. ¿Cuántas franjas se observan en movimiento durante la transición?
- 84.** En un brazo de un interferómetro de Michelson, se inserta una lámina de plástico de  $75 \mu\text{m}$  de espesor, lo que provoca un desplazamiento del patrón de interferencia en 86 franjas. La fuente de luz tiene una longitud de onda de  $610 \text{ nm}$  en el aire. ¿Cuál es el índice de refracción de este plástico?
- 85.** El grosor de una lámina de aluminio se mide con un interferómetro de Michelson que tiene su espejo móvil montado en un micrómetro. Hay una diferencia de 27 franjas en el patrón de interferencia observado cuando el micrómetro se sujeta a la lámina en comparación con cuando el micrómetro está vacío. Calcule el grosor de la lámina.
- 86.** El espejo móvil de un interferómetro de Michelson está unido a un extremo de una delgada varilla metálica de  $23,3 \text{ mm}$  de longitud. El otro extremo de la varilla está anclado para que no se mueva. A medida que la temperatura de la varilla cambia de  $15^\circ\text{C}$  a  $25^\circ\text{C}$ , se observa un cambio de 14 franjas. La fuente de luz es un láser de He Ne,  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ . ¿Cuál es el cambio de longitud de la barra metálica y cuál es su coeficiente de dilatación térmica?
- 87.** En un laboratorio estabilizado térmicamente, se utiliza un interferómetro de Michelson para controlar la temperatura y asegurarse de que se mantiene constante. El espejo móvil está montado en el extremo de una varilla de aluminio de  $1,00 \text{ m}$  de longitud que se mantiene fija en el otro extremo. La fuente de luz es un láser de He Ne,  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ . La resolución de este aparato corresponde a la diferencia de temperatura cuando se observa un cambio de una sola franja. ¿Cuál es esta diferencia de temperatura?
- 88.** En un interferómetro de Michelson se produce un desplazamiento de 65 franjas cuando una película de  $42,0\text{-}\mu\text{m}$  de un material desconocido se coloca en un brazo. La fuente de luz tiene una

longitud de onda de 632,9 nm. Identifique el material utilizando los índices de refracción que

se encuentran en la [Tabla 1.1](#).

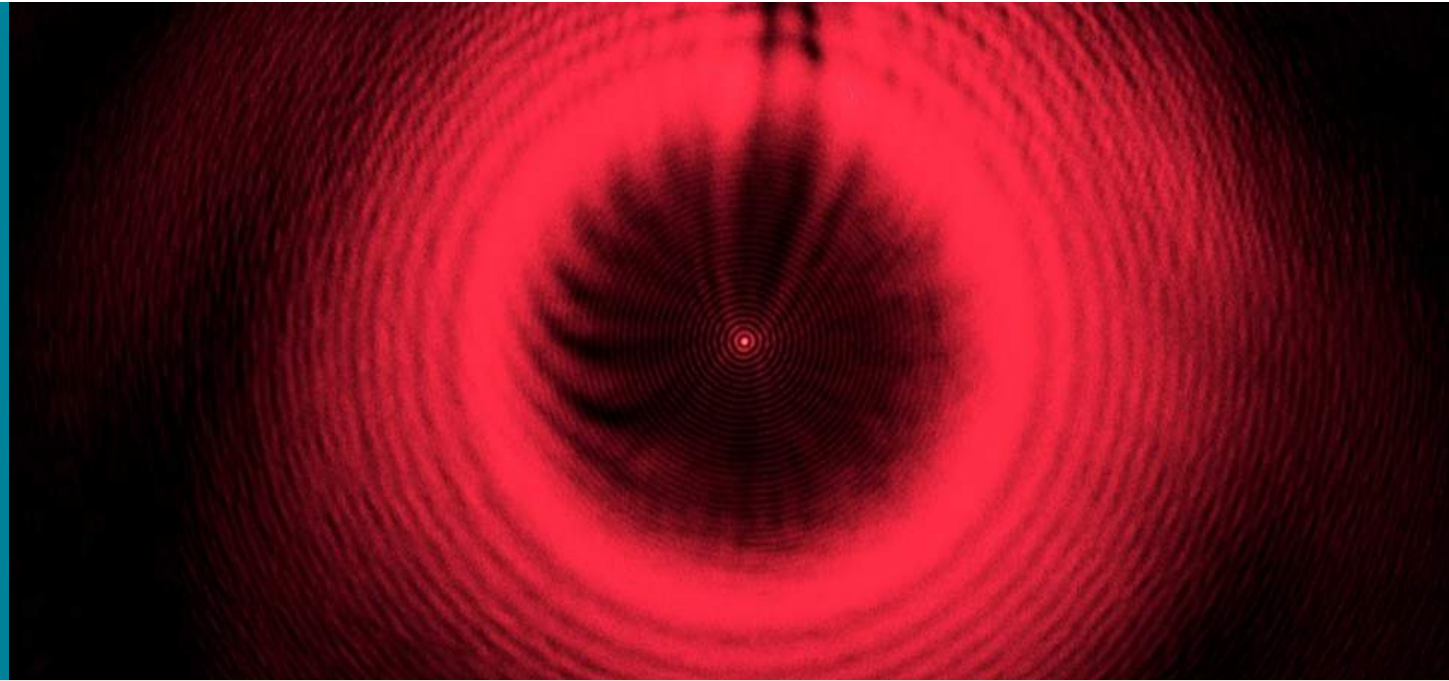
### Problemas De Desafío

- 89.** Determine qué sucede con el patrón de interferencia de doble rendija si una de las rendijas se cubre con una película delgada y transparente cuyo grosor es  $\lambda/[2(n - 1)]$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz incidente y  $n$  es el índice de refracción de la película.
- 90.** Cincuenta y una ranuras estrechas están igualmente espaciadas y separadas por 0,10 mm. Las rendijas se iluminan con luz azul de longitud de onda 400 nm. ¿Cuál es la posición angular del vigésimo quinto máximo secundario? ¿Cuál es su intensidad máxima en comparación con la del máximo primario?
- 91.** Una película de petróleo sobre el agua aparecerá oscura cuando sea muy fina, porque la diferencia de longitud de recorrido se hace pequeña en comparación con la longitud de onda de la luz y hay un deslizamiento de fase en la superficie superior. Si se oscurece cuando la diferencia de longitud de recorrido es inferior a un cuarto de la longitud de onda, ¿cuál es el mayor grosor que puede tener el petróleo y aparecer oscuro en todas las longitudes de onda visibles? El petróleo tiene un índice de refracción de 1,40.
- 92.** La [Figura 3.14](#) muestra dos portaobjetos de vidrio iluminados por una luz monocromática que incide perpendicularmente. La lámina superior toca la lámina inferior en un extremo y se apoya en un cabello de 0,100 mm de diámetro en el otro extremo, formando una cuña de aire. (a) ¿Qué distancia hay entre las bandas oscuras, si los portaobjetos tienen 7,50 cm de longitud y se utiliza luz de 589 nm? (b) ¿Hay alguna diferencia si los portaobjetos son de vidrio crown o flint? Explique.
- 93.** La [Figura 3.14](#) muestra dos portaobjetos de vidrio de 7,50 cm de longitud iluminados por una luz pura de 589 nm de longitud de onda que incide perpendicularmente. La lámina superior toca a la inferior en un extremo y se apoya en unos restos en el otro extremo, formando una cuña de aire. ¿Qué grosor tienen los restos, si las bandas oscuras están separadas por 1,00 mm?
- 94.** Una burbuja de jabón de 100 nm de grosor es iluminada por una luz blanca que incide en un ángulo de  $45^\circ$  con su superficie. ¿Qué longitud de onda y color de la luz visible se refleja más constructivamente, suponiendo el mismo índice de refracción que el del agua?
- 95.** Una mancha de petróleo en el agua tiene un grosor de 120 nm y está iluminada por una luz blanca que incide en un ángulo de  $45^\circ$  con su superficie. ¿De qué color aparece el aceite (cuál es la longitud de onda más constructivamente reflejada), dado que su índice de refracción es de 1,40?



# CAPÍTULO 4

## Difracción



**Figura 4.1** Una bola de acero de un rodamiento iluminado por un láser no proyecta una sombra nítida y circular. En cambio, se observa una serie de franjas de difracción y un punto brillante central. Conocido como punto de Poisson, el efecto fue predicho por primera vez por Augustin-Jean Fresnel (1788-1827) como consecuencia de la difracción de las ondas de luz. Basándose en los principios de la óptica de rayos, Siméon-Denis Poisson (1781-1840) argumentó en contra de la predicción de Fresnel (crédito: modificación del trabajo de Demostraciones de conferencias de Ciencias Naturales de Harvard)

### ESQUEMA DEL CAPITULO

- 4.1 Difracción de una rendija
- 4.2 Intensidad en la difracción de una rendija
- 4.3 Difracción de doble rendija
- 4.4 Rejillas de difracción
- 4.5 Aberturas circulares y resolución
- 4.6 Difracción de rayos X
- 4.7 Holografía

**INTRODUCCIÓN** Imagínese que pasa un haz de luz monocromática a través de una abertura estrecha, una rendija un poco más ancha que la longitud de onda de la luz. En lugar de una simple sombra de la rendija en la pantalla, verá que aparece un patrón de interferencia, aunque solo haya una rendija.

En el capítulo sobre interferencias, vimos que se necesitan dos fuentes de ondas para que se produzcan interferencias. ¿Cómo puede haber un patrón de interferencia si solo tenemos una rendija? En [La naturaleza de la luz](#), aprendimos que, debido al principio de Huygens, podemos imaginar un frente de onda como equivalente a infinitas fuentes puntuales de ondas. Así, una onda procedente de una rendija puede comportarse, no como una onda, sino como un número infinito de fuentes puntuales. Estas ondas pueden interferirse entre sí, dando lugar a un patrón de interferencia sin la presencia de una segunda rendija. Este

fenómeno se llama *difracción*.

Otra forma de ver esto es reconocer que una rendija tiene un ancho pequeño, pero finito. En el capítulo anterior, hemos considerado implícitamente las rendijas como objetos con posiciones, pero sin tamaño. Los anchos de las rendijas se consideraron insignificantes. Cuando las rendijas tienen un ancho finito, cada punto a lo largo de la abertura puede considerarse una fuente puntual de luz, lo que constituye el fundamento del principio de Huygens. Dado que los instrumentos ópticos del mundo real deben tener aberturas finitas (de lo contrario, no puede entrar la luz), la difracción desempeña un papel importante en la forma en que interpretamos la salida de estos instrumentos ópticos. Por ejemplo, la difracción limita nuestra capacidad para resolver imágenes u objetos. Este es un problema que estudiaremos más adelante en este capítulo.

## 4.1 Difracción de una rendija

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar el fenómeno de la difracción y las condiciones en las que se observa
- Describir la difracción a través de una rendija

Tras pasar por una abertura estrecha, una onda que se propaga en una dirección determinada tiende a dispersarse. Por ejemplo, las ondas sonoras que entran en una habitación a través de una puerta abierta pueden oírse, aunque el oyente se encuentre en una parte de la habitación donde la geometría de la propagación de los rayos dicta que solo debe haber silencio. Del mismo modo, las olas del mar que pasan por una abertura en un rompeolas pueden propagarse por toda la bahía en su interior. (Figura 4.2). La propagación y la curvatura de las ondas sonoras y oceánicas son dos ejemplos de **difracción**, que es la curvatura de una onda alrededor de los bordes de una abertura o un obstáculo, un fenómeno que presentan todos los tipos de ondas.



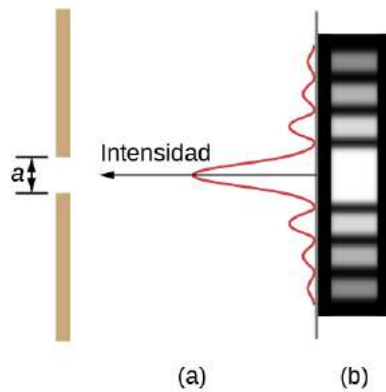
**FIGURA 4.2** Debido a la difracción de las ondas, las olas del océano que entran por una abertura en un rompeolas pueden propagarse por toda la bahía. (crédito: modificación de los datos del mapa de Google Earth)

La difracción de las ondas sonoras nos resulta evidente porque las longitudes de onda en la región audible tienen aproximadamente el mismo tamaño que los objetos con los que se encuentran, condición que debe cumplirse para que los efectos de la difracción puedan observarse fácilmente. Dado que las longitudes de onda de la luz visible van aproximadamente de 390 a 770 nm, la mayoría de los objetos no difractan la luz de forma significativa. Sin embargo, se dan situaciones en las que las aberturas son lo suficientemente pequeñas como para que la difracción de la luz sea observable. Por ejemplo, si se colocan los dedos medio e índice juntos y se mira a través de la abertura a una bombilla, se puede ver un patrón de difracción bastante claro, que consiste en líneas claras y oscuras que corren paralelas a los dedos.

### Difracción a través de una rendija

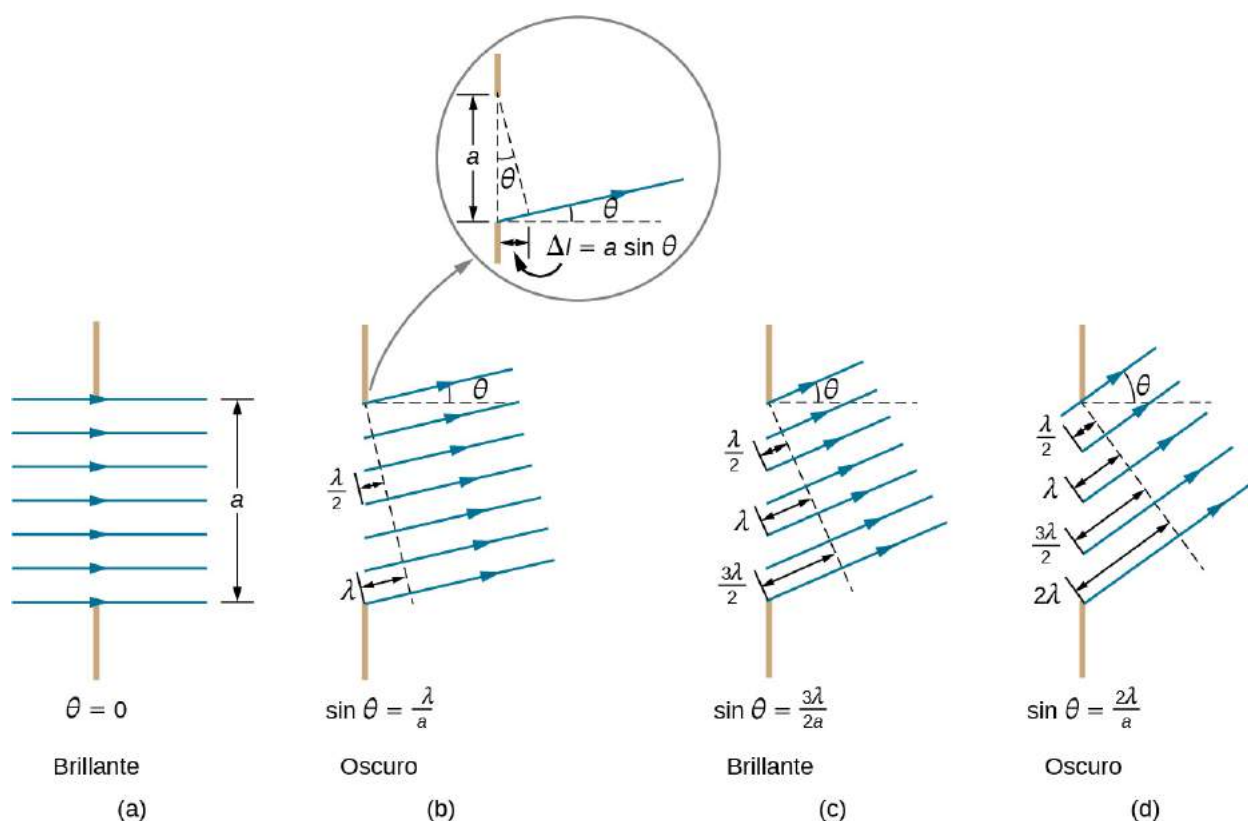
La luz que pasa a través de una rendija forma un patrón de difracción algo diferente a los formados por rendijas dobles o rejillas de difracción, de los que hablamos en el capítulo sobre interferencia. La Figura 4.3 muestra un patrón de difracción por una rendija. Observe que el máximo central es mayor que los máximos a

ambos lados y que la intensidad disminuye rápidamente a ambos lados. En cambio, una rejilla de difracción ([Rejillas de difracción](#)) produce líneas espaciadas uniformemente que se atenúan lentamente a ambos lados del centro.



**FIGURA 4.3** Patrón de difracción por una rendija. (a) La luz monocromática que pasa por una rendija tiene un máximo central y muchos máximos más pequeños y tenues a ambos lados. El máximo central es seis veces mayor que el mostrado. (b) El diagrama muestra el máximo central brillante, y los máximos más tenues y delgados a ambos lados.

En la [Figura 4.4](#) se ilustra el análisis de la difracción de una rendija. En este caso, la luz llega a la rendija, la ilumina uniformemente y está en fase en todo su ancho. A continuación, consideramos la luz que se propaga hacia adelante desde distintas partes de la *misma* rendija. Según el principio de Huygens, cada parte del frente de onda en la rendija emite ondas, tal y como comentamos en [La naturaleza de la luz](#). Son como rayos que comienzan en fase y se dirigen en todas las direcciones. (Cada rayo es perpendicular al frente de onda de una ondícula) Suponiendo que la pantalla esté muy lejos en comparación con el tamaño de la rendija, los rayos que se dirigen a un destino común son casi paralelos. Cuando se desplazan en línea recta, como en la parte (a) de la figura, permanecen en fase, y observamos un máximo central. Sin embargo, cuando los rayos viajan en ángulo  $\theta$  respecto a la dirección original del haz, cada rayo recorre una distancia diferente hasta un lugar común, y pueden llegar en fase o fuera de fase. En la parte (b), el rayo de la parte inferior recorre una distancia de una longitud de onda  $\lambda$  más lejos que el rayo de la parte superior. Así, un rayo desde el centro recorre una distancia  $\lambda/2$  menor que la del borde inferior de la rendija, llega desfasado e interfiere destructivamente. Un rayo procedente del centro y otro de la parte inferior también se anulan mutuamente. De hecho, cada rayo de la rendija interfiere destructivamente con otro rayo. En otras palabras, una cancelación por pares de todos los rayos da como resultado un mínimo oscuro de intensidad en este ángulo. Por simetría, se produce otro mínimo en el mismo ángulo a la derecha de la dirección de incidencia (hacia la parte inferior de la figura) de la luz.



**FIGURA 4.4** La luz que pasa por una rendija se difracta en todas las direcciones y puede interferir de forma constructiva o destructiva, según el ángulo. La diferencia en la longitud de la trayectoria de los rayos desde ambos lados de la rendija se ve como  $a \sin \theta$ .

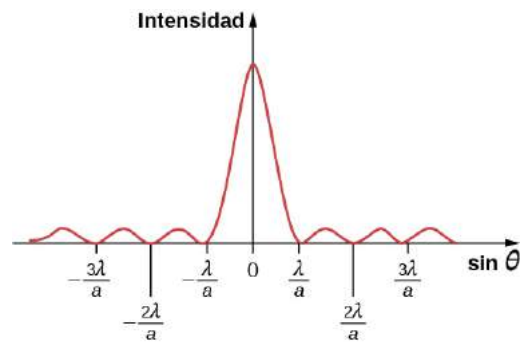
En el ángulo mayor mostrado en la parte (c), las longitudes de las trayectorias difieren en  $3\lambda/2$  para los rayos de la parte superior e inferior de la rendija. Un rayo recorre una distancia  $\lambda$  diferente del rayo del fondo y llega en fase, interfiriendo constructivamente. Dos rayos, cada uno de ellos ligeramente por encima de esos dos, también se suman constructivamente. La mayoría de los rayos procedentes de la rendija tienen otro rayo con el que interferir constructivamente, y en este ángulo se produce un máximo de intensidad. Sin embargo, no todos los rayos interfieren constructivamente para esta situación, por lo que el máximo no es tan intenso como el máximo central. Finalmente, en la parte (d), el ángulo mostrado es lo suficientemente grande como para producir un segundo mínimo. Como se ve en la figura, la diferencia en la longitud de la trayectoria de los rayos desde ambos lados de la rendija es  $a \sin \theta$ , y vemos que se obtiene un mínimo destructivo cuando esta distancia es un múltiplo entero de la longitud de onda.

Así, para obtener una **interferencia destructiva para una rendija**,

$$a \sin \theta = m\lambda, \text{ para } m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots (\text{destructiva}),$$

**4.1**

donde  $a$  es el ancho de la rendija,  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz,  $\theta$  es el ángulo relativo a la dirección original de la luz, y  $m$  es el orden del mínimo. La [Figura 4.5](#) muestra un gráfico de la intensidad para la interferencia de una rendija, y es evidente que los máximos a ambos lados del máximo central son mucho menos intensos y no tan amplios. Este efecto se explora en [Difracción de doble rendija](#).

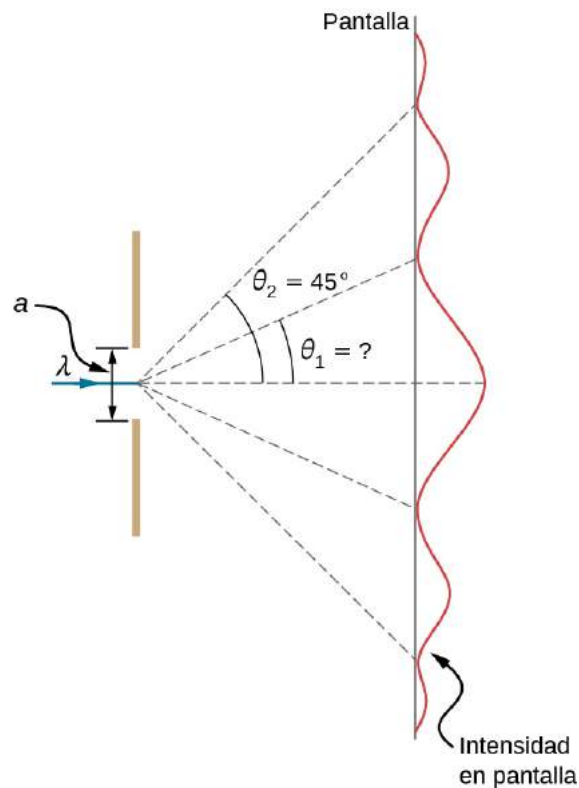


**FIGURA 4.5** Un gráfico de la intensidad de difracción de una rendija que muestra que el máximo central es más amplio y mucho más intenso que los de los lados. De hecho, el máximo central es seis veces mayor que el mostrado aquí.

### EJEMPLO 4.1

#### Cálculo de la difracción de una rendija

La luz visible de longitud de onda 550 nm incide en una rendija y produce su segundo mínimo de difracción con un ángulo de  $45,0^\circ$  respecto a la dirección de incidencia de la luz, como en la [Figura 4.6](#). (a) ¿Cuál es el ancho de la rendija? (b) ¿A qué ángulo se produce el primer mínimo?



**FIGURA 4.6** En este ejemplo, analizamos un gráfico del patrón de difracción por una rendija.

#### Estrategia

A partir de la información dada, y suponiendo que la pantalla está lejos de la rendija, podemos utilizar la ecuación  $a \sin \theta = m\lambda$  primero para encontrar  $D$ , y de nuevo para encontrar el ángulo para el primer mínimo  $\theta_1$ .

**Solución**

- a. Dado que  $\lambda = 550 \text{ nm}$ ,  $m = 2$ , y  $\theta_2 = 45,0^\circ$ . Al resolver la ecuación  $a \sin \theta = m\lambda$  para  $a$  y al sustituir los valores conocidos se obtiene

$$a = \frac{m\lambda}{\sin \theta_2} = \frac{2(550 \text{ nm})}{\sin 45,0^\circ} = \frac{1.100 \times 10^{-9} \text{ m}}{0,707} = 1,56 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

- b. Al resolver la ecuación  $a \sin \theta = m\lambda$  para  $\sin \theta_1$  y al sustituir los valores conocidos se obtiene

$$\sin \theta_1 = \frac{m\lambda}{a} = \frac{1(550 \times 10^{-9} \text{ m})}{1,56 \times 10^{-6} \text{ m}}.$$

Así, el ángulo  $\theta_1$  es

$$\theta_1 = \sin^{-1} 0,354 = 20,7^\circ.$$

**Importancia**

Vemos que la rendija es estrecha (es solo unas pocas veces mayor que la longitud de onda de la luz). Esto es coherente con el hecho de que la luz debe interactuar con un objeto de tamaño comparable a su longitud de onda para mostrar efectos de onda significativos como este patrón de difracción por una rendija. También vemos que el máximo central se extiende  $20,7^\circ$  a cada lado del haz original, para un ancho de aproximadamente  $41^\circ$ . El ángulo entre el primer y el segundo mínimo es solo de aproximadamente  $24^\circ (45,0^\circ - 20,7^\circ)$ . Así, el segundo máximo es solo la mitad de ancho que el máximo central.

**✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 4.1**

Supongamos que el ancho de la rendija en el [Ejemplo 4.1](#) se aumenta a  $1,8 \times 10^{-6} \text{ m}$ . ¿Cuáles son las nuevas posiciones angulares del primer, segundo y tercer mínimo? ¿Existe un cuarto mínimo?

**4.2 Intensidad en la difracción de una rendija****OBJETIVOS DE APRENDIZAJE**

Al final de esta sección, podrá:

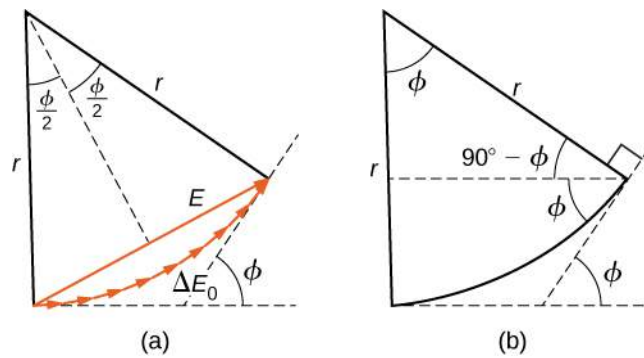
- Calcular la intensidad relativa al máximo central de los picos de difracción de una rendija
- Calcular la intensidad relativa al máximo central de un punto arbitrario de la pantalla

Para calcular la intensidad del patrón de difracción, seguimos el método fasorial utilizado para los cálculos con circuitos de corriente alterna en la sección [Circuitos de corriente alterna \(http://openstax.org/books/física-universitaria-volumen-2/pages/15-2-circuitos-simples-de-ac\)](http://openstax.org/books/física-universitaria-volumen-2/pages/15-2-circuitos-simples-de-ac). Si consideramos que hay  $N$  fuentes de Huygens a través de la rendija mostrada en la [Figura 4.4](#), con cada fuente separada por una distancia  $a/N$  de sus vecinas adyacentes, la diferencia de camino entre las ondas de las fuentes adyacentes que llegan al punto arbitrario  $P$  de la pantalla es  $(a/N) \sin \theta$ . Esta distancia equivale a una diferencia de fase de  $(2\pi a/\lambda N) \sin \theta$ . El diagrama fasorial de las ondas que llegan al punto cuya posición angular es  $\theta$  se muestra en la [Figura 4.7](#). La amplitud del fador para cada ondícula de Huygens es  $\Delta E_0$ , la amplitud del fador resultante es  $E$ , y la diferencia de fase entre las ondas de la primera y la última fuente es

$$\phi = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) a \sin \theta.$$

Con  $N \rightarrow \infty$ , el diagrama fasorial se aproxima a un arco circular de longitud  $N\Delta E_0$  y radio  $r$ . Como la longitud del arco es  $N\Delta E_0$  para cualquier  $\phi$ , el radio  $r$  del arco debe disminuir como  $\phi$  aumenta (o lo que es lo mismo, a medida que los fasores forman espirales más cerradas).



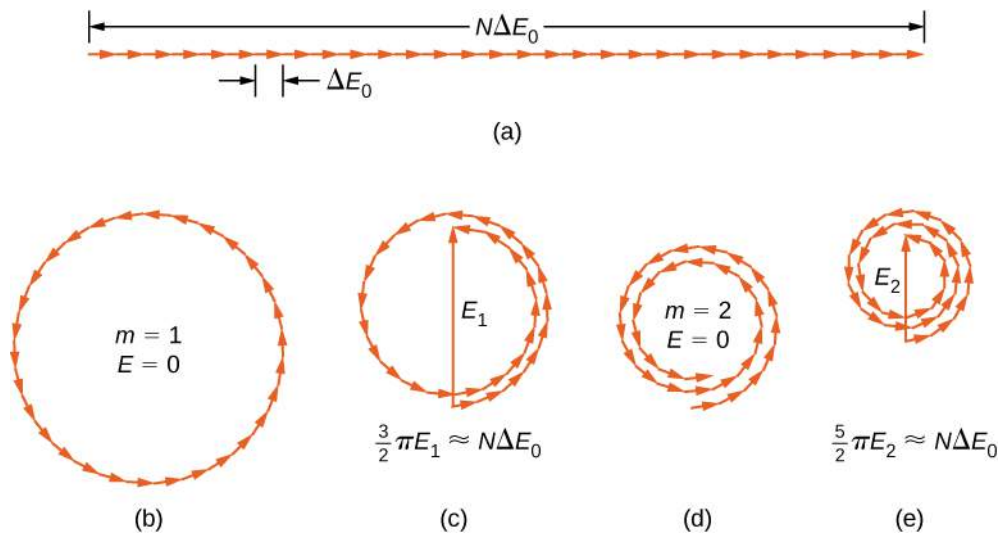


**FIGURA 4.7** (a) Diagrama fasorial correspondiente a la posición angular  $\theta$  en el patrón de difracción por una rendija. La diferencia de fase entre las ondículas de la primera y la última fuente es  $\phi = (2\pi/\lambda)a \sin \theta$ . (b) La geometría del diagrama fasorial.

El diagrama fasorial de  $\phi = 0$  (el centro del patrón de difracción) se muestra en la [Figura 4.8\(a\)](#) utilizando  $N = 30$ . En este caso, los fasores se colocan de extremo a extremo en una línea recta de longitud  $N\Delta E_0$ , el radio  $r$  llega al infinito, y la resultante tiene su valor máximo  $E = N\Delta E_0$ . La intensidad de la luz se puede obtener mediante la relación  $I = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E^2$  de [ondas electromagnéticas \(http://openstax.org/books/física-universitaria-volumen-2/pages/16-introduccion\)](http://openstax.org/books/física-universitaria-volumen-2/pages/16-introduccion). La intensidad del máximo es entonces

$$I_0 = \frac{1}{2}c\epsilon_0(N\Delta E_0)^2 = \frac{1}{2\mu_0 c}(N\Delta E_0)^2,$$

donde  $\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$ . Los diagramas fasoriales para los dos primeros ceros del patrón de difracción se muestran en las partes (b) y (d) de la figura. En ambos casos, los fasores se suman a cero, después de girar por  $\phi = 2\pi$  rad para  $m = 1$  y  $4\pi$  rad para  $m = 2$ .



**FIGURA 4.8** Diagramas fasoriales (con 30 fasores) para varios puntos del patrón de difracción por una rendija. Las rotaciones múltiples alrededor de un círculo determinado se han separado ligeramente para que puedan verse los fasores. (a) Máximo central, (b) primer mínimo, (c) primer máximo más allá del máximo central, (d) segundo mínimo y (e) segundo máximo más allá del máximo central.

Los dos siguientes máximos más allá del máximo central están representados por los diagramas fasoriales de las partes (c) y (e). En la parte (c), los fasores han girado por  $\phi = 3\pi$  rad y han formado un fasor resultante de magnitud  $E_1$ . La longitud del arco formado por los fasores es  $N\Delta E_0$ . Como esto corresponde a 1,5 rotaciones alrededor de un círculo de diámetro  $E_1$ , tenemos

$$\frac{3}{2}\pi E_1 \approx N\Delta E_0,$$

así que

$$E_1 = \frac{2N\Delta E_0}{3\pi}$$

y

$$I_1 = \frac{1}{2\mu_0 c} E_1^2 = \frac{4(N\Delta E_0)^2}{(9\pi^2)(2\mu_0 c)} \approx 0,045 I_0,$$

donde

$$I_0 = \frac{(N\Delta E_0)^2}{2\mu_0 c}.$$

En la parte (e), los fasores han girado por  $\phi = 5\pi$  rad, que corresponde a 2,5 rotaciones alrededor de un círculo de diámetro  $E_2$  y la longitud del arco  $N\Delta E_0$ . Esto da lugar a  $I_2 \approx 0,016 I_0$ . La prueba se deja como ejercicio para el estudiante ([Ejercicio 4.119](#)).

Estos dos máximos corresponden en realidad a valores de  $\phi$  un poco menos de  $3\pi$  rad y  $5\pi$  rad. Como la longitud total del arco del diagrama fasorial es siempre  $N\Delta E_0$ , el radio del arco disminuye como  $\phi$  aumenta. Como resultado,  $E_1$  y  $E_2$  resultan ser ligeramente más grandes para los arcos que no se han curvado del todo  $3\pi$  rad y  $5\pi$  rad, respectivamente. Los valores exactos de  $\phi$  para los máximos se investigan en la [Ejercicio 4.120](#). Al resolver ese problema, descubrirá que son menores que, pero muy cercanos a,  $\phi = 3\pi, 5\pi, 7\pi, \dots$  rad.

Para calcular la intensidad en un punto arbitrario  $P$  de la pantalla, volvemos al diagrama fasorial de la [Figura 4.7](#). Como el arco subtende un ángulo  $\phi$  en el centro del círculo,

$$N\Delta E_0 = r\phi$$

y

$$\text{sen} \left( \frac{\phi}{2} \right) = \frac{E}{2r}.$$

donde  $E$  es la amplitud del campo resultante. Al resolver la segunda ecuación para  $E$  y luego sustituyendo  $r$  de la primera ecuación, hallamos

$$E = 2r \text{sen} \frac{\phi}{2} = 2 \frac{N\Delta E_0}{\phi} \text{sen} \frac{\phi}{2}.$$

Ahora al definir

$$\beta = \frac{\phi}{2} = \frac{\pi a \text{sen} \theta}{\lambda} \quad 4.2$$

obtenemos

$$E = N\Delta E_0 \frac{\text{sen} \beta}{\beta} \quad 4.3$$

Esta ecuación relaciona la amplitud del campo resultante en cualquier punto del patrón de difracción con la amplitud  $N\Delta E_0$  en el máximo central. La intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, por lo que

$$I = I_0 \left( \frac{\text{sen} \beta}{\beta} \right)^2 \quad 4.4$$

donde  $I_0 = (N\Delta E_0)^2/2\mu_0 c$  es la intensidad en el centro del patrón.

Para el máximo central,  $\phi = 0$ ,  $\beta$  también es cero y vemos por la regla de l'Hôpital que  $\lim_{\beta \rightarrow 0} (\text{sen} \beta/\beta) = 1$ ,

para que  $\lim_{\phi \rightarrow 0} I = I_0$ . Para el siguiente máximo,  $\phi = 3\pi$  rad, tenemos  $\beta = 3\pi/2$  rad y cuando se sustituye en la [Ecuación 4.4](#), se obtiene

$$I_1 = I_0 \left( \frac{\text{sen } 3\pi/2}{3\pi/2} \right)^2 \approx 0,045 I_0,$$

de acuerdo con lo que hemos encontrado antes en esta sección utilizando los diámetros y las circunferencias de los diagramas fasoriales. Al sustituir  $\phi = 5\pi$  rad en la [Ecuación 4.4](#) se obtiene un resultado similar para  $I_2$ .

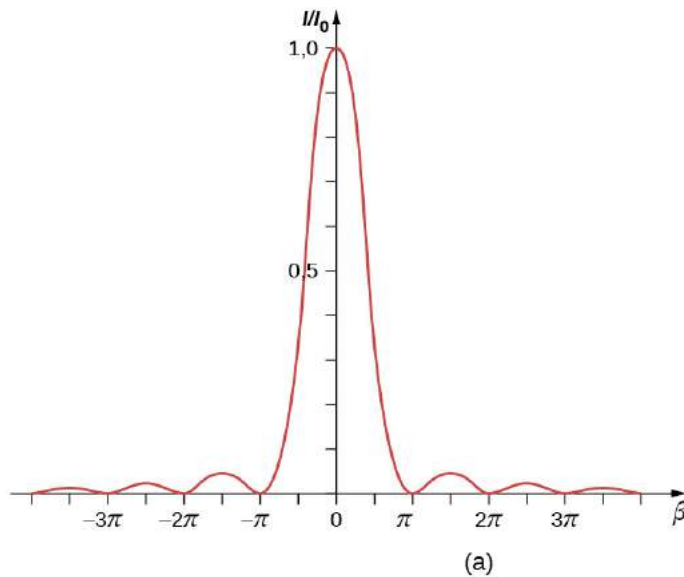
En la [Figura 4.9](#) se muestra un gráfico de la [Ecuación 4.4](#) y justo debajo hay una fotografía de un patrón de difracción real. Tome en cuenta que el pico central es mucho más brillante que los demás, y que los ceros del patrón se sitúan en aquellos puntos en los que  $\text{sen } \beta = 0$ , que se produce cuando  $\beta = m\pi$  rad. Esto corresponde a

$$\frac{\pi a \text{ sen } \theta}{\lambda} = m\pi,$$

o

$$a \text{ sen } \theta = m\lambda,$$

que es la [Ecuación 4.1](#).



**FIGURA 4.9** (a) La distribución de intensidad calculada de un patrón de difracción por una rendija. (b) El patrón de difracción real.

### EJEMPLO 4.2

#### Intensidad en la difracción de una rendija

La luz de longitud de onda 550 nm pasa a través de una rendija con un ancho de  $2,00 \mu\text{m}$  y produce un patrón de difracción similar al que se muestra en la [Figura 4.9](#). (a) Halle las ubicaciones de los dos primeros mínimos

en términos del ángulo desde el máximo central y (b) determine la intensidad relativa al máximo central en un punto a medio camino entre estos dos mínimos.

### Estrategia

Los mínimos vienen dados por la [Ecuación 4.1](#), a sen  $\theta = m\lambda$ . Los dos primeros mínimos son para  $m = 1$  y  $m = 2$ . La [Ecuación 4.4](#) y la [Ecuación 4.2](#) pueden utilizarse para determinar la intensidad una vez que se ha calculado el ángulo.

### Solución

- a. Resolver la [Ecuación 4.1](#) para  $\theta$  nos da  $\theta_m = \text{sen}^{-1}(m\lambda/a)$ , para que la

$$\theta_1 = \text{sen}^{-1}\left(\frac{(+1)(550 \times 10^{-9} \text{ m})}{2,00 \times 10^{-6} \text{ m}}\right) = +16,0^\circ$$

y

$$\theta_2 = \text{sen}^{-1}\left(\frac{(+2)(550 \times 10^{-9} \text{ m})}{2,00 \times 10^{-6} \text{ m}}\right) = +33,4^\circ.$$

- b. El punto medio entre  $\theta_1$  y  $\theta_2$  es

$$\theta = (\theta_1 + \theta_2)/2 = (16,0^\circ + 33,4^\circ)/2 = 24,7^\circ.$$

[Ecuación 4.2](#) obtenemos

$$\beta = \frac{\pi a \text{ sen } \theta}{\lambda} = \frac{\pi (2,00 \times 10^{-6} \text{ m}) \text{ sen } (24,7^\circ)}{(550 \times 10^{-9} \text{ m})} = 1,52\pi \text{ o } 4,77 \text{ rad.}$$

A partir de la [Ecuación 4.4](#), podemos calcular

$$\frac{I}{I_o} = \left(\frac{\text{sen } \beta}{\beta}\right)^2 = \left(\frac{\text{sen } (4,77)}{4,77}\right)^2 = \left(\frac{-0,9985}{4,77}\right)^2 = 0,044.$$

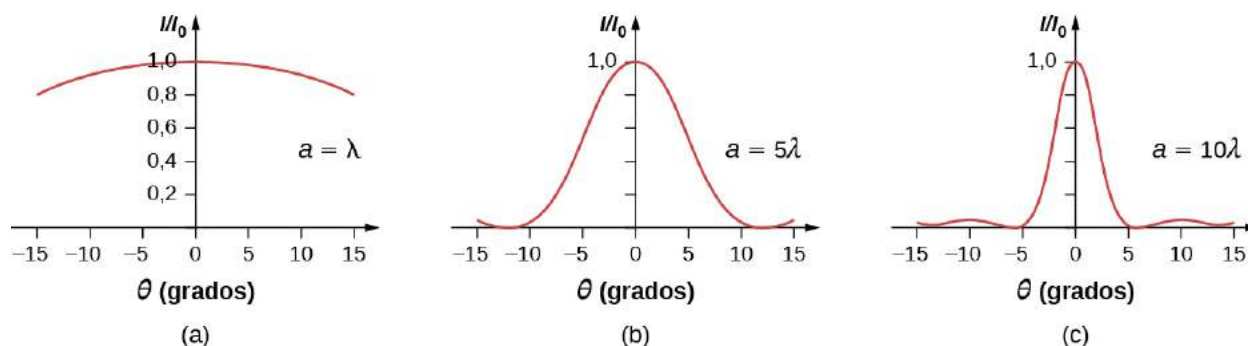
### Importancia

Esta posición, a medio camino entre dos mínimos, está muy cerca de la ubicación del máximo, previsto cerca de  $\beta = 3\pi/2$ , o  $1,5\pi$ .

## ✓ **COMPRUEBE LO APRENDIDO 4.2**

Para el experimento del [Ejemplo 4.2](#), ¿a qué ángulo del centro se encuentra el tercer máximo y cuál es su intensidad con respecto al máximo central?

Si se varía el ancho de la rendija  $D$ , la distribución de la intensidad cambia, como se ilustra en la [Figura 4.10](#). El pico central se distribuye en la región de  $\text{sen } \theta = -\lambda/a$  a  $\text{sen } \theta = +\lambda/a$ . Para los pequeños  $\theta$ , esto corresponde a un ancho angular  $\Delta\theta \approx 2\lambda/a$ . Por lo tanto, un aumento del ancho de la hendidura provoca una disminución del **ancho del pico central**. Para una hendidura con  $a \gg \lambda$ , el pico central es muy agudo, mientras que si  $a \approx \lambda$ , se convierte en algo muy amplio.



**FIGURA 4.10** Patrones de difracción por una rendija para varios anchos de rendija. A medida que el ancho de la rendija  $a$  aumenta de  $a = \lambda$  a  $5\lambda$  y luego a  $10\lambda$ , el ancho del pico central disminuye a medida que disminuyen los ángulos de los primeros mínimos, tal como predice la [Ecuación 4.1](#).

### INTERACTIVO

Un experimento de difracción en óptica puede requerir mucha preparación, pero [esta simulación](https://openstax.org/l/21diffrexpoptsi) (https://openstax.org/l/21diffrexpoptsi) de Andrew Duffy ofrece no solo una rápida preparación, sino también la posibilidad de cambiar el ancho de la rendija al instante. Ejecute la simulación y seleccione “Single slit” (una rendija). Puede ajustar el ancho de la rendija y ver el efecto sobre el patrón de difracción en una pantalla y en forma de gráfico.

## 4.3 Difracción de doble rendija

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir el efecto combinado de interferencia y difracción con dos rendijas, cada una de ellas con un ancho finito
- Determinar las intensidades relativas de las franjas de interferencia dentro de un patrón de difracción
- Identificar los órdenes perdidos, si los hay

Cuando estudiamos la interferencia en el experimento de la doble rendija de Young, ignoramos el efecto de difracción en cada rendija. Asumimos que las rendijas eran tan estrechas que en la pantalla únicamente se veía la interferencia de la luz de solo dos fuentes puntuales. Si la rendija es más pequeña que la longitud de onda, entonces la [Figura 4.10\(a\)](#) muestra que solo hay una dispersión de la luz y no hay picos ni caídas en la pantalla. Por lo tanto, era razonable dejar de lado el efecto de difracción en ese capítulo. Sin embargo, si amplía la rendija, en la [Figura 4.10\(b\)](#) y (c) se muestra que no se puede ignorar la difracción. En esta sección, estudiamos las complicaciones del experimento de la doble rendija que surgen cuando también hay que tener en cuenta el efecto de difracción de cada rendija.

Para calcular el patrón de difracción para dos rendijas (o cualquier cantidad), necesitamos generalizar el método que acabamos de utilizar para una rendija. Es decir, a través de cada rendija, colocamos una distribución uniforme de fuentes puntuales que irradian ondículas de Huygens, y luego sumamos las ondas de todas las rendijas. Esto da la intensidad en cualquier punto de la pantalla. Aunque los detalles de ese cálculo pueden ser complicados, el resultado final es bastante sencillo:

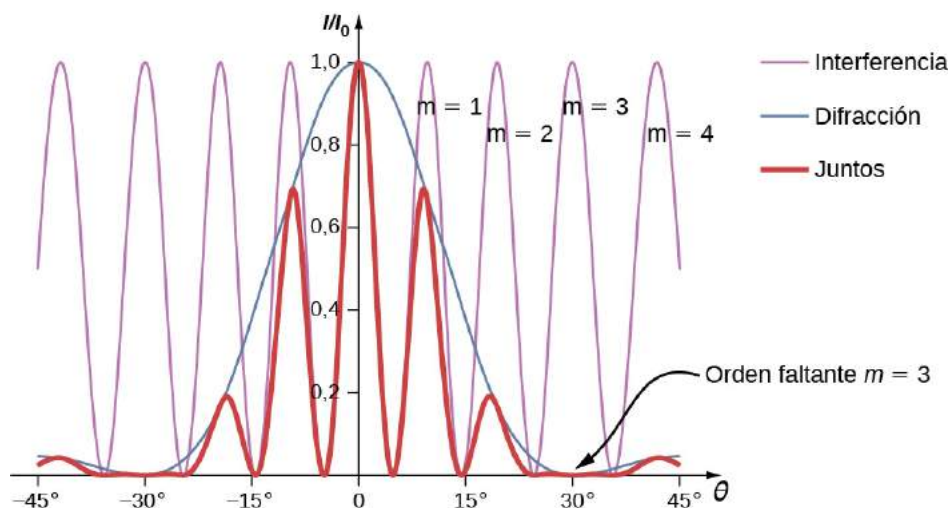
#### Patrón de difracción de dos rendijas

El patrón de difracción de dos rendijas de ancho  $a$  que están separadas por una distancia  $d$  es el patrón de interferencia de dos fuentes puntuales separadas por  $d$  multiplicado por el patrón de difracción de una rendija de ancho  $a$ .

En otras palabras, las *ubicaciones* de las franjas de interferencia vienen dados por la ecuación  $d \sin \theta = m\lambda$ ,

igual que cuando considerábamos las rendijas como fuentes puntuales, pero las *intensidades* de las franjas se reducen ahora por efectos de difracción, según la [Ecuación 4.4](#). [Tome en cuenta que, en el capítulo sobre interferencia, escribimos  $d \sin \theta = m\lambda$  y utilizamos el número entero  $m$  para referirse a las franjas de interferencia. La [Ecuación 4.1](#) también utiliza  $m$ , pero esta vez para referirse a los mínimos de difracción. Si se utilizan ambas ecuaciones simultáneamente, es una buena práctica utilizar una variable diferente (como  $n$ ) para uno de estos enteros, con el fin de mantenerlos distintos].

Los efectos de interferencia y difracción operan simultáneamente y, por lo general, producen mínimos en ángulos diferentes. Esto da lugar a un patrón complicado en la pantalla, en el que faltan algunos de los máximos de interferencia de las dos rendijas si el máximo de la interferencia está en la misma dirección que el mínimo de la difracción. Nos referimos a este pico ausente como un **orden faltante**. En la [Figura 4.11](#) se muestra un patrón de difracción en la pantalla. La línea continua con múltiples picos de diversas alturas es la intensidad observada en la pantalla. Es el producto del patrón de interferencia de las ondas procedentes de rendijas separadas y de la difracción de las ondas procedentes de una rendija.



**FIGURA 4.11** Difracción desde una doble rendija. La línea púrpura con picos de la misma altura procede de la interferencia de las ondas de dos rendijas; la línea azul con una gran joroba en el centro es la difracción de las ondas de una rendija y la línea roja gruesa es el producto de las dos, que es el patrón observado en la pantalla. El gráfico muestra el resultado esperado para un ancho de rendija  $a = 2\lambda$  y la separación entre las rendijas  $d = 6\lambda$ . El máximo valor de  $m = \pm 3$  del orden de la interferencia faltante porque el mínimo de la difracción se produce en la misma dirección.

### EJEMPLO 4.3

#### Intensidad de las franjas

La [Figura 4.11](#) muestra que la intensidad de la franja para  $m = 3$  es cero, pero ¿qué pasa con las otras franjas? Calcule la intensidad de la franja en  $m = 1$  en relación con  $I_0$ , la intensidad del pico central.

#### Estrategia

Determine el ángulo para la franja de interferencia de doble rendija, utilizando la ecuación de [Interferencia](#), luego determine la intensidad relativa en esa dirección debido a la difracción utilizando la [Ecuación 4.4](#).

#### Solución

Del capítulo sobre la interferencia, sabemos que las franjas de interferencia brillantes se producen en  $d \sin \theta = m\lambda$ , o

$$\sin \theta = \frac{m\lambda}{d}.$$



A partir de [Ecuación 4.4](#),

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \text{ donde } \beta = \frac{\phi}{2} = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}.$$

Si sustituimos lo anterior,

$$\beta = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} = \frac{\pi a}{\lambda} \cdot \frac{m\lambda}{d} = \frac{m\pi a}{d}.$$

Para  $a = 2\lambda$ ,  $d = 6\lambda$ , y  $m = 1$ ,

$$\beta = \frac{(1)\pi(2\lambda)}{(6\lambda)} = \frac{\pi}{3}.$$

Entonces, la intensidad es

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 = I_0 \left( \frac{\sin (\pi/3)}{\pi/3} \right)^2 = 0,684 I_0.$$

### Importancia

Tome en cuenta que este enfoque es relativamente sencillo y da un resultado que es casi exactamente el mismo que el análisis más complicado que utiliza los fasores para calcular los valores de intensidad de la interferencia de doble rendija (línea delgada en la [Figura 4.11](#)). El enfoque fasorial tiene en cuenta la pendiente descendente de la intensidad de difracción (línea azul), de modo que el pico *cercano a*  $m = 1$  se produce a un valor de  $\theta$  un poco más pequeño de lo que hemos mostrado aquí.



### EJEMPLO 4.4

#### Difracción de dos rendijas

Supongamos que en el experimento de Young, las rendijas de 0,20 mm de ancho están separadas por 0,20 mm. Si las rendijas se iluminan con luz monocromática de longitud de onda 500 nm, ¿cuántas franjas brillantes se observan en el pico central del patrón de difracción?

#### Solución

A partir de la [Ecuación 4.1](#), la posición angular del primer mínimo de difracción es

$$\theta \approx \sin \theta = \frac{\lambda}{a} = \frac{5,0 \times 10^{-7} \text{ m}}{2,0 \times 10^{-5} \text{ m}} = 2,5 \times 10^{-2} \text{ rad}.$$

Al utilizar  $d \sin \theta = m\lambda$  para  $\theta = 2,5 \times 10^{-2}$  rad, hallamos

$$m = \frac{d \sin \theta}{\lambda} = \frac{(0,20 \text{ mm}) (2,5 \times 10^{-2} \text{ rad})}{(5,0 \times 10^{-7} \text{ m})} = 10,$$

el cuál es el máximo orden de interferencia que cabe dentro del pico central. Observamos que cuando  $m = \pm 10$  son los órdenes faltantes, dado que  $\theta$  coincide exactamente. En consecuencia, observamos franjas brillantes para

$$m = -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, \text{ y } +9$$

para un total de 19 franjas brillantes.

### ✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 4.3

Para el experimento en el [Ejemplo 4.4](#), demuestre que cuando  $m = 20$  también es un orden faltante.

## INTERACTIVO

Explore los efectos de la difracción de doble rendija. En [esta simulación \(https://openstax.org/1/21doubleslitdiff\)](https://openstax.org/1/21doubleslitdiff) escrita por Fu-Kwun Hwang, seleccione  $N = 2$  utilizando el control deslizante y observe lo que sucede cuando se controla el ancho de la rendija, la separación de la rendija y la longitud de onda. ¿Usted puede lograr que un orden “falte”?

---

## 4.4 Rejillas de difracción

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

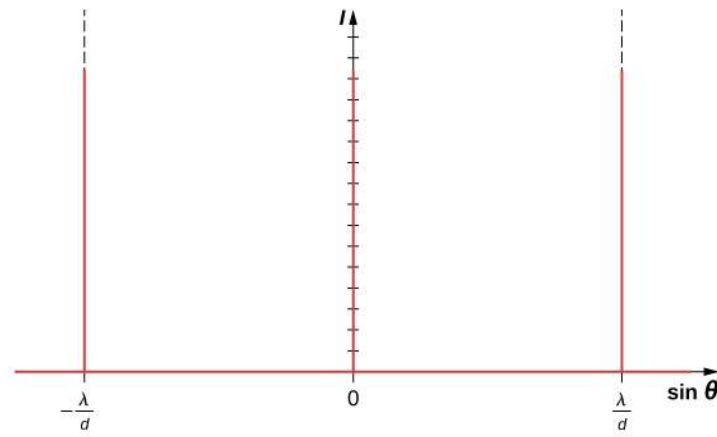
Al final de esta sección, podrá:

- Discutir el patrón obtenido de las rejillas de difracción
- Explicar los efectos de las rejillas de difracción

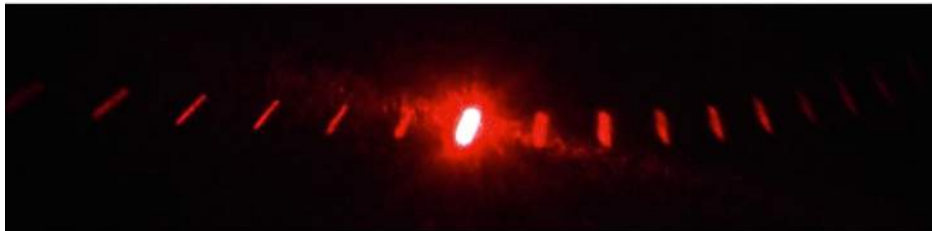
El análisis de la interferencia de la luz que pasa a través de dos rendijas establece el marco teórico de la interferencia y nos da una visión histórica de los experimentos de Thomas Young. Sin embargo, la mayoría de las aplicaciones modernas de la interferencia de rendijas no utilizan solo dos rendijas, sino muchas, acercándose al infinito para fines prácticos. El elemento óptico clave se llama rejilla de difracción, una herramienta importante en el análisis óptico.

### Rejillas de difracción: Un número infinito de rendijas

El análisis de la interferencia de múltiples rendijas en [interferencia](#) nos permite considerar lo que ocurre cuando el número de rendijas  $N$  se aproxima al infinito. Recordemos que  $N - 2$  aparecen máximos secundarios entre los máximos principales. Podemos ver que habrá un número infinito de máximos secundarios que aparecen, y un número infinito de franjas oscuras entre ellos. Esto hace que el espacio entre las franjas, y por tanto el ancho de los máximos, sea infinitesimal. Además, como la intensidad de los máximos secundarios es proporcional a  $1/N^2$ , se aproxima a cero de manera que los máximos secundarios ya no se ven. Lo que queda son solo los máximos principales, ahora muy brillantes y muy estrechos ([Figura 4.12](#)).



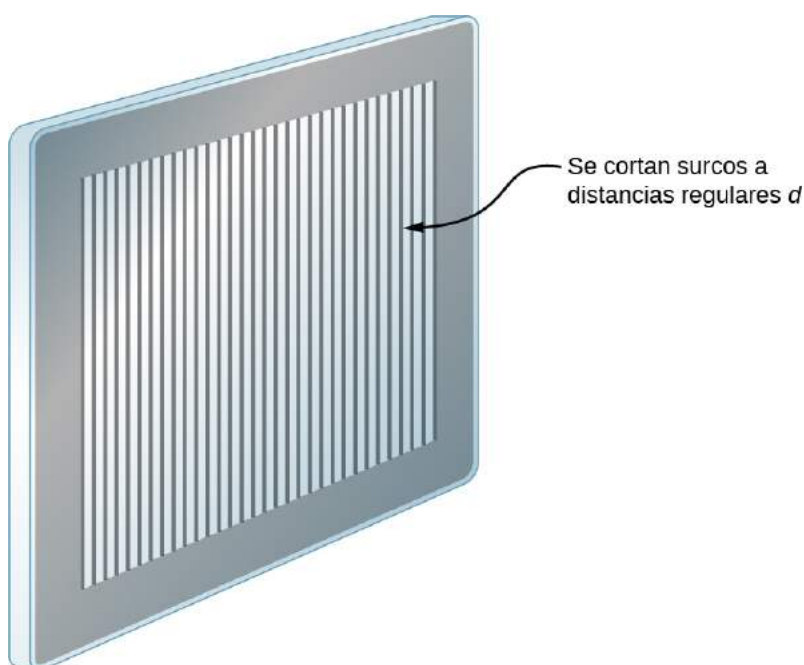
(a)



(b)

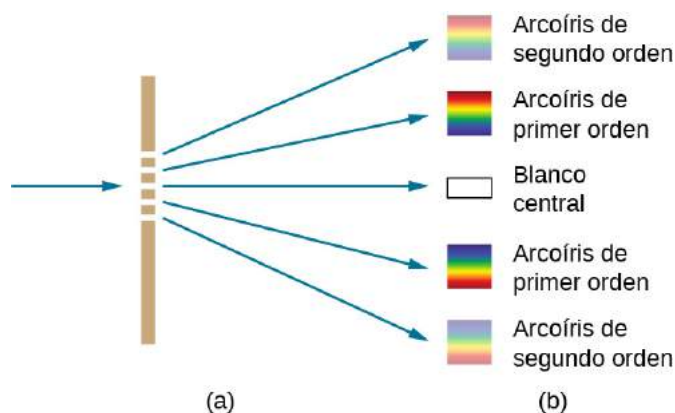
**FIGURA 4.12** (a) Intensidad de la luz transmitida a través de un gran número de rendijas. Cuando  $N$  se aproxima al infinito, solo los máximos principales permanecen como líneas muy brillantes y muy estrechas. (b) Un rayo láser pasado por una rejilla de difracción. (crédito b: modificación del trabajo de Sebastian Stapelberg)

En realidad, el número de rendijas no es infinito, pero puede ser muy grande, lo suficiente para producir el efecto equivalente. Un ejemplo excelente es un elemento óptico llamado **rejilla de difracción**. Una rejilla de difracción se puede fabricar tallando el vidrio con una herramienta afilada en un gran número de líneas paralelas colocadas con precisión, con regiones sin tocar que actúan como rendijas ([Figura 4.13](#)). Este tipo de rejilla se puede producir fotográficamente en masa de forma bastante barata. Dado que puede haber más de 1000 líneas por milímetro a través de la rejilla, cuando una sección tan pequeña como unos pocos milímetros es iluminada por un rayo entrante, el número de rendijas iluminadas es efectivamente infinito, proporcionando máximos principales muy nítidos.

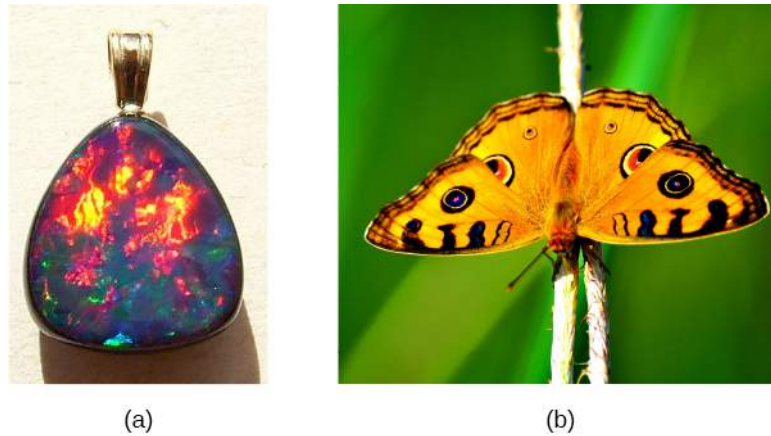


**FIGURA 4.13** Una rejilla de difracción puede fabricarse tallando el vidrio con una herramienta afilada en un gran número de líneas paralelas colocadas con precisión.

Las rejillas de difracción funcionan tanto para la transmisión de la luz, como en la [Figura 4.14](#), como para la reflexión de la luz, como en las alas de las mariposas y el ópalo australiano en la [Figura 4.15](#). Las rejillas de difracción naturales también se dan en las plumas de algunas aves, como el colibrí. Unas diminutas estructuras en forma de dedos en patrones regulares actúan como rejillas de reflexión, produciendo una interferencia constructiva que da a las plumas colores que no se deben únicamente a su pigmentación. Esto se llama iridiscencia.



**FIGURA 4.14** (a) La luz que pasa a través de una rejilla de difracción se difracta en un patrón similar al de una doble rendija, con regiones brillantes en varios ángulos. (b) El patrón obtenido para la luz blanca que incide en una rejilla. El máximo central es blanco, y los máximos de orden superior dispersan la luz blanca en un arcoíris de colores.



**FIGURA 4.15** (a) Este ópalo australiano y (b) las alas de mariposa tienen filas de reflectores que actúan como rejillas de reflexión, reflejando diferentes colores en diferentes ángulos. (crédito a: modificación de la obra de "Opals-On-Black"/Flickr; crédito b: modificación de la obra de "whologwhy"/Flickr)

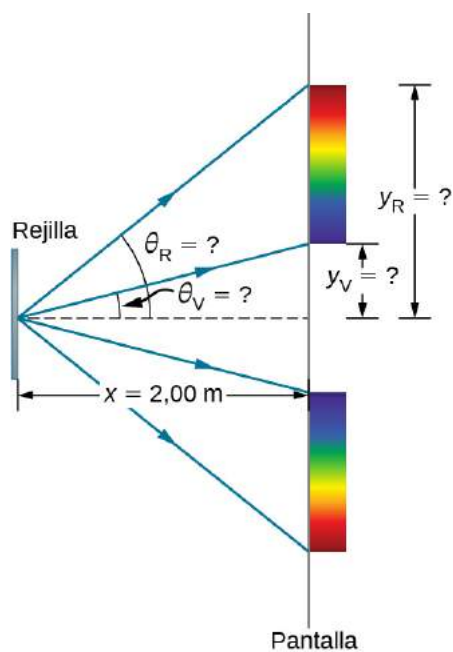
### Aplicaciones de las rejillas de difracción

¿En qué aplicaciones se utilizan las rejillas de difracción? Las rejillas de difracción se utilizan habitualmente para la dispersión espectroscópica y el análisis de la luz. Lo que las hace especialmente útiles es el hecho de que forman un patrón más nítido que las rendijas dobles. Es decir, sus franjas luminosas son más estrechas y brillantes, mientras que sus regiones oscuras son más oscuras. Las rejillas de difracción son componentes clave de los monocromadores utilizados, por ejemplo, en la obtención de imágenes ópticas de determinadas longitudes de onda de muestras biológicas o médicas. Se puede elegir una rejilla de difracción para analizar específicamente una longitud de onda emitida por las moléculas de las células enfermas de una muestra de biopsia o para ayudar a excitar moléculas estratégicas de la muestra con una longitud de onda de luz seleccionada. Otro uso vital es el de las tecnologías de fibra óptica, donde las fibras se diseñan para ofrecer un rendimiento óptimo en longitudes de onda específicas. Existe una gama de rejillas de difracción para seleccionar las longitudes de onda para este uso.

### EJEMPLO 4.5

#### Cálculo de los efectos típicos de las rejillas de difracción

Las rejillas de difracción con 10 000 líneas por centímetro son fáciles de conseguir. Supongamos que tiene una y envía un haz de luz blanca a través de ella a una pantalla situada a 2,00 m. (a) Calcule los ángulos para la difracción de primer orden de las longitudes de onda más cortas y más largas de la luz visible (380 y 760 nm, respectivamente). (b) ¿Cuál es la distancia entre los extremos del arcoíris de luz visible producido en la pantalla para la interferencia de primer orden? (Consulte la [Figura 4.16](#).)



**FIGURA 4.16** (a) La rejilla de difracción considerada en este ejemplo produce un arcoíris de colores en una pantalla a una distancia  $x = 2,00$  m de la rejilla. Las distancias a lo largo de la pantalla se miden perpendicularmente a la dirección  $x$ . En otras palabras, el patrón del arcoíris se extiende fuera de la página. (b) En una vista de pájaro, el patrón del arcoíris se puede ver en una mesa donde se coloca el equipo.

### Estrategia

Una vez que se ha determinado el valor de la separación  $d$  de la rejilla de difracción, se pueden hallar los ángulos de las líneas nítidas mediante la ecuación

$$d \sin \theta = m\lambda \text{ para } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Como hay 10 000 líneas por centímetro, cada línea está separada por  $1/10\,000$  de centímetro. Una vez que conozcamos los ángulos, podemos hallar las distancias a lo largo de la pantalla utilizando trigonometría simple.

### Solución

- a. La distancia entre las rendijas es  $d = (1 \text{ cm})/10,000 = 1,00 \times 10^{-4}$  cm o  $1,00 \times 10^{-6}$  m. Llamemos a los dos ángulos  $\theta_V$  para el violeta (380 nm) y  $\theta_R$  para el rojo (760 nm). Al resolver la ecuación  $d \sin \theta_V = m\lambda$  para  $\sin \theta_V$ ,

$$\sin \theta_V = \frac{m\lambda_V}{d},$$

donde  $m = 1$  para el primer orden y  $\lambda_V = 380 \text{ nm} = 3,80 \times 10^{-7}$  m. Al sustituir estos valores se obtiene

$$\sin \theta_V = \frac{3,80 \times 10^{-7} \text{ m}}{1,00 \times 10^{-6} \text{ m}} = 0,380.$$

Así, el ángulo  $\theta_V$  es

$$\theta_V = \sin^{-1} 0,380 = 22,33^\circ.$$

Igualmente,

$$\sin \theta_R = \frac{7,60 \times 10^{-7} \text{ m}}{1,00 \times 10^{-6} \text{ m}} = 0,760.$$



Así, el ángulo  $\theta_R$  es

$$\theta_R = \sin^{-1} 0,760 = 49,46^\circ.$$

Observe que en ambas ecuaciones informamos de los resultados de estos cálculos intermedios de cuatro cifras significativas para utilizarlos en el cálculo de la parte (b).

- b. Las distancias en pantalla están marcadas  $y_V$  y  $y_R$  en [Figura 4.16](#). Observe que  $\tan \theta = y/x$ . Podemos resolver para  $y_V$  y  $y_R$ . Eso es,

$$y_V = x \tan \theta_V = (2,00 \text{ m})(\tan 22,33^\circ) = 0,815 \text{ m}$$

y

$$y_R = x \tan \theta_R = (2,00 \text{ m})(\tan 49,46^\circ) = 2,338 \text{ m}.$$

Por lo tanto, la distancia entre ellos es

$$y_R - y_V = 1,523 \text{ m}.$$

### Importancia

La gran distancia entre los extremos rojo y violeta del arcoíris producido por la luz blanca indica el potencial que tiene esta rejilla de difracción como herramienta espectroscópica. Cuanto más se puedan extender las longitudes de onda (mayor dispersión), más detalles se podrán ver en un espectro. Esto depende de la calidad de la rejilla de difracción, las cuales debe estar hecha con mucha precisión, además de tener líneas espaciadas de forma muy estrecha.

### ✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 4.4

Si no se conoce con exactitud la separación de líneas de una rejilla de difracción  $d$ , podemos utilizar una fuente de luz con una longitud de onda bien determinada para medirla. Supongamos que la franja constructiva de primer orden de la línea de emisión  $H_\beta$  del hidrógeno ( $\lambda = 656,3 \text{ nm}$ ) se mide en  $11,36^\circ$  utilizando un espectrómetro con rejilla de difracción. ¿Cuál es la distancia entre las líneas de esta rejilla?

### 🔗 INTERACTIVO

Tome [la misma simulación \(https://openstax.org/l/21doubleslitdiff\)](https://openstax.org/l/21doubleslitdiff) que utilizamos para la difracción de doble rendija y pruebe a aumentar el número de rendijas de  $N = 2$  a  $N = 3, 4, 5, \dots$ . Los picos primarios se vuelven más nítidos y los secundarios son cada vez menos pronunciados. Cuando se alcanza el número máximo de  $N = 20$ , el sistema se comporta como una rejilla de difracción.

## 4.5 Aberturas circulares y resolución

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

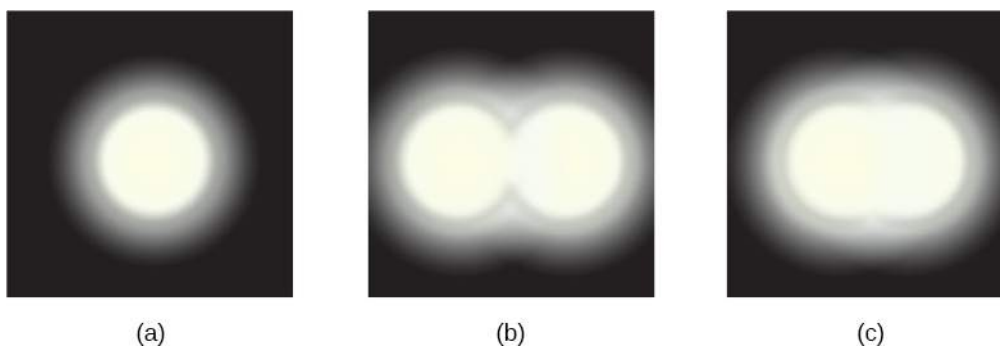
Al final de esta sección, podrá:

- Describir el límite de difracción en la resolución
- Describir el límite de difracción en la propagación del rayo

La luz se difracta al desplazarse por el espacio, curvándose alrededor de los obstáculos, interfiriendo de forma constructiva y destructiva. Esto puede utilizarse como herramienta espectroscópica (una rejilla de difracción dispersa la luz según la longitud de onda, por ejemplo, y se utiliza para producir espectros), pero la difracción también limita el detalle que podemos obtener en las imágenes.

La [Figura 4.17\(a\)](#) muestra el efecto del paso de la luz a través de una pequeña abertura circular. En lugar de un punto brillante con bordes nítidos, obtenemos un punto con un borde difuso rodeado de círculos de luz. Este patrón es causado por la difracción, similar a la producida por una rendija. La luz procedente de diferentes

partes de la abertura circular interfiere de forma constructiva y destructiva. El efecto es más notable cuando la abertura es pequeña, pero el efecto está ahí también para aberturas grandes.



**FIGURA 4.17** (a) La luz monocromática que pasa a través de una pequeña abertura circular produce este patrón de difracción. (b) Dos fuentes de luz puntuales que están cerca la una de la otra producen imágenes superpuestas debido a la difracción. (c) Si las fuentes están más cerca, no se pueden distinguir o determinar.

¿Cómo afecta la difracción al detalle que puede observarse cuando la luz pasa a través de una abertura? La [Figura 4.17\(b\)](#) muestra el patrón de difracción producido por dos fuentes de luz puntuales que están cerca la una de la otra. El patrón es similar al de una fuente puntual única, y todavía es posible decir que hay dos fuentes de luz en lugar de una. Si están más juntos, como en la [Figura 4.17\(c\)](#), no podemos distinguirlos, lo que limita el detalle o la **resolución** que podemos obtener. Este límite es una consecuencia ineludible de la naturaleza ondulatoria de la luz.

La difracción limita la resolución en muchas situaciones. La agudeza de nuestra visión es limitada porque la luz pasa a través de la pupila, que es la abertura circular del ojo. Tenga en cuenta que la propagación de la luz en forma de difracción se debe al diámetro limitado de un haz de luz, no a la interacción con una abertura. Así, la luz que pasa a través de una lente de diámetro  $D$  muestra este efecto y se propaga, difuminando la imagen, al igual que la luz que pasa por una abertura de diámetro  $D$ . Así, la difracción limita la resolución de cualquier sistema que tenga una lente o un espejo. Los telescopios también están limitados por la difracción, debido al diámetro finito  $D$  del espejo primario.

¿Cuál es el límite? Para responder a esta pregunta, considere el patrón de difracción para una abertura circular, que tiene un máximo central más amplio y brillante que los máximos que lo rodean (similar a una rendija) ([Figura 4.18\(a\)](#)). Se puede demostrar que, para una abertura circular de diámetro  $D$ , el primer mínimo en el patrón de difracción se produce en  $\theta = 1,22\lambda/D$  (siempre que la abertura sea grande en comparación con la longitud de onda de la luz, como ocurre en la mayoría de los instrumentos ópticos). El criterio aceptado para determinar el **límite de difracción** de la resolución basado en este ángulo se conoce como el **criterio de Rayleigh**, que fue desarrollado por Lord Rayleigh en el siglo XIX.

### Criterio de Rayleigh

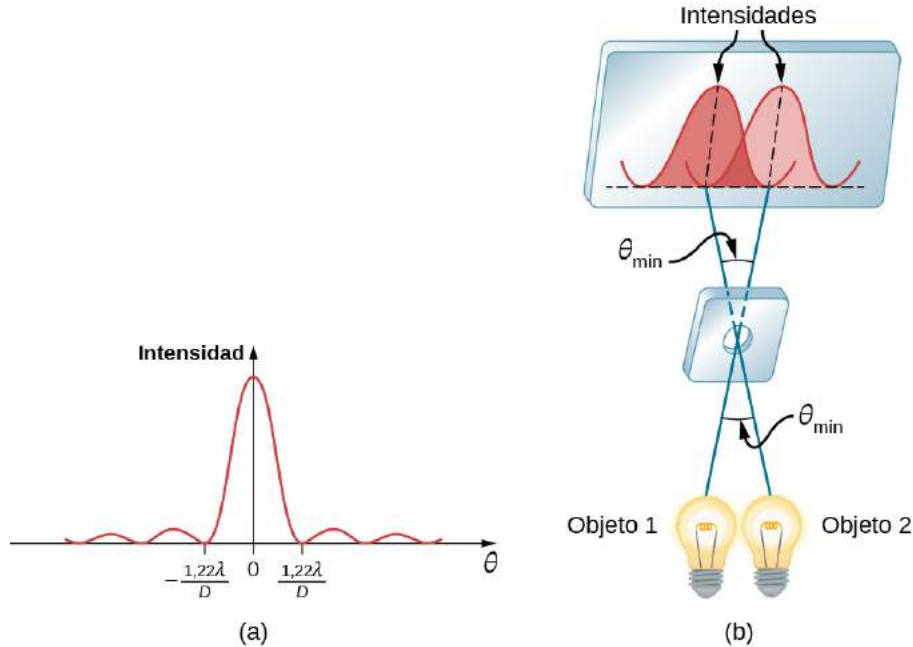
El límite de difracción para la resolución establece que dos imágenes son apenas resolubles cuando el centro del patrón de difracción de una está directamente sobre el primer mínimo del patrón de difracción de la otra ([Figura 4.18\(b\)](#)).

El primer mínimo está en un ángulo de  $\theta = 1,22\lambda/D$ , de modo que dos objetos puntuales son apenas resolubles si están separados por el ángulo

$$\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad 4.5$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz (u otra radiación electromagnética) y  $D$  es el diámetro de la abertura, lente, espejo, etc., con la que se observan los dos objetos. En esta expresión,  $\theta$  tiene unidades de radianes. Este

ángulo también se conoce comúnmente como el límite de difracción.



**FIGURA 4.18** (a) Gráfica de la intensidad del patrón de difracción para una abertura circular. Tome en cuenta que, al igual que en una rendija simple, el máximo central es más amplio y brillante que los de los lados. (b) Dos objetos puntuales producen patrones de difracción superpuestos. Aquí se muestra el criterio de Rayleigh para que sea apenas resoluble. El máximo central de un patrón se encuentra en el primer mínimo del otro.

Todos los intentos de observar el tamaño y la forma de los objetos están limitados por la longitud de onda del instrumento de medición. Incluso la pequeña longitud de onda de la luz impide una precisión exacta. Cuando se utilizan instrumentos de medición con longitudes de onda extremadamente pequeñas, como en el caso del microscopio electrónico, el sistema se ve perturbado, lo que sigue limitando nuestros conocimientos. El principio de incertidumbre de Heisenberg afirma que este límite es fundamental e ineludible, como veremos en el capítulo dedicado a la mecánica cuántica.

## EJEMPLO 4.6

### Cálculo de los límites de difracción del telescopio espacial Hubble

El espejo primario del telescopio espacial Hubble en órbita tiene un diámetro de 2,40 m. Al estar en órbita, este telescopio evita los efectos degradantes de la distorsión atmosférica sobre su resolución. (a) ¿Cuál es el ángulo entre dos fuentes luminosas puntuales que son apenas resolubles (quizás dos estrellas)? Supongamos que la longitud de onda media de la luz es de 550 nm. (b) Si estas dos estrellas están a una distancia de 2 millones de años-luz, la cual es la distancia a la galaxia de Andrómeda, ¿qué tan cerca pueden estar y aún ser distinguidas? (Un año-luz, o ly, es la distancia que recorre la luz en 1 año).

#### Estrategia

El criterio de Rayleigh que figura en la [Ecuación 4.5](#),  $\theta = 1,22\lambda/D$ , da el menor ángulo posible  $\theta$  entre las fuentes puntuales, o la mejor resolución posible. Una vez conocido este ángulo, podemos calcular la distancia entre las estrellas, ya que nos dan la distancia a la que se encuentran.

#### Solución

- a. El criterio de Rayleigh para el ángulo mínimo resoluble es

$$\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}.$$

Al introducir los valores conocidos se obtiene

$$\theta = 1,22 \frac{550 \times 10^{-9} \text{ m}}{2,40 \text{ m}} = 2,80 \times 10^{-7} \text{ rad.}$$

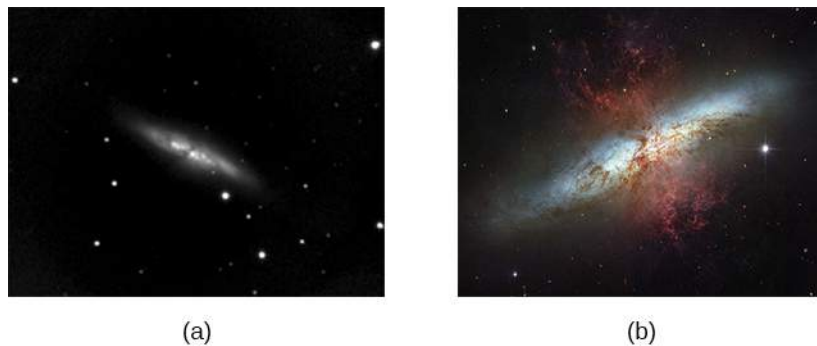
- b. La distancia  $s$  entre dos objetos a una distancia  $r$  y separados por un ángulo  $\theta$  es  $s = r\theta$ .

Al sustituir los valores conocidos se obtiene

$$s = (2,0 \times 10^6 \text{ ly}) (2,80 \times 10^{-7} \text{ rad}) = 0,56 \text{ ly.}$$

### Importancia

El ángulo encontrado en la parte (a) es extraordinariamente pequeño (menos de 1/50 000 grados), porque el espejo primario es muy grande comparado con la longitud de onda de la luz. Como se ha observado, los efectos de difracción son más notables cuando la luz interactúa con objetos que tienen tamaños del orden de la longitud de onda de la luz. Sin embargo, el efecto sigue existiendo, y hay un límite de difracción para lo observable. La resolución real del telescopio Hubble no es tan buena como la que se encuentra aquí. Como en todos los instrumentos, hay otros efectos, como la falta de uniformidad de los espejos o las aberraciones de las lentes, que limitan aún más la resolución. Sin embargo, la [Figura 4.19](#) da una indicación de la extensión del detalle observable con el Hubble debido a su tamaño y calidad, y especialmente porque está por encima de la atmósfera terrestre.



**FIGURA 4.19** Estas dos fotografías de la galaxia M82 dan una idea de los detalles observables utilizando (a) un telescopio terrestre y (b) el telescopio espacial Hubble. (crédito a: modificación de la obra de "Ricnun"/Wikimedia Commons; crédito b: modificación de la obra de la Administración Nacional de Aeronáutica y del Espacio (National Aeronautics and Space Administration, NASA), la Agencia Espacial Europea (European Space Agency, ESA) y el Equipo Hubble Heritage (Instituto de Ciencias del Telescopio Espacial [Space Telescope Science Institute, STScI]/Asociación de Universidades para la Investigación en Astronomía [Association of Universities for Research in Astronomy, AURA]))

La respuesta de la parte (b) indica que se pueden distinguir dos estrellas separadas por aproximadamente medio año luz. La distancia media entre las estrellas de una galaxia es del orden de cinco años-luz en las partes exteriores y de aproximadamente un año-luz cerca del centro galáctico. Por lo tanto, el Hubble puede distinguir la mayor parte de las estrellas individuales de la galaxia de Andrómeda, a pesar de que se encuentra a una distancia tan enorme que su luz tarda 2 millones de años en llegar a nosotros. La [Figura 4.20](#) muestra otro espejo utilizado para observar las ondas de radio del espacio exterior.

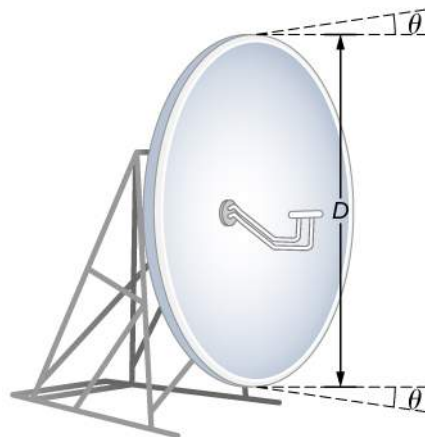


**FIGURA 4.20** Un paraboloide de 305 m de diámetro en Arecibo (Puerto Rico) está revestido de material reflectante, lo que lo convierte en un radiotelescopio. Es el mayor plato de enfoque curvo del mundo. Aunque la  $D$  de Arecibo es mucho mayor que la del telescopio Hubble, detecta radiación de una longitud de onda mucho mayor y su límite de difracción es significativamente menor que el del Hubble. El telescopio de Arecibo sigue siendo muy útil, porque las ondas de radio transportan información importante que no transporta la luz visible. (crédito: Jeff Hitchcock)

### ✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 4.5

¿Cuál es la resolución angular del telescopio de Arecibo que se muestra en la [Figura 4.20](#) cuando funciona a una longitud de onda de 21 cm? ¿Cómo se compara con la resolución del telescopio Hubble?

La difracción no solo es un problema para los instrumentos ópticos, sino también para la radiación electromagnética en sí. Cualquier haz de luz que tenga un diámetro finito  $D$  y una longitud de onda  $\lambda$  presenta una dispersión por difracción. El haz se extiende con un ángulo  $\theta$  dado por la [Ecuación 4.5](#),  $\theta = 1,22\lambda/D$ . Tomemos, por ejemplo, un rayo láser formado por rayos lo más paralelos posible (ángulos entre los rayos lo más cercanos posible  $\theta = 0^\circ$ ) en su lugar se extiende en un ángulo  $\theta = 1,22\lambda/D$ , donde  $D$  es el diámetro del haz y  $\lambda$  es su longitud de onda. Esta propagación es imposible de observar para una linterna porque su haz no es muy paralelo para empezar. Sin embargo, para la transmisión a larga distancia de rayos láser o señales de microondas, la dispersión por difracción puede ser significativa ([Figura 4.21](#)). Para evitarlo, podemos aumentar  $D$ . Esto se hace para la luz láser enviada a la luna para medir su distancia con respecto a la Tierra. El rayo láser se expande a través de un telescopio para hacer  $D$  mucho más grande y  $\theta$  más pequeño.



**FIGURA 4.21** El haz producido por esta antena de transmisión de microondas se extiende en un ángulo mínimo  $\theta = 1,22\lambda/D$  debido a la difracción. Es imposible producir un haz casi paralelo porque el haz tiene un diámetro limitado.

En la mayoría de los laboratorios de biología, la resolución es un problema cuando se introduce el uso del microscopio. Cuanto menor sea la distancia  $x$  por la que se pueden separar dos objetos y seguir viéndolos como distintos, mayor será la resolución. La potencia de resolución de una lente se define como la distancia  $x$ . Una expresión para la potencia de resolución se obtiene a partir del criterio de Rayleigh. La [Figura 4.22\(a\)](#) muestra dos objetos puntuales separados por una distancia  $x$ . Según el criterio de Rayleigh, la resolución es posible cuando la separación angular mínima es

$$\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} = \frac{x}{d},$$

donde  $d$  es la distancia entre la muestra y la lente del objetivo, y hemos utilizado la aproximación para ángulos pequeños (es decir, hemos asumido que  $x$  es mucho menor que  $d$ ), por lo que  $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$ . Por lo tanto, la potencia de resolución es

$$x = 1,22 \frac{\lambda d}{D}.$$

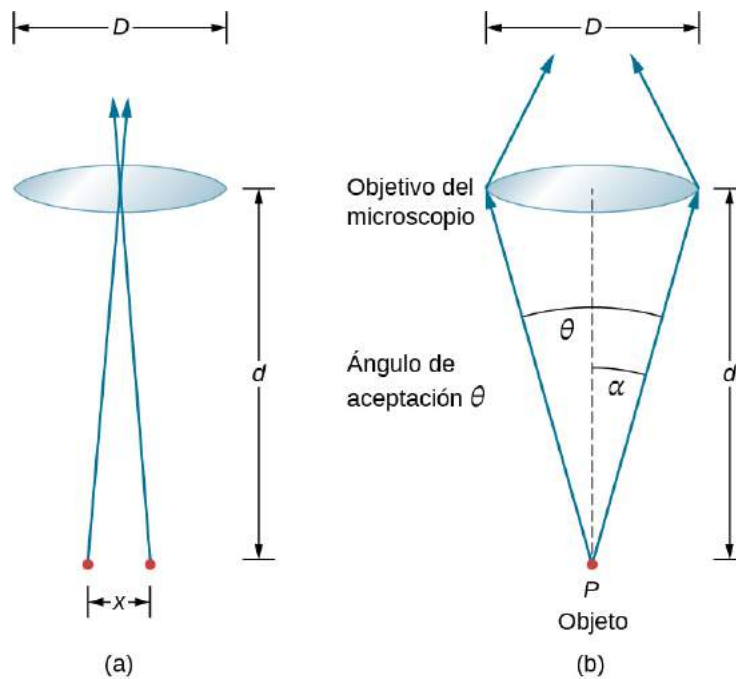
Otra forma de ver esto es mediante el concepto de abertura numérica (numerical aperture,  $NA$ ), que es una medida del ángulo de aceptación máximo al que una lente tomará la luz y aún la contendrá dentro de la lente. La [Figura 4.22\(b\)](#) muestra una lente y un objeto en el punto  $P$ . La  $NA$  es una medida de la capacidad de la lente para recoger la luz y distinguir los detalles más pequeños. El ángulo subtendido por la lente en su foco se define como  $\theta = 2\alpha$ . A partir de la figura y utilizando de nuevo la aproximación de ángulos pequeños, podemos escribir

$$\sin \alpha = \frac{D/2}{d} = \frac{D}{2d}.$$

La  $NA$  de una lente es  $NA = n \sin \alpha$ , donde  $n$  es el índice de refracción del medio entre la lente del objetivo y el objeto en el punto  $P$ . A partir de esta definición de  $NA$ , podemos ver que

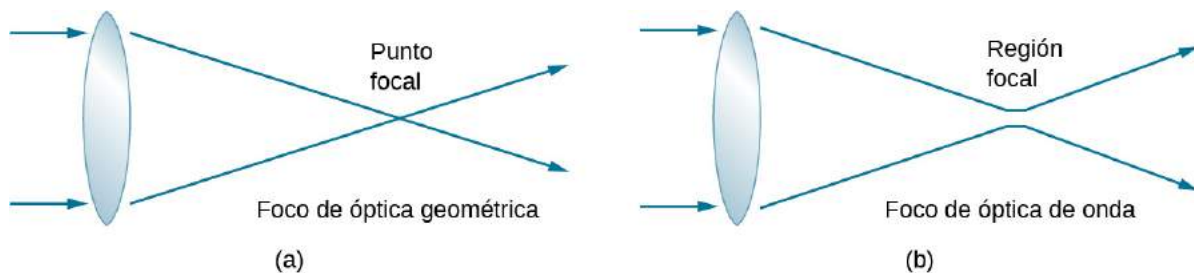
$$x = 1,22 \frac{\lambda d}{D} = 1,22 \frac{\lambda}{2 \sin \alpha} = 0,61 \frac{\lambda n}{NA}.$$

En un microscopio, la  $NA$  es importante porque está relacionada con la potencia de resolución de una lente. Una lente con una  $NA$  grande es capaz de distinguir los detalles más pequeños. Las lentes con mayor  $NA$  también pueden recoger más luz y, por tanto, ofrecer una imagen más brillante. Otra forma de describir esta situación es que cuanto mayor sea la  $NA$ , mayor será el cono de luz que puede introducirse en la lente, por lo que se recogen más modos de difracción. Así, el microscopio tiene más información para formar una imagen clara, y su potencia de resolución es mayor.



**FIGURA 4.22** (a) Dos puntos separados por una distancia  $x$  y situados a una distancia  $d$  del objetivo. (b) Términos y símbolos utilizados en la discusión sobre la potencia de resolución para una lente y un objeto en el punto  $P$  (crédito a: modificación del trabajo de "Infopro"/Wikimedia Commons).

Una de las consecuencias de la difracción es que el punto focal de un haz tiene una anchura y una distribución de intensidad finitas. Imagínese el enfoque cuando solo se considera la óptica geométrica, como en la [Figura 4.23\(a\)](#). El punto focal se considera un punto infinitamente pequeño con una intensidad enorme y la capacidad de incinerar la mayoría de las muestras, independientemente de la  $NA$  de la lente objetivo, una simplificación poco física. En el caso de la óptica de onda, debido a la difracción, se tiene en cuenta el fenómeno en el que el punto focal se propaga para convertirse en un área focal ([Figura 4.23\(b\)](#)) con la disminución del tamaño del área al aumentar la  $NA$ . En consecuencia, la intensidad en el área focal aumenta con el incremento de la  $NA$ . Cuanto mayor sea la  $NA$ , mayores serán las posibilidades de foto degradación de la muestra. Sin embargo, el área nunca se convierte en un verdadero punto.



**FIGURA 4.23** (a) En la óptica geométrica, el foco se modela como un punto, pero no es físicamente posible producir tal punto porque implica una intensidad infinita. (b) En la óptica de onda, el foco es una región extendida.

En otro tipo de microscopio, se hace que las moléculas de una muestra emitan luz a través de un mecanismo llamado fluorescencia. Mediante el control de las moléculas que emiten luz, se han podido construir imágenes con una resolución mucho más fina que el criterio de Rayleigh, sorteando así el límite de difracción. El desarrollo de la microscopía de fluorescencia de superresolución le valió el Premio Nobel de Química de 2014.

### INTERACTIVO

En este modelo de resolución óptica, se muestran dos patrones de difracción de la luz a través de dos aberturas circulares, una al lado de la otra, en [esta simulación \(https://openstax.org/l/21optresmodsim\)](https://openstax.org/l/21optresmodsim) de Fu-



Kwun Hwang. Observe cómo se funden los patrones a medida que disminuye los diámetros de abertura.

## 4.6 Difracción de rayos X

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

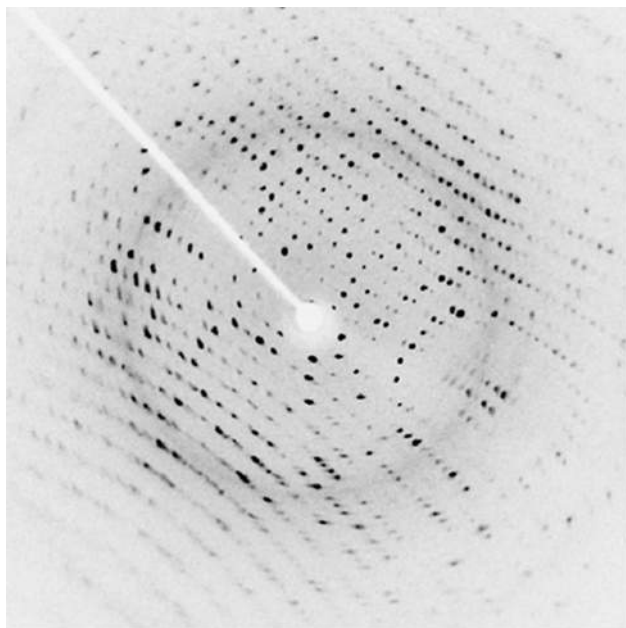
Al final de esta sección podrá:

- Describir los efectos de interferencia y difracción exhibidos por los rayos X en interacción con las estructuras a escala atómica

Como los fotones de rayos X son muy energéticos, tienen longitudes de onda relativamente cortas, del orden de  $10^{-8}$  m a  $10^{-12}$  m. Así, los fotones típicos de los rayos X actúan como rayos cuando encuentran objetos macroscópicos, como los dientes, y producen sombras nítidas. Sin embargo, como los átomos tienen un tamaño del orden de 0,1 nm, los rayos X pueden utilizarse para detectar la ubicación, la forma y el tamaño de los átomos y las moléculas. El proceso se denomina **difracción de rayos X**, y consiste en la interferencia de los rayos X para producir patrones que pueden ser analizados para obtener información sobre las estructuras que dispersaron los rayos X.

Quizá el ejemplo más famoso de la difracción de rayos X sea el descubrimiento de la estructura doble helicoidal del ADN en 1953 por un equipo internacional de científicos que trabajaban en el Laboratorio Cavendish de Inglaterra: el estadounidense James Watson, el inglés Francis Crick y el neozelandés Maurice Wilkins. Utilizando los datos de difracción de rayos X producidos por Rosalind Franklin, fueron los primeros en modelar la estructura de doble hélice del ADN, tan crucial para la vida. Por este trabajo, Watson, Crick y Wilkins recibieron en 1962 el Premio Nobel de Fisiología o Medicina. (Hay cierto debate y controversia sobre la cuestión de que Rosalind Franklin no fue incluida en el premio, aunque murió en 1958, antes de que se concediera el premio).

La [Figura 4.24](#) muestra un patrón de difracción producido por la dispersión de rayos X de un cristal. Este proceso se conoce como cristalografía de rayos X por la información que puede aportar sobre la estructura de los cristales, y fue el tipo de datos que Rosalind Franklin proporcionó a Watson y Crick para el ADN. Los rayos X no solo confirman el tamaño y la forma de los átomos, sino que proporcionan información sobre la disposición atómica de los materiales. Por ejemplo, las investigaciones más recientes sobre superconductores de alta temperatura se refieren a materiales complejos cuya disposición de la red es crucial para obtener un material superconductor. Se pueden estudiar mediante cristalografía de rayos X.



**FIGURA 4.24** La difracción de rayos X del cristal de una proteína (lisozima de clara de huevo de gallina) produjo este patrón de interferencia. El análisis del patrón arroja información sobre la estructura de la proteína. (crédito:

“Del45”/Wikimedia Commons)

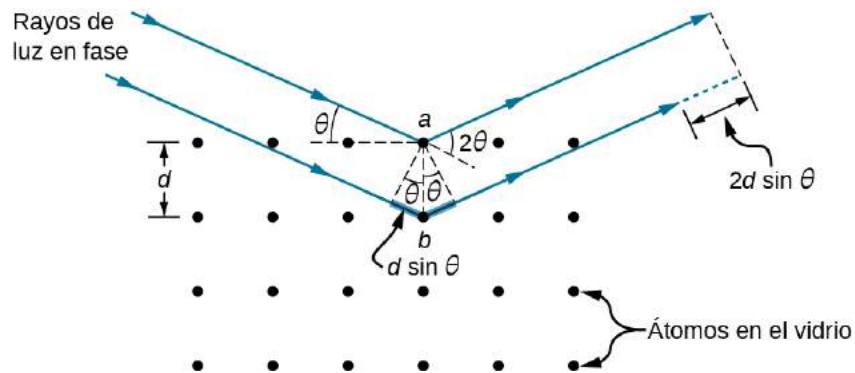
Históricamente, la dispersión de los rayos X en los cristales se utilizó para demostrar que los rayos X son ondas electromagnéticas (electromagnetic, EM) energéticas. Esto se sospechaba desde el descubrimiento de los rayos X en 1895, pero no fue hasta 1912 cuando el alemán Max von Laue (1879-1960) convenció a dos de sus colegas para que dispersaran los rayos X de los cristales. Si se obtiene un patrón de difracción, razonó, entonces los rayos X deben ser ondas, y se podría determinar su longitud de onda. (El espaciado de los átomos en varios cristales se conocía razonablemente bien en aquella época, basándose en buenos valores del número de Avogadro). Los experimentos fueron convincentes, y el Premio Nobel de Física de 1914 fue concedido a von Laue por su sugerencia que condujo a la prueba de que los rayos X son ondas EM. En 1915, el singular equipo de padre e hijo formado por Sir William Henry Bragg y su hijo, Sir William Lawrence Bragg, fue galardonado con un premio Nobel conjunto por inventar el espectrómetro de rayos X y la entonces nueva ciencia del análisis de rayos X.

De una manera que recuerda a la interferencia de película delgada, consideramos dos ondas planas a longitudes de onda de rayos X, cada una de las cuales se refleja en un plano diferente de átomos dentro de la red de un cristal, como se muestra en la [Figura 4.25](#). A partir de la geometría, la diferencia de longitudes de trayectoria es  $2d \sin \theta$ . La interferencia constructiva se produce cuando esta distancia es un múltiplo entero de la longitud de onda. Esta condición se recoge en la *ecuación de Bragg*,

$$m\lambda = 2d \sin \theta, \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

4.6

donde  $m$  es un número entero positivo y  $d$  es el espacio entre los planos. Siguiendo la ley de reflexión, tanto las ondas incidentes como las reflejadas se describen con el mismo ángulo,  $\theta$ , pero a diferencia de la práctica general en la óptica geométrica,  $\theta$  se mide con respecto a la propia superficie, en lugar de la normal.



**FIGURA 4.25** Difracción de rayos X con un cristal. Dos ondas incidentes se reflejan en dos planos de un cristal. La diferencia en las longitudes de las trayectorias se indica con la línea discontinua.

## EJEMPLO 4.7

### Difracción de rayos X con cristales de sal

La sal de mesa común está compuesta principalmente por cristales de NaCl. En un cristal de NaCl, hay una familia de planos separados 0,252 nm. Si el máximo de primer orden se observa en un ángulo de incidencia de  $18,1^\circ$ , ¿cuál es la longitud de onda de la dispersión de rayos X de este cristal?

#### Estrategia

Utilice la ecuación de Bragg, [Ecuación 4.6](#),  $m\lambda = 2d \sin \theta$ , para resolver  $\theta$ .

#### Solución

Para el primer orden,  $m = 1$ , y se conoce la distancia entre planos  $d$ . Al resolver la ecuación de Bragg para la longitud de onda se obtiene

$$\lambda = \frac{2d \sin \theta}{m} = \frac{2(0,252 \times 10^{-9} \text{ m}) \sin (18,1^\circ)}{1} = 1,57 \times 10^{-10} \text{ m, o } 0,157 \text{ nm.}$$

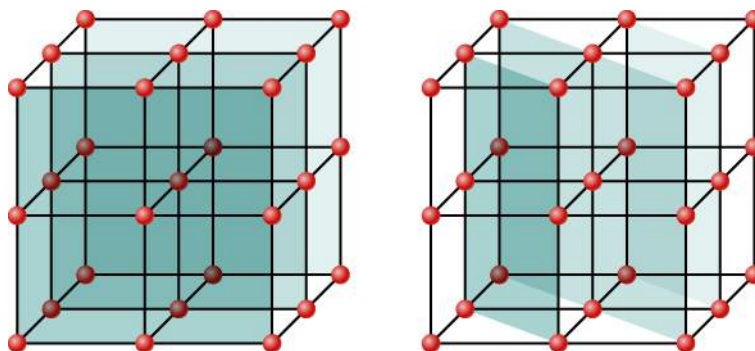
### Importancia

La longitud de onda determinada se ajusta a la región de los rayos X del espectro electromagnético. Una vez más, la naturaleza ondulatoria de la luz se pone de manifiesto cuando la longitud de onda ( $\lambda = 0,157 \text{ nm}$ ) es comparable al tamaño de las estructuras físicas ( $d = 0,252 \text{ nm}$ ) con la que interactúa.

### ✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 4.6

Para el experimento descrito en el [Ejemplo 4.7](#), ¿cuáles son los otros dos ángulos en los que se pueden observar los máximos de interferencia? ¿Qué limita el número de máximos?

Aunque la [Figura 4.25](#) representa un cristal como un conjunto bidimensional de centros de dispersión para simplificar, los cristales reales son estructuras en tres dimensiones. La dispersión puede producirse simultáneamente a partir de diferentes familias de planos con diferentes orientaciones y patrones de espaciado, conocidos como **planos de Bragg**, como se muestra en la [Figura 4.26](#). El patrón de interferencia resultante puede ser bastante complejo.



**FIGURA 4.26** Debido a la regularidad que hace una estructura cristalina, un cristal puede tener muchas familias de planos dentro de su geometría, cada una de las cuales da lugar a la difracción de rayos X.

## 4.7 Holografía

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

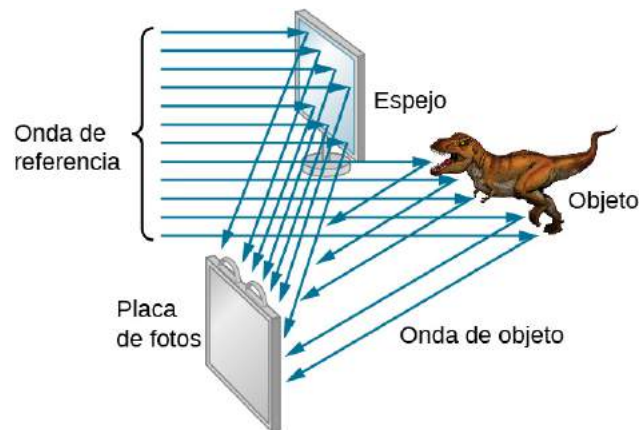
- Describir cómo se graba una imagen tridimensional en forma de holograma
- Describir cómo se forma una imagen tridimensional a partir de un holograma

Un **holograma**, como el que aparece en la [Figura 4.27](#), es una verdadera imagen tridimensional grabada en una película mediante láser. Los hologramas se utilizan para divertirse, para decorar artículos novedosos y portadas de revistas, para la seguridad de las tarjetas de crédito y los permisos de conducir (se necesita un láser y otros equipos para reproducirlos) y para el almacenamiento importante de información tridimensional. Puede ver que un holograma es una verdadera imagen tridimensional porque los objetos cambian de posición relativa en la imagen cuando se ven desde diferentes ángulos.



**FIGURA 4.27** Las tarjetas de crédito suelen tener hologramas para los logotipos, lo que dificulta su reproducción (crédito: Dominic Alves)

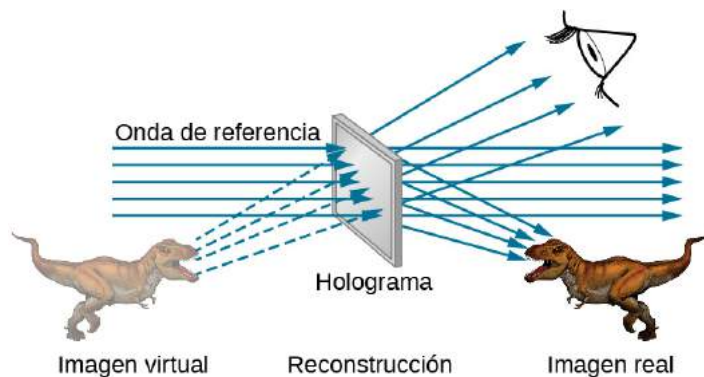
El nombre holograma significa “imagen completa” (del griego *holo*, como en holístico) porque la imagen es tridimensional. La **holografía** es el proceso de producción de hologramas y, aunque se graban en una película fotográfica, el proceso es muy diferente al de la fotografía normal. La holografía utiliza la interferencia de la luz o la óptica ondulatoria, mientras que la fotografía normal utiliza la óptica geométrica. La [Figura 4.28](#) muestra un método para producir un holograma. La luz coherente de un láser es dividida por un espejo, y parte de la luz ilumina el objeto. El resto, llamado haz de referencia, brilla directamente sobre un fragmento de película. La luz dispersada por el objeto interfiere con el haz de referencia, produciendo interferencias constructivas y destructivas. Como resultado, la película expuesta tiene un aspecto borroso, pero un examen más detallado revela un complicado patrón de interferencia almacenado en ella. Donde la interferencia era constructiva, la película (un negativo en realidad) se oscurece. La holografía se denomina a veces fotografía sin lentes, porque utiliza las características ondulatorias de la luz, a diferencia de la fotografía normal, que utiliza óptica geométrica y requiere lentes.



**FIGURA 4.28** Producción de un holograma. La luz coherente de una sola longitud de onda de un láser produce un patrón de interferencia bien definido en un fragmento de película. Un espejo parcialmente plateado divide el rayo láser, de manera que una parte de la luz ilumina el objeto y el resto brilla directamente sobre la película. (crédito: modificación del trabajo de Mariana Ruiz Villarreal)

La luz que incide sobre un holograma puede formar una imagen tridimensional del objeto original. El proceso es complicado en sus detalles, pero se pueden entender los fundamentos, como se muestra en la [Figura 4.29](#), donde un láser del mismo tipo que expuso la película se utiliza ahora para iluminarla. Las diminutas regiones expuestas de la película son oscuras y bloquean la luz, mientras que las regiones menos expuestas dejan pasar la luz. Así, la película se comporta como una colección de rejillas de difracción con distintos patrones de espaciado. La luz que atraviesa el holograma se difracta en varias direcciones, produciendo imágenes reales y virtuales del objeto utilizado para exponer la película. El patrón de interferencia es el mismo que el producido por el objeto. Al mover el ojo a varios lugares del patrón de interferencia se obtienen diferentes perspectivas,

igual que si se mirara directamente al objeto. Así, la imagen se parece al objeto y es tridimensional como este.



**FIGURA 4.29** Un holograma de transmisión es aquel que produce imágenes reales y virtuales cuando se hace pasar por el un láser del mismo tipo que el que expuso el holograma. La difracción de varias partes de la película produce el mismo patrón de interferencia que produjo el objeto que se utilizó para exponerla. (crédito: modificación del trabajo de Mariana Ruiz Villarreal)

El holograma ilustrado en la [Figura 4.29](#) es un holograma de transmisión. Los hologramas que se ven con luz reflejada, como los hologramas de luz blanca de las tarjetas de crédito, son hologramas de reflexión y son más comunes. Los hologramas de luz blanca suelen aparecer un poco borrosos con los bordes del arcoíris, porque los patrones de difracción de los distintos colores de la luz están en lugares ligeramente diferentes debido a sus distintas longitudes de onda. Otros usos de la holografía son todo tipo de almacenamiento de información tridimensional, como las estatuas de los museos, los estudios de ingeniería de estructuras y las imágenes de órganos humanos.

Inventada a finales de la década de 1940 por Dennis Gabor (1900-1970), que ganó el Premio Nobel de Física en 1971 por su trabajo, la holografía se hizo mucho más práctica con el desarrollo del láser. Como los láseres producen luz coherente de una sola longitud de onda, sus patrones de interferencia son más pronunciados. La precisión es tan grande que incluso es posible grabar numerosos hologramas en un solo fragmento de película con solo cambiar el ángulo de la película para cada imagen sucesiva. Así es como se producen los hologramas que se mueven al pasar junto a ellos: una especie de película sin lentes.

Del mismo modo, en el campo de la medicina, los hologramas han permitido realizar visualizaciones holográficas tridimensionales completas de objetos a partir de una serie de imágenes. Almacenar estas imágenes para su uso futuro es relativamente fácil. Con el uso de un endoscopio se pueden obtener imágenes holográficas tridimensionales de alta resolución de los órganos y tejidos internos.

## Revisión Del Capítulo

### Términos Clave

**ancho del ángulo del pico central** entre el mínimo para  $m = 1$  y  $m = -1$

**Criterio de Rayleigh** dos imágenes son apenas resolubles cuando el centro del patrón de difracción de una está directamente sobre el primer mínimo del patrón de difracción de la otra

**difracción** curvatura de una onda alrededor de los bordes de una abertura o de un obstáculo

**Difracción de rayos X** técnica que proporciona información detallada sobre la estructura cristalográfica de los materiales naturales y manufacturados

**holografía** proceso de producción de hologramas con el uso de láseres

**holograma** imagen tridimensional grabada en una película mediante láser; la palabra holograma significa *imagen completa* (del griego *holo*, como en holístico)

**interferencia destructiva para una rendija** se produce cuando el ancho de la rendija es

comparable a la longitud de onda de la luz que la ilumina

**límite de difracción** límite fundamental de la resolución debido a la difracción

**orden faltante** máximo de interferencia que no se ve porque coincide con un mínimo de difracción

**patrón de difracción de dos rendijas** patrón de difracción de dos rendijas de ancho  $D$  separadas por una distancia  $d$  es el patrón de interferencia de dos fuentes puntuales separadas por  $d$  multiplicado por el patrón de difracción de una rendija de ancho  $D$

**Planos de Bragg** familias de planos dentro de los cristales que pueden dar lugar a la difracción de rayos X

**rejilla de difracción** gran número de rendijas paralelas uniformemente espaciadas

**resolución** capacidad, o su límite, para distinguir pequeños detalles en las imágenes

### Ecuaciones Clave

Interferencia destructiva para una sola rendija  $a \sin \theta = m\lambda$  para  $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Ángulo de media fase  $\beta = \frac{\phi}{2} = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$

Amplitud de campo en el patrón de difracción  $E = N \Delta E_0 \frac{\sin \beta}{\beta}$

Intensidad en el patrón de difracción  $I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$

Criterio de Rayleigh para aberturas circulares  $\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}$

Ecuación de Bragg  $m\lambda = 2d \sin \theta$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$

## Resumen

### 4.1 Difracción de una rendija

- La difracción puede enviar una onda alrededor de los bordes de una abertura u otro obstáculo.
- Una rendija produce un patrón de interferencia caracterizado por un amplio máximo central con máximos más estrechos y atenuados a los lados.

### 4.2 Intensidad en la difracción de una rendija

- El patrón de intensidad para la difracción

debida a una rendija puede calcularse utilizando fasores dado por la

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2,$$

donde  $\beta = \frac{\phi}{2} = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$ ,  $a$  es el ancho de la rendija,  $\lambda$  es la longitud de onda, y  $\theta$  es el ángulo desde el pico central.



### 4.3 Difracción de doble rendija

- En las rendijas reales de ancho finito, los efectos de interferencia y difracción operan simultáneamente para formar un patrón de intensidad complicado.
- Se pueden determinar las intensidades relativas de las franjas de interferencia dentro de un patrón de difracción.
- Los órdenes faltantes se producen cuando un máximo de interferencia y un mínimo de difracción coinciden.

### 4.4 Rejillas de difracción

- Una rejilla de difracción consiste en un gran número de rendijas paralelas uniformemente espaciadas que producen un patrón de interferencia similar pero más nítido que el de una rendija doble.
- La interferencia constructiva se produce cuando  $d \sin \theta = m\lambda$  para  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , donde  $d$  es la distancia entre las rendijas,  $\theta$  es el ángulo relativo a la dirección de incidencia, y  $m$  es el orden de la interferencia.

## Preguntas Conceptuales

### 4.1 Difracción de una rendija

1. A medida que se reduce el ancho de la rendija que produce un patrón de difracción de una rendija, ¿cómo cambiará el patrón de difracción producido?
2. Compare la interferencia y la difracción.
3. Si usted y un amigo están en lados opuestos de una colina, se pueden comunicar con *walkie-talkies*, pero no con linternas. Explique.
4. ¿Qué ocurre con el patrón de difracción de una rendija cuando todo el aparato óptico se sumerge en agua?
5. En nuestro estudio de la difracción por una rendija, suponemos que la longitud de la rendija es mucho mayor que el ancho. ¿Qué ocurre con el patrón de difracción si estas dos dimensiones fueran comparables?
6. Una rendija rectangular es dos veces más ancha que alta. ¿El pico de difracción central es más amplio en la dirección vertical o en la horizontal?

### 4.2 Intensidad en la difracción de una rendija

7. En la [Ecuación 4.4](#), el parámetro  $\beta$  parece un ángulo, pero no es un ángulo que se pueda medir con un transportador en el mundo físico.

### 4.5 Aberturas circulares y resolución

- La difracción limita la resolución.
- El criterio de Rayleigh establece que dos imágenes son apenas distinguibles cuando el centro del patrón de difracción de una está directamente sobre el primer mínimo del patrón de difracción de la otra.

### 4.6 Difracción de rayos X

- Los rayos X son una radiación electromagnética de longitud de onda relativamente corta y pueden presentar características ondulatorias como la interferencia cuando interactúan con objetos correspondientemente pequeños.

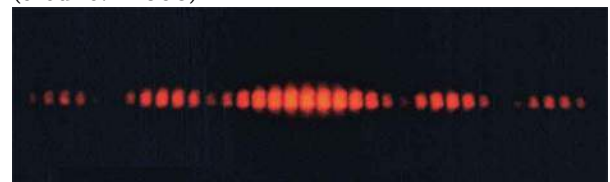
### 4.7 Holografía

- La holografía es una técnica basada en la interferencia de ondas para registrar y formar imágenes tridimensionales.
- Los láseres ofrecen una forma práctica de producir imágenes holográficas nítidas gracias a su luz monocromática y coherente para obtener patrones de interferencia pronunciados.

Explique qué representa  $\beta$ .

### 4.3 Difracción de doble rendija

8. A continuación, se muestra la parte central del patrón de interferencia para una longitud de onda pura de luz roja proyectada sobre una doble rendija. El patrón es en realidad una combinación de interferencia de una rendija y de doble rendija. Tome en cuenta que los puntos brillantes están espaciados uniformemente. ¿Se trata de una característica de una rendija o de doble rendija? Observe que algunos de los puntos brillantes son tenues a ambos lados del centro. ¿Es una característica de una rendija o de doble rendija? ¿Qué es más pequeño, el ancho de la rendija o la separación entre estas? Explique sus respuestas. (crédito: PASCO)





#### 4.5 Aberturas circulares y resolución

9. ¿Se obtiene mayor resolución en un microscopio con luz roja o azul? Explique su respuesta.
10. La potencia de resolución de un telescopio refractor aumenta con el tamaño de su lente objetivo. ¿Qué otra ventaja se obtiene con una lente más grande?
11. La distancia entre los átomos de una molécula es de aproximadamente  $10^{-8}$  cm. ¿Puede utilizarse la luz visible para “ver” moléculas?
12. Un haz de luz siempre se expande. ¿Por qué no se puede crear un haz con rayos paralelos para evitar la propagación? ¿Por qué no se pueden utilizar lentes, espejos o aberturas para corregir la dispersión?

### Problemas

#### 4.1 Difracción de una rendija

17. (a) ¿A qué ángulo se sitúa el primer mínimo de la luz de 550 nm que incide sobre una rendija con un ancho de  $1,00\mu\text{m}$ ? (b) ¿Habrá un segundo mínimo?
18. (a) Calcule el ángulo en el que una rendija de  $2,00\text{-}\mu\text{m}$  de ancho produce su primer mínimo para la luz violeta de 410 nm. (b) ¿Dónde está el primer mínimo para la luz roja de 700 nm?
19. (a) ¿Cuál es el ancho de una rendija que produce su primer mínimo para la luz de 633 nm con un ángulo de  $28,0^\circ$ ? (b) ¿A qué ángulo estará el segundo mínimo?
20. (a) ¿Cuál es el ancho de una rendija que produce su primer mínimo a  $60,0^\circ$  para la luz de 600 nm? (b) Calcule la longitud de onda de la luz que tiene su primer mínimo en  $62,0^\circ$ .
21. Calcule la longitud de onda de la luz que tiene su tercer mínimo a un ángulo de  $48,6^\circ$  cuando incide en una rendija con un ancho de  $3,00\mu\text{m}$ .
22. (a) La luz de vapor de sodio con una longitud de onda media de 589 nm incide en una rendija con un ancho de  $7,50\mu\text{m}$ . ¿A qué ángulo produce su segundo mínimo? (b) ¿Cuál es el mínimo de mayor orden producido?
23. Consideremos un patrón de difracción por una rendija para  $\lambda = 589$  nm, proyectada en una pantalla que está a 1,00 m de una rendija de 0,25 mm de ancho. ¿A qué distancia del centro del patrón están los centros de la primera y la segunda franja oscura?
24. (a) Calcule el ángulo entre los primeros

#### 4.6 Difracción de rayos X

13. Las redes de cristal pueden examinarse con rayos X, pero no con rayos UV. ¿Por qué?

#### 4.7 Holografía

14. ¿Cómo se puede saber que un holograma es una verdadera imagen tridimensional y que las de las películas tridimensionales no lo son?
15. Si un holograma se graba con luz monocromática a una longitud de onda, pero su imagen se ve a otra longitud de onda, digamos 10% menor, ¿qué verá? ¿Y si se ve con una luz de exactamente la mitad de la longitud de onda original?
16. ¿Qué imagen se verá si un holograma se graba con luz monocromática pero su imagen se ve con luz blanca? Explique.

mínimos para las dos líneas de vapor de sodio que tienen longitudes de onda de 589,1 y 589,6 nm cuando inciden sobre una rendija con un ancho de  $2,00\mu\text{m}$ . (b) ¿Cuál es la distancia entre estos mínimos si el patrón de difracción incide en una pantalla a 1,00 m de la rendija? (c) Discuta la facilidad o dificultad de medir dicha distancia.

25. (a) ¿Cuál es el ancho mínimo de una rendija (en múltiplos de  $\lambda$ ) que producirá un primer mínimo para una longitud de onda  $\lambda$ ? (b) ¿Cuál es su ancho mínimo si produce 50 mínimos? (c) ¿1000 mínimos?
26. (a) Si una rendija produce un primer mínimo a  $14,5^\circ$ , ¿a qué ángulo se encuentra el mínimo de segundo orden? (b) ¿Cuál es el ángulo del mínimo de tercer orden? (c) ¿Existe un mínimo de cuarto orden? (d) Utilice sus respuestas para ilustrar cómo el ancho angular del máximo central es aproximadamente el doble del ancho angular del siguiente máximo (que es el ángulo entre el primer y el segundo mínimo).
27. Si la separación entre el primer y el segundo mínimo de un patrón de difracción por una rendija es de 6,0 mm, ¿cuál es la distancia entre la pantalla y la rendija? La longitud de onda de la luz es de 500 nm y el ancho de la rendija es de 0,16 mm.
28. Un rompeolas en la entrada de un puerto consiste en una barrera de roca con una abertura de 50,0 m de ancho. Las olas del mar, de 20,0 m de longitud de onda, se acercan a la abertura en línea recta. ¿A qué ángulos de la

dirección de incidencia están más protegidos los barcos dentro del puerto contra la acción de las olas?

29. Un técnico de mantenimiento de aeronaves pasa por delante de una puerta alta de hangar que actúa como una rendija para el sonido que entra en este. Fuera de la puerta, en una línea perpendicular a la abertura de la puerta, un motor a reacción emite un sonido de 600 Hz. ¿A qué ángulo con la puerta observará el técnico el primer mínimo de intensidad sonora si la abertura vertical tiene un ancho de 0,800 m y la velocidad del sonido es de 340 m/s?

#### 4.2 Intensidad en la difracción de una rendija

30. Una rendija con un ancho de  $3,0 \mu\text{m}$  se ilumina con una luz amarilla de sodio de longitud de onda de 589 nm. Halle la intensidad en un ángulo de  $15^\circ$  con respecto al eje en función de la intensidad del máximo central.
31. Una rendija de 0,1 mm de ancho se ilumina con una luz de mercurio de longitud de onda de 576 nm. Halle la intensidad en un ángulo de  $10^\circ$  con respecto al eje en función de la intensidad del máximo central.
32. El ancho del pico central en un patrón de difracción por una sola rendija es de 5,0 mm. La longitud de onda de la luz es de 600 nm, y la pantalla está a 2,0 m de la rendija. (a) ¿Cuál es el ancho de la rendija? (b) Determine la relación entre la intensidad a 4,5 mm del centro del patrón y la intensidad en el centro.
33. Consideremos el patrón de difracción por una rendija para  $\lambda = 600 \text{ nm}$ ,  $a = 0,025 \text{ mm}$ , y  $x = 2,0 \text{ m}$ . Halle la intensidad en términos de  $I_0$  en  $\theta = 0,5^\circ$ ,  $1,0^\circ$ ,  $1,5^\circ$ ,  $3,0^\circ$ , y  $10,0^\circ$ .

#### 4.3 Difracción de doble rendija

34. Dos rendijas con un ancho de  $2 \mu\text{m}$ , cada una en un material opaco, están separadas por una distancia de centro a centro de  $6 \mu\text{m}$ . Una luz monocromática de longitud de onda 450 nm incide en la doble rendija. Se encuentra un patrón combinado de interferencia y difracción en la pantalla.
- (a) ¿Cuántos picos de la interferencia se observarán en el máximo central del patrón de difracción?
- (b) ¿Cuántos picos de interferencia se observarán si se duplica el ancho de la rendija manteniendo la misma distancia entre estas?
- (c) ¿Cuántos picos de interferencia se

observarán si las rendijas están separadas el doble de la distancia, es decir,  $12 \mu\text{m}$ , manteniendo el mismo ancho de las rendijas?

(d) ¿Qué ocurrirá en (a) si en lugar de la luz de 450 nm se utiliza otra luz de longitud de onda de 680 nm?

(e) ¿Cuál es el valor de la relación entre la intensidad del pico central y la intensidad del siguiente pico brillante en (a)?

(f) ¿Depende esta relación de la longitud de onda de la luz?

(g) ¿Depende esta relación del ancho o de la separación de las rendijas?

35. Una doble rendija produce un patrón de difracción que es una combinación de interferencia de una rendija y de doble rendija. Halle la relación entre el ancho de las rendijas y la separación entre ellas, si el primer mínimo del patrón de una rendija incide sobre el quinto máximo del patrón de doble rendija. (Esto reducirá en gran medida la intensidad del quinto máximo)
36. Para una configuración de doble rendija en la que la separación de las rendijas es cuatro veces su ancho, ¿cuántas franjas de interferencia se encuentran en el pico central del patrón de difracción?
37. La luz de longitud de onda de 500 nm incide normalmente en 50 rendijas que tienen  $2,5 \times 10^{-3} \text{ mm}$  de ancho y un espaciado de  $5,0 \times 10^{-3} \text{ mm}$ . ¿Cuántas franjas de interferencia se encuentran en el pico central del patrón de difracción?
38. Una luz monocromática de longitud de onda de 589 nm incide en una doble rendija con un ancho de rendija de  $2,5 \mu\text{m}$  y una separación desconocida da lugar a un patrón de difracción que contiene nueve picos de interferencia dentro del máximo central. Halle la separación de las rendijas.
39. Cuando una luz monocromática de longitud de onda de 430 nm incide en una doble rendija que están separadas  $5 \mu\text{m}$  una de otra, producen 11 franjas de interferencia en su máximo central. ¿Cuántas franjas de interferencia habrá en el máximo central de una luz de la misma longitud de onda y ancho de rendija, pero con una nueva separación de rendija de  $4 \mu\text{m}$ ?
40. Determine las intensidades de dos picos de interferencia distintos del pico central en el máximo central de la difracción, si es posible, cuando una luz de longitud de onda de 628 nm incide sobre una doble rendija de ancho de 500

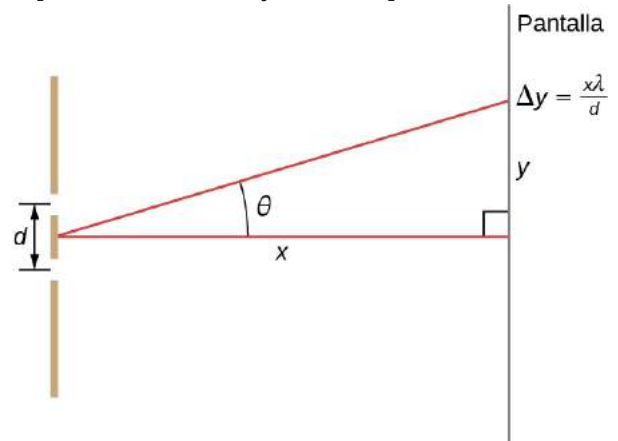
nm y una separación de 1500 nm. Utilice la intensidad del punto central que es de  $1 \text{ mW/cm}^2$ .

#### 4.4 Rejillas de difracción

41. Una rejilla de difracción tiene 2000 líneas por centímetro. ¿A qué ángulo se encontrará el máximo de primer orden para la luz verde de 520 nm de longitud de onda?
42. Halle el ángulo para el máximo de tercer orden para la luz amarilla de 580 nm de longitud de onda que incide sobre una rejilla de difracción que tiene 1500 líneas por centímetro.
43. ¿Cuántas líneas por centímetro hay en una rejilla de difracción que da un máximo de primer orden para la luz azul de 470 nm con un ángulo de  $25,0^\circ$ ?
44. ¿Cuál es la distancia entre líneas en una rejilla de difracción que produce un máximo de segundo orden para la luz roja de 760 nm con un ángulo de  $60,0^\circ$ ?
45. Calcule la longitud de onda de la luz que tiene su máximo de segundo orden en  $45,0^\circ$  al incidir sobre una rejilla de difracción que tiene 5000 líneas por centímetro.
46. Una corriente eléctrica a través del gas hidrógeno produce varias longitudes de onda distintas de luz visible. ¿Cuáles son las longitudes de onda del espectro del hidrógeno, si forman máximos de primer orden en ángulos de  $24,2^\circ$ ,  $25,7^\circ$ ,  $29,1^\circ$ , y  $41,0^\circ$  cuando se proyecta en una rejilla de difracción que tiene 10 000 líneas por centímetro?
47. (a) ¿En qué se convierten los cuatro ángulos del problema anterior si se utiliza una rejilla de difracción de 5000 líneas por centímetro? (b) Si se utiliza esta rejilla, ¿cuáles serían los ángulos de los máximos de segundo orden? (c) Discuta la relación entre las reducciones integrales en líneas por centímetro y los nuevos ángulos de los distintos máximos de orden.
48. ¿Cuál es el espaciado entre las estructuras de una pluma que actúa como una rejilla de reflexión, dado que producen un máximo de primer orden para la luz de 525 nm a una  $30,0^\circ$  ángulo?
49. Un ópalo como el que se muestra en la [Figura 4.15](#) actúa como una rejilla de reflexión con filas separadas por unos  $8 \mu\text{m}$ . Si el ópalo se ilumina normalmente, (a) ¿con qué ángulo se verá la luz roja y (b) con qué ángulo se verá la luz azul?
50. ¿A qué ángulo una rejilla de difracción produce

un máximo de segundo orden para una luz que tiene un máximo de primer orden a  $20,0^\circ$ ?

51. (a) Halle el número máximo de líneas por centímetro que puede tener una rejilla de difracción y produzca un máximo para la menor longitud de onda de la luz visible. (b) ¿Sería útil una rejilla de este tipo para los espectros ultravioletas? (c) ¿Para los espectros infrarrojos?
52. (a) Demuestre que una rejilla de 30 000 líneas por centímetro no producirá un máximo para la luz visible. (b) ¿Cuál es la mayor longitud de onda para la que sí produce un máximo de primer orden? (c) ¿Cuál es el mayor número de líneas por centímetro que puede tener una rejilla de difracción y producir un espectro completo de segundo orden para la luz visible?
53. El análisis que se muestra a continuación también se aplica a las rejillas de difracción con líneas separadas por una distancia  $d$ . ¿Cuál es la distancia entre las franjas producidas por una rejilla de difracción que tiene 125 líneas por centímetro para una luz de 600 nm, si la pantalla está a 1,50 m de distancia? (*Pista:* La distancia entre franjas adyacentes es  $\Delta y = x\lambda/d$ , asumiendo que la separación de la rendija  $d$  es comparable a  $\lambda$ .)



#### 4.5 Aberturas circulares y resolución

54. El radiotelescopio de Arecibo, de 305 m de diámetro, que se muestra en la [Figura 4.20](#), detecta ondas de radio con una longitud de onda media de 4,00 cm. (a) ¿Cuál es el ángulo entre dos fuentes puntuales que son apenas resolubles para este telescopio? (b) ¿A qué distancia podrían estar estas fuentes puntuales a 2 millones de años luz de la galaxia de Andrómeda?
55. Al asumir la resolución angular encontrada para el telescopio Hubble en la [Ejemplo 4.6](#),

- ¿cuál es el detalle más pequeño que podría observarse en la Luna?
56. La dispersión por difracción de una linterna es insignificante en comparación con otras limitaciones de su óptica, como las aberraciones esféricas de su espejo. Para demostrarlo, calcule la dispersión angular mínima de un haz de luz de linterna que tenga originalmente 5,00 cm de diámetro con una longitud de onda media de 600 nm.
  57. (a) ¿Cuál es la dispersión angular mínima de un rayo láser de He-Ne de 633 nm de longitud de onda que tiene originalmente 1,00 mm de diámetro? (b) Si este láser se dirige a un acantilado de una montaña situada a 15,0 km de distancia, ¿qué tamaño tendrá el área iluminada? (c) ¿Qué tamaño tendrá el área iluminada en la Luna, sin tener en cuenta los efectos atmosféricos? (Esto podría hacerse para golpear un reflector de esquina para medir el tiempo de ida y vuelta y, por lo tanto, la distancia)
  58. Se puede utilizar un telescopio para ampliar el diámetro de un rayo láser y limitar la dispersión por difracción. El rayo láser se envía a través del telescopio en dirección opuesta a la normal y luego puede proyectarse sobre un satélite o la Luna. (a) Si esto se hace con el telescopio del Monte Wilson, produciendo un rayo de 2,54 m de diámetro de luz de 633 nm, ¿cuál es la dispersión angular mínima del rayo? (b) Dejando a un lado los efectos atmosféricos, ¿cuál es el tamaño del área que este rayo haría en la Luna, suponiendo una distancia lunar de  $3,84 \times 10^8$  m?
  59. El límite de la agudeza del ojo está en realidad relacionado con la difracción por parte de la pupila. (a) ¿Cuál es el ángulo entre dos puntos de luz que son apenas resolubles para una pupila de 3,00 mm de diámetro, al asumir una longitud de onda media de 550 nm? (b) Considere que su resultado es el límite práctico para el ojo. ¿Cuál es la mayor distancia posible a la que puede estar un automóvil si puede distinguir sus dos faros, dado que están a 1,30 m de distancia? (c) ¿Cuál es la distancia entre dos puntos que son apenas resolubles y que están a un brazo de distancia (0,800 m) de su ojo? (d) ¿Cómo se compara su respuesta a (c) con los detalles que observa normalmente en circunstancias cotidianas?
  60. ¿Cuál es el diámetro mínimo del espejo de un telescopio que permitiría ver detalles tan pequeños como 5,00 km en la Luna, a unos 384.000 km de distancia? Suponga una longitud de onda media de 550 nm para la luz recibida.
  61. Halle el radio de la imagen de una estrella en la retina de un ojo si la pupila está abierta a 0,65 cm y la distancia de la pupila a la retina es de 2,8 cm. Supongamos que  $\lambda = 550$  nm.
  62. (a) El planeta enano Plutón y su luna, Caronte, están separados por 19 600 km. ¿Sin tener en cuenta los efectos atmosféricos, el telescopio de Palomar Mountain, de 5,08 m de diámetro, debería ser capaz de distinguir estos cuerpos cuando están a  $4,50 \times 10^9$  km de la Tierra? Supongamos que la longitud de onda media es de 550 nm. (b) En la actualidad, apenas es posible discernir que Plutón y Caronte son cuerpos separados utilizando un telescopio terrestre. ¿Cuáles son los motivos?
  63. Un satélite espía orbita la Tierra a una altura de 180 km. ¿Cuál es el diámetro mínimo de la lente objetivo de un telescopio que debe utilizarse para distinguir columnas de tropas que marchan a 2,0 m de distancia? Supongamos que  $\lambda = 550$  nm.
  64. ¿Cuál es la separación angular mínima de dos estrellas que son apenas distinguibles por el telescopio Gemini South de 8,1 m, si los efectos atmosféricos no limitan la resolución? Utilice 550 nm para la longitud de onda de la luz de las estrellas.
  65. Los faros de un automóvil están a 1,3 m de distancia. ¿Cuál es la distancia máxima a la que el ojo puede distinguir estos dos faros? Tome el diámetro de la pupila como 0,40 cm.
  66. Cuando los puntos se colocan en una página de una impresora láser, deben estar lo suficientemente cerca como para que no se vean los puntos de tinta individuales. Para ello, la separación de los puntos debe ser menor que el criterio de Raleigh. Suponga que la pupila del ojo es de 3,0 mm y la distancia del papel al ojo de 35 cm; halle la separación mínima de dos puntos tal que no se puedan distinguir. ¿A cuántos puntos por pulgada (ppp o dots per inch, dpi) corresponde?
  67. Suponga que está mirando una carretera desde un avión de pasajeros que vuela a una altura de 6,0 km. ¿A qué distancia deben estar dos automóviles para poder distinguirlos? Supongamos que  $\lambda = 550$  nm y que el diámetro de las pupilas es de 4,0 mm.
  68. ¿Puede un astronauta que orbita la Tierra en un satélite a una distancia de 180 km de la

superficie distinguir dos rascacielos que están a 20 m de distancia? Supongamos que las pupilas de los ojos del astronauta tienen un diámetro de 5,0 mm y que la mayor parte de la luz se centra en torno a los 500 nm.

69. Los caracteres del marcador de un estadio están formados por bombillas poco espaciadas que irradian principalmente luz amarilla. (Utilice  $\lambda = 600$  nm.) ¿Qué distancia deben tener las bombillas para que un observador a 80 m de distancia vea una pantalla de líneas continuas en lugar de las bombillas individuales? Supongamos que la pupila del ojo del observador tiene un diámetro de 5,0 mm.
70. Si un microscopio puede aceptar la luz de objetos en ángulos tan grandes como  $\alpha = 70^\circ$ , ¿Cuál es la estructura más pequeña que se puede distinguir cuando se ilumina con luz de longitud de onda de 500 nm y (a) la muestra está en el aire? (b) cuando la muestra está sumergida en aceite, con índice de refracción de 1,52?
71. Una cámara utiliza un objetivo con una abertura de 2,0 cm. ¿Cuál es la resolución angular de una fotografía tomada a una longitud de onda de 700 nm? ¿Se puede distinguir las marcas milimétricas de una regla colocada a 35 m de distancia?

#### 4.6 Difracción de rayos X

72. Los rayos X de longitud de onda de 0,103 nm se reflejan en un cristal y se registra un máximo de segundo orden con un ángulo de Bragg de  $25,5^\circ$ . ¿Cuál es el espacio entre los planos de dispersión en este cristal?
73. Se observa un máximo de reflexión de Bragg de primer orden cuando un rayo X monocromático

incide sobre un cristal en un ángulo de  $32,3^\circ$  con respecto a un plano reflectante. ¿Cuál es la longitud de onda de estos rayos X?

74. Se realiza un experimento de dispersión de rayos X en un cristal cuyos átomos forman planos separados por 0,440 nm. Al utilizar una fuente de rayos X de longitud de onda 0,548 nm, ¿cuál es el ángulo (con respecto a los planos en cuestión) con el que el experimentador necesita iluminar el cristal para observar un máximo de primer orden?
75. La estructura del cristal de NaCl forma planos reflectantes con 0,541 nm de separación. ¿Cuál es el ángulo más pequeño, medido desde estos planos, en el que se puede observar la difracción de rayos X, si se utilizan rayos X de longitud de onda de 0,085 nm?
76. Al utilizar una fuente de rayos X de longitud de onda desconocida en un cristal determinado, se observa un máximo de difracción de rayos X de primer orden en un ángulo de  $27,1^\circ$  en relación con su superficie. Además, cuando se ilumina con otro rayo, esta vez de una longitud de onda conocida de 0,137 nm, se detecta un máximo de segundo orden en  $37,3^\circ$ . Determine (a) la separación entre los planos reflectantes, y (b) la longitud de onda desconocida.
77. Los cristales de calcita contienen planos de dispersión con 0,30 nm de separación. ¿Cuál es la separación angular entre los máximos de difracción de primer y segundo orden cuando se utilizan rayos X de 0,130 nm de longitud de onda?
78. El ángulo de Bragg de primer orden para un determinado cristal es  $12,1^\circ$ . ¿Cuál es el ángulo de segundo orden?

#### Problemas Adicionales

79. La luz blanca incide en dos rendijas estrechas con 0,40 mm de separación. El patrón de interferencia se observa en una pantalla a 3,0 m de distancia. (a) ¿Cuál es la separación entre los primeros máximos para la luz roja ( $\lambda = 700$  nm) y la luz violeta ( $\lambda = 400$  nm)? b) ¿En qué punto más cercano al máximo central coincidirá un máximo de luz amarilla ( $\lambda = 600$  nm) con un máximo de luz violeta? Identifique el orden de cada máximo.
80. Las microondas de longitud de onda 10,0 mm inciden normalmente sobre una placa metálica que contiene una rendija de 25 mm de ancho.

(a) ¿Dónde están los primeros mínimos del patrón de difracción? (b) ¿Habría mínimos si la longitud de onda fuera de 30,0 mm?

81. *Los cuásares, o fuentes radioeléctricas cuasiestelares*, son objetos astronómicos descubiertos en 1960. Son emisores lejanos, pero fuertes, de ondas de radio con un tamaño angular tan pequeño, que originalmente no se distinguían, al igual que las estrellas. El cuásar 3C405 es en realidad dos fuentes de radio discretas que subtienden un ángulo de 82 arcsec (arco secante). Si este objeto se estudia utilizando emisiones de radio a una frecuencia



- de 410 MHz, ¿cuál es el diámetro mínimo de un radiotelescopio que pueda distinguir las dos fuentes?
82. Dos rendijas de 1800 nm de ancho cada una y separadas por una distancia de centro a centro de 1200 nm se iluminan con ondas planas de un láser de iones de criptón que emite a una longitud de onda de 461,9 nm. Calcule el número de picos de interferencia en el pico central de difracción.
  83. Una microonda de longitud de onda desconocida incide en una rendija de 6 cm de ancho. La anchura angular del pico central es de  $25^\circ$ . Calcule la longitud de onda.
  84. La luz roja (longitud de onda de 632,8 nm en el aire) de un láser de helio-neón incide en una rendija de 0,05 mm de ancho. Todo el aparato se sumerge en agua de índice de refracción 1,333. Determine el ancho angular del pico central.
  85. Un rayo de luz de longitud de onda de 461,9 nm sale de una abertura circular de 2 mm de un láser de iones de criptón. Debido a la difracción, el rayo se expande al salir. ¿Qué tamaño tiene el punto brillante central a (a) 1 m, (b) 1 km, (c) 1000 km, y (d) en la superficie de la Luna a una distancia de 400 000 km de la Tierra?
  86. ¿A qué distancia deben estar dos objetos en la Luna para que se puedan distinguir a simple vista si únicamente los efectos de difracción de la pupila del ojo limitan la resolución? Si suponemos que la longitud de onda de la luz es de 550 nm, el diámetro de la pupila es de 5,0 mm y la distancia a la Luna es de 400 000 km.
  87. ¿A qué distancia deben estar dos objetos en la Luna para que puedan ser distinguidos por el telescopio Gemini North de 8,1 m de diámetro en Mauna Kea (Hawái), si únicamente los efectos de difracción de la abertura del telescopio limitan la resolución? Si suponemos que la longitud de onda de la luz es de 550 nm y que la distancia a la Luna es de 400 000 km.
  88. Un satélite espía tiene fama de ser capaz de distinguir objetos a 10 cm de distancia mientras opera a 197 km por encima de la superficie de la Tierra. ¿Cuál es el diámetro de la abertura del telescopio si la resolución solo está limitada por los efectos de difracción? Utilice 550 nm para la luz.
  89. La luz monocromática de longitud de onda de 530 nm pasa a través de una rendija simple horizontal con un ancho de  $1,5 \mu\text{m}$  en una placa opaca. Una pantalla con las dimensiones  $2,0 \text{ m} \times 2,0 \text{ m}$  está a 1,2 m de la rendija. (a) ¿En qué sentido se extiende el patrón de difracción en la pantalla? (b) ¿Cuáles son los ángulos de los mínimos con respecto al centro? (c) ¿Cuáles son los ángulos de los máximos? (d) ¿Qué ancho tiene la franja brillante central en la pantalla? (e) ¿Qué ancho tiene la siguiente franja brillante en la pantalla?
  90. Una luz monocromática de longitud de onda desconocida incide en una rendija con un ancho de  $20 \mu\text{m}$ . Se observa un patrón de difracción en una pantalla a 2,5 m de distancia donde el máximo central se extiende a una distancia de 10,0 cm. Calcule la longitud de onda.
  91. Una fuente de luz con dos longitudes de onda de 550 nm y 600 nm de igual intensidad incide sobre una rendija con un ancho de  $1,8 \mu\text{m}$ . Calcule la separación de los puntos brillantes  $m = 1$  de las dos longitudes de onda en una pantalla a 30,0 cm de distancia.
  92. Una rendija de 2100 nm de ancho es iluminada normalmente por una onda de longitud de onda de 632,8 nm. Calcule la diferencia de fase entre las ondas procedentes de la parte superior y de un tercio de la parte inferior de la rendija hacia un punto de una pantalla situada a una distancia horizontal de 2,0 m y vertical de 10,0 cm del centro.
  93. Una rendija con un ancho de  $3,0 \mu\text{m}$  se ilumina con una luz amarilla de sodio de longitud de onda de 589 nm. Calcule la intensidad en un ángulo de  $15^\circ$  con respecto al eje en función de la intensidad del máximo central.
  94. Una rendija de 0,10 mm de ancho se ilumina con una lámpara de mercurio de longitud de onda de 576 nm. Calcule la intensidad en un ángulo de  $10^\circ$  con respecto al eje en función de la intensidad del máximo central.
  95. Una rejilla de difracción produce un segundo máximo que está a 89,7 cm del máximo central en una pantalla a 2,0 m de distancia. Si la rejilla tiene 600 líneas por centímetro, ¿cuál es la longitud de onda de la luz que produce el patrón de difracción?
  96. Se utiliza una rejilla de 4000 líneas por centímetro para difractar la luz que contiene todas las longitudes de onda entre 400 y 650 nm. ¿Qué ancho tiene el espectro de primer orden en una pantalla a 3,0 m de la rejilla?
  97. Se utiliza una rejilla de difracción con 2000 líneas por centímetro para medir las longitudes de onda emitidas por un tubo de descarga de

gas de hidrógeno. (a) ¿En qué ángulos se hallan los máximos de las dos líneas azules de primer orden de longitudes de onda 410 y 434 nm? (b) Los máximos de otras dos líneas de primer orden se hallan en  $\theta_1 = 0,097$  rad y  $\theta_2 = 0,132$  rad. ¿Cuáles son las longitudes de onda de estas líneas?

- 98.** Para la luz blanca ( $400 \text{ nm} < \lambda < 700 \text{ nm}$ ) que incide normalmente sobre una rejilla de difracción, muestran que los espectros de segundo y tercer orden se superponen sea cual sea la constante  $d$  de la rejilla.
- 99.** ¿Cuántos órdenes completos del espectro visible ( $400 \text{ nm} < \lambda < 700 \text{ nm}$ ) pueden producirse con una rejilla de difracción que contiene 5000 líneas por centímetro?
- 100.** Dos lámparas que producen luz de longitud de onda 589 nm están colocadas a 1,0 m de distancia sobre un tablón de madera. ¿Cuál es la distancia máxima a la que puede estar un observador y seguir distinguiendo las lámparas como dos fuentes de luz distintas, si la resolución se ve afectada únicamente por la difracción de la luz que entra en el ojo? Supongamos que la luz entra en el ojo a través de una pupila de 4,5 mm de diámetro.
- 101.** En un día claro y luminoso, se encuentra en la cima de una montaña y contempla una ciudad a 12 km de distancia. En la ciudad hay dos torres altas con una separación de 20,0 m. ¿Puede su ojo distinguir las dos torres si el diámetro de la pupila es de 4,0 mm? Si no es así, ¿cuál debería ser la potencia de aumento mínima del telescopio necesaria para distinguir las dos torres? En sus cálculos utilice 550 nm para la longitud de onda de la luz.
- 102.** Los radiotelescopios son telescopios que se utilizan para la detección de emisiones de radio procedentes del espacio. Dado que las ondas de radio tienen longitudes de onda mucho más largas que la luz visible, el diámetro de un radiotelescopio debe ser muy grande para ofrecer una buena resolución. Por ejemplo, el radiotelescopio de Penticton, en British Columbia (BC), en Canadá, tiene un diámetro de 26 m y puede trabajar con frecuencias de hasta 6,6 GHz. (a) ¿Cuál es la longitud de onda correspondiente a esta frecuencia? (b) ¿Cuál es la separación angular de dos fuentes de radio que puede distinguir este telescopio? (c) Compare la resolución del telescopio con el tamaño angular de la Luna.



**FIGURA 4.30** (crédito: modificación de la obra de Jason Nishiyama)

- 103.** Calcule la longitud de onda de la luz que produce su primer mínimo en un ángulo de  $36,9^\circ$  al incidir sobre una rendija con un ancho de  $1,00 \mu\text{m}$ .
- 104.** (a) Calcule el ángulo del tercer mínimo de difracción para una luz de 633 nm que incide sobre una rendija con un ancho de  $20,0 \mu\text{m}$ . (b) ¿Qué ancho de rendija situaría este mínimo en  $85,0^\circ$ ?
- 105.** Como ejemplo de difracción por aberturas de dimensiones cotidianas, considere una puerta de 1,0 m de ancho. (a) ¿Cuál es la posición angular del primer mínimo en el patrón de difracción de la luz de 600 nm? (b) Repita este cálculo para una nota musical de frecuencia 440 Hz (la por encima del do central). Considere la velocidad del sonido como 343 m/s.
- 106.** ¿Cuáles son las posiciones angulares del primer y segundo mínimo en un patrón de difracción producido por una rendija de 0,20 mm de ancho que es iluminada con luz de 400 nm? ¿Cuál es el ancho angular del pico central?
- 107.** ¿A qué distancia colocaría la rendija del problema anterior con respecto a una pantalla para que el segundo mínimo esté a una distancia de 2,5 mm del centro del patrón de difracción?
- 108.** ¿Qué tan estrecha sería una rendija para que



produzca un patrón de difracción en una pantalla a 1,8 m de distancia, cuyo pico central tiene 1,0 m de ancho? Supongamos que  $\lambda = 589 \text{ nm}$ .

- 109.** Supongamos que el pico central de un patrón de difracción por una rendija es tan amplio que se puede suponer que los primeros mínimos ocurren en posiciones angulares de  $\pm 90^\circ$ . Para este caso, ¿cuál es la relación entre el ancho de la rendija y la longitud de onda de la luz?
- 110.** El pico de difracción central del patrón de interferencia de doble rendija contiene exactamente nueve franjas. ¿Cuál es la relación entre la separación y el ancho de la rendija?
- 111.** Determine las intensidades de tres picos de interferencia distintos del pico central en el máximo central de la difracción, si es posible, cuando una luz de longitud de onda de 500 nm incide normalmente en una doble rendija que tienen un ancho de 1000 nm y una separación de 1500 nm. Considere que la intensidad del punto central tiene un valor de  $1 \text{ mW/cm}^2$ .
- 112.** La luz amarilla de una lámpara de vapor de sodio parece tener una longitud de onda pura, pero produce dos máximos de primer orden a  $36,093^\circ$  y  $36,129^\circ$  cuando se proyecta en una rejilla de difracción de 10 000 líneas por centímetro. ¿Cuáles son las dos longitudes de onda con una exactitud de 0,1 nm?
- 113.** Las estructuras de una pluma de ave actúan como una rejilla de reflexión con 8000 líneas por centímetro. ¿Cuál es el ángulo del máximo de primer orden para la luz de 600 nm?

### Problemas De Desafío

- 118.** La luz azul con longitud de onda de 450 nm incide en una rendija de 0,25 mm de ancho. Detrás de la rendija se coloca una lente convergente de 20 cm de distancia focal que enfoca el patrón de difracción en una pantalla. (a) ¿A qué distancia está la pantalla de la lente? (b) ¿Cuál es la distancia entre el primer y el tercer mínimo del patrón de difracción?
- 119.** (a) Supongamos que los máximos están a medio camino entre los mínimos de un patrón de difracción por una rendija. Utilice el diámetro y la circunferencia del diagrama fasorial, como se describe en la sección [Intensidad en la difracción de una sola rendija](#), para determinar las intensidades del tercer y cuarto máximos en función de la intensidad

- 114.** Si una rejilla de difracción produce un máximo de primer orden para la longitud de onda más corta de la luz visible a  $30,0^\circ$ , ¿con qué ángulo se hallará el máximo de primer orden para la mayor longitud de onda de la luz visible?
- 115.** (a) ¿Qué longitud de onda visible tiene su máximo de cuarto orden en un ángulo de  $25,0^\circ$  cuando se proyecta en una rejilla de difracción de 25 000 líneas por centímetro? (b) ¿Qué es lo irrazonable en este resultado? (c) ¿Qué suposiciones son irrazonables o son incoherentes?
- 116.** Tengamos en cuenta un espectrómetro basado en una rejilla de difracción. Construya un problema en el que calcule la distancia entre dos longitudes de onda de la radiación electromagnética en su espectrómetro. Entre las cosas que hay que tener en cuenta están las longitudes de onda que se desean distinguir, el número de líneas por metro en la rejilla de difracción y la distancia de la rejilla a la pantalla o al detector. Discuta la viabilidad del dispositivo en términos de poder discernir entre las longitudes de onda de interés.
- 117.** Un astrónomo aficionado quiere construir un telescopio con un límite de difracción que le permita ver si hay personas en las lunas de Júpiter. (a) ¿Qué diámetro de espejo se necesita para poder ver con detalle 1,00 m en una luna joviana a una distancia de  $7,50 \times 10^8 \text{ km}$  de la Tierra? La longitud de onda de la luz tiene un promedio de 600 nm. (b) ¿Qué es lo irrazonable en este resultado? (c) ¿Qué suposiciones son irrazonables o son incoherentes?

del máximo central. (b) Haga el mismo cálculo, utilizando la [Ecuación 4.4](#).

- 120.** (a) Al diferenciar la [Ecuación 4.4](#), demuestre que los máximos de orden superior del patrón de difracción por una rendija ocurren en valores de  $\beta$  que satisfacen  $\tan \beta = \beta$ . (b) Grafique  $y = \tan \beta$  y  $y = \beta$  en función de  $\beta$  y halle las intersecciones de estas dos curvas. ¿Qué información es proporcionada sobre la ubicación de los máximos? (c) Convéncese de que estos puntos no aparecen exactamente en  $\beta = (n + \frac{1}{2})\pi$ , donde  $n = 0, 1, 2, \dots$ , pero se acercan bastante a estos valores.
- 121.** ¿Cuál es el número máximo de líneas por centímetro que puede tener una rejilla de

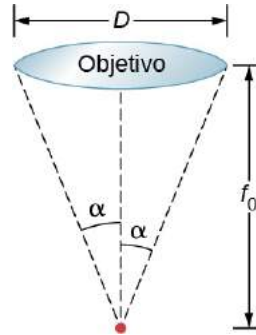
difracción y producir un espectro completo de primer orden para la luz visible?

- 122.** Demuestre que una rejilla de difracción no puede producir un máximo de segundo orden para una determinada longitud de onda de la luz, a menos que el máximo de primer orden esté en un ángulo menor de  $30,0^\circ$ .
- 123.** Un rayo láser de He-Ne se refleja desde la superficie de un CD en una pared. El punto más brillante es el rayo reflejado en un ángulo igual al ángulo de incidencia. Sin embargo, también se observan franjas. Si la pared está a 1,50 m del CD, y la primera franja está a 0,600 m del máximo central, ¿cuál es la separación de las ranuras en el CD?
- 124.** Los objetos que se observan a través de un microscopio se colocan muy cerca del punto focal de la lente objetivo. Demuestre que la separación mínima  $x$  de dos objetos

distinguibiles a través del microscopio viene dada por

$$x = \frac{1,22\lambda f_0}{D}, \quad 4.7$$

donde  $f_0$  es la distancia focal y  $D$  es el diámetro de la lente objetivo, como se muestra a continuación.





# CAPÍTULO 5

## Relatividad



**Figura 5.1** La relatividad especial explica cómo el tiempo transcurre de forma ligeramente diferente en la Tierra y en el satélite de posicionamiento global (global positioning satellite, GPS), que se mueve rápidamente. Las unidades de GPS de los vehículos no podrían encontrar su ubicación correcta en la Tierra sin tener en cuenta esta corrección. (crédito: modificación del trabajo de las Fuerza Aérea de EE.UU.)

### ESQUEMA DEL CAPITULO

- 5.1 Invariancia de las leyes físicas**
- 5.2 Relatividad de la simultaneidad**
- 5.3 Dilatación del tiempo**
- 5.4 Contracción de longitud**
- 5.5 La transformación de Lorentz**
- 5.6 Transformación relativista de la velocidad**
- 5.7 Efecto Doppler para la luz**
- 5.8 Momento relativista**
- 5.9 Energía relativista**

**INTRODUCCIÓN** En 1905 Albert Einstein (1879-1955) propuso la teoría especial de la relatividad. Describe cómo aparecen el tiempo, el espacio y los fenómenos físicos en diferentes marcos de referencia que se mueven a velocidad constante entre sí. Esto difiere del trabajo posterior de Einstein sobre la relatividad general, que se ocupa de cualquier marco de referencia, incluidos los marcos acelerados.

La teoría de la relatividad supuso un profundo cambio en la forma de percibir el espacio y el tiempo. Las reglas de “sentido común” que utilizamos para relacionar las medidas de espacio y tiempo en la visión newtoniana del mundo difieren seriamente de las reglas correctas a velocidades cercanas a la de la luz. Por ejemplo, la teoría especial de la relatividad nos dice que las mediciones de los intervalos de longitud y tiempo no son las mismas en los marcos de referencia que se mueven uno respecto al otro. Se puede observar que una partícula

tiene una vida de  $1,0 \times 10^{-8}$  s en un marco de referencia, pero una vida de  $2,0 \times 10^{-8}$  s en otro; y un objeto puede llegar a medir 2,0 m de longitud en un marco y 3,0 m en otro. Estos efectos suelen ser significativos solo a velocidades comparables a la de la luz, pero incluso a las velocidades mucho más bajas del satélite de posicionamiento global, que requiere mediciones de tiempo extremadamente precisas para funcionar, las diferentes longitudes de la misma distancia en diferentes marcos de referencia son lo suficientemente significativas como para tenerlas en cuenta.

A diferencia de la mecánica de Newton, que describe el movimiento de las partículas, o de las ecuaciones de Maxwell, que especifican cómo se comporta el campo electromagnético, la relatividad especial no se limita a un tipo concreto de fenómeno. En cambio, sus reglas sobre el espacio y el tiempo afectan a todas las teorías físicas fundamentales.

Las modificaciones de la mecánica newtoniana en la relatividad especial no invalidan la mecánica newtoniana clásica ni requieren su sustitución. En cambio, las ecuaciones de la mecánica relativista solo difieren significativamente de las de la mecánica newtoniana clásica para los objetos que se mueven a velocidades relativistas (es decir, velocidades inferiores, pero comparables, a la velocidad de la luz). En el mundo macroscópico que se encuentra en la vida cotidiana, las ecuaciones relativistas se reducen a ecuaciones clásicas, y las predicciones de la mecánica newtoniana clásica coinciden lo suficiente con los resultados experimentales como para no tener en cuenta las correcciones relativistas.

## 5.1 Invariancia de las leyes físicas

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Describir las cuestiones teóricas y experimentales que abordó la teoría de la relatividad especial de Einstein.
- Enunciar los dos postulados de la teoría especial de la relatividad.

Suponga que calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo dados los ángulos de la base y los lados adyacentes. Tanto si calcula la hipotenusa a partir de uno de los lados y el coseno del ángulo base, como si lo hace a partir del teorema de Pitágoras, los resultados deberían coincidir. Las predicciones basadas en diferentes principios de la física también deben coincidir, tanto si los consideramos principios de la mecánica como principios del electromagnetismo.

Albert Einstein se planteó un desacuerdo entre las predicciones basadas en el electromagnetismo y en los supuestos de la mecánica clásica. Específicamente, supongamos que un observador mide la velocidad de un pulso de luz en el propio **marco de reposo** del observador; es decir, en el marco de referencia en el que el observador está en reposo. Según las suposiciones que durante mucho tiempo se consideraron obvias en la mecánica clásica, si un observador mide una velocidad  $\vec{v}$  en un marco de referencia, y ese marco de referencia se mueve con velocidad  $\vec{u}$  pasado un segundo marco de referencia, un observador en el segundo marco mide la velocidad original como  $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{u}$ . Esta suma de velocidades suele denominarse **relatividad galileana**. Si este principio es correcto, un pulso de luz que un observador mide como si viajara con una velocidad  $c$ , realmente se desplazaría con una velocidad  $c + u$  cuando se mide desde el marco de referencia del segundo observador. Si asumimos razonablemente que las leyes de la electrodinámica son las mismas en ambos marcos de referencia, entonces la velocidad predicha de la luz (en el vacío) en ambos marcos debería ser  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ . Cada observador debe medir la misma velocidad del pulso de luz con respecto al propio marco de reposo de ese observador. Para conciliar las dificultades de este tipo, Einstein construyó su **teoría especial de la relatividad**, que introdujo ideas radicalmente nuevas sobre el tiempo y el espacio que desde entonces se han confirmado experimentalmente.

### Marcos inerciales

Todas las velocidades se miden en relación con algún marco de referencia. Por ejemplo, el movimiento de un automóvil se mide en relación con su posición inicial en la carretera por la que circula; el movimiento de un proyectil se mide en relación con la superficie desde el que se lanza; y el movimiento orbital de un planeta se mide en relación con la estrella que orbita. Los marcos de referencia en los que la mecánica adopta la forma más sencilla son los que no se aceleran. La primera ley de Newton, la ley de la inercia, se cumple exactamente

en ese marco.

### Marco de referencia inercial

Un **marco de referencia inercial** es un marco de referencia en el que un cuerpo en reposo permanece en reposo y un cuerpo en movimiento se mueve a una velocidad constante en línea recta a menos que actúe una fuerza exterior.

Por ejemplo, para un pasajero dentro de un avión que vuela a velocidad y altitud constantes, la física parece funcionar exactamente igual que cuando el pasajero está parado en la superficie de la Tierra. Sin embargo, cuando el avión despegue, las cosas son algo más complicadas. En este caso, el pasajero en reposo dentro del avión concluye que una fuerza neta  $F$  sobre un objeto no es igual al producto de la masa y la aceleración,  $ma$ . En cambio,  $F$  es igual a  $ma$  más una fuerza ficticia. Esta situación no es tan sencilla como en un marco inercial. La relatividad especial trata los marcos de aceleración como una constante y las velocidades como relativas al observador. La relatividad general trata tanto la velocidad como la aceleración como relativas al observador, por lo que hace uso del espacio-tiempo curvo.

### El primer postulado de Einstein

Los principios de la mecánica clásica no solo son los más simples en los marcos inerciales, sino que son los mismos en todos los marcos inerciales. Einstein basó el **primer postulado** de su teoría en la idea de que esto es cierto para todas las leyes de la física, no solo para las de la mecánica.

### Primer postulado de la relatividad especial

Las leyes de la física son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales.

*Este postulado niega la existencia de un marco inercial especial o privilegiado.* Las leyes de la naturaleza no nos permiten dotar a ningún marco inercial de propiedades especiales. Por ejemplo, no podemos identificar ningún marco inercial como en estado de “reposo absoluto”. Solo podemos determinar el movimiento relativo de un marco con respecto a otro.

Sin embargo, este postulado es más de lo que parece. Las leyes de la física incluyen solo aquellas que satisfacen este postulado. Veremos que las definiciones de energía y momento deben ser alteradas para ajustarse a este postulado. Otro resultado de este postulado es la famosa ecuación  $E = mc^2$ , que relaciona la energía con la masa.

### El segundo postulado de Einstein

El segundo postulado en el que Einstein basó su teoría de la relatividad especial trata de la velocidad de la luz. A finales del siglo XIX, los principios más importantes de la física clásica estaban bien establecidos. Dos de las más importantes fueron las leyes del electromagnetismo y las leyes de Newton. Investigaciones como el experimento de la doble rendija de Young, a principios de los 1800, habían demostrado de forma convincente que la luz es una onda. Las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell implicaban que las ondas electromagnéticas viajan a  $c = 3,00 \times 10^8$  m/s en el vacío, pero no especifican el marco de referencia en el que la luz tiene esta velocidad. Se conocían muchos tipos de ondas y todas viajaban en algún medio. Por tanto, los científicos asumieron que algún medio transportaba la luz, incluso en el vacío, y que la luz viajaba a una velocidad  $c$  en relación con ese medio (a menudo llamado “el éter”).

A partir de mediados de la década de 1880, el físico estadounidense A. A. Michelson, ayudado posteriormente por E. W. Morley, realizó una serie de mediciones directas de la velocidad de la luz. Pretendían deducir de sus datos la velocidad  $v$  a la que se movía la Tierra a través del misterioso medio para las ondas de luz. La velocidad de la luz medida en la Tierra debería haber sido  $c + v$  cuando el movimiento de la Tierra era opuesto al flujo del medio a velocidad  $u$  que pasaba por la Tierra, y  $c - v$  cuando la Tierra se movía en la misma



dirección que el medio. Los resultados de sus mediciones fueron sorprendentes.

### Experimento Michelson-Morley

El **experimento de Michelson-Morley** demostró que la velocidad de la luz en el vacío es independiente del movimiento de la Tierra alrededor del Sol.

La conclusión final que se deriva de este resultado es que la luz, a diferencia de las ondas mecánicas como el sonido, no necesita un medio para transportarla. Además, los resultados de Michelson-Morley implicaban que la velocidad de la luz  $c$  es independiente del movimiento de la fuente con respecto al observador. Es decir, todo el mundo observa que la luz se mueve a una velocidad  $c$ , independientemente de cómo se muevan con respecto a la fuente de luz o entre sí. Durante varios años, muchos científicos intentaron sin éxito explicar estos resultados en el marco de las leyes de Newton.

Además, existía una contradicción entre los principios del electromagnetismo y las asunciones de las leyes de Newton sobre la velocidad relativa. Clásicamente, la velocidad de un objeto en un marco de referencia y la velocidad de ese objeto en un segundo marco de referencia relativo al primero deben combinarse como vectores simples para dar la velocidad vista en el segundo marco. Si eso fuera correcto, entonces dos observadores que se movieran a diferentes velocidades verían la luz viajando a diferentes velocidades. Imagine cómo se vería una onda de luz para una persona que viajara con ella (en el vacío) a una velocidad  $c$ . Si tal movimiento fuera posible, entonces la onda sería estacionaria con respecto al observador. Tendría campos eléctricos y magnéticos cuya intensidad variaría con la posición, pero sería constante en el tiempo. Esto no lo permiten las ecuaciones de Maxwell. Así que, o bien las ecuaciones de Maxwell son diferentes en diferentes marcos inerciales, o bien un objeto con masa no puede viajar a la velocidad  $c$ . Einstein llegó a la conclusión de que esto último es cierto: Un objeto con masa no puede viajar a la velocidad  $c$ . Las ecuaciones de Maxwell son correctas, pero la suma de velocidades de Newton no es correcta para la luz.

Hasta 1905, cuando Einstein publicó su primer artículo sobre la relatividad especial, no se llegó a la conclusión actualmente aceptada. Basándose principalmente en su análisis de que las leyes de la electricidad y el magnetismo no permitían otra velocidad para la luz, y solo ligeramente consciente del experimento de Michelson-Morley, Einstein detalló su **segundo postulado de la relatividad especial**.

### Segundo postulado de la relatividad especial

La luz viaja en el vacío con la misma velocidad  $c$  en cualquier dirección en todos los marcos inerciales.

En otras palabras, la velocidad de la luz tiene la misma velocidad definida para cualquier observador, independientemente del movimiento relativo de la fuente. Este postulado engañosamente simple y contra intuitivo, junto con el primer postulado, deja todo lo demás abierto al cambio. Entre los cambios se encuentran la falta de concordancia sobre el tiempo entre acontecimientos, la variación de la distancia con la velocidad y la consideración de que la materia y la energía pueden convertirse la una en la otra. En las siguientes secciones describimos estos conceptos.

#### **COMPRUEBE LO APRENDIDO 5.1**

Explique en qué se diferencia la relatividad especial de la general.

## 5.2 Relatividad de la simultaneidad

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Demostrar a partir de los postulados de Einstein que dos sucesos medidos como simultáneos en un marco inercial no son necesariamente simultáneos en todos los marcos inerciales.
- Describir cómo la simultaneidad es un concepto relativo para observadores en diferentes marcos inerciales en movimiento relativo.

¿Los intervalos de tiempo dependen de quién los observa? Intuitivamente, parece que el tiempo de un proceso, como el tiempo transcurrido de una carrera a pie (Figura 5.2), debería ser el mismo para todos los observadores. En las experiencias cotidianas, los desacuerdos sobre el tiempo transcurrido tienen que ver con la exactitud de la medición del tiempo. Nadie podría argumentar que el intervalo de tiempo real era diferente para el corredor en movimiento y para el reloj estacionario que se muestra. Sin embargo, si se considera cuidadosamente cómo se mide el tiempo, se observa que el tiempo transcurrido depende del movimiento relativo de un observador con respecto al proceso que se mide.



**FIGURA 5.2** El tiempo transcurrido en una carrera a pie es el mismo para todos los observadores, pero a velocidades relativistas, el tiempo transcurrido depende del movimiento del observador en relación con el lugar donde ocurre el proceso que se está cronometrando. (crédito: "Jason Edward Scott Bain"/Flickr)

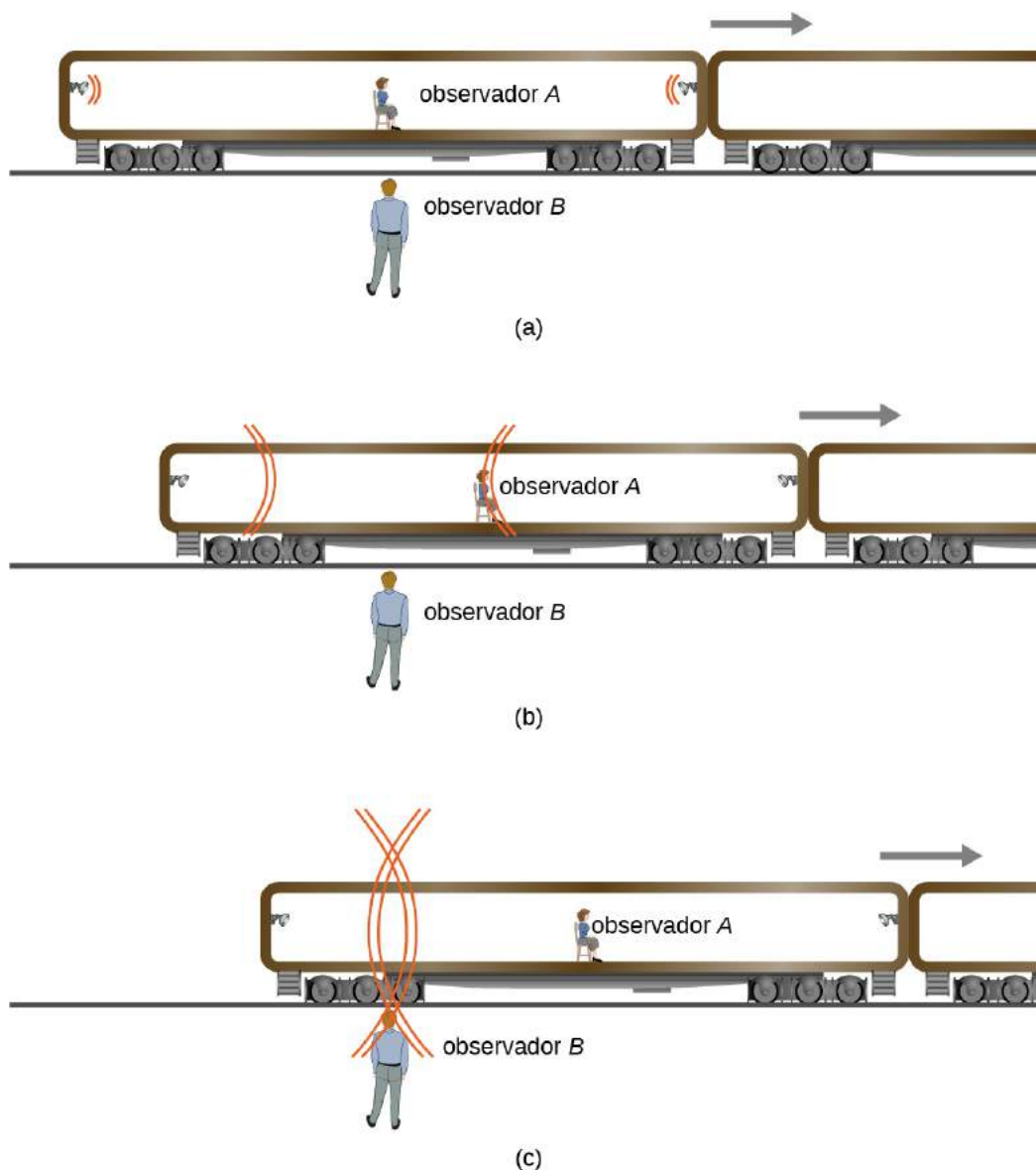
Considere cómo medimos el tiempo transcurrido. Si utilizamos un cronómetro, por ejemplo, ¿cómo sabemos cuándo hay que poner en marcha y parar el reloj? Uno de los métodos consiste en utilizar la llegada de la luz del evento. Por ejemplo, si está en un automóvil en movimiento y observa que la luz de un semáforo de una señal de tráfico cambia de verde a rojo, sabe que es el momento de pisar el pedal del freno. La sincronización es más precisa si se utiliza algún tipo de detección electrónica, lo que evita los tiempos de reacción humanos y otras complicaciones.

Supongamos ahora que dos observadores utilizan este método para medir el intervalo de tiempo entre dos destellos de luz procedentes de lámparas de destello que están a una distancia (Figura 5.3). Una observadora *A* está sentada en medio de un vagón con dos lámparas de destello en lados opuestos equidistantes de ella. Un pulso de luz es emitido por cada lámpara de destello y se mueve hacia la observadora *A*, que se muestra en el cuadro (a) de la figura. El vagón se mueve rápidamente en la dirección que indica el vector de velocidad en el diagrama. Un observador *B*, de pie en el andén, está de cara al vagón cuando este pasa y observa que ambos destellos de luz le llegan simultáneamente, como se muestra en el fotograma (c). Mide las distancias desde donde vio originarse los pulsos, las encuentra iguales y concluye que los pulsos se emitieron

simultáneamente.

Sin embargo, debido al movimiento de la observadora A, el pulso de la derecha del vagón, en la dirección en que se mueve el vagón, le llega a la observadora antes que el pulso de la izquierda, como se muestra en el fotograma (b). También mide las distancias desde su marco de referencia, las encuentra iguales y concluye que los pulsos no se emitieron simultáneamente.

Los dos observadores llegan a conclusiones contradictorias sobre si los dos acontecimientos en lugares muy separados fueron simultáneos. Ambos marcos de referencia son válidos, y ambas conclusiones son válidas. La simultaneidad de dos sucesos en lugares distintos depende del movimiento del observador con respecto a los lugares de los sucesos.



**FIGURA 5.3** (a) Se emiten dos pulsos de luz simultáneamente en relación con el observador B. (c) Los pulsos llegan a la posición del observador B simultáneamente. (b) Debido al movimiento de A, ve primero el pulso de la derecha y concluye que las bombillas no parpadearon simultáneamente. Ambas conclusiones son correctas.

En este caso, la velocidad relativa entre los observadores influye en el hecho de que se observe la simultaneidad de dos acontecimientos que se encuentran a cierta distancia. La *simultaneidad no es absoluta*. Podríamos haber supuesto (incorrectamente) que, si la luz se emite simultáneamente, entonces dos observadores situados a medio camino entre las fuentes verían los destellos simultáneamente. Pero un

análisis cuidadoso muestra que esto no puede ser así si la velocidad de la luz es la misma en todos los marcos inerciales.

Este tipo de *experimento mental* (en alemán, “Gedankenexperiment”) muestra que las conclusiones aparentemente obvias deben cambiarse para que concuerden con los postulados de la relatividad. La validez de los experimentos mentales solo puede determinarse mediante la observación real, y los experimentos cuidadosos han confirmado repetidamente la teoría de la relatividad de Einstein.

## 5.3 Dilatación del tiempo

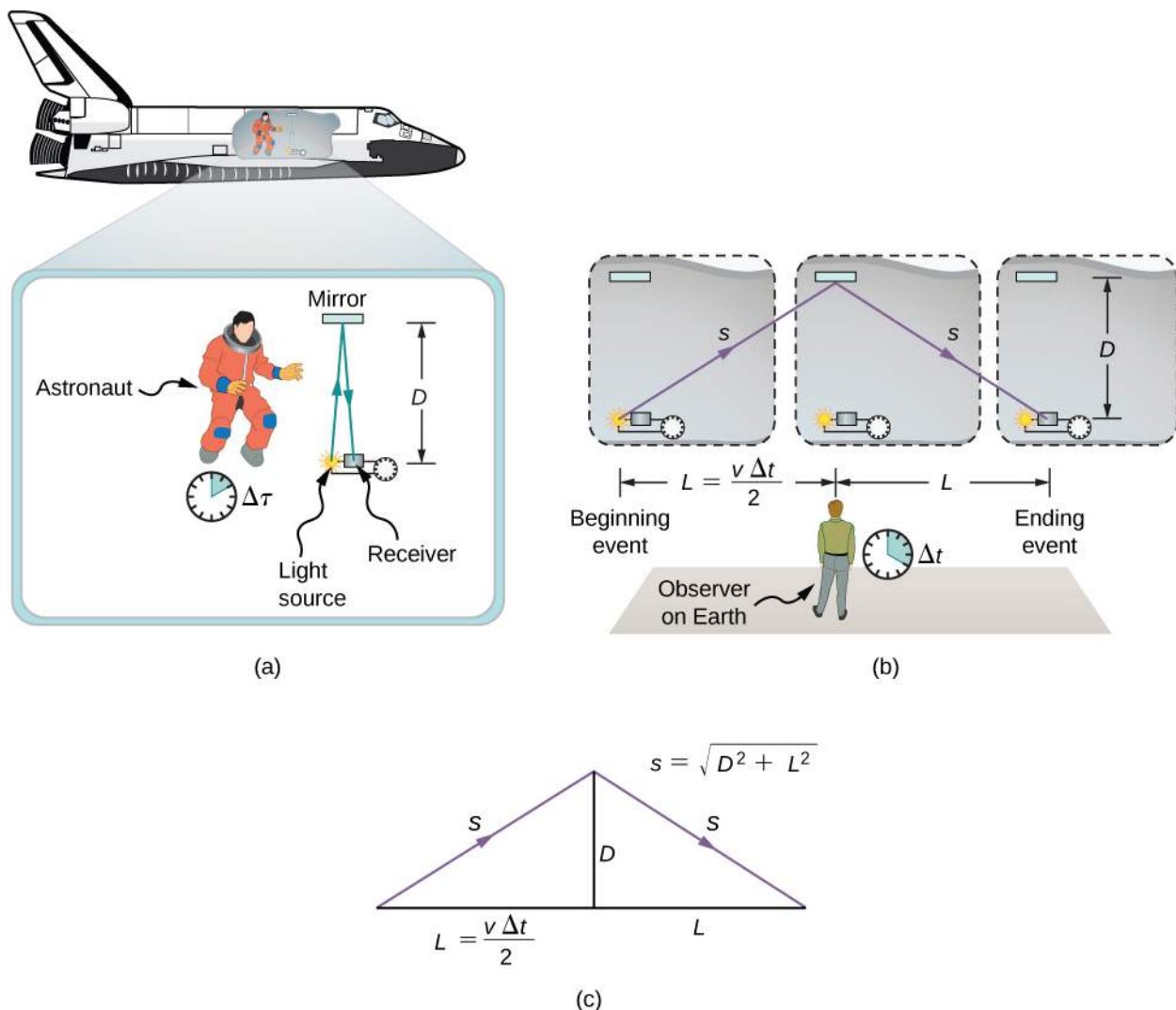
### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Explicar cómo los intervalos de tiempo pueden medirse de forma diferente en distintos marcos de referencia.
- Describir cómo distinguir un intervalo de tiempo propio de un intervalo de tiempo dilatado.
- Describir la importancia del experimento con muones.
- Explicar por qué la paradoja de los gemelos no es una contradicción.
- Calcular la dilatación del tiempo dada la velocidad de un objeto en un marco determinado.

El análisis de la simultaneidad muestra que los postulados de Einstein implican un efecto importante: Los intervalos de tiempo tienen valores diferentes cuando se miden en diferentes marcos inerciales. Supongamos, por ejemplo, que un astronauta mide el tiempo que tarda un pulso de luz en recorrer una distancia perpendicular a la dirección del movimiento de su nave (en relación con un observador terrestre), rebotar en un espejo y regresar ([Figura 5.4](#)). ¿Cómo se compara el tiempo transcurrido que el astronauta mide en la nave espacial con el tiempo transcurrido que un observador terrestre mide observando lo que ocurre en la nave espacial?

El examen de esta pregunta conduce a un resultado profundo. El tiempo transcurrido de un proceso depende del observador que lo mide. En este caso, el tiempo medido por el astronauta (dentro de la nave espacial en la que está en reposo) es menor que el tiempo medido por el observador terrestre (hacia el que se mueve el astronauta). El tiempo transcurrido para el mismo proceso es diferente para los observadores, porque la distancia que recorre el pulso de luz en el marco del astronauta es menor que en el marco terrestre, como se ve en la [Figura 5.4](#). La luz viaja a la misma velocidad en cada marco, por lo que tarda más tiempo en recorrer la mayor distancia en el marco terrestre.



**FIGURA 5.4** (a) Un astronauta mide el tiempo  $\Delta\tau$  para que la luz recorra la distancia  $2D$  en el marco del astronauta. (b) Un científico de la NASA en la Tierra ve que la luz sigue el camino más largo  $2s$  y tarda más tiempo  $\Delta t$ . (c) Estos triángulos se utilizan para hallar la relación entre las dos distancias  $D$  y  $s$ .

### Dilatación del tiempo

La **dilatación del tiempo** es el alargamiento del intervalo de tiempo entre dos sucesos para un observador en un marco inercial que se mueve con respecto al marco de reposo de los sucesos (en el que los sucesos ocurren en el mismo lugar).

Para comparar cuantitativamente las mediciones de tiempo en los dos marcos inerciales, podemos relacionar las distancias en la [Figura 5.4](#) entre sí, y luego expresar cada distancia en términos del tiempo de viaje (respectivamente  $\Delta t$  o  $\Delta\tau$ ) del pulso en el marco de referencia correspondiente. La ecuación resultante puede resolverse para  $\Delta t$  en términos de  $\Delta\tau$ .

Las longitudes  $D$  y  $L$  en la [Figura 5.4](#) son los lados de un triángulo rectángulo con hipotenusa  $s$ . Del teorema de Pitágoras,

$$s^2 = D^2 + L^2.$$

Las longitudes  $2s$  y  $2L$  son, respectivamente, las distancias que el pulso de luz y la nave espacial recorren en el tiempo  $\Delta t$  en el marco del observador terrestre. La longitud  $D$  es la distancia que recorre el pulso de luz en el

tiempo  $\Delta\tau$  en el marco del astronauta. Esto nos da tres ecuaciones:

$$2s = c\Delta t; 2L = v\Delta t; 2D = c\Delta\tau.$$

Tenga en cuenta que hemos utilizado el segundo postulado de Einstein tomando la velocidad de la luz como  $c$  en ambos marcos inerciales. Sustituimos estos resultados en la expresión anterior del teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} s^2 &= D^2 + L^2 \\ \left(c\frac{\Delta t}{2}\right)^2 &= \left(c\frac{\Delta\tau}{2}\right)^2 + \left(v\frac{\Delta t}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Entonces reordenamos para obtener

$$(c\Delta t)^2 - (v\Delta t)^2 = (c\Delta\tau)^2.$$

Finalmente, al resolver  $\Delta t$  en términos de  $\Delta\tau$  obtenemos

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad 5.1$$

Esto equivale a

$$\Delta t = \gamma\Delta\tau,$$

donde  $\gamma$  es el factor relativista (a menudo llamado factor de Lorentz) dado por

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad 5.2$$

y  $v$  y  $c$  son las velocidades del observador en movimiento y de la luz, respectivamente.

Observe la asimetría entre las dos mediciones. Solo una de ellas es una medida del intervalo entre dos eventos, la emisión y la llegada del pulso de luz, en la misma posición. Es una medida del intervalo de tiempo en el marco de reposo de un solo reloj. La medición en el marco terrestre consiste en comparar el intervalo de tiempo entre dos acontecimientos que se producen en lugares diferentes. El intervalo entre eventos que ocurren en un mismo lugar tiene un nombre separado para distinguirlo del tiempo medido por el observador terrestre, y utilizamos el símbolo separado  $\Delta\tau$  para referirnos a este a lo largo de este capítulo.

### Tiempo propio

El intervalo de **tiempo propio**  $\Delta\tau$  entre dos eventos es el intervalo de tiempo medido por un observador para el que ambos eventos ocurren en el mismo lugar.

La ecuación que relaciona  $\Delta t$  y  $\Delta\tau$  es verdaderamente notable. En primer lugar, como ya se ha dicho, el tiempo transcurrido no es el mismo para diferentes observadores que se mueven uno respecto al otro, aunque ambos estén en marcos inerciales. Un intervalo de tiempo propio  $\Delta\tau$  para un observador que, como el astronauta, se mueve con el aparato, es menor que el intervalo de tiempo para otros observadores. Es el menor tiempo medido posible entre dos eventos. El observador terrestre ve los intervalos de tiempo dentro del sistema en movimiento como dilatados (es decir, alargados) con respecto a cómo los ve el observador que se mueve con respecto a la Tierra dentro del sistema en movimiento. Alternativamente, según el observador terrestre, menos tiempo pasa entre los eventos dentro del marco móvil. Obsérvese que el menor tiempo transcurrido entre sucesos se da en el marco inercial en el que el observador ve que los sucesos (por ejemplo, la emisión y la llegada de la señal luminosa) ocurren en el mismo punto.

Este efecto del tiempo es real y no está causado por relojes inexactos o mediciones inadecuadas. Las mediciones del intervalo de tiempo del mismo evento difieren para los observadores en movimiento relativo. La dilatación del tiempo es una propiedad intrínseca del propio tiempo. Se observa que todos los relojes que se



mueven con respecto a un observador, incluidos los relojes biológicos, como los latidos del corazón de una persona, o el envejecimiento, funcionan más lentamente en comparación con un reloj que está inmóvil con respecto al observador.

Tome en cuenta que si la velocidad relativa es mucho menor que la velocidad de la luz ( $v \ll c$ ), entonces  $v^2/c^2$  es extremadamente pequeño, y los tiempos transcurridos  $\Delta t$  y  $\Delta \tau$  son casi iguales. A bajas velocidades, la física basada en la relatividad moderna se aproxima a la física clásica: las experiencias cotidianas implican efectos relativistas muy pequeños. Sin embargo, para velocidades cercanas a la de la luz,  $v^2/c^2$  está cerca de uno, así que  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  es muy pequeño y  $\Delta t$  se vuelve significativamente mayor que  $\Delta \tau$ .

### Vida media de un muón

Existe una considerable evidencia experimental de que la ecuación  $\Delta t = \gamma \Delta \tau$  es correcta. Encontramos un ejemplo en las partículas de rayos cósmicos que llueven continuamente sobre la Tierra desde el espacio profundo. Algunas colisiones de estas partículas con núcleos de la alta atmósfera dan lugar a partículas de corta duración llamadas muones. La vida media (cantidad de tiempo para que la mitad de un material se desintegre) de un muón es de  $1,52 \mu\text{s}$  cuando está en reposo respecto al observador que mide la vida media. Este es el intervalo de tiempo propio  $\Delta \tau$ . Este corto tiempo permite que muy pocos muones lleguen a la superficie de la Tierra y sean detectados si las suposiciones de Newton sobre el tiempo y el espacio fueran correctas. Sin embargo, los muones producidos por las partículas de los rayos cósmicos tienen un rango de velocidades, con algunos que se mueven cerca de la velocidad de la luz. Se ha comprobado que la vida media del muón, medida por un observador terrestre ( $\Delta t$ ) varía con la velocidad exactamente como lo predice la ecuación  $\Delta t = \gamma \Delta \tau$ . Cuanto más rápido se mueve el muón, más tiempo vive. En la Tierra vemos que el muón dura mucho más de lo que predice su vida media dentro de su propio marco de reposo. Visto desde nuestro marco, el muón se desintegra más lentamente que cuando está en reposo respecto a nosotros. Por ello, una fracción mucho mayor de muones llega al suelo.

Antes de presentar el primer ejemplo de resolución de un problema de relatividad, exponemos una estrategia que puede utilizar como guía para estos cálculos.



## ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

### Relatividad

1. Haga una lista de los datos dados o que pueden deducirse del problema tal y como está planteado (identifique los datos conocidos). Busque en particular la información sobre la velocidad relativa  $v$ .
2. Identifique exactamente lo que hay que determinar en el problema (identificar las incógnitas).
3. Asegúrese de comprender los aspectos conceptuales del problema antes de realizar cualquier cálculo (exprese la respuesta en forma de ecuación). Decida, por ejemplo, qué observador ve el tiempo dilatado o la longitud contraída antes de trabajar con las ecuaciones o utilizarlas para realizar el cálculo. Si ha pensado en quién ve qué, quién se mueve con el evento observado, quién ve el tiempo propio, etc., le resultará mucho más fácil determinar si su cálculo es razonable.
4. Determine el tipo de cálculo principal que debe realizarse para hallar las incógnitas identificadas anteriormente (haga el cálculo). El resumen de la sección le resultará útil para determinar si se trata de una contracción de longitud, de energía cinética relativista o de algún otro concepto.

Tenga en cuenta *que no debe redondear durante el cálculo*. Como se indica en el texto, a menudo hay que realizar los cálculos con muchos dígitos para ver el efecto deseado. Puede redondear al final de la solución del problema, pero no utilice un número redondeado en un cálculo posterior. Además, compruebe la respuesta para ver si es razonable: ¿Tiene sentido? Esto puede ser más difícil para la relatividad, que tiene pocos ejemplos cotidianos que proporcionen experiencia sobre lo que es razonable. Pero se pueden buscar velocidades mayores que  $c$  o efectos relativistas que estén en la dirección equivocada (como una contracción del tiempo donde se esperaba una dilatación).



## EJEMPLO 5.1

### Dilatación del tiempo en un vehículo de alta velocidad

El Vehículo de Tecnología Hipersónica 2 (Hypersonic Technology Vehicle 2, HTV-2) es un vehículo cohete experimental con capacidad para viajar a 21 000 km/h (5830 m/s). Si un reloj electrónico en el HTV-2 mide un intervalo de tiempo de exactamente 1-s de duración, ¿cuál sería la medida de los observadores en la Tierra?

#### Estrategia

Aplique la fórmula de dilatación del tiempo para relacionar el intervalo de tiempo propio de la señal en el HTV-2 con el intervalo de tiempo medido en tierra.

#### Solución

- Identifique los datos conocidos  $\Delta\tau = 1$  s;  $v = 5830$  m/s.
- Identifique las incógnitas:  $\Delta t$ .
- Expresar la respuesta en forma de ecuación:

$$\Delta t = \gamma \Delta\tau = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

- Haga el cálculo. Utilice la expresión para  $\gamma$  para determinar  $\Delta t$  de  $\Delta\tau$ :

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{1 \text{ s}}{\sqrt{1 - \left(\frac{5830 \text{ m/s}}{3,00 \times 10^8 \text{ m/s}}\right)^2}} \\ &= 1,000000000189 \text{ s} \\ &= 1 \text{ s} + 1,89 \times 10^{-10} \text{ s}. \end{aligned}$$

#### Importancia

La altísima velocidad del HTV-2 sigue siendo solo  $10^{-5}$  veces la velocidad de la luz. Los efectos relativistas para el HTV-2 son insignificantes para casi todos los fines, pero no son cero.

## EJEMPLO 5.2

### ¿Qué velocidades son relativistas?

¿A qué velocidad debe viajar un vehículo para que 1 segundo de tiempo medido en el reloj de un pasajero en el vehículo difiera en un 1% para un observador que lo mide en tierra en el exterior?

#### Estrategia

Utilice la fórmula de dilatación del tiempo para hallar  $v/c$  para la relación de tiempos dada.

#### Solución

- Identifique lo conocido:

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \frac{1}{1,01}.$$

- Identifique las incógnitas:  $v/c$ .
- Expresar la respuesta en forma de ecuación:

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Delta \tau$$

$$\frac{\Delta \tau}{\Delta t} = \sqrt{1-v^2/c^2}$$

$$\left(\frac{\Delta \tau}{\Delta t}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - (\Delta \tau / \Delta t)^2}.$$

d. Haga el cálculo:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - (1/1,01)^2}$$

$$= 0,14.$$

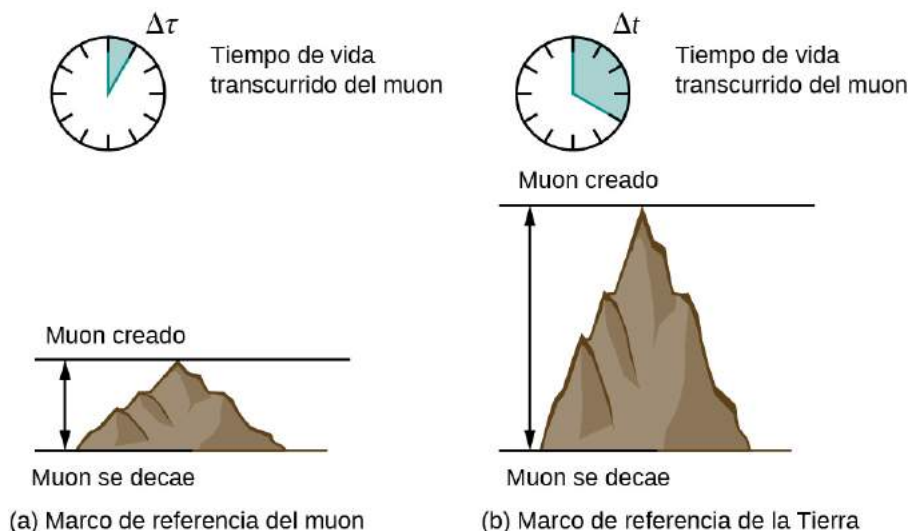
### Importancia

El resultado muestra que un objeto debe viajar a una velocidad muy cercana al 10% de la velocidad de la luz para que su movimiento produzca efectos significativos de dilatación temporal relativista.

## EJEMPLO 5.3

### Calcule $\Delta t$ para un evento relativista

Supongamos que un rayo cósmico que colisiona con un núcleo en la atmósfera superior de la Tierra produce un muón que tiene la siguiente velocidad  $v = 0,950c$ . El muón viaja entonces a velocidad constante y vive  $2,20 \mu\text{s}$  medidos en el marco de referencia del muón. (Puede imaginarse esto como el reloj interno del muón) ¿Cuánto tiempo vive el muón medido por un observador terrestre (Figura 5.5)?



**FIGURA 5.5** Un muón en la atmósfera terrestre vive más tiempo, medido por un observador terrestre que por el reloj interno del muón.

Como veremos más adelante, en el marco de referencia del muón, este recorre una distancia más corta que la medida en el marco de referencia de la Tierra.

### Estrategia

Un reloj que se mueve con el muón mide el tiempo propio de su proceso de desintegración, por lo que el tiempo que se nos da es  $\Delta\tau = 2,20 \mu\text{s}$ . El observador terrestre mide  $\Delta t$  según la ecuación  $\Delta t = \gamma \Delta\tau$ . Como la velocidad está dada, podemos calcular el tiempo en el marco de referencia en la Tierra.

### Solución

a. Identifique los datos conocidos  $v = 0,950c$ ,  $\Delta\tau = 2,20 \mu\text{s}$ .

- b. Identifique las incógnitas:  $\Delta t$ .  
 c. Exprese la respuesta en forma de ecuación. Utilice:

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau$$

con

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

- d. Haga el cálculo. Utilice la expresión para  $\gamma$  para determinar  $\Delta t$  de  $\Delta \tau$

$$\begin{aligned} \Delta t &= \gamma \Delta \tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta \tau \\ &= \frac{2,20 \mu\text{s}}{\sqrt{1 - (0,950)^2}} \\ &= 7,05 \mu\text{s}. \end{aligned}$$

Recuerde mantener las cifras significativas adicionales hasta la respuesta final.

### Importancia

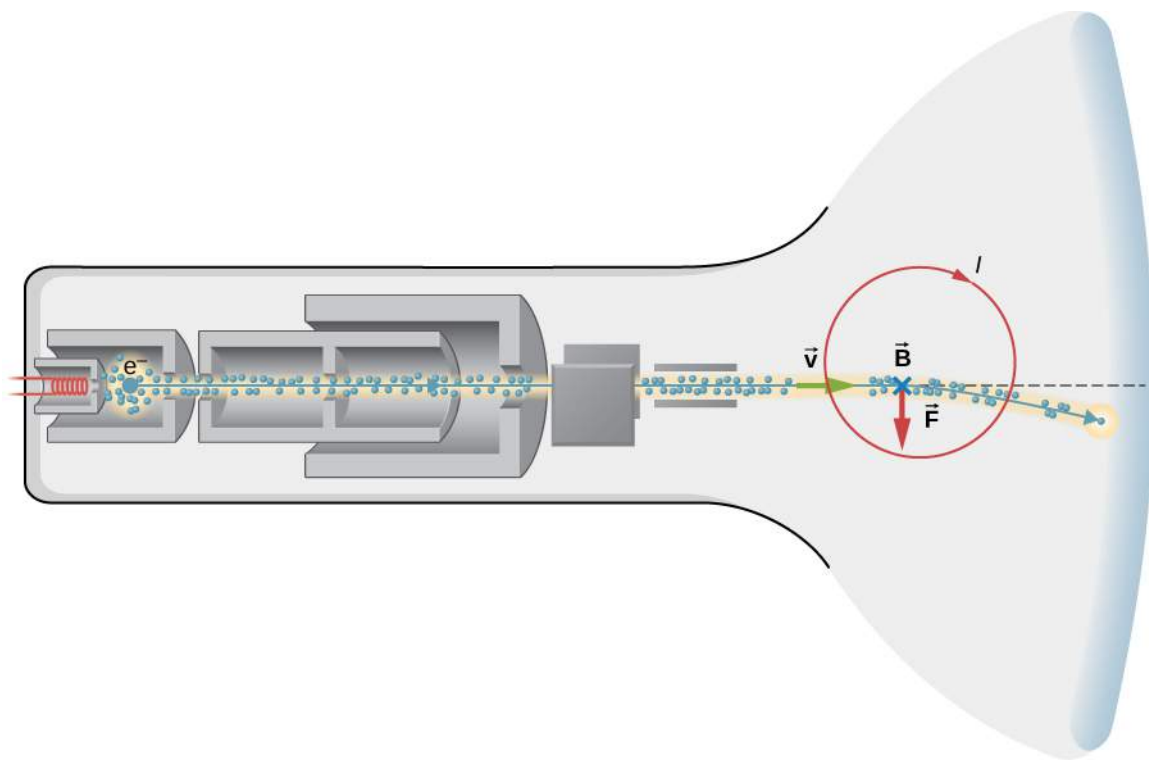
Una de las implicaciones de este ejemplo es que debido a que  $\gamma = 3,20$  al 95,0% de la velocidad de la luz ( $v = 0,950c$ ), los efectos relativistas son significativos. Los dos intervalos de tiempo difieren en un factor de 3,20, cuando clásicamente serían iguales. Se dice que algo que se mueve a  $0,950c$  es altamente relativista.



### EJEMPLO 5.4

#### Televisión relativista

Un televisor de pantalla que no es plana, de estilo antiguo ([Figura 5.6](#)), funciona acelerando los electrones a corta distancia hasta alcanzar una velocidad relativista, y utilizando después campos electromagnéticos para controlar el lugar en el que el haz de electrones incide en una capa fluorescente situada en la parte delantera del tubo. Supongamos que los electrones viajan a  $6,00 \times 10^7$  m/s a través de una distancia de 0,200 m desde el inicio del haz hasta la pantalla. (a) ¿Cuál es el tiempo de viaje de un electrón en el marco de reposo del televisor? (b) ¿Cuál es el tiempo de viaje del electrón en su propio marco de reposo?



**FIGURA 5.6** El haz de electrones de un televisor de tubo de rayos catódicos.

### Estrategia para (a)

(a) Calcule el tiempo desde  $vt = d$ . Aunque la velocidad sea relativista, el cálculo se hace enteramente en un marco de referencia, por lo que la relatividad no interviene.

### Solución

a. Identifique los datos conocidos:

$$v = 6,00 \times 10^7 \text{ m/s}; d = 0,200 \text{ m}.$$

b. Identifique la incógnita: el tiempo de viaje  $\Delta t$ .

c. Exprese la respuesta en forma de ecuación:

$$\Delta t = \frac{d}{v}.$$

d. Haga el cálculo:

$$\begin{aligned} t &= \frac{0,200 \text{ m}}{6,00 \times 10^7 \text{ m/s}} \\ &= 3,33 \times 10^{-9} \text{ s}. \end{aligned}$$

### Importancia

El tiempo de viaje es extremadamente corto, como se esperaba. Dado que el cálculo se realiza enteramente en un único marco de referencia, la relatividad no interviene, aunque la velocidad del electrón sea cercana a  $c$ .

### Estrategia para (b)

(b) En el marco de referencia del electrón, el tubo de vacío se mueve y el electrón está inmóvil. El cátodo emisor de electrones deja el electrón y el frente del tubo de vacío golpea al electrón en el mismo lugar. Por lo tanto, utilizamos la fórmula de la dilatación del tiempo para relacionar el tiempo propio en el marco de reposo del electrón con el tiempo en el marco de la televisión.

### Solución

a. Identifique los datos conocidos (de la parte a):

$$\Delta t = 3,33 \times 10^{-9} \text{ s}; v = 6,00 \times 10^7 \text{ m/s}; d = 0,200 \text{ m.}$$

- b. Identifique las incógnitas:  $\tau$ .  
 c. Exprese la respuesta en forma de ecuación:

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\Delta \tau = \Delta t \sqrt{1-v^2/c^2}.$$

- d. Haga el cálculo:

$$\begin{aligned} \Delta \tau &= (3,33 \times 10^{-9} \text{ s}) \sqrt{1 - \left( \frac{6,00 \times 10^7 \text{ m/s}}{3,00 \times 10^8 \text{ m/s}} \right)^2} \\ &= 3,26 \times 10^{-9} \text{ s.} \end{aligned}$$

### Importancia

El tiempo de viaje es más corto en el marco de referencia del electrón. Dado que el problema requiere hallar el intervalo medido en diferentes marcos de referencia para el mismo proceso, la relatividad está involucrada. Si hubiéramos intentado calcular el tiempo en el marco de reposo del electrón simplemente dividiendo los 0,200 m entre la velocidad, el resultado sería ligeramente incorrecto debido a la velocidad relativista del electrón.

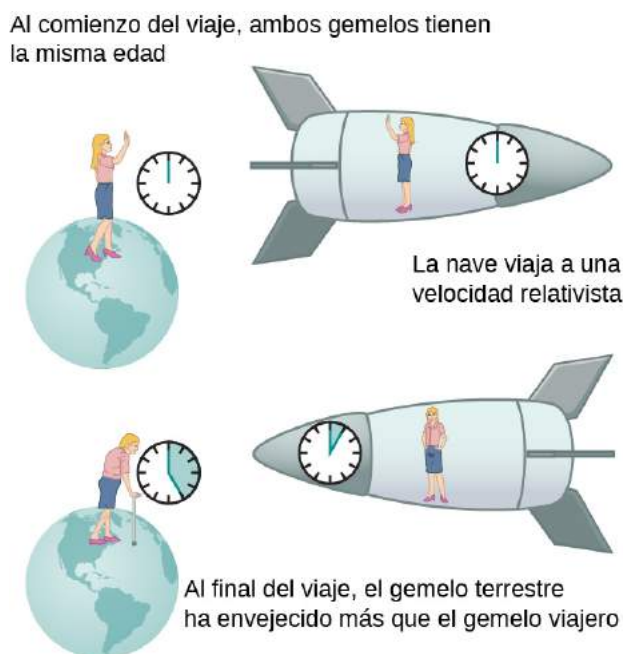
### ✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 5.2

¿Qué valor tiene  $\gamma$  si  $v = 0,650c$ ?

### La paradoja de los gemelos

Una consecuencia intrigante de la dilatación del tiempo es que un viajero espacial que se mueva a gran velocidad con respecto a la Tierra envejecería menos que el gemelo terrestre del astronauta. Esto se conoce a menudo como la paradoja de los gemelos. Imagine que el astronauta se mueve a una velocidad tal que  $\gamma = 30,0$ , como en la [Figura 5.7](#). Un viaje que tarda 2,00 años en su marco, tardaría 60,0 años en el marco de la gemela terrestre. Supongamos que el astronauta viaja 1,00 año a otro sistema estelar, explora brevemente la zona y luego viaja 1,00 año de vuelta. Un astronauta que tuviera 40 años al inicio del viaje tendría 42 cuando la nave regrese. Todo en la Tierra, sin embargo, habría envejecido 60,0 años. La gemela terrestre, si aún vive, tendría 100 años.

La situación le parecería diferente al astronauta de la [Figura 5.7](#). Como el movimiento es relativo, la nave espacial parecería estar inmóvil y la Tierra parecería moverse. (Esta es la sensación que se tiene al volar en un avión). Al mirar por la ventana de la nave espacial, la astronauta vería que el tiempo se ralentiza en la Tierra por un factor de  $\gamma = 30,0$ . Visto desde la nave espacial, la hermana terrestre habrá envejecido solo  $2/30$ , o sea 0,07, de un año, mientras que la astronauta habrá envejecido 2,00 años.



**FIGURA 5.7** La paradoja de los gemelos consiste en las conclusiones contradictorias sobre qué gemelo envejece más como resultado de un largo viaje espacial a velocidad relativista.

La paradoja aquí es que las dos gemelas no pueden ser correctas. Como en todas las paradojas, las conclusiones contradictorias parten de una premisa falsa. De hecho, el movimiento de la astronauta es significativamente diferente al de la gemela terrestre. La astronauta acelera a gran velocidad y luego desacelera para ver el sistema estelar. Para volver a la Tierra, vuelve a acelerar y desacelerar. La nave espacial no se encuentra en un marco inercial único al que se pueda aplicar directamente la fórmula de dilatación del tiempo. Es decir, la gemela astronauta cambia de referencias inerciales. La gemela terrestre no experimenta estas aceleraciones y permanece en el mismo marco inercial. Por lo tanto, la situación no es simétrica, y es incorrecto afirmar que la astronauta observa los mismos efectos que su gemela. La falta de simetría entre los gemelos será aún más evidente cuando analicemos el viaje más adelante en este capítulo en términos de la trayectoria que sigue el astronauta a través del espacio-tiempo cuatridimensional.

En 1971, los físicos estadounidenses Joseph Hafele y Richard Keating verificaron la dilatación del tiempo a bajas velocidades relativas haciendo volar relojes atómicos extremadamente precisos alrededor del mundo en aviones comerciales. Midieron el tiempo transcurrido con una exactitud de unos pocos nanosegundos y lo compararon con el tiempo medido por los relojes dejados atrás. Los resultados de Hafele y Keating estaban dentro de las incertidumbres experimentales de las predicciones de la relatividad. Había que tener en cuenta tanto la relatividad especial como la general, porque la gravedad y las aceleraciones estaban implicadas, así como el movimiento relativo.

### ✓ **COMPRUEBE LO APRENDIDO 5.3**

- Una partícula viaja a  $1,90 \times 10^8$  m/s y vive  $2,10 \times 10^{-8}$  s cuando está en reposo con respecto a un observador. ¿Cuánto tiempo vive la partícula vista en el laboratorio?
- Las naves espaciales *A* y *B* pasan en direcciones opuestas a una velocidad relativa de  $4,00 \times 10^7$  m/s. Un reloj interno de la nave espacial *A* hace que esta emita una señal de radio durante 1,00 s. El computador de la nave *B* corrige que el principio y el final de la señal han recorrido distancias diferentes, para calcular el intervalo de tiempo durante el cual la nave *A* estaba emitiendo la señal. ¿Cuál es el tiempo que calcula el computador de la nave espacial *B*?

## 5.4 Contracción de longitud

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Explicar cómo se relacionan la simultaneidad y la contracción de la longitud.
- Describir la relación entre la contracción de la longitud y la dilatación del tiempo y utilizarla para derivar la ecuación de longitud-contracción.

La longitud del vagón en la [Figura 5.8](#) es la misma para todos los pasajeros. Todos ellos coincidirían en la localización simultánea de los dos extremos del vagón y obtendrían el mismo resultado para la distancia entre ellos. Pero los eventos simultáneos en un marco inercial no tienen por qué ser simultáneos en otro. Si el tren pudiera viajar a velocidades relativistas, un observador terrestre vería las ubicaciones simultáneas de los dos extremos del vagón a una distancia diferente a la de los observadores dentro del vagón. Las distancias medidas no tienen por qué ser las mismas para diferentes observadores cuando se trata de velocidades relativistas.



**FIGURA 5.8** Las personas pueden describir las distancias de forma diferente, pero a velocidades relativistas, las distancias son realmente diferentes. (crédito: “russavia”/Flickr)

### Longitud propia

Dos observadores que pasan uno al lado del otro ven siempre el mismo valor de su velocidad relativa. Aunque la dilatación del tiempo implica que el pasajero del tren y el observador que se encuentra junto a las vías miden tiempos diferentes para el paso del tren, siguen coincidiendo en que la velocidad relativa, que es la distancia dividida por el tiempo transcurrido, es la misma. Si un observador en tierra y otro en el tren miden un tiempo diferente para que la longitud del tren pase por el observador terrestre, estar de acuerdo con su velocidad relativa significa que también deben ver diferentes distancias recorridas.

El muón que se discute en la [Ejemplo 5.3](#) ilustra este concepto ([Figura 5.9](#)). Para un observador en la Tierra, el muón viaja a  $0,950c$  durante  $7,05 \mu\text{s}$  desde que se produce hasta que se desintegra. Por lo tanto, viaja una distancia relativa a la Tierra de:

$$L_0 = v\Delta t = (0,950)(3,00 \times 10^8 \text{ m/s})(7,05 \times 10^{-6} \text{ s}) = 2,01 \text{ km.}$$

En el marco del muón, el tiempo de vida del muón es de  $2,20 \mu\text{s}$ . En este marco de referencia, la Tierra, el aire y el suelo solo tienen el tiempo suficiente para viajar:

$$L = v\Delta\tau = (0,950)(3,00 \times 10^8 \text{ m/s})(2,20 \times 10^{-6} \text{ s}) \text{ km} = 0,627 \text{ km.}$$

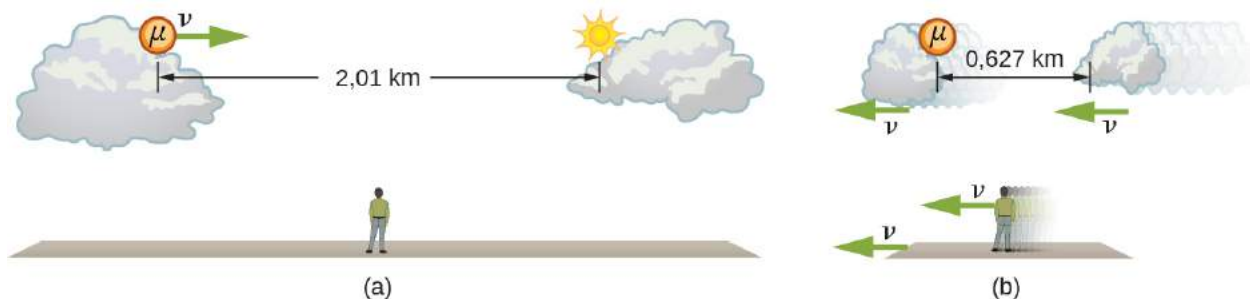
La distancia entre los dos sucesos iguales (producción y desintegración de un muón) depende de quién lo mida y de cómo se mueva respecto a él.



### Longitud propia

**Longitud propia**  $L_0$  es la distancia entre dos puntos medida por un observador que está en reposo respecto a ambos puntos.

El observador terrestre mide la longitud propia  $L_0$  porque los puntos en los que se produce y se desintegra el muón son estacionarios con respecto a la Tierra. Para el muón, la Tierra, el aire y las nubes se mueven, por lo que la distancia  $L$  que ve no es la longitud propia.



**FIGURA 5.9** (a) El observador terrestre ve al muón recorrer 2,01 km. (b) La misma trayectoria tiene una longitud de 0,627 km vista desde el marco de referencia del muón. La Tierra, el aire y las nubes se mueven en relación con el muón en su marco, y tienen longitudes menores a lo largo de la dirección del viaje.

### Contracción de longitud

Para relacionar las distancias medidas por diferentes observadores, tenga en cuenta que la velocidad relativa al observador terrestre en nuestro ejemplo del muón viene dada por

$$v = \frac{L_0}{\Delta t}.$$

El tiempo con respecto al observador terrestre es  $\Delta t$ , porque el objeto cronometrado se mueve con respecto a este observador. La velocidad relativa al observador en movimiento viene dada por

$$v = \frac{L}{\Delta \tau}.$$

El observador en movimiento viaja con el muón y, por tanto, observa el tiempo propio  $\Delta \tau$ . Las dos velocidades son idénticas; por lo tanto,

$$\frac{L_0}{\Delta t} = \frac{L}{\Delta \tau}.$$

Sabemos que  $\Delta t = \gamma \Delta \tau$ . Al sustituir esta ecuación en la relación anterior se obtiene

$$L = \frac{L_0}{\gamma}. \quad 5.3$$

Al sustituir  $\gamma$  da una ecuación que relaciona las distancias medidas por diferentes observadores.

### Contracción de longitud

La **contracción de la longitud** es la disminución de la longitud medida de un objeto con respecto a su longitud propia cuando se mide en un marco de referencia que se mueve con respecto al objeto:

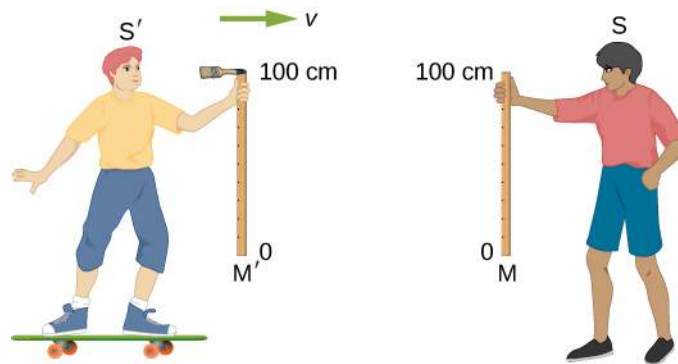
$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad 5.4$$

donde  $L_0$  es la longitud del objeto en su marco de reposo, y  $L$  es la longitud en el marco que se mueve con velocidad  $v$ .

Si medimos la longitud de cualquier cosa que se mueva con respecto a nuestro marco, hallamos que su longitud  $L$  es menor que la longitud propia  $L_0$  que se mediría si el objeto estuviera inmóvil. Por ejemplo, en el marco de reposo del muón, la distancia que recorre la Tierra entre el lugar en el que se produjo el muón y el lugar en el que se desintegra es más corta que la distancia recorrida vista desde el marco de la Tierra. Esos puntos están fijos respecto a la Tierra, pero se mueven respecto al muón. Las nubes y otros objetos también se contraen a lo largo de la dirección del movimiento visto desde el marco de reposo del muón.

Así, dos observadores miden distancias diferentes a lo largo de su dirección de movimiento relativo, dependiendo de cuál de ellos esté midiendo distancias entre objetos en reposo.

¿Pero qué pasa con las distancias medidas en una dirección perpendicular al movimiento relativo? Imagine que dos observadores se mueven a lo largo de sus ejes  $x$  y se cruzan mientras sostienen unas reglas de madera verticalmente en la dirección  $y$ . La [Figura 5.10](#) muestra dos reglas de madera  $M$  y  $M'$  que están en reposo en los marcos de referencia de dos niños  $S$  y  $S'$ , respectivamente. Una pequeña brocha se fija en la parte superior (en marca de 100 cm) de la regla de madera  $M'$ . Supongamos que  $S'$  se mueve hacia la derecha a una velocidad muy alta  $v$  en relación con  $S$ , y las reglas de madera están orientadas de manera que son perpendiculares, o transversales, a su vector de velocidad relativa. Las reglas de madera se sujetan de forma que, al pasar uno por otro, sus extremos inferiores (las marcas de 0 cm) coincidan. Supongamos que cuando  $S$  mira su regla de madera  $M$  posteriormente, halla una línea pintada en ella, justo debajo de la parte superior de esta. Porque la brocha está unida a la parte superior de la regla de madera del otro niño  $M'$ ,  $S$  solo puede concluir que la regla de madera  $M'$  tiene menos de 1,0 m de longitud.



**FIGURA 5.10** Las reglas de madera  $M$  y  $M'$  son estacionarias en los marcos de referencia de los observadores  $S$  y  $S'$ , respectivamente. A medida que pasan las reglas de madera, una pequeña brocha fijada en la marca de 100 cm de  $M'$  pinta una línea en  $M$ .

Ahora cuando los niños se acercan,  $S'$ , como  $S$ , ve una regla de madera de un metro que se mueve hacia él con velocidad  $v$ . Como sus situaciones son simétricas, cada niño debe hacer la misma medición de la regla de madera en el otro fotograma. Por lo tanto, si  $S$  mide la regla de madera  $M'$  a menos de 1,0 m de longitud,  $S'$  debe medir la regla de madera  $M$  para que sea también menos de 1,0 m de longitud, y  $S'$  debe ver su brocha pasar por encima de la regla de madera  $M$  y no pintar una línea en ella. En otras palabras, después del mismo evento, ¡un niño ve una línea pintada en una regla de madera, mientras que el otro no ve tal línea en esa misma regla de madera!

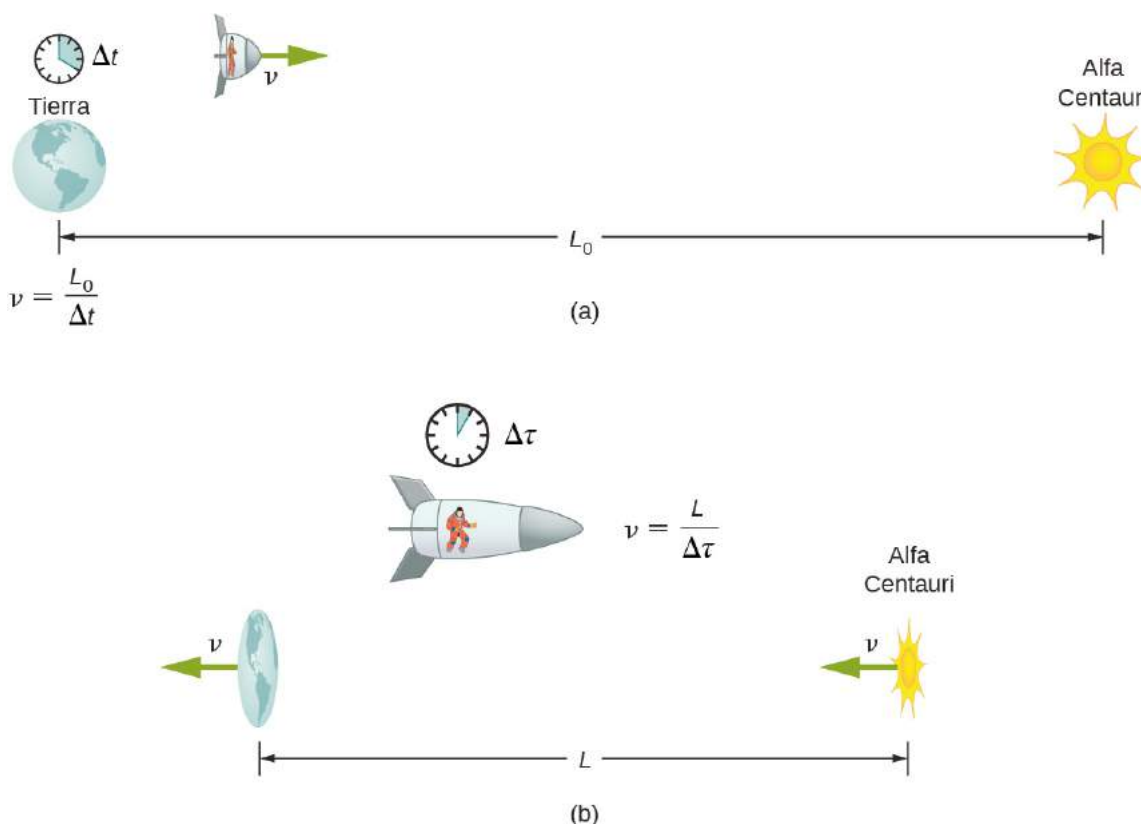
El primer postulado de Einstein exige que las leyes de la física (aplicadas, por ejemplo, a la pintura) predigan que  $S$  y  $S'$ , que están ambos en marcos inerciales, hacen las mismas observaciones; es decir,  $S$  y  $S'$  deben ver ambos una línea pintada en la regla de madera  $M$ , o ambos no ver esa línea. ¡Por lo tanto, nos vemos obligados a concluir que nuestra suposición original de que  $S$  vio una línea pintada debajo de la parte superior de su bastón era errónea! En cambio,  $S$  halla la línea pintada justo en la marca de 100 cm en  $M$ . Entonces ambos niños estarán de acuerdo en que hay una línea pintada en  $M$ , y también estarán de acuerdo en que ambas

reglas de madera miden exactamente 1 m. Concluimos entonces que las mediciones de una *longitud transversal deben ser las mismas en diferentes marcos inerciales*.

### EJEMPLO 5.5

#### Cálculo de contracción de longitud

Supongamos que un astronauta, como la gemela en la discusión de la paradoja de los gemelos, viaja tan rápido que  $\gamma = 30,00$ . (a) El astronauta viaja desde la Tierra hasta el sistema estelar más cercano, Alfa Centauri, a 4300 años luz (light-years, ly) de distancia medidos por un observador terrestre. ¿A qué distancia se encuentran la Tierra y Alfa Centauri, medida por el astronauta? (b) Con relación a  $c$ , ¿cuál es la velocidad del astronauta con respecto a la Tierra? Es posible que se olvide del movimiento de la Tierra con respecto al Sol (Figura 5.11).



**FIGURA 5.11** (a) El observador terrestre mide la distancia propia entre la Tierra y Alfa Centauri. (b) El astronauta observa una contracción de longitud porque la Tierra y Alfa Centauri se mueven respecto a su nave. Puede recorrer esta distancia más corta en un tiempo menor (su tiempo propio) sin superar la velocidad de la luz.

#### Estrategia

En primer lugar, hay que tener en cuenta que un año luz (ly) es una unidad de distancia conveniente a escala astronómica: es la distancia que recorre la luz en un año. Para la parte (a), la distancia de 4300 ly entre Alfa Centauri y la Tierra es la distancia adecuada  $L_0$ , porque está medido por un observador terrestre para el que ambas estrellas son (aproximadamente) estacionarias. Para el astronauta, la Tierra y Alfa Centauri pasan a la misma velocidad, por lo que la distancia entre ellas es la longitud contraída  $L$ . En la parte (b), se nos da  $\gamma$ , por lo que podemos hallar  $v$  reordenando la definición de  $\gamma$  para expresar  $v$  en términos de  $c$ .

#### Solución para (a)

Para la parte (a):

- Identifique los datos conocidos  $L_0 = 4,300$  ly;  $\gamma = 30,00$ .

- b. Identifique la incógnita:  $L$ .
- c. Expresar la respuesta en forma de ecuación:  $L = \frac{L_0}{\gamma}$ .
- d. Haga el cálculo:

$$\begin{aligned} L &= \frac{L_0}{\gamma} \\ &= \frac{4,300 \text{ ly}}{30,00} \\ &= 0,1433 \text{ ly.} \end{aligned}$$

### Solución para (b)

Para la parte (b):

- a. Identifique los datos conocidos:  $\gamma = 30,00$ .
- b. Identifique la incógnita:  $v$  en términos de  $c$ .
- c. Expresar la respuesta en forma de ecuación. Empiece con:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

A continuación, resuelva la incógnita  $v/c$  elevando primero al cuadrado ambos lados y luego reordenando:

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ \frac{v^2}{c^2} &= 1 - \frac{1}{\gamma^2} \\ \frac{v}{c} &= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \end{aligned}$$

- d. Haga el cálculo:

$$\begin{aligned} \frac{v}{c} &= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{(30,00)^2}} \\ &= 0,99944 \end{aligned}$$

o

$$v = 0,9994 c.$$

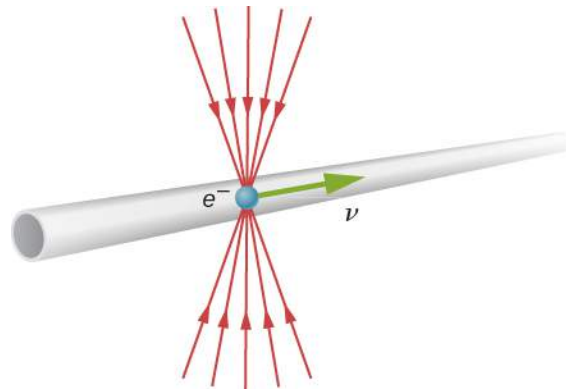
### Importancia

Recuerde no redondear los cálculos hasta la respuesta final o podría obtener resultados erróneos. Esto es especialmente cierto en el caso de los cálculos de relatividad especial, en los que las diferencias podrían revelarse solo después de varios decimales. El efecto relativista es grande aquí ( $\gamma = 30,00$ ), y vemos que  $v$  se acerca (no es igual) a la velocidad de la luz. Como la distancia medida por el astronauta es mucho menor, puede recorrerla en mucho menos tiempo en su propio marco.

Las personas que viajan a velocidades extremadamente altas podrían cubrir distancias muy grandes (miles o incluso millones de años luz) y envejecer solo unos pocos años en el camino. Sin embargo, al igual que los emigrantes de siglos pasados que abandonaron su hogar, estas personas dejarían la Tierra que conocen para siempre. Incluso si regresaran, en la Tierra habrían pasado entre miles y millones de años, lo que causaría la desaparición de la mayor parte de lo que ahora existe. También hay un obstáculo práctico más serio para viajar a tales velocidades; se necesitarían energías inmensamente mayores para alcanzar tales velocidades de lo que la física clásica predice que puede lograrse. Esto se discutirá más adelante en el capítulo.

¿Por qué no notamos la contracción de longitud en la vida cotidiana? La distancia a la tienda de comestibles no

parece depender de si nos movemos o no. Al analizar la ecuación  $L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , vemos que a bajas velocidades ( $v \ll c$ ), las longitudes son casi iguales, que es la expectativa clásica. Pero la contracción de longitud es real, aunque no se experimente con frecuencia. Por ejemplo, una partícula cargada, como un electrón que viaja a velocidad relativista, tiene líneas de campo eléctrico que se comprimen a lo largo de la dirección del movimiento visto por un observador estacionario (Figura 5.12). Cuando el electrón pasa por un detector, como una bobina de alambre, su campo interactúa mucho más brevemente, un efecto observado en aceleradores de partículas como el acelerador lineal de Stanford (Stanford Linear Accelerator, SLAC), de 3 km de longitud. De hecho, para un electrón que se desplaza por el tubo del haz en el SLAC, el acelerador y la Tierra se desplazan y se contraen en longitud. El efecto relativista es tan grande que el acelerador solo mide 0,5 m hasta el electrón. En realidad, es más fácil hacer descender el haz de electrones por la tubería, ya que el haz no tiene que dirigirse con tanta precisión para descender por una tubería corta como para hacerlo por una de 3 km de longitud. Esto, de nuevo, es una verificación experimental de la teoría especial de la relatividad.



**FIGURA 5.12** Las líneas de campo eléctrico de una partícula cargada a alta velocidad se comprimen a lo largo de la dirección del movimiento por contracción de longitud, lo que produce una señal observable diferente cuando la partícula atraviesa una bobina.

#### ✓ **COMPRUEBE LO APRENDIDO 5.4**

Una partícula viaja a través de la atmósfera terrestre a una velocidad de  $0,750c$ . Para un observador terrestre, la distancia que recorre es de 2,50 km. ¿Qué distancia recorre la partícula vista desde su marco de referencia?

## 5.5 La transformación de Lorentz

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Describir la transformación galileana de la mecánica clásica, relacionando la posición, el tiempo, las velocidades y las aceleraciones medidas en diferentes marcos de inercia.
- Deducir las ecuaciones de transformación de Lorentz correspondientes, que, en contraste con la transformación galileana, son consistentes con la relatividad especial.
- Explicar la transformación de Lorentz y muchas de las características de la relatividad en términos de espacio-tiempo de cuatro dimensiones.

Hemos utilizado los postulados de la relatividad para examinar, en ejemplos concretos, cómo los observadores en diferentes marcos de referencia miden valores diferentes para las longitudes y los intervalos de tiempo. Podemos comprender mejor cómo los postulados de la relatividad cambian la visión newtoniana del tiempo y el espacio examinando las ecuaciones de transformación que dan las coordenadas espaciales y temporales de eventos en un marco de referencia inercial en términos de unos en comparación con los otros. En primer lugar, examinamos cómo se transforman las coordenadas de posición y tiempo entre marcos inerciales según la visión de la física newtoniana. A continuación, examinamos cómo hay que cambiar esto para que concuerde con los postulados de la relatividad. Por último, examinamos las ecuaciones resultantes de la transformación de Lorentz y algunas de sus consecuencias en términos de diagramas espacio-temporales de cuatro

dimensiones, para apoyar la opinión de que las consecuencias de la relatividad especial son el resultado de las propiedades del tiempo y el espacio en sí, más que del electromagnetismo.

### Las ecuaciones de transformación galileana

Un **evento** se especifica por su ubicación y tiempo  $(x, y, z, t)$  en relación con un marco de referencia inercial particular  $S$ . Como ejemplo,  $(x, y, z, t)$  podría denotar la posición de una partícula en el tiempo  $t$ , y podríamos estar mirando estas posiciones para muchos tiempos diferentes para seguir el movimiento de la partícula. Supongamos que un segundo marco de referencia  $S'$  se mueve con una velocidad  $v$  respecto a la primera. Para simplificar, supongamos que esta velocidad relativa es a lo largo del eje de la  $x$ . La relación entre el tiempo y las coordenadas en los dos marcos de referencia es entonces

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z'.$$

En estas ecuaciones está implícita la suposición de que las mediciones de tiempo realizadas por los observadores tanto en  $S$  como en  $S'$  son las mismas. Eso es,

$$t = t'.$$

Estas cuatro ecuaciones se conocen colectivamente como la **transformación galileana**.

Podemos obtener las ecuaciones de transformación de la velocidad y la aceleración galileanas diferenciando estas ecuaciones con respecto al tiempo. A lo largo de este capítulo utilizaremos  $u$  para la velocidad de una partícula para distinguirla de  $v$ , la velocidad relativa de dos marcos de referencia. Observe que, para la transformación galileana, el incremento de tiempo utilizado en la diferenciación para calcular la velocidad de la partícula es el mismo en ambos marcos,  $dt = dt'$ . La diferenciación produce

$$u_x = u'_x + v, \quad u_y = u'_y, \quad u_z = u'_z$$

y

$$a_x = a'_x, \quad a_y = a'_y, \quad a_z = a'_z.$$

Denotamos la velocidad de la partícula por  $u$  en lugar de  $v$  para evitar la confusión con la velocidad  $v$  de un marco de referencia con respecto al otro. Las velocidades en cada marco difieren por la velocidad que tiene un fotograma visto desde el otro. Los observadores en ambos marcos de referencia miden el mismo valor de la aceleración. Como la masa no cambia por la transformación, y las distancias entre los puntos no están cargadas, los observadores en ambos marcos ven las mismas fuerzas  $F = ma$  que actúan entre los objetos y la misma forma de las leyes segunda y tercera de Newton en todos los marcos inerciales. Las leyes de la mecánica son coherentes con el primer postulado de la relatividad.

### Las ecuaciones de la transformación de Lorentz

Sin embargo, la transformación galileana viola los postulados de Einstein, porque las ecuaciones de velocidad establecen que un pulso de luz que se mueve con velocidad  $c$  a lo largo del eje de la  $x$  viajaría a la velocidad  $c - v$  en el otro marco inercial. En concreto, el pulso esférico tiene radio  $r = ct$  en el tiempo  $t$  en el marco no primo, y también tiene radio  $r' = ct'$  en el tiempo  $t'$  en el marco primo. Expresando estas relaciones en coordenadas cartesianas se obtiene

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 &= 0 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 &= 0. \end{aligned}$$

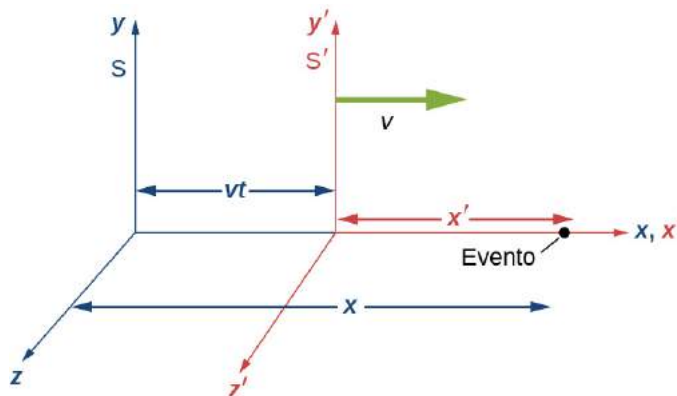
Los lados izquierdos de las dos expresiones se pueden igualar porque ambos son cero. Dado que  $y = y'$  y  $z = z'$ , obtenemos

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2. \quad 5.5$$

Esto no puede satisfacerse para una velocidad relativa  $v$  diferente de cero de los dos marcos si suponemos que la transformación galileana da como resultado  $t = t'$  con  $x = x' + vt'$ .

Para encontrar el conjunto correcto de ecuaciones de transformación, suponga los dos sistemas de coordenadas  $S$  y  $S'$  en la [Figura 5.13](#). Supongamos primero que se produce un evento en  $(x', 0, 0, t')$  en  $S'$  y en

$(x, 0, 0, t)$  en  $S$ , como se muestra en la figura.



**FIGURA 5.13** Un evento ocurre en  $(x, 0, 0, t)$  en  $S$  y en  $(x', 0, 0, t')$  en  $S'$ . Las ecuaciones de la transformación de Lorentz relacionan los eventos en los dos sistemas.

Supongamos que en el instante en que los orígenes de los sistemas de coordenadas en  $S$  y  $S'$  coinciden, una bombilla de *flash* emite un pulso de luz que se extiende esféricamente partiendo del origen. En el tiempo  $t$ , un observador en  $S$  encuentra que el origen de  $S'$  está en  $x = vt$ . Con la ayuda de un amigo en  $S'$ , el observador  $S$  también mide la distancia desde el evento hasta el origen de  $S'$  y encuentra que es  $x' \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Esto se deduce porque ya hemos demostrado que los postulados de la relatividad implican la contracción de la longitud. Por lo tanto, la posición del evento en  $S$  es

$$x = vt + x' \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

y

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Los postulados de la relatividad implican que la ecuación que relaciona la distancia y el tiempo del frente de onda esférico:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

debe aplicarse tanto en términos de coordenadas imprimadas como no imprimadas, lo que se demostró anteriormente que conduce a la [Ecuación 5.5](#):

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2.$$

Combinamos esto con la ecuación que relaciona la  $x$  y la  $x'$  para obtener la relación entre  $t$  y  $t'$ :

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Las ecuaciones que relacionan el tiempo y la posición de los eventos vistos en  $S$  son entonces

$$\begin{aligned} t &= \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y &= y' \\ z &= z'. \end{aligned}$$

Este conjunto de ecuaciones, que relacionan la posición y el tiempo en los dos marcos inerciales, se conoce como **transformación de Lorentz**. Reciben su nombre en honor a H.A. Lorentz (1853 a 1928), quien las propuso por primera vez. Curiosamente, justificó la transformación en lo que finalmente se descubrió que era una hipótesis falaz. La base teórica correcta es la teoría especial de la relatividad de Einstein.



La transformación inversa expresa las variables de  $S$  en términos de las de  $S'$ . Simplemente intercambiando las variables imprimadas y no imprimadas y sustituyendo, da:

$$\begin{aligned}t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\y' &= y \\z' &= z.\end{aligned}$$

### EJEMPLO 5.6

#### Uso de la transformación de Lorentz para el tiempo

La nave espacial  $S'$  está en reposo, dirigiéndose eventualmente hacia Alfa Centauri, cuando la nave espacial  $S$  pasa a su lado a velocidad relativa  $c/2$ . El capitán de  $S'$  envía una señal de radio que dura 1,2 s según el reloj de esa nave. Utiliza la transformación de Lorentz para encontrar el intervalo de tiempo de la señal medida por el oficial de comunicaciones de la nave espacial  $S$ .

#### Solución

- Identifique el aspecto conocido:  $\Delta t' = t_2' - t_1' = 1,2$  s;  $\Delta x' = x_2' - x_1' = 0$ .
- Identifique la incógnita:  $\Delta t = t_2 - t_1$ .
- Expresar la respuesta en forma de una ecuación. La señal de tiempo comienza como  $(x', t_1')$  y se detiene en  $(x', t_2')$ . Tenga en cuenta que la coordenada  $x'$  de ambos eventos es la misma porque el reloj está en reposo en  $S'$ . Escriba la primera ecuación de la transformación de Lorentz en términos de  $\Delta t = t_2 - t_1$ ,  $\Delta x = x_2 - x_1$ , y de forma similar para las coordenadas imprimadas, como:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + v\Delta x'/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Porque la posición del reloj en  $S'$  es fija,  $\Delta x' = 0$ , y el intervalo de tiempo  $\Delta t$  se convierte en:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

- Haga el cálculo.  
Con  $\Delta t' = 1,2$  s esto da:

$$\Delta t = \frac{1,2 \text{ s}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = 1,4 \text{ s}.$$

Observe que la transformación de Lorentz reproduce la ecuación de dilatación del tiempo.

### EJEMPLO 5.7

#### Uso de la transformación de Lorentz para la longitud

Un topógrafo mide una calle que tiene  $L = 100$  m de longitud en el marco terrestre  $S$ . Utilice la transformación de Lorentz para obtener una expresión para su longitud medida desde una nave espacial  $S'$ , moviéndose a una velocidad de  $0,20c$ , suponiendo que las coordenadas  $x$  de los dos marcos coinciden en el tiempo  $t = 0$ .

#### Solución

- Identifique el aspecto conocido:  $L = 100$  m;  $v = 0,20c$ ;  $\Delta \tau = 0$ .
- Identifique la incógnita:  $L'$ .

- c. Exprese la respuesta en forma de una ecuación. El topógrafo en el marco S midió los dos extremos del palo simultáneamente, y los encontró en  $x_2$  y  $x_1$  a una distancia  $L = x_2 - x_1 = 100$  m. La tripulación de la nave espacial mide la ubicación simultánea de los extremos de los palos en su marco. Para relacionar las longitudes registradas por los observadores en  $S'$  y S, respectivamente, escriba la segunda de las cuatro ecuaciones de transformación de Lorentz como:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned}$$

- d. Haga el cálculo. Dado que  $x_2 - x_1 = 100$  m, la longitud del palo móvil es igual a:

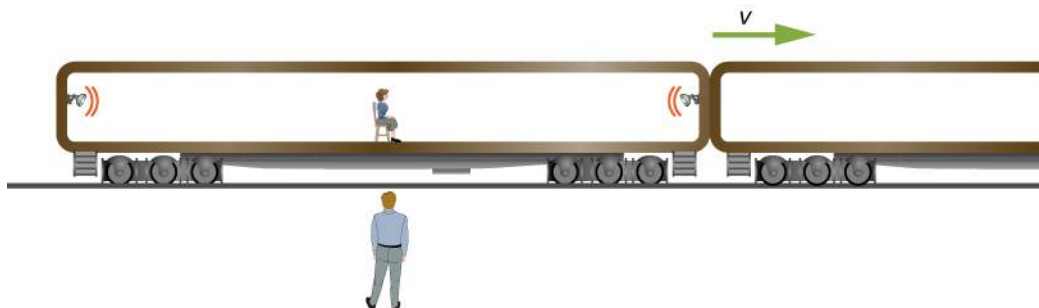
$$\begin{aligned} L' &= (100 \text{ m}) \sqrt{1 - v^2/c^2} \\ &= (100 \text{ m}) \sqrt{1 - (0,20)^2} \\ &= 98,0 \text{ m}. \end{aligned}$$

Observe que la transformación de Lorentz dio la ecuación de contracción de longitud de la calle.

## EJEMPLO 5.8

### Transformación de Lorentz y simultaneidad

El observador que aparece en la [Figura 5.14](#), de pie junto a las vías del tren, ve cómo las dos bombillas parpadean simultáneamente en ambos extremos del vagón de pasajeros de 26 m de longitud cuando el centro del vagón pasa junto a él a una velocidad de  $c/2$ . Encuentre la separación en el tiempo entre el momento en que las bombillas parpadean, vistas por el pasajero del tren sentado en el centro del vagón.



**FIGURA 5.14** Una persona que ve pasar un tren observa que dos bombillas parpadean simultáneamente en los extremos opuestos de un vagón de pasajeros. Hay otro pasajero dentro del vagón que observa los mismos destellos pero desde una perspectiva diferente.

#### Solución

- Identifique el aspecto conocido:  $\Delta t = 0$ .  
Observe que la separación espacial de los dos eventos es entre las dos lámparas, y no la distancia de la lámpara al pasajero.
- Identifique la incógnita:  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ .  
Una vez más, tenga en cuenta que el intervalo de tiempo es entre los parpadeos de las lámparas, no entre los tiempos de llegada para alcanzar al pasajero.
- Exprese la respuesta en forma de una ecuación:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + v\Delta x'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

- d. Haga el cálculo:

$$0 = \frac{\Delta t' + \frac{c}{2}(26 \text{ m})/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\Delta t' = -\frac{26 \text{ m/s}}{2c} = -\frac{26 \text{ m/s}}{2(3,00 \times 10^8 \text{ m/s})}$$

$$\Delta t' = -4,33 \times 10^{-8} \text{ s.}$$

### Importancia

El signo indica que el evento con la  $x_2'$ , más grande, es decir el destello de la derecha, se ve que ocurre primero en el marco  $S'$  como se ha encontrado anteriormente para este ejemplo, de modo que  $t_2 < t_1$ .

### Espacio-tiempo

Los fenómenos relativistas pueden analizarse en términos de eventos en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones. Cuando fenómenos como la paradoja de los gemelos, la dilatación del tiempo, la contracción de la longitud y la dependencia de la simultaneidad del movimiento relativo se consideran de esta manera, se ven como características de la naturaleza del espacio y del tiempo, más que como aspectos específicos del electromagnetismo.

En el espacio tridimensional, las posiciones se especifican mediante tres coordenadas en un conjunto de ejes cartesianos, y el desplazamiento de un punto respecto a otro está dado por:

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

La distancia  $\Delta r$  entre los puntos es

$$\Delta r^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2.$$

La distancia  $\Delta r$  es invariante bajo una rotación de ejes. Si se utiliza un nuevo conjunto de ejes cartesianos en rotación alrededor del origen en relación con los ejes originales, cada punto del espacio tendrá nuevas coordenadas en términos de los nuevos ejes, pero la distancia  $\Delta r'$  dada por

$$\Delta r'^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2.$$

Esto tiene el mismo valor que  $\Delta r^2$  tenía. Algo similar ocurre con la transformación de Lorentz en el espacio-tiempo.

Defina la separación entre dos eventos, cada uno dado por un conjunto de  $x, y, z$ , y  $ct$  a lo largo de un sistema cartesiano de ejes en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones, como

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta z, c\Delta t) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, c(t_2 - t_1)).$$

Defina también el intervalo espacio-tiempo  $\Delta s$  entre los dos eventos como

$$\Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2.$$

Si los dos eventos tienen el mismo valor de  $ct$  en el marco de referencia considerado,  $\Delta s$  correspondería a la distancia  $\Delta r$  entre puntos en el espacio.

La trayectoria de una partícula a través del espacio-tiempo consiste en los eventos  $(x, y, z, ct)$  que especifican una ubicación en cada momento de su movimiento. La trayectoria a través del espacio-tiempo se denomina **línea de universo** de la partícula. La línea de universo de una partícula que permanece en reposo en el mismo lugar es una línea recta paralela al eje del tiempo. Si la partícula se mueve a velocidad constante paralela al eje de la  $x$ , su línea de universo sería una línea inclinada  $x = vt$ , correspondiente a un gráfico simple de desplazamiento frente al tiempo. Si la partícula se acelera, su línea de universo se curva. El incremento de  $s$  a lo largo de la línea de universo de la partícula está dado en forma diferencial como

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2(dt)^2.$$

Al igual que la distancia  $\Delta r$  es invariante bajo la rotación de los ejes espaciales, el intervalo espacio-tiempo:

$$\Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2.$$

es invariante bajo la transformación de Lorentz. Esto se desprende de los postulados de la relatividad, y puede verse también sustituyendo las anteriores ecuaciones de la transformación de Lorentz por la expresión del intervalo espacio-tiempo:

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2 \\ &= \left( \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right)^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - \left( c \frac{\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right)^2 \\ &= (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - (c\Delta t')^2 \\ &= \Delta s'^2.\end{aligned}$$

Además, la transformación de Lorentz cambia las coordenadas de un evento en el tiempo y el espacio de forma similar a como una rotación tridimensional cambia las coordenadas antiguas en coordenadas nuevas:

<b>Transformación de Lorentz</b>	<b>Rotación del – eje alrededor del <i>eje de laz</i></b>
( $x, t$ coordenadas):	( $x, y$ coordenadas):
$x' = (\gamma)x + (-\beta\gamma)ct$	$x' = (\cos \theta)x + (\sin \theta)y$
$ct' = (-\beta\gamma)x + (\gamma)ct$	$y' = (-\sin \theta)x + (\cos \theta)y$

donde  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ;  $\beta = v/c$ .

Las transformaciones de Lorentz pueden considerarse generalizaciones de las rotaciones espaciales al espacio-tiempo. Sin embargo, hay algunas diferencias entre una rotación de eje tridimensional y una transformación de Lorentz que involucre el eje del tiempo, debido a las diferencias en cómo la métrica, o regla para medir los desplazamientos  $\Delta r$  y  $\Delta s$ , difieren. Aunque  $\Delta r$  es invariante bajo rotaciones espaciales y  $\Delta s$  es invariante también bajo la transformación de Lorentz, la transformación de Lorentz que involucra el eje del tiempo no preserva algunas características, como que los ejes permanezcan perpendiculares o que la escala de longitud a lo largo de cada eje sea la misma.

Tenga en cuenta que la cantidad  $\Delta s^2$  puede tener cualquiera de los dos signos, dependiendo de las coordenadas de los eventos espacio-temporales involucrados. Para los pares de eventos que le dan un signo negativo, es útil definir  $c^2 \Delta \tau^2$  como  $-\Delta s^2$ . La importancia de  $c^2 \Delta \tau$  tal y como se acaba de definir se deduce al observar que en un marco de referencia en el que los dos eventos ocurren en el mismo lugar, tenemos  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$  y por tanto (a partir de la ecuación de  $\Delta s^2 = -c^2 \Delta \tau^2$ ):

$$c^2 \Delta \tau^2 = -\Delta s^2 = (c^2 \Delta t)^2.$$

Por lo tanto,  $c^2 \Delta \tau$  es el intervalo de tiempo  $c^2 \Delta t$  en el marco de referencia en el que ambos eventos ocurren en el mismo lugar. Es el mismo intervalo de tiempo propio que se ha comentado anteriormente. También se deduce de la relación entre  $\Delta s$  y que  $c^2 \Delta \tau$  porque ya que  $\Delta s$  es invariante de Lorentz, el tiempo propio también lo es. Todos los observadores en todos los marcos inerciales coinciden en los intervalos de tiempo propio entre los mismos dos eventos.

### **COMPRUEBE LO APRENDIDO 5.5**

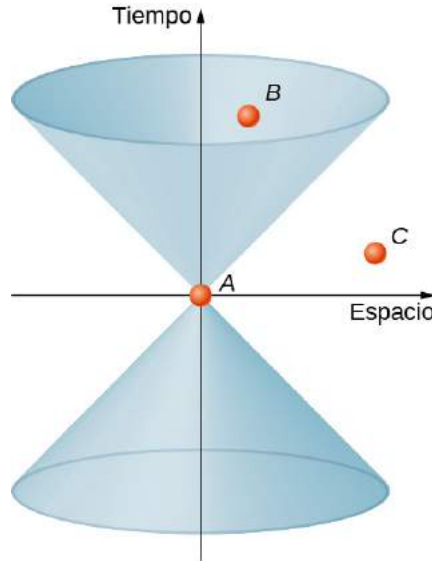
Demuestre que si un incremento de tiempo  $dt$  transcurre para un observador que ve la partícula moviéndose con velocidad  $v$ , el mismo corresponde a un incremento de tiempo propio de la partícula de  $d\tau = \gamma dt$ .

#### El cono de luz

Podemos hacer frente a la dificultad de visualizar y dibujar gráficos en cuatro dimensiones al imaginar que las tres coordenadas espaciales están representadas colectivamente por un eje horizontal, y que el eje vertical es el eje  $ct$ . Comenzando con un evento particular en el espacio-tiempo como el origen del gráfico del espacio-tiempo mostrado, la línea de universo de una partícula que permanece en reposo en la ubicación inicial del evento en el origen es entonces el eje del tiempo. Cualquier plano que pase por el eje temporal paralelo hacia

los ejes espaciales contiene todos los sucesos que son simultáneos entre sí y con la intersección del plano y el eje temporal, vistos en el marco de reposo del suceso en el origen.

Resulta útil imaginar un cono de luz en el gráfico, formado por las líneas de universo de todos los haces de luz que pasan por el evento de origen  $A$ , como se muestra en la [Figura 5.15](#). El cono de luz, según los postulados de la relatividad, tiene lados en un ángulo de  $45^\circ$  si el eje del tiempo se mide en unidades de  $ct$ , y, según los postulados de la relatividad, el cono de luz sigue siendo el mismo en todos los marcos inerciales. Dado que el suceso  $A$  es arbitrario, cada punto del diagrama espacio-tiempo tiene asociado un cono de luz.



**FIGURA 5.15** El cono de luz está formado por todas las líneas de universo seguidas por la luz del evento  $A$  en el vértice del cono.

Consideremos ahora la línea de universo de una partícula a través del espacio-tiempo. Cualquier línea de universo fuera del cono, como la que pasa de  $A$  a  $C$ , implicaría velocidades superiores a  $c$ , y por tanto no sería posible. Se dice que los sucesos como  $C$  que se encuentran fuera del cono de luz tienen una separación espacial del suceso  $A$ . Se caracterizan en una dimensión por:

$$\Delta s_{AC}^2 = (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 - (c\Delta t)^2 > 0.$$

Un evento como  $B$  que se encuentra en el cono superior es alcanzable sin superar la velocidad de la luz en el vacío, y se caracteriza en una dimensión por

$$\Delta s_{AB}^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 - (c\Delta t)^2 < 0.$$

Se dice que el suceso tiene una separación temporal con respecto a  $A$ . Los sucesos temporales que caen en la mitad superior del cono de luz ocurren en valores mayores de  $t$  que el tiempo del suceso  $A$  en el vértice y están en el futuro con respecto a  $A$ . Los sucesos que tienen una separación temporal con respecto a  $A$  y caen en la mitad inferior del cono de luz están en el pasado y pueden afectar al suceso en el origen. La región que queda fuera del cono de luz no está marcada como pasado ni futuro, sino como "otra parte".

Para cualquier suceso que tenga una separación espacial del suceso en el origen, es posible elegir un eje temporal que haga que los dos sucesos ocurran al mismo tiempo, de modo que los dos sucesos sean simultáneos en algún marco de referencia. Por lo tanto, cuál de los sucesos con separación espacial es anterior al otro en el tiempo también depende del marco de referencia del observador. Dado que las separaciones espaciales solo pueden atravesarse superando la velocidad de la luz, esta violación de qué evento puede causar el otro proporciona otro argumento de por qué las partículas no pueden viajar más rápido que la velocidad de la luz, así como material potencial para la ciencia ficción sobre viajes en el tiempo. Del mismo modo, para cualquier evento con una separación similar al tiempo del evento en el origen, se puede encontrar un marco de referencia que hará que los eventos ocurran en el mismo lugar. Dado que las relaciones

$$\Delta s_{AC}^2 = (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 - (c\Delta t)^2 > 0$$

y

$$\Delta s_{AB}^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 - (c\Delta t)^2 < 0.$$

son invariantes de Lorentz, si dos sucesos son similares en tiempo y se puede hacer que ocurran en el mismo lugar o en espacios similares y puede hacerse que ocurran en el mismo tiempo es lo mismo para todos los observadores. Todos los observadores en diferentes marcos de referencia inerciales están de acuerdo en si dos eventos tienen una separación similar en el tiempo o en el espacio.

### La paradoja de los gemelos vista en el espacio-tiempo

La paradoja de los gemelos de la que hablamos anteriormente implica que un astronauta gemelo viaja a una velocidad cercana a la de la luz a un sistema estelar lejano y regresa a la Tierra. Debido a la dilatación del tiempo, se prevé que el gemelo espacial envejezca mucho menos que el gemelo terrestre. Esto parece paradójico, ya que a primera vista cabría esperar que el movimiento relativo fuera simétrico e ingenuamente se podría argumentar que el gemelo terrestre debería envejecer menos.

Para analizar esto en términos de un diagrama espacio-temporal, supongamos que el origen de los ejes utilizados está fijado en la Tierra. La línea de universo del gemelo terrestre está entonces a lo largo del eje del tiempo.

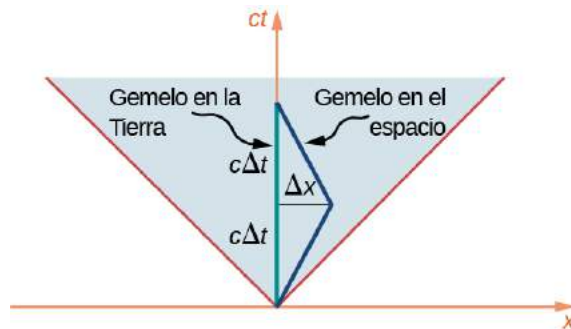
La línea de universo del astronauta gemelo, que viaja a la estrella lejana y luego regresa, debe desviarse de una trayectoria en línea recta para permitir el viaje de vuelta. Como se ve en la [Figura 5.16](#), las circunstancias de los dos gemelos no son en absoluto simétricas. Sus trayectorias en el espacio-tiempo tienen una longitud manifiestamente diferente. Específicamente, la línea de universo del gemelo terrestre tiene una longitud  $2c\Delta t$ , que luego da el tiempo propio que transcurre para el gemelo terrestre como  $2\Delta t$ . La distancia al sistema estelar distante es  $\Delta x = v\Delta t$ . El tiempo propio que transcurre para el gemelo espacial es  $2\Delta\tau$  donde

$$c^2 \Delta\tau^2 = -\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2.$$

Esto es considerablemente más corto que el tiempo propio para el gemelo terrestre por la relación

$$\begin{aligned} \frac{c\Delta\tau}{c\Delta t} &= \sqrt{\frac{(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2}{(c\Delta t)^2}} = \sqrt{\frac{(c\Delta t)^2 - (v\Delta t)^2}{(c\Delta t)^2}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma}. \end{aligned}$$

consistente con la fórmula de dilatación del tiempo. Por lo tanto, la paradoja de los gemelos se ve que no es una paradoja en absoluto. La situación de los dos gemelos no es simétrica en el diagrama espacio-temporal. La única sorpresa es quizás que el camino aparentemente más largo en el diagrama espacio-tiempo corresponde al intervalo de tiempo propio más pequeño, debido a cómo  $\Delta\tau$  y  $\Delta s$  dependen de  $\Delta x$  y  $\Delta t$ .



**FIGURA 5.16** El gemelo espacial y el gemelo terrestre, en el ejemplo de la paradoja de los gemelos, siguen líneas de universo de diferente longitud a través del espacio-tiempo.

### Transformaciones de Lorentz en el espacio-tiempo

Ya hemos observado cómo la transformación de Lorentz deja

$$\Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2$$

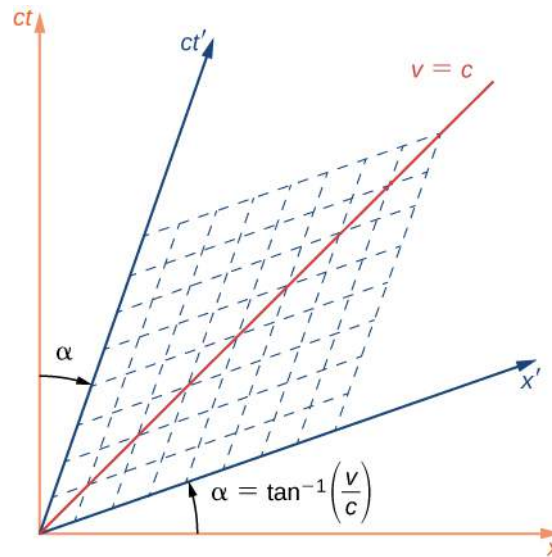
sin cambios y corresponde a una rotación de ejes en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones. Si los marcos de  $S$  y  $S'$  están en movimiento relativo a lo largo de su dirección de la  $x$  compartida, los ejes de espacio y tiempo de  $S'$  están en rotación en un ángulo  $\alpha$  visto desde  $S$ , de la forma que se muestra en la [Figura 5.17](#), donde:

$$\tan\alpha = \frac{v}{c} = \beta.$$

Esto difiere de una rotación en el sentido tridimensional habitual, en la medida en que los dos ejes espacio-temporales están en rotación uno hacia el otro simétricamente en forma de tijera, como se muestra. La rotación de los ejes del tiempo y del espacio se realiza con el mismo ángulo. La malla de líneas discontinuas paralelas a los dos ejes muestra cómo se leerían las coordenadas de un evento a lo largo de los ejes primos. Esto se haría siguiendo una línea paralela a la  $x'$  y una paralela al eje  $t'$ , como muestran las líneas discontinuas. La escala de longitud de ambos ejes se cambia por:

$$ct' = ct \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}}; \quad x' = x \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}}.$$

La línea marcada como " $v = c$ " a  $45^\circ$  del eje de la  $x$  corresponde al borde del cono de luz, y no se ve afectada por la transformación de Lorentz, de acuerdo con el segundo postulado de la relatividad. La línea " $v = c$ ", y el cono de luz que representa, son los mismos tanto para el marco de referencia de la  $S$  como para el de la  $S'$ .



**FIGURA 5.17** La transformación de Lorentz da lugar a nuevos ejes espaciales y temporales en rotación en forma de tijera con respecto a los ejes originales.

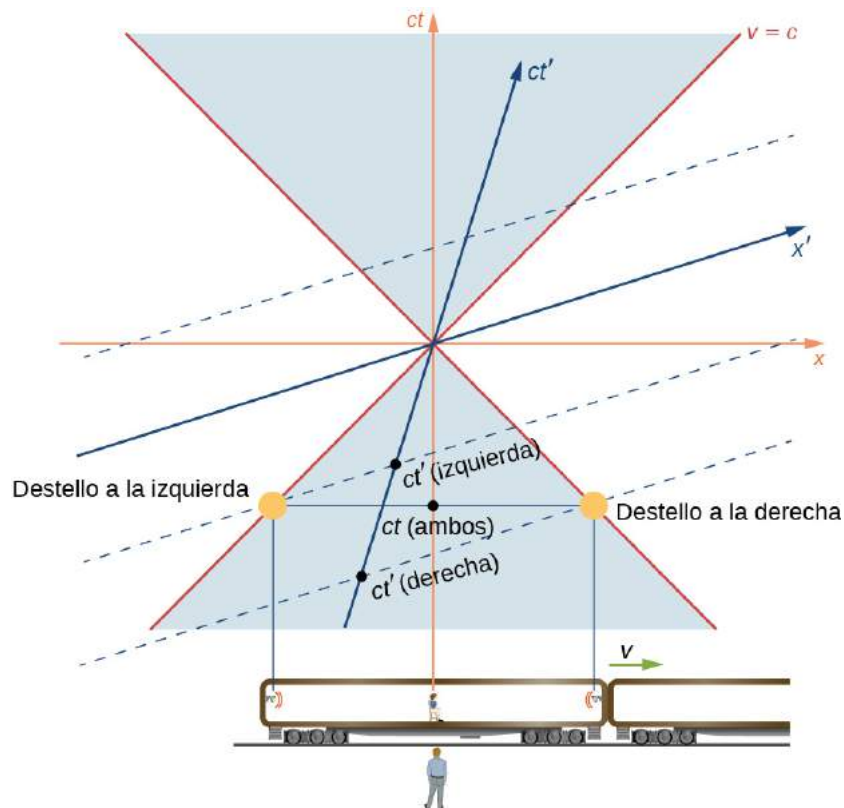
### Simultaneidad

La simultaneidad de los acontecimientos en lugares separados depende del marco de referencia utilizado para describirlos, tal y como se desprende de la "rotación" en forma de tijera a las nuevas coordenadas temporales y espaciales descritas. Si dos sucesos tienen los mismos valores de  $t$  en el marco de referencia no iprimo, no es necesario que tengan los mismos valores medidos a lo largo del eje  $ct'$ , y por tanto, no serían simultáneos en el marco primo.

Como ejemplo concreto, consideremos el tren que va casi a la velocidad de la luz en el que las luces de destello de los dos extremos del vagón han parpadeado simultáneamente en el marco de referencia de un observador en el suelo. El gráfico espacio-tiempo se muestra en la [Figura 5.18](#). Los destellos de las dos lámparas están representados por los puntos marcados como "Lámpara de destello izquierda" y "Lámpara de destello derecha" que se encuentran en el cono de luz en el pasado. La línea de universo de ambos pulsos viaja a lo largo del borde del cono de luz para llegar al observador en el suelo simultáneamente. Su llegada es el



acontecimiento en el origen. Por lo tanto, tuvieron que emitirse simultáneamente en el marco no primo, como se representa en el punto marcado como  $t(\text{ambos})$ . Pero el tiempo se mide a lo largo del eje  $ct'$  en el marco de referencia del observador sentado en el centro del vagón. Así que en su marco de referencia, el evento de emisión de las bombillas marcadas como  $t'$  (izquierda) y  $t'$  (derecha) no fueron simultáneos.



**FIGURA 5.18** El ejemplo del tren revisado. Los destellos se producen en el mismo momento  $t(\text{ambos})$  a lo largo del eje temporal del observador del suelo, pero en momentos diferentes, a lo largo del eje temporal  $t'$  del pasajero.

En términos del diagrama espacio-tiempo, los dos observadores están simplemente usando diferentes ejes de tiempo para los mismos eventos porque están en marcos inerciales diferentes, y las conclusiones de ambos observadores son igualmente válidas. Como sugiere el análisis en términos de los diagramas espacio-tiempo, la propiedad de cómo la simultaneidad de los eventos depende del marco de referencia es un resultado de las propiedades del espacio y el tiempo en sí, más que de algo específicamente relacionado con el electromagnetismo.

## 5.6 Transformación relativista de la velocidad

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Derivar las ecuaciones consistentes con la relatividad especial para transformar las velocidades en un marco de referencia inercial a otro.
- Aplicar las ecuaciones de transformación de la velocidad a los objetos que se mueven a velocidades relativistas.
- Examinar cómo las velocidades combinadas predichas por las ecuaciones de transformación relativista se comparan con las esperadas de manera clásica.

Mantenerse en su sitio dentro de un kayak en un río rápido requiere un esfuerzo. La corriente del río arrastra el kayak. Tratar de remar contra la corriente puede hacer que el kayak se mueva río arriba en relación con el agua, pero eso solo explica parte de su velocidad en relación con la orilla. El movimiento del kayak es un ejemplo de cómo las velocidades en la mecánica de Newton se combinan por suma de vectores. La velocidad del kayak es la suma vectorial de su velocidad con respecto al agua y la velocidad del agua con respecto a la

orilla. Sin embargo, la suma relativista de velocidades es muy diferente.

### Transformaciones de velocidad

Imagine un auto viajando de noche por una carretera recta, como en la [Figura 5.19](#). El conductor ve la luz que sale de los faros a una velocidad  $c$  dentro del marco de referencia del auto. Si la transformación galileana se aplicara a la luz, entonces la luz de los faros del auto se acercaría al peatón a una velocidad  $u = v + c$ , lo contrario a los postulados de Einstein.



**FIGURA 5.19** Según los resultados experimentales y el segundo postulado de la relatividad, la luz de los faros del auto se aleja de este a una velocidad  $c$  y se acerca al observador en la acera a una velocidad  $c$ .

Tanto la distancia recorrida como el tiempo de viaje son diferentes en los dos marcos de referencia, y deben diferir de forma que la velocidad de la luz sea la misma en todos los marcos inerciales. Las reglas correctas para transformar las velocidades de un marco a otro pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de transformación de Lorentz.

### Transformación relativista de la velocidad

Supongamos que un objeto  $P$  se mueve a velocidad constante  $\mathbf{u} = (u'_x, u'_y, u'_z)$  medida en el marco  $S'$ . El marco  $S'$  se mueve a lo largo de su eje de la  $x'$  a una velocidad  $v$ . En un incremento de tiempo  $dt'$ , la partícula es desplazada por  $dx'$  a lo largo del eje de la  $x'$ . Aplicando las ecuaciones de transformación de Lorentz se obtienen los correspondientes incrementos de tiempo y desplazamiento en los ejes no primos:

$$\begin{aligned} dt &= \gamma (dt' + v dx' / c^2) \\ dx &= \gamma (dx' + v dt') \\ dy &= dy' \\ dz &= dz'. \end{aligned}$$

Los componentes de la velocidad de la partícula vista en el sistema no primo de coordenadas son entonces

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + vdt')}{\gamma(dt' + vdx'/c^2)} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma(dt' + vdx'/c^2)} = \frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}\right)}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\gamma(dt' + vdx'/c^2)} = \frac{\frac{dz'}{dt'}}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}\right)}.$$

Obtenemos así las ecuaciones de los componentes de la velocidad del objeto según lo visto en el marco  $S$ :

$$u_x = \left( \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2} \right), \quad u_y = \left( \frac{u'_y / \gamma}{1 + vu'_x/c^2} \right), \quad u_z = \left( \frac{u'_z / \gamma}{1 + vu'_x/c^2} \right).$$

Compare esto con la forma en que la transformación galileana de la mecánica clásica dice que las velocidades se transforman, sumando simplemente como vectores:

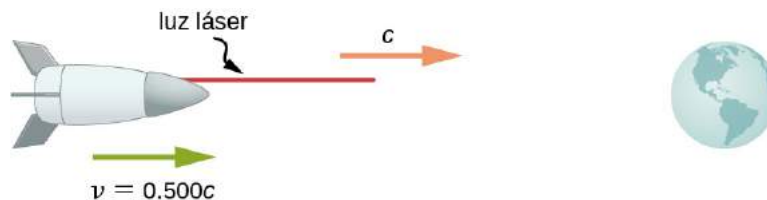
$$u_x = u'_x + v, \quad u_y = u'_y, \quad u_z = u'_z.$$

Cuando la velocidad relativa de los marcos es mucho menor que la velocidad de la luz, es decir, cuando  $v \ll c$ , la ley de adición de velocidades de la relatividad especial se reduce a la ley de velocidad galileana. Cuando la velocidad  $v$  de  $S'$  respecto a  $S$  es comparable a la velocidad de la luz, la ley de **suma de velocidades relativistas** da un resultado mucho menor que el de la **suma de la velocidad clásica (galileana)**.

### EJEMPLO 5.9

#### Ecuaciones de transformación de la velocidad para la luz

Supongamos que una nave espacial que se dirige directamente a la Tierra a la mitad de la velocidad de la luz nos envía una señal en un haz de luz producido por un láser (Figura 5.20). Dado que la luz sale de la nave con una velocidad  $c$  observada desde la nave, calcule la velocidad con la que se acerca a la Tierra.



**FIGURA 5.20** ¿A qué velocidad se acerca una señal luminosa a la Tierra si se envía desde una nave espacial que viaja a  $0,500c$ ?

#### Estrategia

Como la luz y la nave espacial se mueven a velocidades relativistas, no podemos utilizar la simple adición de velocidades. En su lugar, determinamos la velocidad a la que la luz se acerca a la Tierra utilizando la adición de la velocidad relativista.

#### Solución

- Identifique los aspectos conocidos:  $v = 0,500c$ ;  $u' = c$ .
- Identifique la incógnita:  $u$ .
- Expresa la respuesta en forma de una ecuación:  $u = \frac{v+u'}{1 + \frac{vu'}{c^2}}$ .
- Haga el cálculo:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{v+u'}{1+\frac{vu'}{c^2}} \\
 &= \frac{0,500c+c}{1+\frac{(0,500c)(c)}{c^2}} \\
 &= \frac{(0,500+1)c}{\left(\frac{c^2+0,500c^2}{c^2}\right)} \\
 &= c.
 \end{aligned}$$

### Importancia

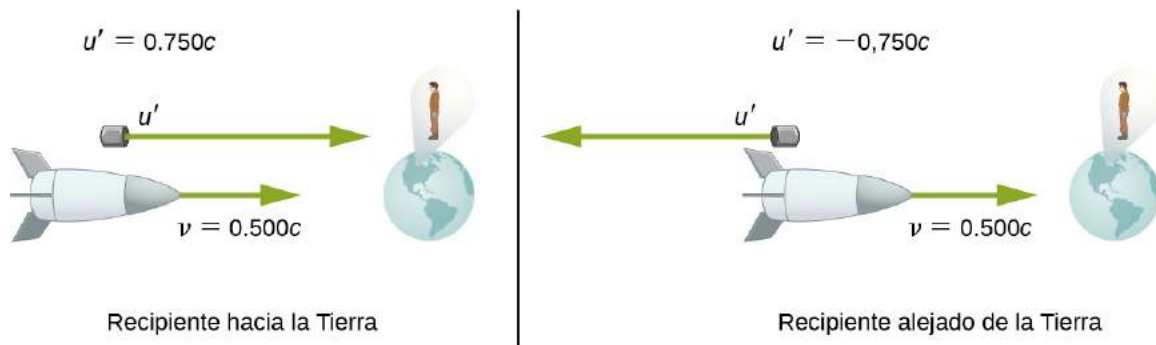
La suma de velocidades relativistas da el resultado correcto. La luz sale de la nave a velocidad  $c$  y se acerca a la Tierra a velocidad  $c$ . La velocidad de la luz es independiente del movimiento relativo de la fuente y el observador, tanto si el observador está en la nave como si está en tierra.

Las velocidades no pueden sumar más que la velocidad de la luz, siempre que  $v$  sea menor que  $c$  y  $u'$  no supere a  $c$ . El siguiente ejemplo ilustra que la adición de la velocidad relativista no es tan simétrica como la suma de velocidades relativistas.

### EJEMPLO 5.10

#### Envío de paquete relativista

Supongamos que la nave espacial del ejemplo anterior se acerca a la Tierra a la mitad de la velocidad de la luz y dispara un bote a una velocidad de  $0,750c$  (Figura 5.21). (a) ¿A qué velocidad ve un observador terrestre el bote si se dispara directamente hacia la Tierra? (b) ¿Si se dispara directamente en dirección contraria a la Tierra?



**FIGURA 5.21** Se dispara un bote a  $0,750c$  hacia la Tierra o alejándose de ella.

#### Estrategia

Dado que el bote y la nave espacial se mueven a velocidades relativistas, debemos determinar la velocidad del bote según un observador terrestre utilizando la suma de velocidades relativistas en lugar de la simple suma de velocidades.

#### Solución para (a)

- Identifique los aspectos conocidos:  $v = 0,500c$ ;  $u' = 0,750c$ .
- Identifique la incógnita:  $u$ .
- Expresa la respuesta en forma de una ecuación:  $u = \frac{v+u'}{1+\frac{vu'}{c^2}}$ .
- Haga el cálculo:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{v+u'}{1+\frac{vu'}{c^2}} \\
 &= \frac{0,500c+0,750c}{1+\frac{(0,500c)(0,750c)}{c^2}} \\
 &= 0,909c.
 \end{aligned}$$

**Solución para (b)**

- Identifique los aspectos conocidos:  $v = 0,500c$ ;  $u' = -0,750c$ .
- Identifique la incógnita:  $u$ .
- Expresé la respuesta en forma de una ecuación:  $u = \frac{v+u'}{1+\frac{vu'}{c^2}}$ .
- Haga el cálculo:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{v+u'}{1+\frac{vu'}{c^2}} \\
 &= \frac{0,500c+(-0,750c)}{1+\frac{(0,500c)(-0,750c)}{c^2}} \\
 &= -0,400c.
 \end{aligned}$$

**Importancia**

El signo menos indica una velocidad de alejamiento de la Tierra (en la dirección opuesta a  $v$ ), lo que significa que el bote se dirige hacia la Tierra en la parte (a) y se aleja en la parte (b), como era de esperar. Pero las velocidades relativistas no se suman tan sencillamente como lo hacen de la forma clásica. En la parte (a), el bote sí se acerca más rápido a la Tierra, pero a una velocidad inferior a la suma vectorial de las velocidades, que daría  $1,250c$ . En la parte (b), el bote se aleja de la Tierra a una velocidad de  $-0,400c$ , que es *más rápido* que  $-0,250c$  esperado clásicamente. Las diferencias de velocidad ni siquiera son simétricas: En la parte (a), un observador en la Tierra ve que el bote y la nave se separan a una velocidad de  $0,409c$ , y a una velocidad de  $0,900c$  en la parte (b).

### COMPRUEBE LO APRENDIDO 5.6

Las distancias a lo largo de una dirección perpendicular al movimiento relativo de los dos fotogramas son las mismas en ambos fotogramas. ¿Por qué entonces las velocidades perpendiculares a la dirección de la  $x$  son diferentes en los dos fotogramas?

## 5.7 Efecto Doppler para la luz

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

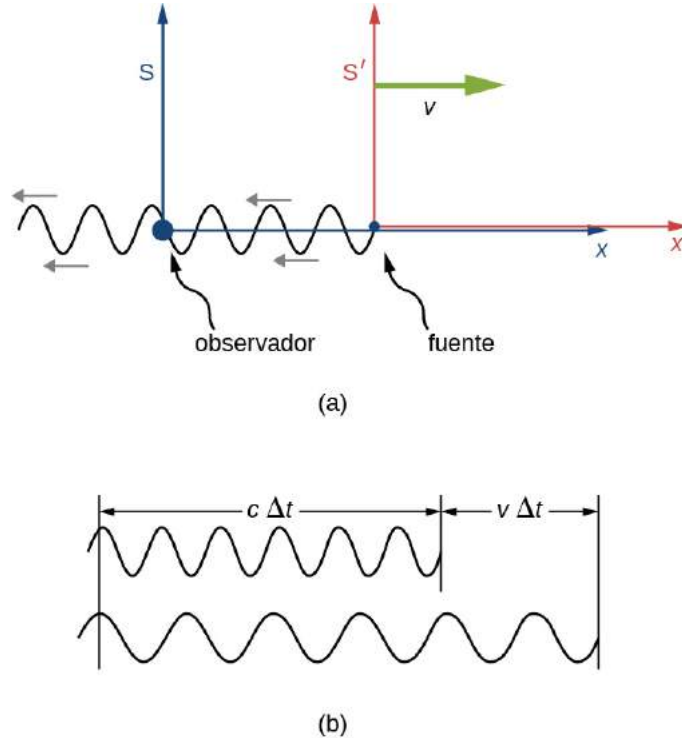
Al final de esta sección, podrá:

- Explicar el origen del desplazamiento de la frecuencia y de la longitud de onda observada cuando el observador y la fuente se acercan o alejan el uno del otro.
- Deducir una expresión para el corrimiento Doppler relativista.
- Aplicar las ecuaciones del corrimiento Doppler en ejemplos del mundo real.

Como se ha comentado en el capítulo sobre el sonido, si una fuente de sonido y un oyente se alejan, el oyente encuentra menos ciclos de una onda en cada segundo, y por lo tanto una frecuencia más baja, que si su separación permanece constante. Por la misma razón, el oyente detecta una frecuencia más alta si la fuente y el oyente se acercan. El corrimiento Doppler resultante en la frecuencia detectada se produce para cualquier forma de onda. Sin embargo, en el caso de las ondas sonoras, las ecuaciones del corrimiento Doppler difieren notablemente en función de si es la fuente, el observador o el aire, lo que se mueve. La luz no necesita ningún medio, y el corrimiento Doppler de la luz que viaja en el vacío solo depende de la velocidad relativa del observador y de la fuente.

## El efecto Doppler relativista

Supongamos que un observador en  $S$  ve la luz de una fuente en  $S'$  alejándose a una velocidad  $v$  (Figura 5.22). La longitud de onda de la luz podría medirse en  $S'$ , por ejemplo, utilizando un espejo para establecer ondas estacionarias y midiendo la distancia entre los nodos. Estas distancias son longitudes adecuadas con  $S'$  como su marco de reposo, y cambian por un factor  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  cuando se mide en el marco  $S$  del observador, donde la regla que mide la longitud de onda en  $S'$  se ve en movimiento.



**FIGURA 5.22** (a) Cuando una fuente fija emite una onda luminosa en el marco inercial móvil  $S'$ , el observador en  $S$  ve la longitud de onda medida en  $S'$ , como más corta por un factor de  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . (b) Como el observador ve que la fuente se aleja dentro de  $S$ , el patrón de onda que llega al observador en  $S$  también se estira por el factor  $(c\Delta t + v\Delta t)/(c\Delta t) = 1 + v/c$ .

Si la fuente estuviera estacionaria en  $S$ , el observador vería una longitud  $c\Delta t$  del patrón de ondas en el tiempo  $\Delta t$ . Pero debido al movimiento de  $S'$  con respecto a  $S$ , considerado únicamente dentro de  $S$ , el observador ve el patrón de onda, y por tanto la longitud de onda, estirada por un factor de

$$\frac{c\Delta t_{\text{período}} + v\Delta t_{\text{período}}}{c\Delta t_{\text{período}}} = 1 + \frac{v}{c}$$

como se ilustra en (b) de la Figura 5.22. El aumento global de ambos efectos da

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{src}} \left(1 + \frac{v}{c}\right) \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \lambda_{\text{src}} \left(1 + \frac{v}{c}\right) \sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{v}{c}\right)}} = \lambda_{\text{src}} \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{v}{c}\right)}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)}}$$

donde  $\lambda_{\text{src}}$  es la longitud de onda de la luz vista por la fuente en  $S'$  y  $\lambda_{\text{obs}}$  es la longitud de onda que el observador detecta dentro de  $S$ .

## Corrimientos hacia el rojo y el azul

La longitud de onda observada  $\lambda_{\text{obs}}$  de la radiación electromagnética es más larga (lo que se denomina "corrimiento al rojo") que la emitida por la fuente cuando ésta se aleja del observador. Del mismo modo, la longitud de onda es más corta (lo que se denomina "corrimiento al azul") cuando la fuente se mueve hacia el observador. La cantidad del cambio se determina por

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_s \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

donde  $\lambda_s$  es la longitud de onda en el marco de referencia de la fuente, y  $v$  es la velocidad relativa de los dos marcos  $S$  y  $S'$ . La velocidad  $v$  es positiva para el movimiento de alejamiento de un observador y negativa para el movimiento hacia un observador. En términos de la frecuencia de la fuente y la frecuencia observada, esta ecuación puede escribirse como

$$f_{\text{obs}} = f_s \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$$

Observe que los signos son diferentes a los de la ecuación de la longitud de onda.



### EJEMPLO 5.11

#### Calcular un corrimiento Doppler

Supongamos que una galaxia se aleja de la Tierra a una velocidad de  $0,825c$ . Emite ondas de radio con una longitud de onda de  $0,525$  m. ¿Qué longitud de onda detectaríamos en la Tierra?

#### Estrategia

Como la galaxia se mueve a una velocidad relativista, debemos determinar el corrimiento Doppler de las ondas de radio utilizando el corrimiento Doppler relativista en lugar del corrimiento Doppler clásico.

#### Solución

- Identifique los aspectos conocidos:  $u = 0,825c$ ;  $\lambda_s = 0,525$  m.
- Identifique la incógnita:  $\lambda_{\text{obs}}$ .
- Expresar la respuesta en forma de una ecuación:

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_s \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

- Haga el cálculo:

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{obs}} &= \lambda_s \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \\ &= (0,525 \text{ m}) \sqrt{\frac{1 + \frac{0,825c}{c}}{1 - \frac{0,825c}{c}}} \\ &= 1,70 \text{ m.} \end{aligned}$$

#### Importancia

Como la galaxia se aleja de la Tierra, esperamos que las longitudes de onda de la radiación que emite se corran al rojo. La longitud de onda que hemos calculado es de  $1,70$  m, que se corre al rojo desde la longitud de onda original de  $0,525$  m. En [Física de partículas y cosmología](#) verá que la detección de la radiación que se desplaza hacia el rojo condujo a la comprensión actual del origen y la evolución del universo.



## ✓ **COMPRUEBE LO APRENDIDO 5.7**

Supongamos que una sonda espacial se aleja de la Tierra a una velocidad de  $0,350c$ . Esta envía un mensaje de ondas de radio a la Tierra a una frecuencia de  $1,50$  GHz. ¿A qué frecuencia se recibe el mensaje en la Tierra?

El efecto Doppler relativista tiene aplicaciones que van desde la vigilancia de tormentas por radar Doppler hasta el suministro de información sobre el movimiento y la distancia de las estrellas. En los ejercicios describimos algunas de estas aplicaciones.

## 5.8 Momento relativista

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Definir el momento relativista en términos de masa y velocidad
- Demostrar cómo el momento relativista se relaciona con el momento clásico
- Demostrar cómo la conservación del momento relativista limita los objetos con masa a velocidades inferiores a  $c$

El momento es un concepto central en la física. La forma más amplia de la segunda ley de Newton se expresa en términos de momento. El momento se conserva siempre que la fuerza externa neta sobre un sistema es cero. Esto hace que la conservación del momento sea una herramienta fundamental para analizar las colisiones ([Figura 5.23](#)). Gran parte de lo que sabemos sobre la estructura subatómica procede del análisis de las colisiones de partículas relativistas producidas por aceleradores, y la conservación del momento desempeña un papel crucial en este análisis.



**FIGURA 5.23** El momento es un concepto importante para estos jugadores de fútbol de la Universidad de California en Berkeley y la Universidad de California en Davis. Un jugador con la misma velocidad pero con mayor masa colisiona con mayor impacto porque su momento es mayor. Para los objetos que se mueven a velocidades relativistas, el efecto es aún mayor.

El primer postulado de la relatividad afirma que las leyes de la física son las mismas en todos los marcos inerciales. ¿Sigue la ley de conservación del momento este requisito a altas velocidades? Se puede demostrar que el momento calculado como simplemente  $\vec{p} = m \frac{d\vec{x}}{dt}$ , aunque se conserve en un marco de referencia, puede no conservarse en otro tras aplicar la transformación de Lorentz a las velocidades. La ecuación correcta para el momento puede demostrarse, en cambio, como la expresión clásica en términos del incremento  $dt$  del tiempo propio de la partícula, observado en el marco de reposo de la partícula:

$$\begin{aligned}\vec{p} &= m \frac{d\vec{x}}{d\tau} = m \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} \\ &= m \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ &= \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \gamma m\vec{u}.\end{aligned}$$

### Momento relativista

**Momento relativista**  $\vec{p}$  es el momento clásico multiplicado por el factor relativista  $\gamma$ :

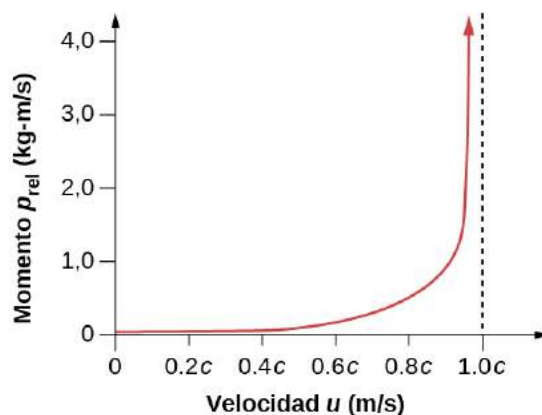
$$\vec{p} = \gamma m\vec{u} \quad 5.6$$

donde  $m$  es la **masa en reposo** del objeto,  $\vec{u}$  es su velocidad relativa a un observador, y  $\gamma$  es el factor relativista:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad 5.7$$

Observe que aquí utilizamos  $u$  para la velocidad para distinguirla de la velocidad relativa  $v$  entre observadores. El factor  $\gamma$  que se produce aquí tiene la misma forma que el factor relativista anterior  $\gamma$  excepto que ahora está en términos de la velocidad de la partícula  $u$  en lugar de la velocidad relativa  $v$  de dos marcos de referencia.

Con  $p$  expresado de esta manera, el momento total  $p_{\text{tot}}$  se conserva siempre que la fuerza externa neta sea cero, al igual que en la física clásica. De nuevo vemos que la cantidad relativista se convierte prácticamente en la misma que la cantidad clásica a bajas velocidades, donde  $u/c$  es pequeño y  $\gamma$  es casi igual a 1. El momento relativista tiene la misma función intuitiva que el momento clásico. Es mayor para grandes masas que se mueven a altas velocidades, pero debido al factor  $\gamma$ , el momento relativista se aproxima al infinito a medida que  $u$  se acerca a  $c$  (Figura 5.24). Esta es otra indicación de que un objeto con masa no puede alcanzar la velocidad de la luz. Si lo hiciera, su momento se volvería infinito, un valor irrazonable.



**FIGURA 5.24** El momento relativista se aproxima al infinito cuando la velocidad de un objeto se aproxima a la velocidad de la luz.

La definición relativista correcta del momento como  $p = \gamma mu$  a veces se considera que implica que la masa varía con la velocidad:  $m_{\text{var}} = \gamma m$ , sobre todo en los libros de texto más antiguos. Sin embargo, hay que tener en cuenta que  $m$  es la masa del objeto medida por una persona en reposo respecto al objeto. Así,  $m$  se define como la masa en reposo, que podría medirse en reposo, quizás utilizando la gravedad. Cuando una masa se mueve con respecto a un observador, la única forma de determinar su masa es mediante colisiones u otros medios que involucren el momento. Como la masa de un objeto en movimiento no puede determinarse independientemente del momento, la única masa significativa es la masa en reposo. Por lo tanto, cuando utilicemos el término "masa", supongamos que es idéntico a "masa en reposo".

El momento relativista se define de tal manera que la conservación del momento se mantiene en todos los marcos inerciales. Siempre que la fuerza externa neta sobre un sistema sea cero, el momento relativista se conserva, al igual que el momento clásico. Esto se ha comprobado en numerosos experimentos.

### ✓ **COMPRUEBE LO APRENDIDO 5.8**

¿Cuál es el momento de un electrón que viaja a una velocidad de  $0,985c$ ? La masa en reposo del electrón es  $9,11 \times 10^{-31}$  kg.

## 5.9 Energía relativista

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar cómo el teorema de trabajo-energía conduce a una expresión para la energía cinética relativista de un objeto.
- Mostrar cómo la energía relativista se relaciona con la energía cinética clásica, y establece un límite a la velocidad de cualquier objeto con masa.
- Describir cómo la energía total de una partícula está relacionada con su masa y velocidad.
- Explicar cómo se relaciona la relatividad con la equivalencia energía-masa y con algunas de las implicaciones prácticas de la equivalencia energía-masa.

El tokamak de la [Figura 5.25](#) es una forma de reactor de fusión experimental que puede transformar la masa en energía. Los reactores nucleares son la prueba de la relación entre energía y materia.

La conservación de la energía es una de las leyes más importantes de la física. La energía no solo tiene muchas formas importantes, sino que cada forma puede convertirse en cualquier otra. Sabemos que, clásicamente, la cantidad total de energía de un sistema permanece constante. Desde el punto de vista relativista, la energía sigue conservándose, pero ahora hay que tener en cuenta la equivalencia energía-masa, como por ejemplo, en las reacciones que se producen dentro de un reactor nuclear. La energía relativista se define intencionadamente para que se conserve en todos los marcos inerciales, al igual que el momento relativista. Como consecuencia, varias magnitudes fundamentales están relacionadas de formas desconocidas en la física clásica. Todas estas relaciones se han verificado mediante resultados experimentales y tienen consecuencias fundamentales. La modificación de la definición de energía contiene algunos de los nuevos conocimientos más fundamentales y espectaculares de la naturaleza en la historia reciente.



**FIGURA 5.25** El Experimento Nacional de Torus Esférico (National Spherical Torus Experiment, NSTX) es un reactor de fusión en el que los isótopos de hidrógeno se fusionan para producir helio. En este proceso, una masa relativamente pequeña de combustible se convierte en una gran cantidad de energía (crédito: Laboratorio de Física del Plasma de Princeton).

## La energía cinética y el límite de velocidad final.

El primer postulado de la relatividad afirma que las leyes de la física son las mismas en todos los marcos inerciales. Einstein demostró que la ley de conservación de la energía de una partícula es válida de manera relativista, pero con respecto a la energía expresada en términos de velocidad y masa de forma coherente con la relatividad.

Consideremos primero la expresión relativista de la energía cinética. Volvemos a utilizar  $u$  para la velocidad para distinguirla de la velocidad relativa  $v$  entre observadores. Clásicamente, la energía cinética se relaciona con la masa y la velocidad mediante la conocida expresión  $K = \frac{1}{2} mu^2$ . La expresión relativista correspondiente para la energía cinética puede obtenerse a partir del teorema de trabajo-energía. Este teorema establece que el trabajo neto de un sistema se convierte en energía cinética. En concreto, si una fuerza, expresada como  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d(\gamma\vec{u})}{dt}$ , acelera una partícula desde el reposo hasta su velocidad final, el trabajo realizado sobre la partícula debe ser igual a su energía cinética final. En forma matemática, para el movimiento unidimensional:

$$\begin{aligned} K &= \int F dx = \int m \frac{d}{dt} (\gamma u) dx \\ &= m \int \frac{d(\gamma u)}{dt} \frac{dx}{dt} dt = m \int u \frac{d}{dt} \left( \frac{u}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \right) dt. \end{aligned}$$

Integre esto por partes para obtener

$$\begin{aligned} K &= \left. \frac{mu^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \right|_{0u} - m \int \frac{u}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \frac{du}{dt} dt \\ &= \frac{mu^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} - m \int \frac{u}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} du \\ &= \left. \frac{mu^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} - mc^2 \left( \sqrt{1 - (u/c)^2} \right) \right|_0^u \\ &= \frac{mu^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} - mc^2 \\ &= mc^2 \left[ \frac{(u^2/c^2) + 1 - (u^2/c^2)}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \right] - mc^2 \\ K &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} - mc^2. \end{aligned}$$

### Energía cinética relativista

La **energía cinética relativista** de cualquier partícula de masa  $m$  es

$$K_{\text{rel}} = (\gamma - 1)mc^2.$$

5.8

Cuando un objeto está inmóvil, su velocidad es  $u = 0$  y

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 1$$

para que  $K_{\text{rel}} = 0$  en reposo, como era de esperar. Pero la expresión de la energía cinética relativista (como la

energía total y la energía en reposo) no se parece mucho a la clásica  $\frac{1}{2} mu^2$ . Para demostrar que la expresión para  $K_{\text{rel}}$  se reduce a la expresión clásica de la energía cinética a bajas velocidades, utilizamos la expansión binomial para obtener una aproximación para  $(1 + \varepsilon)^n$  válida para una pequeña  $\varepsilon$ :

$$(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\varepsilon^3 + \dots \approx 1 + n\varepsilon$$

ignorando los términos muy pequeños en  $\varepsilon^2$  y las potencias superiores de  $\varepsilon$ . Eligiendo  $\varepsilon = -u^2/c^2$  y  $n = -\frac{1}{2}$  lleva a la conclusión de que  $\gamma$  a velocidades no relativistas, donde  $\varepsilon = u/c$  es pequeña, satisface

$$\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{u^2}{c^2} \right).$$

Una expansión binomial es una forma de expresar una cantidad algebraica como la suma de una serie infinita de términos. En algunos casos, como en el límite de velocidad pequeña aquí, la mayoría de los términos son muy pequeños. Por lo tanto, la expresión derivada aquí para  $\gamma$  no es exacta, pero es una aproximación muy exacta. Por lo tanto, a baja velocidad:

$$\gamma - 1 = \frac{1}{2} \left( \frac{u^2}{c^2} \right).$$

Al introducir esto en la expresión de la energía cinética relativista se obtiene

$$K_{\text{rel}} = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{u^2}{c^2} \right) \right] mc^2 = \frac{1}{2} mu^2 = K_{\text{class}}.$$

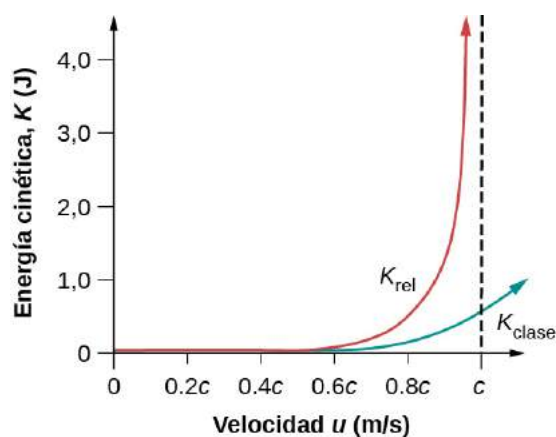
Es decir, la energía cinética relativista se convierte en la misma que la energía cinética clásica (Classic, class) cuando  $u \ll c$ .

Es aún más interesante investigar qué ocurre con la energía cinética cuando la velocidad de un objeto se acerca a la de la luz. Sabemos que  $\gamma$  se convierte en infinito a medida que  $u$  se acerca a  $c$ , por lo que  $K_{\text{rel}}$  también se vuelve infinita a medida que la velocidad se acerca a la velocidad de la luz (Figura 5.26). El aumento de  $K_{\text{rel}}$  es mucho mayor que en  $K_{\text{class}}$  a medida que  $v$  se acerca a  $c$ . Se necesita una cantidad infinita de trabajo (y, por tanto, una cantidad infinita de aporte de energía) para acelerar una masa hasta la velocidad de la luz.

### La velocidad de la luz

Ningún objeto con masa puede alcanzar la **velocidad de la luz**.

La velocidad de la luz es el límite máximo de velocidad para cualquier partícula que tenga masa. Todo esto es coherente con el hecho de que las velocidades menores que  $c$  siempre suman menos que  $c$ . Tanto la forma relativista de la energía cinética como el hecho de que la velocidad límite sea  $c$  han sido confirmados en detalle en numerosos experimentos. Por mucha energía que se ponga para acelerar una masa, su velocidad solo puede aproximarse (no alcanzar) a la de la luz.



**FIGURA 5.26** Este gráfico de  $K_{\text{rel}}$  en función de la velocidad muestra cómo la energía cinética aumenta sin límites a medida que la velocidad se acerca a la de la luz. También se muestra  $K_{\text{clase}}$ , la energía cinética clásica.

### EJEMPLO 5.12

#### Comparación de la energía cinética

Un electrón tiene una velocidad  $v = 0,990c$ . (a) Calcule la energía cinética en MeV del electrón. (b) Compárela con el valor clásico de la energía cinética a esta velocidad. (La masa de un electrón es  $9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ .)

#### Estrategia

La expresión de la energía cinética relativista es siempre correcta, pero en el caso de (a) hay que utilizarla porque la velocidad es altamente relativista (cercana a  $c$ ). En primer lugar, calculamos el factor relativista  $\gamma$ , y luego lo utilizamos para determinar la energía cinética relativista. Para (b), calculamos la energía cinética clásica (que se acercaría al valor relativista si  $v$  fuera menor que un porcentaje escaso de  $c$ ) y vemos que no es la misma.

#### Solución para (a)

Para la parte (a):

- Identifique los aspectos conocidos:  $v = 0,990c$ ;  $m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ .
- Identifique la incógnita:  $K_{\text{rel}}$ .
- Expresar la respuesta en forma de una ecuación:  $K_{\text{rel}} = (\gamma - 1)mc^2$  con  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$ .
- Haga el cálculo. Calcule primero  $\gamma$ . Mantenga dígitos adicionales porque este es un cálculo intermedio:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,990c)^2}{c^2}}} \\ &= 7,0888. \end{aligned}$$

Ahora utilice este valor para calcular la energía cinética:

$$\begin{aligned} K_{\text{rel}} &= (\gamma - 1)mc^2 \\ &= (7,0888 - 1)(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})(3,00 \times 10^8 \text{ m/s}^2) \\ &= 4,9922 \times 10^{-13} \text{ J}. \end{aligned}$$

- Convierta las unidades:

$$\begin{aligned} K_{\text{rel}} &= (4,9922 \times 10^{-13} \text{ J}) \left( \frac{1 \text{ MeV}}{1,60 \times 10^{-13} \text{ J}} \right) \\ &= 3,12 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

**Solución para (b)**

Para la parte (b):

- Enumere los aspectos conocidos:  $v = 0,990c$ ;  $m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ .
- Enumere las incógnitas:  $K_{\text{rel}}$ .
- Expresar la respuesta en forma de una ecuación:  $K_{\text{class}} = \frac{1}{2} mu^2$ .
- Haga el cálculo:

$$\begin{aligned} K_{\text{class}} &= \frac{1}{2} mu^2 \\ &= \frac{1}{2} (9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})(0,990)^2 (3,00 \times 10^8 \text{ m/s})^2 \\ &= 4,0179 \times 10^{-14} \text{ J.} \end{aligned}$$

- Convierta las unidades:

$$\begin{aligned} K_{\text{class}} &= 4,0179 \times 10^{-14} \text{ J} \left( \frac{1 \text{ MeV}}{1,60 \times 10^{-13} \text{ J}} \right) \\ &= 0,251 \text{ MeV.} \end{aligned}$$

**Importancia**

Como era de esperar, dado que la velocidad es el 99,0 % de la velocidad de la luz, la energía cinética clásica difiere significativamente del valor relativista correcto. Observe también que el valor clásico es mucho menor que el valor relativista. De hecho,  $K_{\text{rel}}/K_{\text{class}} = 12,4$  en este caso. Esto ilustra lo difícil que es conseguir que una masa se mueva cerca de la velocidad de la luz. Se necesita mucha más energía que la prevista clásicamente. Se necesitan cantidades cada vez mayores de energía para que la velocidad de una masa se acerque un poco más a la de la luz. Una energía de 3 MeV es una cantidad muy pequeña para un electrón, y se puede conseguir con los aceleradores de partículas actuales. El Centro del Acelerador Lineal de Stanford (Stanford Linear Accelerator Center, SLAC) por ejemplo, puede acelerar electrones a más de  $50 \times 10^9 \text{ eV} = 50.000 \text{ MeV}$ .

---

¿Tiene sentido que  $v$  se acerque un poco más a  $c$  que el 99,0 % o el 99,9 %? La respuesta es sí. Aprendemos mucho haciendo esto. La energía que entra en una masa de alta velocidad puede convertirse en cualquier otra forma, incluso en partículas totalmente nuevas. En el Gran Colisionador de Hadrones, en la [Figura 5.27](#), las partículas cargadas se aceleran antes de entrar en la estructura anular. Allí, dos haces de partículas se aceleran hasta su velocidad final de aproximadamente el 99,7 % de la velocidad de la luz en direcciones opuestas, y se les hace colisionar, produciendo especies de partículas totalmente nuevas. La mayor parte de lo que sabemos sobre la subestructura de la materia y el conjunto de partículas exóticas de vida corta en la naturaleza se ha aprendido de esta manera. Los patrones de las características de estas partículas, hasta ahora desconocidas, apuntan a una subestructura básica de toda la materia. Estas partículas y algunas de sus características se tratarán en un capítulo posterior sobre la física de partículas.





**FIGURA 5.27** La Organización Europea para la Investigación Nuclear (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire, CERN) opera el mayor acelerador de partículas del mundo entre las fronteras de Francia y Suiza (crédito: modificación de un trabajo de la NASA).

### Energía relativista total

La expresión de la energía cinética se puede reordenar a:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = K + mc^2.$$

Einstein argumentó en otro artículo, también publicado posteriormente en 1905, que si la energía de una partícula cambia por  $\Delta E$ , su masa cambia por  $\Delta m = \Delta E/c^2$ . Las abundantes pruebas experimentales que se han realizado desde entonces confirman que  $mc^2$  corresponde a la energía que tiene la partícula de masa  $m$  cuando está en reposo. Por ejemplo, cuando un pion neutro de masa  $m$  en reposo decae en dos fotones, los fotones tienen masa cero pero se observa que tienen una energía total correspondiente a  $mc^2$  para el pion. Del mismo modo, cuando una partícula de masa  $m$  decae en dos o más partículas con una masa total menor, la energía cinética observada impartida a los productos de la desintegración corresponde a la disminución de la masa. Así,  $E$  es la energía relativista total de la partícula, y  $mc^2$  es su energía de reposo.

#### Energía total

La **energía total**  $E$  de una partícula es

$$E = \gamma mc^2 \quad 5.9$$

donde  $m$  es la masa,  $c$  es la velocidad de la luz,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$ , y  $u$  es la velocidad de la masa respecto a un observador.

#### Energía en reposo

La **energía en reposo** de un objeto es

$$E_0 = mc^2. \quad 5.10$$

Esta es la forma correcta de la ecuación más famosa de Einstein, que por primera vez demostró que la energía está relacionada con la masa de un objeto en reposo. Por ejemplo, si se almacena energía en el objeto, su masa en reposo aumenta. Esto también implica que la masa puede ser destruida para liberar energía. Las implicaciones de estas dos primeras ecuaciones relativas a la energía relativista son tan amplias que no se reconocieron por completo hasta algunos años después de que Einstein las publicara en 1905, y la prueba experimental de que son correctas tampoco fue ampliamente reconocida al principio. Hay que señalar que Einstein comprendió y describió los significados e implicaciones de su teoría.



### EJEMPLO 5.13

#### Calcular la energía en reposo

Calcule la energía en reposo de una masa de 1,00 g.

#### Estrategia

Un gramo es una masa pequeña, menos de la mitad de la masa de un céntimo. Podemos multiplicar esta masa, en unidades del SI, por la velocidad de la luz al cuadrado para encontrar la energía en reposo equivalente.

#### Solución

- Identifique los aspectos conocidos:  $m = 1,00 \times 10^{-3} \text{ kg}$ ;  $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$ .
- Identifique la incógnita:  $E_0$ .
- Expresar la respuesta en forma de una ecuación:  $E_0 = mc^2$ .
- Haga el cálculo:

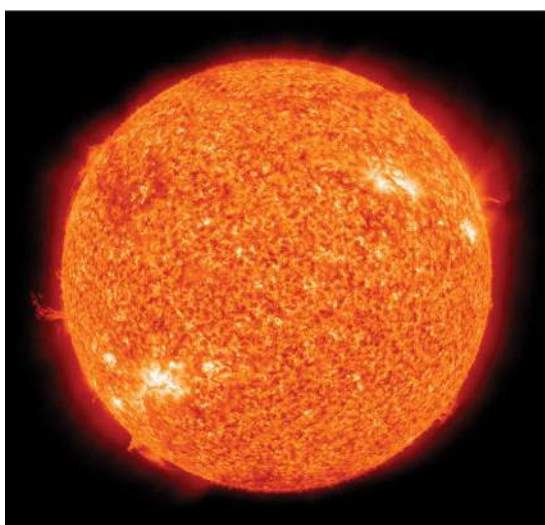
$$\begin{aligned} E_0 &= mc^2 = (1,00 \times 10^{-3} \text{ kg})(3,00 \times 10^8 \text{ m/s})^2 \\ &= 9,00 \times 10^{13} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2. \end{aligned}$$

- Convierta las unidades. Si  $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 1 \text{ J}$ , vemos que la energía en reposo es:
 
$$E_0 = 9,00 \times 10^{13} \text{ J}.$$

#### Importancia

Esta es una enorme cantidad de energía para una masa de 1,00 g. La energía en reposo es grande porque la velocidad de la luz  $c$  es un número grande y  $c^2$  es un número muy grande, por lo que  $mc^2$  es enorme para cualquier masa macroscópica. La energía de masa en reposo  $9,00 \times 10^{13} \text{ J}$  para 1,00 g es aproximadamente el doble de la energía liberada por la bomba atómica de Hiroshima y unas 10.000 veces la energía cinética de un gran portaaviones.

Hoy en día, las aplicaciones prácticas de *la conversión de masa en otra forma de energía*, como en las armas nucleares y las plantas de energía nuclear, son bien conocidas. Pero los ejemplos también existían cuando Einstein propuso por primera vez la forma correcta de la energía relativista, y describió algunos de ellos. La radiación nuclear se había descubierto en la década anterior, y había sido un misterio el origen de su energía. La explicación era que, en algunos procesos nucleares, se destruye una pequeña cantidad de masa y se libera energía que es transportada por la radiación nuclear. Pero la cantidad de masa destruida es tan pequeña que es difícil detectar que falta alguna. Aunque Einstein propuso esto como fuente de energía en las sales radiactivas que se estudiaban entonces, pasaron muchos años antes de que se reconociera ampliamente que la masa podía ser convertida, y de hecho lo es comúnmente, en energía ([Figura 5.28](#)).



(a)



(b)

**FIGURA 5.28** (a) El sol y (b) la Estación Eléctrica de Vapor de Susquehanna convierten la masa en energía: el sol a través de la fusión nuclear, y la estación eléctrica a través de la fisión nuclear. (crédito: modificación del trabajo de la NASA / Observatorio de Dinámica Solar [Solar Dynamics Observatory, SDO] (Ensamblaje de Imágenes Atmosféricas [Atmospheric Imaging Assembly, AIA])).

Debido a la relación de la energía en reposo con la masa, ahora consideramos que la masa es una forma de energía y no algo separado. Antes del trabajo de Einstein no había ni siquiera un indicio de esto. Ahora se sabe que la equivalencia energía-masa es la fuente de energía del sol, la energía del decaimiento nuclear e incluso una de las fuentes de energía que mantiene caliente el interior de la Tierra.

### Energía almacenada y energía potencial

¿Qué ocurre con la energía almacenada en un objeto en reposo, como la energía que se pone en una batería al cargarla, o la energía almacenada en el resorte comprimido de una pistola de juguete? El aporte de energía pasa a formar parte de la energía total del objeto y, por tanto, aumenta su masa en reposo. Toda la energía almacenada y potencial se convierte en masa en un sistema. En aparente contradicción, el principio de conservación de la masa (que significa que la masa total es constante) fue una de las grandes leyes verificadas por la ciencia del siglo XIX. ¿Por qué no se advirtió que era incorrecto? El siguiente ejemplo ayuda a responder a esta pregunta.



### EJEMPLO 5.14

#### Calcular la masa en reposo

La batería de un auto tiene capacidad para mover 600 amperios-hora ( $A \cdot h$ ) de carga a 12,0 V. (a) Calcule el aumento de la masa en reposo de dicha batería cuando se pasa de estar totalmente agotada a estar totalmente cargada, suponiendo que ninguno de los reactivos químicos entra o sale de la batería. (b) ¿Qué porcentaje de aumento es éste, dado que la masa de la batería es de 20,0 kg?

#### Estrategia

En la parte (a), primero debemos encontrar la energía almacenada como energía química  $E_{\text{batt}}$  en la batería, lo que equivale a la energía eléctrica que ésta puede proporcionar. Dado que  $E_{\text{batt}} = qV$ , tenemos que calcular la carga  $q$  en  $600 A \cdot h$ , que es el producto de la corriente  $I$  por el tiempo  $t$ . A continuación, multiplicamos el resultado por 12,0 V. Entonces podemos calcular el aumento de masa de la batería utilizando  $E_{\text{batt}} = (\Delta m)c^2$ . La parte (b) es una relación simple convertida en porcentaje.

**Solución para (a)**

- a. Identifique los aspectos conocidos:  $I \cdot t = 600 \text{ A} \cdot \text{h}$ ;  $V = 12,0 \text{ V}$ ;  $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$ .  
 b. Identifique la incógnita:  $\Delta m$ .  
 c. Exprese la respuesta en forma de una ecuación:

$$\begin{aligned} E_{\text{batt}} &= (\Delta m)c^2 \\ \Delta m &= \frac{E_{\text{batt}}}{c^2} \\ &= \frac{qV}{c^2} \\ &= \frac{(It)V}{c^2}. \end{aligned}$$

- d. Haga el cálculo:

$$\Delta m = \frac{(600 \text{ A} \cdot \text{h})(12,0 \text{ V})}{(3,00 \times 10^8)^2}.$$

Escriba los amperios A como culombios por segundo (C/s), y convierta las horas en segundos:

$$\begin{aligned} \Delta m &= \frac{(600 \text{ C/s} \cdot \text{h}) \left( \frac{3.600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \right) (12,0 \text{ J/C})}{(3,00 \times 10^8 \text{ m/s})^2} \\ &= 2,88 \times 10^{-10} \text{ kg}. \end{aligned}$$

donde utilizamos la conversión  $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 1 \text{ J}$ .

**Solución para (b)**

Para la parte (b):

- a. Identifique los aspectos conocidos:  $\Delta m = 2,88 \times 10^{-10} \text{ kg}$ ;  $m = 20,0 \text{ kg}$ .  
 b. Identifique la incógnita: % de cambio.  
 c. Exprese la respuesta en forma de una ecuación: % aumento =  $\frac{\Delta m}{m} \times 100\%$ .  
 d. Haga el cálculo:

$$\begin{aligned} \% \text{ de aumento} &= \frac{\Delta m}{m} \times 100\% \\ &= \frac{2,88 \times 10^{-10} \text{ kg}}{20,0 \text{ kg}} \times 100\% \\ &= 1,44 \times 10^{-9}\%. \end{aligned}$$

**Importancia**

Tanto el aumento real de la masa como el aumento porcentual son muy pequeños, porque la energía se divide por  $c^2$ , un número muy grande. Tendríamos que ser capaces de medir la masa de la batería con una precisión de una milmillonésima parte de un porcentaje, es decir, 1 parte en  $10^{11}$ , para notar este aumento. No es de extrañar que la variación de la masa no se observe fácilmente. De hecho, este cambio de masa es tan pequeño que podemos preguntarnos cómo se puede comprobar que es real. La respuesta se encuentra en los procesos nucleares en los que el porcentaje de masa destruida es lo suficientemente grande como para ser medido con precisión. La masa del combustible de un reactor nuclear, por ejemplo, es sensiblemente menor cuando se ha utilizado su energía. En ese caso, se ha liberado la energía almacenada (convertida sobre todo en energía térmica para alimentar los generadores eléctricos) y la masa en reposo ha disminuido. También se produce una disminución de la masa al utilizar la energía almacenada en una batería, con la diferencia de que la energía almacenada es mucho mayor en los procesos nucleares, lo que hace que el cambio de masa sea medible tanto en la práctica como en la teoría.

**Energía y momento relativistas**

Sabemos clásicamente que la energía cinética y el momento están relacionados entre sí, porque:

$$K_{\text{class}} = \frac{p^2}{2m} = \frac{(mu)^2}{2m} = \frac{1}{2} mu^2.$$

De manera relativista, podemos obtener una relación entre la energía y el momento manipulando algebraicamente sus ecuaciones de definición. Así se produce:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2, \quad \text{5.11}$$

donde  $E$  es la energía total relativista,  $E = mc^2/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ , y  $p$  es el momento relativista. Esta relación entre la energía relativista y el momento relativista es más complicada que en la versión clásica, pero podemos obtener algunas ideas nuevas e interesantes al examinarla. En primer lugar, la energía total está relacionada con el momento y la masa en reposo. En reposo, el momento es cero, y el resultado de la ecuación expresa que la energía total es la energía en reposo  $mc^2$  (por lo que esta ecuación es coherente con la discusión de la energía en reposo anterior). Sin embargo, a medida que la masa se acelera, su momento  $p$  aumenta, incrementando así la energía total. A velocidades suficientemente altas, el término de energía en reposo  $(mc^2)^2$  se vuelve insignificante en comparación con el término de momento  $(pc)^2$ ; por lo tanto,  $E = pc$  a velocidades extremadamente relativistas.

Si consideramos que el momento  $p$  es distinto de la masa, podemos determinar las implicaciones de la ecuación  $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ , para una partícula que no tiene masa. Si tomamos  $m$  como cero en esta ecuación, entonces  $E = pc$ , o  $p = E/c$ . Las partículas sin masa tienen este momento. En la naturaleza existen varias partículas sin masa, entre ellas los fotones (que son paquetes de radiación electromagnética). Otra implicación es que una partícula sin masa debe viajar a la velocidad  $c$  y solo a la velocidad  $c$ . Está fuera del alcance de este texto examinar la relación en la ecuación  $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$  en detalle, pero se puede ver que la relación tiene importantes implicaciones en la relatividad especial.

### **COMPRUEBE LO APRENDIDO 5.9**

¿Cuál es la energía cinética de un electrón si su velocidad es de  $0,992c$ ?

---

## Revisión Del Capítulo

### Términos Clave

**contracción de longitud** disminución de la longitud observada de un objeto con respecto a su longitud propia de  $L_0$  a la longitud  $L$  cuando su longitud se observa en un marco de referencia en el que se desplaza a la velocidad  $v$

**dilatación del tiempo** alargamiento del intervalo entre dos eventos cuando se ve en un marco inercial en movimiento en lugar del marco de reposo de los eventos (en el que los eventos ocurren en el mismo lugar)

**energía cinética relativista** energía cinética de un objeto que se mueve a velocidades relativistas.

**energía en reposo** energía almacenada en un objeto en reposo:  $E_0 = mc^2$

**energía total** suma de todas las energías de una partícula, incluyendo la energía en reposo y la energía cinética dadas para una partícula de masa  $m$  y velocidad  $u$  por  $E = \gamma mc^2$ , donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

**evento** suceso en el espacio y el tiempo especificado por sus coordenadas de posición y tiempo  $(x, y, z, t)$  medido en relación con un marco de referencia.

**experimento Michelson-Morley** investigación realizada en 1887 que demostró que la velocidad de la luz en el vacío es la misma en todos los marcos de referencia desde los que se mira

**línea de universo** camino a través del espacio-tiempo

**longitud propia**  $L_0$ ; la distancia entre dos puntos medida por un observador que está en reposo con respecto a ambos puntos; por ejemplo, los observadores terrestres miden la longitud propia cuando miden la distancia entre dos puntos que están inmóviles con respecto a la Tierra

**marco de referencia inercial** marco de referencia en el que un cuerpo en reposo permanece en reposo y un cuerpo en movimiento se desplaza a velocidad constante en línea recta a menos que actúe sobre él una fuerza exterior

**marco de reposo** marco de referencia en el que el observador está en reposo

**masa en reposo** masa de un objeto medida por un observador en reposo respecto al objeto

**momento relativista**  $\vec{p}$ , el momento de un objeto que se mueve a velocidad relativista  $\vec{p} = \gamma m\vec{u}$

**primer postulado de la relatividad especial** las leyes de la física son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales

**relatividad galileana** si un observador mide una velocidad en un marco de referencia, y ese marco de referencia se mueve con una velocidad más allá de un segundo marco de referencia, un observador en el segundo marco mide la velocidad original como la suma vectorial de estas velocidades

**segundo postulado de la relatividad especial** la luz viaja en el vacío con la misma velocidad  $c$  en cualquier dirección en todos los marcos inerciales

**suma de la velocidad clásica (galileana)** método de suma de velocidades cuando  $v \ll c$ ; las velocidades se suman como números regulares en el movimiento unidimensional:  $u = v + u'$ , donde  $v$  es la velocidad entre dos observadores,  $u$  es la velocidad de un objeto respecto a un observador, y  $u'$  es la velocidad relativa para el otro observador.

**suma de velocidades relativistas** método de suma de velocidades de un objeto que se mueve a velocidades relativistas

**teoría especial de la relatividad** teoría que Albert Einstein propuso en 1905 y que supone que todas las leyes de la física tienen la misma forma en todos los marcos de referencia inerciales, y que la velocidad de la luz es la misma en todos los marcos inerciales

**tiempo propio**  $\Delta\tau$  es el intervalo medido por un observador que ve que el principio y el final del proceso que el intervalo mide ocurren en el mismo lugar

**transformación de Lorentz** relación entre las coordenadas de posición y tiempo de los mismos eventos vistos en diferentes marcos de referencia, según la teoría especial de la relatividad.

**transformación galileana** relación entre las coordenadas de posición y tiempo de los mismos eventos vistos en diferentes marcos de referencia, según la mecánica clásica.

**velocidad de la luz** límite de velocidad final para cualquier partícula con masa.

## Ecuaciones Clave

Dilatación del tiempo	$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \tau$
Factor de Lorentz	$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
Contracción de longitud	$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{L_0}{\gamma}$
Transformación galileana	$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'$
Transformación de Lorentz	$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$
	$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$
	$y = y'$
	$z = z'$
Transformación inversa de Lorentz	$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$
	$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$
	$y' = y$
	$z' = z$
Invariantes espacio-tiempo	$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2$
	$(\Delta \tau)^2 = -(\Delta s)^2/c^2 = (\Delta t)^2 - \frac{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]}{c^2}$
Suma de velocidades relativistas	$u_x = \left( \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2} \right), \quad u_y = \left( \frac{u'_y/\gamma}{1 + vu'_x/c^2} \right), \quad u_z = \left( \frac{u'_z/\gamma}{1 + vu'_x/c^2} \right)$
Efecto Doppler relativista para la longitud de onda	$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_s \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$
Efecto Doppler relativista para la frecuencia	$f_{\text{obs}} = f_s \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$
Momento relativista	$\vec{p} = \gamma m \vec{u} = \frac{m \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$



Energía total relativista

$$E = \gamma mc^2, \text{ donde } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Energía cinética relativista

$$K_{\text{rel}} = (\gamma - 1)mc^2, \text{ donde } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

## Resumen

### 5.1 Invariancia de las leyes físicas

- La relatividad es el estudio de cómo observadores en diferentes marcos de referencia miden el mismo evento.
- La relatividad moderna se divide en dos partes. La relatividad especial trata de observadores en movimiento uniforme (no acelerado), mientras que la relatividad general incluye el movimiento relativo acelerado y la gravedad. La relatividad moderna es coherente con toda la evidencia empírica existente hasta el momento y, en el límite de baja velocidad y gravedad débil, da una estrecha concordancia con las predicciones de la relatividad clásica (galileana).
- Un marco de referencia inercial es un marco de referencia en el que un cuerpo en reposo permanece en reposo y un cuerpo en movimiento se mueve a una velocidad constante en línea recta a menos que actúe una fuerza exterior.
- La relatividad moderna se basa en los dos postulados de Einstein. El primer postulado de la relatividad especial es que las leyes de la física son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales. El segundo postulado de la relatividad especial es que la velocidad de la luz  $c$  es la misma en todos los marcos de referencia inerciales, independientemente del movimiento relativo del observador y de la fuente de luz.
- El experimento de Michelson-Morley demostró que la velocidad de la luz en el vacío es independiente del movimiento de la Tierra alrededor del Sol.

### 5.2 Relatividad de la simultaneidad

- Dos acontecimientos se definen como simultáneos si un observador los mide como si ocurrieran al mismo tiempo (por ejemplo, al recibir la luz de los acontecimientos).
- Dos sucesos situados a una distancia que son simultáneos para un observador en reposo en un marco de referencia no son necesariamente simultáneos para un observador en reposo en

un marco de referencia diferente.

### 5.3 Dilatación del tiempo

- Dos sucesos se definen como simultáneos si un observador los mide como si ocurrieran al mismo tiempo. No son necesariamente simultáneos para todos los observadores: la simultaneidad no es absoluta.
- La dilatación del tiempo es el alargamiento del intervalo de tiempo entre dos eventos cuando se ven en un marco inercial en movimiento en lugar del marco de reposo de los eventos (en el que los eventos ocurren en el mismo lugar).
- Los observadores que se mueven a una velocidad relativa  $v$  no miden el mismo tiempo transcurrido entre dos eventos. Tiempo propio  $\Delta\tau$  es el tiempo medido en el marco de referencia en el que el inicio y el final del intervalo de tiempo ocurren en el mismo lugar. El intervalo de tiempo  $\Delta t$  medido por un observador que ve el marco de eventos moviéndose a la velocidad  $v$  está relacionado con el tiempo propio  $\Delta\tau$  de los eventos por la ecuación:

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\Delta\tau,$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

- La premisa de la paradoja de los gemelos es defectuosa porque el gemelo que viaja se acelera. El viaje no es simétrico para los dos gemelos.
- La dilatación del tiempo suele ser despreciable a bajas velocidades relativas, pero se produce y se ha comprobado experimentalmente.
- El tiempo propio es la medida más corta de cualquier intervalo de tiempo. Cualquier observador que se mueva con respecto al sistema observado mide un intervalo mayor que

el tiempo propio.

#### 5.4 Contracción de longitud

- Todos los observadores están de acuerdo con la velocidad relativa.
- La distancia depende del movimiento del observador. Longitud propia  $L_0$  es la distancia entre dos puntos medida por un observador que está en reposo respecto a ambos puntos.
- La contracción de longitud es la disminución de la longitud observada de un objeto a partir de su longitud propia  $L_0$  a la longitud  $L$  cuando su longitud se observa en un marco de referencia en el que viaja a la velocidad  $v$ .
- La longitud propia es la medida más larga de cualquier intervalo de longitud. Cualquier observador que se mueva con respecto al sistema observado mide una longitud inferior a la longitud propia.

#### 5.5 La transformación de Lorentz

- Las ecuaciones de la transformación galileana describen cómo, en la mecánica clásica no relativista, la posición, la velocidad y las aceleraciones medidas en un marco aparecen en otro. Las longitudes permanecen inalteradas y se supone que una única escala de tiempo universal se aplica a todos los marcos inerciales.
- Las leyes mecánicas de Newton obedecen al principio de tener la misma forma en todos los marcos inerciales bajo una transformación galileana, dada por

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'.$$

Sin embargo, el concepto de que los tiempos y las distancias son los mismos en todos los marcos inerciales en la transformación galileana es inconsistente con los postulados de la relatividad especial.

- Las ecuaciones de transformación de Lorentz relativistamente correctas son

Transformación de Lorentz	Transformación inversa de Lorentz
$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$	$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$
$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$	$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$
$y = y'$	$y' = y$
$z = z'$	$z' = z$

Podemos obtener estas ecuaciones haciendo que una señal luminosa esférica en expansión tenga la misma forma y velocidad de crecimiento,  $c$ , en ambos marcos de referencia.

- Los fenómenos relativistas pueden explicarse

en términos de las propiedades geométricas del espacio-tiempo de cuatro dimensiones, en el que las transformaciones de Lorentz corresponden a rotaciones de ejes.

- La transformación de Lorentz corresponde a una rotación de los ejes del espacio-tiempo, similar en cierto modo a una rotación de los ejes del espacio, pero en la que la separación espacial invariante viene dada por  $\Delta s$  en lugar de las distancias  $\Delta r$ , y que la transformación de Lorentz que involucra el eje del tiempo no preserva la perpendicularidad de los ejes o las escalas a lo largo de los ejes.
- El análisis de los fenómenos relativistas en términos de diagramas espacio-temporales apoya la conclusión de que estos fenómenos resultan de las propiedades del espacio y el tiempo en sí, y no de las leyes del electromagnetismo.

#### 5.6 Transformación relativista de la velocidad

- Con la suma clásica de la velocidad, las velocidades se suman como números regulares en el movimiento unidimensional:  $u = v + u'$ , donde  $v$  es la velocidad entre dos observadores,  $u$  es la velocidad de un objeto respecto a un observador, y  $u'$  es la velocidad relativa al otro observador.
- Las velocidades no pueden sumarse para ser mayores que la velocidad de la luz.
- La suma de velocidades relativistas describe las velocidades de un objeto que se mueve a una velocidad relativista.

#### 5.7 Efecto Doppler para la luz

- Un observador de la radiación electromagnética ve los efectos Doppler relativistas si la fuente de la radiación se mueve con respecto al observador. La longitud de onda de la radiación es más larga (lo que se denomina corrimiento al rojo) que la emitida por la fuente cuando ésta se aleja del observador y más corta (lo que se denomina corrimiento al azul) cuando la fuente se acerca al observador. La longitud de onda desplazada se describe mediante la ecuación:

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_s \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

donde  $\lambda_{\text{obs}}$  es la longitud de onda observada,  $\lambda_s$  es la longitud de onda de la fuente, y  $v$  es la velocidad relativa de la fuente respecto al observador.

## 5.8 Momento relativista

- La ley de conservación del momento es válida para el momento relativista siempre que la fuerza externa neta sea cero. El momento relativista es  $p = \gamma mu$ , donde  $m$  es la masa en reposo del objeto,  $u$  es su velocidad relativa a un observador, y el factor relativista es

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

- A bajas velocidades, el momento relativista es equivalente al momento clásico.
- El momento relativista se aproxima al infinito cuando  $u$  se aproxima a  $c$ . Esto implica que un objeto con masa no puede alcanzar la velocidad de la luz.

## 5.9 Energía relativista

- El teorema de trabajo-energía relativista es  $W_{\text{neto}} = E - E_0 = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$ .
- Desde el punto de vista relativista,  $W_{\text{neto}} = K_{\text{rel}}$  donde  $K_{\text{rel}}$  es la energía cinética relativista.
- Un objeto de masa  $m$  a velocidad  $u$  tiene energía cinética  $K_{\text{rel}} = (\gamma - 1)mc^2$ , donde  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ .
- A bajas velocidades, la energía cinética relativista se reduce a energía cinética clásica.
- Ningún objeto con masa puede alcanzar la

velocidad de la luz, porque se requiere una cantidad infinita de trabajo y una cantidad infinita de aporte de energía para acelerar una masa hasta la velocidad de la luz.

- La energía relativista se conserva siempre que la definamos incluyendo la posibilidad de que la masa se transforme en energía.
- La energía total de una partícula con masa  $m$  que viaja a la velocidad  $u$  se define como  $E = \gamma mc^2$ , donde  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$  y  $u$  denota la velocidad de la partícula.
- La energía en reposo de un objeto de masa  $m$  es  $E_0 = mc^2$ , lo que significa que la masa es una forma de energía. Si se almacena energía en un objeto, su masa aumenta. La masa puede destruirse para liberar energía.
- Normalmente no notamos el aumento o la disminución de la masa de un objeto porque el cambio de masa es muy pequeño para un gran aumento de energía. La ecuación  $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$  relaciona la energía total relativista  $E$  y el momento relativista  $p$ . A velocidades extremadamente altas, la energía en reposo  $mc^2$  se vuelve insignificante, y  $E = pc$ .

## Preguntas Conceptuales

### 5.1 Invariancia de las leyes físicas

1. ¿Cuál de los postulados de la relatividad especial de Einstein incluye un concepto que no encaja con las ideas de la física clásica? Explique.
2. ¿Es la Tierra un marco de referencia inercial? ¿Lo es el Sol? Justifique su respuesta.
3. Cuando usted vuela en un avión comercial, puede parecerle que el avión está inmóvil y que la Tierra se mueve debajo de usted. ¿Es válido este punto de vista? Discuta brevemente.

### 5.3 Dilatación del tiempo

4. (a) ¿Afecta el movimiento a la frecuencia de un reloj medida por un observador que se mueve con él? (b) ¿Afecta el movimiento a la forma en que un observador que se mueve con respecto a un reloj mide su frecuencia?
5. ¿A quién le parece que el tiempo transcurrido de un proceso es más largo, a un observador que se mueve en relación con el proceso o a un observador que se mueve con el proceso? ¿Qué

observador mide el tiempo propio?

6. (a) ¿Cómo podría viajar al futuro de la Tierra sin envejecer significativamente? (b) ¿Podría este método permitirle también viajar al pasado?

### 5.4 Contracción de longitud

7. ¿A quién le parece que un objeto tiene mayor longitud, a un observador que se mueve con el objeto o a un observador que se mueve respecto al objeto? ¿Qué observador mide la longitud propia del objeto?
8. Los efectos relativistas, como la dilatación del tiempo y la contracción de longitud, están presentes en los automóviles y en los aviones. ¿Por qué nos parecen extraños estos efectos?
9. Supongamos que un astronauta se desplaza con respecto a la Tierra a una fracción significativa de la velocidad de la luz. (a) ¿Observa que la velocidad de sus relojes se ha ralentizado? (b) ¿Qué cambio observa en la velocidad de los relojes terrestres? (c) ¿Le parece que su nave se acorta? (d) ¿Y la distancia entre dos estrellas que

se encuentran en la dirección de su movimiento?  
(e) ¿Están de acuerdo él y un observador terrestre en su velocidad con respecto a la Tierra?

### 5.7 Efecto Doppler para la luz

10. Explique el significado de los términos "corrimiento al rojo" y "corrimiento al azul" en relación con el efecto Doppler relativista.
11. ¿Qué ocurre con el efecto Doppler relativista cuando la velocidad relativa es cero? ¿Es este el resultado esperado?
12. ¿Es el efecto Doppler relativista consistente con el efecto Doppler clásico en el sentido en el que  $\lambda_{\text{obs}}$  es más grande para el movimiento de alejamiento?
13. Todas las galaxias más lejanas que  $50 \times 10^6$  ly muestran un corrimiento hacia el rojo en su luz emitida que es proporcional a la distancia, y los más lejanos tienen corrimientos hacia el rojo progresivamente mayores. ¿Qué implica esto, suponiendo que la única fuente de corrimiento hacia el rojo sea el movimiento relativo?

### 5.8 Momento relativista

14. ¿Cómo modifica la relatividad moderna la ley de conservación del momento?
15. ¿Es posible que una fuerza externa actúe sobre un sistema y que el momento relativista se conserve? Explique.

### 5.9 Energía relativista

16. ¿Cómo se modifican las leyes clásicas de

## Problemas

### 5.3 Dilatación del tiempo

23. (a) ¿Cuál sería el valor de  $\gamma$  si  $v = 0,250c$ ? (b) Si  $v = 0,500c$ ?
24. (a) ¿Cuál sería el valor de  $\gamma$  si  $v = 0,100c$ ? (b) Si  $v = 0,900c$ ?
25. Las partículas llamadas  $\pi$ -mesones son producidos por haces de aceleradores. Si estas partículas viajan a  $2,70 \times 10^8$  m/s y viven  $2,60 \times 10^{-8}$  s cuando están en reposo respecto a un observador, ¿cuánto tiempo viven vistos en el laboratorio?
26. Supongamos que una partícula llamada kaón es creada por la radiación cósmica que incide en la atmósfera. Se desplaza cerca de usted a  $0,980c$ , y vive  $1,24 \times 10^{-8}$  s cuando está en reposo con

conservación de la energía y conservación de la masa con la relatividad moderna?

17. ¿Qué ocurre con la masa de agua en una olla cuando se enfría, suponiendo que no se escapan ni se añaden moléculas? ¿Es esto observable en la práctica? Explique.
  18. Considere un experimento mental. Se coloca un globo de aire expandido en una báscula al aire libre a primera hora de la mañana. El globo permanece en la báscula y se pueden medir los cambios en su masa. ¿Cambia la masa del globo a medida que avanza el día? Discuta las dificultades para llevar a cabo este experimento.
  19. La masa del combustible en un reactor nuclear disminuye en una cantidad observable a medida que emite energía. ¿Es lo mismo que el carbón y el oxígeno combinados en una planta de energía convencional? Si es así, ¿se puede observar esto en la práctica en el carbón y el oxígeno? Explique.
  20. Sabemos que la velocidad de un objeto con masa tiene un límite superior de  $c$ . ¿Existe un límite máximo para su momento? ¿Para su energía? Explique.
  21. Dado que la luz viaja a  $c$ , ¿puede tener masa? Explique.
  22. Si se utiliza un telescopio con base en la Tierra para proyectar un rayo láser sobre la luna, se puede mover el punto a través de la superficie lunar a una velocidad superior a la de la luz. ¿Viola esto la relatividad moderna? (Tenga en cuenta que la luz se envía desde la Tierra a la luna, no a través de la superficie de la luna).
- respecto a un observador. ¿Cuánto tiempo vive según se observa?
27. Un  $\pi$ -mesón neutral es una partícula que puede ser creada por los haces de un acelerador. Si una de estas partículas vive  $1,40 \times 10^{-16}$  s medido en el laboratorio, y  $0,840 \times 10^{-16}$  s cuando está en reposo respecto a un observador, ¿cuál es su velocidad respecto al laboratorio?
  28. Un neutrón vive 900 s cuando está en reposo respecto a un observador. ¿A qué velocidad se mueve el neutrón con respecto a un observador que mide su duración de vida en 2065 s?
  29. Si los efectos relativistas son inferiores al 1%, entonces  $\gamma$  debe ser inferior a 1,01. ¿A qué velocidad relativa está  $\gamma = 1,01$ ?

30. Si los efectos relativistas son inferiores al 3%, entonces  $\gamma$  debe ser inferior a 1,03. ¿A qué velocidad relativa está  $\gamma = 1,03$ ?

#### 5.4 Contracción de longitud

31. Una nave espacial, de 200 m de largo, como se ve a bordo, se mueve junto a la Tierra a  $0,970c$ . ¿Cuál es su longitud medida por un observador terrestre?
32. ¿A qué velocidad tendría que pasar un automóvil deportivo de 6,0 m de largo para que parezca que solo mide 5,5 m?
33. (a) ¿Qué distancia recorre el muón en la [Ejemplo 5.3](#) según el observador terrestre? (b) ¿Qué distancia recorre según un observador que se mueve con él? Base su cálculo en su velocidad respecto a la Tierra y en el tiempo que vive (tiempo propio). (c) Compruebe que estas dos distancias están relacionadas a través de la contracción de longitud  $\gamma = 3,20$ .
34. (a) ¿Cuánto tiempo habría vivido el muón en el [Ejemplo 5.3](#) según lo observado en la Tierra si su velocidad fuera  $0,0500c$ ? (b) ¿Qué distancia habría recorrido según lo observado en la Tierra? (c) ¿Qué distancia es ésta en el marco del muón?
35. **Resultados irrazonables** Una nave espacial se dirige directamente hacia la Tierra a una velocidad de  $0,800c$ . El astronauta a bordo afirma que puede enviar un frasco hacia la Tierra a  $1,20c$  con respecto a la Tierra. (a) Calcule la velocidad que debe tener el frasco con respecto a la nave espacial. (b) ¿Qué es irrazonable en este resultado? (c) ¿Qué suposiciones son irrazonables o son incoherentes?

#### 5.5 La transformación de Lorentz

36. Describa los siguientes sucesos físicos como eventos, es decir, en la forma  $(x, y, z, t)$ : (a) Un cartero toca el timbre de una casa precisamente a mediodía. (b) Al mismo tiempo que suena el timbre, sale una rebanada de pan de una tostadora que está situada a 10 m de la puerta en dirección este de la misma. (c) Diez segundos después, un avión llega al aeropuerto, que está a 10 km de la puerta en dirección este y a 2 km al sur.
37. Describa lo que ocurre con el ángulo  $\alpha = \tan(v/c)$ , y, por lo tanto, a los ejes transformados en la [Figura 5.17](#), ya que la velocidad relativa  $v$  de los marcos de referencia

de  $S$  y  $S'$  se aproximan a  $c$ .

38. Describa la forma de la línea de universo en un diagrama espacio-tiempo de (a) un objeto que permanece en reposo en una posición específica a lo largo del eje de la  $x$ ; (b) un objeto que se mueve a velocidad constante  $u$  en la dirección de la  $x$ ; (c) un objeto que comienza en reposo y acelera a una tasa constante en la dirección de la  $x$  positiva.
39. Un hombre parado en una estación de tren observa cómo dos niños se lanzan una pelota de béisbol en un tren en movimiento. Supongamos que el tren se mueve hacia el este con una velocidad constante de 20 m/s y que uno de los chicos lanza la pelota con una velocidad de 5 m/s con respecto a sí mismo hacia el otro chico, que está a 5 m al oeste. ¿Cuál es la velocidad de la pelota observada por el hombre de la estación?
40. Cuando se observan desde el sol en un instante determinado, la Tierra y Marte parecen moverse en direcciones opuestas con velocidades de 108.000 km/h y 86.871 km/h, respectivamente. ¿Cuál es la velocidad de Marte en este instante cuando se observa desde la Tierra?
41. Un hombre corre por una carretera recta perpendicular a las vías del tren y alejándose de ellas a una velocidad de 12 m/s. El tren se mueve con una velocidad de 30 m/s respecto a la vía. ¿Cuál es la velocidad del hombre con respecto a un pasajero sentado en reposo en el tren?
42. Un hombre corre por una carretera recta que hace  $30^\circ$  con las vías del tren. El hombre corre en dirección a la carretera que se aleja de la pista a una velocidad de 12 m/s. El tren se mueve con una velocidad de 30 m/s respecto a la vía. ¿Cuál es la velocidad del hombre con respecto a un pasajero sentado en reposo en el tren?
43. En un marco en reposo respecto a la mesa de billar, una bola de billar de masa  $m$  que se mueve con velocidad  $v$  choca con otra bola de billar de masa  $m$  en reposo. La primera bola se detiene tras la colisión, mientras que la segunda despegue con velocidad  $v$  en la dirección original del movimiento de la primera bola. Esto demuestra que el momento se conserva en este marco. (a) Ahora, describa la misma colisión desde la perspectiva de un marco que se mueve con velocidad  $v$  en la dirección del movimiento de la primera bola. (b) ¿Se conserva el momento



en este marco?

44. En un marco en reposo con respecto a la mesa de billar, dos bolas de billar de la misma masa  $m$  se mueven la una hacia la otra con la misma velocidad  $v$ . Después de la colisión, las dos bolas se quedan en reposo. (a) Demuestre que el momento se conserva en este marco. (b) Ahora, describa la misma colisión desde la perspectiva de un marco que se mueve con velocidad  $v$  en la dirección del movimiento de la primera bola. (c) ¿Se conserva el momento en este marco?
45. En un marco  $S$ , se observan dos sucesos: el suceso 1: se crea un pion en reposo en el origen y el suceso 2: el pion se desintegra al cabo de un tiempo  $\tau$ . Otro observador en un marco  $S'$  se mueve en la dirección positiva a lo largo del eje de la  $x$  positiva con una velocidad constante  $v$  y observa los mismos dos eventos en su marco. Los orígenes de los dos marcos coinciden en  $t = t' = 0$ . (a) Encuentre las posiciones y tiempos de estos dos eventos en el marco  $S'$  (a) según la transformación de galileana, y (b) según la transformación de Lorentz.

### 5.6 Transformación relativista de la velocidad

46. Si dos naves espaciales se dirigen directamente la una a la otra a  $0,800c$ , ¿a qué velocidad debe dispararse un bote desde la primera nave para acercarse a la otra a  $0,999c$  vista por la segunda nave?
47. Dos planetas están en curso de colisión, dirigiéndose directamente el uno al otro a  $0,250c$ . Una nave espacial enviada desde un planeta se acerca al segundo a  $0,750c$  vista por el segundo planeta. ¿Cuál es la velocidad de la nave respecto al primer planeta?
48. Cuando se dispara un misil desde una nave espacial hacia otra, sale de la primera a  $0,950c$  y se acerca a la otra a  $0,750c$ . ¿Cuál es la velocidad relativa de las dos naves?
49. ¿Cuál es la velocidad relativa de dos naves espaciales si una dispara un misil a la otra a  $0,750c$  y la otra observa que se acerca a  $0,950c$ ?
50. Demuestre que para cualquier velocidad relativa  $v$  entre dos observadores, un rayo de luz enviado de uno a otro se acercará a la velocidad  $c$  (siempre que  $v$  sea menor que  $c$ , por supuesto).
51. Demuestre que para cualquier velocidad relativa  $v$  entre dos observadores, un rayo de luz proyectado por uno directamente lejos del otro se alejará a la velocidad de la luz (siempre que  $v$  sea menor que  $c$ , por supuesto).

### 5.7 Efecto Doppler para la luz

52. Un policía de carretera utiliza un dispositivo que mide la velocidad de los vehículos haciendo rebotar el radar en ellos y midiendo el corrimiento Doppler. El radar de salida tiene una frecuencia de  $100 \text{ GHz}$  y el eco de retorno tiene una frecuencia  $15,0 \text{ kHz}$  superior. ¿Cuál es la velocidad del vehículo? Note que hay dos corrimientos Doppler en los ecos. Asegúrese de no redondear hasta el final del problema, porque el efecto es pequeño.

### 5.8 Momento relativista

53. Encuentre el momento de un núcleo de helio con una masa de  $6,68 \times 10^{-27} \text{ kg}$  que se mueve a  $0,200c$ .
54. ¿Cuál es el momento de un electrón que viaja a  $0,980c$ ?
55. (a) Encuentre el momento de un  $1,00 \times 10^9 \text{-kg}$  asteroide que se dirige a la Tierra a  $30,0 \text{ km/s}$ . (b) Encuentre la relación de este momento con el momento clásico. (Sugerencia: Utilice la aproximación en que  $\gamma = 1 + (1/2)v^2/c^2$  a bajas velocidades).
56. (a) ¿Cuál es el momento de un satélite de  $2.000 \text{ kg}$  que orbita a  $4,00 \text{ km/s}$ ? (b) Encuentre la relación entre este momento y el momento clásico. (Sugerencia: Utilice la aproximación en que  $\gamma = 1 + (1/2)v^2/c^2$  a bajas velocidades).
57. ¿Cuál es la velocidad de un electrón que tiene un momento de  $3,04 \times 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ? Tenga en cuenta que debe calcular la velocidad con al menos cuatro dígitos para ver la diferencia con  $c$ .
58. Encuentre la velocidad de un protón que tiene un momento de  $4,48 \times 10^{-19} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ .

### 5.9 Energía relativista

59. ¿Cuál es la energía en reposo de un electrón, dado que su masa es  $9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ? Indique su respuesta en julios y MeV.
60. Encuentre la energía en reposo en julios y MeV de un protón, dada su masa es  $1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ .
61. Si las energías en reposo de un protón y un neutrón (los dos constituyentes de los núcleos) son  $938,3$  y  $939,6 \text{ MeV}$ , respectivamente, ¿cuál es la diferencia de su masa en kilogramos?
62. Se estima que el Big Bang que inició el universo liberó  $10^{68} \text{ J}$  de energía. ¿Cuántas estrellas podría crear la mitad de esta energía,

suponiendo que la masa media de la estrella sea  $4,00 \times 10^{30}$  kg?

63. Una explosión de supernova de una estrella de  $2,00 \times 10^{31}$  kg produce  $1,00 \times 10^{44}$  J de energía. (a) ¿Cuántos kilogramos de masa se convierten en energía en la explosión? (b) ¿Cuál es la relación entre  $\Delta m/m$  la masa destruida y la masa original de la estrella?
64. (a) Utilizando los datos de [Energía potencial de un sistema](http://openstax.org/books/física-universitaria-volumen-1/pages/8-1-energía-potencial-de-un-sistema) (<http://openstax.org/books/física-universitaria-volumen-1/pages/8-1-energía-potencial-de-un-sistema>), calcule la masa convertida en energía por la fisión de 1,00 kg de uranio. (b) ¿Cuál es la relación entre la masa destruida y la masa original,  $\Delta m/m$ ?
65. (a) Utilizando los datos de [Energía potencial de un sistema](http://openstax.org/books/física-universitaria-volumen-1/pages/8-1-energía-potencial-de-un-sistema) (<http://openstax.org/books/física-universitaria-volumen-1/pages/8-1-energía-potencial-de-un-sistema>), calcule la cantidad de masa convertida en energía por la fusión de 1,00 kg de hidrógeno. (b) ¿Cuál es la relación entre la masa destruida y la masa original,  $\Delta m/m$ ? (c) ¿Cómo se compara esto con  $\Delta m/m$  para la fisión de 1,00 kg de uranio?
66. Hay aproximadamente  $10^{34}$  J de energía disponible a partir de la fusión del hidrógeno en los océanos del mundo. (a) Si se utilizara  $10^{33}$  J de esta energía, ¿cuál sería la disminución de la masa de los océanos (sin tener en cuenta la pérdida de masa del oxígeno sobrante)? (b) ¿A qué volumen de agua corresponde esto? (c) Comente si se trata de una fracción significativa

de la masa total de los océanos.

67. Un muon tiene una energía de masa en reposo de 105,7 MeV, y decae en un electrón y una partícula sin masa. (a) Si toda la masa perdida se convierte en energía cinética del electrón, encuentre  $\gamma$  para el electrón. (b) ¿Cuál es la velocidad del electrón?
68. Un  $\pi$ -mesón es una partícula que decae en un muon y una partícula sin masa. El  $\pi$ -mesón tiene una energía de masa en reposo de 139,6 MeV, y el muon tiene una energía de masa en reposo de 105,7 MeV. Supongamos que el  $\pi$ -mesón está en reposo y toda la masa que falta va a parar a la energía cinética del muon. ¿A qué velocidad se moverá el muon?
69. (a) Calcule la energía cinética relativista de un auto de 1.000 kg que se mueve a 30,0 m/s si la velocidad de la luz fuera solo de 45,0 m/s. (b) Encuentre la relación entre la energía cinética relativista y la clásica.
70. El decaimiento alfa es una desintegración nuclear en la que se emite un núcleo de helio. Si el núcleo de helio tiene una masa de  $6,80 \times 10^{-27}$  kg y se le dan 5,00 MeV de energía cinética, ¿cuál es su velocidad?
71. (a) El decaimiento beta es un decaimiento nuclear en el que se emite un electrón. Si el electrón recibe 0,750 MeV de energía cinética, ¿cuál es su velocidad? (b) Comente cómo la alta velocidad es consistente con la energía cinética en comparación con la energía en masa en reposo del electrón.

## Problemas Adicionales

72. (a) ¿A qué velocidad relativa está  $\gamma = 1,50$ ? (b) ¿A qué velocidad relativa está  $\gamma = 100$ ?
73. (a) ¿A qué velocidad relativa está  $\gamma = 2,00$ ? (b) ¿A qué velocidad relativa está  $\gamma = 10,0$ ?
74. **Resultados poco razonables** (a) Encuentre el valor de  $\gamma$  necesario para la siguiente situación. Un observador terrestre mide que han transcurrido 23,9 h, mientras que las señales de una sonda espacial de alta velocidad indican que han transcurrido 24,0 h a bordo. (b) ¿Qué es lo poco razonable de este resultado? (c) ¿Qué suposiciones son poco razonables o incoherentes?
75. (a) ¿Cuánto tiempo tarda el astronauta en la [Ejemplo 5.5](#) en recorrer 4,30 años luz (a.l.) a  $0,99944c$  (medido por el observador terrestre)? (b) ¿Cuánto tiempo tarda según el astronauta? (c) Compruebe que estos dos tiempos están

relacionados mediante la dilatación del tiempo con  $\gamma = 30,00$  como se ha dado.

76. (a) ¿Qué velocidad tendría que tener un atleta para correr una carrera de 100m para que parezca de 100 yardas de largo? (b) ¿Es la respuesta consistente con el hecho de que los efectos relativistas son difíciles de observar en circunstancias ordinarias? Explique.
77. (a) Encuentre el valor de  $\gamma$  para la siguiente situación. Un astronauta mide la longitud de su nave espacial en 100 m, mientras que un observador terrestre la mide en 25,0 m. (b) ¿Cuál es la velocidad de la nave espacial respecto a la Tierra?
78. Un reloj en una nave espacial funciona a una décima parte de la velocidad de un reloj idéntico en la Tierra. ¿Cuál es la velocidad de la nave espacial?



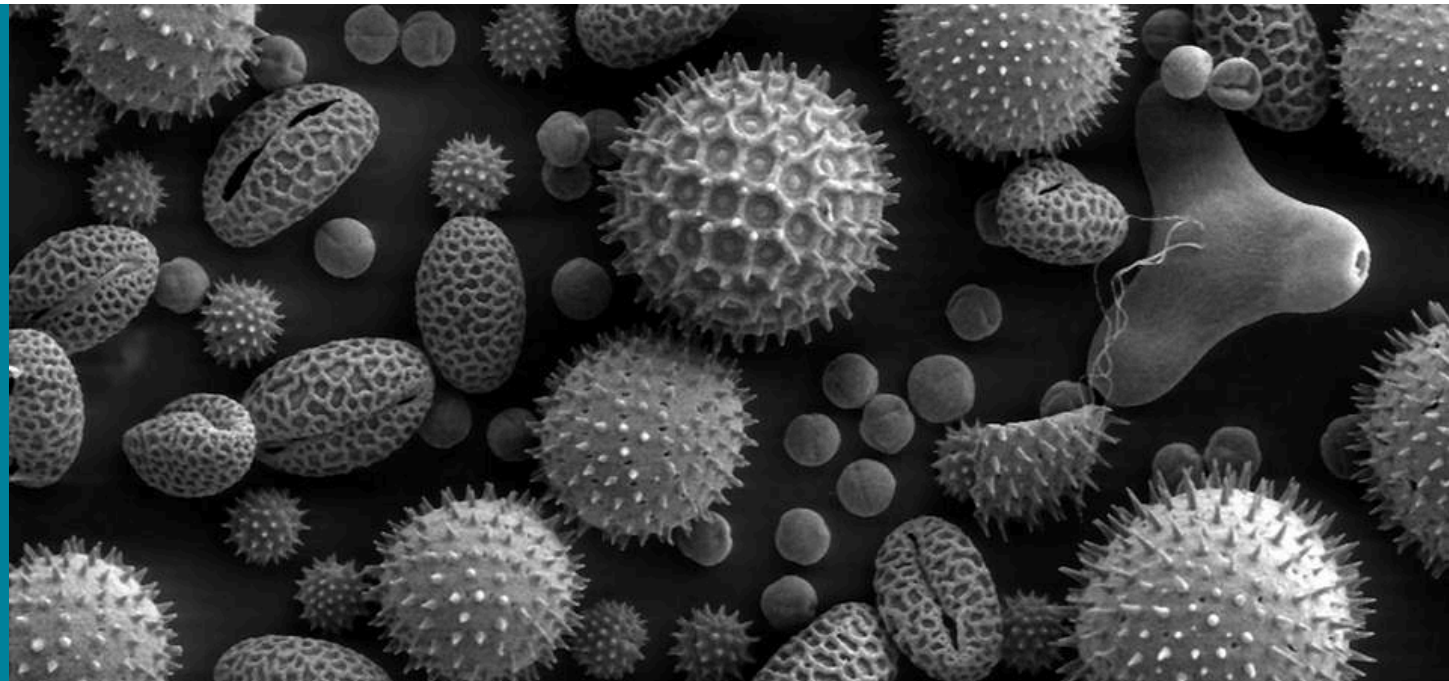
- 79.** Un astronauta tiene un ritmo cardíaco de 66 latidos por minuto, que se midió durante su examen físico en la Tierra. Un observador (A) en la nave y un observador (B) en la Tierra miden la frecuencia de los latidos del corazón del astronauta cuando éste se encuentra en una nave espacial que viaja a  $0,5c$  con respecto a la Tierra. (a) Describa un método experimental mediante el cual el observador B en la Tierra podrá determinar la frecuencia de los latidos del corazón del astronauta cuando éste se encuentra en la nave espacial. (b) ¿Cuál(es) será(n) la(s) frecuencia(s) de los latidos del corazón del astronauta informada(s) por los observadores A y B?
- 80.** Una nave espacial (A) se mueve a la velocidad  $c/2$  con respecto a otra nave espacial (B). Los observadores en A y B ajustan sus relojes de manera que el evento en  $(x, y, z, t)$  de encender un láser en la nave espacial B tiene coordenadas  $(0, 0, 0, 0)$  en A y también  $(0, 0, 0, 0)$  en B. Un observador en el origen de B enciende el láser en  $t = 0$  y lo apaga en  $t = \tau$  en su tiempo. ¿Cuál es la duración del tiempo entre el encendido y el apagado según lo ve el observador en A?
- 81.** Los mismos dos observadores que en el ejercicio anterior, pero ahora observamos dos eventos que ocurren en la nave espacial A. Un fotón llega al origen de A en su tiempo  $t = 0$  y otro fotón llega a  $(x = 1,00 \text{ m}, 0, 0)$  en  $t = 0$  en el marco de la nave A. (a) Encuentre las coordenadas y los tiempos de los dos acontecimientos vistos por un observador en el marco B. (b) ¿En qué marco son simultáneos los dos acontecimientos y en qué marco no lo son?
- 82.** Los mismos dos observadores que en los ejercicios anteriores. Una varilla de 1 m de longitud está dispuesta en el eje de la  $x$  en el marco de B desde el origen hasta  $(x = 1,00 \text{ m}, 0, 0)$ . ¿Cuál es la longitud de la varilla observada por un observador en el marco de la nave espacial A?
- 83.** Un observador en el origen del marco inercial S ve una bombilla encendida a  $x = 150 \text{ km}$ ,  $y = 15,0 \text{ km}$ , y  $z = 1,00 \text{ km}$  en el tiempo  $t = 4,5 \times 10^{-4} \text{ s}$ . ¿En qué momento y en qué posición del sistema  $S'$  se produjo el destello, si  $S'$  se mueve a lo largo de la dirección de la  $x$  compartida con S a una velocidad  $v = 0,6c$ ?
- 84.** Un observador ve dos eventos  $1,5 \times 10^{-8} \text{ s}$  aparte con una separación de 800 m. ¿A qué velocidad debe moverse un segundo observador con respecto al primero para ver los dos acontecimientos ocurrir simultáneamente?
- 85.** Un observador situado junto a las vías del tren ve cómo dos rayos caen simultáneamente en los extremos de un tren de 500 m de longitud en el instante en que el centro del tren pasa junto a él a 50 m/s. Utiliza la transformación de Lorentz para encontrar el tiempo entre los rayos medido por un pasajero sentado en el centro del tren.
- 86.** Desde la Tierra se observan dos eventos astronómicos que ocurren con una diferencia de tiempo de 1 s y una separación de distancia de  $1,5 \times 10^9 \text{ m}$  el uno del otro. (a) Determine si la separación de los dos sucesos es de tipo espacial o temporal. (b) Indique lo que esto implica acerca de si es consistente con la relatividad especial que un evento haya causado el otro.
- 87.** Desde la Tierra se observan dos eventos astronómicos que ocurren con una diferencia de tiempo de 0,30 s y una separación de distancia de  $2,0 \times 10^9 \text{ m}$  entre sí. ¿A qué velocidad debe viajar una nave espacial desde el lugar de un suceso hacia el otro para que los sucesos ocurran al mismo tiempo cuando se miden en el marco de referencia de la nave espacial?
- 88.** Una nave espacial parte de estar en reposo en el origen y acelera a una velocidad constante  $g$ , vista desde la Tierra tomada como marco inercial, hasta alcanzar una velocidad de  $c/2$ . (a) Demuestre que el incremento del tiempo propio está relacionado con el tiempo transcurrido en el marco terrestre por:
- $$d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt.$$
- (b) Encuentre una expresión para el tiempo transcurrido para alcanzar la velocidad  $c/2$  visto en el marco de la Tierra. (c) Utilice la relación en (a) para obtener una expresión similar para el tiempo propio transcurrido para alcanzar  $c/2$  visto en la nave espacial, y determine la relación del tiempo visto desde la Tierra con el de la nave espacial para alcanzar la velocidad final.
- 89.** (a) Todas las galaxias, excepto las más cercanas, se alejan de nuestra Vía Láctea. Si una galaxia  $12,0 \times 10^9 \text{ ly}$  se aleja de nosotros a  $0,900c$ , ¿a qué velocidad relativa a nosotros debemos enviar una sonda de exploración para acercarnos a la otra galaxia a  $0,990c$  medida desde esa galaxia? (b) ¿Cuánto tardará la sonda en llegar a la otra galaxia según lo medido desde la Tierra? Podemos suponer que la velocidad de

- la otra galaxia permanece constante. (c) ¿Cuánto tiempo tardará entonces en emitirse una señal de radio? (Todo esto es posible en principio, pero no es práctico)
90. Supongamos que una nave espacial que se dirige directamente hacia la Tierra a  $0,750c$  puede disparar un bote a  $0,500c$  con respecto a la nave. (a) ¿Cuál es la velocidad del bote con respecto a la Tierra, si se dispara directamente hacia esta? (b) ¿Si se dispara directamente lejos de la Tierra?
91. Repita el problema anterior con la nave alejándose directamente de la Tierra.
92. Si una nave espacial se aproxima a la Tierra a  $0,100c$  y se envía una cápsula de mensajes hacia ella a  $0,100c$  respecto a la Tierra, ¿cuál es la velocidad de la cápsula respecto a la nave?
93. (a) Supongamos que la velocidad de la luz fuera solo de  $3000 \text{ m/s}$ . Un avión de combate que se mueve hacia un objetivo en tierra a  $800 \text{ m/s}$  dispara balas, cada una de las cuales tiene una velocidad de boca de  $1000 \text{ m/s}$ . ¿Cuál es la velocidad de las balas en relación con el objetivo? (b) Si la velocidad de la luz fuera tan pequeña, ¿observarías efectos relativistas en la vida cotidiana? Discuta.
94. Si una galaxia que se aleja de la Tierra tiene una velocidad de  $1000 \text{ km/s}$  y emite una luz de  $656 \text{ nm}$  característica del hidrógeno (el elemento más común del universo). (a) ¿Qué longitud de onda observaríamos en la Tierra? (b) ¿De qué tipo de radiación electromagnética se trata? (c) ¿Por qué la velocidad de la Tierra en su órbita es aquí despreciable?
95. Una sonda espacial que se dirige a toda velocidad hacia la estrella más cercana se mueve a  $0,250c$  y envía información de radio a una frecuencia de emisión de  $1,00 \text{ GHz}$ . ¿Qué frecuencia se recibe en la Tierra?
96. Cerca del centro de nuestra galaxia, el gas de hidrógeno se aleja directamente de nosotros en su órbita alrededor de un agujero negro. Recibimos una radiación electromagnética de  $1900 \text{ nm}$  y sabemos que era de  $1875 \text{ nm}$  cuando la emitía el gas hidrógeno. ¿Cuál es la velocidad del gas?
97. (a) Calcule la velocidad de una partícula de polvo de  $1,00\text{-}\mu\text{g}$  que tiene el mismo momento que un protón que se mueve a  $0,999c$ . (b) ¿Qué nos dice la pequeña velocidad sobre la masa de un protón en comparación con una cantidad mínima de materia macroscópica?
98. (a) Calcule  $\gamma$  para un protón que tiene un momento de  $1,00 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ . (b) ¿Cuál es su velocidad? Estos protones constituyen un componente poco frecuente de la radiación cósmica de origen incierto.
99. Demuestre que la forma relativista de la segunda ley de Newton es (a)  $F = m \frac{du}{dt} \frac{1}{(1-u^2/c^2)^{3/2}}$ ; (b) Encuentre la fuerza necesaria para acelerar una masa de  $1 \text{ kg}$  en  $1 \text{ m/s}^2$  cuando se desplaza a una velocidad de  $c/2$ .
100. Un positrón es una versión antimateria del electrón, que tiene exactamente la misma masa. Cuando un positrón y un electrón se encuentran, se aniquilan, convirtiendo toda su masa en energía. (a) Encuentre la energía liberada, suponiendo una energía cinética insignificante antes de la aniquilación. (b) Si esta energía se da a un protón en forma de energía cinética, ¿cuál es su velocidad? (c) Si esta energía se da a otro electrón en forma de energía cinética, ¿cuál es su velocidad?
101. ¿Cuál es la energía cinética en MeV de un  $\pi$ -mesón que vive  $1,40 \times 10^{-16} \text{ s}$  según lo medido en el laboratorio, y  $0,840 \times 10^{-16} \text{ s}$  cuando está en reposo respecto a un observador, dado que su energía de reposo es de  $135 \text{ MeV}$ ?
102. Encuentre la energía cinética en MeV de un neutrón con un tiempo de vida medido de  $2065 \text{ s}$ , dado que su energía de reposo es de  $939,6 \text{ MeV}$ , y el tiempo de vida en reposo es de  $900 \text{ s}$ .
103. (a) Demuestre que  $(pc)^2/(mc^2)^2 = \gamma^2 - 1$ . Esto significa que a grandes velocidades  $pc \gg mc^2$ . (b) ¿Es  $E \approx pc$  cuando  $\gamma = 30,0$ , en relación al astronauta del que se habla en la paradoja de los gemelos?
104. Un neutrón de rayo cósmico tiene una velocidad de  $0,250c$  respecto a la Tierra. (a) ¿Cuál es la energía total del neutrón en MeV? (b) Encuentre su momento. (c) ¿Es  $E \approx pc$  en esta situación? Discuta en términos de la ecuación dada en la parte (a) del problema anterior.
105. ¿Qué es  $\gamma$  para un protón con una energía de masa de  $938,3 \text{ MeV}$  acelerado a través de un potencial efectivo de  $1,0 \text{ TV}$  (teravoltio)?
106. (a) ¿Cuál es el potencial efectivo de aceleración de los electrones en el Acelerador Lineal de Stanford, si  $\gamma = 1,00 \times 10^5$  para ellos? (b) ¿Cuál es su energía total (casi igual a la cinética en este caso) en GeV?
107. (a) Utilizando los datos de [Energía potencial de](#)

- [un sistema \(http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-1/pages/8-1-energia-potencial-de-un-sistema\)](http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-1/pages/8-1-energia-potencial-de-un-sistema), halle la masa destruida cuando se libera la energía de un barril de petróleo crudo. (b) Dado que estos barriles contienen 200 litros y suponiendo que la densidad del petróleo crudo es de  $750\text{kg/m}^3$ , cuál es la relación entre la masa destruida y la masa original,  $\Delta m/m$ ?
- 108.** (a) Calcule la energía liberada por la destrucción de  $1,00\text{ kg}$  de masa. (b) ¿Cuántos kilogramos podrían elevarse a una altura de  $10,0\text{ km}$  con esta cantidad de energía?
- 109.** Un acelerador de Van de Graaff utiliza una diferencia de potencial de  $50,0\text{ MV}$  para acelerar partículas cargadas como los protones. (a) ¿Cuál es la velocidad de un protón acelerado por dicho potencial? (b) ¿Un electrón?
- 110.** Supongamos que utiliza una media de  $500\text{ kW} \cdot \text{h}$  de energía eléctrica al mes en su hogar. (a) ¿Cuánto tiempo le duraría  $1,00\text{ g}$  de masa convertida en energía eléctrica con un rendimiento del  $38,0\%$ ? (b) ¿Cuántos hogares podrían ser abastecidos a la tasa de  $500\text{ kW} \cdot \text{h}$  al mes durante un año por la energía de la conversión de masa descrita?
- 111.** (a) Una planta de energía nuclear convierte la energía de la fisión nuclear en electricidad con un rendimiento del  $35,0\%$ . ¿Cuánta masa se destruye en un año para producir  $1000\text{ MW}$  continuos de potencia eléctrica? (b) ¿Cree que sería posible observar esta pérdida de masa si la masa total del combustible es  $10^4\text{ kg}$ ?
- 112.** Los cohetes de propulsión nuclear se investigaron durante algunos años antes de que los problemas de seguridad se convirtieran en algo primordial. (a) ¿Qué fracción de la masa de un cohete tendría que destruirse para ponerlo en una órbita terrestre baja, sin tener en cuenta la disminución de la gravedad? (Suponga una altitud orbital de  $250\text{ km}$  y calcule tanto la energía cinética (clásica) como la energía potencial gravitacional necesarias). (b) Si la nave tiene una masa de  $1,00 \times 10^5\text{ kg}$  ( $100$  toneladas), ¿qué rendimiento total de la explosión nuclear en toneladas de TNT se necesita?
- 113.** El sol produce energía a una tasa de  $3,85 \times 10^{26}\text{ W}$  por la fusión del hidrógeno. Aproximadamente el  $0,7\%$  de cada kilogramo de hidrógeno se destina a la energía generada por el Sol. (a) ¿Cuántos kilogramos de hidrógeno se fusionan cada segundo? (b) Si el Sol tiene un  $90,0\%$  de hidrógeno y la mitad de éste puede fusionarse antes de que el Sol cambie de carácter, ¿durante cuánto tiempo podría producir energía a su ritmo actual? (c) ¿Cuántos kilogramos de masa está perdiendo el Sol por segundo? (d) ¿Qué fracción de su masa habrá perdido en el tiempo encontrado en la parte (b)?
- 114.** Demuestre que  $E^2 - p^2 c^2$  para una partícula es invariante bajo las transformaciones de Lorentz.

# CAPÍTULO 6

## Fotones y ondas de materia



**Figura 6.1** En esta imagen de polen tomada con un microscopio electrónico, los granos con forma de frijol son aproximadamente de  $50\mu\text{m}$  de largo. Los microscopios electrónicos pueden tener un poder de resolución mucho mayor que un microscopio de luz convencional, ya que las longitudes de onda de los electrones pueden ser 100.000 veces más cortas que las de los fotones de la luz visible (crédito: modificación del trabajo por las Instalaciones de Microscopía Electrónica de Dartmouth College).

### ESQUEMA DEL CAPITULO

- 6.1 Radiación de cuerpo negro**
- 6.2 Efecto fotoeléctrico**
- 6.3 El efecto Compton**
- 6.4 Modelo de Bohr del átomo de hidrógeno**
- 6.5 Las ondas de materia de De Broglie**
- 6.6 Dualidad onda-partícula**

**INTRODUCCIÓN** Dos de los conceptos más revolucionarios del siglo XX fueron la descripción de la luz como un conjunto de partículas y el tratamiento de las partículas como ondas. Estas propiedades ondulatorias de la materia han conducido al descubrimiento de tecnologías como la microscopía electrónica, que permite examinar objetos submicroscópicos como los granos de polen, como se muestra arriba.

En este capítulo, aprenderá sobre el cuanto de energía, un concepto que fue introducido en 1900 por el físico alemán Max Planck para explicar la radiación de cuerpo negro. Analizamos cómo Albert Einstein extendió el concepto de Planck a un quantum de luz (un "fotón") para explicar el efecto fotoeléctrico. También mostramos cómo el físico estadounidense Arthur H. Compton utilizó el concepto de fotón en 1923 para explicar los cambios de longitud de onda observados en los rayos X. Tras un análisis del modelo de hidrógeno de Bohr, describimos cómo las ondas de materia fueron postuladas en 1924 por Louis-Victor de Broglie para justificar el modelo de Bohr y examinamos los experimentos realizados en 1923-1927 por Clinton Davisson y Lester

Germer que confirmaron la existencia de las ondas de materia de De Broglie.

## 6.1 Radiación de cuerpo negro

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

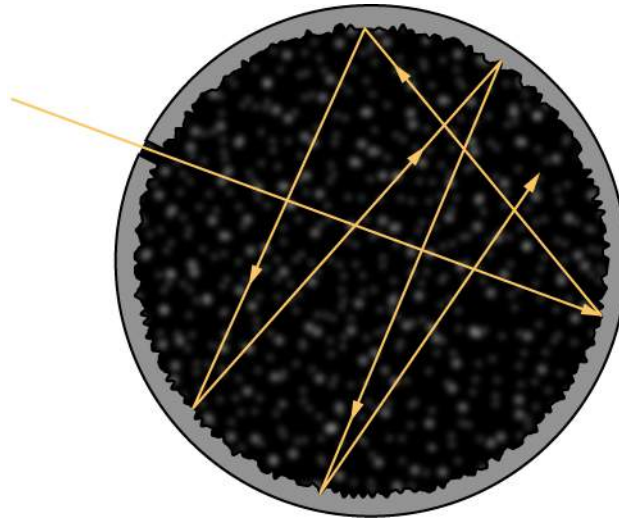
- Aplicar las leyes de Wien y Stefan para analizar la radiación emitida por un cuerpo negro
- Explicar la hipótesis de los cuantos de energía de Planck

Todos los cuerpos emiten radiaciones electromagnéticas en un rango de longitudes de onda. En un capítulo anterior, aprendimos que un cuerpo más frío radia menos energía que un cuerpo más caliente. También sabemos por observación que cuando un cuerpo se calienta y su temperatura aumenta, la longitud de onda percibida de su radiación emitida cambia de infrarrojo a rojo, y luego de rojo a naranja, y así sucesivamente. A medida que aumenta su temperatura, el cuerpo brilla con los colores correspondientes a longitudes de onda cada vez más pequeñas del espectro electromagnético. Este es el principio subyacente de la bombilla incandescente: Un filamento metálico caliente brilla de color rojo y, cuando se sigue calentando, su resplandor acaba cubriendo toda la parte visible del espectro electromagnético. La temperatura ( $T$ ) del objeto que emite la radiación, o del **emisor**, determina la longitud de onda a la que la energía radiada llega al máximo. Por ejemplo, el Sol, cuya temperatura superficial está en el rango entre 5000 K y 6000 K, radia con mayor intensidad en un rango de longitudes de onda de unos 560 nm en la parte visible del espectro electromagnético. El cuerpo, cuando está a su temperatura normal de unos 300 K, radia con mayor intensidad en la parte infrarroja del espectro.

La radiación que incide sobre un objeto es parcialmente absorbida y parcialmente reflejada. En equilibrio termodinámico, la velocidad con la que un objeto absorbe la radiación es la misma que la velocidad con la que la emite. Por lo tanto, un buen **absorbente** de radiación (cualquier objeto que absorba radiación) es también un buen emisor. Un absorbente perfecto absorbe toda la radiación electromagnética que incide sobre él; tal objeto se denomina **cuerpo negro**.

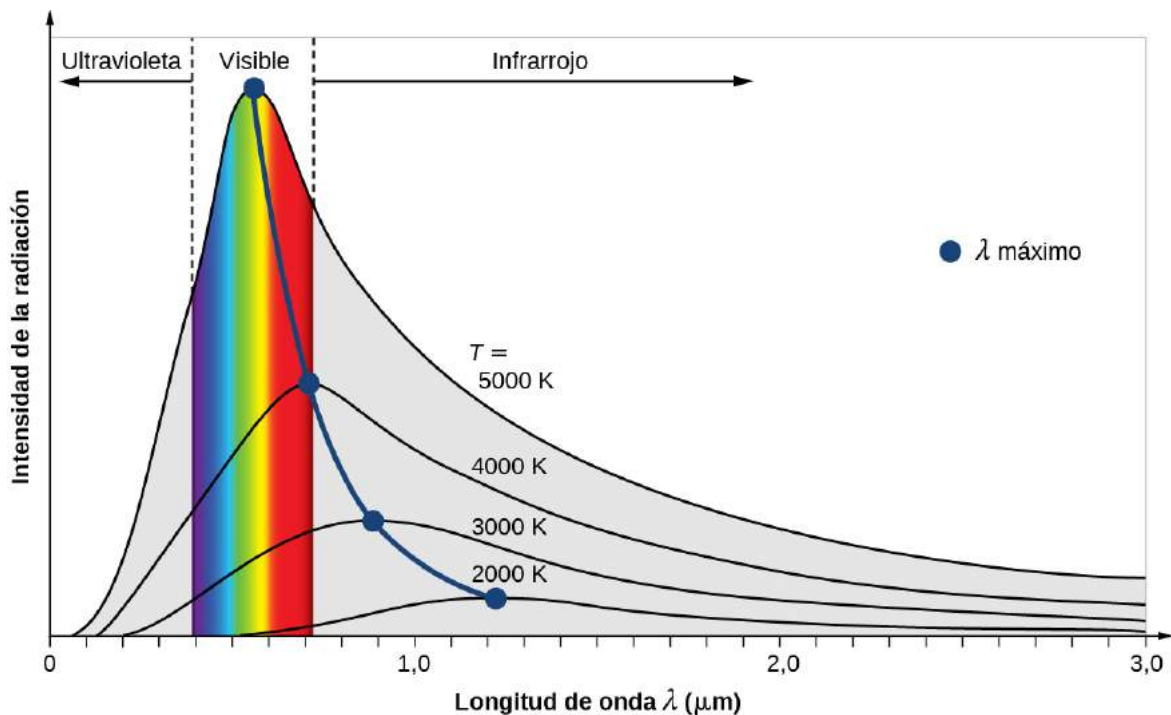
Aunque el cuerpo negro es una idealización, ya que ningún objeto físico absorbe el 100 % de la radiación incidente, podemos construir una realización cercana de un cuerpo negro en forma de un pequeño agujero en la pared de un recinto sellado conocido como radiador de cavidad, como se muestra en la [Figura 6.2](#). Las paredes interiores de un radiador de cavidad son ásperas y están ennegrecidas, de modo que cualquier radiación que entre a través de un pequeño agujero en la pared de la cavidad queda atrapada dentro de ésta. En equilibrio termodinámico (a la temperatura  $T$ ), las paredes de la cavidad absorben exactamente la misma radiación que emiten. Además, en el interior de la cavidad, la radiación que entra en el agujero se equilibra con la que sale de él. El espectro de emisión de un cuerpo negro puede obtenerse analizando la luz que radia el agujero. Las ondas electromagnéticas emitidas por un cuerpo negro se denominan **radiación de cuerpo negro**.



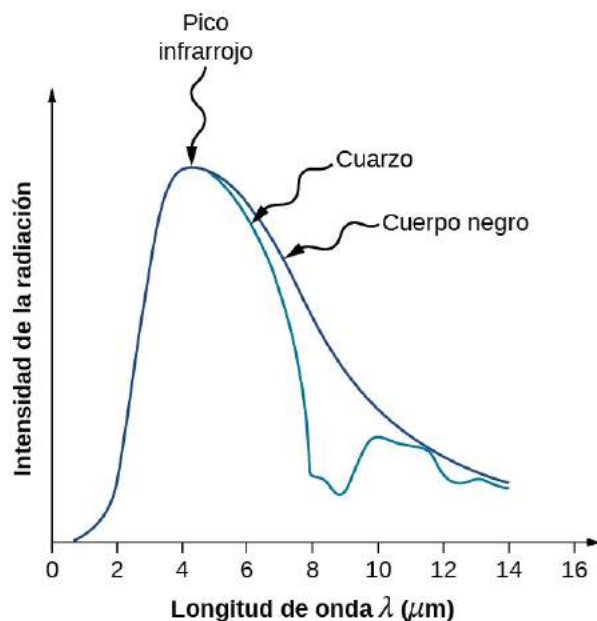


**FIGURA 6.2** Un cuerpo negro se realiza físicamente mediante un pequeño agujero en la pared de un radiador de cavidad.

La intensidad  $I(\lambda, T)$  de la radiación de cuerpo negro depende de la longitud de onda  $\lambda$  de la radiación emitida y en la temperatura  $T$  de cuerpo negro (Figura 6.3). La función  $I(\lambda, T)$  es la **intensidad de potencia** que se radia por unidad de longitud de onda; en otras palabras, es la potencia que se irradia por unidad de superficie del orificio de un radiador de cavidad por unidad de longitud de onda. Según esta definición,  $I(\lambda, T)d\lambda$  es la potencia por unidad de superficie que se emite en el intervalo de longitudes de onda de  $\lambda$  a  $\lambda + d\lambda$ . La distribución de la intensidad entre las longitudes de onda de la radiación emitida por las cavidades se estudió experimentalmente a finales del siglo XIX. Por lo general, la radiación emitida por los materiales solo sigue aproximadamente la curva de radiación de cuerpo negro (Figura 6.4); sin embargo, los espectros de las estrellas comunes sí siguen la curva de radiación de cuerpo negro muy de cerca.



**FIGURA 6.3** La intensidad de la radiación de cuerpo negro frente a la longitud de onda de la radiación emitida. Cada curva corresponde a una temperatura de cuerpo negro diferente, empezando por una temperatura baja (la curva más baja) hasta una temperatura alta (la curva más alta).



**FIGURA 6.4** El espectro de radiación emitido por una superficie de cuarzo (curva azul) y la curva de radiación de cuerpo negro (curva negra) a 600 K.

Dos importantes leyes resumen los hallazgos experimentales de la radiación de cuerpo negro: *La ley de desplazamiento de Wien* y *la ley de Stefan*. La ley de desplazamiento de Wien se ilustra en la [Figura 6.3](#) mediante la curva que une los máximos de las curvas de intensidad. En estas curvas, vemos que cuanto más caliente está el cuerpo, más corta es la longitud de onda correspondiente al pico de emisión en la curva de radiación. Cuantitativamente, la ley de Wien dice

$$\lambda_{\max} T = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \quad 6.1$$

donde  $\lambda_{\max}$  es la posición del máximo en la curva de radiación. En otras palabras,  $\lambda_{\max}$  es la longitud de onda a la que un cuerpo negro radia con mayor intensidad a una temperatura  $T$ . Observe que en la [Ecuación 6.1](#), la temperatura está en kelvins. La ley de desplazamiento de Wien nos permite estimar las temperaturas de las estrellas lejanas midiendo la longitud de onda de la radiación que emiten.

## EJEMPLO 6.1

### Temperaturas de las estrellas lejanas

En una noche clara durante los meses de invierno, si usted se encuentra en el hemisferio norte y mira al cielo, podrá ver la constelación de Orión (El Cazador). Una estrella de esta constelación, Rigel, titila en color azul y otra estrella, Betelgeuse, tiene un color rojizo, como se muestra en la [Figura 6.5](#). ¿Cuál de estas dos estrellas es más fría, Betelgeuse o Rigel?

#### Estrategia

Consideremos cada estrella como un cuerpo negro. Entonces, según la ley de Wien, su temperatura es inversamente proporcional a la longitud de onda de su pico de intensidad. La longitud de onda  $\lambda_{\max}^{(\text{azul})}$  de la luz azul es más corta que la longitud de onda  $\lambda_{\max}^{(\text{rojo})}$  de luz roja. Aunque no conozcamos las longitudes de onda exactas, podemos establecer una proporción.

#### Solución

Escribiendo la ley de Wien para la estrella azul y para la estrella roja, tenemos

$$\lambda_{\max}^{(\text{rojo})} T_{(\text{rojo})} = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} = \lambda_{\max}^{(\text{azul})} T_{(\text{azul})} \quad 6.2$$



Si se simplifica, la [Ecuación 6.2](#) nos da

$$T_{(\text{rojo})} = \frac{\lambda_{\text{max}}^{(\text{azul})}}{\lambda_{\text{max}}^{(\text{rojo})}} T_{(\text{azul})} < T_{(\text{azul})} \quad 6.3$$

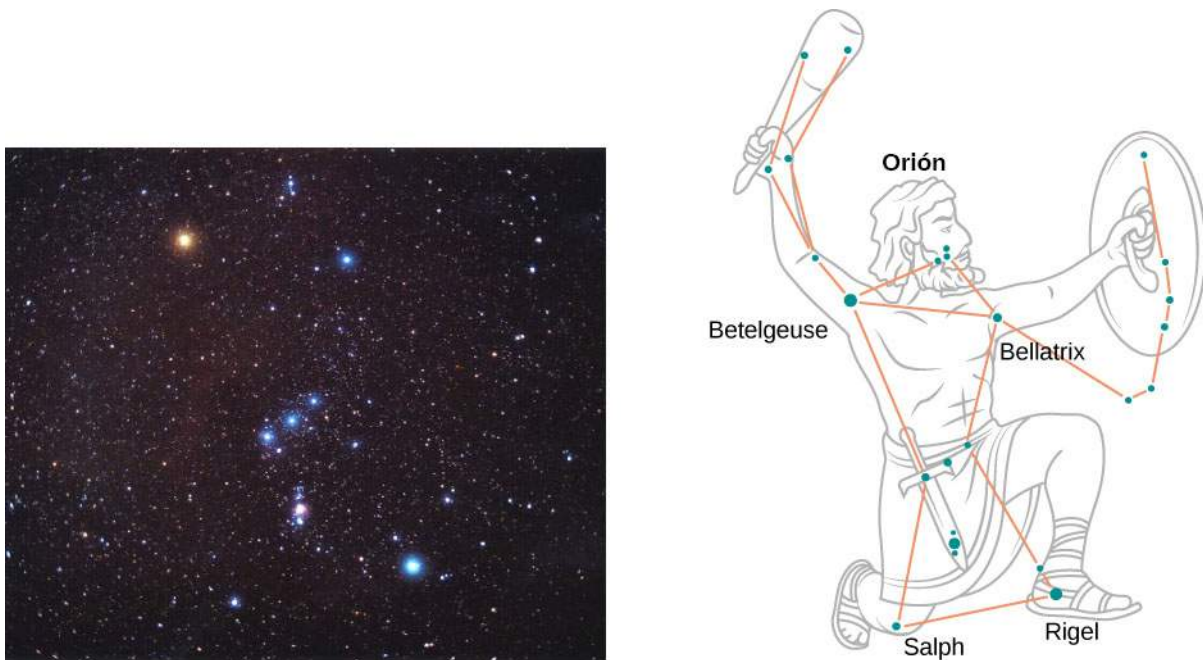
Por lo tanto, Betelgeuse es más fría que Rigel.

### Importancia

Observe que la ley de desplazamiento de Wien nos dice que mientras mayor es la temperatura de un cuerpo emisor, menor es la longitud de onda de la radiación que emite. El análisis cualitativo presentado en este ejemplo es generalmente válido para cualquier cuerpo emisor, ya sea un objeto grande como una estrella o un objeto pequeño como el filamento incandescente de una bombilla.

## ✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.1

La llama de una vela con olor a melocotón tiene un color amarillento y la llama de un mechero Bunsen en un laboratorio de química tiene un color azulado. ¿Qué llama tiene una temperatura más alta?



**FIGURA 6.5** En la constelación de Orión, la estrella roja Betelgeuse, que suele adquirir un tono amarillento, aparece como el hombro derecho de la figura (en la parte superior izquierda). La estrella azul gigante de la parte inferior derecha es Rigel, que aparece como el pie izquierdo del cazador (crédito en la izquierda: modificación del trabajo de Matthew Spinelli, Fotografía Astronómica Diaria [Astronomy Picture of the Day, APOD] de la NASA).

La segunda relación experimental es la ley de Stefan, que se refiere a la potencia total de la radiación de cuerpo negro emitida en todo el espectro de longitudes de onda a una temperatura determinada. En la [Figura 6.3](#), esta potencia total está representada por el área bajo la curva de radiación de cuerpo negro para una  $T$  dada. A medida que la temperatura de un cuerpo negro aumenta, la potencia total emitida también aumenta. Cuantitativamente, la ley de Stefan expresa esta relación como

$$P(T) = \sigma AT^4 \quad 6.4$$

donde  $A$  es la superficie de un cuerpo negro,  $T$  es su temperatura (en kelvins), y  $\sigma$  es la **constante de Stefan-Boltzmann**,  $\sigma = 5,670 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ . La ley de Stefan nos permite estimar la cantidad de energía que radia una estrella midiendo a distancia su temperatura.

## EJEMPLO 6.2

### La radiación de estelar de potencia

Una estrella como nuestro Sol acabará evolucionando hasta convertirse en una "gigante roja" y después en una "enana blanca". Una enana blanca típica tiene aproximadamente el tamaño de la Tierra, y su temperatura superficial es de aproximadamente  $2,5 \times 10^4 \text{ K}$ . Una gigante roja típica tiene una temperatura superficial de  $3,0 \times 10^3 \text{ K}$  y un radio  $\sim 100.000$  veces mayor que el de una enana blanca. ¿Cuál es la potencia media radiada por unidad de superficie y la potencia total radiada por cada uno de estos tipos de estrellas? ¿Cómo se comparan?

#### Estrategia

Si tratamos la estrella como un cuerpo negro, entonces, según la ley de Stefan, la potencia total que radia la estrella es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura. Para encontrar la potencia radiada por unidad de superficie, no necesitamos hacer ninguna suposición sobre la forma de la estrella porque  $P/A$  solo depende de la temperatura. Sin embargo, para calcular la potencia total, debemos suponer que la energía se radia a través de una superficie esférica que rodea a la estrella, de modo que la superficie es  $A = 4\pi R^2$ , donde  $R$  es su radio.

#### Solución

Una simple proporción basada en la ley de Stefan da

$$\frac{P_{\text{enana}}/A_{\text{enana}}}{P_{\text{gigante}}/A_{\text{gigante}}} = \frac{\sigma T_{\text{enana}}^4}{\sigma T_{\text{gigante}}^4} = \left(\frac{T_{\text{enana}}}{T_{\text{gigante}}}\right)^4 = \left(\frac{2,5 \times 10^4}{3,0 \times 10^3}\right)^4 = 4.820 \quad 6.5$$

La potencia emitida por unidad de superficie por una enana blanca es unas 5000 veces superior a la emitida por una gigante roja. Esta relación se denota por  $a = 4,8 \times 10^3$ , La [Ecuación 6.5](#) nos da

$$\frac{P_{\text{enana}}}{P_{\text{gigante}}} = a \frac{A_{\text{enana}}}{A_{\text{gigante}}} = a \frac{4\pi R_{\text{enana}}^2}{4\pi R_{\text{gigante}}^2} = a \left(\frac{R_{\text{enana}}}{R_{\text{gigante}}}\right)^2 = 4,8 \times 10^3 \left(\frac{R_{\text{enana}}}{10^5 R_{\text{enana}}}\right)^2 = 4,8 \times 10^{-7} \quad 6.6$$

Vemos que la potencia total emitida por una enana blanca es una pequeña fracción de la potencia total emitida por una gigante roja. A pesar de su temperatura relativamente más baja, la potencia total radiada por una gigante roja supera con creces la de la enana blanca porque la gigante roja tiene una superficie mucho mayor. Para estimar el valor absoluto de la potencia emitida por unidad de superficie, volvemos a utilizar la ley de Stefan. Para la enana blanca, obtenemos

$$\frac{P_{\text{enana}}}{A_{\text{enana}}} = \sigma T_{\text{enana}}^4 = 5,670 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} (2,5 \times 10^4 \text{ K})^4 = 2,2 \times 10^{10} \text{ W/m}^2 \quad 6.7$$

El resultado análogo para la gigante roja se obtiene escalando el resultado para una enana blanca:

$$\frac{P_{\text{gigante}}}{A_{\text{gigante}}} = \frac{2,2 \times 10^{10} \text{ W}}{4,82 \times 10^3 \text{ m}^2} = 4,56 \times 10^6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cong 4,6 \times 10^6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad 6.8$$

#### Importancia

Para estimar la potencia total emitida por una enana blanca, en principio, podríamos utilizar la [Ecuación 6.7](#). Sin embargo, para encontrar su superficie, necesitamos conocer el radio medio, que no se proporciona en este ejemplo. Por lo tanto, hasta aquí llega la solución. Lo mismo ocurre con la estrella gigante roja.

## COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.2

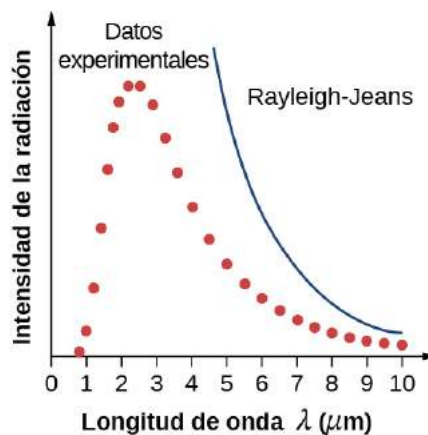
Se calienta un atizador de hierro. A medida que aumenta su temperatura, el atizador empieza a brillar, primero con un rojo apagado, luego con un rojo brillante, después naranja y finalmente amarillo. Utilice la curva de radiación de cuerpo negro o la ley de Wien para explicar estos cambios en el color del resplandor.

### ✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.3

Supongamos que dos estrellas,  $\alpha$  y  $\beta$ , radian exactamente la misma potencia total. Si el radio de la estrella  $\alpha$  es tres veces mayor que la de la estrella  $\beta$ , ¿cuál es la relación entre las temperaturas superficiales de estas estrellas? ¿Cuál es más caliente?

El término "cuerpo negro" fue acuñado por Gustav R. Kirchhoff en 1862. La curva de radiación de cuerpo negro se conocía experimentalmente, pero su forma no encontró explicación física hasta el año 1900. El modelo físico de un cuerpo negro a temperatura  $T$  es el de las ondas electromagnéticas encerradas en una cavidad (vea la [Figura 6.2](#)) y en equilibrio termodinámico con las paredes de la cavidad. Las ondas pueden intercambiar energía con las paredes. Nuestro objetivo es encontrar la distribución de la densidad de energía entre varios modos de vibración en varias longitudes de onda (o frecuencias). En otras palabras, queremos saber cuánta energía transporta una sola longitud de onda o una banda de longitudes de onda. Una vez que conozcamos la distribución de energía, podemos utilizar métodos estadísticos estándar (similares a los estudiados en un capítulo anterior) para obtener la curva de radiación de cuerpo negro, la ley de Stefan y la ley de desplazamiento de Wien. Cuando el modelo físico es correcto, las predicciones teóricas deberían coincidir con las curvas experimentales.

En una aproximación clásica al problema de la radiación de cuerpo negro, en la que la radiación se trata como ondas (como se ha estudiado en capítulos anteriores), los modos de las ondas electromagnéticas atrapadas en la cavidad están en equilibrio e intercambian continuamente sus energías con las paredes de la cavidad. No hay ninguna razón física para que una onda haga lo contrario: Se puede intercambiar cualquier cantidad de energía, ya sea que la onda la transfiera al material de la pared o que este se la transfiera a la onda. Esta imagen clásica es la base del modelo desarrollado por Lord Rayleigh e, independientemente, por Sir James Jeans. El resultado de este modelo clásico para las curvas de radiación de cuerpo negro se conoce como la *ley de Rayleigh-Jeans*. Sin embargo, como se muestra en la [Figura 6.6](#), la ley de Rayleigh-Jeans no reproduce correctamente los resultados experimentales. En el límite de las longitudes de onda cortas, la ley de Rayleigh-Jeans predice una intensidad de radiación infinita, lo que no concuerda con los resultados experimentales en los que la intensidad de radiación tiene valores finitos en la región ultravioleta del espectro. Esta divergencia entre los resultados de la teoría clásica y los experimentos, que llegó a denominarse la *catástrofe ultravioleta* muestra cómo la física clásica no puede explicar el mecanismo de la radiación de cuerpo negro.



**FIGURA 6.6** La catástrofe ultravioleta: La ley de Rayleigh-Jeans no explica el espectro de emisión de cuerpo negro observado.

El problema de la radiación de cuerpo negro fue resuelto en 1900 por Max Planck. Planck utilizó la misma idea que el modelo de Rayleigh-Jeans en el sentido de que trató las ondas electromagnéticas entre las paredes del interior de la cavidad de forma clásica, y asumió que la radiación está en equilibrio con las paredes de la cavidad. La idea innovadora que Planck introdujo en su modelo es la suposición de que la radiación de la cavidad se origina en las oscilaciones atómicas dentro de las paredes de la cavidad, y que estas oscilaciones solo pueden tener valores *discretos* de energía. Por lo tanto, la radiación atrapada en las paredes de la cavidad

puede intercambiar energía con las paredes solo en cantidades discretas. La hipótesis de Planck de los valores discretos de energía, que él llamó *cuantos*, supone que los osciladores dentro de las paredes de la cavidad tienen **energías cuantizadas**. Esta era una idea totalmente nueva que iba más allá de la física clásica del siglo XIX porque, como se explicó en un capítulo anterior, en la imagen clásica la energía de un oscilador puede tomar cualquier valor continuo. Planck asumió que la energía de un oscilador ( $E_n$ ) solo puede tener valores discretos, o cuantizados:

$$E_n = nhf, \text{ donde } n = 1, 2, 3, \dots \quad 6.9$$

En la [Ecuación 6.9](#),  $f$  es la frecuencia del oscilador de Planck. El número natural  $n$  que enumera estas energías discretas se llama **número cuántico**. La constante física  $h$  se denomina *constante de Planck*:

$$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 4,136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s} \quad 6.10$$

Cada valor discreto de energía corresponde a un **estado cuántico de un oscilador de Planck**. Los estados cuánticos se enumeran mediante números cuánticos. Por ejemplo, cuando el oscilador de Planck está en su primer estado cuántico  $n = 1$ , su energía es  $E_1 = hf$ ; cuando está en el estado cuántico  $n = 2$ , su energía es  $E_2 = 2hf$ ; cuando está en el estado cuántico  $n = 3$ ,  $E_3 = 3hf$ ; y así sucesivamente.

Observe que la [Ecuación 6.9](#) muestra que hay infinitos estados cuánticos, que pueden representarse como una secuencia  $\{hf, 2hf, 3hf, \dots, (n-1)hf, nhf, (n+1)hf, \dots\}$ . Cada dos estados cuánticos consecutivos de esta secuencia están separados por un salto de energía,  $\Delta E = hf$ . Un oscilador en la pared puede recibir energía de la radiación en la cavidad (absorción), o puede ceder energía a la radiación en la cavidad (emisión). El proceso de absorción envía el oscilador a un estado cuántico superior, y el proceso de emisión envía el oscilador a un estado cuántico inferior. Sea cual sea el camino de este intercambio de energía, la menor cantidad de energía que se puede intercambiar es  $hf$ . No existe un límite superior para la cantidad de energía que se puede intercambiar, pero lo que se intercambie debe ser un múltiplo entero de  $hf$ . Si el paquete de energía no tiene esta cantidad exacta, no se absorbe ni se emite en la pared del cuerpo negro.

### Hipótesis cuántica de Planck

La **hipótesis de los cuantos de energía de Planck** afirma que la cantidad de energía emitida por el oscilador es transportada por el cuanto de radiación,  $\Delta E$  :

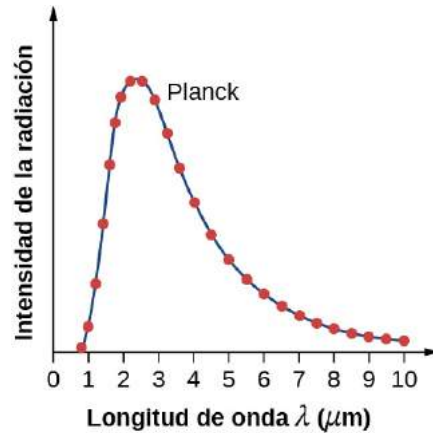
$$\Delta E = hf$$

Recordemos que la frecuencia de la radiación electromagnética está relacionada con su longitud de onda y con la velocidad de la luz por la relación fundamental  $f\lambda = c$ . Esto significa que podemos expresar la [\[link\]](#) de forma equivalente en términos de longitud de onda  $\lambda$ . Cuando se incluye en el cálculo de la densidad de energía de un cuerpo negro, la hipótesis de Planck da la siguiente expresión teórica para la intensidad de potencia de la radiación emitida por unidad de longitud de onda:

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \quad 6.11$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío y  $k_B$  es la constante de Boltzmann,  $k_B = 1,380 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ . La fórmula teórica expresada en la [Ecuación 6.11](#) se denomina *ley de radiación de cuerpo negro de Planck*. Esta ley coincide con la curva experimental de radiación de cuerpo negro (vea la [Figura 6.7](#)). Además, la ley de desplazamiento de Wien y la ley de Stefan pueden derivarse de la [Ecuación 6.11](#). Para derivar la ley de desplazamiento de Wien, utilizamos el cálculo diferencial para encontrar el máximo de la curva de intensidad de la radiación  $I(\lambda, T)$ . Para derivar la ley de Stefan y encontrar el valor de la constante de Stefan-Boltzmann, utilizamos el cálculo integral e integramos  $I(\lambda, T)$  para encontrar la potencia total radiada por un cuerpo negro a una temperatura en todo el espectro de longitudes de onda desde  $\lambda = 0$  hasta  $\lambda = \infty$ . Esta derivación

se deja como ejercicio más adelante en este capítulo.



**FIGURA 6.7** El resultado teórico de Planck (curva continua) y la curva experimental de radiación de cuerpo negro (puntos).

### EJEMPLO 6.3

#### El oscilador cuántico de Planck

Un oscilador cuántico en la pared de la cavidad en la [Figura 6.2](#) está vibrando a una frecuencia de  $5,0 \times 10^{14}$  Hz. Calcule el espacio entre sus niveles de energía.

#### Estrategia

Los estados energéticos de un oscilador cuántico vienen dados por la [Ecuación 6.9](#). El espacio energético  $\Delta E$  se obtiene hallando la diferencia de energía entre dos estados cuánticos adyacentes para los números cuánticos  $n + 1$  y  $n$ .

#### Solución

Podemos sustituir la frecuencia dada y la constante de Planck directamente en la ecuación:

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = (n + 1)hf - nhf = hf = (6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(5,0 \times 10^{14} \text{ Hz}) = 3,3 \times 10^{-19} \text{ J}$$

#### Importancia

Observe que no se especifica qué tipo de material se ha utilizado para construir la cavidad. Aquí, un oscilador cuántico es un modelo teórico de un átomo o molécula de material en la pared.

### COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.4

Una molécula vibra a una frecuencia de  $5,0 \times 10^{14}$  Hz. ¿Cuál es el menor espacio entre sus niveles de energía vibracional?

### EJEMPLO 6.4

#### Teoría cuántica aplicada a un oscilador clásico

Una masa de 1,0 kg oscila en el extremo de un resorte con una constante de resorte de 1000 N/m. La amplitud de estas oscilaciones es de 0,10 m. Utilice el concepto de cuantización para encontrar el espacio de energía de este oscilador clásico. ¿La cuantización de la energía es significativa en los sistemas macroscópicos, como en este oscilador?

**Estrategia**

Utilizamos la [Ecuación 6.10](#) como si el sistema fuera un oscilador cuántico, pero con la frecuencia  $f$  de la masa vibrando sobre un resorte. Para evaluar si la cuantización tiene o no un efecto significativo, comparamos el espacio de energía cuántica con la energía total macroscópica de este oscilador clásico.

**Solución**

Para la constante del resorte,  $k = 1,0 \times 10^3 \text{ N/m}$ , la frecuencia  $f$  de la masa,  $m = 1,0 \text{ kg}$ , es

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1,0 \times 10^3 \text{ N/m}}{1,0 \text{ kg}}} \approx 5,0 \text{ Hz}$$

El cuanto de energía que corresponde a esta frecuencia es

$$\Delta E = hf = (6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(5,0 \text{ Hz}) = 3,3 \times 10^{-33} \text{ J}$$

Cuando las vibraciones tienen una amplitud  $A = 0,10 \text{ m}$ , la energía de las oscilaciones es

$$E = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} (1.000 \text{ N/m})(0,1 \text{ m})^2 = 5,0 \text{ J}$$

**Importancia**

Así, para un oscilador clásico, tenemos  $\Delta E/E \approx 10^{-34}$ . Vemos que la separación de los niveles de energía es inconmensurablemente pequeña. Por lo tanto, a efectos prácticos, la energía de un oscilador clásico adopta valores continuos. Por ello, los principios clásicos pueden aplicarse a los sistemas macroscópicos que se encuentran en la vida cotidiana sin perder exactitud.

**✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.5**

¿El resultado en la [Ejemplo 6.4](#) sería diferente si la masa no fuera de 1,0 kg sino una masa diminuta de 1,0  $\mu\text{g}$ , y la amplitud de las vibraciones fuera de 0,10  $\mu\text{m}$ ?

Cuando Planck publicó por primera vez su resultado, la hipótesis de los cuantos de energía no fue tomada en serio por la comunidad física porque no se desprendía de ninguna teoría física establecida en aquel momento. Fue percibido, incluso por el propio Planck, como un útil truco matemático que conducía a un buen "ajuste" teórico a la curva experimental. Esta percepción cambió en 1905, cuando Einstein publicó su explicación del efecto fotoeléctrico, en la que dio al cuanto de energía de Planck un nuevo significado: el de partícula de luz.

## 6.2 Efecto fotoeléctrico

**OBJETIVOS DE APRENDIZAJE**

Al final de esta sección podrá:

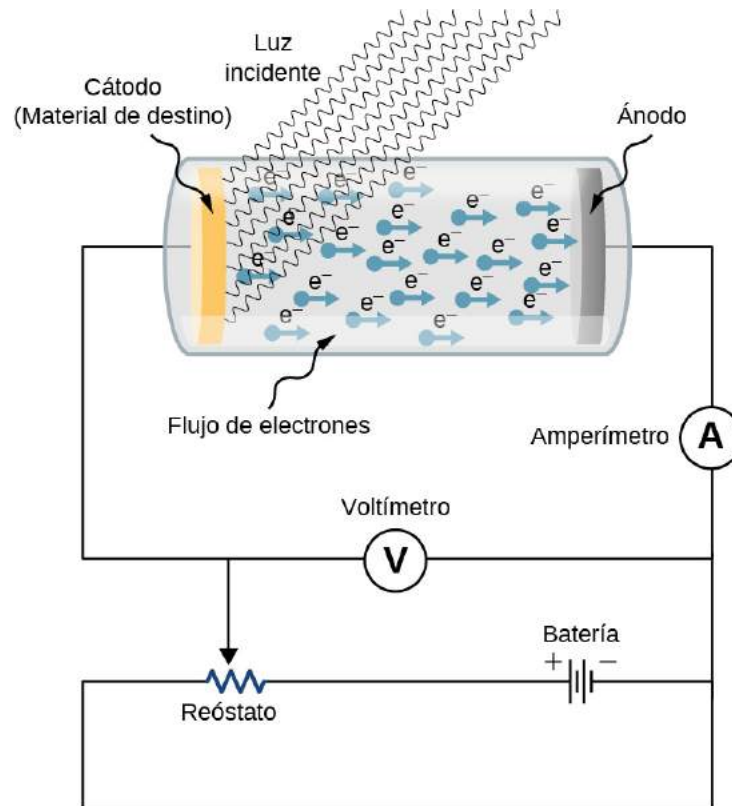
- Describir las características físicas del efecto fotoeléctrico.
- Explicar por qué el efecto fotoeléctrico no puede ser explicado por la física clásica.
- Describir cómo la idea de Einstein de una partícula de radiación explica el efecto fotoeléctrico.

Cuando una superficie metálica se expone a una onda electromagnética monocromática de longitud de onda suficientemente corta (o, lo que es lo mismo, por encima de una frecuencia umbral), la radiación incidente es absorbida y la superficie expuesta emite electrones. Este fenómeno se conoce como **efecto fotoeléctrico**. Los electrones que se emiten en este proceso se denominan **fotoelectrones**.

El montaje experimental para estudiar el efecto fotoeléctrico se muestra esquemáticamente en la [Figura 6.8](#). El material objetivo sirve de cátodo, que se convierte en emisor de fotoelectrones cuando es iluminado por una radiación monocromática. A este electrodo lo llamamos **fotoelectrodo**. Los fotoelectrones se recogen en el ánodo, que se mantiene a un potencial más alto con respecto al cátodo. La diferencia de potencial entre los electrodos puede aumentar o disminuir, o su polaridad puede invertirse. Los electrodos están encerrados en un tubo de vidrio evacuado para que los fotoelectrones no pierdan su energía cinética al chocar con las

moléculas de aire en el espacio entre los electrodos.

Cuando el material objetivo no está expuesto a la radiación, no se registra ninguna corriente en este circuito porque el circuito está roto (observe que hay un espacio entre los electrodos). Pero cuando el material objetivo se conecta al terminal negativo de una batería y se expone a la radiación, se registra una corriente en este circuito; esta corriente se denomina **fotocorriente**. Supongamos que ahora invertimos la diferencia de potencial entre los electrodos para que el material objetivo se conecte ahora con el terminal positivo de una batería, y luego aumentamos lentamente el voltaje. La fotocorriente se extingue gradualmente y finalmente deja de fluir por completo en algún valor de este voltaje invertido. La diferencia de potencial a la que la fotocorriente deja de fluir se denomina **potencial de frenado**.



**FIGURA 6.8** Un montaje experimental para estudiar el efecto fotoeléctrico. El ánodo y el cátodo están encerrados en un tubo de vidrio evacuado. El voltímetro mide la diferencia de potencial eléctrico entre los electrodos, y el amperímetro mide la fotocorriente. La radiación incidente es monocromática.

### Características del efecto fotoeléctrico

El efecto fotoeléctrico tiene tres características importantes que no pueden ser explicadas por la física clásica: (1) la ausencia de un tiempo de retardo, (2) la independencia de la energía cinética de los fotoelectrones respecto a la intensidad de la radiación incidente, y (3) la presencia de una frecuencia de corte. Examinemos cada una de estas características.

#### La ausencia de tiempo de retardo

Cuando la radiación incide en el material objetivo del electrodo, los electrones se emiten casi instantáneamente, incluso con intensidades muy bajas de radiación incidente. Esta ausencia de retardo contradice nuestra comprensión basada en la física clásica. La física clásica predice que, en el caso de la radiación de baja energía, se necesitaría un tiempo considerable antes de que los electrones irradiados pudieran obtener la energía suficiente para abandonar la superficie del electrodo; sin embargo, no se observa tal acumulación de energía.

#### La intensidad de la radiación incidente y la energía cinética de los fotoelectrones

Las curvas experimentales típicas se muestran en la [Figura 6.9](#), en las que se representa la fotocorriente frente

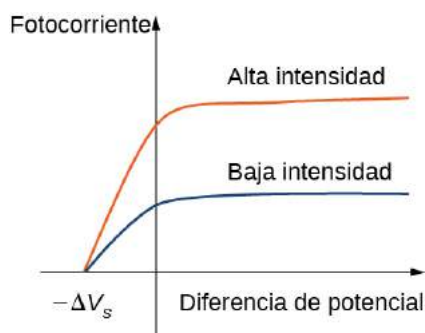


a la diferencia de potencial aplicada entre los electrodos. Para la diferencia de potencial positiva, la corriente crece constantemente hasta alcanzar una meseta. Si se aumenta el potencial más allá de este punto, la fotocorriente no aumenta en absoluto. Una mayor intensidad de radiación produce un mayor valor de fotocorriente. Para la diferencia de potencial negativa, a medida que aumenta el valor absoluto de la diferencia de potencial, el valor de la fotocorriente disminuye y se hace cero en el potencial de frenado. Para cualquier intensidad de radiación incidente, ya sea alta o baja, el valor del potencial de frenado siempre se mantiene en un valor.

Para entender por qué este resultado es inusual desde el punto de vista de la física clásica, primero tenemos que analizar la energía de los fotoelectrones. Un fotoelectrón que sale de la superficie tiene energía cinética  $K$ . Obtuvo esta energía de la onda electromagnética incidente. En el espacio entre los electrodos, un fotoelectrón se mueve en el potencial eléctrico y su energía cambia en la cantidad  $q\Delta V$ , donde  $\Delta V$  es la diferencia de potencial y  $q = -e$ . Como no hay más fuerzas que la eléctrica, al aplicar el teorema de trabajo-energía, obtenemos el balance energético  $\Delta K - e\Delta V = 0$  para el fotoelectrón, donde  $\Delta K$  es el cambio en la energía cinética del fotoelectrón. Cuando se aplica el potencial de frenado  $-\Delta V_s$ , el fotoelectrón pierde su energía cinética inicial  $K_i$  y se queda en reposo. Por lo tanto, su balance energético se convierte en  $(0 - K_i) - e(-\Delta V_s) = 0$ , para que  $K_i = e\Delta V_s$ . En presencia del potencial de frenado, la mayor energía cinética  $K_{\max}$  que puede tener un fotoelectrón es su energía cinética inicial, que tiene en la superficie del fotoelectrodo. Por lo tanto, la mayor energía cinética de los fotoelectrones puede medirse directamente midiendo el potencial de frenado:

$$K_{\max} = e\Delta V_s. \quad 6.12$$

En este punto podemos ver dónde la teoría clásica está en desacuerdo con los resultados experimentales. En la teoría clásica, el fotoelectrón absorbe la energía electromagnética de forma continua; esto significa que cuando la radiación incidente tiene una intensidad elevada, se espera que la energía cinética en la [Ecuación 6.12](#) sea alta. Del mismo modo, cuando la radiación tiene una intensidad baja, se espera que la energía cinética sea baja. Pero el experimento demuestra que la energía cinética máxima de los fotoelectrones es independiente de la intensidad de la luz.

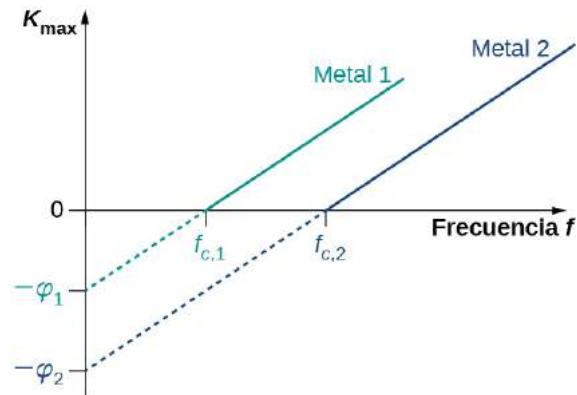


**FIGURA 6.9** La fotocorriente detectada trazada frente a la diferencia de potencial aplicada muestra que para cualquier intensidad de radiación incidente, tanto si la intensidad es alta (curva superior) como baja (curva inferior), el valor del potencial de frenado siempre es el mismo.

#### La presencia de una frecuencia de corte

Para cualquier superficie metálica, existe una frecuencia mínima de radiación incidente por debajo de la cual no se produce la fotocorriente. El valor de esta **frecuencia de corte** para el efecto fotoeléctrico es una propiedad física del metal: Los distintos materiales tienen diferentes valores de frecuencia de corte. Los datos experimentales muestran una tendencia lineal típica (vea la [Figura 6.10](#)). La energía cinética de los fotoelectrones en la superficie crece linealmente con el aumento de la frecuencia de la radiación incidente. Las mediciones de todas las superficies metálicas dan gráficos lineales con una sola pendiente. Ninguno de estos fenómenos observados coincide con la concepción clásica de la naturaleza. Según la descripción clásica, la energía cinética de los fotoelectrones no debería depender en absoluto de la frecuencia de la radiación incidente, y no debería haber ninguna frecuencia de corte. En cambio, en la imagen clásica, los electrones reciben energía de la onda electromagnética incidente de forma continua, y la cantidad de energía que reciben

depende solo de la intensidad de la luz incidente y nada más. Por lo tanto, en el entendimiento clásico, mientras la luz brille, se espera que el efecto fotoeléctrico continúe.



**FIGURA 6.10** Energía cinética de los fotoelectrones en la superficie frente a la frecuencia de la radiación incidente. El efecto fotoeléctrico solo puede producirse por encima de la frecuencia de corte  $f_c$ . Las mediciones de todas las superficies metálicas dan gráficos lineales con una sola pendiente. Cada superficie metálica tiene su propia frecuencia de corte.

### La función del trabajo

En 1905, A. Einstein explicó el efecto fotoeléctrico. Einstein razonó que si la hipótesis de los cuantos de energía de Planck era correcta para describir el intercambio de energía entre la radiación electromagnética y las paredes de la cavidad, también debería funcionar para describir la absorción de energía de la radiación electromagnética por la superficie de un fotoelectrodo. Postuló que una onda electromagnética transporta su energía en paquetes discretos. El postulado de Einstein va más allá de la hipótesis de Planck porque afirma que la propia luz está formada por cuantos de energía. En otras palabras, afirma que las ondas electromagnéticas están cuantizadas.

En el planteamiento de Einstein, un haz de luz monocromática de frecuencia  $f$  está formado por fotones. Un **fotón** es una partícula de luz. Cada fotón se mueve a la velocidad de la luz y lleva un cuanto de energía  $E_f$ . La energía de un fotón depende únicamente de su frecuencia  $f$ . Explícitamente, la **energía de un fotón** es

$$E_f = hf \quad 6.13$$

donde  $h$  es la constante de Planck. En el efecto fotoeléctrico, los fotones llegan a la superficie del metal y cada fotón cede *toda* su energía a *un solo* electrón en la superficie del metal. Esta transferencia de energía del fotón al electrón es del tipo "todo o nada", y no hay transferencias fraccionadas en las que un fotón pierda solo una parte de su energía y sobreviva. La esencia de un **fenómeno cuántico** es que, o bien un fotón transfiere toda su energía y deja de existir, o bien no hay transferencia alguna. Esto contrasta con la imagen clásica, en la que se permiten transferencias de energía fraccionadas. Teniendo esta comprensión cuántica, el balance energético para un electrón en la superficie que recibe la energía  $E_f$  de un fotón es

$$E_f = K_{\max} + \phi$$

donde  $K_{\max}$  es la energía cinética, dada por la [Ecuación 6.12](#), que tiene un electrón en el mismo instante en que se desprende de la superficie. En esta ecuación de balance energético,  $\phi$  es la energía necesaria para desprender un fotoelectrón de la superficie. Esta energía  $\phi$  se denomina **función de trabajo** del metal. Cada metal tiene su función de trabajo característica, como se ilustra en la [Tabla 6.1](#). Para obtener la energía cinética de los fotoelectrones en la superficie, simplemente invertimos la ecuación de balance energético y utilizamos la [Ecuación 6.13](#) para expresar la energía del fotón absorbido. Esto nos da la expresión de la energía cinética de los fotoelectrones, que depende explícitamente de la frecuencia de la radiación incidente:

$$K_{\max} = hf - \phi. \quad 6.14$$

Esta ecuación tiene una forma matemática sencilla, pero su física es profunda. Ahora podemos profundizar en el significado físico de la [Ecuación 6.14](#).

Valores típicos de la función de trabajo para algunos metales comunes	
Metal	$\phi$ (eV)
Na	2,46
Al	4,08
Pb	4,14
Zn	4,31
Fe	4,50
Cu	4,70
Ag	4,73
Pt	6,35

**TABLA 6.1**

En la interpretación de Einstein, las interacciones tienen lugar entre electrones individuales y fotones individuales. La ausencia de tiempo de espera significa que estas interacciones individuales se producen de forma instantánea. Este tiempo de interacción no puede aumentarse disminuyendo la intensidad de la luz. La intensidad de la luz corresponde al número de fotones que llegan a la superficie del metal por unidad de tiempo. Incluso a intensidades de luz muy bajas, el efecto fotoeléctrico sigue produciéndose porque la interacción es entre un electrón y un fotón. Mientras haya al menos un fotón con suficiente energía para transferirlo a un electrón ligado, aparecerá un fotoelectrón en la superficie del fotoelectrodo.

La existencia de la frecuencia de corte  $f_c$  para el efecto fotoeléctrico se deduce de la [Ecuación 6.14](#) porque la energía cinética  $K_{\max}$  del fotoelectrón solo puede tomar valores positivos. Esto significa que debe haber alguna frecuencia umbral para la cual la energía cinética es cero,  $0 = hf_c - \phi$ . De este modo, obtenemos la fórmula explícita de la frecuencia de corte:

$$f_c = \frac{\phi}{h}. \quad 6.15$$

La frecuencia de corte depende únicamente de la función de trabajo del metal y está en proporción directa con ella. Cuando la función de trabajo es grande (cuando los electrones se unen rápidamente a la superficie del metal), la energía del fotón umbral debe ser grande para producir un fotoelectrón, y entonces la frecuencia umbral correspondiente es grande. Fotones con frecuencias superiores a la frecuencia umbral  $f_c$  siempre producen fotoelectrones porque tienen  $K_{\max} > 0$ . Fotones con frecuencias inferiores a  $f_c$  no tienen suficiente energía para producir fotoelectrones. Por lo tanto, cuando la radiación incidente tiene una frecuencia inferior a la frecuencia de corte, no se observa el efecto fotoeléctrico. Porque la frecuencia  $f$  y la longitud de onda  $\lambda$  de las ondas electromagnéticas están relacionadas por la relación fundamental  $\lambda f = c$  (donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío), la frecuencia de corte tiene su correspondiente **longitud de onda de corte**  $\lambda_c$  :

$$\lambda_c = \frac{c}{f_c} = \frac{c}{\phi/h} = \frac{hc}{\phi}. \quad 6.16$$

En esta ecuación,  $hc = 1.240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ . Nuestras observaciones se pueden replantear de la siguiente manera

equivalente: Cuando la radiación incidente tiene longitudes de onda más largas que la longitud de onda de corte, el efecto fotoeléctrico no se produce.

### EJEMPLO 6.5

#### Efecto fotoeléctrico de la plata

Una radiación con una longitud de onda de 300 nm incide sobre una superficie de plata. ¿Se observarán los fotoelectrones?

#### Estrategia

Los fotoelectrones pueden ser expulsados de la superficie metálica solo cuando la radiación incidente tiene una longitud de onda más corta que la longitud de onda de corte. La función de trabajo de la plata es  $\phi = 4,73$  eV (Tabla 6.1). Para hacer la estimación, utilizamos la Ecuación 6.16.

#### Solución

La longitud de onda umbral para observar el efecto fotoeléctrico en la plata es

$$\lambda_c = \frac{hc}{\phi} = \frac{1.240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{4,73 \text{ eV}} = 262 \text{ nm.}$$

La radiación incidente tiene una longitud de onda de 300 nm, que es más larga que la longitud de onda de corte; por lo tanto, no se observan los fotoelectrones.

#### Importancia

Si el fotoelectrodo fuera de sodio en lugar de plata, la longitud de onda de corte sería de 504 nm y se observarían los fotoelectrones.

La Ecuación 6.14 en el modelo de Einstein nos dice que la energía cinética máxima de los fotoelectrones es una función lineal de la frecuencia de la radiación incidente, que se ilustra en la Figura 6.10. Para cualquier metal, la pendiente de este gráfico tiene un valor de la constante de Planck. La intersección con el eje  $K_{\max}$  nos da un valor de la función de trabajo que es característico para el metal. Por otro lado,  $K_{\max}$  se puede medir directamente en el experimento midiendo el valor del potencial de frenado  $\Delta V_s$  (vea la Ecuación 6.12) en el que la fotocorriente se detiene. Estas mediciones directas permiten determinar experimentalmente el valor de la constante de Planck, así como las funciones de trabajo de los materiales.

El modelo de Einstein también da una explicación directa a los valores de fotocorriente que se muestran en la Figura 6.9. Por ejemplo, duplicar la intensidad de la radiación se traduce en duplicar el número de fotones que inciden en la superficie por unidad de tiempo. Cuanto mayor es el número de fotones, mayor es el número de fotoelectrones, lo que conduce a una mayor fotocorriente en el circuito. Así es como la intensidad de la radiación afecta a la fotocorriente. La fotocorriente debe alcanzar una meseta en algún valor de la diferencia de potencial porque, en la unidad de tiempo, el número de fotoelectrones es igual al número de fotones incidentes y el número de fotones incidentes no depende en absoluto de la diferencia de potencial aplicada, sino solo de la intensidad de la radiación incidente. El potencial de frenado no cambia con la intensidad de la radiación porque la energía cinética de los fotoelectrones (vea la Ecuación 6.14) no depende de la intensidad de la radiación.

### EJEMPLO 6.6

#### Función de trabajo y frecuencia de corte

Cuando se utiliza una luz de 180 nm en un experimento con un metal desconocido, la fotocorriente medida cae a cero a un potencial de -0,80 V. Determine la función de trabajo del metal y su frecuencia de corte para el efecto fotoeléctrico.

**Estrategia**

Para encontrar la frecuencia de corte  $f_c$ , utilizamos la [Ecuación 6.15](#), pero primero debemos encontrar la función de trabajo  $\phi$ . Para encontrar  $\phi$ , utilizamos la [Ecuación 6.12](#) y la [Ecuación 6.14](#). La fotocorriente cae a cero en el valor de frenado del potencial, por lo que identificamos  $\Delta V_s = 0,8\text{V}$ .

**Solución**

Utilizamos la [Ecuación 6.12](#) para encontrar la energía cinética de los fotoelectrones:

$$K_{\max} = e\Delta V_s = e(0,80\text{V}) = 0,80\text{ eV}.$$

Ahora resolvemos la [Ecuación 6.14](#) para  $\phi$ :

$$\phi = hf - K_{\max} = \frac{hc}{\lambda} - K_{\max} = \frac{1,240\text{ eV} \cdot \text{nm}}{180\text{ nm}} - 0,80\text{ eV} = 6,09\text{ eV}.$$

Por último, utilizamos la [Ecuación 6.15](#) para encontrar la frecuencia de corte:

$$f_c = \frac{\phi}{h} = \frac{6,09\text{ eV}}{4,136 \times 10^{-15}\text{ eV} \cdot \text{s}} = 1,47 \times 10^{-15}\text{ Hz}.$$

**Importancia**

En cálculos como el que se muestra en este ejemplo, es conveniente utilizar la constante de Planck en las unidades de  $\text{eV} \cdot \text{s}$  y expresar todas las energías en eV en lugar de julios.

**EJEMPLO 6.7****La energía del fotón y la energía cinética de los fotoelectrones**

Una luz violeta de 430 nm incide sobre un fotoelectrodo de calcio con una función de trabajo de 2,71 eV.

Encuentre la energía de los fotones incidentes y la energía cinética máxima de los electrones expulsados.

**Estrategia**

La energía del fotón incidente es  $E_f = hf = hc/\lambda$ , donde utilizamos  $f\lambda = c$ . Para obtener la energía máxima de los electrones expulsados, utilizamos la [Ecuación 6.16](#).

**Solución**

$$E_f = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1,240\text{ eV} \cdot \text{nm}}{430\text{ nm}} = 2,88\text{ eV}, \quad K_{\max} = E_f - \phi = 2,88\text{ eV} - 2,71\text{ eV} = 0,17\text{ eV}$$

**Importancia**

En este montaje experimental, los fotoelectrones dejan de fluir a un potencial de frenado de 0,17 V.

**✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.6**

Una luz amarilla de 589 nm incide sobre una superficie cuya función de trabajo es de 1,20 eV. ¿Cuál es el potencial de frenado? ¿Cuál es la longitud de onda de corte?

**✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.7**

La frecuencia de corte del efecto fotoeléctrico en algunos materiales es  $8,0 \times 10^{13}\text{ Hz}$ . Cuando la luz incidente tiene una frecuencia de  $1,2 \times 10^{14}\text{ Hz}$ , el potencial de frenado se mide como  $-0,16\text{ V}$ . Estime un valor de la constante de Planck a partir de estos datos (en unidades  $\text{J} \cdot \text{s}$  y  $\text{eV} \cdot \text{s}$ ) y determine el porcentaje de error de su estimación.

## 6.3 El efecto Compton

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir el experimento de Compton.
- Explicar el desplazamiento de la longitud de onda Compton.
- Describir cómo los experimentos con rayos X confirman la naturaleza de partícula de la radiación.

Dos de las ideas más influyentes de Einstein introducidas en 1905 fueron la teoría de la relatividad especial y el concepto de cuanto de luz, que ahora llamamos fotón. Más allá de 1905, Einstein fue aún más lejos al sugerir que las ondas electromagnéticas que se propagan libremente están formadas por fotones que son partículas de luz en el mismo sentido que los electrones u otras partículas masivas son partículas de materia. Un haz de luz monocromática de longitud de onda  $\lambda$  (o, lo que es lo mismo, de frecuencia  $f$ ) puede verse como una onda clásica o como un conjunto de fotones que viajan en el vacío con una velocidad,  $c$  (la velocidad de la luz), y que llevan todos la misma energía,  $E_f = hf$ . Esta idea resultó útil para explicar las interacciones de la luz con las partículas de la materia.

### Momento de un fotón

A diferencia de una partícula de materia que se caracteriza por su masa en reposo  $m_0$ , un fotón no tiene masa. En el vacío, a diferencia de una partícula de materia que puede variar su velocidad pero no puede alcanzar la de la luz, un fotón viaja a una sola velocidad, que es exactamente la de la luz. Desde el punto de vista de la mecánica clásica newtoniana, estas dos características implican que un fotón no debería existir en absoluto. Por ejemplo, ¿cómo podemos encontrar el momento lineal o la energía cinética de un cuerpo cuya masa es cero? Esta aparente paradoja desaparece si describimos un fotón como una partícula relativista. Según la teoría de la relatividad especial, cualquier partícula de la naturaleza obedece a la ecuación de energía relativista

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4. \quad 6.17$$

Esta relación también puede aplicarse a un fotón. En la [Ecuación 6.17](#),  $E$  es la energía total de una partícula,  $p$  es su momento lineal y  $m_0$  es su masa en reposo. Para un fotón, simplemente establecemos  $m_0 = 0$  en esta ecuación. Esto nos lleva a la expresión del momento  $p_f$  de un fotón

$$p_f = \frac{E_f}{c}. \quad 6.18$$

Aquí la energía del fotón  $E_f$  es la misma que la de un cuanto de luz de frecuencia  $f$ , que introdujimos para explicar el efecto fotoeléctrico:

$$E_f = hf = \frac{hc}{\lambda}. \quad 6.19$$

La relación de onda que conecta la frecuencia  $f$  con la longitud de onda  $\lambda$  y la velocidad  $c$  también es válida para los fotones:

$$\lambda f = c \quad 6.20$$

Por lo tanto, un fotón puede caracterizarse de forma equivalente por su energía y su longitud de onda, o por su frecuencia y su momento. La [Ecuación 6.19](#) y la [Ecuación 6.20](#) pueden combinarse en la relación explícita entre el momento de un fotón y su longitud de onda:

$$p_f = \frac{h}{\lambda}. \quad 6.21$$

Observe que esta ecuación solo nos da la magnitud del momento del fotón y no contiene información sobre la

dirección en la que este se mueve. Para incluir la dirección, es habitual escribir el momento del fotón como un vector:

$$\vec{p}_f = \hbar \vec{k}. \quad 6.22$$

En la [Ecuación 6.22](#),  $\hbar = h/2\pi$  es la **constante de Planck reducida** (se pronuncia "h con barra"), que no es más que la constante de Planck dividida por el factor  $2\pi$ . El vector  $\vec{k}$  se llama "vector de onda" o vector de propagación (la dirección en la que se mueve un fotón). El **vector de propagación** muestra la dirección del vector de momento lineal del fotón. La magnitud del vector de onda es  $k = |\vec{k}| = 2\pi/\lambda$  y se denomina **número de onda**. Observe que esta ecuación no introduce ninguna física nueva. Podemos comprobar que la magnitud del vector en la [Ecuación 6.22](#) es la misma que la dada por la [Ecuación 6.18](#).

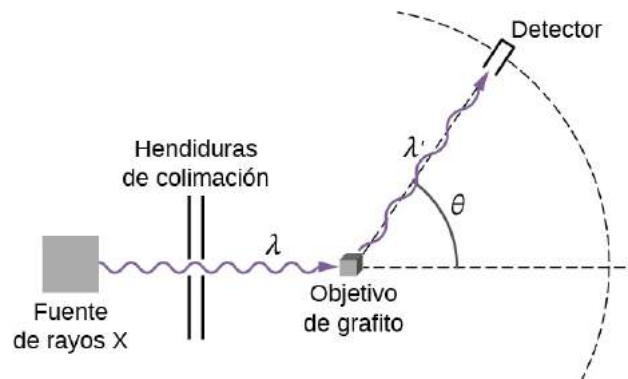
## El efecto Compton

El **efecto Compton** es el término utilizado para un resultado inusual observado cuando los rayos X se dispersan en algunos materiales. Según la teoría clásica, cuando una onda electromagnética se dispersa de los átomos, se espera que la longitud de onda de la radiación dispersada sea la misma que la de la radiación incidente. En contra de esta predicción de la física clásica, las observaciones muestran que cuando los rayos X se dispersan en algunos materiales, como el grafito, los rayos X dispersados tienen longitudes de onda diferentes de las de los rayos X incidentes. Este fenómeno clásicamente inexplicable fue estudiado experimentalmente por Arthur H. Compton y sus colaboradores, y Compton dio su explicación en 1923.

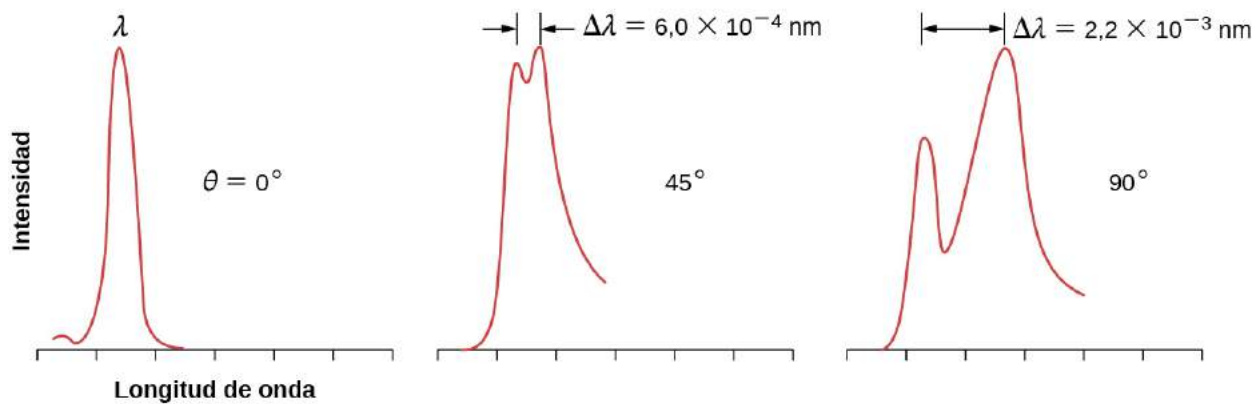
Para explicar el desplazamiento de las longitudes de onda medido en el experimento, Compton utilizó la idea de Einstein de la luz como partícula. El efecto Compton ocupa un lugar muy importante en la historia de la física porque demuestra que la radiación electromagnética no puede explicarse como un fenómeno puramente ondulatorio. La explicación del efecto Compton proporcionó un argumento convincente a la comunidad física de que las ondas electromagnéticas pueden comportarse en efecto como una corriente de fotones, lo que situó el concepto de fotón en una base sólida.

El esquema del montaje experimental de Compton se muestra en la [Figura 6.11](#). La idea del experimento es sencilla: rayos X monocromáticos con longitud de onda  $\lambda$  inciden sobre una muestra de grafito (el "objetivo"), donde interactúan con los átomos del interior de la muestra; posteriormente, emergen como rayos X dispersos con longitud de onda  $\lambda'$ . Un detector colocado detrás del objetivo puede medir la intensidad de la radiación que se dispersa en cualquier dirección  $\theta$  con respecto a la dirección del haz de rayos X incidente. Este **ángulo de dispersión**,  $\theta$ , es el ángulo entre la dirección del rayo disperso y la dirección del rayo incidente. En este experimento, conocemos la intensidad y la longitud de onda  $\lambda$  del haz entrante (incidente); y para un ángulo de dispersión determinado  $\theta$ , medimos la intensidad y la longitud de onda  $\lambda'$  del haz saliente (disperso). Los resultados típicos de estas mediciones se muestran en la [Figura 6.12](#), donde el eje de la x es la longitud de onda de los rayos X dispersos y el eje de la y es la intensidad de los rayos X dispersos, medidos para diferentes ángulos de dispersión (indicados en los gráficos). Para todos los ángulos de dispersión (excepto para  $\theta = 0^\circ$ ), medimos dos picos de intensidad. Un pico se encuentra en la longitud de onda  $\lambda$ , que es la longitud de onda del rayo incidente. El otro pico se encuentra en otra longitud de onda,  $\lambda'$ . Los dos picos están separados por  $\Delta\lambda$ , que depende del ángulo de dispersión  $\theta$  del haz saliente (en la dirección de observación). La separación  $\Delta\lambda$  se denomina **dispersión de Compton**.





**FIGURA 6.11** Montaje experimental para estudiar la dispersión Compton.



**FIGURA 6.12** Los datos experimentales muestran el efecto Compton para la dispersión de los rayos X en el grafito en varios ángulos: La intensidad del rayo disperso tiene dos picos. Un pico aparece en la longitud de onda  $\lambda$  de la radiación incidente y el segundo pico aparece en la longitud de onda  $\lambda'$ . La separación  $\Delta\lambda$  entre los picos depende del ángulo de dispersión  $\theta$ , que es la posición angular del detector en la [Figura 6.11](#). Los datos experimentales de esta figura están representados en unidades arbitrarias, de modo que la altura del perfil refleja la intensidad del haz dispersado por encima del ruido de fondo.

### Dispersión de Compton

Según Compton, la explicación de la dispersión de Compton es que en el material objetivo, el grafito, los electrones de valencia están poco unidos en los átomos y se comportan como electrones libres. Compton asumió que la radiación de rayos X incidente es una corriente de fotones. Un fotón entrante en esta corriente colisiona con un electrón de valencia en el objetivo de grafito. En el transcurso de esta colisión, el fotón entrante transfiere parte de su energía y momento al electrón objetivo y abandona la escena como fotón disperso. Este modelo explica en términos cualitativos por qué la radiación dispersa tiene una longitud de onda mayor que la radiación incidente. En pocas palabras, un fotón que ha perdido parte de su energía emerge como un fotón con una frecuencia más baja, o lo que es lo mismo, con una longitud de onda más larga. Para demostrar que su modelo era correcto, Compton lo utilizó para derivar la expresión de la dispersión de Compton. En su derivación, asumió que tanto el fotón como el electrón son partículas relativistas y que la colisión obedece a dos principios de sentido común: (1) la conservación del momento lineal y (2) la conservación de la energía relativista total.

En la siguiente derivación de la dispersión de Compton,  $E_f$  y  $\vec{p}_f$  denotan la energía y el momento, respectivamente, de un fotón incidente con frecuencia  $f$ . El fotón colisiona con un electrón relativista en reposo, lo que significa que inmediatamente antes de la colisión, la energía del electrón es totalmente su energía de masa en reposo,  $m_0c^2$ . Inmediatamente después de la colisión, el electrón tiene energía  $E$  y momento  $\vec{p}$ , y ambos satisfacen la [Ecuación 6.19](#). Inmediatamente después de la colisión, el fotón saliente tiene energía  $\tilde{E}_f$ , un momento  $\vec{\tilde{p}}_f$ , y frecuencia  $f'$ . La dirección del fotón incidente es horizontal de izquierda a derecha, y la dirección del fotón saliente es el ángulo  $\theta$ , como se ilustra en la [Figura 6.11](#). El ángulo

de dispersión  $\theta$  es el ángulo entre los vectores del momento  $\vec{\mathbf{p}}_f$  y  $\vec{\tilde{\mathbf{p}}}_f$ , y podemos escribir su producto escalar:

$$\vec{\mathbf{p}}_f \cdot \vec{\tilde{\mathbf{p}}}_f = p_f \tilde{p}_f \cos\theta. \quad 6.23$$

Siguiendo el argumento de Compton, suponemos que el fotón y el electrón que colisionan forman un sistema aislado. Esta suposición es válida para los electrones ligados débilmente que, con una buena aproximación, pueden ser tratados como partículas libres. Nuestra primera ecuación es la conservación de la energía para el sistema fotón-electrón:

$$E_f + m_0 c^2 = \tilde{E}_f + E. \quad 6.24$$

El lado izquierdo de esta ecuación es la energía del sistema en el instante inmediatamente anterior a la colisión, y el lado derecho de la ecuación es la energía del sistema en el instante inmediatamente posterior a la colisión. Nuestra segunda ecuación es la conservación del momento lineal para el sistema fotón-electrón en el que el electrón está en reposo en el instante inmediatamente anterior a la colisión:

$$\vec{\mathbf{p}}_f = \vec{\tilde{\mathbf{p}}}_f + \vec{\mathbf{p}}. \quad 6.25$$

El lado izquierdo de esta ecuación es el momento del sistema justo antes de la colisión, y el lado derecho de la ecuación es el momento del sistema justo después de la colisión. Toda la física de la dispersión de Compton está contenida en estas tres ecuaciones anteriores; el resto es álgebra. Llegados a este punto, podríamos pasar a la fórmula concluyente de la dispersión de Compton, pero es útil destacar los principales pasos algebraicos que conducen a la fórmula de Compton, que damos a continuación.

Empezamos reordenando los términos en la [Ecuación 6.24](#) y elevando al cuadrado:

$$[(E_f - \tilde{E}_f) + m_0 c^2]^2 = E^2.$$

En el siguiente paso, sustituimos la [Ecuación 6.19](#) por  $E^2$ , simplificamos, y dividimos ambos lados por  $c^2$  para obtener

$$(E_f/c - \tilde{E}_f/c)^2 + 2m_0 c (E_f/c - \tilde{E}_f/c) = p^2.$$

Ahora podemos utilizar la [Ecuación 6.21](#) para expresar esta forma de la ecuación de la energía en términos de momentos. El resultado es

$$(p_f - \tilde{p}_f)^2 + 2m_0 c (p_f - \tilde{p}_f) = p^2. \quad 6.26$$

Para eliminar  $p^2$ , pasamos a la ecuación de momento ([Ecuación 6.25](#)), reordenamos sus términos y la elevamos al cuadrado para obtener

$$(\vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\tilde{\mathbf{p}}}_f)^2 = p^2 \text{ y } (\vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\tilde{\mathbf{p}}}_f)^2 = p_f^2 + \tilde{p}_f^2 - 2\vec{\mathbf{p}}_f \cdot \vec{\tilde{\mathbf{p}}}_f.$$

El producto de los vectores de momento viene dado por la [Ecuación 6.23](#). Si sustituimos este resultado por  $p^2$  en la [Ecuación 6.26](#), obtenemos la ecuación de energía que contiene el ángulo de dispersión  $\theta$ :

$$(p_f - \tilde{p}_f)^2 + 2m_0 c (p_f - \tilde{p}_f) = p_f^2 + \tilde{p}_f^2 - 2p_f \tilde{p}_f \cos\theta.$$

Con más álgebra, este resultado puede simplificarse a

$$\frac{1}{\tilde{p}_f} - \frac{1}{p_f} = \frac{1}{m_0 c} (1 - \cos\theta). \quad 6.27$$

Ahora recordemos la [Ecuación 6.21](#) y escribamos:  $1/\tilde{p}_f = \lambda'/h$  y  $1/p_f = \lambda/h$ . Cuando estas relaciones se sustituyen en la [Ecuación 6.27](#), obtenemos la relación para la dispersión de Compton:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\theta). \quad 6.28$$

El factor  $h/m_0 c$  se llama la **longitud de onda Compton** del electrón:

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 0,00243 \text{ nm} = 2,43 \text{ pm.} \quad 6.29$$

Denotando el desplazamiento como  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ , el resultado final puede reescribirse como

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta). \quad 6.30$$

Esta fórmula para la dispersión de Compton describe extraordinariamente bien los resultados experimentales mostrados en la [Figura 6.12](#). Los datos de dispersión medidos para el molibdeno, el grafito, la calcita y muchos otros materiales objetivo concuerdan con este resultado teórico. El pico no desplazado que se muestra en la [Figura 6.12](#) se debe a las colisiones de fotones con electrones internos fuertemente ligados en el material objetivo. Los fotones que colisionan con los electrones internos de los átomos objetivo colisionan de hecho con todo el átomo. En este caso extremo, la masa en reposo en la [Ecuación 6.29](#) debe cambiarse por la masa en reposo del átomo. Este tipo de dispersión es cuatro órdenes de magnitud menor que el causado por las colisiones con los electrones y es tan pequeño que puede despreciarse.

La dispersión Compton es un ejemplo de **esparcimiento inelástico**, en la que la radiación dispersada tiene una longitud de onda mayor que la de la radiación incidente. En el uso actual, el término "dispersión Compton" se utiliza para el esparcimiento inelástico de fotones por partículas libres cargadas. En la dispersión Compton, el tratamiento de los fotones como partículas con momentos que pueden ser transferidos a partículas cargadas proporciona el trasfondo teórico para explicar los cambios de longitud de onda medidos en los experimentos; ésta es la prueba de que la radiación está formada por fotones.



## EJEMPLO 6.8

### Dispersión Compton

Un rayo X de 71 pm incide sobre un objetivo de calcita. Encuentre la longitud de onda de los rayos X dispersados en un ángulo de  $30^\circ$  ¿Cuál es la mayor dispersión que puede esperarse en este experimento?

#### Estrategia

Para encontrar la longitud de onda de los rayos X dispersados, primero debemos encontrar la dispersión de Compton para el ángulo de dispersión dado,  $\theta = 30^\circ$ . Utilizamos la [Ecuación 6.30](#). Luego, añadimos esta dispersión a la longitud de onda incidente para obtener la longitud de onda dispersa. La mayor dispersión de Compton se produce en el ángulo  $\theta$  cuando  $1 - \cos\theta$  tiene el mayor valor, que es para el ángulo  $\theta = 180^\circ$ .

#### Solución

La dispersión en  $\theta = 30^\circ$  es

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos 30^\circ) = 0,134\lambda_c = (0,134)(2,43) \text{ pm} = 0,325 \text{ pm.}$$

Esto da la longitud de onda dispersa:

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = (71 + 0,325) \text{ pm} = 71,325 \text{ pm.}$$

La mayor dispersión es

$$(\Delta\lambda)_{\max} = \lambda_c(1 - \cos 180^\circ) = 2(2,43 \text{ pm}) = 4,86 \text{ pm.}$$

#### Importancia

El mayor cambio en la longitud de onda se detecta en la radiación retrodispersada; sin embargo, la mayoría de los fotones del haz incidente pasan a través del objetivo y solo una pequeña fracción de fotones se retrodispersa (normalmente, menos del 5 %). Por lo tanto, estas mediciones requieren detectores muy sensibles.

## ✓ **COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.8**

Un rayo X de 71-pm inciden sobre un objetivo de calcita. Encuentre la longitud de onda de los rayos X dispersados en un ángulo de  $60^\circ$  ¿Cuál es la menor dispersión que puede esperarse en este experimento?

## 6.4 Modelo de Bohr del átomo de hidrógeno

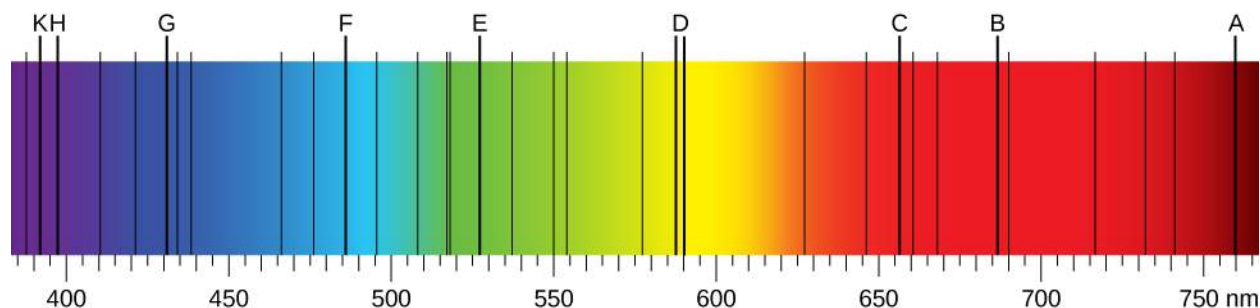
### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

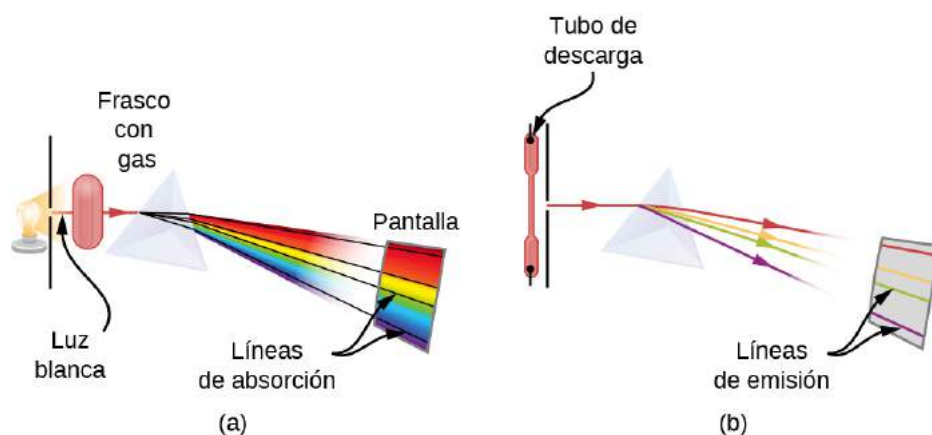
- Explicar la diferencia entre el espectro de absorción y el espectro de emisión de la radiación emitida por los átomos.
- Describir el experimento de la lámina de oro de Rutherford y el descubrimiento del núcleo atómico.
- Explicar la estructura atómica del hidrógeno.
- Describir los postulados de la primera teoría cuántica para el átomo de hidrógeno.
- Resumir cómo el modelo cuántico del átomo de hidrógeno de Bohr explica el espectro de radiación del hidrógeno atómico.

Históricamente, el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno es el primer modelo de estructura atómica que explicaba correctamente los espectros de radiación del hidrógeno atómico. El modelo ocupa un lugar especial en la historia de la física porque introdujo una de las primeras teorías cuánticas, que aportó nuevos desarrollos al pensamiento científico y que más tarde culminó con el desarrollo de la mecánica cuántica. Para entender los detalles del modelo de Bohr, primero debemos repasar los descubrimientos del siglo XIX que impulsaron su formulación.

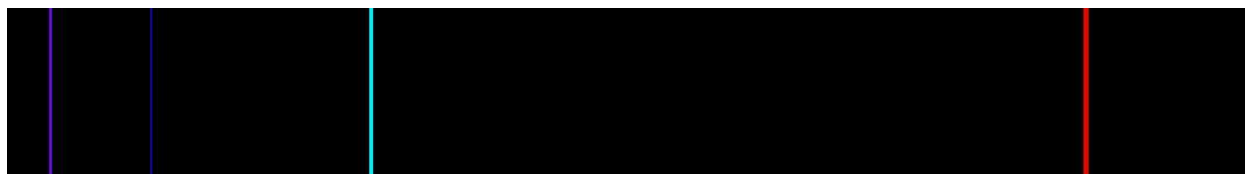
Cuando utilizamos un prisma para analizar la luz blanca procedente del sol, se observan varias líneas oscuras en el espectro solar ([Figura 6.13](#)). Las líneas de absorción solar se denominan **líneas de Fraunhofer** en honor a Joseph von Fraunhofer, quien midió con precisión sus longitudes de onda. En 1854-1861, Gustav Kirchhoff y Robert Bunsen descubrieron que para los distintos elementos químicos, la línea del **espectro de emisión** de un elemento coincide exactamente con su línea de **espectro de absorción**. La diferencia entre el espectro de absorción y el de emisión se explica en la [Figura 6.14](#). Se observa un espectro de absorción cuando la luz atraviesa un gas. Este espectro aparece como líneas negras que se producen solo en determinadas longitudes de onda sobre el fondo del espectro continuo de la luz blanca ([Figura 6.13](#)). Las longitudes de onda que faltan nos indican qué longitudes de onda de la radiación son absorbidas por el gas. El espectro de emisión se observa cuando el gas emite la luz. Este espectro se ve como líneas de colores sobre el fondo negro (ver la [Figura 6.15](#) y [Figura 6.16](#)). Las posiciones de las líneas de emisión nos indican qué longitudes de onda de la radiación son las que el gas emite. Cada elemento químico tiene su propio espectro de emisión característico. Para cada elemento, las posiciones de sus líneas de emisión son exactamente las mismas que las de sus líneas de absorción. Esto significa que los átomos de un elemento específico absorben la radiación solo en longitudes de onda específicas y la radiación que no tiene estas longitudes de onda no es absorbida en lo absoluto por el elemento. Esto también significa que la radiación emitida por los átomos de cada elemento tiene exactamente las mismas longitudes de onda que la radiación que absorben.



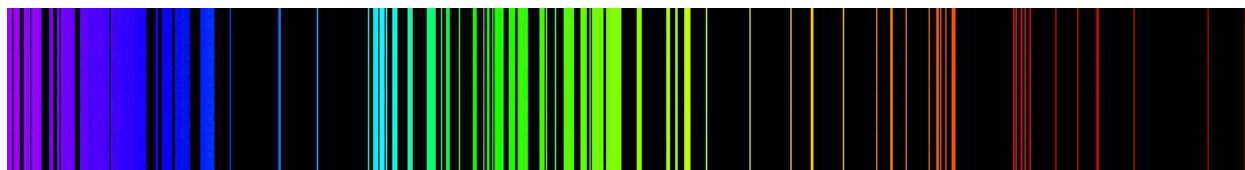
**FIGURA 6.13** En el espectro de emisión solar en el rango visible de 380 nm a 710 nm, las líneas de Fraunhofer se observan como líneas negras verticales en posiciones espectrales específicas en el espectro continuo. Los instrumentos modernos de alta sensibilidad observan miles de estas líneas.



**FIGURA 6.14** Observación de los espectros de líneas: (a) montaje para observar las líneas de absorción; (b) montaje para observar las líneas de emisión. (a) La luz blanca pasa a través de un gas frío que está contenido en un matraz de vidrio. Se utiliza un prisma para separar las longitudes de onda de la luz que pasa. En el espectro de la luz que pasa faltan algunas longitudes de onda, que se ven como líneas negras de absorción en el espectro continuo de la pantalla de visualización. (b) Un gas está contenido en un tubo de descarga de vidrio que tiene electrodos en sus extremos. A una diferencia de potencial elevada entre los electrodos, el gas se ilumina y la luz emitida por el gas pasa a través del prisma que separa sus longitudes de onda. En el espectro de la luz emitida, solo están presentes determinadas longitudes de onda, que se ven como líneas de emisión de colores en la pantalla.



**FIGURA 6.15** El espectro de emisión del hidrógeno atómico: Las posiciones espectrales de las líneas de emisión son características de los átomos de hidrógeno (crédito: "Merikanto"/Wikimedia Commons)



**FIGURA 6.16** El espectro de emisión del hierro atómico: Las posiciones espectrales de las líneas de emisión son características de los átomos de hierro.

Los espectros de emisión de los elementos tienen estructuras complejas; se vuelven aún más complejos para los elementos con números atómicos más altos. El espectro más sencillo, mostrado en la [Figura 6.15](#), pertenece al átomo de hidrógeno. Sólo cuatro líneas son visibles para el ojo humano. Según se lee de derecha a izquierda en la [Figura 6.15](#), estas líneas son: roja (656 nm), llamada línea H- $\alpha$ ; azul (434 nm) y violeta (410 nm). Las líneas con longitudes de onda inferiores a 400 nm aparecen en la parte ultravioleta del espectro ([Figura 6.15](#), extremo izquierdo) y son invisibles para el ojo humano. Hay infinitas líneas espectrales invisibles en la serie del hidrógeno.

Una fórmula empírica para describir las posiciones (longitudes de onda)  $\lambda$  de las líneas de emisión del hidrógeno en esta serie fue descubierta en 1885 por Johann Balmer, y se conoce como la **fórmula de Balmer**:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad 6.31$$

La constante  $R_H = 1,09737 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$  se llama la **constante de Rydberg para el hidrógeno**. En la [Ecuación 6.31](#), el entero positivo  $n$  toma valores  $n = 3, 4, 5, 6$  para las cuatro líneas visibles de esta serie. La serie de

líneas de emisión dada por la fórmula de Balmer se denomina **serie de Balmer** para el hidrógeno. Otras líneas de emisión del hidrógeno descubiertas en el siglo XX se describen mediante la **fórmula de Rydberg**, que resume todos los datos experimentales:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right), \text{ donde } n_i = n_f + 1, n_f + 2, n_f + 3, \dots \quad 6.32$$

Cuando  $n_f = 1$ , la serie de líneas espectrales se denomina **serie de Lyman**. Cuando  $n_f = 2$ , la serie se llama serie de Balmer, y en este caso, la fórmula de Rydberg coincide con la fórmula de Balmer. Cuando  $n_f = 3$ , la serie se denomina **serie de Paschen**. Cuando  $n_f = 4$ , la serie se llama **serie de Brackett**. Cuando  $n_f = 5$ , la serie se denomina **serie de Pfund**. Cuando  $n_f = 6$ , tenemos la **serie de Humphreys**. Como puede adivinar, hay infinitas bandas espectrales de este tipo en el espectro del hidrógeno porque  $n_f$  puede ser cualquier número entero positivo.

La fórmula de Rydberg para el hidrógeno da las posiciones exactas de las líneas espectrales tal y como se observan en un laboratorio; sin embargo, a principios del siglo XX, nadie podía explicar por qué funcionaba tan bien. La fórmula de Rydberg permaneció sin explicación hasta que se propuso el primer modelo exitoso del átomo de hidrógeno en 1913.

### EJEMPLO 6.9

#### Límites de la serie Balmer

Calcule las longitudes de onda más largas y más cortas de la serie de Balmer.

#### Estrategia

Podemos utilizar la fórmula de Balmer o la fórmula de Rydberg. La mayor longitud de onda se obtiene cuando  $1/n_i$  es mayor, que es cuando  $n_i = n_f + 1 = 3$ , porque  $n_f = 2$  para la serie de Balmer. La menor longitud de onda se obtiene cuando  $1/n_i$  es el más pequeño, que es  $1/n_i \rightarrow 0$  cuando  $n_i \rightarrow \infty$ .

#### Solución

El límite de la onda larga:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = (1,09737 \times 10^7) \frac{1}{\text{m}} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) \Rightarrow \lambda = 656,3 \text{ nm}$$

El límite de la onda corta:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{2^2} - 0 \right) = (1,09737 \times 10^7) \frac{1}{\text{m}} \left( \frac{1}{4} \right) \Rightarrow \lambda = 364,6 \text{ nm}$$

#### Importancia

Nótese que hay infinitas líneas espectrales que se encuentran entre estos dos límites.

### COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.9

¿Cuáles son los límites de la serie de Lyman? ¿Puede ver estas líneas espectrales?

La clave para desvelar el misterio de los espectros atómicos está en comprender la estructura atómica. Los científicos saben desde hace tiempo que la materia está formada por átomos. Según la ciencia del siglo XIX, los átomos son las cantidades más pequeñas e indivisibles de la materia. Esta creencia científica se hizo añicos gracias a una serie de experimentos pioneros que demostraron la existencia de partículas subatómicas, como los electrones, protones y neutrones.

El electrón fue descubierto e identificado como la cantidad más pequeña de carga eléctrica por J.J. Thomson en 1897 gracias a sus experimentos de rayos catódicos, también conocidos como experimentos de rayos  $\beta$ : Un rayo  $\beta$  es un haz de electrones. En 1904, Thomson propuso el primer modelo de la estructura atómica, conocido como el modelo del "pudín de pasas", en el que un átomo consistía en una materia desconocida cargada positivamente con electrones negativos incrustados en ella como las ciruelas en un pudín. Alrededor de 1900, E. Rutherford, e independientemente, Paul Ulrich Villard, clasificaron toda la radiación conocida en ese momento como  $\alpha$ - $\alpha$ , rayos- $\beta$ , and rayos- $\gamma$  (un rayo- $\gamma$  es un rayo de fotones altamente energéticos). En 1907, Rutherford y Thomas Royds utilizaron métodos de espectroscopia para demostrar que las partículas de carga positiva de  $\alpha\alpha$  (llamada  $\alpha$ - $\alpha$ ) son de hecho átomos de helio doblemente ionizados. En 1909, Rutherford, Ernest Marsden y Hans Geiger utilizaron  $\alpha$ - $\alpha$  en su famoso experimento de dispersión que refutó el modelo de Thomson (véase [Momento lineal y Colisiones \(http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-1/pages/9-introduccion\)](http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-1/pages/9-introduccion)).

En el **experimento de la lámina de oro de Rutherford** (también conocido como el experimento Geiger-Marsden),  $\alpha$ - $\alpha$  incidieron en una fina lámina de oro y los átomos de oro del interior de la lámina las dispersaron (véase [Tipos de colisiones \(http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-1/pages/9-4-tipos-de-colisiones\)](http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-1/pages/9-4-tipos-de-colisiones)). Las partículas salientes fueron detectadas por una pantalla de centelleo de  $360^\circ$  que rodea el objetivo de oro (para una descripción detallada del montaje experimental, véase [Momento lineal y colisiones \(http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-1/pages/9-introduccion\)](http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-1/pages/9-introduccion)). Cuando una partícula dispersa golpea la pantalla, se observa un pequeño destello de luz (centelleo) en ese lugar. Contando los centelleos observados en varios ángulos con respecto a la dirección del haz incidente, los científicos pudieron determinar qué fracción de las partículas incidentes se dispersaron y qué fracción no se desvió en absoluto. Si el modelo del pudín de pasas fuera correcto, no habría  $\alpha$ - $\alpha$  retrodispersas. Sin embargo, los resultados del experimento de Rutherford mostraron que, aunque una fracción considerable de  $\alpha$ - $\alpha$  salieron de la lámina sin dispersarse en absoluto como si la lámina no estuviera en su camino, una fracción significativa de  $\alpha$ - $\alpha$  se retrodispersaron hacia la fuente. Este tipo de resultado solo fue posible cuando la mayor parte de la masa y toda la carga positiva del átomo de oro se concentraron en un espacio diminuto dentro del átomo.

En 1911, Rutherford propuso un **modelo atómico nuclear**. En el modelo de Rutherford, un átomo contenía un núcleo cargado positivamente de tamaño insignificante, casi como un punto, pero que incluía casi toda la masa del átomo. El átomo también contenía electrones negativos que se encontraban dentro del átomo pero relativamente alejados del núcleo. Diez años más tarde, Rutherford acuñó el nombre de *protón* para el núcleo del hidrógeno y el nombre de *neutrón* para una partícula hipotética eléctricamente neutra que mediaría la unión de los protones positivos en el núcleo (el neutrón fue descubierto en 1932 por James Chadwick). A Rutherford se le atribuye el descubrimiento del núcleo atómico; sin embargo, el modelo de Rutherford de la estructura atómica no explica la fórmula de Rydberg para las líneas de emisión del hidrógeno.

**El modelo de Bohr del átomo de hidrógeno**, propuesto por Niels Bohr en 1913, fue el primer modelo cuántico que explicaba correctamente el espectro de emisión del hidrógeno. El modelo de Bohr combina la mecánica clásica del movimiento planetario con el concepto cuántico de los fotones. Una vez que Rutherford estableció la existencia del núcleo atómico, la intuición de Bohr de que el electrón negativo del átomo de hidrógeno debe girar alrededor del núcleo positivo se convirtió en una consecuencia lógica de la ley de la distancia inversa al cuadrado de la atracción electrostática. Recordemos que la ley de Coulomb que describe la atracción entre dos cargas opuestas tiene una forma similar a la ley universal de gravitación de Newton en el sentido de que la fuerza gravitacional y la fuerza electrostática son decrecientes como  $1/r^2$ , donde  $r$  es la distancia de separación entre los cuerpos. De la misma manera que la Tierra gira alrededor del sol, el electrón negativo del átomo de hidrógeno puede girar alrededor del núcleo positivo. Sin embargo, una carga que se acelera irradia su energía. Clásicamente, si el electrón se moviera alrededor del núcleo de forma planetaria, estaría sufriendo una aceleración centrípeta y, por tanto, estaría irradiando energía que le haría descender en espiral hacia el núcleo. Tal átomo de hidrógeno planetario no sería estable, lo que es contrario a lo que sabemos sobre los átomos de hidrógeno ordinarios que no se desintegran. Además, el movimiento clásico del electrón no es capaz de explicar el discreto espectro de emisión del hidrógeno.

Para sortear estas dos dificultades, Bohr propuso los siguientes tres **postulados del modelo de Bohr**:



1. El electrón negativo se mueve alrededor del núcleo positivo (protón) en una órbita circular. Todas las órbitas de los electrones están centradas en el núcleo. No todas las órbitas clásicamente posibles están disponibles para un electrón unido al núcleo.
2. Las órbitas de electrones permitidas satisfacen la *primera condición de cuantización*: En la *enésima* órbita, el momento angular  $L_n$  del electrón solo puede tomar valores discretos:

$$L_n = n\hbar, \text{ donde } n = 1, 2, 3, \dots \quad 6.33$$

Este postulado dice que el momento angular del electrón está cuantizado. Denotado por  $r_n$  y  $v_n$ , respectivamente, el radio de la *enésima* órbita y la rapidez del electrón en ella, la primera condición de cuantización, puede expresarse explícitamente como

$$m_e v_n r_n = n\hbar. \quad 6.34$$

3. Un electrón puede hacer transiciones desde una órbita donde su energía es  $E_n$  a otra órbita donde su energía es  $E_m$ . Cuando un átomo absorbe un fotón, el electrón hace una transición a una órbita de mayor energía. Cuando un átomo emite un fotón, el electrón pasa a una órbita de menor energía. Las transiciones de electrones con la absorción o emisión simultánea de fotones tienen lugar *de forma instantánea*. Las transiciones de electrones permitidas satisfacen la *segunda condición de cuantización*:

$$hf = |E_n - E_m| \quad 6.35$$

donde  $hf$  es la energía de un fotón emitido o absorbido con frecuencia  $f$ . La segunda condición de cuantización establece que el cambio de energía de un electrón en el átomo de hidrógeno está cuantizado.

Estos tres postulados de la primera teoría cuántica del átomo de hidrógeno nos permiten deducir no solo la fórmula de Rydberg, sino también el valor de la constante de Rydberg y otras propiedades importantes del átomo de hidrógeno, como sus niveles de energía, su energía de ionización y los tamaños de los orbitales de los electrones. Nótese que en el modelo de Bohr, junto con dos postulados de cuantización no clásicos, tenemos también la descripción clásica del electrón como una partícula que está sometida a la fuerza de Coulomb, y su movimiento debe obedecer las leyes de movimiento de Newton. El átomo de hidrógeno, como sistema aislado, debe obedecer las leyes de conservación de la energía y el momento de la forma que conocemos de la física clásica. Teniendo en cuenta este marco teórico, estamos preparados para proceder a nuestro análisis.

## Órbitas de los electrones

Para obtener el tamaño  $r_n$  de la *enésima* órbita del electrón y la velocidad del electrón en ella,  $v_n$  recurrimos a la mecánica de Newton. Como partícula cargada, el electrón experimenta una atracción electrostática hacia el núcleo cargado positivamente en el centro de su órbita circular. Esta atracción electrostática es la fuerza centrípeta que hace que el electrón se mueva en círculo alrededor del núcleo. Por lo tanto, la magnitud de la fuerza centrípeta se identifica con la magnitud de la fuerza electrostática:

$$\frac{m_e v_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2}. \quad 6.36$$

Aquí,  $e$  denota el valor de la carga elemental. El electrón negativo y el protón positivo tienen el mismo valor de carga,  $|q| = e$ . Cuando se combina la [Ecuación 6.36](#) con la primera condición de cuantización dada por la [Ecuación 6.34](#), podemos resolver la velocidad,  $v_n$ , y para el radio,  $r_n$ :

$$v_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{n} \quad 6.37$$

$$r_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_e e^2} n^2. \quad 6.38$$

Obsérvese que estos resultados nos dicen que la velocidad del electrón, así como el radio de su órbita, solo dependen del índice  $n$  que enumera la órbita, ya que todas las demás cantidades de las ecuaciones anteriores son constantes fundamentales. Vemos en la [Ecuación 6.38](#) que el tamaño de la órbita crece como el cuadrado de  $n$ . Esto significa que la segunda órbita es cuatro veces más grande que la primera, y la tercera órbita es nueve veces más grande que la primera, y así sucesivamente. También vemos en la [Ecuación 6.37](#) que la velocidad del electrón en la órbita disminuye a medida que aumenta el tamaño de la órbita. La velocidad del electrón es mayor en la primera órbita de Bohr, para  $n = 1$ , que es la órbita más cercana al núcleo. El radio de la primera órbita de Bohr se denomina **radio de Bohr del hidrógeno**, denotado como  $a_0$ . Su valor se obtiene estableciendo  $n = 1$  en [Ecuación 6.38](#):

$$a_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 5,29 \times 10^{-11} \text{ m} = 0,529 \text{ \AA}. \quad 6.39$$

Podemos sustituir  $a_0$  en la [Ecuación 6.38](#) para expresar el radio de la  $n$ ésima órbita en términos de  $a_0$  :

$$r_n = a_0 n^2. \quad 6.40$$

Este resultado significa que las órbitas de los electrones en el átomo de hidrógeno están *cuantizadas* porque el radio orbital solo toma valores específicos de  $a_0, 4a_0, 9a_0, 16a_0, \dots$  dado por [Ecuación 6.40](#), y no se permiten otros valores.

### Energías de los electrones

La energía total  $E_n$  de un electrón en la  $n$ ésima órbita es la suma de su energía cinética  $K_n$  y su energía potencial electrostática  $U_n$ . Utilizando [Ecuación 6.37](#), encontramos que

$$K_n = \frac{1}{2} m_e v_n^2 = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^2}. \quad 6.41$$

Recordemos que la energía potencial electrostática de interacción entre dos cargas  $q_1$  y  $q_2$  que están separadas por una distancia  $r_{12}$  es  $(1/4\pi\epsilon_0)q_1 q_2 / r_{12}$ . Aquí,  $q_1 = +e$  es la carga del núcleo del átomo de hidrógeno (la carga del protón),  $q_2 = -e$  es la carga del electrón y  $r_{12} = r_n$  es el radio de la  $n$ ésima órbita. Ahora utilizamos la [Ecuación 6.38](#) para encontrar la energía potencial del electrón:

$$U_n = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^2}. \quad 6.42$$

La energía total del electrón es la suma de la [Ecuación 6.41](#) y [Ecuación 6.42](#):

$$E_n = K_n + U_n = -\frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^2}. \quad 6.43$$

Observe que la energía solo depende del índice  $n$  porque el resto de los símbolos en la [Ecuación 6.43](#) son constantes físicas. El valor del factor constante en la [Ecuación 6.43](#) es

$$E_0 = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} = \frac{1}{8\epsilon_0^2} \frac{m_e e^4}{h^2} = 2,17 \times 10^{-18} \text{ J} = 13,6 \text{ eV}. \quad 6.44$$

Es conveniente expresar la energía del electrón en la  $n$ ésima órbita en términos de esta energía, como

$$E_n = -E_0 \frac{1}{n^2}. \quad 6.45$$

Ahora podemos ver que las energías de los electrones en el átomo de hidrógeno están *cuantizadas* porque solo

pueden tener valores discretos de  $-E_0, -E_0/4, -E_0/9, -E_0/16, \dots$  dado por la [Ecuación 6.45](#), y no se permiten otros valores de energía. Este conjunto de energías de electrones permitidas se denomina **espectro energético del hidrógeno** ([Figura 6.17](#)). El índice  $n$  que enumera los niveles de energía en el modelo de Bohr se llama **número cuántico de energía**. Identificamos la energía del electrón dentro del átomo de hidrógeno con la energía del átomo de hidrógeno. Note que el menor valor de energía se obtiene para  $n = 1$ , por lo que el átomo de hidrógeno no puede tener una energía menor que esa. Este valor mínimo de la energía de los electrones en el átomo de hidrógeno se denomina **energía del estado fundamental del átomo de hidrógeno** y su valor es

$$E_1 = -E_0 = -13,6 \text{ eV}. \quad 6.46$$

El átomo de hidrógeno puede tener otras energías superiores a la del estado fundamental. Estos estados de mayor energía se conocen como **estados de energía excitada de un átomo de hidrógeno**.

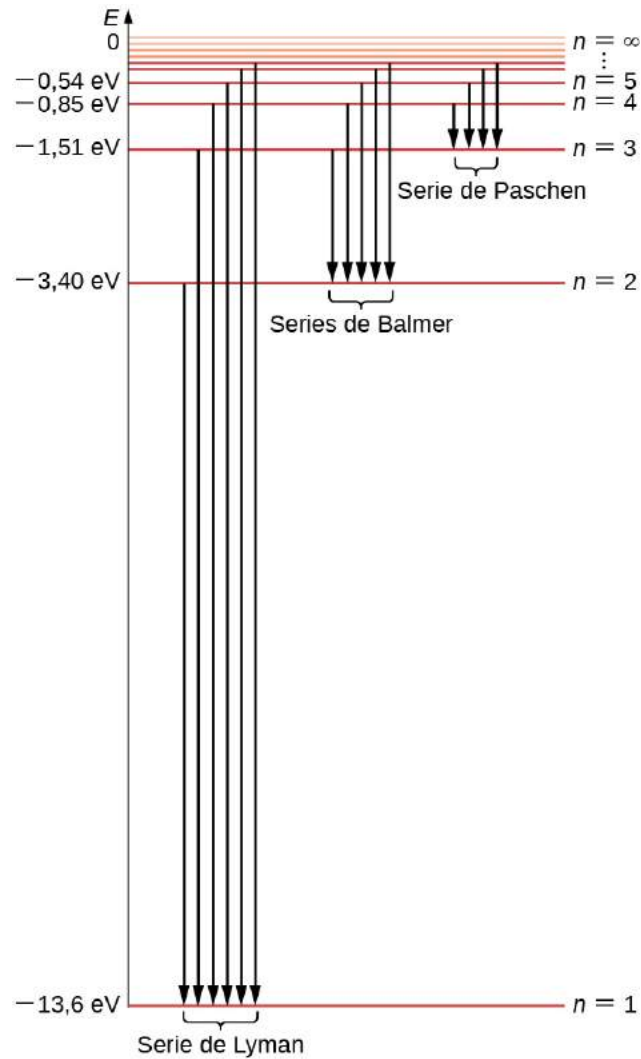
Sólo hay un estado fundamental, pero hay infinitos estados excitados porque hay infinitos valores de  $n$  en la [Ecuación 6.45](#). Decimos que el electrón está en el "primer estado excitado" cuando su energía es  $E_2$  (cuando  $n = 2$ ), el segundo estado excitado cuando su energía es  $E_3$  (cuando  $n = 3$ ) y, en general, en el *enésimo* estado de salida cuando su energía es  $E_{n+1}$ . No existe el estado excitado más alto de todos; sin embargo, hay un límite en la secuencia de estados excitados. Si seguimos aumentando  $n$  en la [Ecuación 6.45](#), encontramos que el límite es  $-\lim_{n \rightarrow \infty} E_0/n^2 = 0$ . En este límite, el electrón deja de estar ligado al núcleo y se convierte en un

electrón libre. Un electrón permanece unido al átomo de hidrógeno mientras su energía sea negativa. Un electrón que orbita alrededor del núcleo en la primera órbita de Bohr, la más cercana al núcleo, se encuentra en el estado fundamental, donde su energía tiene el valor más pequeño. En el estado fundamental, el electrón está fuertemente unido al núcleo y su energía viene dada por la [Ecuación 6.46](#). Si queremos sacar este electrón del átomo, debemos suministrarle suficiente energía,  $E_\infty$ , para, al menos, equilibrar su energía del estado

fundamental  $E_1$  :

$$E_\infty + E_1 = 0 \Rightarrow E_\infty = -E_1 = -(-E_0) = E_0 = 13,6 \text{ eV}. \quad 6.47$$

La energía necesaria para extraer el electrón del átomo se denomina **energía de ionización**. La energía de ionización  $E_\infty$  que se necesita para sacar el electrón de la primera órbita de Bohr se denomina **límite de ionización del hidrógeno**. El límite de ionización en la [Ecuación 6.47](#) que obtenemos en el modelo de Bohr coincide con el valor experimental.



**FIGURA 6.17** El espectro energético del átomo de hidrógeno. Los niveles de energía (líneas horizontales) representan los estados ligados de un electrón en el átomo. Sólo hay un estado fundamental,  $n = 1$ , y los infinitos estados excitados cuantizados. Los estados se enumeran por el número cuántico  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ . Las líneas verticales ilustran las transiciones de electrones permitidas entre los estados. Las flechas hacia abajo ilustran las transiciones con una emisión de un fotón con una longitud de onda en la banda espectral indicada.

### Líneas de emisión espectral del hidrógeno

Para obtener las longitudes de onda de la radiación emitida cuando un electrón hace una transición de la órbita  $n$  a la órbita  $m$ , utilizamos la segunda de las condiciones de cuantización de Bohr y la [Ecuación 6.45](#) para las energías. La emisión de energía del átomo solo puede producirse cuando un electrón realiza una transición de un estado excitado a otro de menor energía. En el curso de dicha transición, el fotón emitido arrastra la diferencia de energías entre los estados implicados en la transición. La transición no puede ir en la otra dirección porque la energía de un fotón no puede ser negativa, lo que significa que para la emisión debemos tener  $E_n > E_m$  y  $n > m$ . Por lo tanto, el tercero de los postulados de Bohr da

$$hf = |E_n - E_m| = E_n - E_m = -E_0 \frac{1}{n^2} + E_0 \frac{1}{m^2} = E_0 \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad 6.48$$

Ahora expresamos la energía del fotón en términos de su longitud de onda,  $hf = hc/\lambda$ , y dividimos ambos lados de la [Ecuación 6.48](#) por  $hc$ . El resultado es

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_0}{hc} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad 6.49$$

El valor de la constante en esta ecuación es

$$\frac{E_0}{hc} = \frac{13,6 \text{ eV}}{(4,136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s})(2,997 \times 10^8 \text{ m/s})} = 1,097 \times 10^7 \frac{1}{\text{m}}. \quad 6.50$$

Este valor es exactamente la constante de Rydberg  $R_H$  en la fórmula heurística de Rydberg en la [Ecuación 6.32](#). De hecho, [Ecuación 6.49](#) es idéntica a la fórmula de Rydberg, porque para una  $m$  dada, tenemos  $n = m + 1, m + 2, \dots$ . De este modo, el modelo cuántico de Bohr del átomo de hidrógeno nos permite deducir la constante experimental de Rydberg a partir de los principios básicos y expresarla en términos de constantes fundamentales. Las transiciones entre las órbitas electrónicas permitidas se ilustran en la [Figura 6.17](#).

Podemos repetir los mismos pasos que nos llevaron a la [Ecuación 6.49](#) para obtener la longitud de onda de la radiación absorbida; esto da de nuevo la [Ecuación 6.49](#) pero esta vez para las posiciones de las líneas de absorción en el espectro de absorción del hidrógeno. La única diferencia es que para la absorción, el número cuántico  $m$  es el índice de la órbita ocupada por el electrón antes de la transición (orbital de menor energía) y el número cuántico  $n$  es el índice del orbital al que el electrón hace la transición (orbital de mayor energía). La diferencia entre las energías de los electrones en estas dos órbitas es la energía del fotón absorbido.



### EJEMPLO 6.10

#### Tamaño y energía de ionización del átomo de hidrógeno en estado excitado

Si un átomo de hidrógeno en estado fundamental absorbe un fotón de 93,7 nm, correspondiente a una línea de transición en la serie de Lyman, ¿cómo afecta esto a la energía y al tamaño del átomo? ¿Cuánta energía se necesita para ionizar el átomo cuando se encuentra en este estado excitado? Indique sus respuestas en unidades absolutas y en relación con el estado fundamental.

#### Estrategia

Antes de la absorción, el átomo se encuentra en su estado fundamental. Esto significa que la transición del electrón tiene lugar desde la órbita  $m = 1$  a alguna órbita *enésimasuperior*. En primer lugar, debemos determinar  $n$  de la longitud de onda absorbida  $\lambda = 93,7$  nm. Entonces, podemos usar la [Ecuación 6.45](#) para encontrar la energía  $E_n$  del estado excitado y su energía de ionización  $E_{\infty, n}$ , y utilizar la [Ecuación 6.40](#) para encontrar el radio  $r_n$  del átomo en estado excitado. Para estimar  $n$ , utilizamos [Ecuación 6.49](#).

#### Solución

Sustituir  $m = 1$  y  $\lambda = 93,7$  nm en la [Ecuación 6.49](#) y resolver para  $n$ . No debe esperar una respuesta entera perfecta debido a los errores de redondeo, pero su respuesta será cercana a un entero, y puede estimar  $n$  tomando la parte integral de su respuesta:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow n = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\lambda R_H}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(93,7 \times 10^{-9} \text{ m})(1,097 \times 10^7 \text{ m}^{-1})}}} = 6,07 \Rightarrow n = 6.$$

El radio de la órbita  $n = 6$  es

$$r_n = a_0 n^2 = a_0 6^2 = 36 a_0 = 36(0,529 \times 10^{-10} \text{ m}) = 19,04 \times 10^{-10} \text{ m} \cong 19,0 \text{ \AA}.$$

Por lo tanto, después de absorber el fotón de 93,7 nm, el tamaño del átomo de hidrógeno en el estado excitado  $n = 6$  es 36 veces mayor que antes de la absorción, cuando el átomo se encontraba en el estado fundamental. La energía del quinto estado excitado ( $n = 6$ ) es:

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} = -\frac{E_0}{6^2} = -\frac{E_0}{36} = -\frac{13,6 \text{ eV}}{36} \cong -0,378 \text{ eV}.$$

Después de absorber el fotón de 93,7 nm, la energía del átomo de hidrógeno es mayor que antes de la

absorción. Ionización del átomo cuando está en el quinto estado excitado ( $n = 6$ ) requiere 36 veces menos energía que la que se necesita cuando el átomo está en el estado fundamental:

$$E_{\infty,6} = -E_6 = -(-0,378 \text{ eV}) = 0,378 \text{ eV}.$$

### Importancia

Podemos analizar cualquier línea espectral en el espectro del hidrógeno de la misma manera. Así, las mediciones experimentales de las líneas espectrales nos proporcionan información sobre la estructura atómica del átomo de hidrógeno.

### ✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.10

Cuando un electrón de un átomo de hidrógeno se encuentra en el primer estado excitado, ¿qué predicción da el modelo de Bohr sobre su rapidez orbital y su energía cinética? ¿Cuál es la magnitud de su momento angular orbital?

El modelo de Bohr del átomo de hidrógeno también predice correctamente los espectros de algunos iones hidrogenoides. Los **iones hidrogenoides** son átomos de elementos con un número atómico  $Z$  mayor que uno ( $Z = 1$  para el hidrógeno) pero con todos los electrones eliminados excepto uno. Por ejemplo, un átomo de helio eléctricamente neutro tiene un número atómico  $Z = 2$ . Esto significa que tiene dos electrones orbitando el núcleo con una carga de  $q = +Ze$ . Cuando se retira uno de los electrones que orbitan el átomo de helio (decimos, cuando el átomo de helio se ioniza individualmente), lo que queda es una estructura atómica parecida a la del hidrógeno en la que el electrón restante orbita alrededor del núcleo con una carga de  $q = +Ze$ . El modelo de Bohr describe este tipo de situación. Suponiendo que la carga del núcleo no es  $+e$  pero  $+Ze$ , podemos repetir todos los pasos, empezando por la [Ecuación 6.36](#), para obtener los resultados de un ion hidrogenoide:

$$r_n = \frac{a_0}{Z} n^2 \quad 6.51$$

donde  $a_0$  es la órbita de Bohr del hidrógeno, y

$$E_n = -Z^2 E_0 \frac{1}{n^2} \quad 6.52$$

donde  $E_0$  es el límite de ionización de un átomo de hidrógeno. Estas ecuaciones son buenas aproximaciones siempre que el número atómico  $Z$  no sea demasiado grande.

El modelo de Bohr es importante porque fue el primer modelo que postuló la cuantización de las órbitas de los electrones en los átomos. Por lo tanto, representa una teoría cuántica temprana que dio inicio al desarrollo de la teoría cuántica moderna. Introdujo el concepto de número cuántico para describir los estados atómicos. La limitación de la primera teoría cuántica es que no puede describir átomos en los que el número de electrones que orbitan alrededor del núcleo sea mayor que uno. El modelo de Bohr del hidrógeno es un modelo semiclásico porque combina el concepto clásico de las órbitas de los electrones con el nuevo concepto de cuantización. El notable éxito de este modelo impulsó a muchos físicos a buscar una explicación de por qué dicho modelo debía funcionar, y a buscar una comprensión de la física detrás de los postulados de la primera teoría cuántica. Esta búsqueda dio lugar a un concepto totalmente nuevo de "ondas de materia".

## 6.5 Las ondas de materia de De Broglie

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir la hipótesis de De Broglie sobre las ondas de materia.
- Explicar cómo la hipótesis de De Broglie justifica la cuantización del momento angular en la teoría cuántica del átomo de hidrógeno de Bohr.
- Describir el experimento de Davisson-Germer.
- Interpretar la idea de De Broglie sobre las ondas de materia y cómo explica los fenómenos de difracción de los electrones.

La fórmula de Compton estableció que una onda electromagnética puede comportarse como una partícula de luz al interactuar con la materia. En 1924, Louis de Broglie propuso una nueva hipótesis especulativa según la cual los electrones y otras partículas de materia pueden comportarse como ondas. Hoy en día, esta idea se conoce como **la hipótesis de De Broglie sobre las ondas de materia**. En 1926, la hipótesis de De Broglie, junto con la primera teoría cuántica de Bohr, condujo al desarrollo de una nueva teoría de la **mecánica cuántica de ondas** para describir la física de los átomos y las partículas subatómicas. La mecánica cuántica ha abierto el camino a nuevos inventos y tecnologías de ingeniería, como el láser y las imágenes de resonancia magnética (Magnetic Resonance Imaging, MRI). Estas nuevas tecnologías impulsan los descubrimientos en otras ciencias como la biología y la química.

Según la hipótesis de De Broglie, tanto los fotones sin masa como las partículas masivas deben satisfacer un conjunto común de relaciones que conectan la energía  $E$  con la frecuencia  $f$ , y el momento lineal  $p$  con la longitud de onda  $\lambda$ . Hemos discutido estas relaciones de los fotones en el contexto del efecto Compton. Los recordamos ahora en un contexto más general. Cualquier partícula que tenga energía y momento es una **onda de De Broglie** de frecuencia  $f$  y longitud de onda  $\lambda$  :

$$E = hf \quad 6.53$$

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad 6.54$$

Aquí,  $E$  y  $p$  son, respectivamente, la energía relativista y el momento de una partícula. Las relaciones de De Broglie suelen expresarse en términos del vector de onda  $\vec{k}$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ , y la frecuencia de las ondas  $\omega = 2\pi f$ , como solemos hacer para las ondas:

$$E = \hbar\omega \quad 6.55$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \quad 6.56$$

La teoría de las ondas nos dice que una onda transporta su energía con la **velocidad de grupo**. Para las ondas de materia, esta velocidad de grupo es la velocidad  $u$  de la partícula. La identificación la energía  $E$  y el momento  $p$  de una partícula con su energía relativista  $mc^2$  y su momento relativista  $mu$ , respectivamente, se deduce de las relaciones de De Broglie que las ondas de materia satisfacen la siguiente relación:

$$\lambda f = \frac{\omega}{k} = \frac{E/\hbar}{p/\hbar} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mu} = \frac{c^2}{u} = \frac{c}{\beta} \quad 6.57$$

donde  $\beta = u/c$ . Cuando una partícula no tiene masa tenemos  $u = c$  y la [Ecuación 6.57](#) se convierte en  $\lambda f = c$ .





## EJEMPLO 6.11

### ¿Cuánto duran las ondas de materia de De Broglie?

Calcule la longitud de onda de De Broglie de: (a) un balón de baloncesto de 0,65 kg lanzado a una velocidad de 10 m/s, (b) un electrón no relativista con una energía cinética de 1,0 eV, y (c) un electrón relativista con una energía cinética de 108 keV.

#### Estrategia

Utilizamos la [Ecuación 6.57](#) para encontrar la longitud de onda de De Broglie. Cuando el problema implica un objeto no relativista que se mueve con una velocidad no relativista  $u$ , como en (a) cuando  $\beta = u/c \ll 1$ , utilizamos el momento no relativista  $p$ . Cuando no se puede utilizar la aproximación no relativista, como en (c), debemos utilizar el momento relativista  $p = mu = m_0\gamma u = E_0\gamma\beta/c$ , donde la energía de la masa en reposo de una partícula es  $E_0 = mc^2$  y  $\gamma$  es el factor de Lorentz  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ . La energía total  $E$  de una partícula viene dada por la [Ecuación 6.53](#) y la energía cinética es  $K = E - E_0 = (\gamma - 1)E_0$ . Cuando se conoce la energía cinética, podemos invertir la [Ecuación 6.18](#) para encontrar el momento

$p = \sqrt{(E^2 - E_0^2)}/c^2 = \sqrt{K(K + 2E_0)}/c$  y sustituir en la [Ecuación 6.57](#) para obtener

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{K(K + 2E_0)}}. \quad 6.58$$

Dependiendo del problema en cuestión, en esta ecuación podemos utilizar los siguientes valores para  $hc$ :

$$hc = (6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(2,998 \times 10^8 \text{ m/s}) = 1,986 \times 10^{-25} \text{ J} \cdot \text{m} = 1,241 \text{ eV} \cdot \mu\text{m}$$

#### Solución

- a. En el balón de baloncesto, la energía cinética es

$$K = mu^2/2 = (0,65 \text{ kg})(10 \text{ m/s})^2/2 = 32,5 \text{ J}$$

y la energía de la masa en reposo es

$$E_0 = mc^2 = (0,65 \text{ kg})(2,998 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 5,84 \times 10^{16} \text{ J}.$$

Vemos que  $K/(K + E_0) \ll 1$  y usamos  $p = mu = (0,65 \text{ kg})(10 \text{ m/s}) = 6,5 \text{ J} \cdot \text{s/m}$ :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{6,5 \text{ J} \cdot \text{s/m}} = 1,02 \times 10^{-34} \text{ m}.$$

- b. Para el electrón no relativista,

$$E_0 = mc^2 = (9,109 \times 10^{-31} \text{ kg})(2,998 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 511 \text{ keV}$$

y cuando  $K = 1,0 \text{ eV}$ , tenemos  $K/(K + E_0) = (1/512) \times 10^{-3} \ll 1$ , por lo que podemos utilizar la fórmula no relativista. Sin embargo, en este caso es más sencillo utilizar la [Ecuación 6.58](#):

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{K(K + 2E_0)}} = \frac{1,241 \text{ eV} \cdot \mu\text{m}}{\sqrt{(1,0 \text{ eV})[1,0 \text{ eV} + 2(511 \text{ keV})]}} = 1,23 \text{ nm}.$$

Si utilizamos el momento no relativista, obtenemos el mismo resultado porque 1 eV es mucho menor que la masa en reposo del electrón.

- c. Para un electrón rápido con  $K = 108 \text{ keV}$ , los efectos relativistas no pueden ser ignorados porque su energía total es  $E = K + E_0 = 108 \text{ keV} + 511 \text{ keV} = 619 \text{ keV}$  y  $K/E = 108/619$  no es insignificante:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{K(K + 2E_0)}} = \frac{1,241 \text{ eV} \cdot \mu\text{m}}{\sqrt{108 \text{ keV}[108 \text{ keV} + 2(511 \text{ keV})]}} = 3,55 \text{ pm}.$$

#### Importancia

De estas estimaciones se desprende que las longitudes de onda de De Broglie de objetos macroscópicos como una pelota son inconmensurablemente pequeñas. Por tanto, aunque existan, no son detectables y no afectan al movimiento de los objetos macroscópicos.

## ✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.11

¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de un protón no relativista con una energía cinética de 1,0 eV?

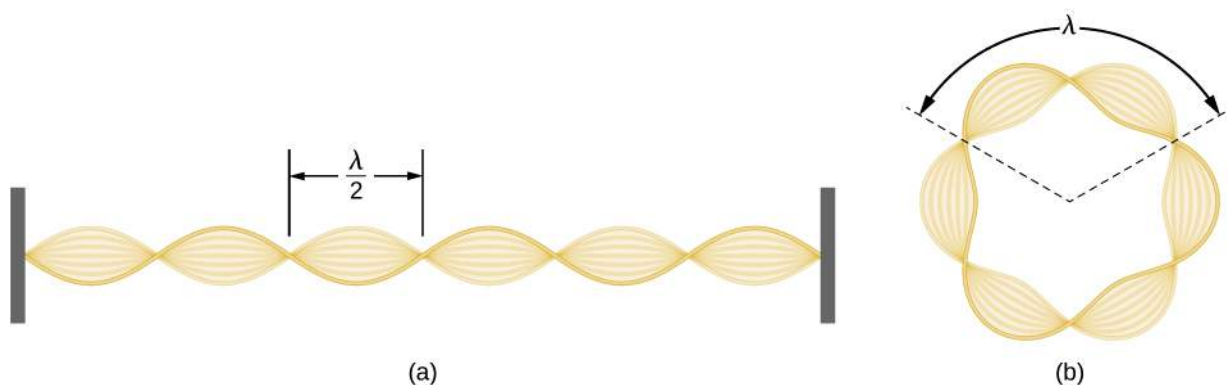
Utilizando el concepto de onda de materia del electrón, De Broglie proporcionó una justificación para la cuantización del momento angular del electrón en el átomo de hidrógeno, que se postuló en la teoría cuántica de Bohr. La explicación física de la primera condición de cuantización de Bohr surge de forma natural cuando asumimos que un electrón en un átomo de hidrógeno no se comporta como una partícula sino como una onda. Para verlo con claridad, imagine una cuerda de guitarra estirada que se sujeta por ambos extremos y vibra de modo normal. Si la longitud de la cuerda es  $l$  (Figura 6.18), las longitudes de onda de estas vibraciones no pueden ser arbitrarias sino que deben ser tales que un número entero  $k$  de semilongitudes de onda  $\lambda/2$  que encajan exactamente en la distancia  $l$  entre los extremos. Esta es la condición  $l = k\lambda/2$  para una onda estacionaria en una cuerda. Supongamos ahora que en lugar de tener la cuerda sujeta a las paredes, doblamos su longitud en un círculo y sujetamos sus extremos entre sí. Esto produce una cuerda circular que vibra de modo normal, satisfaciendo la misma condición de onda estacionaria, pero el número de medias longitudes de onda debe ser ahora un número par  $k$ ,  $k = 2n$ , y la longitud  $l$  está ahora relacionada con el radio  $r_n$  del círculo. Esto significa que los radios no son arbitrarios, sino que deben satisfacer la siguiente condición de onda estacionaria:

$$2\pi r_n = 2n \frac{\lambda}{2}. \quad 6.59$$

Si un electrón en la *enésima* órbita de Bohr se mueve como una onda, según la Ecuación 6.59 su longitud de onda debe ser igual a  $\lambda = 2\pi r_n / n$ . Suponiendo que la Ecuación 6.58 es válida, la onda del electrón de esta longitud de onda corresponde al momento lineal del electrón,  $p = h/\lambda = nh/(2\pi r_n) = n\hbar/r_n$ . Por lo tanto, en una órbita circular, el momento angular del electrón debe ser

$$L_n = r_n p = r_n \frac{n\hbar}{r_n} = n\hbar. \quad 6.60$$

Esta ecuación es la primera de las condiciones de cuantización de Bohr, dada por la Ecuación 6.36. Proporcionar una explicación física para la condición de cuantización de Bohr es un argumento teórico convincente para la existencia de las ondas de materia.



**FIGURA 6.18** Patrón de onda estacionaria: (a) una cuerda estirada sujeta a las paredes; (b) una onda de electrón atrapada en la tercera órbita de Bohr en el átomo de hidrógeno.

## ✿ EJEMPLO 6.12

### La onda de los electrones en el estado fundamental del hidrógeno.

Encuentre la longitud de onda de De Broglie de un electrón en el estado fundamental del hidrógeno.

**Estrategia**

Combinamos la primera condición de cuantización en la [Ecuación 6.60](#) con la [Ecuación 6.36](#) y utilizamos la [Ecuación 6.38](#) para el primer radio de Bohr con  $n = 1$ .

**Solución**

Cuando  $n = 1$  y  $r_n = a_0 = 0,529 \text{ \AA}$ , la condición de cuantización de Bohr da  $a_0 p = 1 \cdot \hbar \Rightarrow p = \hbar / a_0$ . La longitud de onda del electrón es:

$$\lambda = h/p = h/\hbar / a_0 = 2\pi a_0 = 2\pi(0,529 \text{ \AA}) = 3,324 \text{ \AA}.$$

**Importancia**

Obtenemos el mismo resultado si utilizamos directamente la [Ecuación 6.58](#).

**✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.12**

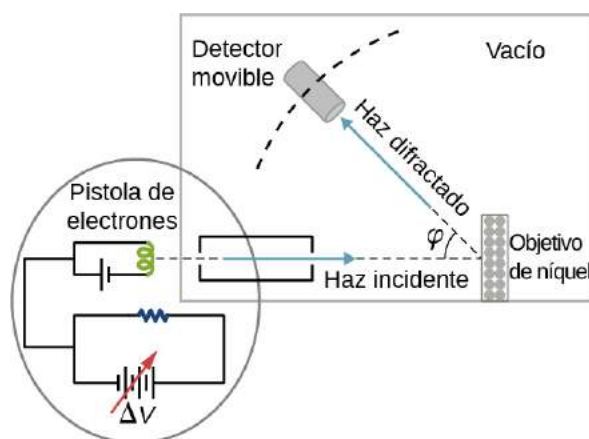
Encuentre la longitud de onda de De Broglie de un electrón en el tercer estado excitado del hidrógeno.

La confirmación experimental de las ondas de materia surgió en 1927, cuando C. Davisson y L. Germer realizaron una serie de experimentos de dispersión de electrones que demostraron claramente que los electrones se comportan como ondas. Davisson y Germer no establecieron su experimento para confirmar la hipótesis de De Broglie: La confirmación llegó como un subproducto de sus estudios experimentales rutinarios de superficies metálicas bajo bombardeo de electrones.

En el experimento particular que proporcionó la primera evidencia de las ondas de electrones (conocido hoy como el **experimento Davisson-Germer**), estudiaron una superficie de níquel. Su muestra de níquel se preparó especialmente en un horno de alta temperatura para cambiar su estructura policristalina habitual a una forma en la que grandes dominios monocristalinos ocupan el volumen. La [Figura 6.19](#) muestra el montaje experimental. Los electrones térmicos se liberan de un elemento calentado (normalmente de tungsteno) en el cañón de electrones y se aceleran a través de una diferencia de potencial  $\Delta V$ , convirtiéndose en un haz de electrones bien colimado producido por un cañón de electrones. La energía cinética  $K$  de los electrones se ajusta seleccionando un valor de la diferencia de potencial en el cañón de electrones. Esto produce un haz de electrones con un valor determinado de momento lineal, de acuerdo con la conservación de la energía:

$$e\Delta V = K = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2me\Delta V}. \quad 6.61$$

El haz de electrones incide sobre la muestra de níquel en la dirección normal a su superficie. En la superficie, se dispersa en varias direcciones. La intensidad del haz dispersado en una dirección seleccionada  $\varphi$  se mide con un detector de alta sensibilidad. La posición angular del detector con respecto a la dirección del haz incidente puede variar de  $\varphi = 0^\circ$  a  $\varphi = 90^\circ$ . Todo el montaje está encerrado en una cámara de vacío para evitar las colisiones de los electrones con las moléculas de aire, ya que estas colisiones térmicas modificarían la energía cinética de los electrones y no son deseables.



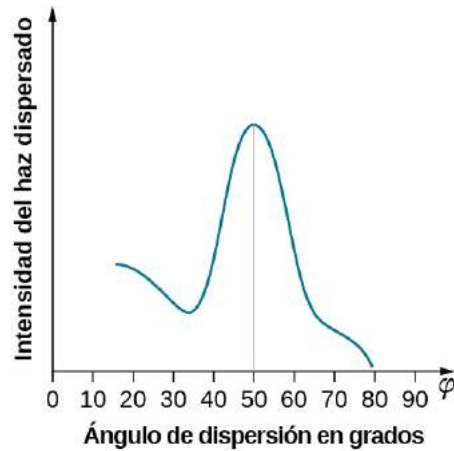
**FIGURA 6.19** Esquema del montaje experimental del experimento de difracción de Davisson-Germer. Un haz de electrones bien colimado se dispersa en el objetivo de níquel. La energía cinética de los electrones en el haz incidente se selecciona ajustando un potencial variable  $\Delta V$ , en el cañón de electrones. La intensidad del haz de electrones dispersos se mide para un rango de ángulos de dispersión  $\varphi$ , mientras que la distancia entre el detector y el objetivo no cambia.

Cuando el objetivo de níquel tiene una forma policristalina con muchos cristales microscópicos orientados al azar, los electrones incidentes se dispersan en su superficie en direcciones aleatorias. Como resultado, la intensidad del haz de electrones dispersos es muy parecida en cualquier dirección, asemejándose a una reflexión difusa de la luz desde una superficie porosa. Sin embargo, cuando el blanco de níquel tiene una estructura cristalina regular, la intensidad del haz de electrones dispersos muestra un claro máximo en un ángulo específico y los resultados muestran un claro patrón de difracción (ver la [Figura 6.20](#)). Los físicos William H. Bragg y William L. Bragg, padre e hijo, estudiaron en 1912 patrones de difracción similares formados por rayos X dispersados por varios sólidos cristalinos. La ley de Bragg en cristalografía de rayos X proporciona una conexión entre la longitud de onda  $\lambda$  de la radiación que incide en una red cristalina, la separación de la red y la posición del máximo de interferencia en la radiación difractada (vea [Difracción](#)).

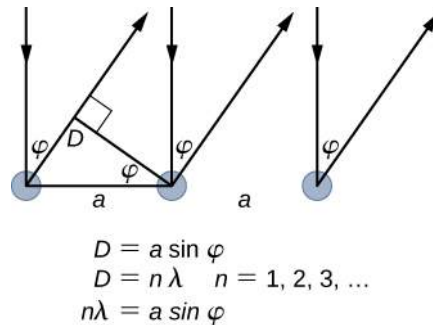
El espacio de red del objetivo de Davisson-Germer, determinado con cristalografía de rayos X, se midió como  $a = 2,15 \text{ \AA}$ . A diferencia de la cristalografía de rayos X en la que los rayos X penetran en la muestra, en el experimento original de Davisson-Germer, solo los átomos de la superficie interactúan con el haz de electrones incidente. Para la difracción superficial, la intensidad máxima del haz de electrones reflejado se observa en los ángulos de dispersión que satisfacen la condición  $n\lambda = a \sin \varphi$  (vea la [Figura 6.21](#)). El máximo de primer orden (para  $n = 1$ ) se mide con un ángulo de dispersión de  $\varphi \approx 50^\circ$  en  $\Delta V \approx 54 \text{ V}$ , que da la longitud de onda de la radiación incidente como  $\lambda = (2,15 \text{ \AA}) \sin 50^\circ = 1,64 \text{ \AA}$ . Por otro lado, un potencial de  $54 \text{ V}$  acelera los electrones incidentes a energías cinéticas de  $K = 54 \text{ eV}$ . Su momento, calculado a partir de la [Ecuación 6.61](#), es  $p = 2,478 \times 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{s/m}$ . Cuando sustituimos este resultado en la [Ecuación 6.58](#), la longitud de onda de De Broglie se obtiene como

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{4,136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}}{2,478 \times 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{s/m}} = 1,67 \text{ \AA}. \quad 6.62$$

El mismo resultado se obtiene cuando utilizamos  $K = 54 \text{ eV}$  en la [Ecuación 6.61](#). La proximidad de este resultado teórico al valor experimental de Davisson-Germer de  $\lambda = 1,64 \text{ \AA}$  es un argumento convincente para la existencia de las ondas de materia de De Broglie.

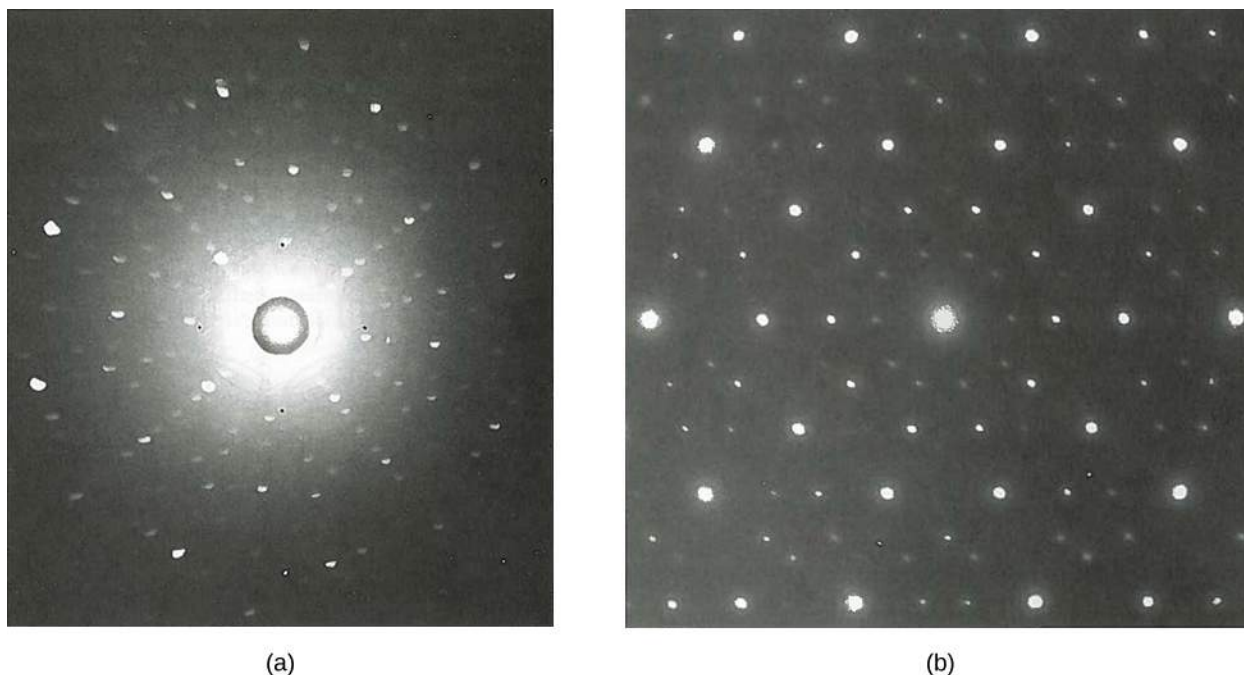


**FIGURA 6.20** Los resultados experimentales de la difracción de electrones en un objetivo de níquel para el potencial de aceleración en el cañón de electrones de aproximadamente  $\Delta V = 54\text{V}$ : El máximo de intensidad se registra en el ángulo de dispersión de aproximadamente  $\varphi = 50^\circ$ .



**FIGURA 6.21** En la difracción superficial de una onda electromagnética monocromática en una estructura de red cristalina, los haces incidentes en fase se reflejan en los átomos de la superficie. Un rayo reflejado en el átomo de la izquierda recorre una distancia adicional  $D = a \sin \varphi$  hasta el detector, donde  $a$  es la separación de la red. Los haces reflejados permanecen en fase cuando  $D$  es un múltiplo entero de su longitud de onda  $\lambda$ . La intensidad de las ondas reflejadas tiene máximos pronunciados para los ángulos  $\varphi$  lo que cumple con  $n \lambda = a \sin \varphi$ .

Las líneas de difracción medidas con electrones de baja energía, como las utilizadas en el experimento de Davisson-Germer, son bastante amplias (vea la [Figura 6.20](#)) porque los electrones incidentes se dispersan solo desde la superficie. La resolución de las imágenes de difracción mejora enormemente cuando un haz de electrones de mayor energía atraviesa una fina lámina metálica. Esto ocurre porque la imagen de difracción se crea por la dispersión de muchos planos cristalinos dentro del volumen, y los máximos producidos en la dispersión en los ángulos de Bragg son agudos (vea la [Figura 6.22](#)).



**FIGURA 6.22** Patrones de difracción obtenidos en la dispersión sobre un sólido cristalino: (a) con rayos X, y (b) con electrones. El patrón observado refleja la simetría de la estructura cristalina de la muestra.

Desde los trabajos de Davisson y Germer, la hipótesis de De Broglie ha sido ampliamente comprobada con diversas técnicas experimentales, y se ha confirmado la existencia de las ondas de De Broglie para numerosas partículas elementales. Los neutrones se han utilizado en experimentos de dispersión para determinar las estructuras cristalinas de los sólidos a partir de los patrones de interferencia formados por las ondas de materia de los neutrones. El neutrón tiene carga cero y su masa es comparable a la de un protón con carga positiva. Tanto los neutrones como los protones pueden verse como ondas de materia. Por lo tanto, la propiedad de ser una onda de materia no es específica de las partículas cargadas eléctricamente, sino que es válida para todas las partículas en movimiento. Ondas de materia de moléculas tan grandes como el carbono  $C_{60}$  se han medido. Todos los objetos físicos, pequeños o grandes, tienen una onda de materia asociada mientras permanecen en movimiento. El carácter universal de las ondas de materia de De Broglie está firmemente establecido.

### EJEMPLO 6.13

#### Dispersión de neutrones

Supongamos que se utiliza un haz de neutrones en un experimento de difracción sobre un sólido cristalino típico. Estimar la energía cinética de un neutrón (en eV) en el haz de neutrones y compararla con la energía cinética de un gas ideal en equilibrio a temperatura ambiente.

#### Estrategia

Supongamos que un espacio cristalino típico  $a$  es del orden de  $1,0 \text{ \AA}$ . Para observar un patrón de difracción en una red de este tipo, la longitud de onda de los neutrones  $\lambda$  debe estar en el mismo orden de magnitud que el espacio de la red. Utilizamos la [Ecuación 6.61](#) para encontrar el momento  $p$  y la energía cinética  $K$ . Para comparar esta energía con la energía  $E_T$  de gas ideal en equilibrio a temperatura ambiente  $T = 300\text{K}$ , utilizamos la relación  $K = \frac{3}{2}k_B T$ , donde  $k_B = 8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$  es la constante de Boltzmann.

#### Solución

Evaluamos  $pc$  para compararla con la energía de la masa en reposo del neutrón  $E_0 = 940 \text{ MeV}$  :

$$p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow pc = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1,241 \times 10^{-6} \text{ eV} \cdot \text{m}}{10^{-10} \text{ m}} = 12,41 \text{ keV}.$$

Vemos que  $p^2 c^2 \ll E_0^2$  así que  $K \ll E_0$  y podemos utilizar la energía cinética no relativista:

$$K = \frac{p^2}{2m_n} = \frac{h^2}{2\lambda^2 m_n} = \frac{(6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{(2 \times 10^{-20} \text{ m}^2)(1,66 \times 10^{-27} \text{ kg})} = 1,32 \times 10^{-20} \text{ J} = 82,7 \text{ meV}.$$

La energía cinética de un gas ideal en equilibrio a 300 K es:

$$K_T = \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} (8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(300 \text{ K}) = 38,8 \text{ MeV}.$$

Vemos que estas energías son del mismo orden de magnitud.

### Importancia

Los neutrones con energías en este rango, que es el típico para un gas ideal a temperatura ambiente, se llaman "neutrones térmicos".



## EJEMPLO 6.14

### Longitud de onda de un protón relativista

En el supercolisionador de la Organización Europea para la Investigación Nuclear (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire, CERN), los protones pueden acelerarse a velocidades de  $0,75c$ . ¿Cuáles son sus longitudes de onda de De Broglie a esta velocidad? ¿Cuáles son sus energías cinéticas?

### Estrategia

La energía de la masa en reposo de un protón es

$E_0 = m_0 c^2 = (1,672 \times 10^{-27} \text{ kg})(2,998 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 938 \text{ MeV}$ . Cuando se conoce la velocidad del protón, tenemos  $\beta = 0,75$  y  $\beta\gamma = 0,75/\sqrt{1-0,75^2} = 1,714$ . Obtenemos la longitud de onda  $\lambda$  y la energía cinética  $K$  de las relaciones relativistas.

### Solución

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc} = \frac{hc}{\beta\gamma E_0} = \frac{1,241 \text{ eV} \cdot \mu\text{m}}{1,714(938 \text{ MeV})} = 0,77 \text{ fm}$$

$$K = E_0(\gamma - 1) = 938 \text{ MeV}(1/\sqrt{1-0,75^2} - 1) = 480,1 \text{ MeV}$$

### Importancia

Observe que dado que un protón es 1835 veces más masivo que un electrón, si este experimento se realizara con electrones, un simple reajuste de estos resultados nos daría la longitud de onda del electrón de  $(1,835)0,77 \text{ fm} = 1,4 \text{ pm}$  y su energía cinética de  $480,1 \text{ MeV}/1,835 = 261,6 \text{ keV}$ .



## COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.13

Encuentre la longitud de onda de De Broglie y la energía cinética de un electrón libre que viaja a una velocidad de  $0,75c$ .



## 6.6 Dualidad onda-partícula

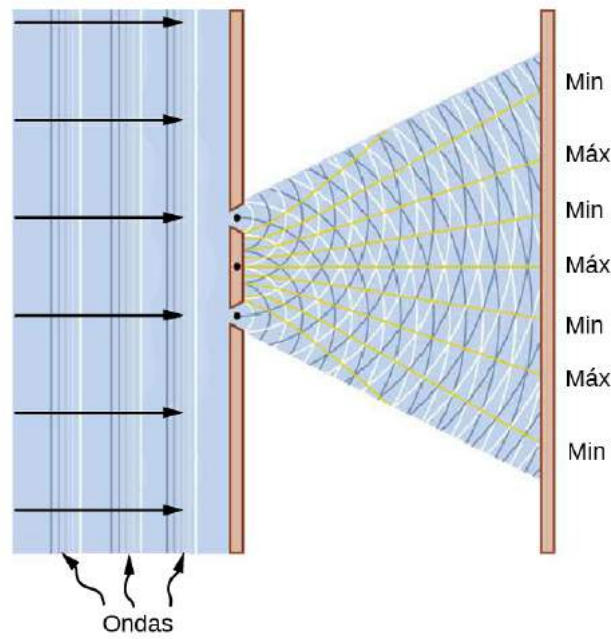
### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Identificar los fenómenos en los que las ondas electromagnéticas se comportan como un haz de fotones y las partículas se comportan como ondas
- Describir los principios físicos de la densidad electrónica.
- Resumir la evolución del pensamiento científico que condujo al desarrollo de la mecánica cuántica

La energía de la radiación detectada por una antena receptora de señales de radio llega como la energía de una onda electromagnética. La misma energía de la radiación detectada por una fotocorriente en el efecto fotoeléctrico viene como la energía de las partículas individuales de los fotones. Por tanto, se plantea la cuestión de la naturaleza de la radiación electromagnética: ¿Un fotón es una onda o es una partícula? Se pueden plantear preguntas similares sobre otras formas de energía conocidas. Por ejemplo, un electrón que forma parte de una corriente eléctrica en un circuito se comporta como una partícula que se mueve al unísono con otros electrones dentro del conductor. El mismo electrón se comporta como una onda cuando atraviesa una estructura cristalina sólida y forma una imagen de difracción. ¿Un electrón es una onda o es una partícula? La misma pregunta puede extenderse a todas las partículas de la materia (a las partículas elementales, así como a las moléculas compuestas) cuando queremos saber su verdadera naturaleza física. A la luz de nuestros conocimientos actuales, estas preguntas sobre la verdadera naturaleza de las cosas no tienen respuestas concluyentes. Lo único que podemos decir es que la **dualidad onda-partícula** existe en la naturaleza: En algunas condiciones experimentales, una partícula parece actuar como una partícula, y en otras condiciones experimentales, una partícula parece actuar como una onda. Por el contrario, en algunas circunstancias físicas la radiación electromagnética actúa como una onda, y en otras circunstancias físicas, la radiación actúa como un haz de fotones.

Esta interpretación dualista no es un concepto nuevo de la física que se haya producido por descubrimientos específicos en el siglo XX. Ya estaba presente en un debate entre Isaac Newton y Christiaan Huygens sobre la naturaleza de la luz, que comenzó en el año 1670. Según Newton, un haz de luz es un conjunto de corpúsculos de luz. Según Huygens, la luz es una onda. La hipótesis corpuscular fracasó en 1803, cuando Thomas Young anunció su **experimento de interferencia de doble rendija** con la luz (vea la [Figura 6.23](#)), que estableció firmemente que la luz era una onda. En la teoría del electromagnetismo de James Clerk Maxwell (completada en el año 1873), la luz es una onda electromagnética. La visión clásica de Maxwell de la radiación como onda electromagnética sigue siendo válida hoy en día; sin embargo, es incapaz de explicar la radiación de cuerpo negro y el efecto fotoeléctrico, donde la luz actúa como un haz de fotones.



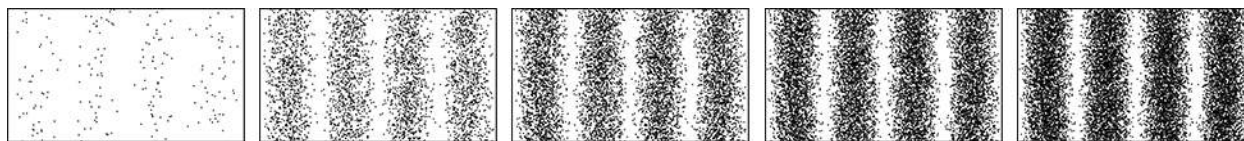
**FIGURA 6.23** El experimento de la doble rendija de Young explica la interferencia de la luz haciendo una analogía con la interferencia de las ondas de agua. Se generan dos ondas en las posiciones de dos rendijas de una pantalla opaca. Las ondas tienen la misma longitud de onda. Viajan desde su origen en las rendijas hasta la pantalla de visualización situada a la derecha de las mismas. Las ondas se encuentran en la pantalla de visualización. En las posiciones marcadas como "Max" en la pantalla, las ondas de encuentro están en fase y la amplitud de la onda combinada es mayor. En las posiciones marcadas como "Min", la amplitud de la onda combinada es cero. En el caso de la luz, este mecanismo crea un patrón de franjas claras y oscuras en la pantalla de visualización.

Una dicotomía similar existía en la interpretación de la electricidad. Desde las observaciones de Benjamin Franklin sobre la electricidad en 1751 hasta el descubrimiento del electrón por J.J. Thomson en 1897, la corriente eléctrica se consideraba un flujo en un medio eléctrico continuo. Dentro de esta teoría del fluido eléctrico se desarrolló la actual teoría de los circuitos eléctricos y se descubrió el electromagnetismo y la inducción electromagnética. El experimento de Thomson demostró que la unidad de carga eléctrica negativa (un electrón) puede viajar en el vacío sin ningún medio que transporte la carga, como en los circuitos eléctricos. Este descubrimiento cambió la forma de entender la electricidad hoy en día y dio al electrón su condición de partícula. En la primera teoría cuántica de Bohr sobre el átomo de hidrógeno, tanto el electrón como el protón son partículas de materia. Asimismo, en la dispersión Compton de los rayos X sobre los electrones, el electrón es una partícula. Por otro lado, en los experimentos de dispersión de electrones en estructuras cristalinas, el electrón se comporta como una onda.

Tal vez un escéptico plantee la cuestión de que tal vez un electrón no sea siempre más que una partícula, y que las imágenes de difracción obtenidas en los experimentos de dispersión de electrones podrían explicarse dentro de algún modelo macroscópico de un cristal y de un modelo macroscópico de electrones que llegan a él como una lluvia de pelotas de ping-pong. De hecho, para investigar esta cuestión, no necesitamos un modelo complejo de un cristal, sino un par de simples rendijas en una pantalla opaca a los electrones. En otras palabras, para reunir pruebas convincentes sobre la naturaleza de un electrón, tenemos que repetir el experimento de la doble rendija de Young con electrones. Si el electrón es una onda, deberíamos observar la formación de patrones de interferencia típicos de las ondas, como los descritos en la [Figura 6.23](#), incluso cuando los electrones pasan por las rendijas de uno en uno. Sin embargo, si el electrón no es una onda sino una partícula, las franjas de interferencia no se formarán.

El primer experimento de doble rendija con un haz de electrones, realizado por Claus Jönsson en Alemania en 1961, demostró que un haz de electrones forma efectivamente un patrón de interferencia, lo que significa que los electrones se comportan colectivamente como una onda. Los primeros experimentos de doble rendija con electrones *individuales* que atraviesan las rendijas una a una fueron realizados por Giulio Pozzi en 1974 en

Italia y por Akira Tonomura en 1989 en Japón. Demuestran que las franjas de interferencia se forman gradualmente, incluso cuando los electrones pasan por las rendijas individualmente. Esto demuestra de forma concluyente que las imágenes de difracción de electrones se forman debido a la naturaleza ondulatoria de los electrones. Los resultados observados en los experimentos de doble rendija con electrones se ilustran con las imágenes del patrón de interferencia en la [Figura 6.24](#).



**FIGURA 6.24** Franjas de interferencia simuladas por computadora observadas en el experimento de la doble rendija de Young con electrones. Se forma gradualmente un patrón en la pantalla, independientemente de que los electrones atraviesen las rendijas como un haz o individualmente uno a uno.

## EJEMPLO 6.15

### Experimento de doble rendija con electrones

En un montaje experimental para estudiar los patrones de interferencia de las ondas electrónicas, se crean dos rendijas en una membrana de silicio recubierta de oro. Cada hendidura tiene una anchura de  $62 \text{ nm}$   $4\text{-}\mu\text{m}$  y la separación entre las rendijas es de  $272 \text{ nm}$ . El haz de electrones se crea en un cañón de electrones calentando un elemento de tungsteno y acelerando los electrones a través de un potencial de  $600 \text{ V}$ . Posteriormente, el haz se colima mediante lentes electromagnéticas y el haz colimado de electrones se envía a través de las rendijas. Encuentre la posición angular de la franja brillante de primer orden en la pantalla de visualización.

#### Estrategia

Recordemos que la posición angular  $\theta$  de la franja brillante de *enésimo* orden que se forma en el patrón de interferencia de dos rendijas de Young (discutido en un capítulo anterior) está relacionado con la separación,  $d$ , entre las rendijas y con la longitud de onda,  $\lambda$ , de la luz incidente mediante la ecuación  $d \sin \theta = n\lambda$ , donde  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . La separación está dada y es igual a  $d = 272 \text{ nm}$ . Para la franja de primer orden, tomamos  $n = 1$ . Lo único que necesitamos ahora es la longitud de onda de la onda de electrones incidente.

Como el electrón ha sido acelerado desde el estado de reposo a través de una diferencia de potencial de  $\Delta V = 600 \text{ V}$ , su energía cinética es  $K = e\Delta V = 600 \text{ eV}$ . La energía de la masa en reposo del electrón es  $E_0 = 511 \text{ keV}$ .

Calculamos su longitud de onda De Broglie como la de un electrón no relativista porque su energía cinética  $K$  es mucho menor que su energía de reposo  $E_0$ ,  $K \ll E_0$ .

#### Solución

La longitud de onda del electrón es

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e K}} = \frac{h}{\sqrt{2E_0/c^2 K}} = \frac{hc}{\sqrt{2E_0 K}} = \frac{1,241 \times 10^{-6} \text{ eV} \cdot \text{m}}{\sqrt{2(511 \text{ keV})(600 \text{ eV})}} = 0,050 \text{ nm}.$$

Este  $\lambda$  se utiliza para obtener la posición de la primera franja brillante:

$$\sin \theta = \frac{1 \cdot \lambda}{d} = \frac{0,050 \text{ nm}}{272 \text{ nm}} = 0,000184 \Rightarrow \theta = 0,010^\circ.$$

#### Importancia

Observe que ésta es también la resolución angular entre dos franjas brillantes consecutivas hasta aproximadamente  $n = 1.000$ . Por ejemplo, entre la franja de orden cero y la de primer orden, entre la de primer orden y la de segundo orden, etc.

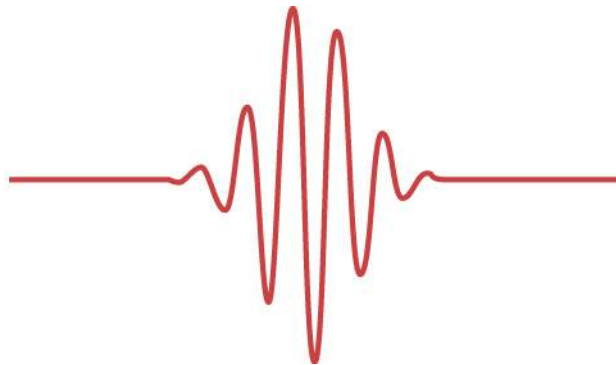
## ✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.14

Para la situación descrita en el [Ejemplo 6.15](#), encuentre la posición angular de la franja brillante de quinto orden en la pantalla de visualización.

La naturaleza dual onda-partícula de las partículas de la materia y de la radiación es una declaración de nuestra incapacidad para describir la realidad física dentro de una teoría clásica unificada, porque por separado los enfoques clásicos de las partículas y de las ondas no pueden explicar completamente los fenómenos observados. En el año 1928 se hizo evidente esta limitación, y Bohr, Edwin Schrödinger, Werner Heisenberg y Paul Dirac sentaron las bases de una nueva teoría estadística, denominada mecánica cuántica. La mecánica cuántica toma la idea de De Broglie de que las ondas de materia son la propiedad fundamental de todas las partículas y le da una interpretación estadística. Según esta interpretación, una onda asociada a una partícula lleva información sobre las posiciones probables de la partícula y sobre sus otras propiedades. Una sola partícula se ve como un *paquete de ondas* en movimiento como la que se muestra en la [Figura 6.25](#). Podemos intuir a partir de este ejemplo que si una partícula es un paquete de ondas, no podremos medir su posición exacta en el mismo sentido que no podemos precisar la ubicación de un paquete de ondas en una cuerda de guitarra que vibra. La incertidumbre,  $\Delta x$ , en la medición de la posición de la partícula está relacionada con la incertidumbre  $\Delta p$ , en la medición simultánea de su momento lineal según el principio de incertidumbre de Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar. \quad 6.63$$

El principio de Heisenberg expresa la ley de la naturaleza de que, a nivel cuántico, nuestra percepción es limitada. Por ejemplo, si conocemos la posición exacta de un cuerpo (lo que significa que  $\Delta x = 0$  en la [Ecuación 6.63](#)) al mismo tiempo no podemos conocer su momento, porque entonces la incertidumbre en su momento se vuelve infinita (porque  $\Delta p \geq 0,5\hbar/\Delta x$  en la [Ecuación 6.63](#)). El **principio de incertidumbre de Heisenberg** establece el límite de la precisión de las mediciones *simultáneas* de posición y momento de una partícula; muestra que la mejor precisión que podemos obtener es cuando tenemos un signo de igualdad (=) en la [Ecuación 6.63](#), y no podemos hacerlo mejor, incluso con los mejores instrumentos del futuro. El principio de Heisenberg es una consecuencia de la naturaleza ondulatoria de las partículas.

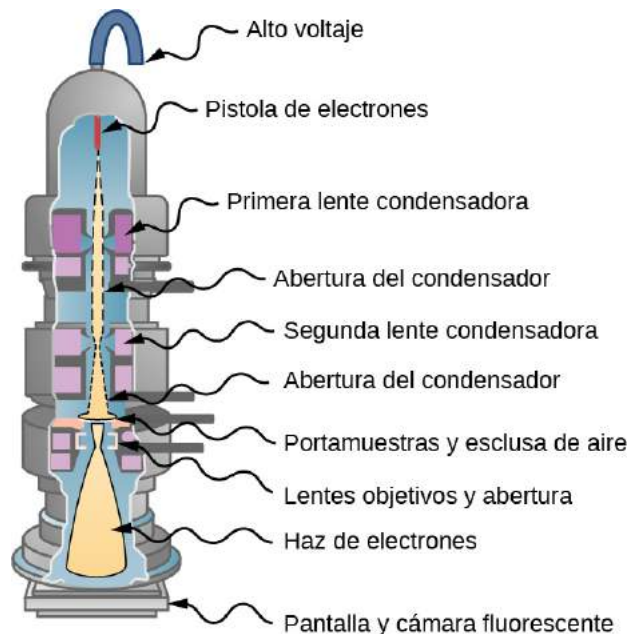


**FIGURA 6.25** En este gráfico, una partícula se muestra como un paquete de ondas y su posición no tiene un valor exacto.

Utilizamos habitualmente muchos dispositivos electrónicos que explotan la dualidad onda-partícula sin darnos cuenta de la sofisticación de la física que subyace a su funcionamiento. Un ejemplo de tecnología con base en las propiedades de las partículas de los fotones y los electrones es el dispositivo de carga acoplada, que se utiliza para la detección de luz hecha por cualquier instrumento que requiera datos digitales de alta calidad, como en las cámaras digitales o en los sensores médicos. Un ejemplo en el que se aprovechan las propiedades ondulatorias de los electrones es el microscopio electrónico.

En 1931, el físico Ernst Ruska, basándose en la idea de que los campos magnéticos pueden dirigir un haz de

electrones igual que las lentes pueden dirigir un haz de luz en un microscopio óptico, desarrolló el primer prototipo de microscopio electrónico. Este desarrollo originó el campo de la **microscopía electrónica**. En el microscopio electrónico de transmisión (transmission electron microscope, TEM), mostrado en la [Figura 6.26](#), los electrones son producidos por un elemento de tungsteno caliente y acelerados por una diferencia de potencial en un cañón de electrones, lo que les proporciona hasta 400 keV de energía cinética. Después de salir del cañón de electrones, el haz de electrones se enfoca mediante lentes electromagnéticas (un sistema de lentes condensadoras) y se transmite a través de una muestra para ser visualizada. La imagen de la muestra se reconstruye a partir del haz de electrones transmitido. La imagen ampliada puede verse directamente en una pantalla fluorescente o indirectamente enviándola, por ejemplo, a una cámara digital o al monitor de una computadora. Todo el montaje, compuesto por el cañón de electrones, las lentes, la muestra y la pantalla fluorescente, está encerrado en una cámara de vacío para evitar la pérdida de energía del haz. La resolución del TEM solo está limitada por la aberración esférica (que ya se trató en un capítulo anterior). Los modelos modernos de alta resolución de un TEM pueden tener un poder de resolución superior a  $0,5 \text{ \AA}$  y aumentos superiores a 50 millones de veces. A modo de comparación, el mejor poder de resolución obtenido con microscopía óptica es actualmente de unos 97 nm. Una limitación del TEM es que las muestras deben tener un grosor de unos 100 nm y las muestras biológicas requieren una preparación especial que implica la "fijación" química para estabilizarlas para el corte ultrafino.



**FIGURA 6.26** TEM: Un haz de electrones producido por un cañón de electrones se colima a través de las lentes del condensador y pasa a través de una muestra. Los electrones transmitidos se proyectan en una pantalla y la imagen se envía a una cámara (crédito: modificación del trabajo del Dr. Graham Beards).

Estas limitaciones no aparecen en el microscopio electrónico de barrido (scanning electron microscope, SEM), inventado por Manfred von Ardenne en 1937. En un SEM, la energía típica del haz de electrones es de hasta 40 keV y el haz no se transmite a través de una muestra, sino que se dispersa por su superficie. La topografía de la superficie de la muestra se reconstruye analizando los electrones retrodispersados, los electrones transmitidos y la radiación emitida producida por los electrones que interactúan con los átomos de la muestra. El poder de resolución de un SEM es mejor que 1 nm, y el aumento puede ser más de 250 veces mejor que el obtenido con un microscopio óptico. Las muestras escaneadas por un SEM pueden tener un tamaño de varios centímetros, pero deben prepararse especialmente, en función de las propiedades eléctricas de la muestra.

Los grandes aumentos del TEM y el SEM permiten ver moléculas individuales. Los altos poderes de resolución del TEM y el SEM nos permiten ver detalles finos, como los que se muestran en la micrografía SEM del polen al principio de este capítulo ([Figura 6.1](#)).

**EJEMPLO 6.16****Poder de resolución de un microscopio electrónico**

Si un haz de electrones de 1,0 pm de un TEM pasa por una abertura circular de 2,0- $\mu\text{m}$ , ¿cuál es el ángulo entre las dos fuentes puntuales recién resueltas para este microscopio?

**Solución**

Podemos utilizar directamente una fórmula para el poder de resolución,  $\Delta\theta$ , de un microscopio (discutido en un capítulo anterior) cuando la longitud de onda de la radiación incidente es de  $\lambda = 1,0 \text{ pm}$  y el diámetro de la abertura es  $D = 2,0 \mu\text{m}$  :

$$\Delta\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 1,22 \frac{1,0 \text{ pm}}{2,0 \mu\text{m}} = 6,10 \times 10^{-7} \text{ rad} = 3,50 \times 10^{-5} \text{ grados.}$$

**Importancia**

Observe que si utilizáramos un microscopio convencional con una luz de 400 nm, el poder de resolución sería solo de 14°, lo que significa que todos los detalles finos de la imagen se verían borrosos.

**COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.15**

Suponga que el diámetro de la abertura en el [Ejemplo 6.16](#) se reduce a la mitad. ¿Cómo afecta al poder de resolución?

## Revisión Del Capítulo

### Términos Clave

**absorbente** cualquier objeto que absorba la radiación

**ángulo de dispersión** ángulo entre la dirección del rayo disperso y la dirección del rayo incidente.

**átomo hidrogenoide** átomo ionizado con un electrón restante y núcleo con carga  $+Ze$

**constante de Planck reducida** la constante de Planck dividida por  $2\pi$

**constante de Rydberg para el hidrógeno** constante física en la fórmula de Balmer.

**Constante de Stefan-Boltzmann** constante física en la ley de Stefan

**cuerpo negro** absorbente / emisor perfecto

**dispersión de Compton** diferencia entre las longitudes de onda de los rayos X incidentes y los rayos X dispersos

**dualidad onda-partícula** las partículas pueden comportarse como ondas y la radiación puede comportarse como partículas.

**efecto Compton** el cambio en la longitud de onda cuando un rayo X se dispersa por su interacción con algunos materiales

**efecto fotoeléctrico** emisión de electrones de una superficie metálica expuesta a una radiación electromagnética de la frecuencia adecuada

**emisor** cualquier objeto que emita radiación

**energía de ionización** energía necesaria para extraer un electrón de un átomo.

**energía de un fotón** cuanto de energía radiante, depende solo de la frecuencia de un fotón

**energía del estado fundamental del átomo de hidrógeno** energía de un electrón en la primera órbita de Bohr del átomo de hidrógeno.

**energías cuantizadas** energías discretas; no continuas

**esparcimiento inelástico** efecto de dispersión en el que la energía cinética no se conserva pero la energía total sí.

**espectro de absorción** longitudes de onda de la radiación absorbida por los átomos y las moléculas.

**espectro de emisión** longitudes de onda de la radiación emitida por los átomos y las moléculas.

**espectro energético del hidrógeno** conjunto de energías discretas permitidas de un electrón en un átomo de hidrógeno.

**estado cuántico de un oscilador de Planck** cualquier modo de vibración del oscilador de Planck, enumerado por el número cuántico

**estados energéticos excitados del átomo de H**

estado de energía distinto del estado fundamental.

**Experimento de Davisson-Germer** el primer experimento de difracción de electrones de la historia que reveló las ondas electrónicas.

**experimento de interferencia de doble rendija** El experimento de la doble rendija de Young, que muestra la interferencia de las ondas.

**Experimento de la lámina de oro de Rutherford** primer experimento que demuestra la existencia del núcleo atómico.

**fenómeno cuántico** en la interacción con la materia, el fotón transfiere toda su energía o nada

**fórmula de Balmer** describe el espectro de emisión de un átomo de hidrógeno en el rango de la luz visible.

**fórmula de Rydberg** posiciones encontradas experimentalmente de las líneas espectrales del átomo de hidrógeno.

**fotocorriente** en un circuito, corriente que fluye cuando se ilumina un fotoelectrodo

**fotoelectrodo** en un circuito, un electrodo que emite fotoelectrones

**fotoelectrón** electrón emitido por una superficie metálica en presencia de radiación incidente

**fotón** partícula de luz

**frecuencia de corte** frecuencia de la luz incidente por debajo de la cual no se produce el efecto fotoeléctrico

**función de trabajo** energía necesaria para desprender el fotoelectrón de la superficie del metal

**hipótesis de De Broglie sobre las ondas de materia** las partículas de la materia pueden comportarse como ondas.

**Hipótesis de los cuantos de energía de Planck** los intercambios de energía entre la radiación y las paredes tienen lugar solo en forma de cuantos de energía discretos

**intensidad de potencia** energía que pasa por una unidad de superficie por unidad de tiempo

**límite de ionización del hidrógeno** energía de ionización necesaria para sacar un electrón de la primera órbita de Bohr.

**líneas de Fraunhofer** líneas de absorción oscuras en el espectro de emisión solar continuo.

**longitud de onda Compton** constante física con el valor  $\lambda_c = 2,43 \text{ pm}$

**longitud de onda de corte** longitud de onda de la luz incidente que corresponde a la frecuencia de



corte

**mecánica cuántica de ondas** teoría que explica la física de los átomos y las partículas subatómicas.

**microscopía electrónica** microscopía que utiliza las ondas electrónicas para "ver" los detalles finos de los objetos de tamaño nanométrico.

**modelo atómico nuclear** el núcleo pesado con carga positiva en el centro está rodeado de electrones, propuesto por Rutherford.

**modelo de Bohr del átomo de hidrógeno** primer modelo cuántico para explicar los espectros de emisión del hidrógeno.

**número cuántico** índice que enumera los niveles de energía.

**número de onda** magnitud del vector de propagación

**onda De Broglie** onda de materia asociada a cualquier objeto que tenga masa y momento.  
partícula- $\alpha$  átomo de helio doblemente ionizado.

**postulados del modelo de Bohr** tres suposiciones que establecen un marco para el modelo de Bohr.

**potencial de frenado** en un circuito, diferencia de potencial que detiene la fotocorriente

**principio de incertidumbre de Heisenberg** establece los límites de precisión en las mediciones simultáneas de momento y posición de una partícula.

**radiación de cuerpo negro** radiación emitida por un cuerpo negro

**radio de Bohr del hidrógeno** radio de la primera órbita de Bohr.

**rayo- $\alpha$**  haz de partículas- $\alpha$  (partículas alfa).

**rayos- $\beta$**  haz de electrones.

**rayos- $\gamma$**  haz de fotones altamente energéticos.

**serie de Balmer** líneas espectrales correspondientes a las transiciones de electrones hacia / desde el estado del átomo de hidrógeno  $n = 2$ , descrito por la fórmula de Balmer.

**serie de Humphreys** líneas espectrales correspondientes a las transiciones de electrones hacia / desde el estado  $n = 6$

**serie de Lyman** líneas espectrales correspondientes a las transiciones de los electrones hacia / desde el estado fundamental.

**serie de Paschen** líneas espectrales correspondientes a las transiciones de electrones hacia / desde el estado  $n = 3$

**serie de Pfund** líneas espectrales correspondientes a las transiciones de electrones hacia / desde el estado  $n = 5$

**series de Brackett** líneas espectrales correspondientes a las transiciones de electrones hacia / desde el estado  $n = 4$

**vector de propagación** vector con magnitud  $2\pi/\lambda$  que tiene la dirección del momento lineal del fotón.

**velocidad de grupo** velocidad de una onda, la energía viaja con la velocidad de grupo.

## Ecuaciones Clave

Ley de desplazamiento de Wien

$$\lambda_{\max} T = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

Ley de Stefan

$$P(T) = \sigma AT^4$$

Constante de Planck

$$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 4,136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$$

Energía cuántica de la radiación

$$\Delta E = hf$$

Ley de radiación de cuerpo negro de Planck

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}$$

Energía cinética máxima de un fotoelectrón

$$K_{\max} = e\Delta V_s$$

Energía de un fotón

$$E_f = hf$$

Balance energético del fotoelectrón

$$K_{\max} = hf - \phi$$

Frecuencia de corte

$$f_c = \frac{\phi}{h}$$

Ecuación relativista de energía invariante	$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$
Relación energía-momento del fotón	$p_f = \frac{E_f}{c}$
Energía de un fotón	$E_f = hf = \frac{hc}{\lambda}$
Magnitud del momento del fotón	$p_f = \frac{h}{\lambda}$
Vector de momento lineal del fotón	$\vec{p}_f = \hbar \vec{k}$
La longitud de onda Compton de un electrón	$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 0,00243 \text{ nm}$
La dispersión de Compton	$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos \theta)$
La fórmula de Balmer	$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$
La fórmula de Rydberg	$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right), n_i = n_f + 1, n_f + 2, \dots$
Primera condición de cuantización de Bohr	$L_n = n\hbar, n = 1, 2, \dots$
Segunda condición de cuantización de Bohr	$hf =  E_n - E_m $
Radio de Bohr del hidrógeno	$a_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0,529 \text{ \AA}$
Radio de la <i>enésima</i> órbita de Bohr	$r_n = a_0 n^2$
Valor de la energía en el estado de reposo, límite de ionización	$E_0 = \frac{1}{8\epsilon_0^2} \frac{m_e e^4}{h^2} = 13,6 \text{ eV}$
Energía del electrón en la <i>enésima</i> órbita	$E_n = -E_0 \frac{1}{n^2}$
Energía del estado fundamental del hidrógeno	$E_1 = -E_0 = -13,6 \text{ eV}$
La <i>enésima</i> órbita del ion hidrogenoide	$r_n = \frac{a_0}{Z} n^2$
La <i>enésima</i> energía del ion hidrogenoide	$E_n = -Z^2 E_0 \frac{1}{n^2}$
Energía de una onda de materia	$E = hf$

La longitud de onda de De Broglie  $\lambda = \frac{h}{p}$

La relación frecuencia-longitud de onda para las ondas de materia  $\lambda f = \frac{c}{\beta}$

Principio de incertidumbre de Heisenberg  $\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar$

## Resumen

### 6.1 Radiación de cuerpo negro

- Todos los cuerpos radian energía. La cantidad de radiación que emite un cuerpo depende de su temperatura. La ley experimental de desplazamiento de Wien establece que cuanto más caliente está el cuerpo, más corta es la longitud de onda correspondiente al pico de emisión en la curva de radiación. La ley experimental de Stefan establece que la potencia total de la radiación emitida en todo el espectro de longitudes de onda a una temperatura determinada es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura Kelvin del cuerpo radiante.
- La absorción y la emisión de la radiación se estudian dentro del modelo de un cuerpo negro. En el enfoque clásico, el intercambio de energía entre la radiación y las paredes de la cavidad es continuo. El enfoque clásico no explica la curva de radiación de cuerpo negro.
- Para explicar la curva de radiación de cuerpo negro, Planck supuso que el intercambio de energía entre la radiación y las paredes de la cavidad tiene lugar solo en cuantos discretos de energía. La hipótesis de cuantos de energía de Planck condujo a la ley teórica de la radiación de Planck, que coincide con la curva experimental de la radiación de cuerpo negro; también explica las leyes de Wien y de Stefan.

### 6.2 Efecto fotoeléctrico

- El efecto fotoeléctrico se produce cuando los fotoelectrones son expulsados de una superficie metálica en respuesta a una radiación monocromática que incide sobre la superficie. Tiene tres características: (1) es instantánea, (2) solo se produce cuando la radiación está por encima de una frecuencia de corte, y (3) las energías cinéticas de los fotoelectrones en la superficie no dependen de la intensidad de la radiación. El efecto fotoeléctrico no puede ser explicado por la teoría clásica.

- Podemos explicar el efecto fotoeléctrico asumiendo que la radiación está formada por fotones (partículas de luz). Cada fotón lleva un cuanto de energía. La energía de un fotón solo depende de su frecuencia, que es la frecuencia de la radiación. En la superficie, toda la energía de un fotón se transfiere a un fotoelectrón.
- La energía cinética máxima de un fotoelectrón en la superficie del metal es la diferencia entre la energía del fotón incidente y la función de trabajo del metal. La función de trabajo es la energía de enlace de los electrones con la superficie del metal. Cada metal tiene su propia función de trabajo característica.

### 6.3 El efecto Compton

- En el efecto Compton, los rayos X dispersados por algunos materiales tienen una longitud de onda diferente a la de los rayos X incidentes. Este fenómeno no tiene una explicación clásica.
- El efecto Compton se explica asumiendo que la radiación consiste en fotones que colisionan con electrones débilmente ligados en el material objetivo. Tanto el electrón como el fotón se tratan como partículas relativistas. Las leyes de conservación de la energía total y del momento se cumplen en las colisiones.
- Tratar el fotón como una partícula con momento que puede transferirse a un electrón conduce a una dispersión de Compton teórica que coincide con el desplazamiento de la longitud de onda medido en el experimento. Esto prueba que la radiación está formada por fotones.
- La dispersión de Compton es un esparcimiento inelástico, en el que la radiación dispersada tiene una longitud de onda mayor que la de la radiación incidente.

### 6.4 Modelo de Bohr del átomo de hidrógeno

- Las posiciones de las líneas de absorción y emisión en el espectro del hidrógeno atómico

vienen dadas por la fórmula experimental de Rydberg. La física clásica no puede explicar el espectro del hidrógeno atómico.

- El modelo de Bohr del hidrógeno fue el primer modelo de estructura atómica que explicaba correctamente los espectros de radiación del hidrógeno atómico. Fue precedido por el modelo atómico nuclear de Rutherford. En el modelo de Rutherford, un átomo está formado por un núcleo puntual cargado positivamente que contiene casi toda la masa del átomo y por electrones negativos que se encuentran lejos del núcleo.
- El modelo de Bohr del átomo de hidrógeno se basa en tres postulados: (1) un electrón se mueve alrededor del núcleo en una órbita circular, (2) el momento angular de un electrón en la órbita está cuantizado, y (3) el cambio en la energía de un electrón cuando hace un salto cuántico de una órbita a otra siempre va acompañado de la emisión o absorción de un fotón. El modelo de Bohr es semiclásico porque combina el concepto clásico de órbita del electrón (postulado 1) con el nuevo concepto de cuantización (postulados 2 y 3).
- El modelo de Bohr del átomo de hidrógeno explica los espectros de emisión y absorción del hidrógeno atómico y de los iones hidrogenoides con números atómicos bajos. Fue el primer modelo que introdujo el concepto de número cuántico para describir los estados atómicos y postular la cuantización de las órbitas de los electrones en el átomo. El modelo de Bohr es un paso importante en el desarrollo de la mecánica cuántica, que se ocupa de los átomos de muchos electrones.

### 6.5 Las ondas de materia de De Broglie

- La hipótesis de De Broglie sobre las ondas de materia postula que cualquier partícula de materia que tenga un momento lineal es también una onda. La longitud de onda de una onda de materia asociada a una partícula es inversamente proporcional a la magnitud del momento lineal de la partícula. La velocidad de la onda de materia es la velocidad de la partícula.

## Preguntas Conceptuales

### 6.1 Radiación de cuerpo negro

1. ¿Qué superficie tiene mayor temperatura, la de una estrella amarilla o la de una estrella roja?

- El concepto de De Broglie de la onda de materia del electrón proporciona una justificación para la cuantización del momento angular del electrón en el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno.
- En el experimento de Davisson-Germer, los electrones se dispersan por una superficie cristalina de níquel. Se observan los patrones de difracción de las ondas de materia de los electrones. Son la prueba de la existencia de las ondas de materia. Las ondas de materia se observan en experimentos de difracción con diversas partículas.

### 6.6 Dualidad onda-partícula

- La dualidad onda-partícula existe en la naturaleza: En algunas condiciones experimentales, una partícula actúa como tal; en otras condiciones experimentales, una partícula actúa como una onda. Por el contrario, en algunas circunstancias físicas, la radiación electromagnética actúa como una onda, y en otras circunstancias físicas, la radiación actúa como un haz de fotones.
- Los experimentos modernos de doble rendija con electrones demostraron de forma concluyente que las imágenes de difracción de electrones se forman debido a la naturaleza ondulatoria de los mismos.
- La naturaleza dual onda-partícula de las partículas y de la radiación no tiene una explicación clásica.
- La teoría cuántica considera que la propiedad ondulatoria es la propiedad fundamental de todas las partículas. Una partícula se ve como un paquete de ondas en movimiento. La naturaleza ondulatoria de las partículas impone una limitación a la medición simultánea de la posición y el momento de la partícula. El principio de incertidumbre de Heisenberg establece los límites de la precisión en estas mediciones simultáneas.
- La dualidad onda-partícula se aprovecha en muchos dispositivos, como los de acoplamiento de carga (utilizados en las cámaras digitales) o en la microscopía electrónica de barrido (SEM) y de transmisión (TEM).

2. Describa lo que vería al observar un cuerpo cuya temperatura aumenta de 1000 K a 1.000.000 K.
3. Explique los cambios de color en un cuerpo caliente al aumentar su temperatura.

4. Especule por qué la luz ultravioleta provoca quemaduras solares, mientras que la luz visible no lo hace.
5. Los radiadores de dos cavidades están contruidos con paredes de diferentes metales. A la misma temperatura, ¿en qué se diferenciarían sus espectros de radiación?
6. Discuta por qué algunos cuerpos aparecen negros, otros rojos y otros blancos.
7. Si todo radia energía electromagnética, ¿por qué no podemos ver objetos a temperatura ambiente en una habitación oscura?
8. ¿Cuánto aumenta la potencia radiada por un cuerpo negro cuando se triplica su temperatura (en K)?

### 6.2 Efecto fotoeléctrico

9. Con la misma fuente de luz monocromática, ¿se produciría el efecto fotoeléctrico para todos los metales?
10. En la interpretación del efecto fotoeléctrico, ¿cómo se sabe que un electrón no absorbe más de un fotón?
11. Explique cómo puede determinar la función de trabajo a partir de un gráfico del potencial de frenado frente a la frecuencia de la radiación incidente en un experimento de efecto fotoeléctrico. ¿Puede determinar el valor de la constante de Planck a partir de este gráfico?
12. Supongamos que en el experimento de efecto fotoeléctrico hacemos un gráfico de la corriente detectada frente a la diferencia de potencial aplicada. ¿Qué información obtenemos de ese gráfico? ¿Podemos determinar a partir del mismo el valor de la constante de Planck? ¿Podemos determinar la función de trabajo del metal?
13. Especule cómo el aumento de la temperatura de un fotoelectrodo afecta a los resultados del experimento del efecto fotoeléctrico.
14. ¿Qué aspectos del efecto fotoeléctrico no pueden ser explicados por la física clásica?
15. ¿Es el efecto fotoeléctrico una consecuencia del carácter ondulatorio de la radiación o es una consecuencia del carácter de partícula de la radiación? Explique brevemente.
16. Los metales sodio, hierro y molibdeno tienen funciones de trabajo de 2,5 eV, 3,9 eV y 4,2 eV, respectivamente. ¿Cuál de estos metales emite fotoelectrones cuando se ilumina con luz de 400 nm?

### 6.3 El efecto Compton

17. Discuta las similitudes y diferencias entre el efecto fotoeléctrico y el de Compton.
18. ¿Cuál tiene un mayor momento: un fotón UV o un fotón IR?
19. ¿Afecta el cambio de intensidad de un haz de luz monocromática al momento de los fotones individuales del haz? ¿Afecta este cambio al momento neto del haz?
20. ¿Puede producirse el efecto Compton con la luz visible? Si es así, ¿será detectable?
21. ¿Es posible observar rayos X dispersos en el experimento de Compton que tengan una longitud de onda más corta que la radiación de rayos X incidente?
22. Demuestre que la longitud de onda Compton tiene la dimensión de la longitud.
23. ¿A qué ángulo de dispersión el desplazamiento de la longitud de onda en el efecto Compton es igual a la longitud de onda Compton?

### 6.4 Modelo de Bohr del átomo de hidrógeno

24. Explique por qué los patrones de las líneas espectrales de emisión brillante tienen una posición espectral idéntica al patrón de las líneas espectrales de absorción oscuras para un elemento gaseoso determinado.
25. ¿Se superponen las distintas líneas espectrales del átomo de hidrógeno?
26. La serie de Balmer para el hidrógeno se descubrió antes que la serie de Lyman o la de Paschen. ¿Por qué?
27. Cuando se analiza el espectro de absorción del hidrógeno a temperatura ambiente, se encuentran líneas de absorción para la serie de Lyman, pero no se encuentra ninguna para la serie de Balmer. ¿Qué nos dice esto sobre el estado energético de la mayoría de los átomos de hidrógeno a temperatura ambiente?
28. El hidrógeno representa alrededor del 75 % en masa de la materia en la superficie de la mayoría de las estrellas. Sin embargo, las líneas de absorción del hidrógeno son más fuertes (de mayor intensidad) en los espectros de las estrellas con una temperatura superficial de unos 9.000 K. Son más débiles en el espectro solar y son esencialmente inexistentes en las estrellas muy calientes (temperaturas superiores a 25.000 K) o más bien frías (temperaturas inferiores a 3.500 K). Especule por qué la temperatura de la superficie afecta a las líneas de absorción del hidrógeno que

observamos.

29. Discuta las similitudes y diferencias entre el modelo de Thomson del átomo de hidrógeno y el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno.
30. Discuta la forma en que el modelo de Thomson no es físico. Apoye su argumento con pruebas experimentales.
31. Si en un átomo de hidrógeno un electrón se desplaza a una órbita con un radio mayor, ¿aumenta o disminuye la energía del átomo de hidrógeno?
32. ¿Cómo se conserva la energía cuando un átomo hace una transición de un estado energético superior a otro inferior?
33. Supongamos que un electrón de un átomo de hidrógeno hace una transición de la órbita  $(n+1)$  a la órbita  $n$ . ¿La longitud de onda del fotón emitido es mayor para valores mayores de  $n$ , o para valores menores de  $n$ ?
34. Discuta por qué las energías permitidas del átomo de hidrógeno son negativas.
35. ¿Puede un átomo de hidrógeno absorber un fotón cuya energía sea superior a 13,6 eV?
36. ¿Por qué se puede ver a través del cristal pero no de la madera?
37. ¿Tienen las fuerzas gravitacionales un efecto significativo en los niveles de energía atómica?
38. Demuestre que la constante de Planck tiene las dimensiones del momento angular.

### 6.5 Las ondas de materia de De Broglie

39. ¿Qué tipo de radiación es la más adecuada para la observación de patrones de difracción en sólidos cristalinos: las ondas de radio, la luz visible o los rayos X? Explique.
40. Especule cómo se verían afectados los patrones de difracción de un cristal típico si se utilizan  $\gamma\gamma$  en lugar de los rayos X.
41. Si un electrón y un protón viajan a la misma

velocidad, ¿cuál de ellos tiene la menor longitud de onda de De Broglie?

42. Si una partícula se acelera, ¿cómo afecta esto a su longitud de onda de De Broglie?
43. ¿Por qué no se observa a diario la naturaleza ondulatoria de la materia en los objetos macroscópicos?
44. ¿Cuál es la longitud de onda de un neutrón en reposo? Explique.
45. ¿Por qué el montaje del experimento de Davisson-Germer debe estar encerrado en una cámara de vacío? Discuta el resultado que espera cuando la cámara no es evacuada.

### 6.6 Dualidad onda-partícula

46. Dé un ejemplo de un experimento en el que la luz se comporte como ondas. Dé un ejemplo de un experimento en el que la luz se comporte como una corriente de fotones.
47. Discuta: ¿En qué se diferencia la interferencia de las ondas de agua de la interferencia de los electrones? ¿En qué se parecen?
48. Dé al menos un argumento en apoyo de la hipótesis de las ondas de materia.
49. Dé al menos un argumento en apoyo de la naturaleza de partícula de la radiación.
50. Explique la importancia del experimento de la doble rendija de Young.
51. ¿Permite el principio de incertidumbre de Heisenberg que una partícula esté en reposo en una región determinada del espacio?
52. ¿Puede conocerse con exactitud la longitud de onda de De Broglie de una partícula?
53. ¿Producen los fotones de luz roja una mejor resolución en un microscopio que los fotones de luz azul? Explique.
54. Discuta la diferencia principal entre un SEM y un TEM.

## Problemas

### 6.1 Radiación de cuerpo negro

55. Un calentador de 200 W emite una radiación de  $1,5 \mu\text{m}$ . (a) ¿Qué valor del cuanto de energía emite? (b) Suponiendo que el calor específico de un cuerpo de  $4,0 \text{ kg}$  es  $0,83 \text{ kcal/kg} \cdot \text{K}$ , ¿cuántos de estos fotones debe absorber el cuerpo para que su temperatura aumente en  $2 \text{ K}$ ? (c) ¿Cuánto tiempo dura el proceso de calentamiento de (b), suponiendo que toda la radiación emitida por el calentador es

absorbida por el cuerpo?

56. Un generador de microondas de  $900 \text{ W}$  en un horno genera cuantos de energía de frecuencia  $2560 \text{ MHz}$ . (a) ¿Cuántos cuantos de energía emite por segundo? (b) ¿Cuántos cuantos de energía debe absorber un plato de pasta colocado en la cavidad de radiación para aumentar su temperatura en  $45,0 \text{ K}$ ? Supongamos que el plato tiene una masa de  $0,5 \text{ kg}$  y que su calor específico es  $0,9 \text{ kcal/kg} \cdot \text{K}$ . (c) Suponga que todos los cuantos de energía



emitidos por el generador son absorbidos por el plato de pasta. ¿Cuánto tiempo hay que esperar hasta que el plato de (b) esté listo?

57. (a) ¿Para qué temperatura el pico del espectro de radiación de cuerpo negro está a 400 nm? (b) Si la temperatura de un cuerpo negro es de 800 K, ¿a qué longitud de onda radia más energía?
58. Los elementos de tungsteno de las bombillas incandescentes funcionan a 3200 K. ¿A qué longitud de onda radia el filamento la máxima energía?
59. El espacio interestelar está lleno de radiación de longitud de onda  $970\mu\text{m}$ . Esta radiación se considera un remanente del "big bang". ¿Cuál es la temperatura del cuerpo negro correspondiente a esta radiación?
60. La energía radiante del sol alcanza su máximo en una longitud de onda de unos 500,0 nm. ¿Cuál es la temperatura aproximada de la superficie del sol?

## 6.2 Efecto fotoeléctrico

61. Un fotón tiene una energía de 20 keV. ¿Cuáles son su frecuencia y su longitud de onda?
62. Las longitudes de onda de la luz visible van aproximadamente de 400 a 750 nm. ¿Cuál es el rango correspondiente de energías fotónicas para la luz visible?
63. ¿Cuál es la mayor longitud de onda de radiación que puede expulsar un fotoelectrón de la plata? ¿Está en el rango visible?
64. ¿Cuál es la mayor longitud de onda de radiación que puede expulsar un fotoelectrón del potasio, dada la función de trabajo del potasio 2,24 eV? ¿Está en el rango visible?
65. Estime la energía de enlace de los electrones en el magnesio, dado que la longitud de onda de 337 nm es la mayor longitud de onda que puede tener un fotón para expulsar un fotoelectrón del fotoelectrodo de magnesio.
66. La función de trabajo del potasio es de 2,26 eV. ¿Cuál es la frecuencia de corte cuando se utiliza este metal como fotoelectrodo? ¿Cuál es el potencial de frenado de los electrones emitidos cuando este fotoelectrodo se expone a una radiación de frecuencia 1200 THz?
67. Estime la función de trabajo del aluminio, dado que la longitud de onda de 304 nm es la mayor longitud de onda que puede tener un fotón para expulsar un fotoelectrón del fotoelectrodo de aluminio.
68. ¿Cuál es la energía cinética máxima de los fotoelectrones expulsados del sodio por la radiación incidente de longitud de onda 450 nm?
69. Una radiación UV de 120 nm ilumina un electrodo plateado. ¿Cuál es la energía cinética máxima de los fotoelectrones expulsados?
70. Una luz violeta de 400 nm expulsa fotoelectrones con una energía cinética máxima de 0,860 eV desde el fotoelectrodo de sodio. ¿Cuál es la función de trabajo del sodio?
71. Una luz de 600 nm incide sobre una superficie fotoeléctrica y se emiten electrones con una energía cinética máxima de 0,17 eV. Determine (a) la función de trabajo y (b) la frecuencia de corte de la superficie. (c) ¿Cuál es el potencial de frenado cuando la superficie es iluminada con luz de longitud de onda 400 nm?
72. La longitud de onda de corte para la emisión de fotoelectrones de una determinada superficie es de 500 nm. Encuentre la energía cinética máxima de los fotoelectrones expulsados cuando la superficie se ilumina con luz de longitud de onda 600 nm.
73. Encuentre la longitud de onda de la radiación que puede expulsar electrones de 2,00 eV del electrodo de calcio. La función de trabajo del calcio es de 2,71 eV. ¿En qué rango se encuentra esta radiación?
74. Encuentre la longitud de onda de la radiación que puede expulsar electrones de 0,10 eV del electrodo de potasio. La función de trabajo del potasio es de 2,24 eV. ¿En qué rango se encuentra esta radiación?
75. Encuentre la velocidad máxima de los fotoelectrones expulsados por una radiación de 80 nm, si la función de trabajo del fotoelectrodo es de 4,73 eV.

## 6.3 El efecto Compton

76. ¿Cuál es el momento de un fotón amarillo de 589 nm?
77. ¿Cuál es el momento de un fotón de microondas de 4 cm?
78. En un haz de luz blanca (de longitudes de onda entre 400 y 750 nm), ¿qué rango de momento pueden tener los fotones?
79. ¿Cuál es la energía de un fotón cuyo momento es  $3,0 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ?
80. ¿Cuál es la longitud de onda de (a) un fotón de rayos X de 12-keV; (b) un fotón de rayos  $\gamma$  de 2,0-MeV?
81. Encuentre el momento y la energía de un fotón de  $1,0\text{-\AA}$ .
82. Encuentra la longitud de onda y la energía de un



fotón con momento  $5,00 \times 10^{-29} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ .

83. Un fotón de rayos  $\gamma$  tiene un momento de  $8,00 \times 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ . Encuentre su longitud de onda y su energía.
84. (a) Calcule el momento de un fotón de  $2,5\text{-}\mu\text{m}$   
(b) Encuentre la velocidad de un electrón con el mismo momento. (c) ¿Cuál es la energía cinética del electrón y cómo se compara con la del fotón?
85. Demuestre que  $p = h/\lambda$  y  $E_f = hf$  son consistentes con la fórmula relativista  $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$ .
86. Demuestre que la energía  $E$  en eV de un fotón está dada por  $E = 1,241 \times 10^{-6} \text{ eV} \cdot \text{m}/\lambda$ , donde  $\lambda$  es su longitud de onda en metros.
87. Para las colisiones con electrones libres, compare la dispersión de Compton de un fotón dispersado en un ángulo de  $30^\circ$  a la de un fotón dispersado en un ángulo de  $45^\circ$ .
88. Los rayos X de longitud de onda  $12,5 \text{ pm}$  se dispersan desde un bloque de carbono. ¿Cuáles son las longitudes de onda de los fotones dispersados a (a)  $30^\circ$ ; (b)  $90^\circ$ ; y (c)  $180^\circ$ ?

#### 6.4 Modelo de Bohr del átomo de hidrógeno

89. Calcule la longitud de onda de la primera línea de la serie de Lyman y demuestre que esta línea se encuentra en la parte ultravioleta del espectro.
90. Calcule la longitud de onda de la quinta línea de la serie de Lyman y demuestre que esta línea se encuentra en la parte ultravioleta del espectro.
91. Calcule los cambios de energía correspondientes a las transiciones del átomo de hidrógeno: (a) de  $n = 3$  a  $n = 4$ ; (b) de  $n = 2$  a  $n = 1$ ; y (c) de  $n = 3$  a  $n = \infty$ .
92. Determine la longitud de onda de la tercera línea de Balmer (transición de  $n = 5$  a  $n = 2$ ).
93. ¿Cuál es la frecuencia del fotón absorbido cuando el átomo de hidrógeno hace la transición del estado fundamental al estado  $n = 4$ ?
94. Cuando un átomo de hidrógeno se encuentra en su estado fundamental, ¿cuáles son las longitudes de onda más cortas y más largas de los fotones que puede absorber sin ser ionizado?
95. Cuando un átomo de hidrógeno está en su tercer estado excitado ¿cuáles son las longitudes de onda más cortas y más largas de los fotones que puede emitir?
96. ¿Cuál es la mayor longitud de onda que puede

tener la luz para ser capaz de ionizar el átomo de hidrógeno en su estado fundamental?

97. Para un electrón en un átomo de hidrógeno en el estado  $n = 2$ , calcule: (a) el momento angular; (b) la energía cinética; (c) la energía potencial; y (d) la energía total.
98. Encuentre la energía de ionización de un átomo de hidrógeno en el cuarto estado energético.
99. Se ha medido que se necesitan  $0,850 \text{ eV}$  para sacar un electrón del átomo de hidrógeno. ¿En qué estado se encontraba el átomo antes de la ionización?
100. ¿Cuál es el radio de un átomo de hidrógeno cuando el electrón está en el primer estado excitado?
101. Encuentre la longitud de onda más corta de la serie de Balmer. ¿En qué parte del espectro se encuentra esta línea?
102. Demuestre que toda la serie de Paschen se encuentra en la parte infrarroja del espectro.
103. ¿Las series Balmer y Lyman se superponen? ¿Por qué? ¿Por qué no? (Sugerencia: calcule la línea de Balmer más corta y la línea de Lyman más larga).
104. (a) ¿Qué línea de la serie de Balmer es la primera en la sección UV del espectro? (b) ¿Cuántas líneas de Balmer se encuentran en la parte visible del espectro? (c) ¿Cuántas líneas de Balmer se encuentran en la parte UV?
105. Una línea de emisión del hidrógeno atómico  $4,653\text{-}\mu\text{m}$  corresponde a la transición entre los estados  $n_f = 5$  y  $n_i$ . Encuentre  $n_i$ .

#### 6.5 Las ondas de materia de De Broglie

106. ¿A qué velocidad un electrón tendrá una longitud de onda de  $1,00 \text{ m}$ ?
107. ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de un electrón que viaja a una velocidad de  $5,0 \times 10^6 \text{ m/s}$ ?
108. ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de un electrón que es acelerado desde el estado de reposo a través de una diferencia de potencial de  $20 \text{ kV}$ ?
109. ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de un protón cuya energía cinética es de  $2,0 \text{ MeV}$ ? ¿ $10,0 \text{ MeV}$ ?
110. ¿Cuál es la longitud de onda De Broglie de un jugador de fútbol de  $10 \text{ kg}$  que corre a una velocidad de  $8,0 \text{ m/s}$ ?
111. (a) ¿Cuál es la energía de un electrón cuya longitud de onda De Broglie es la de un fotón de luz amarilla con longitud de onda de  $590 \text{ nm}$ ? (b) ¿Cuál es la longitud de onda De Broglie

de un electrón cuya energía es la del fotón de luz amarilla?

- 112.** La longitud de onda De Broglie de un neutrón es de 0,01 nm. ¿Cuál es la velocidad y la energía de este neutrón?
- 113.** ¿Cuál es la longitud de onda de un electrón que se mueve a un 3 % de la velocidad de la luz?
- 114.** ¿A qué velocidad tiene un protón una longitud de onda de 6,0 fm (aproximadamente el tamaño de un núcleo)? De su respuesta en unidades de  $c$ .
- 115.** ¿Cuál es la velocidad de una bola de billar de 0,400 kg si su longitud de onda es de 7,50 fm?
- 116.** Encuentre la longitud de onda de un protón que se mueve al 1,00 % de la velocidad de la luz (cuando  $\beta = 0,01$ ).

### 6.6 Dualidad onda-partícula

- 117.** Un transmisor de radio AM radia 500 kW a una frecuencia de 760 kHz. ¿Cuántos fotones por segundo emite el emisor?
- 118.** Encuentre el factor de Lorentz  $\gamma$  y la longitud de onda de De Broglie para un electrón de 50-GeV en un acelerador de partículas.
- 119.** Encuentre el factor de Lorentz  $\gamma$  y la longitud de onda de De Broglie para un protón de 1,0 TeV en un acelerador de partículas.
- 120.** ¿Cuál es la energía cinética de un electrón de 0,01 nm en un TEM?
- 121.** Para que un electrón sea difractado de forma significativa por un cristal, su longitud de onda debe ser aproximadamente igual a la separación,  $d$  de los planos cristalinos. Suponiendo que  $d = 0,250$  nm, estimar la diferencia de potencial a través de la cual un electrón debe acelerarse desde el estado de reposo para que sea difractado por estos planos.
- 122.** Los rayos X forman una radiación ionizante que es peligrosa para los tejidos vivos e indetectable para el ojo humano. Supongamos que un estudiante investigador que trabaja en un laboratorio de difracción de rayos X se expone accidentalmente a una dosis mortal de radiación. Calcule el aumento de temperatura del investigador en las siguientes condiciones: la energía de los fotones de rayos X es de 200 keV y el investigador absorbe  $4 \times 10^{13}$  fotones por cada kilo de peso corporal durante la exposición. Supongamos que el calor específico del cuerpo del estudiante es de  $0,83 \text{ kcal/kg} \cdot \text{K}$ .
- 123.** El viento solar (radiación) que incide en la parte superior de la atmósfera terrestre tiene una intensidad media de  $1,3 \text{ kW/m}^2$ . Suponga que está construyendo una vela solar que debe propulsar una pequeña nave espacial de juguete con una masa de 0,1 kg en el espacio entre la Estación Espacial Internacional y la Luna. La vela está hecha de un material muy ligero, que refleja perfectamente la radiación incidente. Para evaluar si dicho proyecto es factible, responda a las siguientes preguntas, suponiendo que los fotones de radiación inciden solo en dirección normal a la superficie reflectante de la vela. (a) ¿Cuál es la presión de radiación (fuerza por  $\text{m}^2$ ) de la radiación que incide en la vela tipo espejo? (b) Dada la presión de radiación calculada en (a), ¿cuál será la aceleración de la nave espacial si la vela tiene un área de  $10,0 \text{ m}^2$ ? (c) Dada la aceleración estimada en (b), ¿a qué velocidad se moverá la nave espacial al cabo de 24 horas cuando parta del reposo?
- 124.** Trate el cuerpo humano como un cuerpo negro y determine el porcentaje de aumento de la potencia total de su radiación cuando su temperatura aumenta de  $98,6^\circ \text{ F}$  a  $103^\circ \text{ F}$ .
- 125.** Demuestre que la ley de desplazamiento de Wien resulta de la ley de radiación de Planck. (Sugerencia: sustituir  $x = hc/\lambda kT$  y escribir la ley de Planck en la forma  $I(x, T) = Ax^5 / (e^x - 1)$ , donde  $A = 2\pi(kT)^5 / (h^4 c^3)$ . Ahora, para un  $T$  fijo, encuentre la posición del máximo en  $I(x, T)$  resolviendo para  $x$  en la ecuación  $dI(x, T)/dx = 0$ .)
- 126.** Demuestre que la ley de Stefan se deriva de la ley de radiación de Planck. Sugerencia: Para calcular la potencia total de la radiación de cuerpo negro emitida en todo el espectro de longitudes de onda a una temperatura determinada, integre la ley de Planck en todo el espectro  $P(T) = \int_0^\infty I(\lambda, T) d\lambda$ . Utilice la sustitución  $x = hc/\lambda kT$  y el valor tabulado de la integral  $\int_0^\infty dx x^3 / (e^x - 1) = \pi^4 / 15$ .

## Problemas Adicionales

- 127.** Determine la intensidad de potencia de la radiación por unidad de longitud de onda emitida a una longitud de onda de 500,0 nm por un cuerpo negro a una temperatura de 10.000 K.
- 128.** La molécula de HCl oscila a una frecuencia de 87,0 THz. ¿Cuál es la diferencia (en eV) entre sus niveles de energía adyacentes?
- 129.** Un oscilador mecánico cuántico vibra a una frecuencia de 250,0 THz. ¿Cuál es la energía mínima de radiación que puede emitir?
- 130.** En unos 5.000 millones de años, el sol evolucionará hasta convertirse en una gigante roja. Supongamos que la temperatura de su superficie disminuirá hasta aproximadamente la mitad de su valor actual de 6.000 K, mientras que su radio actual de  $7,0 \times 10^8$  m aumentará a  $1,5 \times 10^{11}$  m (que es la distancia actual entre la Tierra y el sol). Calcule la relación entre la potencia total emitida por el sol en su etapa de gigante roja y su potencia actual.
- 131.** Una lámpara de sodio emite 2,0 W de energía radiante, la mayor parte de la cual tiene una longitud de onda de unos 589 nm. Calcule el número de fotones emitidos por segundo por la lámpara.
- 132.** Los fotoelectrones son expulsados desde un fotoelectrodo y se detectan a una distancia de 2,50 cm de este. La función de trabajo del fotoelectrodo es de 2,71 eV y la radiación incidente tiene una longitud de onda de 420 nm. ¿Cuánto tarda un fotoelectrón en llegar al detector?
- 133.** Si la función de trabajo de un metal es de 3,2 eV, ¿cuál es la máxima longitud de onda que puede tener un fotón para expulsar un fotoelectrón de esta superficie metálica?
- 134.** La función de trabajo de una superficie fotoeléctrica es de 2,00 eV. ¿Cuál es la velocidad máxima de los fotoelectrones emitidos por esta superficie cuando una luz de 450 nm incide sobre ella?
- 135.** Se proyecta un rayo láser de 400 nm sobre un electrodo de calcio. La potencia del rayo láser es de 2,00 mW y la función de trabajo del calcio es de 2,31 eV. (a) ¿Cuántos fotoelectrones por segundo se expulsan? (b) ¿Qué potencia neta se llevan los fotoelectrones?
- 136.** (a) Calcule el número de fotoelectrones por segundo que son expulsados de un área de  $1,00 \text{ mm}^2$  de sodio metálico por una radiación de 500 nm con intensidad  $1,30 \text{ kW/m}^2$  (la intensidad de la luz solar por encima de la atmósfera terrestre). (b) Dada la función de trabajo del metal como 2,28 eV, ¿qué potencia se llevan estos fotoelectrones?
- 137.** Un láser con una potencia de 2,00 mW a una longitud de onda de 400 nm se utiliza para proyectar un haz de luz sobre un fotoelectrodo de calcio. (a) ¿Cuántos fotoelectrones salen de la superficie de calcio por segundo? (b) ¿Qué potencia se llevan los fotoelectrones expulsados, dado que la función de trabajo del calcio es de 2,31 eV? (c) Calcule la fotocorriente. (d) Si el fotoelectrodo se aísla eléctricamente de repente y la configuración de dos electrodos en el circuito comienza a actuar como un condensador de 2,00 pF, ¿cuánto tiempo fluirá la corriente antes de que el voltaje del condensador la detenga?
- 138.** La función de trabajo del bario es de 2,48 eV. Encuentre la energía cinética máxima de los fotoelectrones expulsados cuando la superficie de bario se ilumina con: (a) la radiación emitida por una estación de radio de 100 kW que emite a 800 kHz; (b) una luz láser de 633 nm emitida por un potente láser de He-Ne; y (c) una luz azul de 434 nm emitida por un pequeño tubo de descarga de gas hidrógeno.
- 139.** (a) Calcule la longitud de onda de un fotón que tiene el mismo momento que un protón que se mueve con el 1 % de la velocidad de la luz en el vacío. (b) ¿Cuál es la energía de este fotón en MeV? (c) ¿Cuál es la energía cinética del protón en MeV?
- 140.** (a) Encuentre el momento de un fotón de rayos X de 100 keV. (b) Encuentre la velocidad de un neutrón con el mismo momento. (c) ¿Cuál es la energía cinética del neutrón en eV?
- 141.** El momento de la luz, al igual que el de las partículas, se invierte exactamente cuando un fotón se refleja directamente desde un espejo, suponiendo que el retroceso del espejo sea insignificante. El cambio de momento es el doble del momento incidente del fotón, al igual que para las partículas. Supongamos que un haz de luz tiene una intensidad de  $1,0 \text{ kW/m}^2$  y cae en un área de un espejo de  $-2,0 \text{ m}^2$  y se refleja en él. (a) Calcule la energía reflejada en 1,00 s. (b) ¿Cuál es el momento impartido al espejo? (c) Utilice la segunda ley de Newton para hallar la fuerza sobre el espejo. (d)

- ¿Parece razonable la hipótesis de ausencia de retroceso del espejo?
142. Un fotón de energía 5,0 keV colisiona con un electrón estacionario y se dispersa con un ángulo de  $60^\circ$ . ¿Cuál es la energía adquirida por el electrón en la colisión?
  143. Un fotón de 0,75 nm es dispersado por un electrón estacionario. La velocidad de retroceso del electrón es  $1,5 \times 10^6$  m/s. (a) Encuentre el desplazamiento de la longitud de onda del fotón. (b) Encuentre el ángulo de dispersión del fotón.
  144. Encuentre el máximo cambio en la longitud de onda de los rayos X que puede ocurrir debido a la dispersión Compton. ¿Depende este cambio de la longitud de onda del rayo incidente?
  145. Un fotón de longitud de onda 700 nm incide sobre un átomo de hidrógeno. Cuando este fotón es absorbido, el átomo se ioniza. ¿Cuál es la órbita más baja posible que podría haber ocupado el electrón antes de ser ionizado?
  146. ¿Cuál es la energía cinética máxima de un electrón tal que una colisión entre el electrón y un átomo de hidrógeno estacionario en su estado fundamental es definitivamente elástica?
  147. Helio atómico singularmente ionizado  $\text{He}^{+1}$  es un ion hidrogenoide. (a) ¿Cuál es su radio en estado fundamental? (b) Calcule las energías de sus cuatro estados de menor energía. (c) Repita los cálculos para el ion  $\text{Li}^{2+}$
  148. Un átomo de berilio triplemente ionizado  $\text{Be}^{3+}$  es un ion hidrogenoide. Cuando  $\text{Be}^{3+}$  está en uno de sus estados excitados, su radio en este *enésimo* estado es exactamente el mismo que el radio de la primera órbita de Bohr del hidrógeno. Encuentre  $n$  y calcule la energía de ionización para este estado de  $\text{Be}^{3+}$ .
  149. En los ambientes de temperaturas extremas, como el de la corona solar, los átomos pueden ionizarse al sufrir colisiones con otros átomos. Un ejemplo de esta ionización en la corona solar es la presencia de iones de  $\text{C}^{5+}$ , detectados en el espectro Fraunhofer. (a) ¿En qué factor las energías de la escala de iones  $\text{C}^{5+}$  se comparan con el espectro de energía de un átomo de hidrógeno? (b) ¿Cuál es la longitud de onda de la primera línea de la serie Paschen de  $\text{C}^{5+}$ ? (c) ¿En qué parte del espectro se encuentran estas líneas?
  150. (a) Calcule la energía de ionización para  $\text{He}^+$ . (b) ¿Cuál es la frecuencia mínima de un fotón capaz de ionizar  $\text{He}^+$ ?
  151. Los experimentos se realizan con neutrones ultrafríos que tienen velocidades tan pequeñas como 1,00 m/s. Encuentre la longitud de onda de dicho neutrón ultrafrío y su energía cinética.
  152. Encuentre la velocidad y la energía cinética de un neutrón de 6,0 fm. (La energía de masa en reposo del neutrón es  $E_0 = 940$  MeV.)
  153. El espacio entre los planos cristalinos del cristal de NaCl es de 0,281 nm, según se ha determinado por difracción de rayos X con rayos X de longitud de onda 0,170 nm. ¿Cuál es la energía de los neutrones en el haz de neutrones que produce picos de difracción en los mismos lugares que los picos obtenidos con los rayos X?
  154. ¿Cuál es la longitud de onda de un electrón acelerado desde el reposo en una diferencia de potencial de 30,0 kV?
  155. Calcule la velocidad de un electrón de  $1,0\text{-}\mu\text{m}$  y una diferencia de potencial utilizada para acelerarlo desde el reposo hasta esta velocidad.
  156. En el supercolisionador del CERN, los protones se aceleran a velocidades de  $0,25c$ . ¿Cuáles son sus longitudes de onda a esta velocidad? ¿Cuáles son sus energías cinéticas? Si un rayo de protones ganara su energía cinética en una sola pasada a través de una diferencia de potencial, ¿qué tan alta tendría que ser esta diferencia de potencial? (La energía de la masa en reposo de un protón es de  $E_0 = 938$  MeV).
  157. Encuentre la longitud de onda de De Broglie de un electrón acelerado desde el reposo en un tubo de rayos X en la diferencia de potencial de 100 keV. (La energía de la masa en reposo de un electrón es de  $E_0 = 511$  keV.)
  158. La longitud de onda de corte para la emisión de fotoelectrones de una determinada superficie es de 500 nm. Encuentre la energía cinética máxima de los fotoelectrones expulsados cuando la superficie se ilumina con luz de longitud de onda de 450 nm.
  159. Compare el desplazamiento de la longitud de onda de un fotón dispersado por un electrón libre con el de un fotón dispersado en el mismo ángulo por un protón libre.
  160. El espectrómetro utilizado para medir las longitudes de onda de los rayos X dispersos en el experimento Compton tiene una precisión de  $5,0 \times 10^{-4}$  nm. ¿Cuál es el ángulo de dispersión mínimo en el que los rayos X que

interactúan con los electrones libres puedan distinguirse de los que interactúan con los átomos?

- 161.** Consideremos un ion hidrogenoide en el que un electrón orbita alrededor de un núcleo que tiene carga  $q = +Ze$ . Derive las fórmulas de la energía  $E_n$  del electrón en la *enésima* órbita y el radio orbital  $r_n$ .
- 162.** Supongamos que existe un átomo de hidrógeno en el estado excitado  $n = 2$  por  $10^{-8}$  s antes de decaer al estado fundamental. ¿Cuántas veces orbita el electrón el núcleo del

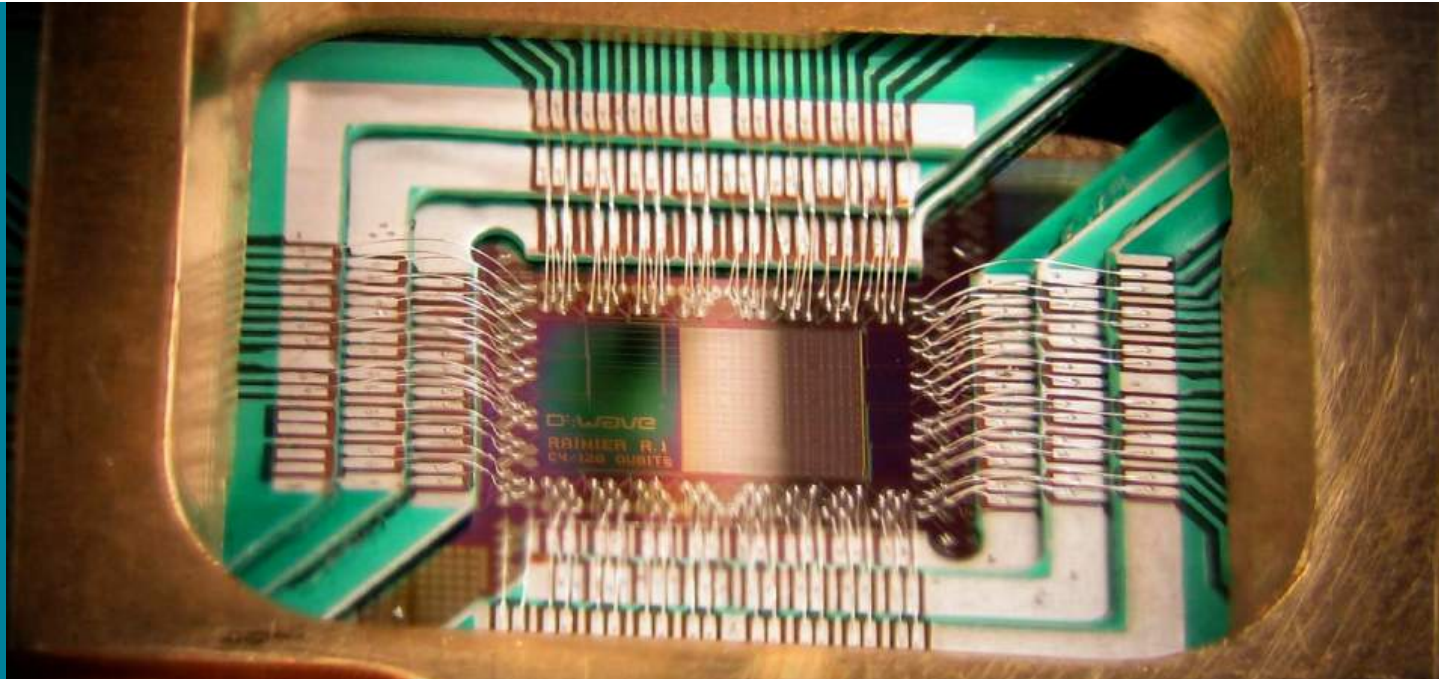
protón durante este tiempo? ¿Cuánto tiempo tarda la Tierra en orbitar tantas veces alrededor del sol?

- 163.** Se puede formar un átomo cuando un protón captura un muon negativo. El muon tiene la misma carga que el electrón y una masa 207 veces superior a la del electrón. Calcule la frecuencia del fotón emitido cuando este átomo hace la transición desde  $n = 2$  al estado  $n = 1$ . Supongamos que el muon orbita alrededor de un protón estacionario.



# CAPÍTULO 7

## Mecánica cuántica



**Figura 7.1** Un procesador de bits cuánticos de D-Wave: el cerebro de una computadora cuántica que codifica la información en bits cuánticos para realizar cálculos complejos (créditos: modificación del trabajo por D-Wave Systems, Inc.).

### ESQUEMA DEL CAPITULO

#### 7.1 Funciones de onda

#### 7.2 El principio de incertidumbre de Heisenberg

#### 7.3 La ecuación de Schrödinger

#### 7.4 La partícula cuántica en una caja

#### 7.5 El oscilador armónico cuántico

#### 7.6 El efecto túnel de las partículas a través de las barreras de potencial

**INTRODUCCIÓN** La mecánica cuántica es el marco fundamental para comprender los movimientos e interacciones de las partículas a pequeña escala, como los átomos y las moléculas. Las ideas que subyacen a la mecánica cuántica suelen parecer bastante extrañas. En muchos aspectos, nuestra experiencia cotidiana con el mundo físico macroscópico no nos prepara para el mundo microscópico de la mecánica cuántica. El objetivo de este capítulo es introducirlo en este apasionante mundo.

En la imagen de arriba, el procesador de una computadora cuántica. Este dispositivo es el "cerebro" de una computadora cuántica que funciona a temperaturas cercanas al cero absoluto. A diferencia de una computadora digital, que codifica la información en dígitos binarios (estados definidos de cero o uno), una computadora cuántica codifica la información en bits cuánticos o cúbits (estados mixtos de cero y uno). Las computadoras cuánticas se analizan en la primera sección de este capítulo.

## 7.1 Funciones de onda

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir la interpretación estadística de la función de onda.
- Utilizar la función de onda para determinar las probabilidades.
- Calcular los valores esperados de posición, momento y energía cinética.

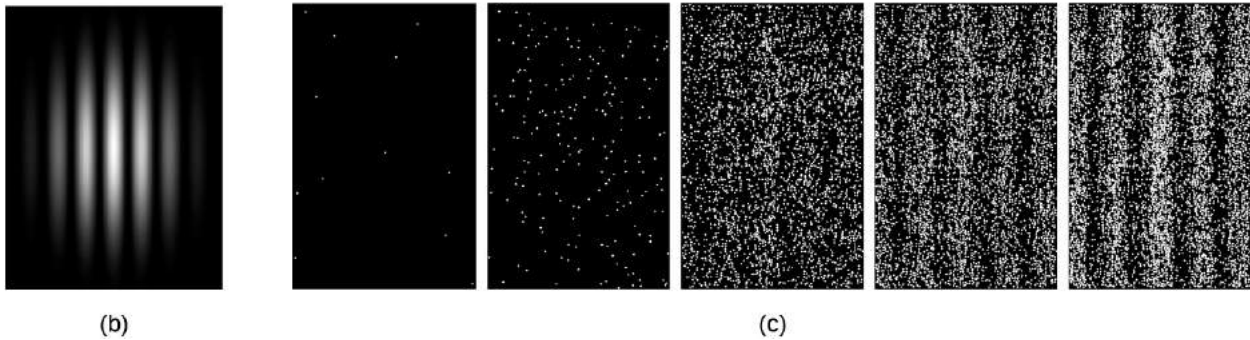
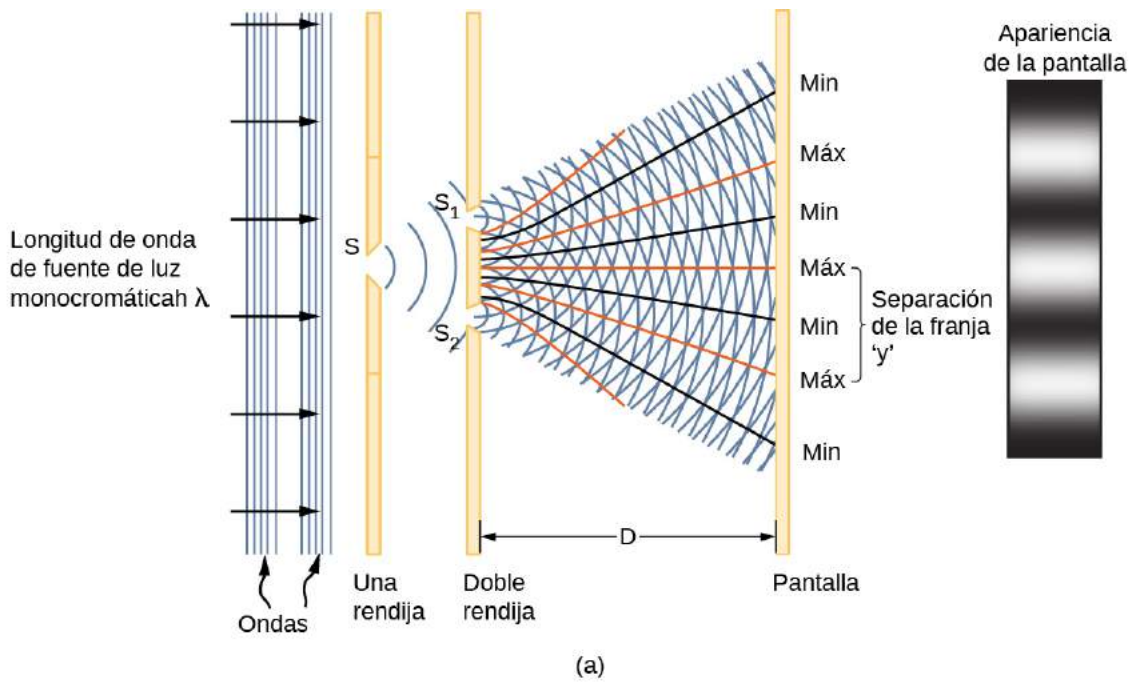
En el capítulo anterior vimos que las partículas actúan en algunos casos como partículas y en otros como ondas. Pero, ¿qué significa que una partícula "actúe como una onda"? ¿Qué es exactamente "ondular"? ¿Qué reglas rigen el cambio y la propagación de esta onda? ¿Cómo se utiliza la función de onda para hacer predicciones? Por ejemplo, si la amplitud de una onda de electrón viene dada por una función de posición y tiempo,  $\Psi(x, t)$ , definido para toda la  $x$ , ¿dónde está exactamente el electrón? El objetivo de este capítulo es responder a estas preguntas.

### Uso de la función de onda

Una pista sobre el significado físico de la función de onda  $\Psi(x, t)$  la proporciona la interferencia de dos rendijas de luz monocromática (Figura 7.2). (Vea también [Ondas electromagnéticas \(http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-2/pages/16-introduccion\)](http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-2/pages/16-introduccion) e [Interferencia](#)) La **función de onda** de una onda luminosa viene dada por  $E(x, t)$ , y su densidad de energía viene dada por  $|E|^2$ , donde  $E$  es la intensidad del campo eléctrico. La energía de un fotón individual solo depende de la frecuencia de la luz,  $\epsilon_{\text{fotón}} = hf$ , así que  $|E|^2$  es proporcional al número de fotones. Cuando las ondas de luz de  $S_1$  interfieren con las ondas de luz de  $S_2$  en la pantalla de visualización (a una distancia  $D$ ), se produce un patrón de interferencia (parte (a) de la figura). Las franjas brillantes corresponden a puntos de interferencia constructiva de las ondas luminosas, y las franjas oscuras corresponden a puntos de interferencia destructiva de las ondas luminosas (parte (b)).

Supongamos que la pantalla no está inicialmente expuesta a la luz. Si la pantalla se expone a una luz muy débil, el patrón de interferencia aparece gradualmente (Figura 7.2(c), de izquierda a derecha). Los impactos individuales de los fotones en la pantalla aparecen como puntos. Se espera que la densidad de puntos sea grande en los lugares donde el patrón de interferencia será, en última instancia, más intenso. En otras palabras, la probabilidad (por unidad de superficie) de que un solo fotón incida en un punto concreto de la pantalla es proporcional al cuadrado del campo eléctrico total,  $|E|^2$  en ese momento. En las condiciones adecuadas, se desarrolla el mismo patrón de interferencia para las partículas de materia, como los electrones.





**FIGURA 7.2** Interferencia de dos rendijas de luz monocromática. (a) Esquema de la interferencia de dos rendijas; (b) patrón de interferencia de luz; (c) patrón de interferencia construido gradualmente bajo luz de baja intensidad (de izquierda a derecha).

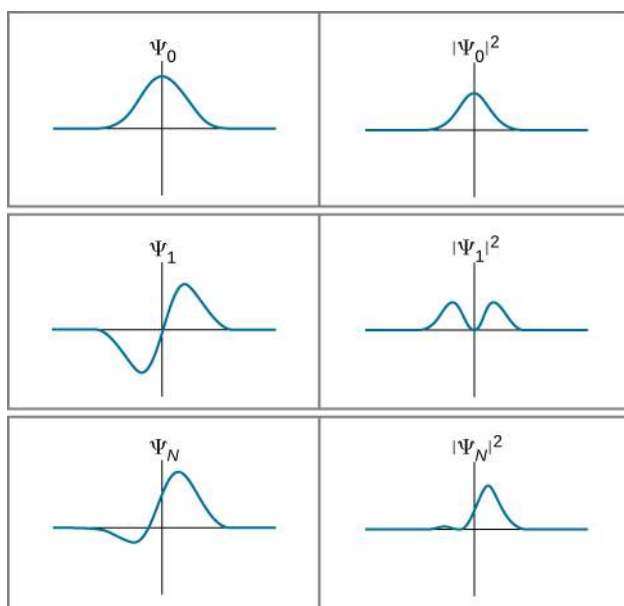
### INTERACTIVO

Visite esta [simulación interactiva \(https://openstax.org/l/21intquawavint\\_es\)](https://openstax.org/l/21intquawavint_es) para aprender más sobre la interferencia de las ondas cuánticas.

El cuadrado de la onda de materia  $|\Psi|^2$  en una dimensión tiene una interpretación similar a la del cuadrado del campo eléctrico  $|E|^2$ . Esto da la probabilidad de que una partícula se encuentre en una posición y un tiempo determinados por unidad de longitud, lo que también se denomina **densidad de probabilidad**. La probabilidad ( $P$ ) de que una partícula se encuentre en un intervalo estrecho ( $x, x + dx$ ) en el tiempo  $t$  es, por lo tanto

$$P(x, x + dx) = |\Psi(x, t)|^2 dx. \quad 7.1$$

(Más adelante, definiremos la magnitud al cuadrado para el caso general de una función con "partes imaginarias") Esta interpretación probabilística de la función de onda se denomina **interpretación de Born**. En la [Figura 7.3](#) se ofrecen ejemplos de funciones de onda y sus cuadrados para un tiempo  $t$  determinado.



**FIGURA 7.3** Varios ejemplos de funciones de onda y el correspondiente cuadrado de sus funciones de onda.

Si la función de onda varía lentamente en el intervalo  $\Delta x$ , la probabilidad de que una partícula se encuentre en el intervalo es aproximadamente

$$P(x, x + \Delta x) \approx |\Psi(x, t)|^2 \Delta x. \quad 7.2$$

Observe que al elevar al cuadrado la función de onda se garantiza que la probabilidad sea positiva. (Esto es parecido a elevar al cuadrado la intensidad del campo eléctrico, que puede ser positiva o negativa, para obtener un valor positivo de intensidad). Sin embargo, si la función de onda no varía lentamente, debemos integrar:

$$P(x, x + \Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} |\Psi(x, t)|^2 dx. \quad 7.3$$

Esta probabilidad es simplemente el área bajo la función  $|\Psi(x, t)|^2$  entre la  $x$  y  $x + \Delta x$ . La probabilidad de encontrar la partícula "en algún lugar" (la **condición de normalización**) es

$$P(-\infty, +\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1. \quad 7.4$$

Para una partícula en dos dimensiones, la integración es sobre un área y requiere una integral doble; para una partícula en tres dimensiones, la integración es sobre un volumen y requiere una integral triple. Por ahora, nos atenemos al caso unidimensional simple.

### EJEMPLO 7.1

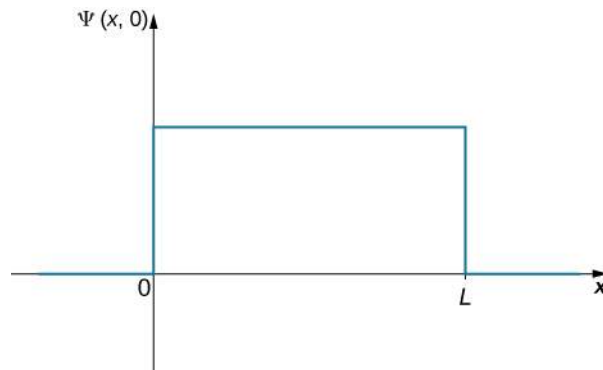
#### ¿Dónde está la pelota? (Parte I)

Se obliga a una pelota a moverse a lo largo de una línea dentro de un tubo de longitud  $L$ . La pelota tiene la

misma probabilidad de encontrarse en cualquier parte del tubo en algún momento  $t$ . ¿Cuál es la probabilidad de encontrar la pelota en la mitad izquierda del tubo en ese momento? (La respuesta es el 50 %, por supuesto, pero ¿cómo obtenemos esta respuesta utilizando la interpretación probabilística de la función cuántica de la onda mecánica?)

### Estrategia

El primer paso es escribir la función de onda. La pelota se encuentra igualmente en cualquier lugar de la caja, por lo que una forma de describir la pelota es con una función de onda *constante* (Figura 7.4). La condición de normalización se puede utilizar para encontrar el valor de la función y una simple integración sobre la mitad de la caja da la respuesta final.



**FIGURA 7.4** Función de onda para una pelota en un tubo de longitud  $L$ .

### Solución

La función de onda de la pelota puede escribirse como  $\Psi(x, t) = C(0 < x < L)$ , donde  $C$  es una constante, y  $\Psi(x, t) = 0$  por lo contrario. Podemos determinar la constante  $C$  aplicando la condición de normalización (determinamos  $t = 0$  para simplificar la notación):

$$P(x = -\infty, +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} |C|^2 dx = 1.$$

Esta integral puede dividirse en tres partes: (1) del infinito negativo al cero, (2) del cero a  $L$ , y (3) de  $L$  al infinito. La partícula está obligada a estar en el tubo, por lo que  $C = 0$  fuera del tubo y las primeras y últimas integraciones son cero. Por lo tanto, la ecuación anterior se puede escribir

$$P(x = 0, L) = \int_0^L |C|^2 dx = 1.$$

El valor  $C$  no depende de  $x$  y puede sacarse de la integral, por lo que obtenemos

$$|C|^2 \int_0^L dx = 1.$$

La integración da

$$C = \sqrt{\frac{1}{L}}.$$

Para determinar la probabilidad de encontrar la pelota en la primera mitad de la caja ( $0 < x < L$ ), tenemos

$$P(x = 0, L/2) = \int_0^{L/2} \left| \sqrt{\frac{1}{L}} \right|^2 dx = \left( \frac{1}{L} \right) \frac{L}{2} = 0,50.$$

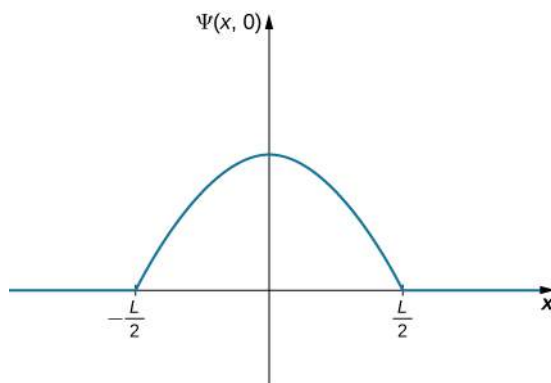
### Importancia

La probabilidad de encontrar la pelota en la primera mitad del tubo es del 50 %, como se esperaba. Cabe destacar dos observaciones. En primer lugar, este resultado corresponde al área bajo la función constante de  $x = 0$  a  $L/2$  (el área de un cuadrado a la izquierda de  $L/2$ ). En segundo lugar, este cálculo requiere una integración del *cuadrado* de la función de onda. Un error común al realizar estos cálculos es olvidar elevar al cuadrado la función de onda antes de la integración.

## EJEMPLO 7.2

### ¿Dónde está la pelota? (Parte II)

De nuevo se obliga a una bola a moverse a lo largo de una línea dentro de un tubo de longitud  $L$ . Esta vez, la bola se encuentra preferentemente en el centro del tubo. Una forma de representar su función de onda es con una función coseno simple (Figura 7.5). ¿Cuál es la probabilidad de encontrar la bola en el último cuarto del tubo?



**FIGURA 7.5** Función de onda para una pelota en un tubo de longitud  $L$ , donde la bola se encuentra preferentemente en el centro del tubo.

### Estrategia

Utilizamos la misma estrategia anterior. En este caso, la función de onda tiene dos constantes desconocidas: Una de ellas está asociada a la longitud de onda de la onda y la otra a la amplitud de la misma. Determinamos la amplitud utilizando las condiciones de frontera del problema, y evaluamos la longitud de onda utilizando la condición de normalización. La integración del cuadrado de la función de onda sobre el último cuarto del tubo da la respuesta final. El cálculo se simplifica centrando nuestro sistema de coordenadas en el pico de la función de onda.

### Solución

La función de onda de la pelota se puede escribir

$$\Psi(x, 0) = A \cos(kx) (-L/2 < x < L/2),$$

donde  $A$  es la amplitud de la función de onda y  $k = 2\pi/\lambda$  es su número de onda. Más allá de este intervalo, la amplitud de la función de onda es cero porque la pelota está confinada en el tubo. Si se requiere que la función

de onda termine en el extremo derecho del tubo se obtiene

$$\Psi\left(x = \frac{L}{2}, 0\right) = 0.$$

Evaluando la función de onda en  $x = L/2$  da

$$A \cos(kL/2) = 0.$$

Esta ecuación se satisface si el argumento del coseno es un múltiplo entero de  $\pi/2$ ,  $3\pi/2$ ,  $5\pi/2$ , y así sucesivamente. En este caso, tenemos

$$\frac{kL}{2} = \frac{\pi}{2},$$

o

$$k = \frac{\pi}{L}.$$

Aplicando la condición de normalización se obtiene  $A = \sqrt{2/L}$ , por lo que la función de onda de la pelota es

$$\Psi(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(\pi x/L), \quad -L/2 < x < L/2.$$

Para determinar la probabilidad de encontrar la pelota en el último cuarto del tubo, elevamos la función al cuadrado e integramos:

$$P(x = L/4, L/2) = \int_{L/4}^{L/2} \left| \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right|^2 dx = 0,091.$$

### Importancia

La probabilidad de encontrar la pelota en el último cuarto del tubo es del 9,1 %. La pelota tiene una longitud de onda definida ( $\lambda = 2L$ ). Si el tubo tiene una longitud macroscópica ( $L = 1$  m), el momento de la pelota es

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2L} \sim 10^{-36} \text{ m/s}.$$

Este momento es demasiado pequeño para ser medido por cualquier instrumento humano.

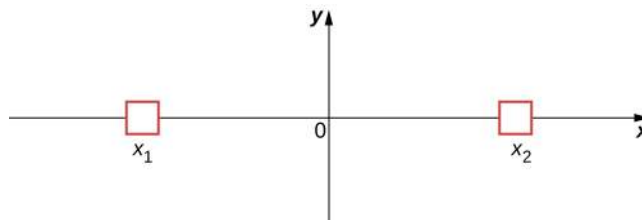
## Una interpretación de la función de onda

Ahora estamos en condiciones de empezar a responder a las preguntas planteadas al principio de esta sección. En primer lugar, para una partícula viajera descrita por  $\Psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ , ¿qué es "ondular"? Con base en la discusión anterior, la respuesta es una función matemática que puede, entre otras cosas, utilizarse para determinar dónde es probable que esté la partícula cuando se realice una medición de posición. En segundo lugar, ¿cómo se utiliza la función de onda para hacer predicciones? Si es necesario encontrar la probabilidad de que una partícula se encuentre en un determinado intervalo, se eleva al cuadrado la función de onda y se integra sobre el intervalo de interés. Pronto aprenderá que la función de onda también puede utilizarse para hacer muchos otros tipos de predicciones.

En tercer lugar, si una onda de materia viene dada por la función de onda  $\Psi(x, t)$ , ¿dónde está exactamente la partícula? Existen dos respuestas: (1) cuando el observador *no está* mirando (o la partícula no está siendo detectada de otra manera), la partícula está en todas partes ( $x = -\infty, +\infty$ ); y (2) cuando el observador *está* mirando (la partícula está siendo detectada), la partícula "salta" a un estado de posición particular ( $x, x + dx$ ) con una probabilidad dada por  $P(x, x + dx) = |\Psi(x, t)|^2 dx$ , un proceso llamado **reducción de estado** o **colapso de la función de onda**. Esta respuesta se denomina **interpretación de Copenhague** de la función de onda, o de la mecánica cuántica.

Para ilustrar esta interpretación, consideremos el caso sencillo de una partícula que puede ocupar un pequeño

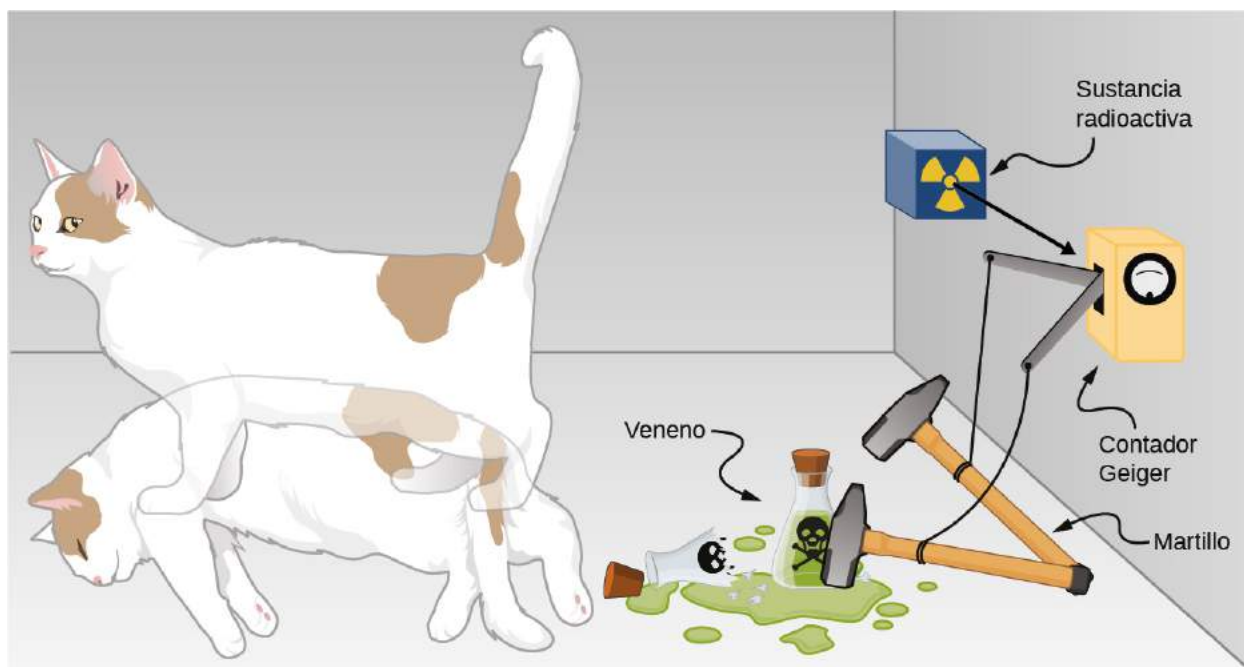
contenedor tanto en  $x_1$  o  $x_2$  (Figura 7.6). En la física clásica, suponemos que la partícula se encuentra en  $x_1$  o  $x_2$  cuando el observador no está mirando. Sin embargo, en la mecánica cuántica, la partícula puede existir en un estado de posición indefinido, es decir, puede estar situada en  $x_1$  y  $x_2$  cuando el observador no está mirando. Se abandona la suposición de que una partícula solo puede tener un valor de posición (cuando el observador no está mirando). Se pueden hacer comentarios similares sobre otras magnitudes medibles, como el momento y la energía.



**FIGURA 7.6** Un sistema de dos estados de posición de una partícula.

Las extrañas consecuencias de la interpretación de Copenhague de la mecánica cuántica se ilustran con un creativo experimento mental articulado por primera vez por Erwin Schrödinger (*National Geographic*, 2013) (Figura 7.7):

"Se coloca un gato en una caja de acero junto con un contador Geiger, un frasco de veneno, un martillo y una sustancia radiactiva. Cuando la sustancia radiactiva decae, el Geiger la detecta y activa el martillo para liberar el veneno, que posteriormente mata al gato. El decaimiento radiactivo es un proceso aleatorio [probabilístico], y no hay forma de predecir cuándo ocurrirá. Los físicos afirman que el átomo existe en un estado conocido como superposición, es decir, que decae y no decae al mismo tiempo. Hasta que no se abra la caja, un observador no sabrá si el gato está vivo o muerto, porque el destino del gato está intrínsecamente ligado a si el átomo ha decaído o no, y el gato estaría [según la interpretación de Copenhague] "vivo y muerto... a partes iguales" hasta que se observe".



**FIGURA 7.7** El gato de Schrödinger.

Schrödinger tomó las absurdas implicaciones de este experimento mental (un gato vivo y muerto simultáneamente) como argumento contra la interpretación de Copenhague. Sin embargo, esta interpretación sigue siendo el punto de vista más enseñado de la mecánica cuántica.

Los sistemas de dos estados (izquierda y derecha, átomo que decae y no decae, etc.) se utilizan a menudo para

ilustrar los principios de la mecánica cuántica. Estos sistemas tienen muchas aplicaciones en la naturaleza, como el espín de los electrones y los estados mixtos de las partículas, los átomos e incluso las moléculas. Los sistemas de dos estados también están encontrando aplicación en la computadora cuántica, como se mencionó en la introducción de este capítulo. A diferencia de una computadora digital, que codifica la información en dígitos binarios (ceros y unos), una computadora cuántica almacena y manipula los datos en forma de bits cuánticos, o cúbits. En general, un cúbit no está en un estado de cero o uno, sino en un estado mixto de cero y uno. Si se coloca un gran número de cúbits en el mismo estado cuántico, la medición de un cúbit individual produciría un cero con una probabilidad  $p$ , y un uno con una probabilidad  $q = 1 - p$ . Muchos científicos creen que las computadoras cuánticas son el futuro de la industria informática.

### Conjugados complejos

Más adelante en esta sección, verá cómo utilizar la función de onda para describir partículas que están "libres" o unidas por fuerzas a otras partículas. La forma concreta de la función de onda depende de los detalles del sistema físico. Una peculiaridad de la teoría cuántica es que estas funciones suelen ser **funciones complejas**. Una función compleja es aquella que contiene uno o más números imaginarios ( $i = \sqrt{-1}$ ). Las mediciones experimentales solo producen números reales (no imaginarios), por lo que el procedimiento anterior para utilizar la función de onda debe modificarse ligeramente. En general, la probabilidad de que una partícula se encuentre en el intervalo estrecho  $(x, x + dx)$  en el tiempo  $t$  viene dada por

$$P(x, x + dx) = |\Psi(x, t)|^2 dx = \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) dx, \quad 7.5$$

donde  $\Psi^*(x, t)$  es el conjugado complejo de la función de onda. El conjugado complejo de una función se obtiene sustituyendo cada ocurrencia de  $i = \sqrt{-1}$  en esa función con  $-i$ . Este procedimiento elimina los números complejos en todas las predicciones porque el producto  $\Psi^*(x, t) \Psi(x, t)$  es siempre un número real.

#### ✓ **COMPRUEBE LO APRENDIDO 7.1**

Si  $a = 3 + 4i$ , ¿cuál es el producto  $a^* a$ ?

Consideremos el movimiento de una partícula libre que se mueve a lo largo de la dirección de la  $x$ . Como su nombre indica, una partícula libre no experimenta ninguna fuerza y, por tanto, se mueve con una velocidad constante. Como veremos en una sección posterior de este capítulo, un tratamiento mecánico cuántico formal de una partícula libre indica que su función de onda tiene partes reales y complejas. En particular, la función de onda viene dada por

$$\Psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + iA \sin(kx - \omega t),$$

donde  $A$  es la amplitud,  $k$  es el número de onda y  $\omega$  es la frecuencia angular. Usando la fórmula de Euler,  $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$ , esta ecuación se puede escribir de la forma

$$\Psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} = A e^{i\phi},$$

donde  $\phi$  es el ángulo de fase. Si la función de onda varía lentamente en el intervalo  $\Delta x$ , la probabilidad de encontrar la partícula en ese intervalo es

$$P(x, x + \Delta x) \approx \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) \Delta x = (A e^{i\phi}) (A^* e^{-i\phi}) \Delta x = (A^* A) \Delta x.$$

Si  $A$  tiene partes reales y complejas ( $a + ib$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes reales), entonces

$$A^* A = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

Observe que los números complejos han desaparecido. Así,

$$P(x, x + \Delta x) \approx |A|^2 \Delta x$$

es una cantidad real. La interpretación de  $\Psi^*(x, t) \Psi(x, t)$  como densidad de probabilidad garantiza que las predicciones de la mecánica cuántica puedan comprobarse en el "mundo real".



## ✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 7.2

Supongamos que una partícula con energía  $E$  se mueve a lo largo del eje de la  $xy$  está confinada en la región entre 0 y  $L$ . Una posible función de onda es

$$\psi(x, t) = \begin{cases} Ae^{-iEt/\hbar} \text{ sen } \frac{\pi x}{L}, & \text{cuando } 0 \leq x \leq L \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Determine la constante de normalización.

### Valores esperados

En la mecánica clásica, la solución de una ecuación de movimiento es una función de una cantidad medible, como  $x(t)$ , donde  $x$  es la posición y  $t$  es el tiempo. Observe que la partícula tiene un solo valor de posición para cualquier tiempo  $t$ . Sin embargo, en la mecánica cuántica, la solución de una ecuación de movimiento es una función de onda,  $\Psi(x, t)$ . La partícula tiene muchos valores de posición para cualquier tiempo  $t$ , y solo la densidad de probabilidad de encontrar la partícula,  $|\Psi(x, t)|^2$ , puede conocerse. Se espera que el valor promedio de la posición para un gran número de partículas con la misma función de onda sea

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) dx. \quad 7.6$$

Esto se denomina **valor esperado** de la posición. Normalmente se escribe

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) x \Psi(x, t) dx, \quad 7.7$$

donde la  $x$  está intercalada entre las funciones de onda. La razón de esto se hará evidente pronto. Formalmente, la  $x$  se llama el **operador de posición**.

En este punto, es importante destacar que una función de onda puede escribirse también en términos de otras cantidades, como la velocidad ( $v$ ), el momento ( $p$ ) y la energía cinética ( $K$ ). El valor esperado del momento, por ejemplo, puede escribirse

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(p, t) p \Psi(p, t) dp, \quad 7.8$$

Donde  $dp$  se utiliza en lugar de  $dx$  para indicar un intervalo infinitesimal en el momento. En algunos casos, conocemos la función de onda en posición,  $\Psi(x, t)$ , pero buscamos la expectativa del momento. El procedimiento para hacerlo es

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \left( -i\hbar \frac{d}{dx} \right) \Psi(x, t) dx, \quad 7.9$$

donde la cantidad entre paréntesis, intercalada entre las funciones de onda, se denomina **operador de momento** en la *dirección de la x*. [Se dice que el operador de momento en la [Ecuación 7.9](#) es la representación de la posición en el espacio del operador de momento] El operador de momento debe actuar (operar) sobre la función de onda de la derecha, y luego el resultado debe multiplicarse por el conjugado complejo de la función de onda de la izquierda, antes de la integración. El operador de momento en la dirección de la  $x$  se denota a veces como

$$(p_x)_{\text{op}} = -i\hbar \frac{d}{dx}, \quad 7.10$$

Los operadores de momento para las direcciones de la  $y$  y la  $z$  se definen de forma similar. Este operador y muchos otros se derivan en un curso más avanzado de física moderna. En algunos casos, esta derivación es relativamente sencilla. Por ejemplo, el operador de energía cinética es simplemente

$$(K)_{\text{op}} = \frac{1}{2}m(v_x)_{\text{op}}^2 = \frac{(p_x)_{\text{op}}^2}{2m} = \frac{\left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right)^2}{2m} = \frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{d}{dx}\right) \left(\frac{d}{dx}\right). \quad 7.11$$

Así, si buscamos el valor esperado de la energía cinética de una partícula en una dimensión, se requieren dos derivadas ordinarias sucesivas de la función de onda antes de la integración.

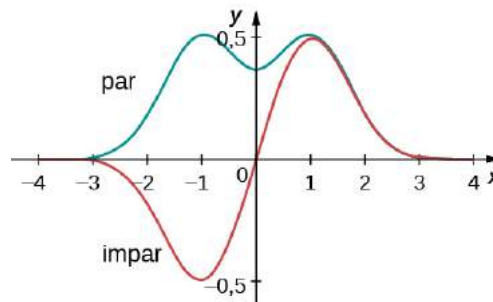
Los cálculos del valor esperado suelen simplificarse aprovechando la simetría de las funciones de onda. Las funciones de onda simétricas pueden ser pares o impares. Una **función par** es una función que satisface

$$\psi(x) = \psi(-x). \quad 7.12$$

En cambio, una **función impar** es la que satisface

$$\psi(x) = -\psi(-x). \quad 7.13$$

Un ejemplo de funciones pares e impares se muestra en la [Figura 7.8](#). Una función par es simétrica con respecto al eje de la  $y$ . Esta función se produce al reflejar  $\psi(x)$  para  $x > 0$  sobre el eje vertical de la  $y$ . Por comparación, una función impar se genera reflejando la función sobre el eje de la  $y$  y luego sobre el eje de la  $x$ . (Una función impar también se denomina **función antisimétrica**).



**FIGURA 7.8** Ejemplos de funciones de onda pares e impares.

En general, una función par por una función par produce una función par. Un ejemplo sencillo de función par es el producto  $x^2 e^{-x^2}$  (el par por par da par). Del mismo modo, una función impar por una función impar produce una función par, como  $x \sin x$  (impar por impar es par). Sin embargo, una función impar por una función par produce una función impar, como  $x e^{-x^2}$  (impar por par da impar). La integral de todo el espacio de una función impar es cero, porque el área total de la función por encima del eje de la  $x$  anula el área (negativa) por debajo. Como muestra el siguiente ejemplo, esta propiedad de las funciones impares es muy útil.

### EJEMPLO 7.3

#### Valor esperado (Parte I)

La función de onda normalizada de una partícula es

$$\psi(x) = e^{-|x|/x_0} / \sqrt{x_0}.$$

Encuentre el valor esperado de la posición.

### Estrategia

Sustituya la función de onda en la [Ecuación 7.7](#) y evalúe. El operador de posición solo introduce un factor multiplicativo, por lo que no es necesario "intercalar" el operador de posición.

### Solución

Primero multiplique, luego integre:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x |\psi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x \left| \frac{e^{-|x|/x_0}}{\sqrt{x_0}} \right|^2 = \frac{1}{x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x e^{-2|x|/x_0} = 0.$$

### Importancia

La función en el integrando ( $x e^{-2|x|/x_0}$ ) es impar ya que es el producto de una función impar ( $x$ ) y una función par ( $e^{-2|x|/x_0}$ ). La integral desaparece porque el área total de la función alrededor del eje de la  $x$  anula el área (negativa) por debajo de él. El resultado ( $\langle x \rangle = 0$ ) no es sorprendente ya que la función de densidad de probabilidad es simétrica respecto a  $x = 0$ .

## EJEMPLO 7.4

### Valor esperado (Parte II)

La función de onda dependiente del tiempo de una partícula confinada en una región entre 0 y  $L$  es

$$\psi(x, t) = A e^{-i\omega t} \text{sen}(\pi x/L)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular y  $E$  es la energía de la partícula. (Nota: La función varía como un seno debido a los límites (0 a  $L$ ). Cuando  $x = 0$ , el factor sinusoidal es cero y la función de onda es cero, en consonancia con las condiciones de frontera). Calcule los valores esperados de posición, momento y energía cinética.

### Estrategia

Primero debemos normalizar la función de onda para encontrar  $A$ . Luego usamos los operadores para calcular los valores esperados.

### Solución

Cálculo de la constante de normalización:

$$1 = \int_0^L dx \psi^*(x) \psi(x) = \int_0^L dx \left( A e^{+i\omega t} \text{sen} \frac{\pi x}{L} \right) \left( A e^{-i\omega t} \text{sen} \frac{\pi x}{L} \right) = A^2 \int_0^L dx \text{sen}^2 \frac{\pi x}{L} = A^2 \frac{L}{2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}}.$$

El valor esperado de la posición es

$$\langle x \rangle = \int_0^L dx \psi^*(x) x \psi(x) = \int_0^L dx \left( A e^{+i\omega t} \text{sen} \frac{\pi x}{L} \right) x \left( A e^{-i\omega t} \text{sen} \frac{\pi x}{L} \right) = A^2 \int_0^L dx x \text{sen}^2 \frac{\pi x}{L} = A^2 \frac{L^2}{4} = \frac{L}{2}.$$

El valor esperado del momento en la dirección de la  $x$  también requiere una integral. Para establecer esta integral, el operador asociado debe, por regla general, actuar a la derecha sobre la función de onda  $\psi(x)$ :

$$-i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x) = -i\hbar \frac{d}{dx} A e^{-i\omega t} \text{sen} \frac{\pi x}{L} = -i \frac{\hbar A}{2L} e^{-i\omega t} \cos \frac{\pi x}{L}.$$

Por lo tanto, el valor esperado del momento es

$$\langle p \rangle = \int_0^L dx \left( A e^{+i\omega t} \sin \frac{\pi x}{L} \right) \left( -i \frac{A\hbar}{2L} e^{-i\omega t} \cos \frac{\pi x}{L} \right) = -i \frac{A^2 \hbar}{4L} \int_0^L dx \sin \frac{2\pi x}{L} = 0.$$

La función en la integral es una función senoidal con una longitud de onda igual a la anchura del pozo,  $L$ , una función impar de  $x = L/2$ . Como resultado, la integral desaparece.

El valor esperado de la energía cinética en la dirección  $x$  requiere que el operador asociado actúe sobre la función de onda:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} A e^{-i\omega t} \sin \frac{\pi x}{L} = -\frac{\hbar^2}{2m} A e^{-i\omega t} \frac{d^2}{dx^2} \sin \frac{\pi x}{L} = \frac{A\hbar^2}{8mL^2} e^{-i\omega t} \sin \frac{\pi x}{L}.$$

Por lo tanto, el valor esperado de la energía cinética es

$$\begin{aligned} \langle K \rangle &= \int_0^L dx \left( A e^{+i\omega t} \sin \frac{\pi x}{L} \right) \left( \frac{A\hbar^2}{8mL^2} e^{-i\omega t} \sin \frac{\pi x}{L} \right) \\ &= \frac{A^2 \hbar^2}{8mL^2} \int_0^L dx \sin^2 \frac{\pi x}{L} = \frac{A^2 \hbar^2}{8mL^2} \frac{L}{2} = \frac{\hbar^2}{8mL^2}. \end{aligned}$$

### Importancia

La posición media de un gran número de partículas en este estado es  $L/2$ . El momento medio de estas partículas es cero porque una partícula dada tiene la misma probabilidad de moverse a la derecha o a la izquierda. Sin embargo, la partícula no está en reposo porque su energía cinética media no es cero. Finalmente, la densidad de probabilidad es

$$|\psi|^2 = (2/L) \sin^2(\pi x/L).$$

Esta densidad de probabilidad es mayor en la ubicación  $L/2$  y es cero en  $x = 0$  y en  $x = L$ . Observe que estas conclusiones no dependen explícitamente del tiempo.

### ☑ COMPRUEBE LO APRENDIDO 7.3

Para la partícula del ejemplo anterior, encuentre la probabilidad de situarla entre las posiciones 0 y  $L/4$

La mecánica cuántica hace muchas predicciones sorprendentes. Sin embargo, en 1920, Niels Bohr (fundador del Instituto Niels Bohr de Copenhague, de donde procede el término "interpretación de Copenhague") afirmó que las predicciones de la mecánica cuántica y la mecánica clásica deben coincidir para todos los sistemas macroscópicos, como los planetas en órbita, las pelotas que rebotan, las mecedoras y los resortes. Este **principio de correspondencia** es ahora generalmente aceptado. Sugiere que las reglas de la mecánica clásica son una aproximación de las reglas de la mecánica cuántica para sistemas con energías muy grandes. La mecánica cuántica describe tanto el mundo microscópico como el macroscópico, pero la mecánica clásica solo describe este último.

## 7.2 El principio de incertidumbre de Heisenberg

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir el significado físico de la relación de incertidumbre posición-momento
- Explicar los orígenes del principio de incertidumbre en la teoría cuántica
- Describir el significado físico de la relación de incertidumbre energía-tiempo

**El principio de incertidumbre de Heisenberg** es un principio clave de la mecánica cuántica. A grandes rasgos, afirma que si lo sabemos *todo* sobre dónde se encuentra una partícula (la incertidumbre de posición es pequeña), no sabemos *nada* sobre su momento (la incertidumbre de momento es grande), y viceversa. También existen versiones del principio de incertidumbre para otras magnitudes, como la energía y el tiempo. Hablamos sobre los principios de incertidumbre de momento-posición y energía-tiempo por separado.

### Momento y posición

Para ilustrar el principio de incertidumbre momento-posición, consideremos una partícula libre que se mueve a lo largo de la dirección de la  $x$ . La partícula se mueve con una velocidad constante  $u$  y un momento  $p = mu$ . Según las relaciones de De Broglie,  $p = \hbar k$  y  $E = \hbar \omega$ . Como se comentó en el apartado anterior, la función de onda de esta partícula está dada por

$$\psi_k(x, t) = A[\cos(\omega t - k x) - i \operatorname{sen}(\omega t - k x)] = Ae^{-i(\omega t - k x)} = Ae^{-i \omega t} e^{i k x} \quad 7.14$$

y la densidad de probabilidad  $|\psi_k(x, t)|^2 = A^2$  es *uniforme* e independiente del tiempo. La partícula tiene la misma probabilidad de encontrarse en cualquier parte del eje de la  $x$ , pero tiene valores definidos de longitud de onda y número de onda, y por tanto de momento. La incertidumbre de la posición es infinita (nuestra incertidumbre sobre la posición es total) y la incertidumbre del momento es cero (estamos completamente seguros del momento). Esta explicación de una partícula libre es coherente con el principio de incertidumbre de Heisenberg.

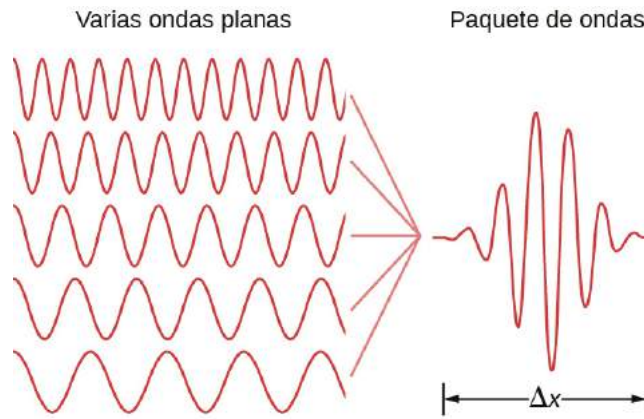
Se pueden hacer afirmaciones similares sobre las partículas localizadas. En la teoría cuántica, una partícula localizada se modela mediante una superposición lineal de estados de partículas libres (u ondas planas) denominada **paquete de ondas**. Un ejemplo de paquete de ondas se muestra en la [Figura 7.9](#). Un paquete de ondas contiene muchas longitudes de onda y, por tanto, muchos momentos según las relaciones de De Broglie, ¡posibles en la mecánica cuántica! Esta partícula también tiene muchos valores de posición, aunque la partícula está confinada principalmente en el intervalo  $\Delta x$ . La partícula puede ser mejor localizada ( $\Delta x$  puede disminuir) si se suman de forma correcta más estados de ondas planas de diferentes longitudes de onda o momentos ( $\Delta p$  se incrementa). Según Heisenberg, estas incertidumbres obedecen a la siguiente relación.

### El principio de incertidumbre de Heisenberg

El producto de la incertidumbre en la posición de una partícula y la incertidumbre en su momento nunca puede ser inferior a la mitad de la constante de Planck reducida:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2. \quad 7.15$$

Esta relación expresa el principio de incertidumbre de Heisenberg. Esto le pone límites a lo que podemos saber sobre una partícula a partir de mediciones simultáneas de posición y momento. Si  $\Delta x$  es grande,  $\Delta p$  es pequeña, y viceversa. La [Ecuación 7.15](#) puede derivarse en un curso más avanzado de física moderna. Reflexionando sobre esta relación en su obra *Los principios físicos de la teoría cuántica*, Heisenberg escribió "Cualquier uso de las palabras 'posición' y 'velocidad' con una exactitud que exceda la dada por [la relación] carece tanto de sentido como el uso de palabras cuyo sentido no está definido".



**FIGURA 7.9** La suma de varias ondas planas de diferente longitud de onda puede producir una onda relativamente localizada.

Observe que el principio de incertidumbre no tiene nada que ver con la precisión de un aparato experimental. Incluso en el caso de dispositivos de medición perfectos, estas incertidumbres seguirían existiendo porque se originan en la naturaleza ondulatoria de la materia. El valor exacto del producto  $\Delta x \Delta p$  depende de la forma específica de la función de onda. Curiosamente, la función gaussiana (o distribución de campana) da el valor mínimo del producto de incertidumbre:  $\Delta x \Delta p = \hbar/2$ .

### EJEMPLO 7.5

#### El principio de incertidumbre grande y pequeña

Determine las incertidumbres mínimas en las posiciones de los siguientes objetos si se conocen sus velocidades con una precisión de  $1,0 \times 10^{-3}$  m/s: (a) un electrón y (b) una bola de boliche de una masa de 6,0 kg.

#### Estrategia

Dada la incertidumbre de la velocidad  $\Delta u = 1,0 \times 10^{-3}$  m/s, tenemos que determinar en primer lugar la incertidumbre en el momento  $\Delta p = m \Delta u$  y luego invertir la [Ecuación 7.15](#) para encontrar la incertidumbre en la posición  $\Delta x = \hbar / (2\Delta p)$ .

#### Solución

a. Para el electrón:

$$\Delta p = m\Delta u = (9,1 \times 10^{-31} \text{ kg})(1,0 \times 10^{-3} \text{ m/s}) = 9,1 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m/s} ,$$

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2 \Delta p} = 5,8 \text{ cm}.$$

b. Para la bola de boliche:

$$\Delta p = m\Delta u = (6,0 \text{ kg})(1,0 \times 10^{-3} \text{ m/s}) = 6,0 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m/s} ,$$

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2 \Delta p} = 8,8 \times 10^{-33} \text{ m}.$$

#### Importancia

A diferencia de la incertidumbre de posición del electrón, la incertidumbre de posición de la bola de boliche es inconmensurablemente pequeña. La constante de Planck es muy pequeña, por lo que las limitaciones impuestas por el principio de incertidumbre no son perceptibles en sistemas macroscópicos como una bola de boliche.

## EJEMPLO 7.6

### La incertidumbre y el átomo de hidrógeno

Estime la energía del estado básico de un átomo de hidrógeno utilizando el principio de incertidumbre de Heisenberg. (*Sugerencia:* Según los primeros experimentos, el tamaño de un átomo de hidrógeno es de aproximadamente 0,1 nm).

#### Estrategia

Un electrón unido a un átomo de hidrógeno puede ser modelado por una partícula unida a una caja unidimensional de longitud  $L = 0,1$  nm. La función de onda del estado básico de este sistema es una media onda, como la dada en el [Ejemplo 7.1](#). Esta es la mayor longitud de onda que puede "caber" en la caja, por lo que la función de onda corresponde al estado de menor energía. Observe que esta función tiene una forma muy similar a la de una función gaussiana (curva de campana). Podemos tomar la energía media de una partícula descrita por esta función ( $E$ ) como un buen estimado de la energía del estado fundamental ( $E_0$ ). Esta energía media de una partícula se relaciona con su media del momento al cuadrado, que está relacionada con su incertidumbre de momento.

#### Solución

Para resolver este problema, debemos concretar qué se entiende por "incertidumbre de posición" e "incertidumbre de momento". Identificamos la incertidumbre de la posición ( $\Delta x$ ) con la desviación estándar de la posición ( $\sigma_x$ ), y la incertidumbre del momento ( $\Delta p$ ) con la desviación estándar del momento ( $\sigma_p$ ). Para la función gaussiana, el producto de incertidumbre es

$$\sigma_x \sigma_p = \frac{\hbar}{2},$$

donde

$$\sigma_x^2 = x^2 - \bar{x}^2 \quad \text{y} \quad \sigma_p^2 = p^2 - \bar{p}^2.$$

La partícula tiene la misma probabilidad de moverse a la izquierda que a la derecha, por lo que  $\bar{p} = 0$ . Además, la incertidumbre de la posición es comparable al tamaño de la caja, por lo que  $\sigma_x = L$ . La energía estimada del estado fundamental es, por lo tanto

$$E_0 = E_{\text{Gaussiana}} = \frac{\bar{p}^2}{m} = \frac{\sigma_p^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{2\sigma_x} \right)^2 = \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{2L} \right)^2 = \frac{\hbar^2}{8mL^2}.$$

Multiplicando el numerador y el denominador por  $c^2$  da

$$E_0 = \frac{(\hbar c)^2}{8(mc^2)L^2} = \frac{(197,3 \text{ eV} \cdot \text{nm})^2}{8(0,511 \cdot 10^6 \text{ eV})(0,1 \text{ nm})^2} = 0,952 \text{ eV} \approx 1 \text{ eV}.$$

#### Importancia

Según las primeras estimaciones del tamaño de un átomo de hidrógeno y el principio de incertidumbre, la energía del estado básico de un átomo de hidrógeno está en el rango de los eV. La energía de ionización de un electrón en el estado básico de energía es de aproximadamente 10 eV, por lo que esta predicción se confirma a grandes rasgos. (*Nota:* el producto  $\hbar c$  suele ser un valor útil para realizar cálculos en mecánica cuántica).

### Energía y tiempo

Otro tipo de principio de incertidumbre se refiere a las incertidumbres en las mediciones simultáneas de la energía de un estado cuántico y su tiempo de vida,



$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}, \quad 7.16$$

donde  $\Delta E$  es la incertidumbre en la medición de la energía y  $\Delta t$  es la incertidumbre en la medición del tiempo de vida. El **principio de incertidumbre energía-tiempo** no resulta de una relación del tipo expresado por la [Ecuación 7.15](#) por razones técnicas que escapan a esta discusión. Sin embargo, el significado general del principio de energía-tiempo es que un estado cuántico que solo existe durante un corto periodo de tiempo no puede tener una energía definida. La razón es que la frecuencia de un estado es inversamente proporcional al tiempo y que la frecuencia se conecta con la energía del estado, por lo que para medir la energía con precisión, el estado debe observarse por muchos ciclos.

Para ilustrarlo, consideremos los estados excitados de un átomo. Los tiempos de vida finitos de estos estados pueden deducirse de las formas de las líneas espectrales observadas en los espectros de emisión atómica. Cada vez que un estado excitado decae, la energía emitida es ligeramente diferente y, por tanto, la línea de emisión se caracteriza por una *distribución* de frecuencias espectrales (o longitudes de onda) de los fotones emitidos. En consecuencia, todas las líneas espectrales se caracterizan por su anchura espectral. La energía media del fotón emitido corresponde a la energía teórica del estado excitado y da la localización espectral del pico de la línea de emisión. Los estados de vida corta tienen anchos espectrales amplios y los estados de vida larga tienen anchos espectrales estrechos.

### EJEMPLO 7.7

#### Transiciones atómicas

Un átomo normalmente se encuentra en estado excitado durante aproximadamente  $\Delta t = 10^{-8}$  s. Estime la incertidumbre  $\Delta f$  en la frecuencia de los fotones emitidos cuando un átomo hace la transición de un estado excitado con la emisión simultánea de un fotón con una frecuencia media de  $f = 7,1 \times 10^{14}$  Hz. ¿La radiación emitida es monocromática?

#### Estrategia

Invertimos la [Ecuación 7.16](#) para obtener la incertidumbre de la energía  $\Delta E \approx \hbar/2\Delta t$  y combinarla con la energía del fotón  $E = hf$  para obtener  $\Delta f$ . Para estimar si la emisión es monocromática o no, evaluamos  $\Delta f/f$ .

#### Solución

La dispersión de las energías de los fotones es  $\Delta E = h\Delta f$ . Por lo tanto,

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{2\Delta t} \Rightarrow h\Delta f \approx \frac{\hbar}{2\Delta t} \Rightarrow \Delta f \approx \frac{1}{4\pi\Delta t} = \frac{1}{4\pi(10^{-8}\text{s})} = 8,0 \times 10^6 \text{ Hz},$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{8,0 \times 10^6 \text{ Hz}}{7,1 \times 10^{14} \text{ Hz}} = 1,1 \times 10^{-8}.$$

#### Importancia

Como las frecuencias de los fotones emitidos están dentro del  $1,1 \times 10^{-6}$  por ciento de la frecuencia media, la radiación emitida puede considerarse monocromática.

### COMPRUEBE LO APRENDIDO 7.4

Un átomo de sodio hace una transición desde el primer estado excitado al estado fundamental, emitiendo un fotón de 589,0 nm con una energía de 2,105 eV. Si el tiempo de vida de este estado excitado es de  $1,6 \times 10^{-8}$  s, ¿cuál es la incertidumbre en la energía de este estado excitado? ¿Cuál es la anchura de la línea espectral correspondiente?

## 7.3 La ecuación de Schrödinger

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir el papel que juega la ecuación de Schrödinger en la mecánica cuántica
- Explicar la diferencia entre las ecuaciones de Schrödinger dependientes e independientes del tiempo
- Interpretar las soluciones de la ecuación de Schrödinger

En las dos secciones anteriores, describimos cómo utilizar una función de onda mecánica cuántica y hemos discutido el principio de incertidumbre de Heisenberg. En esta sección, presentamos una teoría completa y formal de la mecánica cuántica que puede utilizarse para hacer predicciones. Para desarrollar esta teoría, es útil revisar la teoría ondulatoria de la luz. Para una onda luminosa, el campo eléctrico  $E(x,t)$  obedece a la relación

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \quad 7.17$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz y el símbolo  $\partial$  representa una *derivada parcial*. (Recordemos de [Oscilaciones \(http://openstax.org/books/física-universitaria-volumen-1/pages/15-introduccion\)](http://openstax.org/books/física-universitaria-volumen-1/pages/15-introduccion) que una derivada parcial está estrechamente relacionada con una derivada ordinaria, pero implica funciones de más de una variable. Cuando se toma la derivada parcial de una función por una determinada variable, todas las demás variables se mantienen constantes) Una onda luminosa está formada por un número muy grande de fotones, por lo que la cantidad  $|E(x,t)|^2$  puede interpretarse como una densidad de probabilidad de encontrar un solo fotón en un punto concreto del espacio (por ejemplo, en una pantalla de visualización).

Hay muchas soluciones para esta ecuación. Una solución de especial importancia es

$$E(x,t) = A \sin(kx - \omega t), \quad 7.18$$

donde  $A$  es la amplitud del campo eléctrico,  $k$  es el número de onda y  $\omega$  es la frecuencia angular. Combinando esta ecuación con la [Ecuación 7.17](#) se obtiene

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad 7.19$$

Según las ecuaciones de De Broglie, tenemos  $p = \hbar k$  y  $E = \hbar \omega$ . Sustituyendo estas ecuaciones en la [Ecuación 7.19](#) se obtiene

$$p = \frac{E}{c}, \quad 7.20$$

o

$$E = pc. \quad 7.21$$

Por lo tanto, según la ecuación general de energía-momento de Einstein ([Ecuación 5.11](#)), la [Ecuación 7.17](#) describe una partícula con una masa en reposo igual a cero. Esto es consistente con nuestro conocimiento de un fotón.

Este proceso puede invertirse. Podemos empezar con la ecuación energía-momento de una partícula y luego preguntar qué ecuación de onda le corresponde. La ecuación energía-momento de una partícula no relativista en una dimensión es

$$E = \frac{p^2}{2m} + U(x,t), \quad 7.22$$

donde  $p$  es el momento,  $m$  es la masa y  $U$  es la energía potencial de la partícula. La ecuación de onda que la acompaña resulta ser una ecuación clave en la mecánica cuántica, llamada **ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo**.

### La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

La ecuación que describe la energía y el momento de una función de onda se conoce como ecuación de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x, t) \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}. \quad 7.23$$

Como se describe en [Energía potencial y conservación de la energía \(http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-1/pages/8-introduccion\)](http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-1/pages/8-introduccion), la fuerza sobre la partícula descrita por esta ecuación viene dada por

$$F = -\frac{\partial U(x, t)}{\partial x}. \quad 7.24$$

Esta ecuación desempeña un papel en la mecánica cuántica similar al de la segunda ley de Newton en la mecánica clásica. Una vez que se especifica la energía potencial de una partícula o lo que es lo mismo, una vez que se precisa la fuerza sobre la partícula, podemos resolver esta ecuación diferencial para la función de onda. La solución de la ecuación de la segunda ley de Newton (también una ecuación diferencial) en una dimensión es una función  $x(t)$  que especifica dónde se encuentra un objeto en cualquier tiempo  $t$ . La solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo proporciona una herramienta (la función de onda) que puede utilizarse para determinar dónde es *probable* que esté la partícula. Esta ecuación también puede escribirse en dos o tres dimensiones. La resolución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo suele requerir la ayuda de un ordenador.

Consideremos el caso especial de una partícula libre. Una partícula libre no experimenta ninguna fuerza ( $F = 0$ ). Con base en la [Ecuación 7.24](#), esto solo requiere que

$$U(x, t) = U_0 = \text{constante}. \quad 7.25$$

Para simplificar, establecemos  $U_0 = 0$ . La ecuación de Schrödinger se reduce entonces a

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}. \quad 7.26$$

Una solución válida para esta ecuación es

$$\Psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}. \quad 7.27$$

No es sorprendente que esta solución contenga un número imaginario ( $i = \sqrt{-1}$ ) porque la propia ecuación diferencial contiene un número imaginario. Sin embargo, como se enfatizó anteriormente, las predicciones de la mecánica cuántica solo dependen de  $|\Psi(x, t)|^2$ , que produce valores completamente reales. Observe que las soluciones reales de onda plana,  $\Psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$  y  $\Psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ , no obedecen a la ecuación de Schrödinger. La tentación de pensar que una función de onda puede verse, tocarse y sentirse en la naturaleza se elimina con la aparición de un número imaginario. En la teoría de la mecánica cuántica de Schrödinger, la función de onda no es más que una herramienta para calcular cosas.

Si la función de energía potencial ( $U$ ) no depende del tiempo, es posible demostrar que

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-i\omega t} \quad 7.28$$

satisface la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, donde  $\psi(x)$  es una función independiente del tiempo y  $e^{-i\omega t}$  es una función independiente del espacio. En otras palabras, la función de onda es *separable* en dos partes: una parte espacial y otra temporal. El factor  $e^{-i\omega t}$  se denomina a veces **factor de modulación del tiempo**, ya que modifica la función espacial. Según De Broglie, la energía de una onda de materia viene dada por  $E = \hbar\omega$ , donde  $E$  es su energía total. Así, la ecuación anterior también puede escribirse como

$$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}. \quad 7.29$$

Cualquier combinación lineal de dichos estados (estado mixto de energía o momento) es también una solución válida para esta ecuación. Estos estados pueden, por ejemplo, describir una partícula localizada (vea la [Figura 7.9](#))

### ✓ **COMPRUEBE LO APRENDIDO 7.5**

Una partícula con masa  $m$  se mueve a lo largo del eje de la  $x$  en un potencial dado por la función de energía potencial  $U(x) = 0,5m\omega^2x^2$ . Calcule el producto  $\Psi(x, t)^*U(x)\Psi(x, t)$ . Expresé su respuesta en términos de la función de onda independiente del tiempo,  $\psi(x)$ .

Al combinar la [Ecuación 7.23](#) y la [Ecuación 7.28](#), la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo se reduce a

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad 7.30$$

donde  $E$  es la energía total de la partícula (un número real). Esta ecuación se llama **ecuación de Schrödinger independiente del tiempo**. Observe que usamos "psi grande" ( $\Psi$ ) para la función de onda dependiente del tiempo y la "psi pequeña" ( $\psi$ ) para la función de onda independiente del tiempo. La solución de la función de onda de esta ecuación debe multiplicarse por el factor de modulación del tiempo para obtener la función de onda dependiente del tiempo.

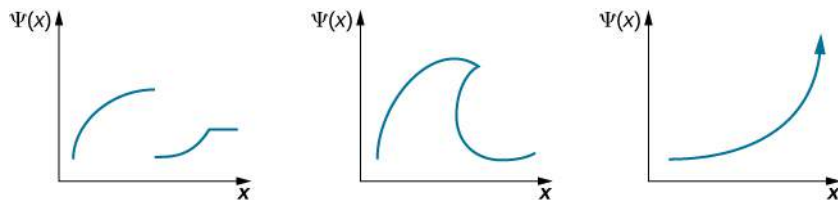
En las siguientes secciones, resolvemos la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en tres casos: una partícula cuántica en una caja, un oscilador armónico simple y una barrera cuántica. Estos casos proporcionan importantes lecciones que pueden utilizarse para resolver sistemas más complicados. Las soluciones de la función de onda independiente del tiempo  $\psi(x)$  deben cumplir tres condiciones:

- $\psi(x)$  debe ser una función continua.
- La primera derivada de  $\psi(x)$  con respecto al espacio,  $d\psi(x)/dx$ , debe ser continua, a menos que  $V(x) = \infty$ .
- $\psi(x)$  no debe divergir ("estallar") en  $x = \pm\infty$ .

La primera condición evita los saltos bruscos o brechas en la función de onda. La segunda condición requiere que la función de onda sea suave en todos los puntos, excepto en casos especiales. (En un curso más avanzado de mecánica cuántica, por ejemplo, se utilizan picos de potencial de profundidad y altura infinitas para modelar sólidos). La tercera condición requiere que la función de onda sea normalizable. Esta tercera condición se desprende de la interpretación de Born de la mecánica cuántica. Garantiza que  $|\psi(x)|^2$  es un número finito, por lo que podemos utilizarlo para calcular probabilidades.

### ✓ **COMPRUEBE LO APRENDIDO 7.6**

¿Cuál de las siguientes funciones de onda es una solución de función de onda válida para la ecuación de Schrödinger?



## 7.4 La partícula cuántica en una caja

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Describir cómo plantear un problema de condición de frontera para la ecuación estacionaria de Schrödinger.
- Explicar por qué la energía de una partícula cuántica en una caja está cuantizada.
- Describir el significado físico de las soluciones estacionarias de la ecuación de Schrödinger y la conexión de estas soluciones con los estados cuánticos dependientes del tiempo.
- Explicar el significado físico del principio de correspondencia de Bohr.

En esta sección, aplicaremos la ecuación de Schrödinger a una partícula limitada a una caja unidimensional. Este caso especial proporciona lecciones para entender la mecánica cuántica en sistemas más complejos. La energía de la partícula se cuantiza como consecuencia de una condición de onda estacionaria dentro de la caja.

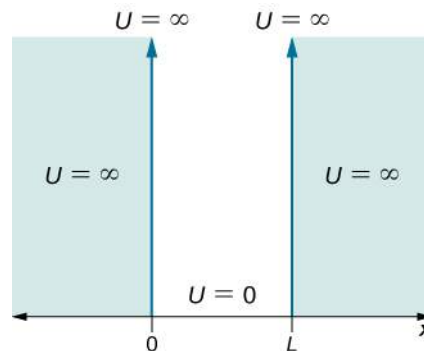
Consideremos una partícula de masa  $m$  que solo puede moverse en la dirección de la  $x$  y su movimiento se limita a la región entre las paredes duras y rígidas situadas en  $x = 0$  y en  $x = L$  (Figura 7.10). Entre las paredes, la partícula se mueve libremente. Esta situación física se denomina **pozo potencial infinito**, descrito por la función de energía potencial

$$U(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L, \\ \infty, & \text{por lo contrario.} \end{cases} \quad 7.31$$

Combinando esta ecuación con la ecuación de onda independiente del tiempo de Schrödinger se obtiene

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x), \text{ para } 0 \leq x \leq L \quad 7.32$$

donde  $E$  es la energía total de la partícula. ¿Qué tipo de soluciones esperamos? La energía de la partícula es un número positivo, por lo que si el valor de la función de onda es positivo (lado derecho de la ecuación) entonces la curvatura de la función de onda es negativa, o cóncava hacia abajo (lado izquierdo de la ecuación). Del mismo modo, si el valor de la función de onda es negativo (lado derecho de la ecuación), la curvatura de la función de onda es positiva o cóncava hacia arriba (lado izquierdo de la ecuación). Esta condición se cumple con una función de onda oscilante, como una onda sinusoidal o cosenoidal. Dado que estas ondas están confinadas en la caja, imaginamos ondas estacionarias con puntos finales fijos en  $x = 0$  y  $x = L$ .



**FIGURA 7.10** La función de energía potencial que confina la partícula en una caja unidimensional.

Las soluciones  $\psi(x)$  a esta ecuación tienen una interpretación probabilística. En particular, el cuadrado  $|\psi(x)|^2$  representa la densidad de probabilidad de encontrar la partícula en un lugar determinado de la  $x$ . Esta función debe integrarse para determinar la probabilidad de encontrar la partícula en algún intervalo del espacio. Por lo tanto, buscamos una solución normalizable que satisfaga la siguiente condición de normalización:

$$\int_0^L dx |\psi(x)|^2 = 1. \quad 7.33$$

Las paredes son rígidas e impenetrables, lo que significa que la partícula nunca las traspasa. Matemáticamente, esto significa que la solución debe desaparecer en las paredes:

$$\psi(0) = \psi(L) = 0. \quad 7.34$$

Esperamos soluciones oscilatorias, por lo que la solución más general de esta ecuación es

$$\psi_k(x) = A_k \cos kx + B_k \sin kx \quad 7.35$$

donde  $k$  es el número de onda, y  $A_k$  y  $B_k$  son constantes. Aplicando la condición de límite expresada por la [Ecuación 7.34](#) se obtiene

$$\psi_k(0) = A_k \cos(k \cdot 0) + B_k \sin(k \cdot 0) = A_k = 0. \quad 7.36$$

Porque tenemos  $A_k = 0$ , la solución debe ser

$$\psi_k(x) = B_k \sin kx. \quad 7.37$$

Si  $B_k$  es cero,  $\psi_k(x) = 0$  para todos los valores de la  $x$  y la condición de normalización, la [Ecuación 7.33](#), no puede satisfacerse. Suponiendo que  $B_k \neq 0$ , [Ecuación 7.34](#) para  $x = L$  entonces da

$$0 = B_k \sin(kL) \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots \quad 7.38$$

Descartamos la solución  $n = 0$  porque  $\psi(x)$  en este número cuántico sería cero en todas partes, una solución no normalizable y, por lo tanto, no física. Sustituyendo en la [Ecuación 7.37](#) la [Ecuación 7.32](#) se obtiene

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} (B_k \sin(kx)) = E (B_k \sin(kx)). \quad 7.39$$

El cálculo de estas derivadas conduce a

$$E = E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad 7.40$$

Según De Broglie,  $p = \hbar k$ , por lo que esta expresión implica que la energía total es igual a la energía cinética, lo que coincide con nuestra suposición de que la "partícula se mueve libremente". Combinando los resultados de la [Ecuación 7.38](#) y la [Ecuación 7.40](#) se obtiene

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, n = 1, 2, 3, \dots \quad 7.41$$

¡Extraño! Una partícula limitada a una caja unidimensional solo puede tener ciertos valores discretos (cuantizados) de energía. Además, la partícula no puede tener una energía cinética cero: es imposible que una partícula ligada a una caja esté "en reposo".

Para evaluar las funciones de onda permitidas que corresponden a estas energías, debemos encontrar la constante de normalización  $B_n$ . Imponemos la condición de normalización de la [Ecuación 7.33](#) a la función de onda

$$\psi_n(x) = B_n \sin n\pi x/L \quad 7.42$$

$$1 = \int_0^L dx |\psi_n(x)|^2 = \int_0^L dx B_n^2 \sin^2 \frac{n\pi}{L} x = B_n^2 \int_0^L dx \sin^2 \frac{n\pi}{L} x = B_n^2 \frac{L}{2} \Rightarrow B_n = \sqrt{\frac{2}{L}}.$$

Por lo tanto, las funciones de onda que corresponden a los valores de energía dados en la [Ecuación 7.41](#) son

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, n = 1, 2, 3, \dots \quad 7.43$$

Para el estado de menor energía o **energía del estado fundamental**, tenemos

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, \quad \psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right). \quad 7.44$$

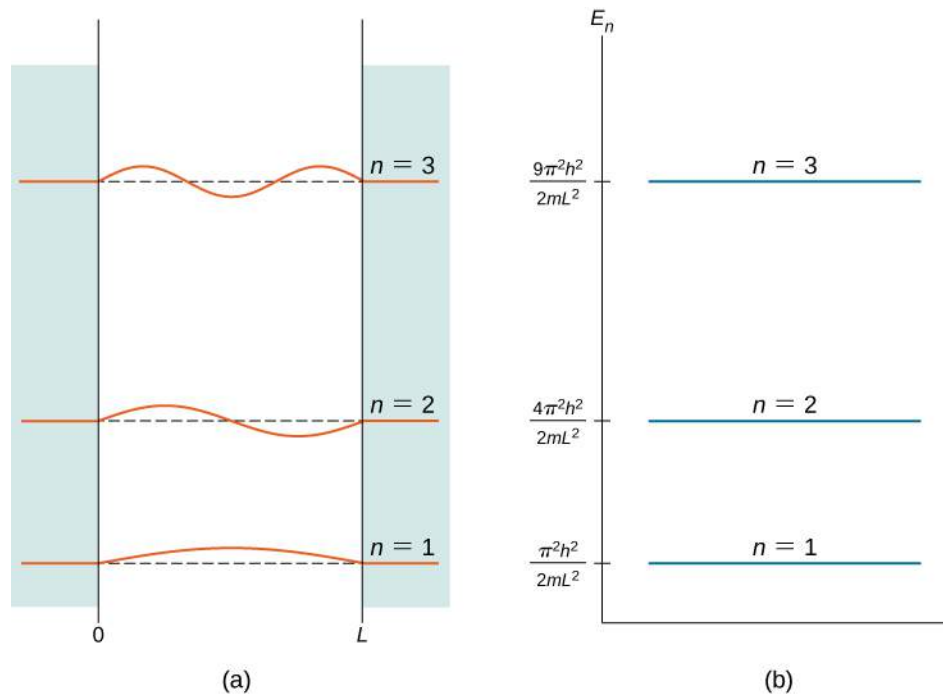
Todos los demás estados energéticos pueden expresarse como

$$E_n = n^2 E_1, \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad 7.45$$

El índice  $n$  se llama **número cuántico de energía** o **número cuántico principal**. El estado para  $n = 2$  es el primer estado excitado, el estado para  $n = 3$  es el segundo estado excitado, y así sucesivamente. Los tres primeros estados cuánticos (para  $n = 1, 2$ , y  $3$ ) de una partícula en una caja se muestra en la [Figura 7.11](#).

Las funciones de onda en la [Ecuación 7.45](#) se denominan a veces "estados de energía definida". Se dice que las partículas en estos estados ocupan **niveles de energía** representados por las líneas horizontales en la [Figura 7.11](#). Los niveles de energía son análogos a los peldaños de una escalera que la partícula puede "subir" a medida que gana o pierde energía.

Las funciones de onda en la [Ecuación 7.45](#) también se denominan **estados estacionarios** y **estados de onda estacionaria**. Estas funciones son "estacionarias", porque sus funciones de densidad de probabilidad,  $|\Psi(x, t)|^2$ , no varían en el tiempo, y "ondas estacionarias" porque sus partes reales e imaginarias oscilan hacia arriba y hacia abajo como una onda estacionaria, como una cuerda que se agita entre dos niños en un parque infantil. Los estados estacionarios son estados de energía definida [[Ecuación 7.45](#)], pero las combinaciones lineales de estos estados, como  $\psi(x) = a\psi_1 + b\psi_2$  (también soluciones de la ecuación de Schrödinger) son estados de energía mixta.



**FIGURA 7.11** Los tres primeros estados cuánticos de una partícula cuántica en una caja para números cuánticos principales  $n = 1, 2$ , y  $3$ : (a) soluciones de onda estacionaria y (b) estados de energía permitidos.

La cuantización de la energía es una consecuencia de las condiciones de frontera. Si la partícula no está confinada en una caja sino que deambula libremente, las energías permitidas son continuas. Sin embargo, en



este caso, solo ciertas energías ( $E_1, 4E_1, 9E_1, \dots$ ) están permitidas. La diferencia de energía entre niveles de energía adyacentes viene dada por

$$\Delta E_{n+1,n} = E_{n+1} - E_n = (n+1)^2 E_1 - n^2 E_1 = (2n+1)E_1. \quad 7.46$$

La conservación de la energía exige que si la energía del sistema cambia, la diferencia de energía se transmite en alguna otra forma de energía. Para el caso especial de una partícula cargada confinada en un pequeño volumen (por ejemplo, en un átomo), los cambios de energía suelen ser arrastrados por los fotones. Las frecuencias de los fotones emitidos nos dan información sobre las diferencias de energía (separaciones) del sistema y el volumen de contención (el tamaño de la "caja") [vea la [Ecuación 7.44](#)].

## EJEMPLO 7.8

### Un modelo sencillo del núcleo

Supongamos que un protón está confinado en una caja de  $L = 1,00 \times 10^{-14}$  m de ancho (un radio nuclear típico). ¿Cuáles son las energías de los estados fundamentales y de los primeros estados excitados? Si el protón realiza una transición desde el primer estado excitado al estado fundamental, ¿cuáles son la energía y la frecuencia del fotón emitido?

#### Estrategia

Si asumimos que el protón confinado en el núcleo puede ser modelado como una partícula cuántica en una caja, todo lo que necesitamos hacer es utilizar la [Ecuación 7.41](#) para encontrar sus energías  $E_1$  y  $E_2$ . La masa de un protón es  $m = 1,76 \times 10^{-27}$  kg. El fotón emitido se lleva la diferencia de energía  $\Delta E = E_2 - E_1$ . Podemos utilizar la relación  $E_f = hf$  para encontrar su frecuencia  $f$ .

#### Solución

El estado fundamental:

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = \frac{\pi^2 (1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{2(1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})(1,00 \times 10^{-14} \text{ m})^2} = 3,28 \times 10^{-13} \text{ J} = 2,05 \text{ MeV}.$$

El primer estado excitado:  $E_2 = 2^2 E_1 = 4(2,05 \text{ MeV}) = 8,20 \text{ MeV}$ .

La energía del fotón emitido es  $E_f = \Delta E = E_2 - E_1 = 8,20 \text{ MeV} - 2,05 \text{ MeV} = 6,15 \text{ MeV}$ .

La frecuencia del fotón emitido es

$$f = \frac{E_f}{h} = \frac{6,15 \text{ MeV}}{4,14 \times 10^{-21} \text{ MeV} \cdot \text{s}} = 1,49 \times 10^{21} \text{ Hz}.$$

#### Importancia

Es la frecuencia típica de un rayo gama emitido por un núcleo. La energía de este fotón es unos 10 millones de veces mayor que la de un fotón de luz visible.

El valor esperado de la posición de una partícula en una caja viene dado por

$$\langle x \rangle = \int_0^L dx \psi_n^*(x) x \psi_n(x) = \int_0^L dx x |\psi_n^*(x)|^2 = \int_0^L dx x \frac{2}{L} \sin^2 \frac{n\pi x}{L} = \frac{L}{2}. \quad 7.47$$

También podemos encontrar el valor esperado del momento o del momento medio de un gran número de partículas en un estado determinado:

$$\begin{aligned}
\langle p \rangle &= \int_0^L dx \psi_n^*(x) \left[ -i\hbar \frac{d}{dx} \psi_n(x) \right] \\
&= -i\hbar \int_0^L dx \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \left[ \frac{d}{dx} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \right] = -i \frac{2\hbar}{L} \int_0^L dx \sin \frac{n\pi x}{L} \left[ \frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \right] \\
&= -i \frac{2n\pi\hbar}{L^2} \int_0^L dx \frac{1}{2} \sin \frac{2n\pi x}{L} = -i \frac{n\pi\hbar}{L^2} \frac{L}{2n\pi} \int_0^{2\pi n} d\varphi \sin \varphi = -i \frac{\hbar}{2L} \cdot 0 = 0.
\end{aligned} \tag{7.48}$$

Por lo tanto, para una partícula en un estado de energía definida, la posición media está en el centro de la caja y el momento medio de la partícula es cero, como lo sería también para una partícula clásica. Observe que mientras la energía mínima de una partícula clásica puede ser cero (la partícula puede estar en reposo en el centro de la caja), la energía mínima de una partícula cuántica es distinta de cero y viene dada por la [Ecuación 7.44](#). La energía media de las partículas en el *enésimo* estado cuántico (su valor esperado de energía) es

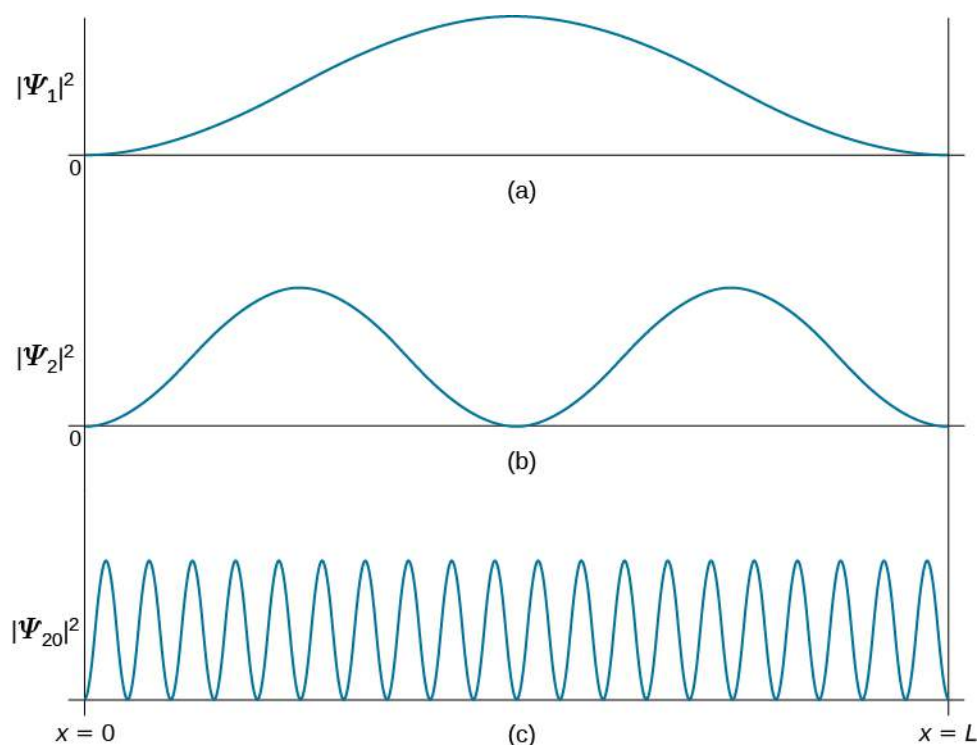
$$E_n = \langle E \rangle = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m}. \tag{7.49}$$

El resultado no es sorprendente porque el estado de onda estacionaria es un estado de energía definida. Cualquier medición de energía de este sistema debe devolver un valor igual a una de estas energías permitidas.

Nuestro análisis de la partícula cuántica en una caja no estaría completo sin hablar del principio de correspondencia de Bohr. Este principio establece que, para números cuánticos grandes, las leyes de la física cuántica deben dar resultados idénticos a los de la física clásica. Para ilustrar cómo funciona este principio para una partícula cuántica en una caja, graficamos la distribución de densidad de probabilidad

$$|\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{L} \sin^2(n\pi x/L) \tag{7.50}$$

para encontrar la partícula alrededor de la ubicación de la  $x$  entre las paredes cuando la partícula está en estado cuántico  $\psi_n$ . La [Figura 7.12](#) muestra estas distribuciones de probabilidad para el estado fundamental, para el primer estado excitado y para un estado altamente excitado que corresponde a un gran número cuántico. En estos gráficos vemos que cuando una partícula cuántica se encuentra en el estado fundamental, lo más probable es que se encuentre alrededor del centro de la caja, donde la distribución de probabilidad tiene el mayor valor. Esto no es así cuando la partícula está en el primer estado excitado porque ahora la distribución de probabilidad tiene el valor cero en el centro de la caja, por lo que no hay posibilidad de encontrar la partícula allí. Cuando una partícula cuántica se encuentra en el primer estado excitado, la distribución de probabilidad tiene dos máximos, y la mejor oportunidad de encontrar la partícula es en posiciones cercanas a las ubicaciones de estos máximos. Esta escena cuántica es diferente a la clásica.



**FIGURA 7.12** La distribución de la densidad de probabilidad  $|\psi_n(x)|^2$  para una partícula cuántica en una caja para: (a) el estado fundamental,  $n = 1$ ; (b) el primer estado excitado,  $n = 2$ ; y, (c) el decimonoveno estado excitado,  $n = 20$ .

La densidad de probabilidad de encontrar una partícula clásica entre  $x$  y  $x + \Delta x$  depende de cuánto tiempo  $\Delta t$  la partícula pasa en esta región. Suponiendo que su velocidad  $u$  es constante, este tiempo es  $\Delta t = \Delta x/u$ , que también es constante para cualquier lugar entre las paredes. Por lo tanto, la densidad de probabilidad de encontrar la partícula clásica en  $x$  es uniforme en toda la caja, y no hay ninguna ubicación preferible para encontrar una partícula clásica. Esta imagen clásica se iguala en el límite de los grandes números cuánticos. Por ejemplo, cuando una partícula cuántica está en un estado altamente excitado, mostrado en la [Figura 7.12](#), la densidad de probabilidad se caracteriza por rápidas fluctuaciones y entonces la probabilidad de encontrar la partícula cuántica en el intervalo  $\Delta x$  no depende de la ubicación de este intervalo entre las paredes.

### EJEMPLO 7.9

#### Una partícula clásica en una caja

Un pequeño carro de 0,40 kg se mueve hacia adelante y hacia atrás a lo largo de una pista de aire entre dos parachoques situados a 2,0 m de distancia. Suponemos que no hay fricción; las colisiones con los parachoques son perfectamente elásticas, de modo que entre estos el auto mantiene una velocidad constante de 0,50 m/s. Considerando el carro como una partícula cuántica, estime el valor del número cuántico principal que corresponde a su energía clásica.

#### Estrategia

Encontramos la energía cinética  $K$  del carro y su energía del estado fundamental  $E_1$  como si fuera una partícula cuántica. La energía del carro es completamente cinética, por lo que  $K = n^2 E_1$  ([Ecuación 7.45](#)). Al resolver para  $n$  se obtiene  $n = (K/E_1)^{1/2}$ .

#### Solución

La energía cinética del carro es

$$K = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}(0,40 \text{ kg})(0,50 \text{ m/s})^2 = 0,050 \text{ J}.$$

El estado fundamental del carro, tratado como una partícula cuántica, es

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = \frac{\pi^2 (1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{2(0,40 \text{ kg})(2,0 \text{ m})^2} = 1,700 \times 10^{-68} \text{ J}.$$

Por lo tanto,  $n = (K/E_1)^{1/2} = (0,050/1,700 \times 10^{-68})^{1/2} = 1,2 \times 10^{33}$ .

### Importancia

En este ejemplo vemos que la energía de un sistema clásico se caracteriza por un número cuántico muy grande. El principio de correspondencia de Bohr se refiere a este tipo de situaciones. Podemos aplicar el formalismo de la mecánica cuántica a cualquier tipo de sistema, cuántico o clásico, y los resultados son correctos en todos los casos. En el límite de números cuánticos altos, no hay ninguna ventaja en utilizar el formalismo cuántico porque podemos obtener los mismos resultados con el formalismo menos complicado de la mecánica clásica. Sin embargo, no podemos aplicar el formalismo clásico a un sistema cuántico en un estado energético de bajo número.

## ✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 7.7

(a) Considere un pozo potencial infinito con una pared de límites  $x = 0$  y  $x = L$ . ¿Cuál es la probabilidad de encontrar una partícula cuántica en su estado fundamental en algún lugar entre  $x = 0$  y  $x = L/4$ ? (b) Repita la pregunta (a) para una partícula clásica.

Una vez encontrados los estados estacionarios  $\psi_n(x)$  y las energías  $E_n$  resolviendo la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo: [Ecuación 7.32](#), utilizamos la [Ecuación 7.28](#) para escribir funciones de onda  $\Psi_n(x, t)$  que son soluciones de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo dada por la [Ecuación 7.23](#). Para una partícula en una caja esto da

$$\Psi_n(x, t) = e^{-i\omega_n t} \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} e^{-iE_n t/\hbar} \sin \frac{n\pi x}{L}, n = 1, 2, 3, \dots \quad 7.51$$

donde las energías vienen dadas por la [Ecuación 7.41](#).

El modelo de la partícula cuántica en una caja tiene aplicaciones prácticas en un campo relativamente nuevo, la optoelectrónica, que se ocupa de los dispositivos que convierten las señales eléctricas en señales ópticas. Este modelo también se ocupa de los fenómenos físicos de la nanoescala, como una nanopartícula atrapada en un potencial eléctrico bajo delimitado por barreras de alto potencial.

## 7.5 El oscilador armónico cuántico

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Describir el modelo del oscilador armónico cuántico
- Identificar las diferencias entre los modelos clásico y cuántico del oscilador armónico.
- Explicar situaciones físicas en las que coinciden los modelos clásico y cuántico.

Las oscilaciones están presentes en toda la naturaleza, en cosas como las ondas electromagnéticas, las moléculas que vibran y el suave vaivén de la rama de un árbol. En los capítulos anteriores utilizamos la mecánica de Newton para estudiar las oscilaciones macroscópicas, como un bloque sobre un resorte y un péndulo simple. En este capítulo, comenzaremos a estudiar los sistemas oscilantes utilizando la mecánica cuántica. Comenzaremos revisando el oscilador armónico clásico.

### El oscilador armónico clásico

Un oscilador armónico simple es una partícula o sistema que experimenta un movimiento armónico en torno a una posición de equilibrio, como un objeto con masa que vibra sobre un resorte. En esta sección, consideramos las oscilaciones en una sola dimensión. Supongamos que una masa se mueve de un lado a otro

a lo largo de una

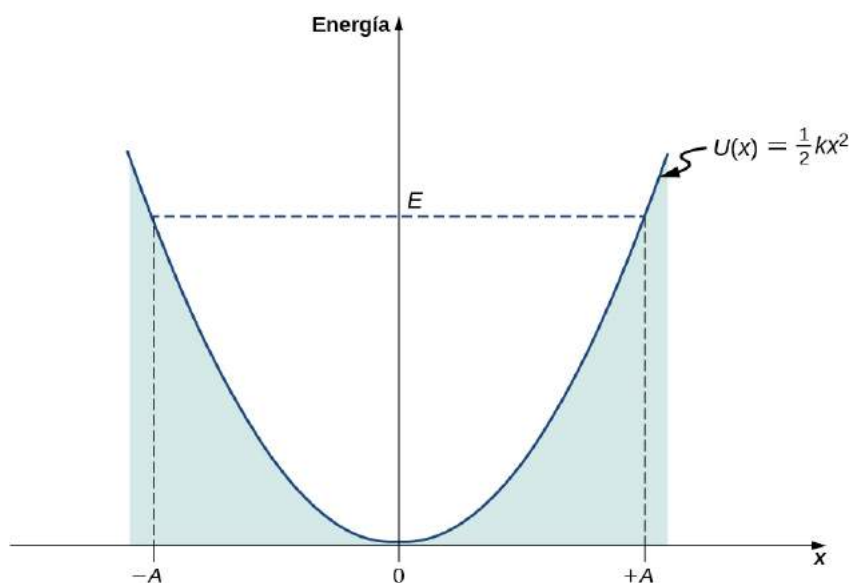
dirección  $x$  alrededor de la posición de equilibrio,  $x = 0$ . En la mecánica clásica, la partícula se mueve en respuesta a una fuerza lineal restauradora dada por  $F_x = -kx$ , donde la  $x$  es el desplazamiento de la partícula desde su posición de equilibrio. El movimiento tiene lugar entre dos puntos de inflexión,  $x = \pm A$ , donde  $A$  denota la amplitud del movimiento. La posición del objeto varía periódicamente en el tiempo con una frecuencia angular  $\omega = \sqrt{k/m}$ , que depende de la masa  $m$  del oscilador y de la constante de fuerza  $k$  de la fuerza neta, y puede escribirse como

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi). \quad 7.52$$

La energía total  $E$  de un oscilador es la suma de su energía cinética  $K = mv^2/2$  y la energía potencial elástica de la fuerza  $U(x) = kx^2/2$ ,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad 7.53$$

En los puntos de inflexión  $x = \pm A$ , la velocidad del oscilador es de cero; por lo tanto, en estos puntos la energía de oscilación está únicamente en forma de energía potencial  $E = kA^2/2$ . El gráfico de la energía potencial  $U(x)$  del oscilador en función de su posición  $x$  es una parábola (Figura 7.13). La función de energía potencial es una función cuadrática de la  $x$ , medida con respecto a la posición de equilibrio. En el mismo gráfico, también trazamos la energía total  $E$  del oscilador, como una línea horizontal que intercepta la parábola en  $x = \pm A$ . Entonces la energía cinética  $K$  se representa como la distancia vertical entre la línea de energía total y la parábola de energía potencial.



**FIGURA 7.13** El pozo de energía potencial de un oscilador armónico clásico: El movimiento está confinado entre los puntos de inflexión en  $x = -A$  y en  $x = +A$ . La energía de las oscilaciones es  $E = kA^2/2$ .

En este gráfico, el movimiento de un oscilador clásico está confinado a la región donde su energía cinética es no negativa, que es lo que dice la Ecuación 7.53 de relación de energía. Físicamente, significa que un oscilador clásico nunca puede encontrarse más allá de sus puntos de inflexión, y su energía solo depende de lo lejos que estén los puntos de inflexión de su posición de equilibrio. La energía de un oscilador clásico cambia de forma continua. La energía más baja que puede tener un oscilador clásico es cero, lo que corresponde a una situación en la que un objeto está en reposo en su posición de equilibrio. El estado de energía cero de un oscilador clásico significa simplemente que no hay oscilaciones ni movimiento alguno (una partícula clásica sentada en el fondo del pozo de potencial en la Figura 7.13). Cuando un objeto oscila, por muy grande o pequeña que sea su energía, pasa el mayor tiempo cerca de los puntos de inflexión, porque es ahí donde frena e invierte su dirección de movimiento. Por lo tanto, la probabilidad de encontrar un oscilador clásico entre los puntos de

giro es mayor cerca de los puntos de inflexión y menor en la posición de equilibrio. (Observe que esto no es una declaración de preferencia del objeto por ir a una energía más baja. Es una declaración sobre la rapidez con la que el objeto se mueve a través de varias regiones).

### El oscilador armónico cuántico

Un problema de esta formulación clásica es que no es general. No podemos utilizarla, por ejemplo, para describir las vibraciones de las moléculas diatómicas, donde los efectos cuánticos son importantes. Un primer paso hacia una formulación cuántica es utilizar la expresión clásica  $k = m \omega^2$  para limitar la mención de una constante de "resorte" entre los átomos. De este modo, la función de energía potencial puede escribirse en una forma más general,

$$U(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2. \quad 7.54$$

Combinando esta expresión con la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo se obtiene

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi(x) = E \psi(x). \quad 7.55$$

Para resolver la [Ecuación 7.55](#) (es decir, para encontrar las energías permitidas  $E$  y sus funciones de onda correspondientes  $\psi(x)$ ) necesitamos que las funciones de onda sean simétricas respecto a  $x = 0$  (el fondo del pozo potencial) y normalizables. Estas condiciones garantizan que la densidad de probabilidad  $|\psi(x)|^2$  deba ser finita cuando se integre en todo el rango de  $x$  desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$ . Cómo resolver la [Ecuación 7.55](#) es tema de un curso más avanzado de mecánica cuántica; aquí simplemente citamos los resultados. Las energías permitidas son

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega = \frac{2n+1}{2} \hbar \omega, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad 7.56$$

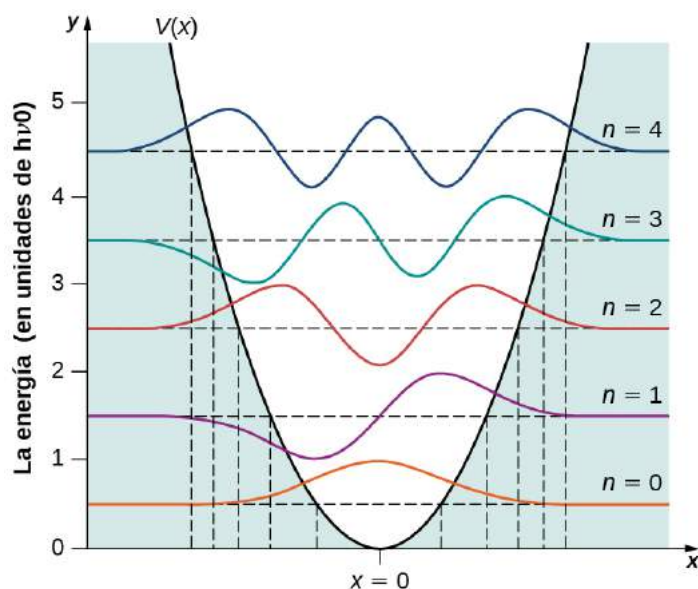
Las funciones de onda que corresponden a estas energías (los estados estacionarios o de energía definida) son

$$\psi_n(x) = N_n e^{-\beta^2 x^2 / 2} H_n(\beta x), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad 7.57$$

donde  $\beta = \sqrt{m \omega / \hbar}$ ,  $N_n$  es la constante de normalización, y  $H_n(y)$  es un polinomio de grado  $n$  llamado *Polinomio de Hermite*. Los cuatro primeros polinomios de Hermite son

$$\begin{aligned} H_0(y) &= 1 \\ H_1(y) &= 2y \\ H_2(y) &= 4y^2 - 2 \\ H_3(y) &= 8y^3 - 12y. \end{aligned}$$

Algunos ejemplos de funciones de onda figuran en la [Figura 7.14](#). A medida que aumenta el valor del número principal, las soluciones alternan entre funciones pares e impares alrededor de  $x = 0$ .



**FIGURA 7.14** Las cinco primeras funciones de onda del oscilador armónico cuántico. Los límites clásicos del movimiento del oscilador se indican con líneas verticales, correspondientes a los puntos de inflexión clásicos en  $x = \pm A$  de una partícula clásica con la misma energía que la de un oscilador cuántico en el estado indicado en la figura.



### EJEMPLO 7.10

#### Región clásica de las oscilaciones armónicas

Encuentre la amplitud  $A$  de las oscilaciones para un oscilador clásico con energía igual a la energía de un oscilador cuántico en el estado cuántico  $n$ .

#### Estrategia

Para determinar la amplitud  $A$ , fijamos la energía clásica  $E = kx^2/2 = m \omega^2 A^2/2$  igual a  $E_n$  dado por la [Ecuación 7.56](#).

#### Solución

Obtenemos

$$E_n = m \omega^2 A_n^2 / 2 \Rightarrow A_n = \sqrt{\frac{2}{m \omega^2} E_n} = \sqrt{\frac{2}{m \omega^2} \frac{2n+1}{2} \hbar \omega} = \sqrt{(2n+1) \frac{\hbar}{m \omega}}$$

#### Importancia

A medida que aumenta el número cuántico  $n$ , aumenta la energía del oscilador y, por tanto, la amplitud de oscilación (para una frecuencia angular natural fija). Para un  $n$  grande, la amplitud es aproximadamente proporcional a la raíz cuadrada del número cuántico.

En esta solución aparecen varias características interesantes. A diferencia de un oscilador clásico, las energías medidas de un oscilador cuántico solo pueden tener valores energéticos dados por la [Ecuación 7.56](#). Además, a diferencia del caso de una partícula cuántica en una caja, los niveles de energía permitidos están espaciados de manera uniforme,

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \frac{2(n+1)+1}{2} \hbar \omega - \frac{2n+1}{2} \hbar \omega = \hbar \omega = h f. \quad 7.58$$

Cuando una partícula ligada a un sistema de este tipo hace una transición de un estado de mayor energía a un



estado de menor energía, el cuanto de menor energía transportado por el fotón emitido es necesariamente  $hf$ . Del mismo modo, cuando la partícula hace una transición de un estado de menor energía a un estado de mayor energía, el cuanto de menor energía que puede ser absorbido por la partícula es el  $hf$ . Un oscilador cuántico solo puede absorber o emitir energía en múltiplos de este cuanto de energía más pequeño. Esto coincide con la hipótesis de Planck para los intercambios de energía entre la radiación y las paredes de la cavidad en el problema de la radiación de cuerpo negro.

### EJEMPLO 7.11

#### Energías vibracionales de la molécula de cloruro de hidrógeno

La molécula diatómica de HCl está formada por un átomo de cloro y otro de hidrógeno. Dado que el átomo de cloro es 35 veces más masivo que el átomo de hidrógeno, las vibraciones de la molécula de HCl pueden aproximarse bastante bien suponiendo que el átomo de Cl está inmóvil y que el átomo de H realiza oscilaciones armónicas debido a una fuerza molecular elástica modelada por la ley de Hooke. El espectro vibratorio infrarrojo medido en el cloruro de hidrógeno tiene la línea de menor frecuencia centrada en  $f = 8,88 \times 10^{13}$  Hz. ¿Cuál es el espacio entre las energías vibracionales de esta molécula? ¿Cuál es la constante de fuerza  $k$  del enlace atómico en la molécula de HCl?

#### Estrategia

La línea de menor frecuencia corresponde a la emisión de fotones de menor frecuencia. Estos fotones se emiten cuando la molécula realiza una transición entre dos niveles de energía vibracional adyacentes. Suponiendo que los niveles de energía están igualmente espaciados, utilizamos la [Ecuación 7.58](#) para estimar el espaciado. La molécula se aproxima bien tratando el átomo de Cl como infinitamente pesado y el átomo de H como la masa  $m$  que realiza las oscilaciones. Tratando este sistema molecular como un oscilador clásico, la constante de fuerza se encuentra a partir de la relación clásica  $k = m \omega^2$ .

#### Solución

La separación de energía es

$$\Delta E = h f = (4,14 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s})(8,88 \times 10^{13} \text{ Hz}) = 0,368 \text{ eV}.$$

La constante de fuerza es

$$k = m \omega^2 = m (2\pi f)^2 = (1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})(2\pi \times 8,88 \times 10^{13} \text{ Hz})^2 = 520 \text{ N/m}.$$

#### Importancia

La fuerza entre los átomos de una molécula de HCl es sorprendentemente fuerte. La energía típica liberada en las transiciones energéticas entre niveles vibracionales se encuentra en el rango infrarrojo. Como veremos más adelante, las transiciones entre los niveles de energía vibracional de una molécula diatómica suelen acompañar a las transiciones entre niveles de energía rotacional.

### COMPRUEBE LO APRENDIDO 7.8

La frecuencia vibratoria de la molécula diatómica de yoduro de hidrógeno HI es  $6,69 \times 10^{13}$  Hz. (a) ¿Cuál es la constante de fuerza del enlace molecular entre los átomos de hidrógeno y de yodo? (b) ¿Cuál es la energía del fotón emitido cuando esta molécula hace una transición entre niveles de energía vibracionales adyacentes?

El oscilador cuántico difiere del oscilador clásico en tres aspectos:

En primer lugar, el estado fundamental de un oscilador cuántico es  $E_0 = \hbar\omega/2$ , diferente a cero. En la visión clásica, la energía más baja es cero. La inexistencia de un estado de energía cero es común a todos los sistemas

mecánicos cuánticos debido a las fluctuaciones omnipresentes que son consecuencia del principio de incertidumbre de Heisenberg. Si una partícula cuántica estuviera inmóvil en el fondo del pozo de potencial, tanto su momento como su posición tendrían que ser simultáneamente exactos, lo que violaría el principio de incertidumbre de Heisenberg. Por lo tanto, el estado de menor energía debe estar caracterizado por incertidumbres en el momento y en la posición, por lo que el estado fundamental de una partícula cuántica debe estar por encima del fondo del pozo de potencial.

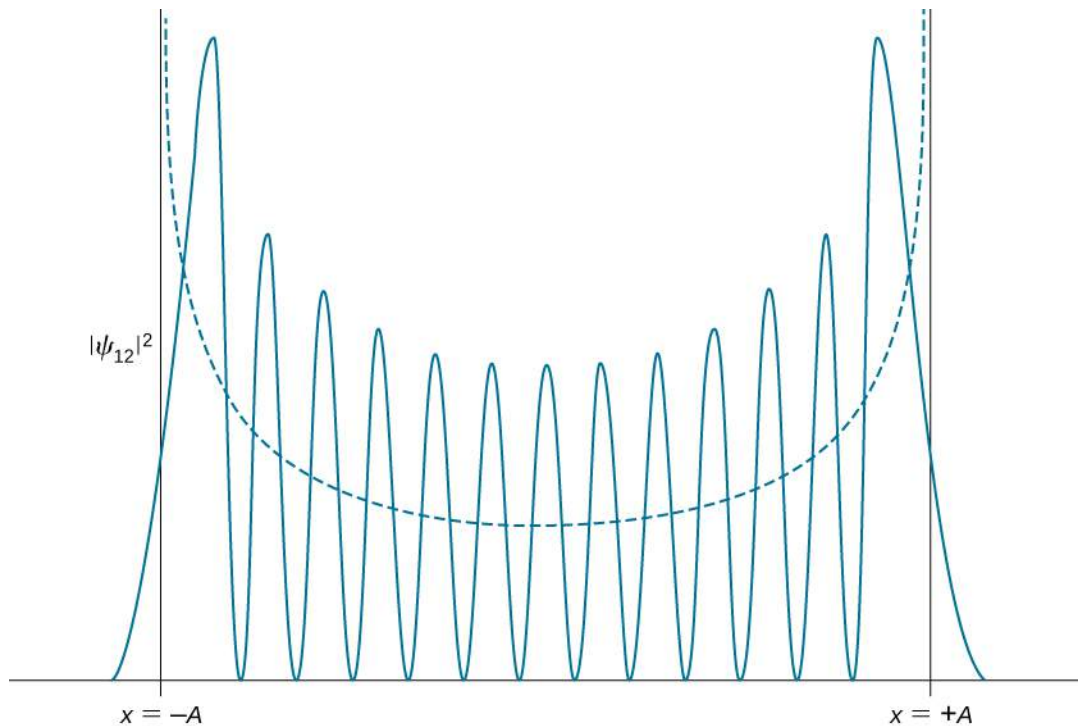
En segundo lugar, una partícula en un potencial de oscilador armónico cuántico puede encontrarse con probabilidad diferente a cero fuera del intervalo  $-A \leq x \leq +A$ . En una formulación clásica del problema, la partícula no tendría ninguna energía para estar en esta región. La probabilidad de encontrar una partícula cuántica en estado fundamental en la región prohibida de manera clásica es de aproximadamente el 16 %.

En tercer lugar, las distribuciones de densidad de probabilidad  $|\psi_n(x)|^2$  para un oscilador cuántico en el estado fundamental de baja energía,  $\psi_0(x)$ , es mayor en el centro del pozo ( $x = 0$ ). Para que la partícula se encuentre con mayor probabilidad en el centro del pozo, esperamos que pase el mayor tiempo allí mientras oscila. Esto se opone al comportamiento de un oscilador clásico, en el que la partícula pasa la mayor parte del tiempo moviéndose con velocidades relativamente pequeñas cerca de los puntos de inflexión.

### ✓ **COMPRUEBE LO APRENDIDO 7.9**

Encuentre el valor esperado de la posición de una partícula en el estado fundamental de un oscilador armónico utilizando la simetría.

Las distribuciones de densidad de probabilidad cuántica cambian de carácter en los estados excitados, pareciéndose más a la distribución clásica cuando el número cuántico es mayor. Observamos este cambio efectivamente en el primer estado excitado de un oscilador cuántico porque la distribución  $|\psi_1(x)|^2$  alcanza su punto máximo alrededor de los puntos de inflexión y desaparece en la posición de equilibrio, como se ve en la [Figura 7.13](#). De acuerdo con el principio de correspondencia de Bohr, en el límite de números cuánticos altos, la descripción cuántica de un oscilador armónico converge a la descripción clásica, como se ilustra en la [Figura 7.15](#). La distribución de densidad de probabilidad clásica correspondiente a la energía cuántica del estado  $n = 12$  es una aproximación razonablemente buena de la distribución de probabilidad cuántica para un oscilador cuántico en este estado excitado. Esta concordancia es cada vez mejor para los estados altamente excitados.



**FIGURA 7.15** La distribución de densidad de probabilidad para encontrar el oscilador armónico cuántico en su estado cuántico  $n = 12$ . La curva discontinua muestra la distribución de densidad de probabilidad de un oscilador clásico con la misma energía.

## 7.6 El efecto túnel de las partículas a través de las barreras de potencial

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir cómo una partícula cuántica puede atravesar a través de un túnel una barrera de potencial.
- Identificar los parámetros físicos importantes que afectan a la probabilidad de tunelización.
- Identificar los fenómenos físicos en los que se observa el efecto túnel.
- Explicar cómo se utiliza el efecto túnel en las tecnologías modernas.

El **efecto túnel** es un fenómeno en el que las partículas atraviesan una barrera de energía potencial con una altura mayor que la energía total de las partículas. El fenómeno es interesante e importante porque viola los principios de la mecánica clásica. El efecto túnel es importante en los modelos del Sol y tiene una amplia gama de aplicaciones, como el microscopio de efecto de túnel y el diodo de túnel.

### Túnel y energía potencial

Para ilustrar el efecto túnel, considere una bola que rueda a lo largo de una superficie con una energía cinética de 100 J. A medida que la bola rueda, se encuentra con una colina. La energía potencial de la bola colocada en la cima de la colina es de 10 J. Por lo tanto, la bola (con 100 J de energía cinética) rueda fácilmente por encima de la colina y sigue adelante. En la mecánica clásica, la probabilidad de que la bola pase por encima de la colina es exactamente 1, lo que hace siempre. Sin embargo, si se aumenta la altura de la colina (una bola colocada en la cima de la colina tiene una energía potencial de 200 J) la bola avanza solo una parte de la colina, se detiene y regresa en la dirección en la que vino. La energía total de la bola se convierte por completo en energía potencial antes de que pueda llegar a la cima de la colina. Nunca esperamos, incluso después de repetidos intentos, que la bola con 100 J se encuentre más allá de la colina. Por lo tanto, la probabilidad de que la bola pase por encima de la colina es exactamente 0, y la probabilidad de que sea devuelta o "reflejada" por la colina es exactamente 1. La bola *nunca* llega a la cima de la colina. La existencia de la bola más allá de la colina es una imposibilidad o está "energéticamente prohibida".

Sin embargo, según la mecánica cuántica, la bola tiene una función de onda y esta función está definida sobre

todo el espacio. La función de onda puede estar muy localizada, pero siempre existe la posibilidad de que al encontrarse la bola con la colina, ésta se encuentre de repente más allá. De hecho, esta probabilidad es apreciable si el "paquete de ondas" de la bola es más amplio que la barrera.

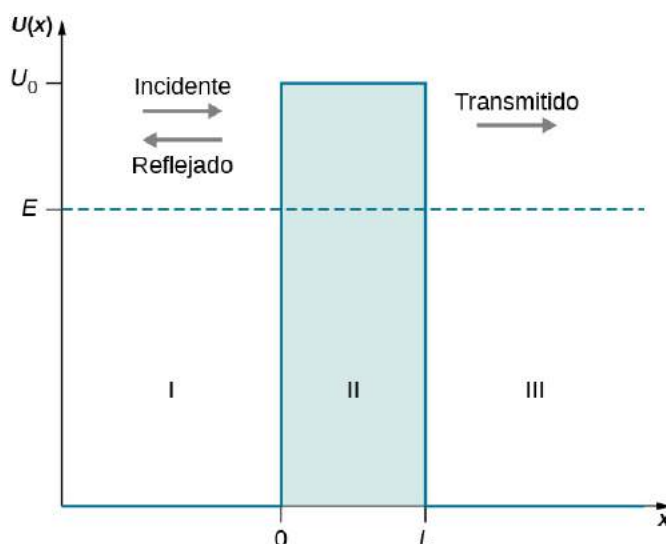
### INTERACTIVO

Vea esta [simulación interactiva \(https://openstax.org/l/21intquatanvid\\_es\)](https://openstax.org/l/21intquatanvid_es) para una simulación de túnel.

En el lenguaje de la mecánica cuántica, la colina se caracteriza por una **barrera de potencial**. Una barrera cuadrada de altura finita se describe mediante la siguiente función de energía potencial:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{cuando } x < 0 \\ U_0, & \text{cuando } 0 \leq x \leq L \\ 0, & \text{cuando } x > L. \end{cases} \quad 7.59$$

La barrera de potencial se ilustra en la [Figura 7.16](#). Cuando la altura  $U_0$  de la barrera es infinita, el paquete de ondas que representa a una partícula cuántica incidente es incapaz de penetrarla, y la partícula cuántica rebota desde la frontera de la barrera, al igual que una partícula clásica. Cuando el ancho  $L$  de la barrera es infinita y su altura es finita, una parte del paquete de ondas que representa a una partícula cuántica incidente puede filtrarse a través de la frontera de la barrera y acabar pereciendo tras recorrer cierta distancia dentro de la misma.



**FIGURA 7.16** Una barrera de energía potencial de altura  $U_0$  crea tres regiones físicas con tres comportamientos de onda diferentes. En la región I, donde  $x < 0$ , un paquete de ondas incidente (partícula incidente) se mueve en una zona libre de potencial y coexiste con un paquete de ondas reflejado (partícula reflejada). En la región II, una parte de la onda incidente que no se ha reflejado en  $x = 0$  se mueve como una onda transmitida en un potencial constante  $U(x) = +U_0$  y pasa por túneles a través de la región III en  $x = L$ . En la región III para  $x > L$ , un paquete de ondas (partícula transmitida) que ha atravesado la barrera de potencial se mueve como una partícula libre en la zona libre de potencial. La línea horizontal indica la energía  $E$  de la partícula incidente.

Cuando tanto el ancho  $L$  como la altura  $U_0$  son finitos, una parte del paquete de ondas cuánticas que incide en un lado de la barrera puede penetrar la frontera de la misma y continuar su movimiento dentro de ella, donde se atenúa gradualmente en su camino hacia el otro lado. Una parte del paquete de ondas cuánticas incidente acaba emergiendo al otro lado de la barrera en forma del paquete de ondas transmitido que atravesó la barrera. La parte de la onda incidente que puede atravesar una barrera depende del ancho  $L$  de la barrera y de su altura  $U_0$ , y de la energía  $E$  de la partícula cuántica que incide en la barrera. Esta es la física de los túneles.

La penetración de la barrera mediante funciones de onda cuánticas fue analizada teóricamente por primera

vez por Friedrich Hund en 1927, poco después de que Schrödinger publicara la ecuación que lleva su nombre. Un año después, George Gamow utilizó el formalismo de la mecánica cuántica para explicar el decaimiento radioactivo  $\alpha$  de los núcleos atómicos como fenómeno del efecto túnel. La invención del diodo de túnel en 1957 puso de manifiesto la importancia del efecto túnel para la industria de los semiconductores. En las nanotecnologías modernas, los átomos individuales se manipulan gracias al conocimiento del efecto túnel.

### Túnel y función de onda

Supongamos que un haz uniforme e independiente del tiempo de electrones u otras partículas cuánticas con energía  $E$  que viajan a lo largo del eje de la  $x$  (en la dirección positiva hacia la derecha) se encuentra con una barrera de potencial descrita en la [Ecuación 7.59](#). La pregunta es: ¿Cuál es la probabilidad de que una partícula individual del haz atraviese a través de un túnel la barrera de potencial? La respuesta puede encontrarse resolviendo el problema de condición de frontera para la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para una partícula en el haz. La forma general de esta ecuación viene dada por la [Ecuación 7.60](#), que reproducimos aquí:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x), \text{ donde } -\infty < x < +\infty. \quad 7.60$$

En la [Ecuación 7.60](#), la función potencial  $U(x)$  se define por la [Ecuación 7.59](#). Suponemos que la energía  $E$  dada de la partícula entrante es menor que la altura  $U_0$  de la barrera de potencial,  $E < U_0$ , porque este es el caso físico interesante. Conociendo la energía  $E$  de la partícula entrante, nuestra tarea es resolver la [Ecuación 7.60](#) para una función  $\psi(x)$  que es continua y tiene primeras derivadas continuas para toda la  $x$ . En otras palabras, buscamos una solución de "aspecto liso" (porque así es como se ven las funciones de onda) a la que se le pueda dar una interpretación probabilística de manera que  $|\psi(x)|^2 = \psi^*(x)\psi(x)$  es la densidad de probabilidad.

Dividimos el eje real en tres regiones con las fronteras definidas por la función potencial en la [Ecuación 7.59](#) (ilustrado en la [Figura 7.16](#)) y transcribimos la [Ecuación 7.60](#) de cada región. Denotando por  $\psi_I(x)$  la solución en la región I para  $x < 0$ , para  $\psi_{II}(x)$  la solución en la región II para  $0 \leq x \leq L$ , y para  $\psi_{III}(x)$  la solución en la región III para  $x > L$ , la ecuación estacionaria de Schrödinger tiene las siguientes formas en estas tres regiones:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_I(x)}{dx^2} = E\psi_I(x), \text{ en la región I: } -\infty < x < 0, \quad 7.61$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2} + U_0\psi_{II}(x) = E\psi_{II}(x), \text{ en la región II: } 0 \leq x \leq L, \quad 7.62$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_{III}(x)}{dx^2} = E\psi_{III}(x), \text{ en la región III: } L < x < +\infty. \quad 7.63$$

La condición de continuidad en las fronteras de la región requiere que:

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0), \text{ en la frontera entre las regiones I y II} \quad 7.64$$

y

$$\psi_{II}(L) = \psi_{III}(L), \text{ en la frontera entre las regiones II y III.} \quad 7.65$$

La condición de "lisura" requiere que la primera derivada de la solución sea continua en las fronteras de la región:

$$\left. \frac{d\psi_I(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\psi_{II}(x)}{dx} \right|_{x=0}, \text{ en la frontera entre las regiones I y II;} \quad 7.66$$

y

$$\left. \frac{d\psi_{II}(x)}{dx} \right|_{x=L} = \left. \frac{d\psi_{III}(x)}{dx} \right|_{x=L}, \text{ en la frontera entre las regiones II y III.} \quad 7.67$$

En lo que sigue, encontramos las funciones  $\psi_I(x)$ ,  $\psi_{II}(x)$ , y  $\psi_{III}(x)$ .

Podemos comprobar fácilmente (sustituyendo en la ecuación original y diferenciando) que en las regiones I y III, las soluciones deben tener las siguientes formas generales:

$$\psi_I(x) = Ae^{+ikx} + Be^{-ikx} \quad 7.68$$

$$\psi_{III}(x) = Fe^{+ikx} + Ge^{-ikx} \quad 7.69$$

donde  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$  es un número de onda y el exponente complejo denota las oscilaciones,

$$e^{\pm ikx} = \cos kx \pm i \sin kx. \quad 7.70$$

Las constantes  $A$ ,  $B$ ,  $F$  y  $G$  en la [Ecuación 7.68](#) y la [Ecuación 7.69](#) pueden ser complejas. Estas soluciones se ilustran en la [Figura 7.16](#). En la región I, hay dos ondas: una incidente (que se mueve hacia la derecha) y otra reflejada (que se mueve hacia la izquierda), por lo que ninguna de las constantes  $A$  y  $B$  en la [Ecuación 7.68](#) puede desaparecer. En la región III, solo hay una onda (que se mueve hacia la derecha), que es la onda transmitida, por lo que la constante  $G$  debe ser cero en la [Ecuación 7.69](#),  $G = 0$ . Podemos escribir explícitamente que la onda incidente es  $\psi_{in}(x) = Ae^{+ikx}$  y que la onda reflejada es  $\psi_{ref}(x) = Be^{-ikx}$ , y que la onda transmitida es  $\psi_{tra}(x) = Fe^{+ikx}$ . La amplitud de la onda incidente es

$$|\psi_{in}(x)|^2 = \psi_{in}^*(x)\psi_{in}(x) = (Ae^{+ikx})^* Ae^{+ikx} = A^* e^{-ikx} Ae^{+ikx} = A^* A = |A|^2.$$

Del mismo modo, la amplitud de la onda reflejada es  $|\psi_{ref}(x)|^2 = |B|^2$  y la amplitud de la onda transmitida es  $|\psi_{tra}(x)|^2 = |F|^2$ . Sabemos por la teoría de las ondas que el cuadrado de la amplitud de la onda es directamente proporcional a la intensidad de esta. Si queremos saber qué parte de la onda incidente atraviesa la barrera, tenemos que calcular el cuadrado de la amplitud de la onda transmitida. La **probabilidad de transmisión** o **probabilidad de tunelización** es la relación entre la intensidad transmitida ( $|F|^2$ ) y la intensidad del incidente ( $|A|^2$ ), escrita como

$$T(L, E) = \frac{|\psi_{tra}(x)|^2}{|\psi_{in}(x)|^2} = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \left| \frac{F}{A} \right|^2 \quad 7.71$$

donde  $L$  es el ancho de la barrera y  $E$  es la energía total de la partícula. Es la probabilidad de que una partícula individual del haz incidente atraviese la barrera de potencial. Intuitivamente, entendemos que esta probabilidad debe depender de la altura de la barrera  $U_0$ .

En la región II, los términos de la ecuación para la [Ecuación 7.62](#) pueden reordenarse para obtener

$$\frac{d^2 \psi_{II}(x)}{dx^2} = \beta^2 \psi_{II}(x) \quad 7.72$$

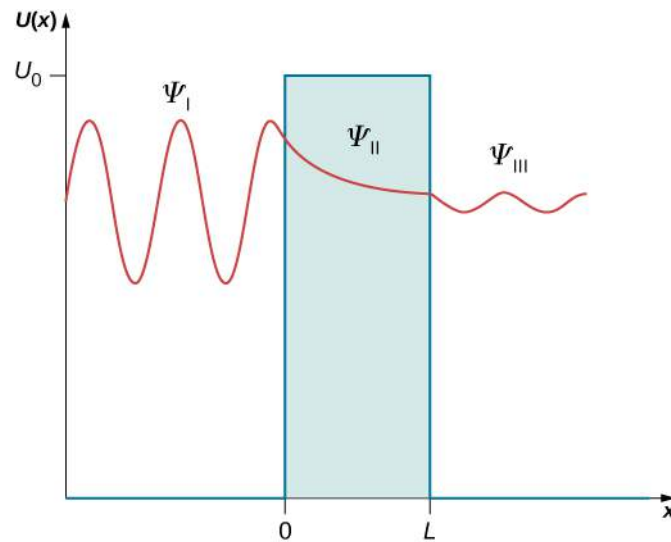
donde  $\beta^2$  es positivo porque  $U_0 > E$  y el parámetro  $\beta$  es un número real,

$$\beta^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E). \quad 7.73$$

La solución general de la [Ecuación 7.72](#) no es oscilatoria (a diferencia de las otras regiones) y tiene la forma de exponenciales que describen una atenuación gradual de  $\psi_{II}(x)$ ,

$$\psi_{II}(x) = Ce^{-\beta x} + De^{+\beta x}. \quad 7.74$$

Los dos tipos de soluciones en las tres regiones se ilustran en la [Figura 7.17](#).



**FIGURA 7.17** Tres tipos de soluciones a la ecuación estacionaria de Schrödinger para el problema de túnel cuántico: Comportamiento oscilatorio en las regiones I y III, donde una partícula cuántica se mueve libremente, y comportamiento de decaimiento exponencial en la región II (la región de la barrera), donde la partícula se mueve en el potencial  $U_0$ .

Ahora utilizamos las condiciones de frontera para encontrar ecuaciones para las constantes desconocidas. La [Ecuación 7.68](#) y la [Ecuación 7.74](#) se sustituyen en la [Ecuación 7.64](#) para obtener

$$A + B = C + D. \quad 7.75$$

La [Ecuación 7.74](#) y la [Ecuación 7.69](#) se sustituyen en la [Ecuación 7.65](#) para obtener

$$Ce^{-\beta L} + De^{+\beta L} = Fe^{+ikL}. \quad 7.76$$

Del mismo modo, sustituimos la [Ecuación 7.68](#) y la [Ecuación 7.74](#) en la [Ecuación 7.66](#), diferenciamos y obtenemos

$$-ik(A - B) = \beta(D - C). \quad 7.77$$

Del mismo modo, la condición de frontera de la [Ecuación 7.67](#) dice explícitamente

$$\beta(De^{+\beta L} - Ce^{-\beta L}) = -ikFe^{+ikL}. \quad 7.78$$

Ahora tenemos cuatro ecuaciones para cinco constantes desconocidas. Sin embargo, como la cantidad que buscamos es el coeficiente de transmisión, definido en la [Ecuación 7.71](#) por la fracción  $F/A$ , el número de ecuaciones es exactamente el correcto, ya que al dividir cada una de las ecuaciones anteriores por  $A$ , acabamos obteniendo solo cuatro fracciones desconocidas:  $B/A$ ,  $C/A$ ,  $D/A$ , y  $F/A$ , tres de los cuales pueden eliminarse para hallar  $F/A$ . El álgebra real que lleva a la expresión de  $F/A$  es bastante larga, pero puede hacerse manualmente o con la ayuda de un programa informático. El resultado final es

$$\frac{F}{A} = \frac{e^{-ikL}}{\cosh(\beta L) + i(\gamma/2)\sinh(\beta L)}. \quad 7.79$$

Al derivar [Ecuación 7.79](#), para evitar el desorden, utilizamos las sustituciones  $\gamma \equiv \beta/k - k/\beta$ ,

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \text{ y } \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Sustituimos la [Ecuación 7.79](#) en la [Ecuación 7.71](#) y obtenemos la expresión exacta del coeficiente de transmisión para la barrera,

$$T(L, E) = \left(\frac{F}{A}\right)^* \frac{F}{A} = \frac{e^{+ikL}}{\cosh(\beta L) - i(\gamma/2)\sinh(\beta L)} \cdot \frac{e^{-ikL}}{\cosh(\beta L) + i(\gamma/2)\sinh(\beta L)}$$



o

$$T(L, E) = \frac{1}{\cosh^2(\beta L) + (\gamma/2)^2 \sinh^2(\beta L)} \quad 7.80$$

donde

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{1 - E/U_0}{E/U_0} + \frac{E/U_0}{1 - E/U_0} - 2 \right).$$

En una barrera ancha y alta con una transmisión deficiente, la [Ecuación 7.80](#) puede aproximarse por

$$T(L, E) = 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0}\right) e^{-2\beta L}. \quad 7.81$$

Tanto si se trata de la expresión exacta en la [Ecuación 7.80](#) como de la expresión aproximada en la [Ecuación 7.81](#), vemos que el efecto túnel depende muy fuertemente del ancho  $L$  de la barrera de potencial. En el laboratorio, podemos ajustar tanto la altura potencial  $U_0$  y el ancho  $L$  para diseñar nanodispositivos con coeficientes de transmisión deseables.



## EJEMPLO 7.12

### Coefficiente de transmisión

Dos nanoalambres de cobre están aislados por una nanocapa de óxido de cobre que proporciona una barrera de potencial de 10,0 eV. Estime la probabilidad de tunelización entre los nanoalambres por electrones de 7,00 eV a través de una capa de óxido de 5,00 nm de espesor. ¿Y si el grosor de la capa se redujera a solo 1,00 nm? ¿Qué pasaría si la energía de los electrones se aumentara a 9,00 eV?

### Estrategia

Tratando la capa de óxido aislante como una barrera de potencial de altura finita, utilizamos la [Ecuación 7.81](#). Identificamos  $U_0 = 10,0$  eV,  $E_1 = 7,00$  eV,  $E_2 = 9,00$  eV,  $L_1 = 5,00$  nm, y  $L_2 = 1,00$  nm. Utilizamos la [Ecuación 7.73](#) para calcular el exponente. Además, necesitamos la masa en reposo del electrón  $m = 511$  keV/ $c^2$  y la constante de Planck  $\hbar = 0,1973$  keV · nm/ $c$ . Es típico que este tipo de estimaciones se refieran a cantidades muy pequeñas que a menudo no son adecuadas para las calculadoras de mano. Para hacer una estimación correcta de los órdenes, hacemos la conversión  $e^y = 10^{y/\ln 10}$ .

### Solución

Constantes:

$$\frac{2m}{\hbar^2} = \frac{2(511 \text{ keV}/c^2)}{(0,1973 \text{ keV} \cdot \text{nm}/c)^2} = 26,254 \frac{1}{\text{keV} \cdot (\text{nm})^2},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E)} = \sqrt{26,254 \frac{(10,0 \text{ eV} - E)}{\text{keV} \cdot (\text{nm})^2}} = \sqrt{26,254(10,0 \text{ eV} - E)/\text{eV}} \frac{1}{\text{nm}}.$$

Para un electrón de baja energía con  $E_1 = 7,00$  eV:

$$\beta_1 = \sqrt{26,254(10,00 \text{ eV} - E_1)/\text{eV}} \frac{1}{\text{nm}} = \sqrt{26,254(10,00 - 7,00)} \frac{1}{\text{nm}} = \frac{8,875}{\text{nm}},$$

$$T(L, E_1) = 16 \frac{E_1}{U_0} \left(1 - \frac{E_1}{U_0}\right) e^{-2\beta_1 L} = 16 \frac{7}{10} \left(1 - \frac{7}{10}\right) e^{-17,75 L/\text{nm}} = 3,36 e^{-17,75 L/\text{nm}}.$$

Para un electrón de mayor energía con  $E_2 = 9,00$  eV:

$$\beta_2 = \sqrt{26,254(10,00 \text{ eV} - E_2)/\text{eV}} \frac{1}{\text{nm}} = \sqrt{26,254(10,00 - 9,00)} \frac{1}{\text{nm}} = \frac{5,124}{\text{nm}},$$

$$T(L, E_2) = 16 \frac{E_2}{U_0} \left(1 - \frac{E_2}{U_0}\right) e^{-2\beta_2 L} = 16 \frac{9}{10} \left(1 - \frac{9}{10}\right) e^{-10,25 L/\text{nm}} = 1,44e^{-10,25 L/\text{nm}}.$$

Para una barrera ancha con  $L_1 = 5,00 \text{ nm}$ :

$$T(L_1, E_1) = 3,36e^{-17,75 L_1/\text{nm}} = 3,36e^{-17,75 \cdot 5,00 \text{ nm/nm}} = 3,36e^{-88} = 3,36(6,2 \times 10^{-39}) = 2,1\% \times 10^{-36},$$

$$T(L_1, E_2) = 1,44e^{-10,25 L_1/\text{nm}} = 1,44e^{-10,25 \cdot 5,00 \text{ nm/nm}} = 1,44e^{-51,2} = 1,44(5,81 \times 10^{-12}) = 8,36\% \times 10^{-25}.$$

Para una barrera más estrecha con  $L_2 = 1,00 \text{ nm}$ :

$$T(L_2, E_1) = 3,36e^{-17,75 L_2/\text{nm}} = 3,36e^{-17,75 \cdot 1,00 \text{ nm/nm}} = 3,36e^{-17,75} = 3,36(5,1 \times 10^{-7}) = 1,7\% \times 10^{-4},$$

$$T(L_2, E_2) = 1,44e^{-10,25 L_2/\text{nm}} = 1,44e^{-10,25 \cdot 1,00 \text{ nm/nm}} = 1,44e^{-10,25} = 1,44(3,53 \times 10^{-5}) = 5,09\% \times 10^{-7}.$$

### Importancia

De estas estimaciones se desprende que la probabilidad de tunelización se ve más afectada por el ancho de la barrera de potencial que por la energía de una partícula incidente. En las tecnologías actuales, podemos manipular átomos individuales en las superficies metálicas para crear barreras de potencial que son fracciones de un nanómetro, dando lugar a corrientes de túnel medibles. Una de las muchas aplicaciones de esta tecnología es el microscopio de efecto túnel (STM), del que hablaremos más adelante en esta sección.

### ☑️ COMPRUEBE LO APRENDIDO 7.10

Un protón con energía cinética de 1,00 eV incide sobre una barrera de potencial cuadrada con altura de 10,00 eV. Para que el protón tenga la misma probabilidad de transmisión que un electrón de la misma energía, ¿cuál debe ser el ancho de la barrera en relación con la anchura de la barrera que encuentra un electrón?

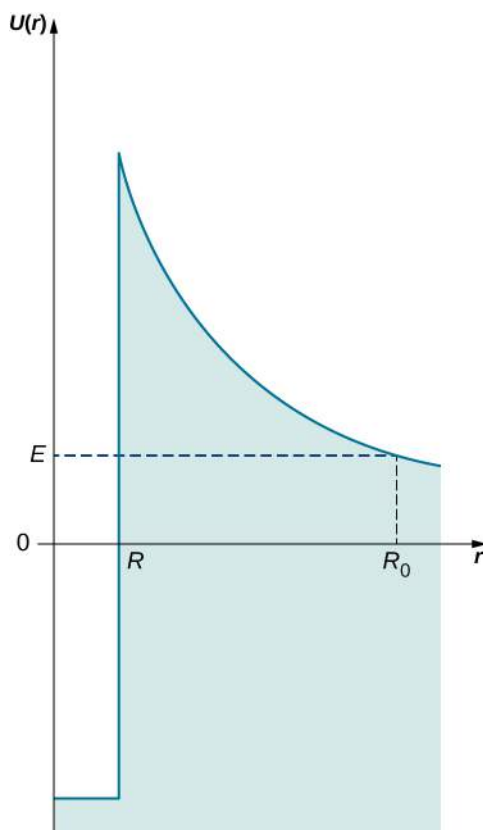
### Decaimiento radiactivo

En 1928, Gamow identificó el efecto túnel como el mecanismo responsable del decaimiento radiactivo de los núcleos atómicos. Observó que algunos isótopos de torio, uranio y bismuto se desintegran emitiendo partículas  $\alpha$  (que son átomos de helio doblemente ionizados o, simplemente, núcleos de helio). En el proceso de emisión de una partícula  $\alpha$ , el núcleo original se transforma en un nuevo núcleo que tiene dos neutrones y dos protones menos que el núcleo original. Las partículas  $\alpha$  emitidas por un isótopo tienen aproximadamente las mismas energías cinéticas. Cuando observamos las variaciones de estas energías entre los isótopos de varios elementos, la energía cinética más baja es de unos 4 MeV y la más alta de unos 9 MeV, por lo que estas energías son del mismo orden de magnitud. Aquí es donde terminan las similitudes entre los distintos isótopos.

Cuando inspeccionamos las vidas medias (una vida media es el tiempo en el que una muestra radiactiva pierde la mitad de sus núcleos debido al decaimiento), los diferentes isótopos difieren ampliamente. Por ejemplo, la vida media del polonio-214 es 160  $\mu\text{s}$  y la vida media del uranio es de 4.500 millones de años. Gamow explicó esta variación considerando un modelo de "caja esférica" del núcleo, donde las partículas  $\alpha$  pueden rebotar entre las paredes como partículas libres. El confinamiento lo proporciona un fuerte potencial nuclear en una pared esférica de la caja. Sin embargo, el grosor de esta pared no es infinito sino finito, por lo que, en principio, una partícula nuclear tiene la posibilidad de escapar de este confinamiento nuclear. En la pared interior de la barrera de confinamiento hay un alto potencial nuclear que mantiene a la partícula  $\alpha$  en un pequeño confinamiento. Pero cuando una partícula  $\alpha$  sale al otro lado de esta pared, está sujeta a la repulsión electrostática de Coulomb y se aleja del núcleo. Esta idea se ilustra en la [Figura 7.18](#). El ancho  $L$  de la barrera de potencial que separa una partícula  $\alpha$  del mundo exterior depende de la energía cinética  $E$  de la partícula. Este ancho es la distancia entre el punto marcado por el radio nuclear  $R$  y el punto  $R_0$  donde una partícula  $\alpha$  emerge al otro lado de la barrera,  $L = R_0 - R$ . En la distancia  $R_0$ , su energía cinética debe ser al menos igual a la energía electrostática de repulsión,  $E = (4\pi\epsilon_0)^{-1} Ze^2/R_0$  (donde  $+Ze$  es la carga del núcleo). De esta manera podemos estimar el ancho de la barrera nuclear,

$$L = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z}{E} - R.$$

De esta estimación se desprende que cuanto mayor sea la energía de la partícula  $\alpha$ , más estrecho es el ancho de la barrera que debe atravesar. También sabemos que el ancho de la barrera de potencial es el parámetro más importante en la probabilidad de tunelización. Por lo tanto, la energía de las partículas  $\alpha$  tienen una buena oportunidad de escapar del núcleo y, para tales núcleos, la vida media de desintegración nuclear es corta. Observe que este proceso es altamente no lineal, lo que significa que un pequeño aumento de la energía de la partícula  $\alpha$  tiene un efecto de aumento desproporcionado en la probabilidad de tunelización y, en consecuencia, en el acortamiento de la vida media. Esto explica por qué la vida media del polonio, que emite partículas  $\alpha$  de 8-MeV es de solo cientos de milisegundos y la vida media del uranio que emite partículas  $\alpha$  de 4-MeV es de miles de millones de años.

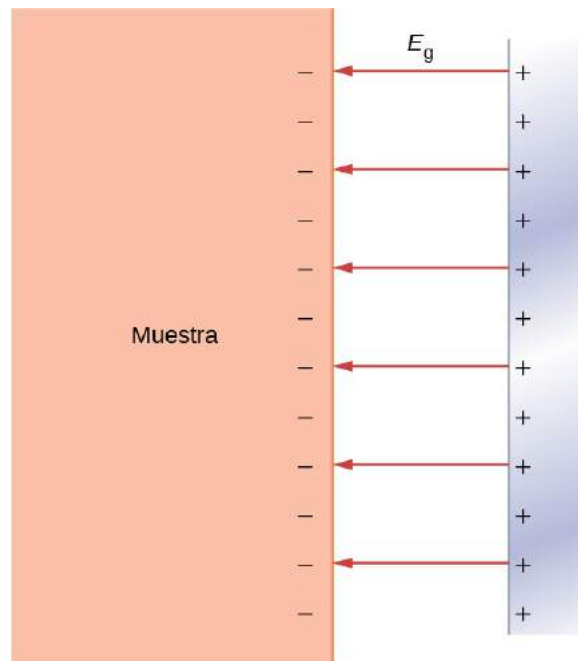


**FIGURA 7.18** La barrera de energía potencial de una partícula  $\alpha$  unida en el núcleo: para escapar del núcleo, una partícula  $\alpha$  con energía  $E$  debe atravesar la barrera desde la distancia  $R$  hasta la distancia  $R_0$  lejos del centro.

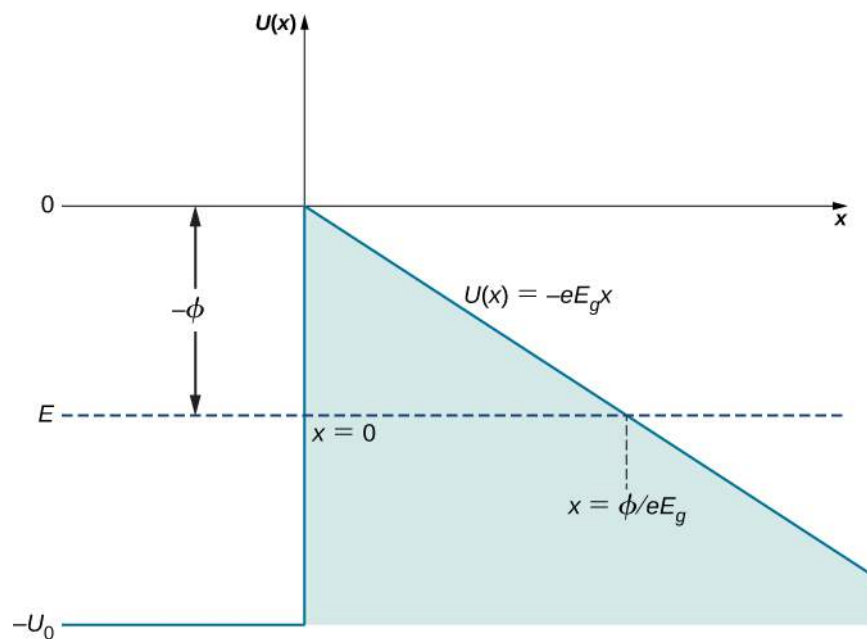
### Emisión de campo

La **emisión de campo** es un proceso de emisión de electrones desde superficies conductoras debido a un fuerte campo eléctrico externo que se aplica en la dirección normal a la superficie (Figura 7.19). Como sabemos por nuestro estudio de los campos eléctricos en capítulos anteriores, un campo eléctrico externo aplicado hace que los electrones de un conductor se desplacen hacia su superficie y permanezcan allí siempre que el campo externo presente no sea excesivamente fuerte. En esta situación, tenemos un potencial eléctrico constante en todo el interior del conductor, incluida su superficie. En el lenguaje de la energía potencial, decimos que un electrón dentro del conductor tiene una energía potencial constante  $U(x) = -U_0$  (aquí, la  $x$  significa dentro del conductor). En la situación representada en la Figura 7.19, donde el campo eléctrico externo es uniforme y tiene magnitud  $E_g$ , si un electrón se encuentra fuera del conductor a una distancia  $x$  de su superficie, su energía potencial tendría que ser  $U(x) = -eE_g x$  (aquí, la  $x$  denota la distancia a la superficie). Tomando el origen en la superficie, para que  $x = 0$  sea la ubicación de la superficie, podemos representar la energía potencial de los electrones de conducción en un metal como la barrera de energía

potencial mostrada en la [Figura 7.20](#). En ausencia del campo externo, la energía potencial se convierte en una barrera de paso definida por  $U(x \leq 0) = -U_0$  y por  $U(x > 0) = 0$ .



**FIGURA 7.19** Un campo eléctrico externo de dirección normal en la superficie de un conductor: en un campo fuerte, los electrones de una superficie conductora pueden desprenderse de ella y acelerar contra el campo eléctrico externo alejándose de la superficie.



**FIGURA 7.20** La barrera de energía potencial en la superficie de un conductor metálico en presencia de un campo eléctrico uniforme externo  $E_g$  normal a la superficie: se convierte en una barrera de función escalonada cuando se elimina el campo externo. La función de trabajo del metal se indica con  $\phi$ .

Cuando un campo eléctrico externo es fuerte, los electrones de conducción en la superficie pueden desprenderse de ella y acelerar a lo largo de las líneas de campo eléctrico en una dirección antiparalela al campo externo, alejándose de la superficie. En resumen, los electrones de conducción pueden escapar de la superficie. La emisión de campo puede entenderse como un efecto túnel de electrones de conducción a través

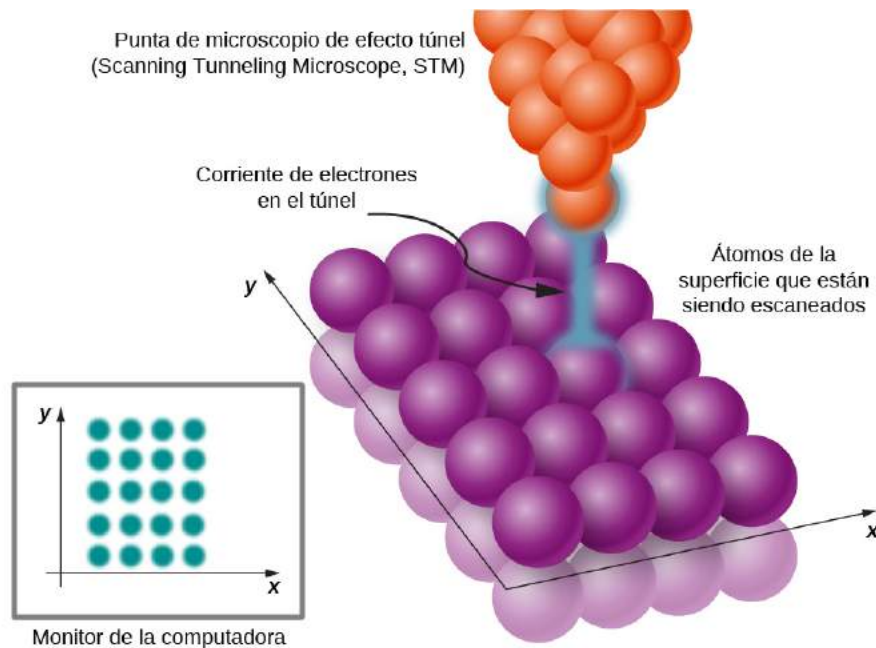
de la barrera de potencial en la superficie del conductor. El principio físico que se aplica aquí es muy similar al mecanismo de emisión  $\alpha$  de un núcleo radiactivo.

Supongamos que un electrón de conducción tiene una energía cinética  $E$  (la energía cinética promedio de un electrón en un metal es la función de trabajo  $\phi$  para el metal y puede ser medido, como se discute en el efecto fotoeléctrico en [Fotones y ondas de materia](#)), y un campo eléctrico externo puede ser aproximado localmente por un campo eléctrico uniforme de fuerza  $E_g$ . El ancho  $L$  de la barrera de potencial que debe atravesar el electrón es la distancia desde la superficie del conductor hasta el punto fuera de la superficie donde su energía cinética coincide con el valor de su energía potencial en el campo externo. En la [Figura 7.20](#), esta distancia se mide a lo largo de la línea horizontal discontinua  $U(x) = E$  de  $x = 0$  a la intersección con  $U(x) = -eE_g x$ , por lo que el ancho de la barrera es

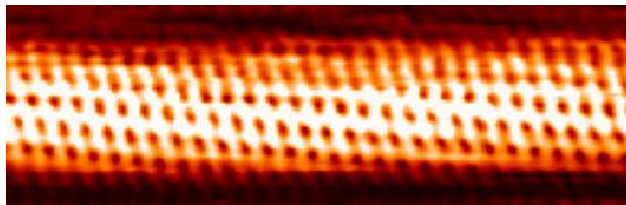
$$L = \frac{e^{-1} E}{E_g} = \frac{e^{-1} \phi}{E_g}.$$

Vemos que  $L$  es inversamente proporcional a la fuerza  $E_g$  de un campo externo. Cuando aumentamos la intensidad del campo externo, la barrera de potencial fuera del conductor se hace más pronunciada y su ancho disminuye para un electrón con una energía cinética determinada. A su vez, la probabilidad de que un electrón atraviese la barrera (superficie del conductor) se hace exponencialmente mayor. Los electrones que emergen al otro lado de esta barrera forman una corriente (corriente de electrones en túnel) que puede detectarse por encima de la superficie. La corriente de electrones en túnel es proporcional a la probabilidad de tunelización. La probabilidad de tunelización depende de forma no lineal del ancho  $L$  de la barrera, y  $L$  puede modificarse ajustando  $E_g$ . Por lo tanto, la corriente de electrones en túnel puede ajustarse mediante la intensidad de un campo eléctrico externo en la superficie. Cuando la fuerza de un campo eléctrico externo es constante, la corriente de electrones en túnel tiene diferentes valores a diferentes elevaciones  $L$  sobre la superficie.

El fenómeno del efecto túnel en superficies metálicas, que acabamos de describir, es el principio físico en el que se basa el funcionamiento del **microscopio de efecto de túnel (STM)**, inventado en 1981 por Gerd Binnig y Heinrich Rohrer. El dispositivo STM consta de una punta de exploración (una aguja, normalmente de tungsteno, platino-iridio u oro); un dispositivo piezoeléctrico que controla la elevación de la punta en un rango típico de 0,4 a 0,7 nm por encima de la superficie a explorar; algún dispositivo que controla el movimiento de la punta a lo largo de la superficie; y un ordenador para mostrar las imágenes. Mientras la muestra se mantiene con una polarización por voltaje adecuada, la punta de exploración se mueve a lo largo de la superficie ([Figura 7.21](#)), y la corriente de electrones en túnel entre la punta y la superficie se registra en cada posición. La cantidad de corriente depende de la probabilidad de que los electrones hagan un túnel desde la superficie hasta la punta, que, a su vez, depende de la elevación de la punta sobre la superficie. Por lo tanto, en cada posición de la punta, la distancia de esta a la superficie se mide determinando cuántos electrones hacen un túnel desde la superficie a la punta. Este método puede ofrecer una resolución sin precedentes de unos 0,001 nm, lo que supone un 1 % del diámetro promedio de un átomo. De este modo, podemos ver átomos individuales en la superficie, como en la imagen de un nanotubo de carbono en la [Figura 7.22](#).



**FIGURA 7.21** En el STM, una superficie con un potencial constante se escanea con una punta estrecha que se mueve a lo largo de la superficie. Cuando la punta del STM se acerca a los átomos de la superficie, los electrones pueden hacer un túnel desde la superficie hasta la punta. Esta corriente de electrones en túnel se controla continuamente mientras la punta está en movimiento. La cantidad de corriente en la ubicación  $(x,y)$  da información sobre la elevación de la punta sobre la superficie en esta ubicación. De este modo, se crea un mapa topográfico detallado de la superficie que se muestra en el monitor de la computadora.



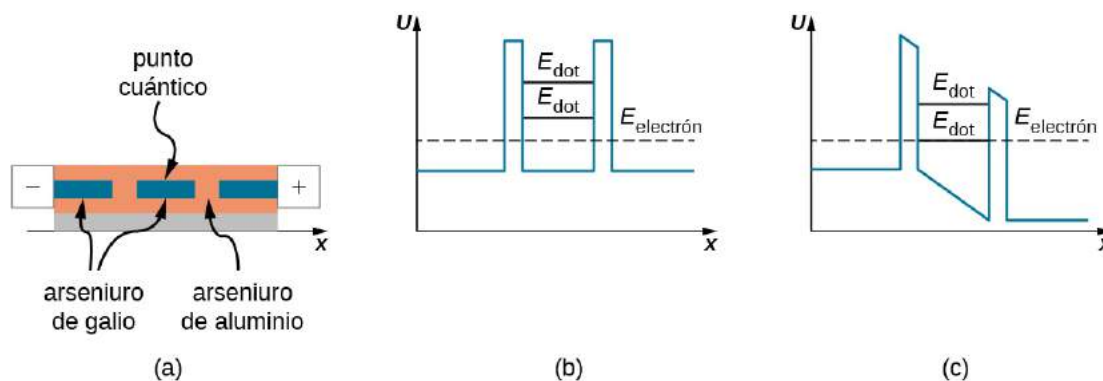
**FIGURA 7.22** Imagen STM de un nanotubo de carbono: La resolución a escala atómica nos permite ver átomos individuales en la superficie. Las imágenes STM están en escala de grises, y se les añade coloración para resaltar los detalles al ojo humano. (Crédito: Taner Yildirim, Instituto Nacional de Estándares y Tecnología (National Institute of Standards and Technology, NIST))

### Efecto túnel resonante

El efecto túnel tiene numerosas aplicaciones en dispositivos semiconductores, como componentes de circuitos electrónicos o circuitos integrados diseñados a nanoescala; de ahí el término "**nanotecnología**". Por ejemplo, un diodo (un elemento de circuito eléctrico que hace que una corriente de electrones en una dirección sea diferente de la corriente en la dirección opuesta, cuando se invierte la polaridad del voltaje de polarización) puede realizarse mediante una unión en túnel entre dos tipos diferentes de materiales semiconductores. En un **diodo de túnel** de este tipo, los electrones atraviesan una única barrera de potencial en un contacto entre dos semiconductores diferentes. En la unión, la corriente de electrones en túnel cambia de forma no lineal con la diferencia de potencial aplicada a través de la unión y puede disminuir rápidamente al aumentar el voltaje de polarización. Esto es diferente al comportamiento según la ley de Ohm que conocemos en los circuitos domésticos. Este tipo de comportamiento rápido (causado por el efecto túnel) es deseable en los dispositivos electrónicos de alta velocidad.

Otro tipo de nanodispositivo electrónico utiliza el **efecto túnel resonante** de electrones a través de las barreras de potencial que se producen en los puntos cuánticos. Un **punto cuántico** es una pequeña región de un nanocristal semiconductor que se cultiva, por ejemplo, en un cristal de silicio o de arseniuro de aluminio. La

Figura 7.23(a) muestra un punto cuántico de arseniuro de galio incrustado en una oblea de arseniuro de aluminio. La región de puntos cuánticos actúa como un pozo de potencial de altura finita (mostrado en la Figura 7.23(b)) que tiene dos barreras de potencial de altura finita en los límites de los puntos. Del mismo modo, al igual que para una partícula cuántica en una caja (es decir, un pozo de potencial infinito), las energías inferiores de una partícula cuántica atrapada en un pozo de potencial de altura finita están cuantizadas. La diferencia entre los potenciales de la caja y del pozo es que una partícula cuántica en una caja tiene un número infinito de energías cuantizadas y está atrapada en la caja indefinidamente, mientras que una partícula cuántica atrapada en un potencial de pozo tiene un número finito de niveles de energía cuantizados y puede hacer un túnel a través de las barreras de potencial en los límites del pozo hacia el exterior del mismo. Así, un punto cuántico de arseniuro de galio asentado en arseniuro de aluminio es un pozo de potencial en el que se cuantizan las energías bajas de un electrón, indicadas como  $E_{\text{punto}}$  en la parte (b) de la figura. Cuando la energía  $E_{\text{electrón}}$  de un electrón en la región exterior del punto no coincide con su energía  $E_{\text{punto}}$  que tendría en el punto, el electrón no hace un túnel a través de la región del punto y no hay corriente a través de tal elemento del circuito, incluso si se mantuviera con una diferencia de voltaje eléctrico (polarización). Sin embargo, cuando esta polarización de voltaje se cambia de tal manera que una de las barreras se baja, de modo que  $E_{\text{punto}}$  y  $E_{\text{electrón}}$  se alinean, como se ve en la parte (c) de la figura, una corriente de electrones fluye a través del punto. Cuando se aumenta el voltaje de polarización, esta alineación se pierde y la corriente deja de fluir. Cuando el voltaje de polarización se incrementa más, el túnel de electrones se vuelve improbable hasta que aquel alcanza un valor en el que la energía del electrón exterior coincide con el siguiente nivel de energía del electrón en el punto. La palabra "resonancia" en el nombre del dispositivo significa que la corriente de electrones en túnel solo se produce cuando se ajusta un nivel de energía seleccionado mediante la sintonización de un voltaje de polarización aplicado, como en el mecanismo de funcionamiento del **diodo túnel resonante** que acabamos de describir. Los diodos túnel resonante se utilizan como nanoconmutadores ultrarrápidos.



**FIGURA 7.23** Diodo túnel resonante: (a) Un punto cuántico de arseniuro de galio incrustado en arseniuro de aluminio. (b) Pozo de potencial formado por dos barreras de potencial de un punto cuántico sin voltaje de polarización. Las energías de los electrones  $E_{\text{electrón}}$  en el arseniuro de aluminio no están alineadas con sus niveles de energía  $E_{\text{punto}}$  en el punto cuántico, por lo que los electrones no hacen un túnel a través del punto. (c) Pozo de potencial del punto con un voltaje de polaridad a través del dispositivo. Una diferencia de voltaje convenientemente ajustada distorsiona el pozo de modo que los niveles de energía de los electrones en el punto se alinean con sus energías en el arseniuro de aluminio, lo que les permite atravesar el punto.



## Revisión Del Capítulo

### Términos Clave

- barrera de potencial** función de potencial que sube y baja con valores crecientes de posición.
- colapso de la función de onda** equivalente a la reducción de estado.
- condición de normalización** requiere que la densidad de probabilidad integrada en todo el espacio físico dé como resultado el número uno.
- densidad de probabilidad** cuadrado de la función de onda de la partícula.
- diodo de túnel** unión a través de un túnel de electrones entre dos semiconductores diferentes.
- diodo túnel resonante** punto cuántico con un voltaje de polarización aplicada a través de él.
- ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo** ecuación en el espacio y el tiempo que nos permite determinar las funciones de onda de una partícula cuántica
- ecuación de Schrödinger independiente del tiempo** ecuación en el espacio que permite determinar las funciones de onda de una partícula cuántica; esta función de onda debe multiplicarse por un factor de modulación del tiempo para obtener la función de onda dependiente del tiempo.
- efecto túnel** fenómeno en el que las partículas penetran a través de una barrera de energía potencial con una altura mayor que la energía total de las partículas.
- emisión de campo** emisión de electrones desde la superficie del conductor cuando se aplica un fuerte campo eléctrico externo en dirección normal a la superficie del conductor.
- energía del estado fundamental** estado de energía más bajo del espectro energético.
- estado de onda estacionaria** estado estacionario en el que las partes real e imaginaria de  $\Psi(x, t)$  oscilan hacia arriba y hacia abajo como una onda estacionaria (a menudo modelada con funciones seno y coseno).
- estado estacionario** estado para el que la función de densidad de probabilidad,  $|\Psi(x, t)|^2$ , no varía en el tiempo.
- factor de modulación del tiempo** factor  $e^{-i\omega t}$  que multiplica la función de onda independiente del tiempo cuando la energía potencial de la partícula es independiente del tiempo.
- función antisimétrica** función impar
- función compleja** función que contiene partes reales e imaginarias.
- función de onda** función que representa el estado cuántico de una partícula (sistema cuántico).
- función impar** en una dimensión, una función antisimétrica con el origen del sistema de coordenadas.
- función par** en una dimensión, una función simétrica con el origen del sistema de coordenadas.
- interpretación de Born** afirma que el cuadrado de una función de onda es la densidad de probabilidad.
- interpretación de Copenhague** afirma que cuando un observador *no está* mirando o cuando no se está realizando una medición, la partícula tiene muchos valores de cantidades medibles, como la posición.
- microscopio de efecto de túnel (STM)** dispositivo que utiliza el fenómeno de túnel cuántico en superficies metálicas para obtener imágenes de estructuras a nanoescala.
- nanotecnología** tecnología que se basa en la manipulación de nanoestructuras como moléculas o átomos individuales para producir nanodispositivos como circuitos integrados.
- niveles de energía** estados de energía definida, a menudo representados por líneas horizontales en un diagrama de "escalera" energética.
- número cuántico de energía** índice que etiqueta los estados energéticos permitidos.
- número cuántico principal** número cuántico de energía
- operador de momento** operador que corresponde al momento de una partícula.
- operador de posición** operador que corresponde a la posición de una partícula.
- paquete de ondas** superposición de muchas ondas de materia planas que pueden utilizarse para representar una partícula localizada.
- pozo potencial infinito** función de potencial que es cero en un rango fijo e infinitamente más allá de este rango.
- principio de correspondencia** en el límite de grandes energías, las predicciones de la mecánica cuántica coinciden con las de la mecánica clásica.
- principio de incertidumbre de Heisenberg** pone límites a lo que puede conocerse a partir de una medición simultánea de la posición y el momento; afirma que si la incertidumbre sobre la posición es pequeña, la incertidumbre sobre el momento es grande, y viceversa.
- principio de incertidumbre energía-tiempo**

relación energía-tiempo para las incertidumbres en las mediciones simultáneas de la energía de un estado cuántico y de su tiempo de vida.

**probabilidad de transmisión** también llamada probabilidad de tunelización, la probabilidad de que una partícula atraviese una barrera de potencial.

**probabilidad de tunelización** también llamada probabilidad de transmisión, la probabilidad de que una partícula atraviese una barrera de potencial.

**punto cuántico** pequeña región de un nanocristal semiconductor incrustado en otro nanocristal semiconductor, que actúa como un pozo de

potencial para los electrones.

**reducción de estado** proceso hipotético en el que una partícula observada o detectada "salta" a un estado definido, a menudo descrito en términos de colapso de la función de onda de la partícula.

**túnel resonante** túnel de electrones a través de un pozo de potencial de altura finita que se produce solo cuando las energías de los electrones coinciden con un nivel de energía en el pozo, se produce en los puntos cuánticos.

**valor esperado** valor promedio de la cantidad física suponiendo un gran número de partículas con la misma función de onda

## Ecuaciones Clave

Condición de normalización en una dimensión

$$P(x = -\infty, +\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1$$

Probabilidad de encontrar una partícula en un intervalo estrecho de posición en una dimensión ( $x, x + dx$ )

$$P(x, x + dx) = \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) dx$$

Valor esperado de la posición en una dimensión

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) x \Psi(x, t) dx$$

Principio de incertidumbre de posición-momento de Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Principio de incertidumbre energía-tiempo de Heisenberg

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x, t) \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$$

Forma general de la función de onda para un potencial independiente del tiempo en una dimensión

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-i\omega t}$$

Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + U(x) \psi(x) = E\psi(x)$$

Ecuación de Schrödinger (partícula libre)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = E\psi(x)$$

Energías permitidas (partícula en caja de longitud $L$ )	$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, n = 1, 2, 3, \dots$
Estados estacionarios (partícula en una caja de longitud $L$ )	$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}, n = 1, 2, 3, \dots$
Función potencial-energía de un oscilador armónico	$U(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$
Ecuación de Schrödinger (oscilador armónico)	$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x)$
El espectro energético	$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, n = 0, 1, 2, 3, \dots$
Funciones de onda de la energía	$\psi_n(x) = N_n e^{-\beta^2 x^2/2} H_n(\beta x), n = 0, 1, 2, 3, \dots$
Barrera de potencial	$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{cuando } x < 0 \\ U_0, & \text{cuando } 0 \leq x \leq L \\ 0, & \text{cuando } x > L \end{cases}$
Definición del coeficiente de transmisión	$T(L, E) = \frac{ \psi_{\text{tra}}(x) ^2}{ \psi_{\text{in}}(x) ^2}$
Un parámetro del coeficiente de transmisión	$\beta^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - E)$
Coficiente de transmisión, exacto	$T(L, E) = \frac{1}{\cosh^2 \beta L + (\gamma/2)^2 \sinh^2 \beta L}$
Coficiente de transmisión, aproximado	$T(L, E) = 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0}\right) e^{-2\beta L}$

## Resumen

### 7.1 Funciones de onda

- En la mecánica cuántica, el estado de un sistema físico se representa mediante una función de onda.
- En la interpretación de Born, el cuadrado de la función de onda de la partícula representa la densidad de probabilidad de encontrar la partícula alrededor de un lugar específico en el espacio.
- Las funciones de onda deben normalizarse primero antes de utilizarlas para hacer predicciones.
- El valor esperado es el valor promedio de una cantidad que requiere una función de onda y una integración.

### 7.2 El principio de incertidumbre de Heisenberg

- El principio de incertidumbre de Heisenberg establece que es imposible medir simultáneamente los componentes  $x$  de la posición y del momento de una partícula con una alta precisión arbitraria. El producto de las incertidumbres experimentales es siempre mayor o igual a  $\hbar/2$ .
- Las limitaciones de este principio no tienen nada que ver con la calidad del aparato experimental, sino que se originan en la naturaleza ondulatoria de la materia.
- El principio de incertidumbre energía-tiempo expresa la observación experimental de que un estado cuántico que solo existe durante un corto período de tiempo no puede tener una energía

definida.

### 7.3 La ecuación de Schrödinger

- La ecuación de Schrödinger es la ecuación fundamental de la mecánica cuántica de ondas. Nos permite hacer predicciones sobre las funciones de onda.
- Cuando una partícula se mueve en un potencial independiente del tiempo, la solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo es producto de una función de onda independiente del tiempo y de un factor de modulación del tiempo.
- La ecuación de Schrödinger puede aplicarse a muchas situaciones físicas.

### 7.4 La partícula cuántica en una caja

- Los estados energéticos de una partícula cuántica en una caja se encuentran resolviendo la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.
- Para resolver la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para una partícula en una caja y encontrar los estados estacionarios y las energías permitidas, es necesario que la función de onda termine en la pared de la caja.
- Los estados energéticos de una partícula en una caja están cuantizados e indexados por el número cuántico principal.
- La imagen cuántica difiere significativamente de la imagen clásica cuando una partícula se encuentra en un estado de baja energía de un número cuántico bajo.
- En el límite de números cuánticos elevados, cuando la partícula cuántica está en un estado altamente excitado, la descripción cuántica de una partícula en una caja coincide con la descripción clásica, conforme al principio de correspondencia de Bohr.

### 7.5 El oscilador armónico cuántico

- El oscilador armónico cuántico es un modelo construido por analogía con el modelo de un oscilador armónico clásico que modela el comportamiento de muchos sistemas físicos, como las vibraciones moleculares o los paquetes de ondas en la óptica cuántica.
- Las energías permitidas de un oscilador cuántico son discretas y uniformemente espaciadas. El espaciado de energía es igual al cuanto de energía de Planck.
- La energía del estado fundamental es mayor que

cero. Esto significa que, a diferencia de un oscilador clásico, un oscilador cuántico nunca está en reposo, ni siquiera en el fondo de un pozo de potencial, y sufre fluctuaciones cuánticas.

- Los estados estacionarios (estados de energía definida) tienen valores diferentes a cero también en regiones más allá de los puntos de inflexión clásicos. Cuando un oscilador cuántico se encuentra en el estado fundamental, es más probable que esté alrededor de la posición del mínimo del pozo de potencial, que es la posición menos probable para un oscilador clásico.
- Para números cuánticos elevados, el movimiento de un oscilador cuántico se asemeja más al movimiento de un oscilador clásico, de acuerdo con el principio de correspondencia de Bohr.

### 7.6 El efecto túnel de las partículas a través de las barreras de potencial

- Una partícula cuántica que incide en una barrera de potencial de ancho y altura finitas puede atravesar la barrera y aparecer en su otro lado. Este fenómeno se llama "efecto túnel". No tiene un análogo clásico.
- Para encontrar la probabilidad de efecto túnel, suponemos la energía de una partícula incidente y resolvemos la ecuación estacionaria de Schrödinger para encontrar las funciones de onda dentro y fuera de la barrera. La probabilidad de tunelización es una relación entre las amplitudes al cuadrado de la onda que pasa por la barrera y la onda incidente.
- La probabilidad de tunelización depende de la energía de la partícula incidente en relación con la altura y ancho de la barrera. Se ve fuertemente afectada por el ancho de la barrera de forma no lineal y exponencial, de modo que un pequeño cambio en el ancho de la barrera provoca un cambio desproporcionadamente grande en la probabilidad de transmisión.
- Los fenómenos de túnel cuántico rigen los decaimientos nucleares radiactivos. Se utilizan en muchas tecnologías modernas, como en el STM y la nanoelectrónica. El STM nos permite ver átomos individuales en las superficies metálicas. Los dispositivos de túnel de electrones han revolucionado la electrónica y nos permiten construir dispositivos electrónicos rápidos de tamaños miniaturizados.

## Preguntas Conceptuales

### 7.1 Funciones de onda

1. Cuál es la unidad física de una función de onda,  $\Psi(x, t)$ ? ¿Cuál es la unidad física del cuadrado de esta función de onda?
2. ¿Puede la magnitud de una función de onda ( $\Psi^*(x, t) \Psi(x, t)$ ) ser un número negativo? Explique.
3. ¿Qué tipo de cantidad física representa la función de onda de un electrón?
4. ¿Cuál es el significado físico de la función de onda de una partícula?
5. ¿Qué significa la expresión "valor esperado"? Explique.

### 7.2 El principio de incertidumbre de Heisenberg

6. Si el formalismo de la mecánica cuántica es "más exacto" que el de la mecánica clásica, ¿por qué no utilizamos la mecánica cuántica para describir el movimiento de una rana que salta? Explique.
7. ¿Se puede conocer con precisión la longitud de onda de De Broglie de una partícula? ¿Se puede conocer con precisión la posición de una partícula?
8. ¿Podemos medir la energía de una partícula libre localizada con total precisión?
9. ¿Podemos medir tanto la posición como el momento de una partícula con total precisión?

### 7.3 La ecuación de Schrödinger

10. ¿Cuál es la diferencia entre una función de onda  $\psi(x, y, z)$  y una función de onda  $\Psi(x, y, z, t)$  para la misma partícula?
11. Si una partícula cuántica está en estado estacionario, ¿significa que no se mueve?
12. Explique la diferencia entre las ecuaciones de Schrödinger dependientes e independientes del tiempo.
13. Supongamos que una función de onda es discontinua en algún punto. ¿Puede esta función representar un estado cuántico de alguna partícula física? ¿Por qué? ¿Por qué no?

### 7.4 La partícula cuántica en una caja

14. Utilizando el modelo de la partícula cuántica en una caja, describa cómo las posibles energías de la partícula están relacionadas con el tamaño de la caja.
15. ¿Es posible que cuando medimos la energía de una partícula cuántica en una caja, la medición

devuelva un valor menor que la energía del estado fundamental? ¿Cuál es el valor más alto de energía que podemos medir para esta partícula?

16. Para una partícula cuántica en una caja, el primer estado excitado ( $\Psi_2$ ) tiene un valor cero en la posición del punto medio de la caja, por lo que la densidad de probabilidad de encontrar una partícula en este punto es exactamente cero. Explique el error en el siguiente razonamiento: "Si la probabilidad de encontrar una partícula cuántica en el punto medio es cero, la partícula nunca está en este punto, ¿no? ¿Cómo es entonces que la partícula puede cruzar este punto en su camino desde el lado izquierdo al derecho de la caja?"

### 7.5 El oscilador armónico cuántico

17. ¿Es posible medir la energía de  $0,75\hbar\omega$  en un oscilador armónico cuántico? ¿Por qué? ¿Por qué no? Explique.
18. Explique la conexión entre la hipótesis de Planck sobre los cuantos de energía y las energías del oscilador armónico cuántico.
19. Si un oscilador armónico clásico puede estar en reposo, ¿por qué el oscilador armónico cuántico no puede estar nunca en reposo? ¿Viola esto el principio de correspondencia de Bohr?
20. Utilice un ejemplo de una partícula cuántica en una caja o un oscilador cuántico para explicar el significado físico del principio de correspondencia de Bohr.
21. ¿Podemos medir simultáneamente la posición y la energía de un oscilador cuántico? ¿Por qué? ¿Por qué no?

### 7.6 El efecto túnel de las partículas a través de las barreras de potencial

22. Cuando un electrón y un protón con la misma energía cinética se encuentran con una barrera de potencial de la misma altura y ancho, ¿cuál de ellos atravesará la barrera más fácilmente? ¿Por qué?
23. ¿Qué disminuye más la probabilidad de tunelización: duplicar el ancho de la barrera o reducir a la mitad la energía cinética de la partícula incidente?
24. Explique la diferencia entre un potencial de caja y un potencial de punto cuántico.
25. ¿Puede una partícula cuántica "escapar" de un

pozo de potencial infinito como el de una caja?  
¿Por qué? ¿Por qué no?

26. Un diodo de túnel y un diodo túnel resonante

## Problemas

### 7.1 Funciones de onda

27. Calcule  $|\Psi(x, t)|^2$  para la función

$\Psi(x, t) = \psi(x) \sin \omega t$ , donde  $\omega$  es una constante real.

28. Dada la función de valor complejo

$$f(x, y) = (x - iy)/(x + iy), \text{ calcule } |f(x, y)|^2.$$

29. ¿Cuál de las siguientes funciones, y por qué, reúne los requisitos para ser una función de onda de una partícula que puede moverse a lo

largo de todo el eje real? (a)  $\psi(x) = Ae^{-x^2}$ ; (b)  $\psi(x) = Ae^{-x}$ ; (c)  $\psi(x) = A \tan x$ ; (d)  $\psi(x) = A(\sin x)/x$ ; (e)  $\psi(x) = Ae^{-|x|}$ .

30. Una partícula con una masa  $m$  que se mueve a lo largo del eje de la  $x$  y su estado cuántico está representado por la siguiente función de onda:

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ Axe^{-\alpha x} e^{-i(Et/\hbar)}, & x \geq 0, \end{cases}$$

donde  $\alpha = 2,0 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}$ . (a) Encuentre la constante de normalización. (b) Encuentre la probabilidad de que la partícula se encuentre en el intervalo  $0 \leq x \leq L$ . (c) Encuentre el valor esperado de la posición. (d) Encuentre el valor esperado de la energía cinética.

31. La función de onda de una partícula con masa  $m$  está dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} A \cos \alpha x, & -\frac{\pi}{2\alpha} \leq x \leq +\frac{\pi}{2\alpha}, \\ 0, & \text{por lo contrario,} \end{cases}$$

donde  $\alpha = 1,00 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}$ . (a) Encuentre la constante de normalización. (b) Encuentre la probabilidad de que la partícula se encuentre en el intervalo  $0 \leq x \leq 0,5 \times 10^{-10} \text{ m}$ . (c) Encuentre la posición media de la partícula. (d) Encuentre su momento promedio. (e) Encuentre su energía cinética media  $-0,5 \times 10^{-10} \text{ m} \leq x \leq +0,5 \times 10^{-10} \text{ m}$ .

### 7.2 El principio de incertidumbre de Heisenberg

32. La medición de la velocidad de una partícula  $\alpha$  se ha realizado con una precisión de  $0,02 \text{ mm/s}$ . ¿Cuál es la mínima incertidumbre en su posición?
33. Un gas de átomos de helio a  $273 \text{ K}$  se encuentra

utilizan el mismo principio físico de efecto túnel. ¿En qué aspectos importantes son diferentes?

en un recipiente cúbico de  $25,0 \text{ cm}$  de lado. (a) ¿Cuál es la incertidumbre mínima en los componentes del momento de los átomos de helio? (b) ¿Cuál es la incertidumbre mínima en los componentes de la velocidad? (c) Encuentre la relación de las incertidumbres en (b) con la velocidad media de un átomo en cada dirección.

34. Si la incertidumbre en el componente  $y$  de la posición de un protón es de  $2,0 \text{ pm}$ , encuentre la incertidumbre mínima en la medición simultánea de la posición del componente de velocidad  $y$  del protón. ¿Cuál es la incertidumbre mínima en la medición simultánea del componente de velocidad  $x$  del protón?
35. Una partícula elemental inestable tiene una energía de reposo de  $80,41 \text{ GeV}$  y una incertidumbre en la energía de reposo de  $2,06 \text{ GeV}$ . Estime el tiempo de vida de esta partícula.
36. Un átomo en estado metaestable tiene una vida de  $5,2 \text{ ms}$ . Encuentre la mínima incertidumbre en la medición de la energía del estado excitado.
37. Las mediciones indican que un átomo permanece en un estado excitado durante un tiempo medio de  $50,0 \text{ ns}$  antes de realizar una transición al estado fundamental con la emisión simultánea de un fotón de  $2,1 \text{ eV}$ . (a) Estime la incertidumbre en la frecuencia del fotón. (b) ¿Qué fracción de la frecuencia media del fotón es ésta?
38. Supongamos que un electrón está confinado en una región de longitud  $0,1 \text{ nm}$  (del orden del tamaño de un átomo de hidrógeno). (a) ¿Cuál es la incertidumbre mínima de su momento? (b) ¿Cuál sería la incertidumbre del momento si la región de longitud confinada se duplicara hasta  $0,2 \text{ nm}$ ?

### 7.3 La ecuación de Schrödinger

39. Combine la [Ecuación 7.17](#) y la [Ecuación 7.18](#) para demostrar  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ .
40. Demuestre que  $\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$  es una solución válida de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo.
41. Demuestre que  $\Psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$  y  $\Psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$  no obedecen a la



ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo.

42. Demuestre que cuando  $\Psi_1(x, t)$  y  $\Psi_2(x, t)$  son soluciones de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo y  $A, B$  son números, entonces una función  $\Psi(x, t)$  que es una superposición de estas funciones también es una solución:  $\Psi(x, t) = A\Psi_1(x, t) + B\Psi_2(x, t)$ .
43. Una partícula con masa  $m$  se describe mediante la siguiente función de onda  $\psi(x) = A \cos kx + B \sin kx$ , donde  $A, B$  y  $k$  son constantes. Suponiendo que la partícula es libre, demuestre que esta función es la solución de la ecuación estacionaria de Schrödinger para esta partícula y encuentre la energía que tiene la partícula en este estado.
44. Encuentre el valor esperado de la energía cinética para la partícula en el estado,  $\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$ . ¿Qué conclusión obtiene de su solución?
45. Encuentre el valor esperado del cuadrado del momento al cuadrado para la partícula en el estado,  $\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$ . ¿Qué conclusión obtiene de su solución?
46. Un protón libre tiene una función de onda dada por  $\Psi(x, t) = Ae^{i(5,02 \times 10^{11}x - 8,00 \times 10^{15}t)}$ . El coeficiente de  $x$  es inverso a los metros ( $\text{m}^{-1}$ ) y el coeficiente en  $t$  es inverso a los segundos ( $\text{s}^{-1}$ ). Encuentre su momento y energía.

#### 7.4 La partícula cuántica en una caja

47. Supongamos que un electrón en un átomo puede tratarse como si estuviera confinado en una caja con un ancho de  $2,0 \text{ \AA}$ . ¿Cuál es la energía del estado fundamental del electrón? Compare su resultado con la energía cinética del estado fundamental del átomo de hidrógeno en el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno.
48. Supongamos que un protón en un núcleo puede tratarse como si estuviera confinado en una caja unidimensional de  $10,0 \text{ fm}$  de ancho. (a) ¿Cuáles son las energías del protón cuando se encuentra en los estados correspondientes a  $n = 1, n = 2, \text{ y } n = 3$ ? (b) ¿Cuáles son las energías de los fotones emitidos cuando el protón realiza las transiciones desde el primer y segundo estado excitado al estado fundamental?
49. Un electrón confinado en una caja tiene la energía del estado fundamental de  $2,5 \text{ eV}$ . ¿Cuál es el ancho de la caja?
50. ¿Cuál es la energía del estado fundamental (en eV) de un protón confinado en una caja unidimensional del tamaño del núcleo de uranio que tiene un radio de aproximadamente  $15,0 \text{ fm}$ ?
51. ¿Cuál es la energía del estado fundamental (en eV) de una partícula  $\alpha$  confinada en una caja unidimensional del tamaño del núcleo de uranio que tiene un radio de aproximadamente  $15,0 \text{ fm}$ ?
52. Para excitar un electrón en una caja unidimensional desde su primer estado excitado hasta su tercer estado excitado se necesitan  $20,0 \text{ eV}$ . ¿Cuál es el ancho de la caja?
53. Un electrón confinado en una caja de  $0,15 \text{ nm}$  de ancho por barreras de energía potencial infinitas emite un fotón cuando hace la transición del primer estado excitado al estado fundamental. Encuentre la longitud de onda del fotón emitido.
54. Si la energía del primer estado excitado del electrón en la caja es de  $25,0 \text{ eV}$ , ¿cuál es el ancho de la caja?
55. Supongamos que un electrón confinado en una caja emite fotones. La longitud de onda más larga que se registra es de  $500,0 \text{ nm}$ . ¿Cuál es el ancho de la caja?
56. Las moléculas de Hidrógeno  $\text{H}_2$  se mantienen a  $300,0 \text{ K}$  en un recipiente cúbico de  $20,0 \text{ cm}$  de lado. Suponga que puede tratar las moléculas como si se movieran en una caja unidimensional. (a) Encuentre la energía del estado fundamental de la molécula de hidrógeno en el contenedor. (b) Suponga que la molécula tiene una energía térmica dada por  $k_B T/2$  y encuentre el correspondiente número cuántico  $n$  del estado cuántico que correspondería a esta energía térmica.
57. Un electrón está confinado en una caja de  $0,25 \text{ nm}$  de anchura. (a) Dibuje un diagrama de niveles de energía que represente los cinco primeros estados del electrón. (b) Calcule las longitudes de onda de los fotones emitidos cuando el electrón realiza las transiciones entre el cuarto y el segundo estado excitado, entre el segundo estado excitado y el estado fundamental, y entre el tercer y el segundo estado excitado.
58. Un electrón en una caja se encuentra en el estado fundamental con una energía de  $2,0 \text{ eV}$ . (a) Encuentre el ancho de la caja. (b) ¿Cuánta energía se necesita para llevar al electrón a su primer estado excitado? (c) Si el electrón hace una transición de un estado excitado al estado



fundamental con la emisión simultánea de un fotón de 30,0 eV, encuentre el número cuántico del estado excitado.

### 7.5 El oscilador armónico cuántico

59. Demuestre que los dos estados de menor energía del oscilador armónico simple,  $\psi_0(x)$  y  $\psi_1(x)$  de la [Ecuación 7.57](#), satisfacen la [Ecuación 7.55](#).
60. Si la energía del estado fundamental de un oscilador armónico simple es de 1,25 eV, ¿cuál es la frecuencia de su movimiento?
61. Cuando un oscilador armónico cuántico hace una transición del estado  $(n + 1)$  al estado  $n$  y emite un fotón de 450 nm, ¿cuál es su frecuencia?
62. Las vibraciones de la molécula de hidrógeno  $H_2$  se pueden modelar como un oscilador armónico simple con la constante de resorte  $k = 1,13 \times 10^3 \text{ N/m}$  y la masa  $m = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ . (a) ¿Cuál es la frecuencia de vibración de esta molécula? (b) ¿Cuáles son la energía y la longitud de onda del fotón emitido cuando la molécula hace la transición entre su tercer y segundo estado excitado?
63. Una partícula con una masa de 0,030 kg oscila hacia delante y hacia atrás en un resorte con una frecuencia de 4,0 Hz. En la posición de equilibrio, tiene una velocidad de 0,60 m/s. Si la partícula se encuentra en un estado de energía definido, encuentre su número cuántico de energía.
64. Encuentre el valor esperado  $\langle x^2 \rangle$  del cuadrado de la posición para un oscilador armónico cuántico en el estado fundamental.  
Nota:  

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 e^{-a x^2} = \sqrt{\pi} (2a^{-3/2})^{-1}.$$
65. Determine el valor esperado de la energía potencial de un oscilador armónico cuántico en el estado fundamental. Úselo para calcular el valor esperado de la energía cinética.
66. Compruebe que  $\psi_1(x)$  dada por la [Ecuación 7.57](#) es una solución de la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico cuántico.
67. Estime la energía del estado fundamental del oscilador armónico cuántico según el principio de incertidumbre de Heisenberg. Comience por suponer que el producto de las incertidumbres  $\Delta x$  y  $\Delta p$  está al mínimo. Escriba  $\Delta p$  en

términos de  $\Delta x$  y suponga que para el estado fundamental  $x \approx \Delta x$  y  $p \approx \Delta p$ , y luego escriba la energía del estado fundamental en términos de  $x$ . Por último, encuentre el valor de la  $x$  que minimiza la energía y encuentre el mínimo de la energía.

68. Una masa de 0,250 kg oscila sobre un resorte con la constante de fuerza 110 N/m. Calcule el nivel de energía fundamental y la separación entre los niveles de energía adyacentes. Expresé los resultados en julios y en electronvoltios. ¿Son importantes los efectos cuánticos?

### 7.6 El efecto túnel de las partículas a través de las barreras de potencial

69. Demuestre que la función de onda en (a) la [Ecuación 7.68](#) satisface la [Ecuación 7.61](#), y (b) la [Ecuación 7.69](#) satisface la [Ecuación 7.63](#).
70. Un electrón de 6,0 eV impacta en una barrera con altura de 11,0 eV. Encuentre la probabilidad de que el electrón atraviese la barrera si el ancho de la barrera es (a) 0,80 nm y (b) 0,40 nm.
71. Un electrón de 5,0 eV impacta en una barrera de 0,60 nm. Encuentre la probabilidad de que el electrón atraviese la barrera si la altura de la barrera es (a) 7,0 eV; (b) 9,0 eV; y (c) 13,0 eV.
72. Un electrón de 12,0 eV encuentra una barrera de altura 15,0 eV. Si la probabilidad de que el electrón atraviese la barrera es del 2,5 %, encuentre su ancho.
73. Una partícula cuántica con una energía cinética inicial de 32,0 eV se encuentra con una barrera cuadrada de 41,0 eV de altura y 0,25 nm de ancho. Encuentre la probabilidad de que la partícula atraviese esta barrera si la partícula es (a) un electrón y, (b) un protón.
74. Un modelo sencillo de un decaimiento nuclear radiactivo supone que  $\alpha$  están atrapadas dentro de un pozo de potencial nuclear cuyas paredes son barreras de un ancho finito de 2,0 fm y una altura de 30,0 MeV. Encuentre la probabilidad de tunelización a través de la barrera de potencial de la pared para  $\alpha$  con energía cinética (a) 29,0 MeV y (b) 20,0 MeV. La masa de las partículas  $\alpha$  es  $m = 6,64 \times 10^{-27} \text{ kg}$ .
75. Un muon, una partícula cuántica con una masa aproximadamente 200 veces la de un electrón, incide sobre una barrera de potencial de altura 10,0 eV. La energía cinética del muon que impacta es de 5,5 eV y solo un 0,10 % de la amplitud al cuadrado de su función de onda entrante se filtra a través de la barrera. ¿Cuál es el ancho de la barrera?

76. Un grano de arena con una masa de 1,0 mg y una energía cinética de 1,0 J incide sobre una barrera de energía potencial con una altura de

1,000001 J y un ancho de 2500 nm. ¿Cuántos granos de arena tienen que caer sobre esta barrera para que, por término medio, pase uno?

### Problemas Adicionales

77. Demuestre que si la incertidumbre en la posición de una partícula es del orden de su longitud de onda de De Broglie, entonces la incertidumbre en su momento es del orden del valor de su momento.
78. La masa de un mesón  $\rho$ -mesón se mide para ser  $770 \text{ MeV}/c^2$  con una incertidumbre de  $100 \text{ MeV}/c^2$ . Estime el tiempo de vida de este mesón.
79. Una partícula de masa  $m$  está confinada en una caja de un ancho  $L$ . Si la partícula está en el primer estado excitado, ¿cuáles son las probabilidades de encontrar la partícula en una región de un ancho de  $0,020L$  alrededor del punto  $x$  dado: (a)  $x = 0,25L$ ; (b)  $x = 0,40L$ ; (c)  $x = 0,75L$ ; y (d)  $x = 0,90L$ .
80. Una partícula en una caja  $[0;L]$  está en el tercer estado excitado. ¿Cuáles son sus posiciones más probables?
81. Una bola de billar de 0,20 kg rebota sin perder su energía entre los cojines de una mesa de 1,5 m de largo. (a) Si la bola está en estado fundamental, ¿cuántos años necesita para ir de un cojín a otro? Puede comparar este intervalo de tiempo con la edad del universo. (b) ¿Cuánta energía se necesita para que la bola pase de su estado fundamental a su primer estado excitado? Compárela con la energía cinética de la bola que se mueve a 2,0 m/s.
82. Encuentre el valor esperado de la posición al cuadrado cuando la partícula en la caja está en su tercer estado excitado y la longitud de la caja es  $L$ .
83. Consideremos un pozo potencial infinito con límites de pared  $x = 0$  y  $x = L$ . Demuestre que la función  $\psi(x) = A \sin kx$  es la solución de la

ecuación estacionaria de Schrödinger para la partícula en una caja solo si  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ .

Explique por qué ésta es una función de onda aceptable solo si  $k$  es un múltiplo entero de  $\pi/L$ .

84. Consideremos un pozo potencial infinito con límites de pared  $x = 0$  y  $x = L$ . Explique por qué la función  $\psi(x) = A \cos kx$  no es una solución a la ecuación estacionaria de Schrödinger para la partícula en una caja.
85. Los átomos de una red cristalina vibran en movimiento armónico simple. Suponiendo que un átomo de la red tiene una masa de  $9,4 \times 10^{-26} \text{ kg}$ , ¿cuál es la constante de fuerza de la red si un átomo de la red hace una transición del estado fundamental al primer estado excitado cuando absorbe un fotón de  $525\text{-}\mu\text{m}$ ?
86. Una molécula diatómica se comporta como un oscilador armónico cuántico con la constante de fuerza  $12,0 \text{ N/m}$  y la masa  $5,60 \times 10^{-26} \text{ kg}$ . (a) ¿Cuál es la longitud de onda del fotón emitido cuando la molécula hace la transición del tercer estado excitado al segundo estado excitado? (b) Encuentre la energía del estado fundamental de las vibraciones de esta molécula diatómica.
87. Un electrón con energía cinética de 2,0 MeV se encuentra con una barrera de energía potencial de altura 16,0 MeV y un ancho de 2,00 nm. ¿Cuál es la probabilidad de que el electrón salga al otro lado de la barrera?
88. Un haz de protones monoenergéticos de energía 2,0 MeV cae sobre una barrera de energía potencial de altura 20,0 MeV y de un ancho de 1,5 fm. ¿Qué porcentaje del haz se transmite a través de la barrera?

### Problemas De Desafío

89. Un electrón en una larga molécula orgánica utilizada en un láser de colorante se comporta aproximadamente como una partícula cuántica en una caja de 4,18 nm de ancho. Encuentre el fotón emitido cuando el electrón hace una transición del primer estado excitado al estado fundamental y del segundo estado excitado al primer estado excitado.
90. En el STM, la elevación de la punta por encima

de la superficie que se está escaneando se determina con gran precisión, porque la corriente de electrones en túnel entre los átomos de la superficie y los de la punta es extremadamente sensible a la variación de la brecha de separación entre ellos de un punto a otro a lo largo de la superficie. Suponiendo que la corriente de electrones en túnel está en proporción directa con la probabilidad de

tunelización y que esta está expresada en una buena aproximación por la función exponencial  $e^{-2\beta L}$  con  $\beta = 10,0/\text{nm}$ , determine la relación entre la corriente de túnel cuando la punta está a 0,500 nm por encima de la superficie y la corriente cuando la punta está a 0,515 nm por encima de la superficie.

- 91.** Si el STM detecta características superficiales con alturas locales de aproximadamente 0,00200 nm, ¿qué porcentaje de cambio en la corriente de electrones de túnel la electrónica del STM debe ser capaz de detectar? Supongamos que la corriente de electrones en túnel tiene las características dadas en el problema anterior.
- 92.** Utilice el principio de incertidumbre de Heisenberg para estimar la energía del estado fundamental de una partícula que oscila en un resorte con frecuencia angular,  $\omega = \sqrt{k/m}$ ,

donde  $k$  es la constante del resorte y  $m$  es la masa.

- 93.** Supongamos que un pozo potencial infinito se extiende desde  $-L/2$  a  $+L/2$ . Resuelva la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para encontrar las energías permitidas y los estados estacionarios de una partícula con masa  $m$  que está confinada en este pozo. A continuación, demuestre que estas soluciones se pueden obtener realizando la transformación de coordenadas  $x' = x - L/2$  para las soluciones obtenidas para el pozo que se extiende entre 0 y  $L$ .
- 94.** Una partícula de masa  $m$  confinada en una caja de un ancho  $L$  está en su primer estado excitado  $\psi_2(x)$ . (a) Encuentre su posición promedio (que es el valor esperado de la posición). (b) ¿Dónde es más probable que se encuentre la partícula?

# CAPÍTULO 8

## Estructura atómica



**Figura 8.1** NGC1763 es una nebulosa de emisión en la Gran Nube de Magallanes, que es una galaxia satélite de nuestra Vía Láctea. Los colores que vemos pueden explicarse aplicando las ideas de la mecánica cuántica a la estructura atómica (crédito: modificación del trabajo de la Administración Nacional de Aeronáutica y del Espacio (National Aeronautics and Space Administration, NASA), la Agencia Espacial Europea (European Space Agency, ESA) y Josh Lake).

### ESQUEMA DEL CAPITULO

- 8.1 El átomo de hidrógeno**
- 8.2 Momento dipolar magnético orbital del electrón**
- 8.3 Espín del electrón**
- 8.4 El principio de exclusión y la tabla periódica**
- 8.5 Espectros atómicos y rayos X**
- 8.6 Láseres**

**INTRODUCCIÓN** En este capítulo, utilizamos la mecánica cuántica para estudiar la estructura y las propiedades de los átomos. Este estudio introduce ideas y conceptos que son necesarios para comprender sistemas más complejos, como las moléculas, los cristales y los metales. A medida que profundicemos en el conocimiento de los átomos, nos basaremos en conocimiento que ya poseemos, como el modelo atómico nuclear de Rutherford, el modelo del átomo de hidrógeno de Bohr y la hipótesis ondulatoria de De Broglie.

La [Figura 8.1](#) es NGC1763, una nebulosa de emisión en la pequeña galaxia conocida como Gran Nube de Magallanes, que es un satélite de la Vía Láctea. La luz ultravioleta de las estrellas calientes ioniza los átomos de hidrógeno de la nebulosa. Cuando los protones y los electrones se recombinan, se emite una radiación de diferentes frecuencias. Los detalles de este proceso pueden predecirse correctamente mediante la mecánica cuántica y se examinan en este capítulo.

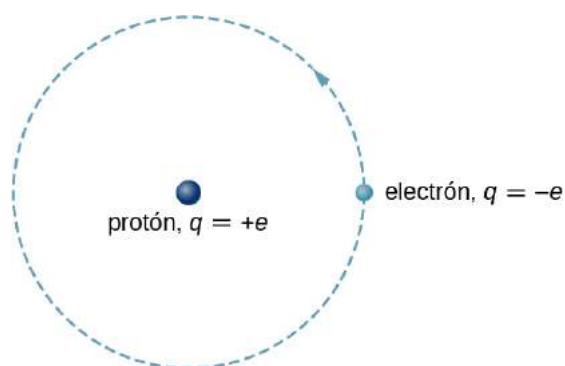
## 8.1 El átomo de hidrógeno

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Describir el átomo de hidrógeno en términos de función de onda, densidad de probabilidad, energía total y momento angular orbital.
- Identificar el significado físico de cada uno de los números cuánticos  $(n, l, m)$  del átomo de hidrógeno.
- Distinguir entre los modelos de Bohr y Schrödinger del átomo.
- Utilizar los números cuánticos para calcular información importante sobre el átomo de hidrógeno.

El átomo de hidrógeno es el más simple de la naturaleza y, por tanto, un buen punto de partida para estudiar los átomos y la estructura atómica. El átomo de hidrógeno está formado por un solo electrón con carga negativa que se mueve alrededor de un protón con carga positiva ([Figura 8.2](#)). En el modelo de Bohr, el electrón es atraído alrededor del protón en una órbita perfectamente circular por una fuerza de Coulomb de atracción. El protón es aproximadamente 1.800 veces más masivo que el electrón, por lo que el protón se mueve muy poco en respuesta a la fuerza que ejerce el electrón sobre él. (Esto es análogo al sistema Tierra-Sol, donde el Sol se mueve muy poco en respuesta a la fuerza ejercida sobre él por la Tierra). Una explicación de este efecto utilizando las leyes de Newton se ofrece en [Fotones y ondas de materia](#).



**FIGURA 8.2** Una representación del modelo de Bohr del átomo de hidrógeno.

Suponiendo el protón fijo, nos centramos en el movimiento del electrón.

En el campo eléctrico del protón, la energía potencial del electrón es

$$U(r) = -k \frac{e^2}{r}, \quad 8.1$$

donde  $k = 1/4\pi\epsilon_0$  y  $r$  es la distancia entre el electrón y el protón. Como vimos antes, la fuerza sobre un objeto es igual al negativo del gradiente (o pendiente) de la función de energía potencial. Para el caso especial de un átomo de hidrógeno, la fuerza entre el electrón y el protón es una fuerza de Coulomb atractiva.

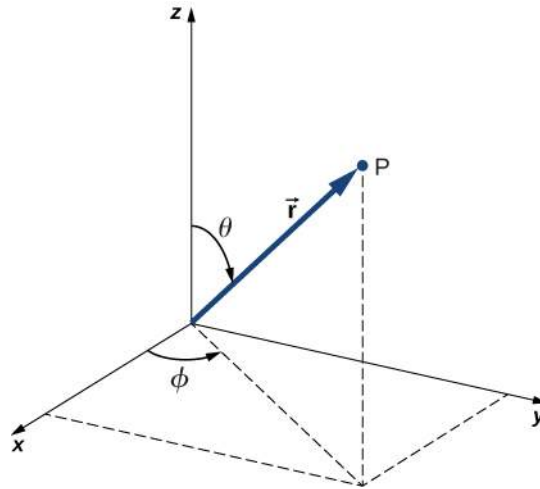
Observe que la función de energía potencial  $U(r)$  no varía en el tiempo. Como resultado, la ecuación de Schrödinger del átomo de hidrógeno se reduce a dos ecuaciones más simples: una que depende solo del espacio  $(x, y, z)$  y otra que depende solo del tiempo  $(t)$ . (La separación de una función de onda en partes dependientes del espacio y del tiempo para funciones de energía potencial independientes del tiempo se discute en [Mecánica cuántica](#)). Lo que más nos interesa es la ecuación dependiente del espacio:

$$\frac{-\hbar^2}{2m_e} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - k \frac{e^2}{r} \psi = E\psi, \quad 8.2$$

donde  $\psi = \psi(x, y, z)$  es la función de onda tridimensional del electrón,  $m_e$  es la masa del electrón, y  $E$  es la energía total del electrón. Recordemos que la función de onda total  $\Psi(x, y, z, t)$ , es el producto de la función de onda dependiente del espacio  $\psi = \psi(x, y, z)$  y la función de onda dependiente del tiempo  $\varphi = \varphi(t)$ .

Además de ser independiente del tiempo,  $U(r)$  también es esféricamente simétrico. Esto sugiere que podemos resolver la ecuación de Schrödinger más fácilmente si la expresamos en términos de coordenadas esféricas

$(r, \theta, \phi)$  en lugar de coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$ . Un sistema de coordenadas esféricas se muestra en la [Figura 8.3](#). En las coordenadas esféricas, la variable  $r$  es la coordenada radial,  $\theta$  es el ángulo polar (relativo al eje de la  $z$  vertical), y  $\phi$  es el ángulo acimutal (respecto al eje de la  $x$ ). La relación entre las coordenadas esféricas y rectangulares es  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$ ,  $z = r \cos \theta$ .



**FIGURA 8.3** La relación entre los sistemas de coordenadas esféricas y rectangulares.

El factor  $r \sin \theta$  es la magnitud de un vector formado por la proyección del vector polar sobre el plano  $xy$ . Además, las coordenadas de la  $x$  y la  $y$  se obtienen proyectando este vector sobre los ejes de la  $x$  y la  $y$ , respectivamente. La transformación inversa da

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \cos^{-1} \left( \frac{z}{r} \right), \quad \phi = \cos^{-1} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

La ecuación de onda de Schrödinger para el átomo de hidrógeno en coordenadas esféricas se discute en cursos más avanzados de física moderna, por lo que aquí no la consideramos en detalle. Sin embargo, debido a la simetría esférica de  $U(r)$ , esta ecuación se reduce a tres ecuaciones más simples: una para cada una de las tres coordenadas  $(r, \theta, \phi)$ . Las soluciones a la función de onda independiente del tiempo se escriben como un producto de tres funciones:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi),$$

donde  $R$  es la función radial que depende únicamente de la coordenada radial  $r$ ;  $\Theta$  es la función polar que depende de la coordenada polar  $\theta$  solamente; y  $\Phi$  es la función phi de  $\phi$  solamente. Las soluciones válidas de la ecuación de Schrödinger  $\psi(r, \theta, \phi)$  están marcadas con los números cuánticos  $n, l$  y  $m$ .

$n$  : número cuántico principal

$l$  : número cuántico de momento angular

$m$  : número cuántico de proyección del momento angular

(Las razones de estos nombres se explicarán en la siguiente sección). La función radial  $R$  solo depende de  $n$  y  $l$ ; la función polar  $\Theta$  solo depende de  $l$  y  $m$ ; y la función phi  $\Phi$  solo depende de  $m$ . La dependencia de cada función de los números cuánticos se indica con subíndices:

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)\Theta_{lm}(\theta)\Phi_m(\phi).$$

No todos los conjuntos de números cuánticos  $(n, l, m)$  son posibles. Por ejemplo, el número cuántico angular orbital  $l$  nunca puede ser mayor o igual que el número cuántico principal  $n$  ( $l < n$ ). En concreto, tenemos

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$$

$$m = -l, (-l + 1), \dots, 0, \dots, (+l - 1), +l$$

Observe que en el estado fundamental,  $n = 1, l = 0$ , y  $m = 0$ . En otras palabras, solo hay un estado cuántico



con la función de onda para  $n = 1$ , y es  $\psi_{100}$ . Sin embargo, para  $n = 2$ , tenemos

$$l = 0, m = 0$$

$$l = 1, m = -1, 0, 1.$$

Por lo tanto, los estados permitidos para el estado  $n = 2$  son  $\psi_{200}$ ,  $\psi_{21-1}$ ,  $\psi_{210}$ , y  $\psi_{211}$ . En la [Tabla 8.1](#) se ofrecen ejemplos de funciones de onda para el átomo de hidrógeno. Observe que algunas de estas expresiones contienen la letra  $i$ , que representa  $\sqrt{-1}$ . Cuando se calculan las probabilidades, estos números complejos no aparecen en la respuesta final.

$n = 1, l = 0, m_l = 0$	$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}$
$n = 2, l = 0, m_l = 0$	$\psi_{200} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a_0^{3/2}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0}$
$n = 2, l = 1, m_l = -1$	$\psi_{21-1} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \frac{1}{a_0^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \sin \theta e^{-i\phi}$
$n = 2, l = 1, m_l = 0$	$\psi_{210} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a_0^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \cos \theta$
$n = 2, l = 1, m_l = 1$	$\psi_{211} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \frac{1}{a_0^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \sin \theta e^{i\phi}$

**TABLA 8.1** Funciones de onda del átomo de hidrógeno

### Significado de los números cuánticos

Cada uno de los tres números cuánticos del átomo de hidrógeno ( $n, l, m$ ) está asociado a una cantidad física diferente. El **número cuántico principal**  $n$  está asociado a la energía total del electrón,  $E_n$ . Según la ecuación de Schrödinger:

$$E_n = - \left( \frac{m_e k^2 e^4}{2\hbar^2} \right) \left( \frac{1}{n^2} \right) = -E_0 \left( \frac{1}{n^2} \right), \quad 8.3$$

donde  $E_0 = -13,6$  eV. Observe que esta expresión es idéntica a la del modelo de Bohr. Al igual que en el modelo de Bohr, el electrón en un determinado estado de energía no radia.



### EJEMPLO 8.1

#### ¿Cuántos estados posibles hay?

En el átomo de hidrógeno, ¿cuántos estados cuánticos posibles corresponden al número principal  $n = 3$ ?  
¿Cuáles son las energías de estos estados?

#### Estrategia

En un átomo de hidrógeno de una energía determinada, el número de estados permitidos depende de su momento angular orbital. Podemos contar estos estados para cada valor del número cuántico principal,  $n = 1, 2, 3$ . Sin embargo, la energía total depende únicamente del número cuántico principal, lo que significa que podemos utilizar la [Ecuación 8.3](#) y el número de estados contados.

#### Solución

Si  $n = 3$ , los valores permitidos de  $l$  son 0, 1 y 2. Si  $l = 0$ ,  $m = 0$  (1 estado). Si  $l = 1$ ,  $m = -1, 0, +1$  (3 estados); y si  $l = 2$ ,  $m = -2, -1, 0, +1, +2$  (5 estados). En total, hay  $1 + 3 + 5 = 9$  estados permitidos. Debido a que la energía total solo depende del número cuántico principal,  $n = 3$ , la energía de cada uno de estos estados es



$$E_{n3} = -E_0 \left( \frac{1}{n^2} \right) = \frac{-13,6 \text{ eV}}{9} = -1,51 \text{ eV}.$$

### Importancia

Un electrón en un átomo de hidrógeno puede ocupar muchos estados de momento angular diferentes con la misma energía. A medida que aumenta el momento angular orbital, aumenta el número de estados permitidos con la misma energía.

El **número cuántico de momento angular orbital**  $l$  está asociado al momento angular orbital del electrón en un átomo de hidrógeno. La teoría cuántica nos dice que cuando el átomo de hidrógeno está en el estado  $\psi_{nlm}$ , la magnitud de su momento angular orbital es

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \quad 8.4$$

donde

$$l = 0, 1, 2, \dots, (n-1).$$

Este resultado es ligeramente diferente al encontrado con la teoría de Bohr, que cuantiza el momento angular según la regla  $L = n$ , donde  $n = 1, 2, 3, \dots$

Los estados cuánticos con diferentes valores de momento angular orbital se distinguen utilizando la notación espectroscópica (Tabla 8.2). Las denominaciones  $s$ ,  $p$ ,  $d$  y  $f$  provienen de los primeros intentos históricos de clasificar las líneas espectrales atómicas. (Las letras significan agudo, principal, difuso y fundamental, respectivamente) Después de la  $f$ , las letras continúan en orden alfabético.

El estado fundamental del hidrógeno se denomina estado  $1s$ , donde "1" indica el nivel de energía ( $n = 1$ ) y "s" indica el estado del momento angular orbital ( $l = 0$ ). Cuando  $n = 2$ ,  $l$  puede ser 0 o 1. El estado  $n = 2, l = 0$  se designa " $2s$ ". El estado  $n = 2, l = 1$  se designa " $2p$ ". Cuando  $n = 3$ ,  $l$  puede ser 0, 1 o 2, y los estados son  $3s$ ,  $3p$ , y  $3d$ , respectivamente. La notación para otros estados cuánticos se da en la Tabla 8.3.

El **número cuántico de proyección del momento angular**  $m$  está asociado al ángulo acimutal  $\phi$  (vea la Figura 8.3) y está relacionado con el componente  $z$  del momento angular orbital de un electrón en un átomo de hidrógeno. Este componente viene dado por

$$L_z = m\hbar, \quad 8.5$$

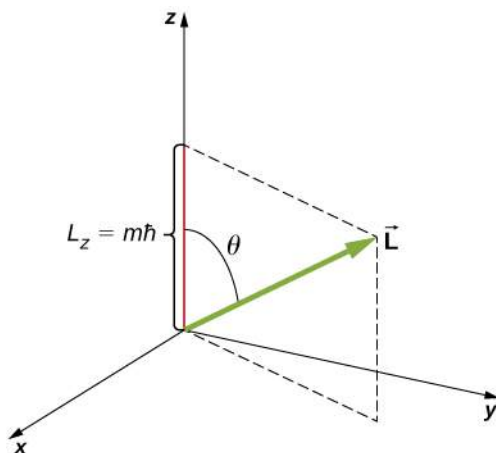
donde

$$m = -l, -l+1, \dots, 0, \dots, +l-1, l.$$

El componente  $z$  del momento angular está relacionado con la magnitud del momento angular a través de

$$L_z = L \cos \theta, \quad 8.6$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre el vector de momento angular y el eje de la  $z$ . Observe que la dirección del eje de la  $z$  se determina por el experimento, es decir, a lo largo de cualquier dirección, el experimentador decide medir el momento angular. Por ejemplo, la dirección de la  $z$  podría corresponder a la dirección de un campo magnético externo. La relación entre  $L_z$  y  $L$  se encuentra en la Figura 8.4.



**FIGURA 8.4** El componente z del momento angular está cuantizado con su propio número cuántico  $m$ .

Número cuántico orbital $l$	Momento angular	Estado	Nombre espectroscópico
0	0	$s$	Fino
1	$\sqrt{2}h$	$p$	Principal
2	$\sqrt{6}h$	$d$	Difuso
3	$\sqrt{12}h$	$f$	Fundamental
4	$\sqrt{20}h$	$g$	
5	$\sqrt{30}h$	$h$	

**TABLA 8.2** Notación espectroscópica y momento angular orbital

	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$
$n = 1$	1s					
$n = 2$	2s	2p				
$n = 3$	3s	3p	3d			
$n = 4$	4s	4p	4d	4f		
$n = 5$	5s	5p	5d	5f	5g	
$n = 6$	6s	6p	6d	6f	6g	6h

**TABLA 8.3** Descripción espectroscópica de los estados cuánticos

La cuantización de  $L_z$  equivale a la cuantización de  $\theta$ . Sustituyendo  $\sqrt{l(l+1)}\hbar$  para  $L$  y  $m$  para  $L_z$  en esta ecuación, encontramos

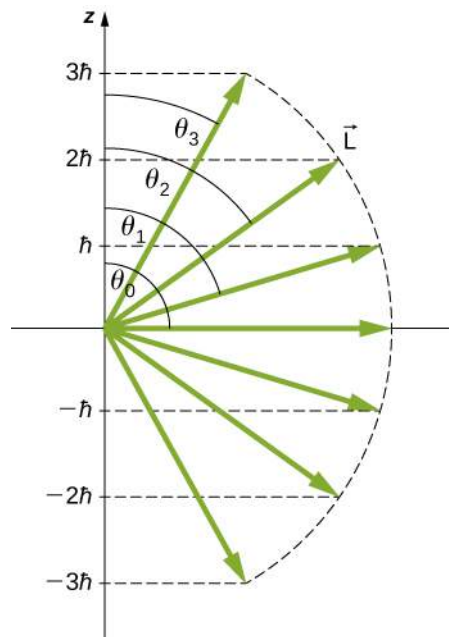
$$m\hbar = \sqrt{l(l+1)}\hbar \cos \theta. \quad 8.7$$

Así, el ángulo  $\theta$  se cuantiza con los valores particulares

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}} \right). \quad 8.8$$

Observe que tanto el ángulo polar ( $\theta$ ) y la proyección del vector de momento angular sobre un eje de la  $z$  arbitrario ( $L_z$ ) están cuantizados.

La cuantización del ángulo polar para el estado  $l = 3$  se muestra en la [Figura 8.5](#). El vector de momento angular orbital se encuentra en algún lugar de la superficie de un cono con un ángulo de apertura  $\theta$  en relación con el eje de la  $z$  (a menos que  $m = 0$ , en cuyo caso  $\theta = 90^\circ$  y los puntos del vector son perpendiculares al eje de la  $z$ ).



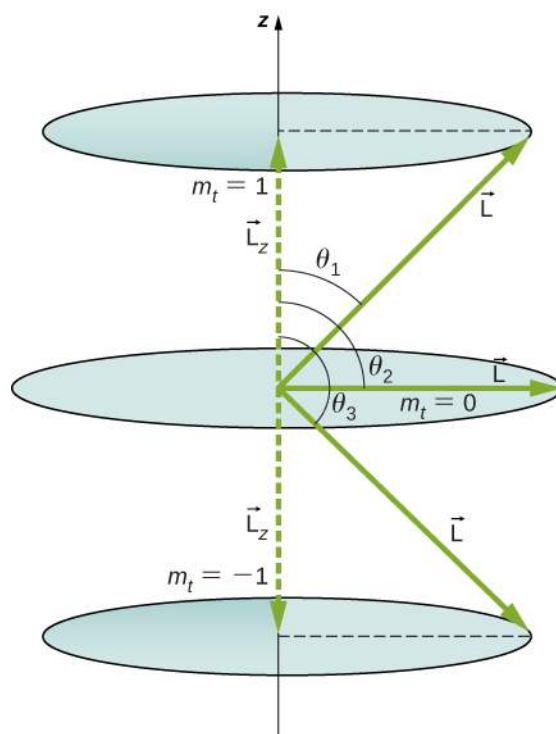
**FIGURA 8.5** La cuantización del momento angular orbital. Cada vector se encuentra en la superficie de un cono con eje a lo largo del eje de la  $z$ .

Un estudio detallado del momento angular revela que no podemos conocer los tres componentes simultáneamente. En la sección anterior, el componente  $z$  del momento angular orbital tiene valores definidos que dependen del número cuántico  $m$ . Esto implica que no podemos conocer los componentes  $x$  y  $y$  del momento angular,  $L_x$  y  $L_y$ , con certeza. En consecuencia, se desconoce la dirección exacta del vector del momento angular orbital.

## EJEMPLO 8.2

### ¿Cuáles son las direcciones permitidas?

Calcule los ángulos que el vector de momento angular  $\vec{L}$  puede hacer con el eje de la  $z$  para  $l = 1$ , como se muestra en la [Figura 8.6](#).



**FIGURA 8.6** El componente de un momento angular dado a lo largo del eje de la  $z$  (definido por la dirección de un campo magnético) solo puede tener ciertos valores. Estos se muestran aquí para  $l = 1$ , para lo cual  $m = -1, 0$ , y  $+1$ . La dirección de  $\vec{L}$  está cuantizada en el sentido de que solo puede tener ciertos ángulos respecto al eje de la  $z$ .

### Estrategia

Los vectores  $\vec{L}$  y  $\vec{L}_z$  (en la dirección  $z$ ) forman un triángulo rectángulo, donde  $\vec{L}$  es la hipotenusa y  $\vec{L}_z$  es el lado adyacente. La proporción de  $L_z$  a  $|\vec{L}|$  es el coseno del ángulo de interés. Las magnitudes  $L = |\vec{L}|$  y  $L_z$  vienen dadas por

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar \text{ y } L_z = m\hbar.$$

### Solución

Se nos da  $l = 1$ , por lo que  $ml$  puede ser  $+1, 0$ , o  $-1$ . Así,  $L$  tiene el valor dado por

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar.$$

La cantidad  $L_z$  puede tener tres valores, dados por  $L_z = m_l\hbar$ .

$$L_z = m_l\hbar = \begin{cases} \hbar, & m_l = +1 \\ 0, & m_l = 0 \\ -\hbar, & m_l = -1 \end{cases}$$

Como puede ver en la [Figura 8.6](#),  $\cos \theta = L_z/L$ , entonces para  $m = +1$ , tenemos

$$\cos \theta_1 = \frac{L_z}{L} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\hbar} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707.$$

Por lo tanto,

$$\theta_1 = \cos^{-1}0,707 = 45,0^\circ.$$

Del mismo modo, para  $m = 0$ , encontramos  $\cos \theta_2 = 0$ ; esto da

$$\theta_2 = \cos^{-1} 0 = 90,0^\circ.$$

Entonces para  $m_l = -1$ :

$$\cos \theta_3 = \frac{L_z}{L} = \frac{-\hbar}{\sqrt{2}\hbar} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -0,707,$$

para que

$$\theta_3 = \cos^{-1}(-0,707) = 135,0^\circ.$$

### Importancia

Los ángulos son coherentes con la figura. Solo se cuantifica el ángulo relativo al eje de la  $z$ .  $L$  puede apuntar en cualquier dirección siempre que forme el ángulo adecuado con el eje de la  $z$ . Por lo tanto, los vectores del momento angular se encuentran en conos, como se ilustra. Para ver cómo se cumple aquí el principio de correspondencia, considere que el ángulo más pequeño ( $\theta_1$  en el ejemplo) es para el valor máximo de  $m_l$ , a saber  $m_l = l$ . Para ese ángulo más pequeño,

$$\cos \theta = \frac{L_z}{L} = \frac{l}{\sqrt{l(l+1)}},$$

que se aproxima a 1 cuando  $l$  es muy grande. Si  $\cos \theta = 1$ , entonces  $\theta = 0^\circ$ . Además, para  $l$  grande, hay muchos valores de  $m_l$ , de modo que todos los ángulos son posibles a medida que  $l$  se hace muy grande.

### ✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 8.1

¿Puede la magnitud de  $L_z$  igualar en algún momento a  $L$ ?

### Uso de la función de onda para hacer predicciones

Como hemos visto antes, podemos utilizar la mecánica cuántica para hacer predicciones sobre los eventos físicos mediante el uso de declaraciones de probabilidad. Por lo tanto, es correcto afirmar: "un electrón se encuentra dentro de este volumen con esta probabilidad en este momento", pero no: "un electrón se encuentra en la posición  $(x, y, z)$  en este momento". Para determinar la probabilidad de encontrar un electrón en un átomo de hidrógeno en una región particular del espacio, es necesario integrar la densidad de probabilidad  $|\psi_{nlm}|^2$  sobre esa región:

$$\text{Probabilidad} = \int_{\text{volumen}} |\psi_{nlm}|^2 dV, \quad 8.9$$

donde  $dV$  es un elemento de volumen infinitesimal. Si esta integral se calcula para todo el espacio, el resultado es 1, porque la probabilidad de que la partícula se encuentre *en algún lugar* es del 100 % (la condición de normalización). En un curso más avanzado de física moderna, encontrará que  $|\psi_{nlm}|^2 = \psi_{nlm}^* \psi_{nlm}$ , donde  $\psi_{nlm}^*$  es el conjugado complejo. Esto elimina las ocurrencias de  $i = \sqrt{-1}$  en el cálculo anterior.

Considere un electrón en un estado de momento angular cero ( $l = 0$ ). En este caso, la función de onda del electrón solo depende de la coordenada radial  $r$ . (Consulte los estados  $\psi_{100}$  y  $\psi_{200}$  en la [Tabla 8.1](#).) El elemento de volumen infinitesimal corresponde a una cáscara esférica de radio  $r$  y espesor infinitesimal  $dr$ , escrita como

$$dV = 4\pi r^2 dr. \quad 8.10$$

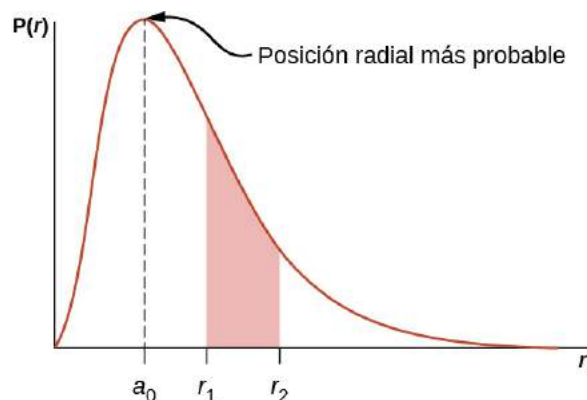
La probabilidad de encontrar el electrón en la región  $r$  para  $r + dr$  ("aproximadamente en  $r$ ") es de

$$P(r)dr = |\psi_{n00}|^2 4\pi r^2 dr. \quad 8.11$$

Aquí,  $P(r)$  se denomina **función de densidad y probabilidad radial** (una probabilidad por unidad de longitud). Para un electrón en el estado fundamental del hidrógeno, la probabilidad de encontrar un electrón en la región  $r$  para  $r + dr$  es de

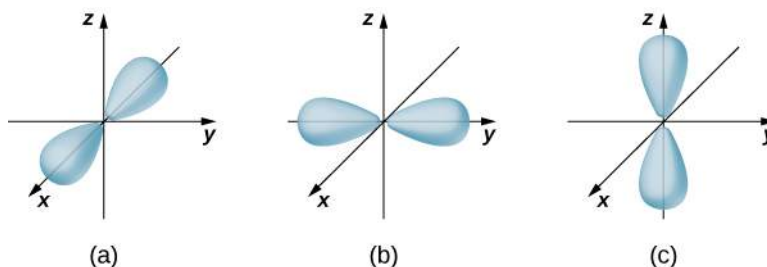
$$|\psi_{n00}|^2 4\pi r^2 dr = (4/a_0^3)r^2 \exp(-2r/a_0)dr, \quad 8.12$$

donde  $a_0 = 0,5$  angstroms. La función de densidad y probabilidad radial  $P(r)$  se representa en la [Figura 8.7](#). El área bajo la curva entre dos posiciones radiales cualesquiera, por ejemplo  $r_1$  y  $r_2$ , da la probabilidad de encontrar el electrón en ese rango radial. Para encontrar la posición radial más probable, fijamos la primera derivada de esta función en cero ( $dP/dr = 0$ ) y resolvemos para  $r$ . La posición radial más probable no es igual al valor medio o esperado de la posición radial porque  $|\psi_{n00}|^2$  no es simétrica respecto a su valor máximo.



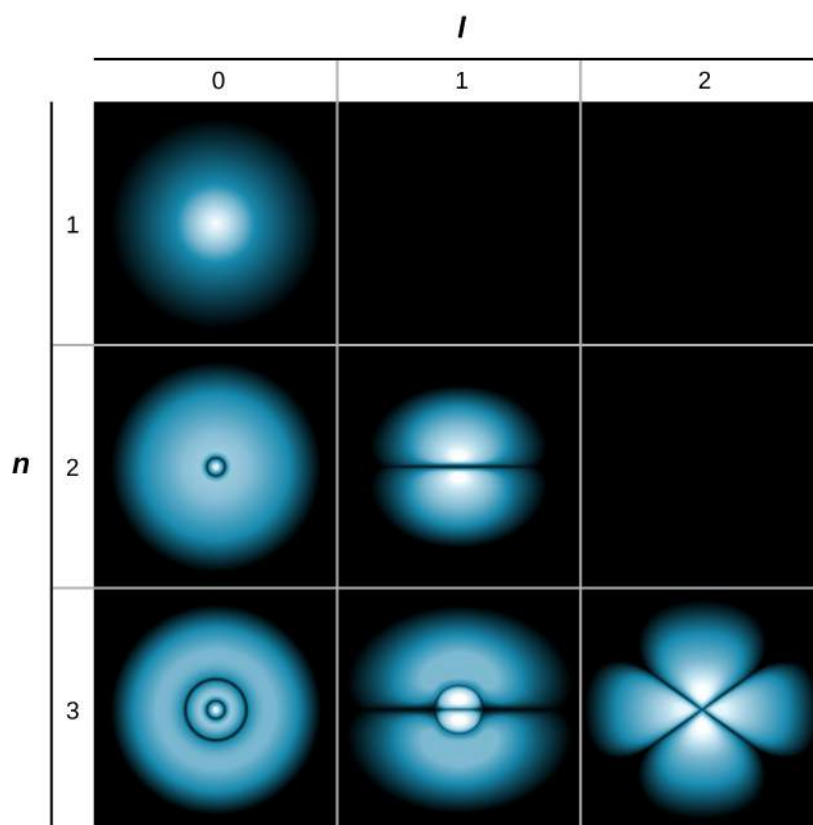
**FIGURA 8.7** La función de densidad y probabilidad radial para el estado fundamental del hidrógeno.

Si el electrón tiene momento angular orbital ( $l \neq 0$ ), entonces las funciones de onda que representan al electrón dependen de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ ; es decir,  $\psi_{nlm} = \psi_{nlm}(r, \theta, \phi)$ . Orbitales atómicos para tres estados con  $n = 2$  y  $l = 1$  se muestran en la [Figura 8.8](#). Un **orbital atómico** es una región en el espacio que encierra un determinado porcentaje (normalmente el 90 %) de la probabilidad del electrón. (A veces se habla de los orbitales atómicos como "nubes" de probabilidad). Observe que estas distribuciones se acentúan en ciertas direcciones. Esta direccionalidad es importante para los químicos cuando analizan cómo se unen los átomos para formar moléculas.



**FIGURA 8.8** Las distribuciones de densidad de probabilidad para tres estados con  $n = 2$  y  $l = 1$ . Las distribuciones se dirigen a lo largo de los ejes de la (a)  $x$ , (b)  $y$ , y la (c)  $z$ .

Una representación ligeramente diferente de la función de onda se da en la [Figura 8.9](#). En este caso, las regiones claras y oscuras indican lugares de probabilidad relativamente alta y baja, respectivamente. A diferencia del modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, el electrón no se mueve alrededor del núcleo del protón en una trayectoria bien definida. De hecho, el principio de incertidumbre hace imposible saber cómo llega el electrón de un lugar a otro.



**FIGURA 8.9** Nubes de probabilidad para el electrón en el estado fundamental y varios estados excitados del hidrógeno. La probabilidad de encontrar el electrón se indica mediante el tono de color; cuanto más claro sea el color, mayor será la probabilidad de encontrar el electrón.

## 8.2 Momento dipolar magnético orbital del electrón

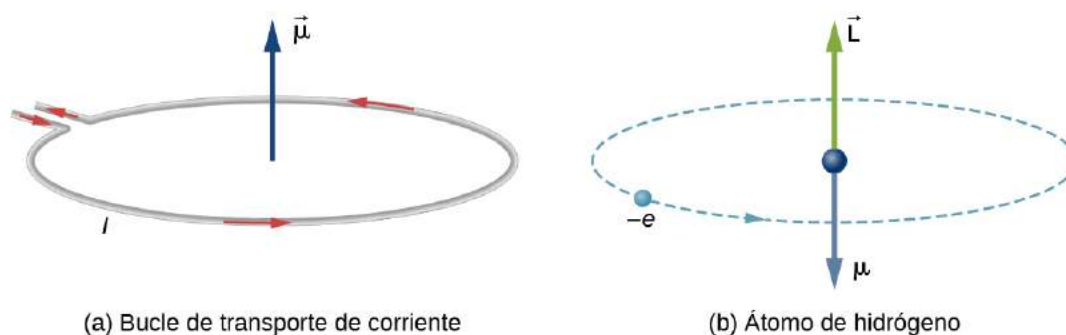
### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar por qué el átomo de hidrógeno tiene propiedades magnéticas.
- Explicar por qué los niveles de energía de un átomo de hidrógeno asociados al momento angular orbital se dividen por un campo magnético externo.
- Utilizar los números cuánticos para calcular la magnitud y la dirección del momento dipolar magnético orbital de un átomo de hidrógeno.

En el modelo de Bohr del hidrógeno, el electrón se mueve en una órbita circular alrededor del protón. El electrón pasa por un punto concreto del bucle en un tiempo determinado, por lo que podemos calcular una corriente  $I = Q/t$ . Un electrón que orbita un protón en un átomo de hidrógeno es, por tanto, análogo a la corriente que fluye por un alambre circular ([Figura 8.10](#)). En el estudio del magnetismo, vimos que un alambre conductor de corriente produce campos magnéticos. Por tanto es razonable concluir que el átomo de hidrógeno produce un campo magnético e interactúa con otros campos magnéticos.





**FIGURA 8.10** (a) La corriente que fluye por un cable circular es análoga a (b) un electrón que orbita un protón en un átomo de hidrógeno.

El **momento dipolar magnético orbital** es una medida de la fuerza del campo magnético producido por el momento angular orbital de un electrón. A partir de la [Fuerza y torque en un bucle de corriente](http://openstax.org/books/física-universitaria-volumen-2/pages/11-5-fuerza-y-torque-en-un-bucle-de-corriente) (<http://openstax.org/books/física-universitaria-volumen-2/pages/11-5-fuerza-y-torque-en-un-bucle-de-corriente>), la magnitud del momento dipolar magnético orbital para un bucle de corriente es

$$\mu = IA, \quad 8.13$$

donde  $I$  es la corriente y  $A$  es el área del bucle. (Para abreviar, nos referimos a esto como el momento magnético). La corriente  $I$  asociada a un electrón en órbita alrededor de un protón en un átomo de hidrógeno es

$$I = \frac{e}{T}, \quad 8.14$$

donde  $e$  es la magnitud de la carga del electrón y  $T$  es su periodo orbital. Si suponemos que el electrón viaja en una órbita perfectamente circular, el periodo orbital es

$$T = \frac{2\pi r}{v}, \quad 8.15$$

donde  $r$  es el radio de la órbita y  $v$  es la rapidez del electrón en su órbita. Dado que el área de un círculo es  $\pi r^2$ , el momento magnético absoluto es

$$\mu = IA = \frac{e}{\left(\frac{2\pi r}{v}\right)} \pi r^2 = \frac{evr}{2}. \quad 8.16$$

Es útil expresar el momento magnético  $\mu$  en términos del momento angular orbital ( $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ). Como el electrón orbita en un círculo, el vector de posición  $\vec{r}$  y el vector de momento  $\vec{p}$  forman un ángulo recto. Así, la magnitud del momento angular orbital es

$$L = |\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = rp \sin \theta = rp = rmv. \quad 8.17$$

Combinando estas dos ecuaciones, tenemos

$$\mu = \left(\frac{e}{2m_e}\right) L. \quad 8.18$$

En forma de vector completo, esta expresión se escribe como

$$\vec{\mu} = -\left(\frac{e}{2m_e}\right) \vec{L}. \quad 8.19$$

El signo negativo aparece porque el electrón tiene carga negativa. Observe que la dirección del momento magnético del electrón es antiparalela al momento angular orbital, como se muestra en [Figura 8.10\(b\)](#). En el modelo de Bohr del átomo, la relación entre  $\vec{\mu}$  y  $\vec{L}$  en la [Ecuación 8.19](#) es independiente del radio de la órbita. El momento magnético  $\mu$  también puede expresarse en términos del número cuántico angular orbital  $l$ .

Combinando la [Ecuación 8.18](#) y la [Ecuación 8.15](#), la magnitud del momento magnético es

$$\mu = \left( \frac{e}{2m_e} \right) L = \left( \frac{e}{2m_e} \right) \sqrt{l(l+1)} \hbar = \mu_B \sqrt{l(l+1)}. \quad 8.20$$

El componente  $z$  del momento magnético es

$$\mu_z = - \left( \frac{e}{2m_e} \right) L_z = - \left( \frac{e}{2m_e} \right) m \hbar = -\mu_B m. \quad 8.21$$

La cantidad  $\mu_B$  es una unidad fundamental del magnetismo llamada **magnetón de Bohr**, que tiene el valor  $9.3 \times 10^{-24}$  julio/tesla (J/T) o  $5.8 \times 10^{-5}$  eV/T. La cuantización del momento magnético es el resultado de la cuantificación del momento angular orbital.

Como veremos en la siguiente sección, el momento dipolar magnético total del átomo de hidrógeno se debe tanto al movimiento orbital del electrón como a su espín intrínseco. Por ahora, ignoramos el efecto del espín del electrón.

### EJEMPLO 8.3

#### Momento dipolar magnético orbital

¿Cuál es la magnitud del momento magnético dipolar orbital  $\mu$  de un electrón en el átomo de hidrógeno en el estado (a)  $s$ , (b)  $p$  y (c)  $d$ ? (Supongamos que el espín del electrón es cero).

#### Estrategia

El momento magnético del electrón está relacionado con su momento angular orbital  $L$ . Para el átomo de hidrógeno, esta cantidad está relacionada con el número cuántico angular orbital  $l$ . Los estados se dan en notación espectroscópica, que relaciona una letra ( $s$ ,  $p$ ,  $d$ , etc.) con un número cuántico.

#### Solución

La magnitud del momento magnético se da en la [Ecuación 8.20](#):

$$\mu = \left( \frac{e}{2m_e} \right) L = \left( \frac{e}{2m_e} \right) \sqrt{l(l+1)} \hbar = \mu_B \sqrt{l(l+1)}.$$

- Para el estado  $s$ ,  $l = 0$  por lo que tenemos  $\mu = 0$  y  $\mu_z = 0$ .
- Para el estado  $p$ ,  $l = 1$  y tenemos

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_B \sqrt{1(1+1)} = \sqrt{2} \mu_B \\ \mu_z &= -\mu_B m, \text{ donde } m = (-1, 0, 1), \text{ así que} \\ \mu_z &= \mu_B, 0, -\mu_B. \end{aligned}$$

- Para el estado  $d$ ,  $l = 2$  y obtenemos

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_B \sqrt{2(2+1)} = \sqrt{6} \mu_B \\ \mu_z &= -\mu_B m, \text{ donde } m = (-2, -1, 0, 1, 2), \text{ así que} \\ \mu_z &= 2\mu_B, \mu_B, 0, -\mu_B, -2\mu_B. \end{aligned}$$

#### Importancia

En el estado  $s$ , no hay momento angular orbital y, por tanto, no hay momento magnético. Esto no significa que el electrón esté en reposo, solo que el movimiento global del electrón no produce un campo magnético. En el estado  $p$ , el electrón tiene un momento magnético con tres valores posibles para el componente  $z$  de este momento magnético; esto significa que el momento magnético puede apuntar en tres direcciones polares

diferentes, cada una antiparalela al vector de momento angular orbital. En el estado  $d$ , el electrón tiene un momento magnético con cinco valores posibles para el componente  $z$  de este momento magnético. En este caso, el momento magnético puede apuntar en cinco direcciones polares diferentes.

Un átomo de hidrógeno tiene un campo magnético, por lo que esperamos que el átomo de hidrógeno interactúe con un campo magnético externo, como el empuje y la atracción entre dos barras magnéticas. A partir de la [Fuerza y el torque en un bucle de corriente \(http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-2/pages/11-5-fuerza-y-torque-en-un-bucle-de-corriente\)](http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-2/pages/11-5-fuerza-y-torque-en-un-bucle-de-corriente), sabemos que cuando un bucle de corriente interactúa con un campo magnético externo  $\vec{B}$ , experimenta un torque dado por

$$\vec{\tau} = I (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad 8.22$$

donde  $I$  es la corriente,  $\vec{A}$  es el área del bucle,  $\vec{\mu}$  es el momento magnético, y  $\vec{B}$  es el campo magnético externo. Este torque actúa para girar el vector de momento magnético del átomo de hidrógeno a fin de alinearlo con el campo magnético externo. Dado que el trabajo mecánico es realizado por el campo magnético externo sobre el átomo de hidrógeno, podemos hablar de transformaciones de energía en el átomo. La energía potencial del átomo de hidrógeno asociada a esta interacción magnética viene dada por la [Ecuación 8.23](#):

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad 8.23$$

Si el momento magnético es antiparalelo al campo magnético externo, la energía potencial es grande, pero si el momento magnético es paralelo al campo, la energía potencial es pequeña. El trabajo realizado en el átomo de hidrógeno para hacer girar el vector de momento magnético del átomo en la dirección del campo magnético externo está, por tanto, asociado a una caída de la energía potencial. Sin embargo, la energía del sistema se conserva, ya que una disminución de la energía potencial produce una radiación (la emisión de un fotón). Estas transiciones de energía están cuantizadas porque el momento magnético solo puede apuntar en determinadas direcciones.

Si el campo magnético externo apunta en la dirección de la  $z$  positiva, la energía potencial asociada al momento dipolar magnético orbital es

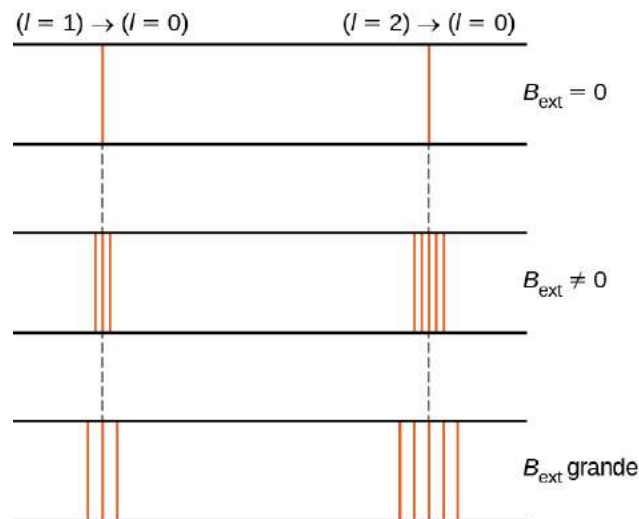
$$U(\theta) = -\mu_B \cos \theta = -\mu_z B = -(-\mu_B m) B = m\mu_B B, \quad 8.24$$

donde  $\mu_B$  es el magnetón de Bohr y  $m$  es el número cuántico de proyección del momento angular (o **número cuántico magnético orbital**), que tiene los valores

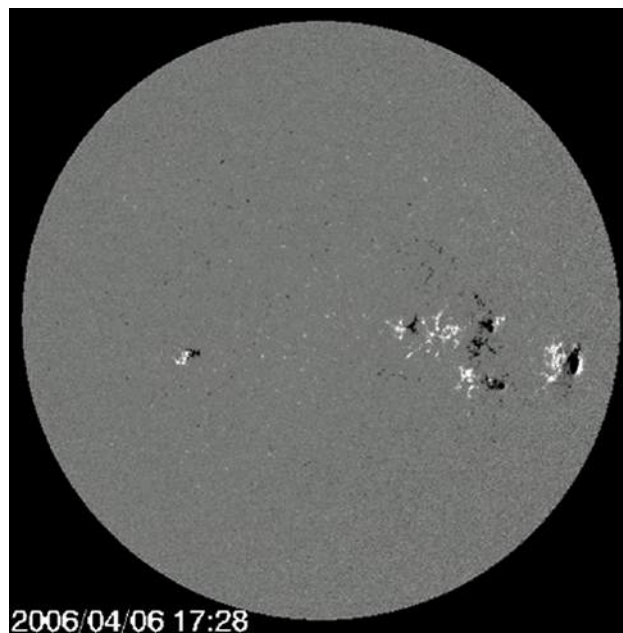
$$m = -l, -l + 1, \dots, 0, \dots, l - 1, l. \quad 8.25$$

Por ejemplo, en el estado del electrón  $l = 1$ , la energía total del electrón se divide en tres niveles de energía distintos que corresponden a  $U = -\mu_B B, 0, \mu_B B$ .

La división de los niveles de energía por un campo magnético externo se denomina **efecto Zeeman**. Ignorando los efectos del espín de los electrones, las transiciones del estado  $l = 1$  a un estado común de energía más baja producen tres líneas espectrales estrechamente espaciadas ([Figura 8.11](#), columna izquierda). Asimismo, las transiciones del estado  $l = 2$  producen cinco líneas espectrales muy espaciadas (columna de la derecha). La separación de estas líneas es proporcional a la fuerza del campo magnético externo. Este efecto tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, la división de las líneas en el espectro del hidrógeno del Sol se utiliza para determinar la fuerza de su campo magnético. Muchas de estas mediciones del campo magnético pueden utilizarse para hacer un mapa de la actividad magnética en la superficie del Sol, llamado **magnetograma** ([Figura 8.12](#)).



**FIGURA 8.11** El efecto Zeeman se refiere a la división de las líneas espectrales por un campo magnético externo. En la columna de la izquierda, la división de la energía se produce debido a las transiciones desde el estado ( $n = 2, l = 1$ ) a un estado de menor energía; y en la columna de la derecha, la división de energía se produce debido a las transiciones desde el estado ( $n = 2, l = 2$ ) a un estado de menor energía. La separación de estas líneas es proporcional a la fuerza del campo magnético externo.



**FIGURA 8.12** Un magnetograma del Sol. Los puntos brillantes y oscuros muestran una importante actividad magnética en la superficie del Sol (crédito: NASA, SDO).

## 8.3 Espín del electrón

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Expresar el estado de un electrón en un átomo de hidrógeno en términos de cinco números cuánticos.
- Utilizar los números cuánticos para calcular la magnitud y la dirección del espín y del momento magnético de un electrón.
- Explicar la estructura fina e hiperfina del espectro del hidrógeno en términos de interacciones magnéticas dentro del átomo de hidrógeno.

En esta sección, consideramos los efectos del espín del electrón. El espín introduce dos números cuánticos

adicionales en nuestro modelo del átomo de hidrógeno. Ambos fueron descubiertos observando la estructura fina de los espectros atómicos. El espín es una característica fundamental de todas las partículas, no solo de los electrones, y es análogo al espín intrínseco de los cuerpos extendidos alrededor de sus propios ejes, como la rotación diaria de la Tierra.

El espín se cuantifica de la misma manera que el momento angular orbital. Se ha encontrado que la magnitud del momento angular del espín intrínseco  $S$  de un electrón viene dada por

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar, \quad 8.26$$

donde  $s$  se define como el **número cuántico de espín**. Esto es similar a la cuantización de  $L$  dada en la [Ecuación 8.4](#), excepto que el único valor permitido en  $s$  para un electrón es  $s = 1/2$ . Se dice que el electrón es una "partícula de medio espín". El **número cuántico de proyección del espín**  $m_s$  se asocia a los *componentes*  $z$  del espín, expresados por

$$S_z = m_s \hbar. \quad 8.27$$

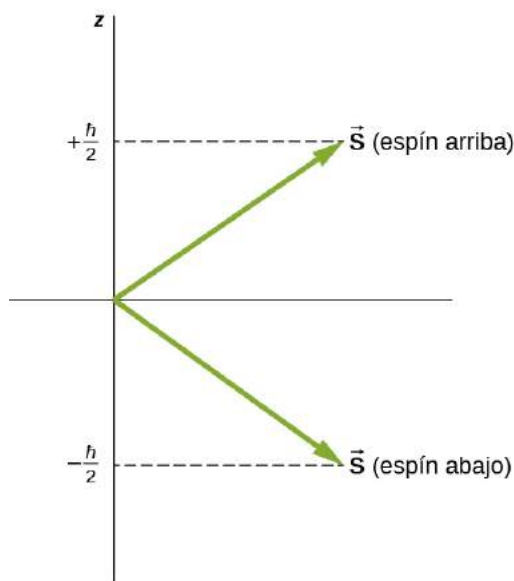
En general, los números cuánticos permitidos son

$$m_s = -s, -s+1, \dots, 0, \dots, +s-1, s. \quad 8.28$$

En el caso especial de un electrón ( $s = 1/2$ ),

$$m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}. \quad 8.29$$

Las direcciones del espín intrínseco están cuantizadas, al igual que lo estaban en el momento angular orbital. El estado  $m_s = -1/2$  se denomina "espín descendente" y tiene un componente  $z$  del espín,  $s_z = -1/2$ ; el estado  $m_s = +1/2$  se denomina estado de "espín ascendente" y tiene un componente  $z$  del espín,  $s_z = +1/2$ . Estos estados se muestran en la [Figura 8.13](#).



**FIGURA 8.13** Los dos estados posibles del espín del electrón.

El momento dipolar magnético intrínseco de un electrón  $\mu_e$  también puede expresarse en términos del número cuántico de espín. Por analogía con el momento angular orbital, la magnitud del momento magnético del electrón es

$$\mu_s = \left( \frac{e}{2m_e} \right) S. \quad 8.30$$

Según la teoría especial de la relatividad, este valor es bajo por un factor de 2. Así, en forma vectorial, el momento magnético de espín es

$$\vec{\mu} = \left( \frac{e}{m_e} \right) \vec{S}. \quad 8.31$$

El componente  $z$  del momento magnético es

$$\mu_z = - \left( \frac{e}{m_e} \right) S_z = - \left( \frac{e}{m_e} \right) m_s \hbar. \quad 8.32$$

El número cuántico de proyección del espín tiene solo dos valores ( $m_s = \pm 1/2$ ), por lo que el componente  $z$  del momento magnético también tiene solo dos valores:

$$\mu_z = \pm \left( \frac{e}{2m_e} \right) \hbar = \pm \mu_B \hbar, \quad 8.33$$

donde  $\mu_B$  es un magnetón de Bohr. Un electrón es magnético, así que esperamos que el electrón interactúe con otros campos magnéticos. Consideramos dos casos especiales: la interacción de un electrón libre con un campo magnético externo (no uniforme), y un electrón en un átomo de hidrógeno con un campo magnético producido por el momento angular orbital del electrón.



## EJEMPLO 8.4

### Espín de los electrones y radiación

Un átomo de hidrógeno en estado fundamental se coloca en un campo magnético uniforme externo ( $B = 1,5 \text{ T}$ ). Determine la frecuencia de la radiación producida en una transición entre los estados de espín ascendente y descendente del electrón.

#### Estrategia

El número cuántico de proyección del espín es  $m_s = \pm 1/2$ , por lo que el componente  $z$  del momento magnético es

$$\mu_z = \pm \left( \frac{e}{2m_e} \right) \hbar = \pm \mu_B \hbar.$$

La energía potencial asociada a la interacción entre el momento magnético del electrón y el campo magnético externo es

$$U = -\mu_z B = \mp \mu_B B.$$

La frecuencia de la luz emitida es proporcional a la diferencia de energía ( $\Delta E$ ) entre estos dos estados.

#### Solución

La diferencia de energía entre estos estados es  $\Delta E = 2\mu_B B$ , por lo que la frecuencia de la radiación producida es

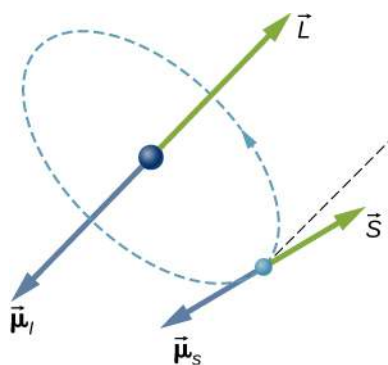
$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{2\mu_B B}{h} = \frac{2 \left( 5,79 \times \frac{10^{-5} \text{ eV}}{\text{T}} \right) (1,5 \text{ T})}{4,136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}} = 4,2 \times 10^{10} \frac{\text{ciclos}}{\text{s}}.$$

#### Importancia

El momento magnético del electrón se acopla con el campo magnético externo. La energía de este sistema es diferente si el electrón está alineado o no con el protón. La frecuencia de la radiación producida por una transición entre estos estados es proporcional a la diferencia de energía. Si duplicamos la intensidad del campo magnético, manteniendo todo lo demás constante, la frecuencia de la radiación se duplica y su longitud de onda se reduce a la mitad.

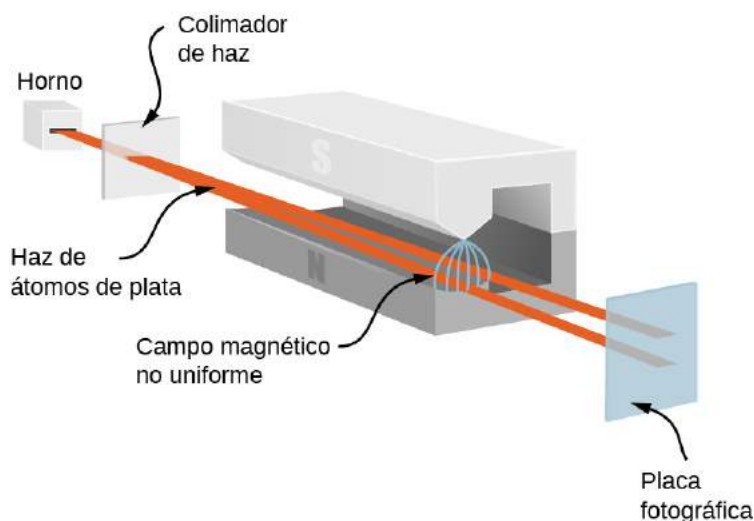
En un átomo de hidrógeno, el momento magnético del electrón puede interactuar con el campo magnético producido por el momento angular orbital del electrón, un fenómeno llamado **acoplamiento espín-órbita**. Los vectores del momento angular orbital ( $\vec{L}$ ), del momento magnético orbital ( $\vec{\mu}_l$ ), del momento angular del espín ( $\vec{S}$ ), y del momento magnético del espín ( $\vec{\mu}_s$ ) se muestran juntos en la [Figura 8.14](#).

Al igual que los niveles de energía de un átomo de hidrógeno pueden ser divididos por un campo magnético *externo*, los niveles de energía de un átomo de hidrógeno también son divididos por campos magnéticos *internos* del átomo. Si el momento magnético del electrón y el momento magnético orbital del electrón son antiparalelos, la energía potencial de la interacción magnética es relativamente alta, pero cuando estos momentos son paralelos, la energía potencial es relativamente pequeña. La transición desde cada uno de estos estados a un nivel de energía inferior da lugar a la emisión de un fotón de frecuencia ligeramente diferente. Es decir, el acoplamiento espín-órbita "divide" la línea espectral esperada de un electrón sin espín. La **estructura fina** del espectro del hidrógeno se explica por el acoplamiento espín-órbita.



**FIGURA 8.14** El acoplamiento espín-órbita es la interacción del momento magnético de espín de un electrón  $\vec{\mu}_s$  con su momento magnético orbital  $\vec{\mu}_l$ .

El experimento de Stern-Gerlach proporciona pruebas experimentales de que los electrones tienen momento angular del espín. El experimento hace pasar una corriente de átomos de plata (Ag) a través de un campo magnético externo no uniforme. El átomo de Ag tiene un momento angular orbital de cero y contiene un solo electrón no apareado en la capa exterior. Por lo tanto, el momento angular total del átomo de Ag se debe enteramente al espín del electrón exterior ( $s = 1/2$ ). Debido al espín de los electrones, los átomos de Ag actúan como pequeños imanes al pasar por el campo magnético. Estos "imanes" tienen dos orientaciones posibles, que corresponden a los estados de espín ascendente y descendente del electrón. El campo magnético desvía los átomos de espín hacia arriba en una dirección y los de espín hacia abajo en otra. Esto produce dos bandas distintas en una pantalla ([Figura 8.15](#)).



**FIGURA 8.15** En el experimento de Stern-Gerlach, un campo magnético externo no uniforme desvía un haz de



electrones en dos direcciones diferentes. Este resultado se debe a la cuantización del momento angular del espín.

Según las predicciones clásicas, el momento angular (y, por tanto, el momento magnético) del átomo de Ag puede apuntar en cualquier dirección, por lo que se espera, en cambio, una mancha continua en la pantalla. Las dos bandas resultantes del experimento de Stern-Gerlach proporcionan un apoyo sorprendente a las ideas de la mecánica cuántica.

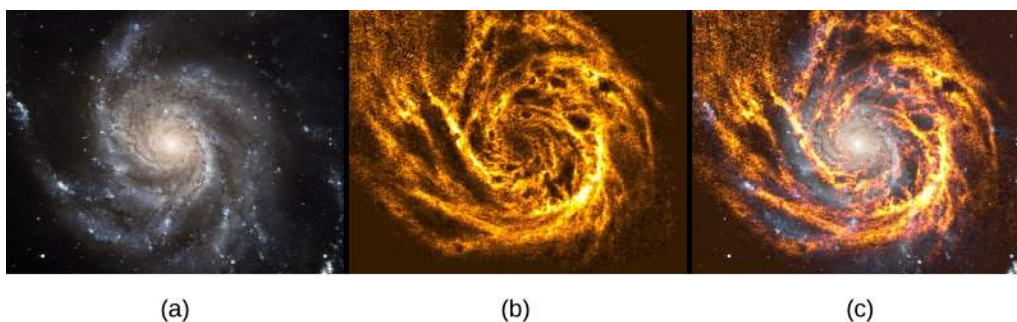
### INTERACTIVO

Visite las simulaciones interactivas [PhET Explorations: Experimento De Stern-Gerlach \(https://openstax.org/l/21sterngerlach\)](https://openstax.org/l/21sterngerlach) para aprender más sobre este experimento.

### COMPRUEBE LO APRENDIDO 8.2

Si el experimento de Stern-Gerlach arrojara cuatro bandas distintas en lugar de dos, ¿qué podría concluirse sobre el número cuántico de espín de la partícula cargada?

Al igual que el electrón, el protón tiene  $1/2$  espín y un momento magnético. (Según la teoría nuclear, este momento se debe al movimiento orbital de los cuarks dentro del protón) La **estructura hiperfina** del espectro del hidrógeno se explica por la interacción entre el momento magnético del protón y el momento magnético del electrón, una interacción conocida como acoplamiento espín-espín. La energía del sistema electrón-protón es diferente dependiendo de si los momentos están alineados o no. Las transiciones entre estos estados (**transiciones de espín-flip**) dan lugar a la emisión de un fotón con una longitud de onda de  $\lambda \approx 21$  cm (en el rango del radio). La línea de 21 cm en la espectroscopia atómica es una "huella digital" del gas hidrógeno. Los astrónomos aprovechan esta línea espectral para cartografiar los brazos espirales de las galaxias, que se componen principalmente de hidrógeno ([Figura 8.16](#)).



**FIGURA 8.16** La interacción magnética entre el electrón y el protón en el átomo de hidrógeno se utiliza para cartografiar los brazos espirales de la Galaxia del Molinete (NGC 5457). (a) La galaxia vista en luz visible; (b) la galaxia vista en radiación de hidrógeno de 21 cm; (c) la imagen compuesta de (a) y (b). Observe cómo la emisión de hidrógeno penetra en el polvo de la galaxia para mostrar los brazos espirales con gran claridad, mientras que el núcleo galáctico se muestra mejor en luz visible (crédito a: modificación del trabajo de la Agencia Espacial Europea [European Space Agency, ESA], Administración Nacional de Aeronáutica y del Espacio [National Aeronautics and Space Administration, NASA]; crédito b: modificación del trabajo de Fabian Walter).

Una especificación completa del estado de un electrón en un átomo de hidrógeno requiere cinco números cuánticos:  $n$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $s$  y  $m_s$ . Los nombres, símbolos y valores permitidos de estos números cuánticos se resumen en la [Tabla 8.4](#).

Nombre	Símbolo	Valores permitidos
Número cuántico principal	$n$	1, 2, 3, ...
Momento angular	$l$	0, 1, 2, ... $n - 1$

Nombre	Símbolo	Valores permitidos
Proyección del momento angular	$m$	$0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm l$
Espín	$s$	$1/2$ (electrones)
Proyección de espín	$m_s$	$-1/2, +1/2$

**TABLA 8.4** Resumen de los números cuánticos de un electrón en un átomo de hidrógeno

Observe que los números cuánticos intrínsecos introducidos en esta sección ( $s$  y  $m_s$ ) son válidos para muchas partículas, no solo para los electrones. Por ejemplo, los cuarks dentro de un núcleo atómico también son partículas de medio espín. Como veremos más adelante, los números cuánticos ayudan a clasificar las partículas subatómicas y entran en los modelos científicos que intentan explicar el funcionamiento del universo.

## 8.4 El principio de exclusión y la tabla periódica

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Explicar la importancia del principio de exclusión de Pauli para comprender la estructura atómica y el enlace molecular.
- Explicar la estructura de la tabla periódica en términos de energía total, momento angular orbital y espín de los electrones individuales de un átomo.
- Describir la configuración de electrones de los átomos en la tabla periódica.

Hasta ahora solo hemos estudiado el hidrógeno, el elemento químico más simple. Hemos descubierto que un electrón del átomo de hidrógeno puede especificarse completamente mediante cinco números cuánticos:

$n$ :	número cuántico principal	
$l$ :	número cuántico del momento angular	
$m$ :	número cuántico de la proyección del momento angular	<b>8.34</b>
$s$ :	número cuántico de espín	
$m_s$ :	número cuántico de proyección del espín	

Para construir el estado fundamental de un átomo neutro de varios electrones, imagine que empieza con un núcleo de carga  $Ze$  (es decir, un núcleo de número atómico  $Z$ ) y luego añade electrones  $Z$  uno a uno. Supongamos que cada electrón se mueve en un campo eléctrico esféricamente simétrico producido por el núcleo y todos los demás electrones del átomo. La suposición es válida porque los electrones se distribuyen aleatoriamente alrededor del núcleo y producen un campo eléctrico medio (y un potencial) que es esféricamente simétrico. El potencial eléctrico  $U(r)$  para cada electrón no sigue la forma simple  $-1/r$  debido a las interacciones entre los electrones, pero resulta que todavía podemos etiquetar cada estado individual de los electrones mediante números cuánticos,  $(n, l, m, s, m_s)$ . (El número cuántico de espín  $s$  es el mismo para todos los electrones, por lo que no se utilizará en esta sección).

La estructura y las propiedades químicas de los átomos se explican en parte por el **principio de exclusión de Pauli**: No hay dos electrones en un átomo que puedan tener los mismos valores para los cuatro números cuánticos  $(n, l, m, m_s)$ . Este principio está relacionado con dos propiedades de los electrones: Todos los electrones son idénticos ("cuando has visto un electrón, los has visto todos") y tienen un espín semientero ( $s = 1/2$ ). Los conjuntos de números cuánticos de muestra para los electrones de un átomo se dan en la [Tabla 8.5](#). De acuerdo con el principio de exclusión de Pauli, no hay dos filas de la tabla que tengan exactamente el mismo conjunto de números cuánticos.

$n$	$l$	$m$	$m_s$	Símbolo de la subcapa	Número de electrones: subcapa	Número de electrones: capa
1	0	0	$\frac{1}{2}$	1s	2	2
1	0	0	$-\frac{1}{2}$			
2	0	0	$\frac{1}{2}$	2s	2	8
2	0	0	$-\frac{1}{2}$			
2	1	-1	$\frac{1}{2}$	2p	6	
2	1	-1	$-\frac{1}{2}$			
2	1	0	$\frac{1}{2}$			
2	1	0	$-\frac{1}{2}$			
2	1	1	$\frac{1}{2}$			
2	1	1	$-\frac{1}{2}$			
3	0	0	$\frac{1}{2}$	3s	2	18
3	0	0	$-\frac{1}{2}$			
3	1	-1	$\frac{1}{2}$	3p	6	
3	1	-1	$-\frac{1}{2}$			
3	1	0	$\frac{1}{2}$			
3	1	0	$-\frac{1}{2}$			
3	1	1	$\frac{1}{2}$			
3	1	1	$-\frac{1}{2}$			
3	2	-2	$\frac{1}{2}$	3d	10	
3	2	-2	$-\frac{1}{2}$			
3	2	-1	$\frac{1}{2}$			
3	2	-1	$-\frac{1}{2}$			
3	2	0	$\frac{1}{2}$			
3	2	0	$-\frac{1}{2}$			
3	2	1	$\frac{1}{2}$			
3	2	1	$-\frac{1}{2}$			

$n$	$l$	$m$	$m_s$	Símbolo de la subcapa	Número de electrones: subcapa	Número de electrones: capa
3	2	1	$-\frac{1}{2}$			
3	2	2	$\frac{1}{2}$			
3	2	2	$-\frac{1}{2}$			

**TABLA 8.5** Estados electrónicos de los átomos Debido al principio de exclusión de Pauli, no hay dos electrones en un átomo que tengan el mismo conjunto de cuatro números cuánticos.

Los electrones con el mismo número cuántico principal  $n$  se dice que están en la misma capa, y los que tienen el mismo valor de  $l$  se dice que ocupan la misma subcapa. Un electrón en el estado  $n = 1$  de un átomo de hidrógeno se denota  $1s$ , donde el primer dígito indica la capa ( $n = 1$ ) y la letra indica la subcapa ( $s, p, d, f \dots$  corresponden a  $l = 0, 1, 2, 3 \dots$ ). Dos electrones en el estado  $n = 1$  se denotan como  $1s^2$ , donde el superíndice indica el número de electrones. Un electrón en el estado  $n = 2$  con  $l = 1$  se denota  $2p$ . La combinación de dos electrones en el estado  $n = 2$  y  $l = 0$  y tres electrones en el estado  $n = 2$  y  $l = 1$  se escribe como  $2s^2 2p^3$ , y así sucesivamente. Esta representación del estado de los electrones se denomina **configuración de electrones** del átomo. La configuración de electrones de varios átomos se indica en la [Tabla 8.6](#). Los electrones de la capa exterior de un átomo se denominan **electrones de valencia**. Los enlaces químicos entre los átomos de una molécula se explican por la transferencia y el intercambio de electrones de valencia.

Elemento	Configuración de electrones	Alineación del espín
H	$1s^1$	(↑)
He	$1s^2$	(↑↓)
Li	$1s^2 2s^1$	(↑)
Be	$1s^2 2s^2$	(↑↓)
B	$1s^2 2s^2 2p^1$	(↑↓)(↑)
C	$1s^2 2s^2 2p^2$	(↑↓)(↑)(↑)
N	$1s^2 2s^2 2p^3$	(↑↓)(↑)(↑)(↑)
O	$1s^2 2s^2 2p^4$	(↑↓)(↑↓)(↑)(↑)
F	$1s^2 2s^2 2p^5$	(↑↓)(↑↓)(↑↓)(↑)
Ne	$1s^2 2s^2 2p^6$	(↑↓)(↑↓)(↑↓)(↑↓)
Na	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$	(↑)
Mg	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$	(↑↓)
Al	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$	(↑↓)(↑)

**TABLA 8.6** Configuración de electrones en los electrones de un átomo El símbolo (↑) indica un electrón no apareado en la capa exterior, mientras que el símbolo (↑↓) indica un par de electrones de espín ascendente y descendente en una capa exterior.

El número máximo de electrones en una subcapa depende del valor del número cuántico del momento angular,  $l$ . Para un valor a dado  $l$ , hay estados de momento angular orbital  $2l + 1$ . Sin embargo, cada uno de estos estados puede ser llenado por dos electrones (espín ascendente y descendente, ↑↓). Por lo tanto, el número máximo de electrones en una subcapa es

$$N = 2(2l + 1) = 4l + 2.$$

8.35

En la subcapa  $2s$  ( $l = 0$ ), el número máximo de electrones es 2. En la subcapa  $2p$  ( $l = 1$ ), el número máximo de electrones es 6. Por lo tanto, el número máximo total de electrones en la subcapa  $n = 2$  (incluyendo tanto la subcapa  $l = 0$  y la subcapa 1) es  $2 + 6$  u 8. En general, el número máximo de electrones en la *enésima* capa es  $2n^2$ .



### EJEMPLO 8.5

#### Subcapas y totales para $n = 3$

¿Cuántas subcapas hay en la capa  $n = 3$ ? Identifique cada subcapa y calcule el número máximo de electrones que llenará cada una. Demuestre que el número máximo de electrones que llenan un átomo es  $2n^2$ .

### Estrategia

Las subcapas están determinadas por el valor de  $l$ ; por eso primero determinamos qué valores de  $l$  están permitidos, y luego aplicamos la ecuación "número máximo de electrones que pueden estar en una subcapa =  $2(2l + 1)$ " para hallar el número de electrones en cada subcapa.

### Solución

Dado que  $n = 3$ , sabemos que  $l$  puede ser 0, 1, o 2; por lo tanto, hay tres posibles subcapas. En la notación estándar, se denominan subcapas  $3s$ ,  $3p$  y  $3d$ . Ya hemos visto que dos electrones pueden estar en un estado  $s$ , y seis en un estado  $p$ , pero utilicemos la ecuación "número máximo de electrones que pueden estar en una subcapa =  $2(2l + 1)$ " para calcular el número máximo en cada uno:

$$3s \text{ tiene } l = 0; \text{ por lo tanto, } 2(2l + 1) = 2(0 + 1) = 2$$

$$3p \text{ tiene } l = 1; \text{ por lo tanto, } 2(2l + 1) = 2(2 + 1) = 6$$

$$3d \text{ tiene } l = 2; \text{ por lo tanto, } 2(2l + 1) = 2(4 + 1) = 10$$

$$\text{Total} = 18$$

(en la capa  $n = 3$ ).

La ecuación "número máximo de electrones que puede haber en una capa =  $2n^2$ " da el número máximo en la capa  $n = 3$  siendo

$$\text{Número máximo de electrones} = 2n^2 = 2(3)^2 = 2(9) = 18.$$

### Importancia

El número total de electrones en las tres posibles subcapas es, por lo tanto, el mismo que la fórmula  $2n^2$ . En la notación estándar (espectroscópica), una capa llena  $n = 3$  se denota como  $3s^2 3p^6 3d^{10}$ . Las capas no se llenan de una manera sencilla. Antes de que la capa  $n = 3$  esté completamente llena, por ejemplo, empezamos a hallar electrones en la capa  $n = 4$ .

La estructura de la tabla periódica (Figura 8.17) puede entenderse en términos de capas y subcapas y, en última instancia, la energía total, el momento angular orbital y el espín de los electrones del átomo. La discusión detallada de la tabla periódica se deja para un curso de química; aquí solo esbozamos sus características básicas. En esta discusión suponemos que los átomos son eléctricamente neutros; es decir, que tienen el mismo número de electrones y protones. (Recordemos que el número total de protones en un núcleo atómico se llama número atómico,  $Z$ )

En primer lugar, la tabla periódica se organiza en columnas y filas. La tabla se lee de izquierda a derecha y de arriba a abajo en el orden de aumento del número atómico  $Z$ . Los átomos que pertenecen a la misma columna o **grupo químico** comparten muchas de las mismas propiedades químicas. Por ejemplo, los átomos de Li y Na (en la primera columna) se unen a otros átomos de forma similar. La primera fila de la tabla corresponde a la capa  $1s$  ( $l = 0$ ) de un átomo.

Consideremos el procedimiento hipotético de añadir electrones, uno a uno, a un átomo. En el caso del hidrógeno (H) (arriba a la izquierda), la capa  $1s$  se llena con un electrón de espín ascendente o descendente ( $\uparrow$  o  $\downarrow$ ). Este electrón solitario se comparte fácilmente con otros átomos, por lo que el hidrógeno es químicamente activo. En el caso del helio (He) (arriba a la derecha), la capa  $1s$  se llena con un electrón con el espín ascendente y con otro ( $\uparrow\downarrow$ ) descendente. Esto "llena" la capa  $1s$ , por lo que un átomo de helio tiende a no compartir electrones con otros átomos. Se dice que el átomo de helio es químicamente inactivo, inerte o noble; asimismo, se dice que el gas helio es un gas inerte o noble.

### INTERACTIVO

Construya un átomo sumando y restando protones, neutrones y electrones. ¿Cómo cambia el elemento, la carga y la masa? Visite las simulaciones interactivas [PhET Explorations: Build an Atom \(https://openstax.org/l/21buildanatom\\_es\)](https://openstax.org/l/21buildanatom_es) (construya un átomo) para explorar las respuestas a estas preguntas.

El diagrama muestra la tabla periódica con los períodos numerados del 1 al 7 y los grupos del 1 al 18. Las subcapas s, p, d y f están etiquetadas y se muestran flechas que indican el orden de llenado de los orbitales. Se incluyen los elementos de las series de Lanthanides (4f) y Actinides (5f).

Un ejemplo de un elemento es el hidrógeno (H) en el grupo 1, período 1, con la subcapa 1s. Se indican el símbolo (H), el número de electrones (1) y la subcapa (1s).

FIGURA 8.17 La tabla periódica de los elementos, mostrando la estructura de las capas y subcapas.

La segunda fila corresponde a las subcapas  $2s$  y  $2p$ . En el caso del litio (Li) (arriba a la izquierda), la capa  $1s$  está llena con un electrón de espín ascendente y descendente ( $\uparrow\downarrow$ ) y la capa  $2s$  está llena con un electrón de espín ascendente o descendente ( $\uparrow$  o  $\downarrow$ ). Por lo tanto, su configuración de electrones es  $1s^2 2s^1$  o  $[\text{He}]2s$ , donde  $[\text{He}]$  indica un núcleo de helio. Al igual que el hidrógeno, el electrón solitario de la capa más externa se comparte fácilmente con otros átomos. En el caso del berilio (Be), la capa  $2s$  se llena con un electrón de espín ascendente y descendente ( $\uparrow\downarrow$ ), y tiene la configuración de electrones  $[\text{He}]2s^2$ .

A continuación, observemos la parte derecha de la tabla. En el caso del boro (B), las capas  $1s$  y  $2s$  están llenas y la  $2p$  ( $l = 1$ ) contiene un electrón con espín ya sea ascendente o descendente ( $\uparrow$  o  $\downarrow$ ). Desde el carbono (C) hasta el neón (N), llenamos la capa  $2p$ . El número máximo de electrones en las capas  $2p$  es de  $4l + 2 = 4(2) + 2 = 6$ . En el caso del neón (Ne), la capa  $1s$  está llena con un electrón de espín ascendente y descendente ( $\uparrow\downarrow$ ), y la capa  $2p$  está llena con seis electrones ( $\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$ ). Esto "llena" las subcapas  $1s$ ,  $2s$  y  $2p$ , por lo que, al igual que el helio, el átomo de neón tiende a no compartir electrones con otros átomos.

El proceso de llenado de electrones se repite en la tercera fila. Sin embargo, a partir de la cuarta fila, el patrón se rompe. El orden real de llenado de electrones viene dado por

$1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s, \mathbf{3d}, 4p, 5s, \mathbf{4d}, 5p, 6s, \mathbf{4f}, \mathbf{5d}, 6p, 7s, \dots$

Observe que las subcapas  $3d$ ,  $4d$ ,  $4f$  y  $5d$  (en negrita) se llenan fuera de orden; esto ocurre debido a las interacciones entre los electrones en el átomo, que hasta ahora hemos descuidado. Los **metales de transición** son elementos que se encuentran en la brecha entre las dos primeras columnas y las seis últimas y que contienen electrones que llenan la subcapa  $d$  ( $l = 1$ ). Como era de esperar, estos átomos están dispuestos en las columnas  $4l + 2 = 4(2) + 2 = 10$ . La estructura de la tabla periódica puede entenderse en términos de



cuantización de la energía total ( $n$ ), el momento angular orbital ( $l$ ) y el espín ( $s$ ). Las dos primeras columnas corresponden a las subcapas  $s$  ( $l = 0$ ), las siguientes seis columnas corresponden a la subcapa  $p$  ( $l = 1$ ), y la brecha entre estas columnas corresponde a la subcapa  $d$  ( $l = 2$ ).

La tabla periódica también ofrece información sobre el enlace molecular. Para ver esto, considere los átomos de la columna más a la izquierda (los llamados metales alcalinos, entre ellos: Li, Na y K). Estos átomos contienen un único electrón en la subcapa  $2s$ , que se dona fácilmente a otros átomos. Por el contrario, los átomos de la segunda columna a la derecha (los halógenos, como Cl, F y Br) son relativamente mezquinos a la hora de compartir electrones. Estos átomos preferirían aceptar un electrón, ya que solo les falta un electrón para llenar la capa ("para ser nobles").

Por lo tanto, si un átomo de Na se coloca cerca de un átomo de Cl, el átomo de Na dona libremente su electrón  $2s$  y el átomo de Cl lo acepta ávidamente. En el proceso, el átomo de Na (originalmente con carga neutra) se carga positivamente y el Cl (originalmente con carga neutra) se carga negativamente. Los átomos cargados se llaman iones. En este caso, los iones son  $\text{Na}^+$  y  $\text{Cl}^-$ , donde el superíndice indica la carga del ion. La atracción eléctrica (Coulomb) entre estos átomos forma una molécula de NaCl (sal). Un enlace químico entre dos iones se llama **enlace iónico**. Hay muchos tipos de enlaces químicos. Por ejemplo, en una molécula de oxígeno  $\text{O}_2$  los electrones se reparten por igual entre los átomos. La unión de los átomos de oxígeno es un ejemplo de **enlace covalente**.

## 8.5 Espectros atómicos y rayos X

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

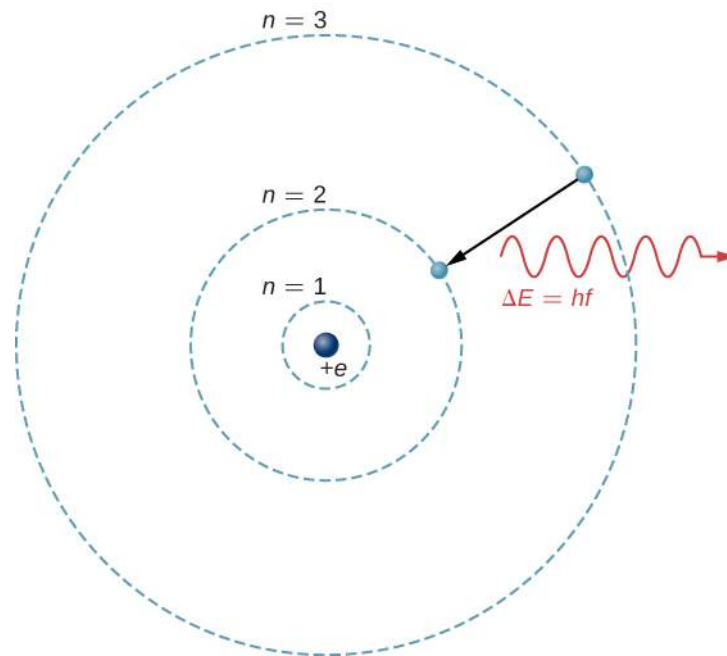
- Describir la absorción y la emisión de radiación en términos de niveles de energía atómica y diferencias de energía.
- Utilizar los números cuánticos para estimar la energía, la frecuencia y la longitud de onda de los fotones producidos por las transiciones atómicas en los átomos de varios electrones.
- Explicar los conceptos de radiación en el contexto de la fluorescencia atómica y los rayos X.

El estudio de los espectros atómicos es la fuente de la mayor parte de nuestros conocimientos sobre los átomos. En la ciencia moderna, los espectros atómicos se utilizan para identificar especies de átomos en una serie de objetos, desde galaxias lejanas hasta muestras de sangre en la escena del crimen.

La base teórica de la espectroscopia atómica es la transición de los electrones entre los niveles de energía de los átomos. Por ejemplo, si un electrón de un átomo de hidrógeno hace una transición desde la capa  $n = 3$  hasta la capa  $n = 2$ , el átomo emite un fotón con una longitud de onda

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{h \cdot c}{h \cdot f} = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{hc}{E_3 - E_2}, \quad 8.36$$

donde  $\Delta E = E_3 - E_2$  es la energía que se lleva el fotón y  $hc = 1.940 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ . Después de que esta radiación pasa por un espectrómetro, aparece como una línea espectral nítida en una pantalla. El modelo de Bohr de este proceso se muestra en la [Figura 8.18](#). Si el electrón absorbe posteriormente un fotón con energía  $\Delta E$ , el electrón vuelve a la capa  $n = 3$ . (Ya examinamos el modelo de Bohr en [Fotones y ondas de materia](#)).



**FIGURA 8.18** Una transición de electrones desde  $n = 3$  hasta la capa  $n = 2$  de un átomo de hidrógeno.

Para entender las transiciones atómicas en los átomos de varios electrones, es necesario considerar muchos efectos, incluyendo la fuerza de repulsión de Coulomb entre los electrones y las interacciones magnéticas internas (acoplamiento de espín-órbita y espín-espín). Afortunadamente, muchas propiedades de estos sistemas pueden entenderse despreciando las interacciones entre los electrones y representando cada electrón por su propia función de onda de una sola partícula  $\psi_{nlm}$ .

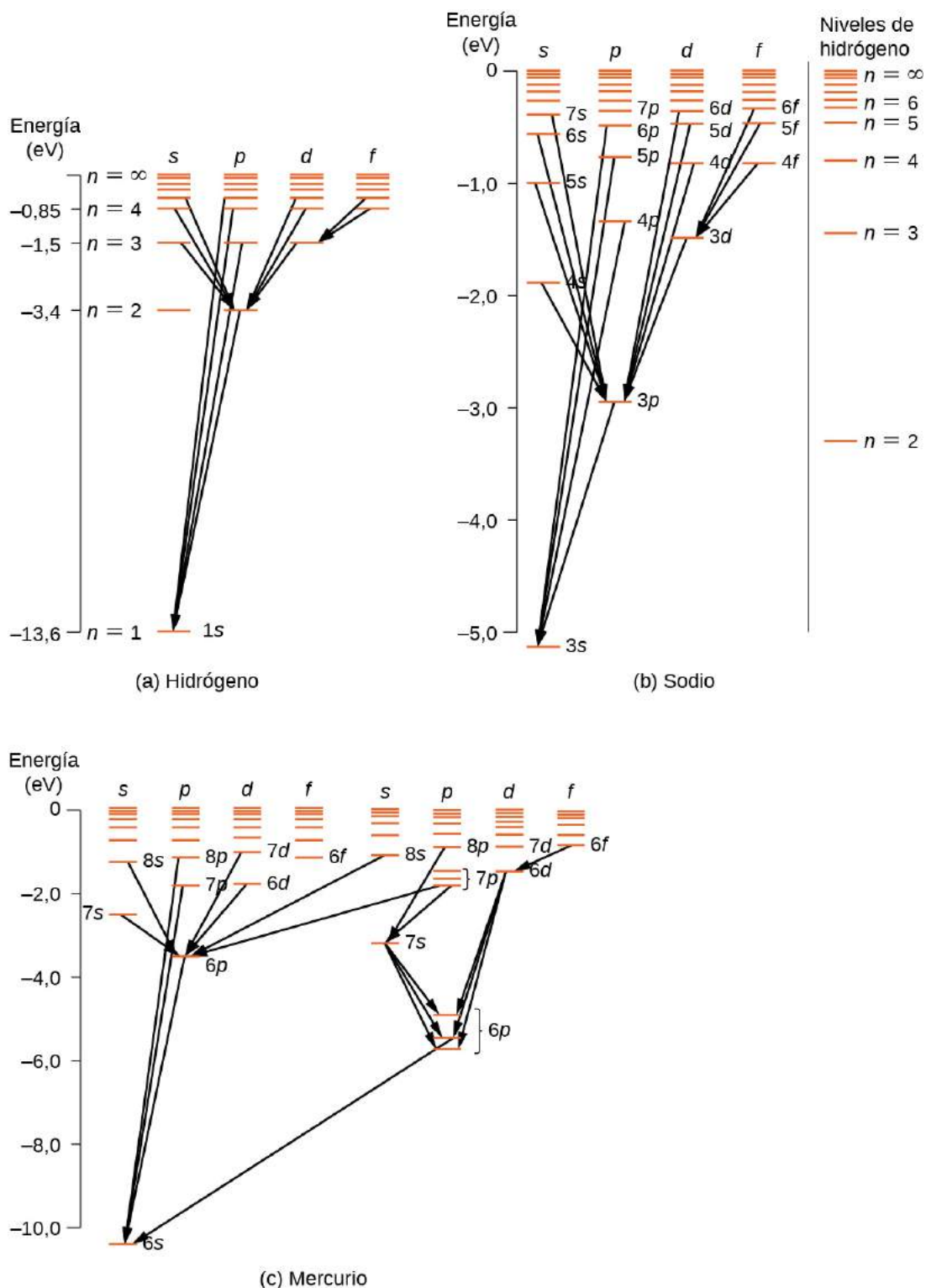
Las transiciones atómicas deben obedecer las **reglas de selección**. Estas reglas se derivan de los principios de la mecánica cuántica y la simetría. Las reglas de selección clasifican las transiciones como permitidas o prohibidas. (Las transiciones prohibidas ocurren, pero la probabilidad de la típica transición prohibida es muy pequeña) En un átomo hidrogenoide, las transiciones atómicas que implican interacciones electromagnéticas (la emisión y absorción de fotones) obedecen a la siguiente regla de selección:

$$\Delta l = \pm 1, \quad 8.37$$

donde  $l$  está asociado a la magnitud del momento angular orbital,

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar. \quad 8.38$$

En los átomos de varios electrones, se aplican reglas similares. Para ilustrar esta regla, considere las transiciones atómicas observadas en el hidrógeno (H), el sodio (Na) y el mercurio (Hg) ([Figura 8.19](#)). Las líneas horizontales de este diagrama corresponden a los niveles de energía atómica, y las transiciones permitidas por esta regla de selección se muestran mediante líneas trazadas entre estos niveles. Las energías de estos estados son del orden de unos pocos electronvoltios, y los fotones emitidos en las transiciones están en el rango visible. Técnicamente, las transiciones atómicas pueden violar la regla de selección, pero tales transiciones son poco comunes.



**FIGURA 8.19** Diagramas de nivel de energía en el (a) hidrógeno, (b) sodio y (c) mercurio. A efectos de comparación, los niveles de energía del hidrógeno se muestran en el diagrama del sodio.

El átomo de hidrógeno tiene el diagrama de niveles de energía más sencillo. Si ignoramos el espín del electrón, todos los estados con el mismo valor de  $n$  tienen la misma energía total. Sin embargo, el acoplamiento espín-órbita divide los estados  $n = 2$  en dos estados de momento angular ( $s$  y  $p$ ) de energías ligeramente diferentes. (Estos niveles no se encuentran desplazados verticalmente, porque el desdoblamiento de energía es demasiado pequeño para aparecer en este diagrama). Del mismo modo, el acoplamiento espín-órbita divide

los estados  $n = 3$  en tres estados de momento angular ( $s, p$  y  $d$ ).

El diagrama de niveles de energía del hidrógeno es similar al del sodio, porque ambos átomos tienen un electrón en la capa externa. El electrón de valencia del sodio se mueve en el campo eléctrico de un núcleo resguardado por los electrones de las capas internas, por lo que no experimenta un simple potencial de Coulomb  $1/r$  y su energía total depende tanto de  $n$  como de  $l$ . Curiosamente, el mercurio tiene dos diagramas de nivel de energía distintos; estos diagramas corresponden a dos estados de espín neto de sus electrones  $6s$  (de valencia).

### EJEMPLO 8.6

#### El doblete de sodio

El espectro del sodio se analiza con un espectrómetro. Se observan dos líneas estrechamente espaciadas con longitudes de onda de 589,00 nm y 589,59 nm. (a) Si el doblete corresponde al electrón excitado (de valencia) que hace la transición desde algún estado excitado hasta el estado  $3s$ , ¿cuál era el momento angular original del electrón? (b) ¿Cuál es la diferencia de energía entre estos dos estados excitados?

#### Estrategia

El sodio y el hidrógeno pertenecen a la misma columna o grupo químico de la tabla periódica, por lo que el sodio es "hidrogenoide". El electrón más externo del sodio está en la subcapa  $3s$  ( $l = 0$ ) y puede ser excitado a niveles de energía más altos. Como en el caso del hidrógeno, las transiciones posteriores a niveles de energía más bajos deben obedecer la regla de selección:

$$\Delta l = \pm 1.$$

Primero debemos determinar el número cuántico del estado inicial que satisface la regla de selección. Entonces, podemos utilizar este número para determinar la magnitud del momento angular orbital del estado inicial.

#### Solución

- a. Las transiciones permitidas deben obedecer la regla de selección. Si el número cuántico del estado inicial es  $l = 0$ , la transición está prohibida porque  $\Delta l = 0$ . Si el número cuántico del estado inicial es  $l = 2, 3, 4, \dots$  la transición está prohibida porque  $\Delta l > 1$ . Por lo tanto, el cuanto del estado inicial debe ser  $l = 1$ . El momento angular orbital del estado inicial es

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar = 1,41\hbar.$$

- b. Como el estado final de ambas transiciones es el mismo ( $3s$ ), la diferencia de energías de los fotones es igual a la diferencia de energías de los dos estados excitados. Utilizando la ecuación

$$\Delta E = hf = h \left( \frac{c}{\lambda} \right),$$

tenemos

$$\begin{aligned} \Delta E &= hc \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \\ &= (4,14 \times 10^{-15} \text{ eVs}) (3,00 \times 10^8 \text{ m/s}) \times \left( \frac{1}{589,00 \times 10^{-9} \text{ m}} - \frac{1}{589,59 \times 10^{-9} \text{ m}} \right) \\ &= 2,11 \times 10^{-3} \text{ eV}. \end{aligned}$$

#### Importancia

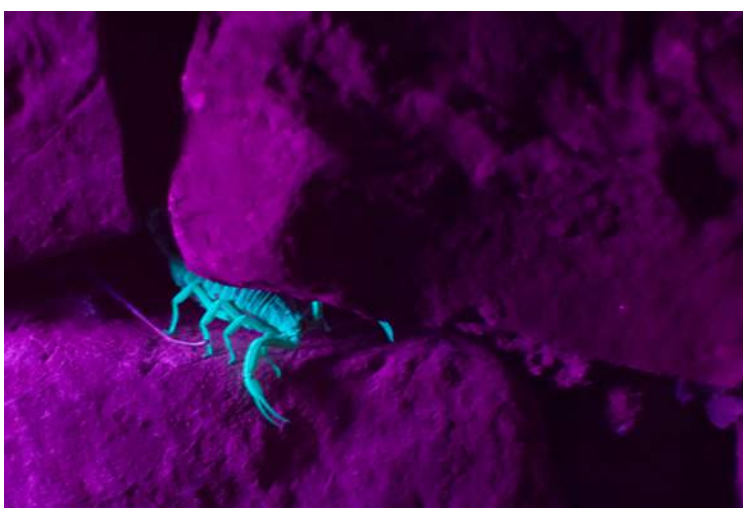
Para entender la dificultad de medir esta diferencia de energía, comparamos esta diferencia con la energía promedio de los dos fotones emitidos en la transición. Dada una longitud de onda promedio de 589,30 nm, la energía promedio de los fotones es

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(4,14 \times 10^{-15} \text{ eVs})(3,00 \times 10^8 \text{ m/s})}{589,30 \times 10^{-9} \text{ m}} = 2,11 \text{ eV}.$$

La diferencia de energía  $\Delta E$  es aproximadamente el 0,1 % (1 parte en 1000) de esta energía promedio. Sin embargo, un espectrómetro sensible puede medir la diferencia.

### Fluorescencia atómica

La **fluorescencia** se produce cuando un electrón de un átomo se excita varios pasos por encima del estado fundamental mediante la absorción de un fotón ultravioleta (UV) de alta energía. Una vez excitado, el electrón deja el estado excitado de dos maneras. El electrón puede volver a caer en el estado fundamental, emitiendo un fotón de la misma energía que lo excitó, o puede caer en una serie de pasos más pequeños, emitiendo varios fotones de baja energía. Algunos de estos fotones pueden estar en el rango visible. Los tintes fluorescentes en la ropa pueden hacer que los colores parezcan más brillantes a la luz del sol al convertir la radiación UV en luz visible. Las luces fluorescentes son más eficientes a la hora de convertir la energía eléctrica en luz visible que los filamentos incandescentes (aproximadamente cuatro veces más eficientes). La [Figura 8.20](#) muestra un escorpión iluminado por una lámpara UV. Las proteínas cercanas a la superficie de la piel emiten una luz azul característica.



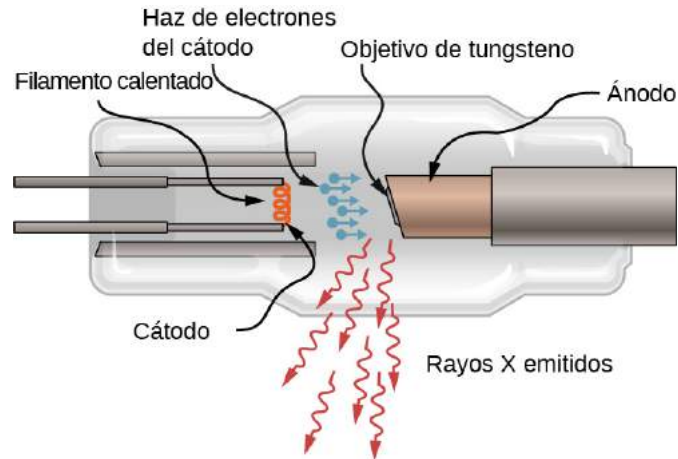
**FIGURA 8.20** Un escorpión brilla en azul bajo una lámpara UV (crédito: Ken Bosma).

### Rayos X

El estudio de las transiciones de energía atómica nos permite entender los rayos X y la tecnología de rayos X. Como toda la radiación electromagnética, los rayos X están formados por fotones. Los fotones de rayos X se producen cuando los electrones de las capas más externas de un átomo pasan a las capas internas. (Los átomos de hidrógeno no emiten rayos X, porque los niveles de energía de los electrones están demasiado espaciados para permitir la emisión de radiación de alta frecuencia) Las transiciones de este tipo suelen estar prohibidas porque los estados inferiores ya están llenos. Sin embargo, si una capa interna tiene una vacancia (falta un electrón interno, tal vez por haber sido golpeado por un electrón de alta velocidad), un electrón de una de las capas externas puede caer en energía para llenar la vacancia. La brecha energética para dicha transición es relativamente grande, por lo que la longitud de onda del fotón de rayos X radiado es relativamente corta.

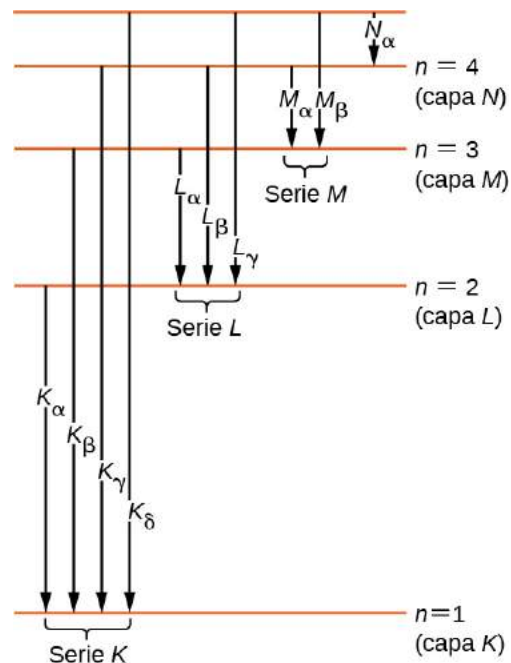
Los rayos X también pueden producirse bombardeando un objetivo metálico con electrones de alta energía, como se muestra en la [Figura 8.21](#). En la figura, los electrones se desprenden de un filamento y son acelerados por un campo eléctrico hacia un objetivo de tungsteno. Según la teoría clásica del electromagnetismo, *toda* partícula cargada que se acelera emite radiación. Por lo tanto, cuando el electrón choca con el objetivo de tungsteno, y se frena repentinamente, el electrón emite **radiación de frenado**. (La radiación de frenado se refiere a la radiación producida por cualquier partícula cargada que es frenada por un medio). En este caso, la radiación de frenado contiene una gama continua de frecuencias, porque los electrones chocarán con los átomos objetivo de formas ligeramente diferentes.

La radiación de frenado no es el único tipo de radiación que se produce en esta interacción. En algunos casos, un electrón colisiona con otro electrón de la capa interna de un átomo objetivo y lo expulsa del átomo, al estilo de una bola de billar. El estado vacío se llena cuando un electrón de una capa superior cae en el estado (caída del nivel de energía) y emite un fotón de rayos X.



**FIGURA 8.21** Un boceto de un tubo de rayos X. El objetivo de tungsteno emite rayos X.

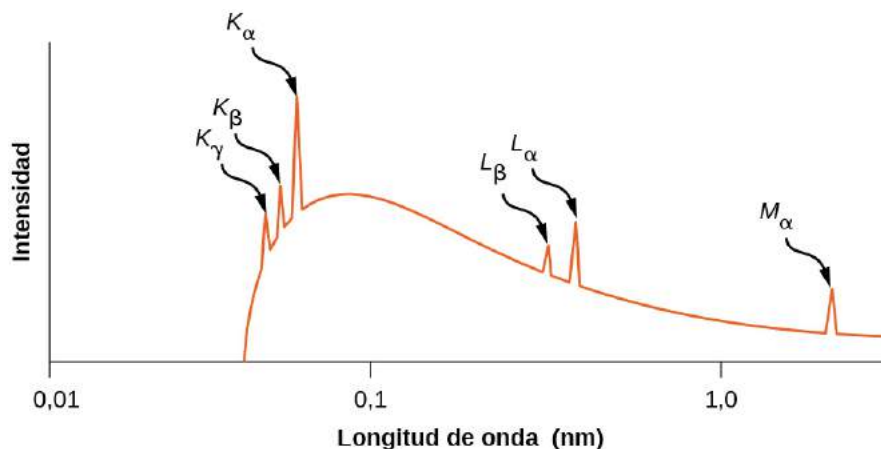
Históricamente, las líneas espectrales de rayos X se marcaban con letras ( $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , ...). Estas letras corresponden a las capas atómicas ( $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ ). Los rayos X producidos por una transición de cualquier capa superior a la capa  $K$  ( $n = 1$ ) se etiquetan como rayos X  $K$ . Los rayos X producidos en una transición desde la capa  $L$  ( $n = 2$ ) se llaman rayos X  $K_\alpha$ ; los rayos X producidos en una transición desde la capa  $M$  ( $n = 3$ ) se llaman rayos X  $K_\beta$ ; los rayos X producidos en una transición desde la capa  $N$  ( $n = 4$ ) se llaman rayos X  $K_\gamma$ ; y así sucesivamente. Las transiciones de las capas superiores a las capas  $L$  y  $M$  se etiquetan de forma similar. Estas transiciones se representan mediante un diagrama de niveles de energía en la [Figura 8.22](#).



**FIGURA 8.22** Transiciones de rayos X en un átomo.

La distribución de las longitudes de onda de los rayos X producidos al golpear el metal con un haz de electrones se muestra en la [Figura 8.23](#). Las transiciones de rayos X en el metal objetivo aparecen como picos en la parte superior de la curva de radiación de frenado. Las frecuencias de fotones correspondientes a los picos de la distribución de rayos X se denominan frecuencias características, ya que pueden utilizarse para

identificar el metal objetivo. La longitud de onda de corte aguda (justo por debajo del pico  $K_\gamma$ ) corresponde a un electrón que pierde toda su energía con un solo fotón. La radiación de longitudes de onda más cortas está prohibida por la conservación de la energía.



**FIGURA 8.23** Espectro de rayos X de un objetivo de plata. Los picos corresponden a las frecuencias características de los rayos X emitidos por la plata al ser golpeada por un haz de electrones.

## EJEMPLO 8.7

### Rayos X del aluminio

Estime la energía y la frecuencia características de los rayos X  $K_\alpha$  para el aluminio ( $Z = 13$ ).

#### Estrategia

Los rayos X  $K_\alpha$  se producen por la transición de un electrón en la capa  $L$  ( $n = 2$ ) a la capa  $K$  ( $n = 1$ ). Un electrón en la capa  $L$  "ve" una carga  $Z = 13 - 1 = 12$ , porque un electrón de la capa  $K$  resguarda la carga nuclear. (Recordemos que no hay dos electrones en la capa  $K$  porque el otro estado del electrón está vacante). La frecuencia del fotón emitido puede estimarse a partir de la diferencia de energía entre las capas  $L$  y  $K$ .

#### Solución

La diferencia de energía entre las capas  $L$  y  $K$  de un átomo de hidrógeno es de 10,2 eV. Suponiendo que otros electrones en la capa  $L$  o en capas de mayor energía no protegen la carga nuclear, la diferencia de energía entre las capas  $L$  y  $K$  en un átomo con  $Z = 13$  es de aproximadamente

$$\Delta E_{L \rightarrow K} \approx (Z - 1)^2 (10,2 \text{ eV}) = (13 - 1)^2 (10,2 \text{ eV}) = 1,47 \times 10^3 \text{ eV}. \quad 8.39$$

Con base en la relación  $f = (\Delta E_{L \rightarrow K}) / h$ , la frecuencia de los rayos X es

$$f = \frac{1,47 \times 10^3 \text{ eV}}{4,14 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}} = 3,55 \times 10^{17} \text{ Hz}.$$

#### Importancia

La longitud de onda de los rayos X típicos es de 0,1-10 nm. En este caso, la longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3,0 \times 10^8 \text{ m/s}}{3,55 \times 10^{17} \text{ Hz}} = 8,5 \times 10^{-10} = 0,85 \text{ nm}.$$

Por lo tanto, la transición  $L \rightarrow K$  en el aluminio produce una radiación de rayos X.

La producción de rayos X constituye una importante prueba de la mecánica cuántica. Según el modelo de Bohr, la energía de un rayo X  $K_\alpha$  depende de la carga nuclear o número atómico,  $Z$ . Si  $Z$  es grande, las fuerzas de Coulomb en el átomo son grandes, las diferencias de energía ( $\Delta E$ ) son grandes y, por tanto, la energía de los fotones radiados es grande. Para ilustrarlo, consideremos un solo electrón en un átomo de varios electrones.



Despreciando las interacciones entre los electrones, los niveles de energía permitidos son

$$E_n = -\frac{Z^2 (13,6 \text{ eV})}{n^2}, \quad 8.40$$

donde  $n = 1, 2, \dots$  y  $Z$  es el número atómico del núcleo. Sin embargo, un electrón en la capa  $L$  ( $n = 2$ ) "ve" una carga  $Z - 1$ , porque un electrón de la capa  $K$  resguarda la carga nuclear. (Recordemos que solo hay un electrón en la capa  $K$  porque el otro electrón fue "expulsado"). Por lo tanto, las energías aproximadas del electrón en las capas  $L$  y  $K$  son

$$E_L \approx -\frac{(Z-1)^2(13,6 \text{ eV})}{2^2}$$

$$E_K \approx -\frac{(Z-1)^2(13,6 \text{ eV})}{1^2}.$$

Por lo tanto, la energía transportada por un fotón en una transición de la capa  $L$  a la capa  $K$  es por lo tanto

$$\Delta E_{L \rightarrow K} = (Z - 1)^2(13,6 \text{ eV}) \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right)$$

$$= (Z - 1)^2(10,2 \text{ eV}),$$

donde  $Z$  es el número atómico. En general, la energía del fotón de rayos X para una transición de una capa exterior a la capa  $K$  es

$$\Delta E_{L \rightarrow K} = hf = \text{constante} \times (Z - 1)^2,$$

o

$$(Z - 1) = \text{constante} \sqrt{f}, \quad 8.41$$

donde  $f$  es la frecuencia de los rayos X  $K_\alpha$ . Esta ecuación es la **ley de Moseley**. Para valores grandes de  $Z$ , tenemos aproximadamente

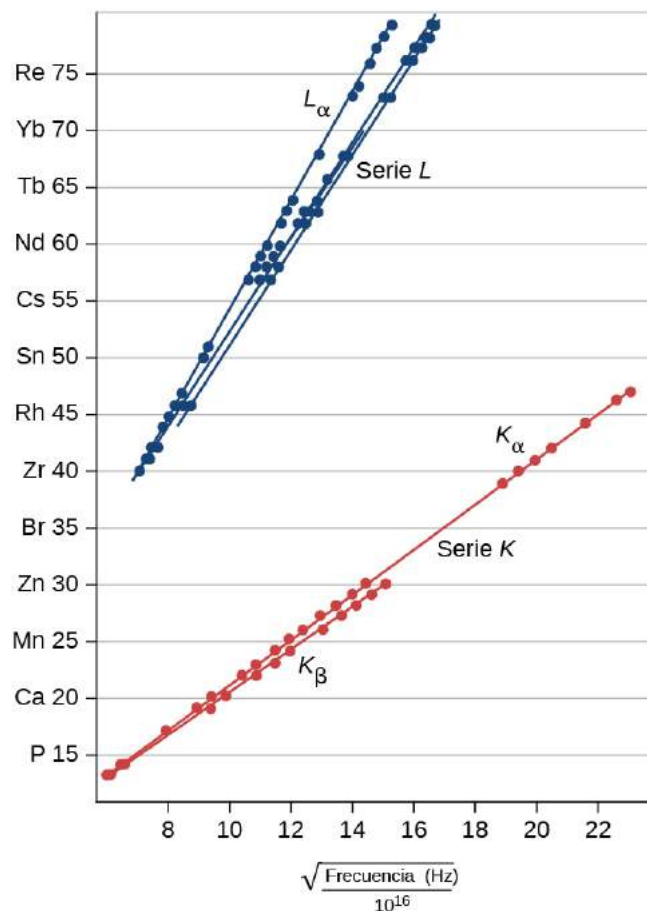
$$Z \approx \text{constante} \sqrt{f}.$$

Esta predicción puede comprobarse midiendo  $f$  en una variedad de objetivos metálicos. Este modelo se apoya si un gráfico de  $Z$  frente a los datos  $\sqrt{f}$  (llamado **gráfica de Moseley**) es lineal. La comparación de las predicciones del modelo y los resultados experimentales, tanto en la serie  $K$  como en la  $L$ , se muestra en la [Figura 8.24](#). Los datos apoyan el modelo de que los rayos X se producen cuando un electrón de la capa exterior cae en energía para llenar una vacancia en la capa interior.

### ✓ **COMPRUEBE LO APRENDIDO 8.3**

Los rayos X se producen al bombardear un objetivo metálico con electrones de alta energía. Si se sustituye el objetivo por otro con el doble de número atómico, ¿qué ocurre con la frecuencia de los rayos X?

## Gráfica de Moseley de rayos X característicos



**FIGURA 8.24** Una gráfica de Moseley. Estos datos fueron adaptados de los datos originales de Moseley (H. G. J. Moseley, *Philos. Mag.* (6) 77:703, 1914).

### EJEMPLO 8.8

#### Energía característica de los rayos X

Calcule la energía aproximada de los rayos X  $K_{\alpha}$  de un ánodo de tungsteno en un tubo de rayos X.

#### Estrategia

Dos electrones ocupan una capa  $K$  llena. Una vacancia en esta capa dejaría un electrón, por lo que la carga efectiva de un electrón en la capa  $L$  sería  $Z - 1$  en lugar de  $Z$ . Para el tungsteno,  $Z = 74$ , por lo que la carga efectiva es de 73. Este número puede utilizarse para calcular la diferencia del nivel de energía entre las capas  $L$  y  $K$  y, por tanto, la energía transportada por un fotón en la transición  $L \rightarrow K$ .

#### Solución

La  $Z$  efectiva es 73, por lo que la energía de los rayos X  $K_{\alpha}$  está dada por

$$E_{K_{\alpha}} = \Delta E = E_i - E_f = E_2 - E_1,$$

donde

$$E_1 = -\frac{Z^2}{1^2}E_0 = -\frac{73^2}{1}(13,6 \text{ eV}) = -72,5 \text{ keV}$$

y

$$E_2 = -\frac{Z^2}{2^2} E_0 = -\frac{73^2}{4} (13,6 \text{ eV}) = -18,1 \text{ keV}.$$

Por lo tanto,

$$E_{K\alpha} = -18,1 \text{ keV} - (-72,5 \text{ keV}) = 54,4 \text{ keV}.$$

### Importancia

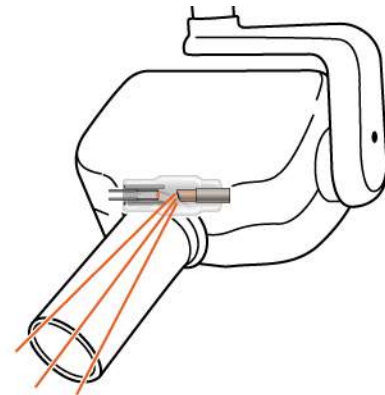
Esta gran energía de los fotones es típica de los rayos X. Las energías de los rayos X son progresivamente mayores en los elementos más pesados porque su energía aumenta aproximadamente como  $Z^2$ . Se necesita un voltaje de aceleración de más de 50.000 voltios para "expulsar" un electrón interno de un átomo de tungsteno.

### Tecnología de rayos X

Los rayos X tienen muchas aplicaciones, como el diagnóstico médico ([Figura 8.25](#)), la inspección de equipajes en los aeropuertos ([Figura 8.26](#)), e incluso la detección de grietas en componentes cruciales de los aviones. Las imágenes de rayos X más comunes se deben a las sombras. Como los fotones de los rayos X tienen una gran energía, penetran en materiales que son opacos a la luz visible. Cuanta más energía tiene un fotón de rayos X, más material penetra. La profundidad de penetración está relacionada con la densidad del material, así como con la energía del fotón. Cuanto más denso es el material, menos fotones de rayos X lo atraviesan y más oscura es la sombra. Los rayos X son eficaces para identificar fracturas óseas y tumores; sin embargo, la sobreexposición a los rayos X puede dañar las células de los organismos biológicos.



(a)



(b)

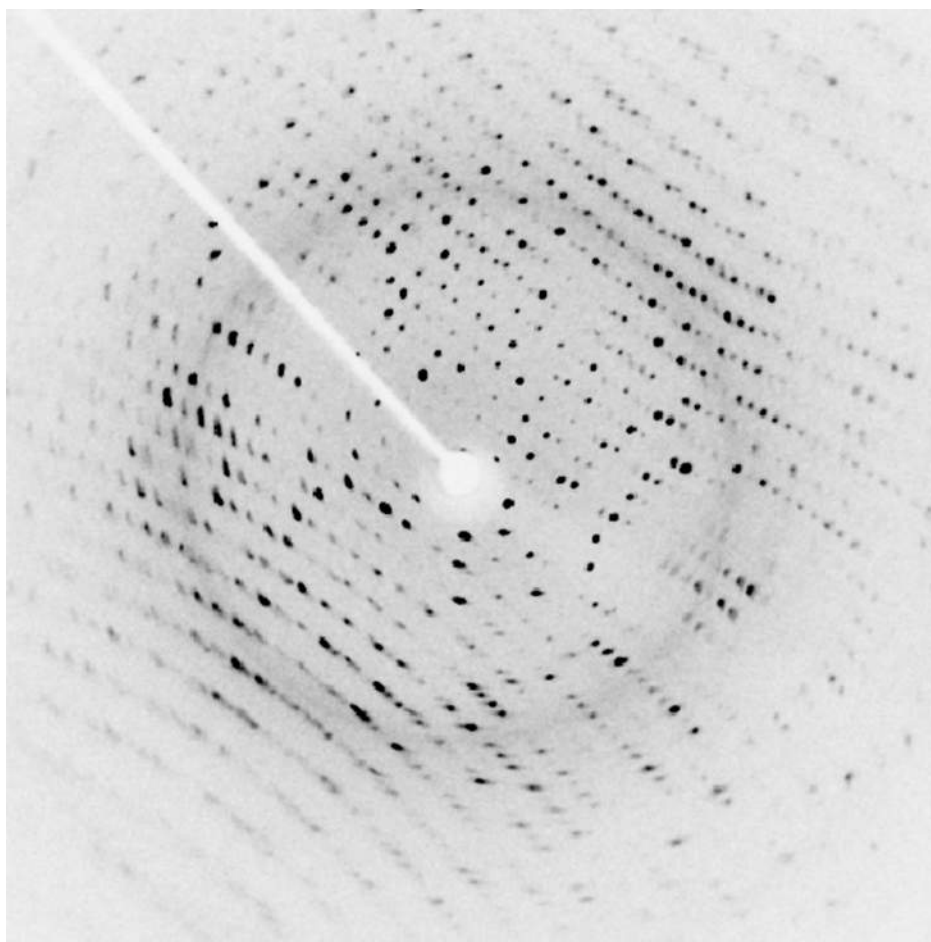
**FIGURA 8.25** (a) Una imagen de rayos X de los dientes de una persona. (b) Una máquina de rayos X típica en la consulta de un dentista produce una radiación de energía relativamente baja para minimizar la exposición del paciente (crédito: modificación de la obra de "Dmitry G"/Wikimedia Commons).



**FIGURA 8.26** Una imagen de rayos X de un equipaje. Cuanto más denso sea el material, más oscura será la sombra. Los colores de los objetos se relacionan con la composición del material: los objetos metálicos aparecen en azul en esta imagen (crédito: "IDuke"/Wikimedia Commons).

Una imagen de rayos X estándar proporciona una vista bidimensional del objeto. Sin embargo, en las aplicaciones médicas, este punto de vista no suele proporcionar suficiente información para sacar conclusiones firmes. Por ejemplo, en una imagen bidimensional de rayos X del cuerpo, los huesos pueden ocultar fácilmente los tejidos blandos o los órganos. El escáner TAC (tomografía axial computarizada) aborda este problema recogiendo numerosas imágenes de rayos X en "cortes" por todo el cuerpo. El complejo procesamiento informático de la absorción relativa de los rayos X, en diferentes direcciones, puede producir una imagen tridimensional muy detallada del cuerpo.

Los rayos X también pueden utilizarse para sondear las estructuras de los átomos y las moléculas. Consideremos los rayos X que inciden en la superficie de un sólido cristalino. Algunos fotones de rayos X se reflejan en la superficie, y otros se reflejan en el "plano" de los átomos justo debajo de la superficie. La interferencia entre estos fotones, en diferentes ángulos de incidencia, produce una bella imagen en una pantalla ([Figura 8.27](#)). La interacción de los rayos X con un sólido se denomina difracción de rayos X. El ejemplo más famoso del uso de la difracción de rayos X es el descubrimiento de la estructura de doble hélice del ADN.



**FIGURA 8.27** La difracción de rayos X del cristal de una proteína (lisozima de huevo de gallina) produjo este patrón de interferencia. El análisis del patrón arroja información sobre la estructura de la proteína. (crédito: "Del45"/Wikimedia Commons).

## 8.6 Láseres

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

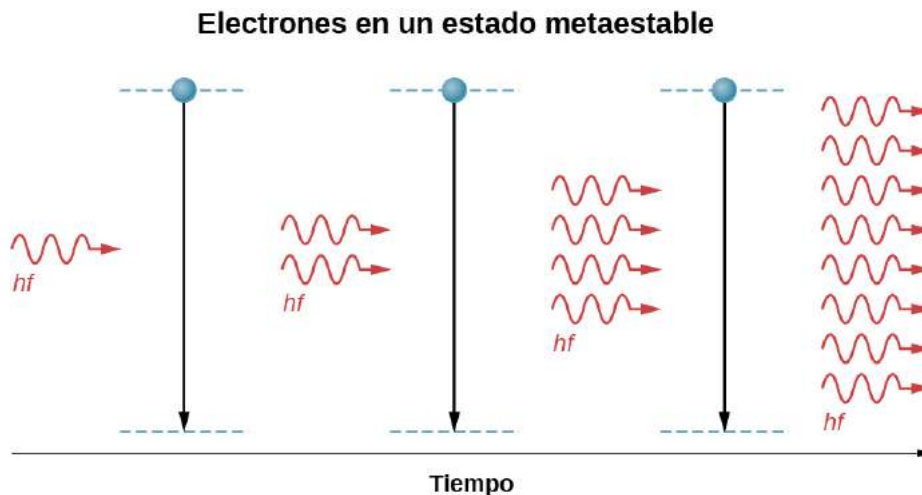
Al final de esta sección, podrá:

- Describir los procesos físicos necesarios para producir luz láser.
- Explicar la diferencia entre luz coherente e incoherente.
- Describir la aplicación del láser a un reproductor de CD y Blu-Ray.

Un **láser** es un dispositivo que emite luz coherente y monocromática. La luz es coherente si los fotones que la componen están en fase, y **monocromática** si los fotones tienen una sola frecuencia (color). Cuando un gas del láser absorbe la radiación, los electrones se elevan a diferentes niveles de energía. La mayoría de los electrones regresan inmediatamente al estado fundamental, pero otros permanecen en lo que se denomina **estado metaestable**. Es posible colocar una mayoría de estos átomos en un estado metaestable, una condición llamada **inversión de población**.

Cuando un fotón de energía perturba a un electrón en un estado metaestable ([Figura 8.28](#)), el electrón desciende al nivel de energía más bajo y emite un fotón adicional, y los dos fotones salen juntos. Este proceso se denomina **emisión estimulada**. Se produce con una probabilidad relativamente alta cuando la energía del fotón entrante es igual a la diferencia de energía entre los niveles de energía excitados y "desexcitados" del electrón ( $\Delta E = hf$ ). Por lo tanto, el fotón entrante y el fotón producido por la "desexcitación" tienen la misma energía,  $hf$ . Estos fotones encuentran más electrones en el estado metaestable, y el proceso se repite. El resultado es una cascada o reacción en cadena de desexcitaciones similares. La luz láser es coherente porque todas las ondas luminosas de la luz láser comparten la misma frecuencia (color) y la misma fase (dos puntos

cualesquiera a lo largo de una línea perpendicular a la dirección del movimiento están en la "misma parte" de la onda"). Un diagrama esquemático del patrón de ondas de luz coherente e incoherente se presenta en la [Figura 8.29](#).



**FIGURA 8.28** La física de un láser. Un fotón incidente de frecuencia  $f$  provoca una cascada de fotones de la misma frecuencia.

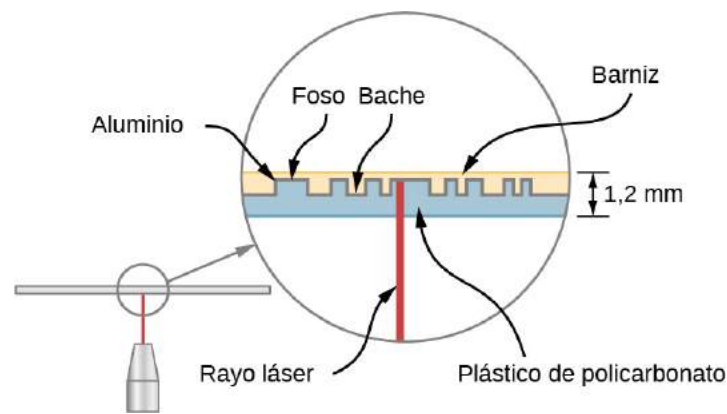


**FIGURA 8.29** Un patrón de ondas de luz coherente contiene ondas de luz de la misma frecuencia y fase. Un patrón de ondas de luz incoherente contiene ondas de luz de diferentes frecuencias y fases.

Los láseres se utilizan en una amplia gama de aplicaciones, como en la comunicación (líneas telefónicas de fibra óptica), el entretenimiento (espectáculos de luz láser), la medicina (eliminación de tumores y cauterización de vasos en la retina) y en los comercios minoristas (lectores de códigos de barras). Los láseres también pueden ser producidos por una gran variedad de materiales, incluyendo sólidos (por ejemplo, el cristal de rubí), gases (mezcla de helio y gas) y líquidos (tintes orgánicos). Recientemente, incluso se ha creado un láser con gelatina: ¡un láser comestible! A continuación, analizamos en detalle dos aplicaciones prácticas: Reproductores de CD y Blu-Ray.

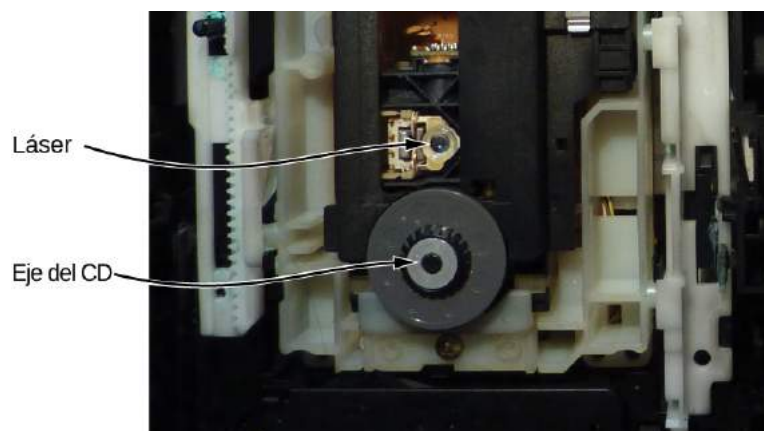
### Reproductor de CD

Un reproductor de CD lee la información digital almacenada en un disco compacto (CD). Un CD es un disco de plástico de 6 pulgadas de diámetro que contiene pequeñas "protuberancias" y "fosas" cerca de su superficie para codificar datos digitales o binarios ([Figura 8.30](#)). Las protuberancias y fosas aparecen a lo largo de una pista muy fina que sale en espiral desde el centro del disco. El ancho de la pista es inferior a la  $1/20^{\text{a}}$  parte del ancho de un cabello humano, y la altura de las protuberancias es aún más pequeña.



**FIGURA 8.30** Un disco compacto es un disco de plástico que utiliza protuberancias cerca de su superficie para codificar la información digital. La superficie del disco contiene múltiples capas, entre ellas una de aluminio y otra de plástico de policarbonato.

Un reproductor de CD utiliza un láser para leer esta información digital. La luz láser es adecuada para este propósito, porque la luz coherente puede enfocarse en un punto increíblemente pequeño y, por lo tanto, distinguir entre las protuberancias y fosos del CD. Tras el procesamiento por parte de los componentes del reproductor (incluyendo una rejilla de difracción, un polarizador y un colimador), la luz láser se enfoca mediante una lente sobre la superficie del CD. La luz que incide en una protuberancia ("tierra") se refleja simplemente, pero la luz que incide en un "foso" interfiere de forma destructiva, por lo que no vuelve la luz (los detalles de este proceso no son importantes para esta discusión). La luz reflejada se interpreta como un "1" y la no reflejada como un "0". La señal digital resultante se convierte en una señal analógica, y la señal analógica se introduce en un amplificador que alimenta un dispositivo como un par de auriculares. El sistema láser de un reproductor de CD se muestra en la [Figura 8.31](#).

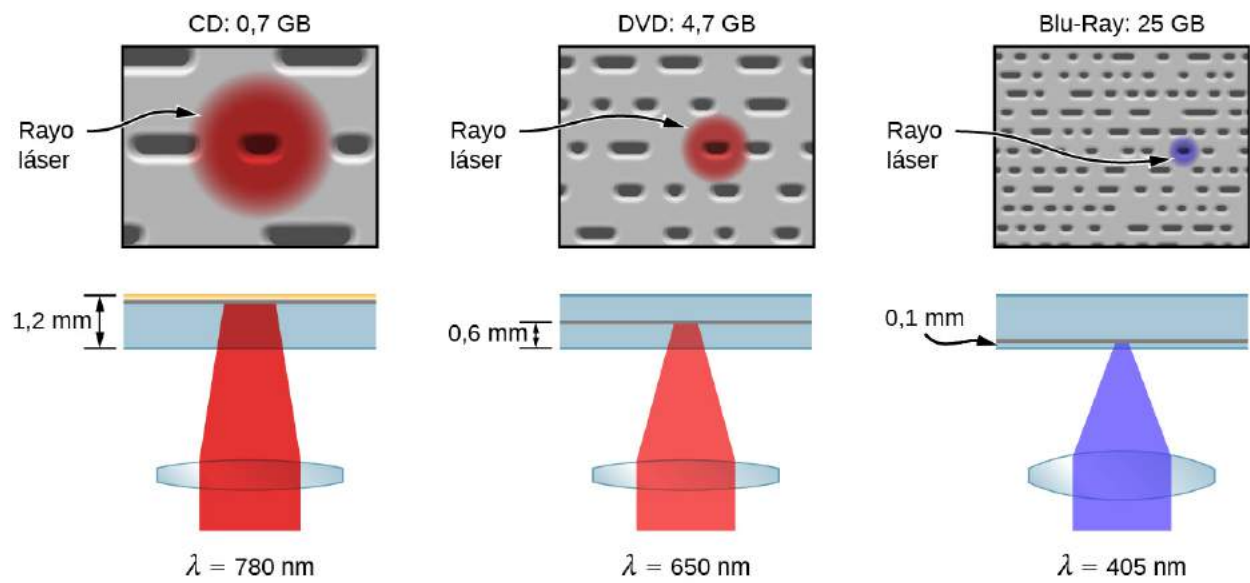


**FIGURA 8.31** Un reproductor de CD y su componente láser.

### Reproductor de Blu-Ray

Al igual que un reproductor de CD, un reproductor de Blu-Ray lee la información digital (vídeo o audio) almacenada en un disco y utiliza un láser para grabar esta información. Las fosas de un disco Blu-Ray son mucho más pequeñas y están más juntas que las de un CD, por lo que se puede almacenar mucha más información. En consecuencia, la potencia de resolución del láser debe ser mayor. Esto se consigue utilizando una luz láser azul de longitud de onda corta ( $\lambda = 405 \text{ nm}$ ), de ahí el nombre de "Blu-Ray". (Los CD y DVD utilizan luz láser roja). Los diferentes tamaños de las fosas y configuraciones de hardware de un reproductor de CD, DVD y Blu-Ray se muestran en la [Figura 8.32](#). Las fosas de un disco Blu-Ray son más del doble de pequeñas que las de un DVD o un CD. A diferencia de un CD, un disco Blu-Ray almacena los datos en una capa de policarbonato, que sitúa los datos más cerca de la lente y evita problemas de legibilidad. Se utiliza un revestimiento duro para proteger los datos al estar tan cerca de la superficie.





**FIGURA 8.32** Comparación de la resolución láser en un reproductor de CD, DVD y Blu-Ray.

## Revisión Del Capítulo

### Términos Clave

**acoplamiento espín-órbita** interacción entre el momento magnético del electrón y el campo magnético producido por el momento angular orbital del electrón.

**configuración de electrones** representación del estado de los electrones en un átomo, como  $1s^2 2s^1$  para el litio

**efecto Zeeman** división de los niveles de energía por un campo magnético externo

**electrón de valencia** electrón de la capa externa de un átomo que participa en el enlace químico.

**emisión estimulada** cuando un fotón de energía hace que un electrón en estado metaestable baje de energía emitiendo un fotón adicional.

**enlace covalente** enlace químico formado por el intercambio de electrones entre dos átomos.

**enlace iónico** enlace químico formado por la atracción eléctrica entre dos iones de carga opuesta.

**estado metaestable** estado en el que un electrón "permanece" en un estado excitado.

**estructura fina** estructura detallada de los espectros atómicos producidos por el acoplamiento espín-órbita.

**estructura hiperfina** estructura detallada de los espectros atómicos producidos por el acoplamiento espín-órbita.

**fluorescencia** radiación producida por la excitación y posterior disminución gradual de la excitación de un electrón en un átomo.

**función de densidad y probabilidad radial** función utilizada para determinar la probabilidad de que un electrón se encuentre en un intervalo espacial en  $r$ .

**gráfica de Moseley** gráfico del número atómico en función de la raíz cuadrada de la frecuencia de los rayos X.

**grupo químico** grupo de elementos en la misma columna de la tabla periódica que poseen propiedades químicas similares.

**inversión de población** condición en la que la mayoría de los átomos contienen electrones en un estado metaestable.

**láser** luz coherente producida por una cascada de disminución del estado excitado de los electrones.

**ley de Moseley** relación entre el número atómico y la frecuencia de los fotones de rayos X para la producción de estos rayos.

**luz coherente** luz que consiste en fotones de la

misma frecuencia y fase.

**magnetograma** representación pictórica, o mapa, de la actividad magnética en la superficie del Sol.

**magnetón de Bohr** momento magnético de un electrón, igual a  $9,3 \times 10^{-24} \text{ J/T}$  o  $5,8 \times 10^{-5} \text{ eV/T}$

**metal de transición** elemento que se encuentra en la brecha entre las dos primeras columnas y las seis últimas de la tabla de elementos que contiene electrones que llenan la subcapa  $d$ .

**momento dipolar magnético orbital** medida de la fuerza del campo magnético producido por el momento angular orbital del electrón.

**monocromático** luz que consiste en fotones con la misma frecuencia.

**número cuántico de espín ( $s$ )** número cuántico asociado al momento angular de espín de un electrón.

**número cuántico de momento angular orbital ( $l$ )** número cuántico asociado al momento angular orbital de un electrón en un átomo de hidrógeno.

**número cuántico de proyección de espín ( $m_s$ )** número cuántico asociado al componente  $z$  del momento angular de espín de un electrón.

**número cuántico de proyección del momento angular ( $m$ )** número cuántico asociado al componente  $z$  del momento angular orbital de un electrón en un átomo de hidrógeno.

**número cuántico magnético orbital** otro término para el número cuántico de proyección del momento angular.

**número cuántico principal ( $n$ )** número cuántico asociado a la energía total de un electrón en un átomo de hidrógeno.

**orbital atómico** región en el espacio que encierra un determinado porcentaje (normalmente el 90 %) de la probabilidad del electrón.

**principio de exclusión de Pauli** no hay dos electrones en un átomo que puedan tener los mismos valores para los cuatro números cuánticos ( $n, l, m, m_s$ )

**radiación de frenado** radiación producida al apuntar al metal con un haz de electrones de alta energía (o radiación producida por la aceleración de cualquier partícula cargada en un material).

**reglas de selección** reglas que determinan si las transiciones atómicas están permitidas o prohibidas (infrecuente).

**transiciones de espín-flip** transiciones atómicas entre los estados de un sistema electrón-protón

en las que los momentos magnéticos están

alineados y no alineados.

## Ecuaciones Clave

Momento angular orbital

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$$

componente z del momento angular orbital.

$$L_z = m\hbar$$

Función de densidad radial de probabilidad

$$P(r)dr = |\psi_{n00}|^2 4\pi r^2 dr$$

Momento angular de espín

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar$$

componente z del momento angular de espín

$$S_z = m_s\hbar$$

Momento magnético del espín del electrón

$$\vec{\mu}_s = \left(\frac{e}{m_e}\right)\vec{S}$$

Momento dipolar magnético orbital del electrón

$$\vec{\mu} = -\left(\frac{e}{2m_e}\right)\vec{L}$$

Energía potencial asociada a la interacción magnética entre el momento dipolar magnético orbital y un campo magnético externo  $\vec{B}$

$$U(\theta) = -\mu_z B = m\mu_B B$$

Número máximo de electrones en una subcapa de un átomo de hidrógeno

$$N = 4l + 2$$

Regla de selección de las transiciones atómicas en un átomo hidrogenoide

$$\Delta l = \pm 1$$

Ley de Moseley para la producción de rayos X

$$(Z - 1) = \text{constante} \sqrt{f}$$

## Resumen

### 8.1 El átomo de hidrógeno

- Un átomo de hidrógeno puede describirse en términos de su función de onda, densidad de probabilidad, energía total y momento angular orbital.
- El estado de un electrón en un átomo de hidrógeno está especificado por sus números cuánticos ( $n, l, m$ ).
- A diferencia del modelo del átomo de Bohr, el modelo de Schrödinger hace predicciones con base en declaraciones de probabilidad.
- Los números cuánticos de un átomo de hidrógeno pueden utilizarse para calcular información importante sobre el átomo.

### 8.2 Momento dipolar magnético orbital del electrón

- Un átomo de hidrógeno tiene propiedades magnéticas porque el movimiento del electrón actúa como un bucle de corriente.
- Los niveles de energía de un átomo de hidrógeno asociados al momento angular orbital se dividen por un campo magnético externo porque el momento angular magnético orbital interactúa con el campo.
- Los números cuánticos de un electrón en un átomo de hidrógeno pueden utilizarse para calcular la magnitud y la dirección del momento dipolar magnético orbital del átomo.

### 8.3 Espín del electrón

- El estado de un electrón en un átomo de

hidrógeno puede expresarse en términos de cinco números cuánticos.

- El número cuántico de momento angular del espín de un electrón es  $+\frac{1}{2}$ . El número cuántico de proyección del momento angular de espín es  $m_s = +\frac{1}{2}$  o  $-\frac{1}{2}$  (espín ascendente o espín descendente).
- Las estructuras finas e hiperfinas del espectro del hidrógeno se explican por las interacciones magnéticas dentro del átomo.

#### 8.4 El principio de exclusión y la tabla periódica

- El principio de exclusión de Pauli establece que no hay dos electrones en un átomo que puedan tener exactamente los mismos números cuánticos.
- La estructura de la tabla periódica de los elementos puede explicarse en términos de la energía total, el momento angular orbital y el espín de los electrones de un átomo.
- El estado de un átomo puede expresarse mediante su configuración de electrones, que describe las capas y subcapas que se llenan en el átomo.

#### 8.5 Espectros atómicos y rayos X

- La radiación es absorbida y emitida por

transiciones de niveles de energía atómicos.

- Los números cuánticos pueden utilizarse para estimar la energía, la frecuencia y la longitud de onda de los fotones producidos por las transiciones atómicas.
- La fluorescencia atómica se produce cuando un electrón de un átomo se excita varios pasos por encima del estado fundamental mediante la absorción de un fotón ultravioleta (UV) de alta energía.
- Los fotones de rayos X se producen cuando una vacancia en la capa interna de un átomo se llena con un electrón de la capa externa del átomo.
- La frecuencia de la radiación de rayos X está relacionada con el número atómico  $Z$  de un átomo.

#### 8.6 Láseres

- La luz láser es una luz coherente (monocromática y "en fase").
- La luz láser se produce por inversión de población y posterior "desexcitación" de electrones en un material (sólido, líquido o gas).
- Los reproductores de CD y Blu-Ray utilizan el láser para leer la información digital almacenada en los discos.

### Preguntas Conceptuales

#### 8.1 El átomo de hidrógeno

1. Identifique el significado físico de cada uno de los números cuánticos del átomo de hidrógeno.
2. Describa el estado básico del hidrógeno en términos de función de onda, densidad de probabilidad y orbitales atómicos.
3. Distinga entre el modelo del átomo de hidrógeno de Bohr y el de Schrödinger. En particular, compare la energía y el momento angular orbital de los estados fundamentales.

#### 8.2 Momento dipolar magnético orbital del electrón

4. Explique por qué las líneas espectrales del átomo de hidrógeno se dividen por un campo magnético externo. ¿Qué determina el número y el espaciado de estas líneas?
5. Se coloca un átomo de hidrógeno en un campo magnético. ¿Cuál de las siguientes cantidades se ve afectada? (a) la energía total; (b) el momento angular; (c) el componente  $z$  del momento angular; (d) el ángulo polar.
6. ¿De qué factores depende el momento dipolar

magnético orbital de un electrón?

#### 8.3 Espín del electrón

7. Explique cómo un átomo de hidrógeno en estado fundamental ( $l = 0$ ) puede interactuar magnéticamente con un campo magnético externo.
8. Compare el momento angular orbital con el momento angular de espín de un electrón en el átomo de hidrógeno.
9. Enumere todos los valores posibles de  $s$  y  $m_s$  de un electrón. ¿Hay partículas en las que estos valores sean diferentes?
10. Están los vectores de momento angular  $\vec{L}$  y  $\vec{S}$  necesariamente alineados?
11. ¿Qué es el acoplamiento espín-órbita?

#### 8.4 El principio de exclusión y la tabla periódica

12. ¿Qué es el principio de exclusión de Pauli? Explique la importancia de este principio para la comprensión de la estructura atómica y el enlace molecular.

13. Compare las configuraciones de electrones de los elementos de la misma columna de la tabla periódica.
14. Compare las configuraciones de electrones de los elementos que pertenecen a la misma fila de la tabla periódica de los elementos.

### 8.5 Espectros atómicos y rayos X

15. Los espectros atómicos y moleculares son discretos. ¿Qué significa discreto y cómo se relacionan los espectros discretos con la cuantización de la energía y los orbitales de los electrones en los átomos y las moléculas?
16. Discutir el proceso de absorción de la luz por la materia en función de la estructura atómica del medio absorbente.
17. NGC1763 es una nebulosa de emisión situada en la Gran Nube de Magallanes, en las afueras de nuestra Vía Láctea. La luz ultravioleta de las estrellas calientes ioniza los átomos de hidrógeno de la nebulosa. Cuando los protones y los electrones se recombinan, se emite luz en

el rango visible. Compara las energías de los fotones involucrados en estas dos transiciones.

18. ¿Por qué solo se emiten rayos X en las transiciones de los electrones a las capas internas? ¿Qué tipo de fotón se emite en las transiciones entre las capas exteriores?
19. ¿En qué se diferencian las órbitas permitidas a los electrones en los átomos de las órbitas permitidas a los planetas alrededor del sol?

### 8.6 Láseres

20. Distinga entre luz coherente y monocromática.
21. ¿Por qué es necesario un estado metaestable para la producción de luz láser?
22. ¿En qué se diferencia la luz de una bombilla incandescente de la luz láser?
23. ¿Por qué un reproductor de Blu-Ray puede leer más información que un reproductor de CD?
24. ¿Cuáles son las similitudes y diferencias entre un reproductor de CD y un reproductor de Blu-Ray?

## Problemas

### 8.1 El átomo de hidrógeno

25. La función de onda se evalúa en coordenadas rectangulares  $(x, y, z) = (2, 1, 1)$  en unidades arbitrarias. ¿Cuáles son las coordenadas esféricas de esta posición?
26. Si un átomo tiene un electrón en el estado  $n = 5$  con  $m = 3$ , ¿cuáles son los valores posibles de  $l$ ?
27. ¿Cuáles son los valores posibles de  $m$  para un electrón en el estado  $n = 4$ ?
28. ¿Qué limitaciones, si las hay, imponen un valor de  $m = 1$  en los otros números cuánticos para un electrón en un átomo?
29. ¿Cuántos estados posibles hay para el estado  $l = 4$ ?
30. (a) ¿Cuántos ángulos puede formar  $L$  con el eje de la  $z$  para un electrón  $l = 2$ ? (b) Calcule el valor del ángulo más pequeño.
31. La fuerza sobre un electrón es "el negativo del gradiente de la función de energía potencial". Utilice estos conocimientos y la [Ecuación 8.1](#) para demostrar que la fuerza sobre el electrón en un átomo de hidrógeno viene dada por la ley de fuerza de Coulomb.
32. ¿Cuál es el número total de estados con momento angular orbital  $l = 0$ ? (Ignore el espín del electrón).
33. La función de onda se evalúa en coordenadas

esféricas  $(r, \theta, \phi) = (\sqrt{3}, 45^\circ, 45^\circ)$ , donde el

valor de la coordenada radial se da en unidades arbitrarias. ¿Cuáles son las coordenadas rectangulares de esta posición?

34. La ley de la fuerza de Coulomb establece que la fuerza entre dos partículas cargadas es:  $F = k \frac{Qq}{r^2}$ . Utilice esta expresión para determinar la función de energía potencial.
35. Escriba una expresión para el número total de estados con momento angular orbital  $l$ .
36. Consideremos el hidrógeno en estado fundamental,  $\psi_{100}$ . (a) Utilice la derivada para determinar la posición radial para la que la densidad de probabilidad,  $P(r)$ , es un máximo. (b) Utilice el concepto de integral para determinar la posición radial media. (Esto se llama el valor esperado de la posición radial del electrón). Expresé sus respuestas en términos del radio de Bohr,  $a_0$ . Sugerencia: El valor esperado es el valor medio justo. (c) ¿Por qué estos valores son diferentes?
37. ¿Cuál es la probabilidad de que el electrón  $1s$  de un átomo de hidrógeno se encuentre fuera del radio de Bohr?
38. ¿Cuántos ángulos polares son posibles para un electrón en el estado  $l = 5$ ?
39. ¿Cuál es el número máximo de estados orbitales

de momento angular de los electrones en la capa  $n = 2$  de un átomo de hidrógeno? (Ignore el espín del electrón).

40. ¿Cuál es el número máximo de estados orbitales de momento angular de los electrones en la capa  $n = 3$  de un átomo de hidrógeno? (Ignore el espín del electrón).

### 8.2 Momento dipolar magnético orbital del electrón

41. Encuentre la magnitud del momento dipolar magnético orbital del electrón en el estado  $3p$ . (Expresar su respuesta en términos de  $\mu_B$ .)
42. Una corriente de  $I = 2A$  fluye a través de un alambre de forma cuadrada de 2 cm de lado. ¿Cuál es el momento magnético del alambre?
43. Estime la relación entre el momento magnético del electrón y el momento magnético del *muon* para el mismo estado de momento angular orbital. (Sugerencia:  $m_\mu = 105,7 \text{ MeV}/c^2$ )
44. Encuentre la magnitud del momento dipolar magnético orbital del electrón en el estado  $4d$ . (Expresar su respuesta en términos de  $\mu_B$ .)
45. Para un electrón  $3d$  en un campo magnético externo de  $2,50 \times 10^{-3} \text{ T}$ , encuentre (a) la corriente asociada al momento angular orbital, y (b) el torque máximo.
46. Un electrón en un átomo de hidrógeno está en el estado  $n = 5, l = 4$ . Encuentre el ángulo más pequeño que forma el momento magnético con el eje de la  $z$ . (Expresar su respuesta en términos de  $\mu_B$ .)
47. Encuentre la magnitud de torque mínimo  $|\vec{\tau}|$  que actúa sobre el dipolo magnético orbital de un electrón  $3p$  en un campo magnético externo de  $2,50 \times 10^{-3} \text{ T}$ .
48. Un electrón en un átomo de hidrógeno está en estado  $3p$ . Encuentre el ángulo más pequeño que forma el momento magnético con el eje de la  $z$ . (Expresar su respuesta en términos de  $\mu_B$ .)
49. Demuestre que  $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ . (Sugerencia: Se realiza una cantidad infinitesimal de trabajo para alinear el momento magnético con el campo externo. Este trabajo hace girar el vector del momento magnético en un ángulo  $-d\theta$  (hacia la dirección de la  $z$  positiva), donde  $d\theta$  es un cambio de ángulo positivo).

### 8.3 Espín del electrón

50. ¿Cuál es la magnitud del momento de espín de un electrón? (Expresar su respuesta en términos

de  $\hbar$ .)

51. ¿Cuáles son las posibles orientaciones polares del vector de momento de espín de un electrón?
52. Para  $n = 1$ , escriba todos los conjuntos posibles de números cuánticos ( $n, l, m, m_s$ ).
53. Se coloca un átomo de hidrógeno en un campo magnético uniforme externo ( $B = 200 \text{ T}$ ). Calcule la longitud de onda de la luz que se produce en una transición de un estado de espín ascendente a un estado de espín descendente.
54. Si el campo magnético del problema anterior se cuadruplica, ¿qué ocurre con la longitud de onda de la luz producida en una transición de un estado de espín ascendente a uno de espín descendente?
55. Si el momento magnético del problema anterior se duplica, ¿qué ocurre con la frecuencia de la luz producida en una transición de un estado de espín ascendente a un estado de espín descendente?
56. Para  $n = 2$ , escriba todos los conjuntos posibles de números cuánticos ( $n, l, m, m_s$ ).

### 8.4 El principio de exclusión y la tabla periódica

57. (a) ¿Cuántos electrones puede haber en la capa  $n = 4$ ?  
(b) ¿Cuáles son sus subcapas y cuántos electrones puede haber en cada una?
58. (a) ¿Cuál es el valor mínimo de  $l$  para una subcapa que contiene 11 electrones?  
(b) Si esta subcapa está en la capa  $n = 5$  ¿cuál es la notación espectroscópica de este átomo?
59. **Resultado poco razonable.** ¿Cuál de las siguientes notaciones espectroscópicas no está permitida? (a)  $5s^1$  (b)  $1d^1$  (c)  $4s^3$  (d)  $3p^7$  (e)  $5g^{15}$ . Indique qué norma se infringe para cada anotación no permitida.
60. Escriba la configuración de electrones del potasio.
61. Escriba la configuración de electrones del hierro.
62. El electrón de valencia del potasio es excitado a un estado  $5d$ . (a) ¿Cuál es la magnitud del momento angular orbital del electrón? (b) ¿Cuántos estados son posibles a lo largo de una dirección elegida?
63. (a) Si una subcapa de un átomo tiene nueve electrones, ¿cuál es el valor mínimo de  $l$ ? (b) ¿Cuál es la notación espectroscópica de este átomo, si esta subcapa forma parte de la capa  $n = 3$ ?



64. Escriba la configuración de electrones del magnesio.
65. Escriba la configuración de electrones del carbono.
66. Las magnitudes de los espines resultantes de los electrones de los elementos B a Ne cuando se encuentran en el estado básico son  $\sqrt{3}\hbar/2, \sqrt{2}\hbar, \sqrt{15}\hbar/2, \sqrt{2}\hbar, \sqrt{3}\hbar/2$ , y 0, respectivamente. Argumente la coherencia de esos espines con la regla de Hund.

### 8.5 Espectros atómicos y rayos X

67. ¿Cuál es la frecuencia mínima de un fotón necesaria para ionizar: (a) un ion de  $\text{He}^+$  en su estado fundamental? (b) y un ion de  $\text{Li}^{2+}$  en su primer estado excitado?
68. El ion  $\text{Li}^{2+}$  hace una transición atómica de un estado  $n = 4$  a un estado  $n = 2$ . (a) ¿Cuál es la energía emitida por el fotón durante la transición? (b) ¿Cuál es la longitud de onda del fotón?
69. La luz roja emitida por un láser de rubí tiene una longitud de onda de 694,3 nm. ¿Cuál es la diferencia de energía entre el estado inicial y el estado final correspondiente a la emisión de la luz?
70. La luz amarilla de una farola de vapor de sodio se produce por la transición de los átomos de sodio de un estado  $3p$  a un estado  $3s$ . Si la diferencia de energías entre esos dos estados es de 2,10 eV, ¿cuál es la longitud de onda de la luz amarilla?
71. Estime la longitud de onda de los rayos X  $K_\alpha$  del calcio.
72. Estime la frecuencia de los rayos X  $K_\alpha$  del cesio.
73. Los rayos X se producen al golpear un objetivo con un haz de electrones. Antes de golpear el objetivo, los electrones son acelerados por un campo eléctrico a través de una diferencia de energía potencial:  

$$\Delta U = -e\Delta V,$$
 donde  $e$  es la carga de un electrón y  $\Delta V$  es la diferencia de voltaje. Si  $\Delta V = 15.000$  voltios, ¿cuál es la longitud de onda mínima de la radiación emitida?
74. En el problema anterior, ¿qué ocurre con la longitud de onda mínima si se duplica el voltaje a través del tubo de rayos X?
75. Supongamos que el experimento del problema anterior se realiza con muones. ¿Qué ocurre con la longitud de onda mínima?
76. Un tubo de rayos X acelera un electrón con un voltaje aplicado de 50 kV hacia un objetivo metálico. (a) ¿Cuál es la radiación de rayos X de menor longitud de onda generada en el objetivo? (b) Calcule la energía del fotón en eV. (c) Explique la relación de la energía del fotón con el voltaje aplicado.
77. Un tubo de televisión a color genera algunos rayos X cuando su haz de electrones incide en la pantalla. ¿Cuál es la longitud de onda más corta de estos rayos X, si se utiliza un potencial de 30,0 kV para acelerar los electrones? (Tenga en cuenta que los televisores tienen un blindaje para evitar que la exposición de los espectadores a estos rayos X).
78. Un tubo de rayos X tiene un voltaje aplicado de 100 kV. (a) ¿Cuál es el fotón de rayos X más energético que puede producir? Expresé su respuesta en electronvoltios y julios. (b) Halle la longitud de onda de dicha radiografía.
79. La máxima energía característica de los fotones de rayos X proviene de la captura de un electrón libre en una vacancia de la capa  $K$ . ¿Cuál es esta energía del fotón en keV para el tungsteno, suponiendo que el electrón libre no tiene energía cinética inicial?
80. ¿Cuáles son las energías aproximadas de los rayos X  $K_\alpha$  y  $K_\beta$  del cobre?
81. Compare las longitudes de onda de los fotones de rayos X en el cobre y el oro.
82. Las energías aproximadas de los rayos X  $K_\alpha$  y  $K_\beta$  del cobre son  $E_{K_\alpha} = 8,00$  keV y  $E_{K_\beta} = 9,48$  keV, respectivamente. Determine la relación entre las frecuencias de los rayos X del oro y del cobre, y luego utilice este valor para estimar las energías correspondientes de los rayos X  $K_\alpha$  y  $K_\beta$  del oro.

### 8.6 Láseres

83. Un láser de dióxido de carbono utilizado en cirugía emite radiación infrarroja con una longitud de onda de  $10,6 \mu\text{m}$ . En 1,00 ms, este láser elevó la temperatura de  $1,00 \text{ cm}^3$  de carne a  $100^\circ\text{C}$  y esta se evaporó. (a) ¿Cuántos fotones se necesitaron? Puede suponer que la carne tiene el mismo calor de vaporización que el agua. (b) ¿Cuál fue la potencia mínima de salida durante el destello?
84. Un láser excímero utilizado para la corrección de la visión emite una radiación ultravioleta con una longitud de onda de 193 nm. (a) Calcule la energía de los fotones en eV. (b) Estos fotones se utilizan para evaporar el tejido corneal, que es



muy similar al agua en sus propiedades. Calcule la cantidad de energía necesaria por molécula de agua para realizar el cambio de fase de líquido a gas. Es decir, divida el calor de

vaporización en kJ/kg por el número de moléculas de agua en un kilogramo. (c) Convierta el resultado a eV y compárelo con la energía del fotón. Discuta las implicaciones.

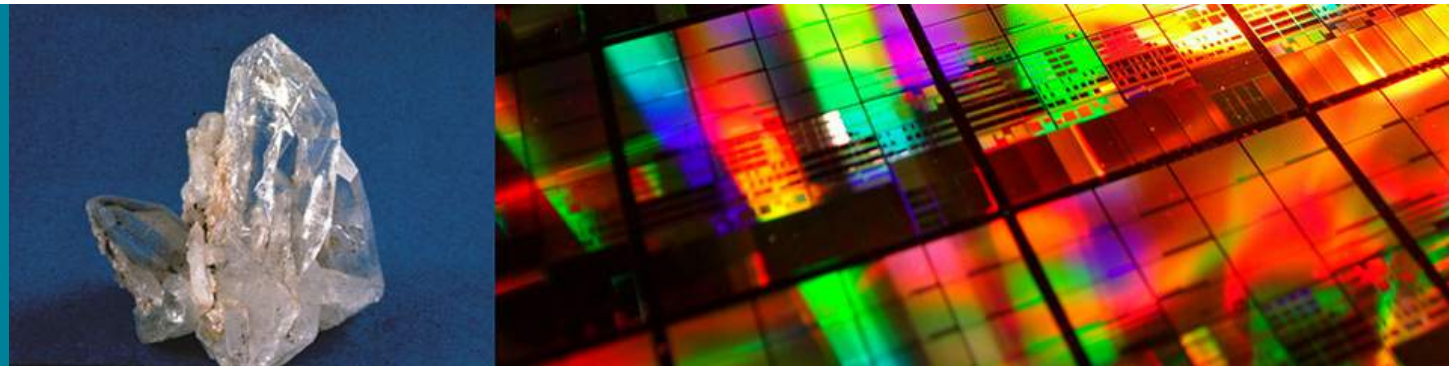
### Problemas Adicionales

85. Para un átomo de hidrógeno en estado excitado con número cuántico principal  $n$ , demuestre que el menor ángulo que puede formar el vector de momento angular orbital con respecto al eje de la  $z$  es  $\theta = \cos^{-1} \left( \sqrt{\frac{n-1}{n}} \right)$ .
86. ¿Cuál es la probabilidad de que el electrón  $1s$  de un átomo de hidrógeno se encuentre entre  $r = 0$  y  $r = \infty$ ?
87. Dibuje la función de energía potencial de un electrón en un átomo de hidrógeno. (a) ¿Cuál es el valor de esta función en  $r = 0$ ? en el límite que  $r = \infty$ ? (b) ¿Qué es lo poco razonable o inconsistente con el resultado anterior?
88. Halle el valor de  $l$ , el número cuántico del momento angular orbital, para la luna alrededor de la Tierra.
89. Demuestre que el número máximo de estados de momento angular orbital de los electrones en la *enésima* capa de un átomo es  $n^2$ . (Ignore el espín del electrón.) (Pista: Haga una tabla con el número total de estados de momento angular orbital para cada capa y halle el patrón).
90. ¿Cuál es la magnitud del momento magnético de un electrón?
91. ¿Cuál es el número máximo de estados de los electrones en la capa  $n = 5$ ?
92. Un átomo de hidrógeno en estado fundamental se coloca en un campo magnético uniforme y se emite un fotón en la transición de un estado de espín ascendente a uno descendente. La longitud de onda del fotón es  $168 \mu\text{m}$ . ¿Cuál es la intensidad del campo magnético?
93. Demuestre que el número máximo de estados de los electrones en la *enésima* capa de un átomo es  $2n^2$ .
94. El electrón de valencia del cloro está excitado a un estado  $3p$ . (a) ¿Cuál es la magnitud del momento angular orbital del electrón? (b) ¿Cuáles son los posibles valores del componente  $z$  de la medida angular?
95. ¿Cuáles de las siguientes notaciones están permitidas (es decir, que no violan ninguna de las reglas relativas a los valores de los números cuánticos)? (a)  $1s^1$ ; (b)  $1d^3$ ; (c)  $4s^2$ ; (d)  $3p^7$ ; (e)  $6h^{20}$
96. El ion  $\text{Be}^{3+}$  hace una transición atómica de un estado  $n = 3$  a un estado  $n = 2$ . (a) ¿Cuál es la energía emitida por el fotón durante la transición? (b) ¿Cuál es la longitud de onda del fotón?
97. La máxima energía característica de los fotones de rayos X proviene de la captura de un electrón libre en una vacancia de la capa  $K$ . ¿Cuál es la frecuencia de este fotón para el tungsteno, suponiendo que el electrón libre no tiene energía cinética inicial?
98. Deduzca una expresión para la relación de la frecuencia de los fotones de rayos X para dos elementos con números atómicos  $Z_1$  y  $Z_2$ .
99. Compare las longitudes de onda de los fotones de rayos X del cobre y la plata.
100. (a) ¿Qué voltaje debe aplicarse a un tubo de rayos X para obtener rayos X de una longitud de onda de  $0,0100 \text{ fm}$  para su uso en la exploración de los detalles de los núcleos? (b) ¿Qué es poco razonable en este resultado? (c) ¿Qué suposiciones son poco razonables o son inconsistentes?
101. Un estudiante en un laboratorio de física observa un espectro de hidrógeno con una rejilla de difracción con el fin de medir las longitudes de onda de la radiación emitida. En el espectro, observa una línea amarilla y encuentra que su longitud de onda es de  $589 \text{ nm}$ . (a) Suponiendo que es parte de las series de Balmer, determine  $n_i$ , el número cuántico principal del estado inicial. (b) ¿Qué es lo poco razonable en este resultado? (c) ¿Qué suposiciones son poco razonables o son inconsistentes?



# CAPÍTULO 9

## Física de la materia condensada



**Figura 9.1** La estructura cristalina del cuarzo le permite descomponerse en planos suaves que refractan la luz, lo que lo hace adecuado para la joyería. El silicio, elemento principal del cuarzo, también forma cristales en su forma pura, y estos cristales son la base de la industria electrónica de semiconductores en todo el mundo (crédito a la izquierda: modificación del trabajo del Servicio Geológico de los Estados Unidos).

### ESQUEMA DEL CAPITULO

- 9.1 Tipos de enlaces moleculares**
- 9.2 Espectros moleculares**
- 9.3 Enlaces en los sólidos cristalinos**
- 9.4 Modelo de electrones libres de los metales**
- 9.5 Teoría de bandas de los sólidos**
- 9.6 Semiconductores y dopaje**
- 9.7 Dispositivos semiconductores**
- 9.8 Superconductividad**

**INTRODUCCIÓN** En este capítulo examinaremos las aplicaciones de la mecánica cuántica en sistemas más complejos, como las moléculas, los metales, los semiconductores y los superconductores. Repasaremos y desarrollaremos los conceptos de los capítulos anteriores, incluyendo las funciones de onda, los orbitales y los estados cuánticos. También presentaremos muchos conceptos nuevos, como el enlace covalente, los niveles de energía rotacional, la energía de Fermi, las bandas de energía, el dopaje y los pares de Cooper.

El tema principal de este capítulo es la estructura cristalina de los sólidos. Durante siglos, los sólidos cristalinos han sido apreciados por su belleza, entre los que se encuentran gemas como diamantes y esmeraldas, así como cristales geológicos de cuarzo y minerales metálicos. Las estructuras cristalinas de los semiconductores tales como el silicio también han hecho posible la industria electrónica actual. En este capítulo estudiamos cómo las estructuras de los sólidos les confieren propiedades que van desde la resistencia y la transparencia hasta la conductividad eléctrica.

## 9.1 Tipos de enlaces moleculares

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Distinguir entre los diferentes tipos de enlaces moleculares.
- Determinar la energía de disociación de una molécula utilizando los conceptos de energía de ionización, afinidad electrónica y fuerza de Coulomb.
- Describir el enlace covalente en términos de simetría de intercambio.
- Explicar la estructura física de una molécula en términos del concepto de hibridación.

La mecánica cuántica ha tenido un éxito extraordinario al momento de explicar la estructura y el enlace de las moléculas, por lo que es la base de toda la química. La química cuántica, como se denomina a veces, explica cuestiones tan esenciales como por qué existen las moléculas de  $\text{H}_2\text{O}$ , por qué el ángulo de enlace entre los átomos de hidrógeno en esta molécula es precisamente  $104,5^\circ$ , y por qué estas moléculas se enlazan para formar agua líquida a temperatura ambiente. La aplicación de la mecánica cuántica a las moléculas puede ser muy difícil desde el punto de vista matemático, por lo que nuestra discusión será únicamente cualitativa.

Al estudiar las moléculas y luego los sólidos, utilizaremos muchos modelos científicos diferentes. En algunos casos, consideramos una molécula o un cristal como un conjunto de núcleos puntuales con electrones que zumban alrededor del exterior en trayectorias bien definidas, como en el modelo de Bohr. En otros casos, empleamos todos nuestros conocimientos de mecánica cuántica para estudiar estos sistemas utilizando funciones de onda y el concepto de espín del electrón. Es importante recordar que estudiamos la física moderna con modelos, y que diferentes modelos tienen varios propósitos. No siempre utilizamos el modelo más potente cuando un modelo menos potente y más fácil de usar puede hacer el trabajo.

### Tipos de enlaces

Las unidades químicas se forman mediante muchos tipos de enlaces químicos. Un **enlace iónico** se forma cuando un electrón se transfiere de un átomo a otro. Un **enlace covalente** se produce cuando dos o más átomos comparten electrones. Un **enlace de van der Waals** se produce debido a la atracción de moléculas con carga polarizada y es considerablemente más débil que los enlaces iónicos o covalentes. También existen muchos otros tipos de enlaces. A menudo, el enlace se produce a través de más de un mecanismo. Esta sección se centra en los enlaces iónicos y covalentes.

#### Enlaces iónicos

El enlace iónico es quizás el tipo de enlace más fácil de entender. Explica la formación de compuestos salinos, como el cloruro de sodio,  $\text{NaCl}$ . El átomo de sodio (con el símbolo  $\text{Na}$ ) tiene la misma disposición de electrones que el átomo de neón más un electrón  $3s$ . Solo se necesitan  $5,14 \text{ eV}$  de energía para eliminar este electrón del átomo de sodio. Por lo tanto, el  $\text{Na}$  puede ceder o donar fácilmente este electrón a un átomo adyacente (cercano), consiguiendo una disposición de electrones más estable. El cloro (con el símbolo  $\text{Cl}$ ) solo necesita un electrón para completar su capa de valencia, por lo que acepta fácilmente este electrón si está cerca del átomo de sodio. Por tanto, decimos que el cloro tiene una gran **afinidad electrónica**, que es la energía asociada a un electrón aceptado. La energía que el átomo de cloro cede en este proceso es de  $3,62 \text{ eV}$ . Después de la transferencia de electrones del átomo de sodio al átomo de cloro, el átomo de sodio se convierte en un ion positivo y el átomo de cloro en un ion negativo. La energía total necesaria para esta transferencia viene dada por

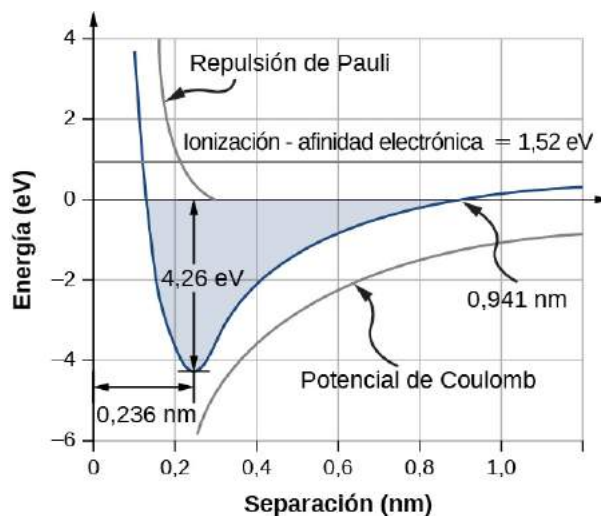
$$E_{\text{transfer}} = 5,14 \text{ eV} - 3,62 \text{ eV} = 1,52 \text{ eV}.$$

El ion de sodio positivo y el ion de cloruro negativo experimentan una fuerza de Coulomb de atracción. La energía potencial asociada a esta fuerza viene dada por

$$U_{\text{coul}} = -\frac{ke^2}{r_0}, \quad 9.1$$

donde  $ke^2 = 1,440 \text{ eV}\cdot\text{nm}$  y  $r_0$  es la distancia entre los iones.

A medida que los iones de sodio y de cloruro se mueven juntos ("descienden por la colina de energía potencial"), la fuerza de atracción entre ellos se hace más fuerte. Sin embargo, si los iones se acercan demasiado, las funciones de onda de los electrones de sus núcleos comienzan a superponerse. Debido al principio de exclusión, esta acción impulsa a los electrones centrales, y, por lo tanto, a toda la molécula, a un estado de mayor energía. La **distancia de separación en equilibrio** (o longitud de enlace) entre los iones se produce cuando la molécula está en su estado de menor energía. En el NaCl diatómico, esta distancia es de 0,236 nm. La [Figura 9.2](#) muestra la energía total del NaCl en función de la distancia de separación entre los iones.



**FIGURA 9.2** Gráfico de la energía en función de la separación iónica en el cloruro de sodio. La separación de equilibrio se produce cuando la energía total es un mínimo ( $-4,36$  eV).

La energía total necesaria para formar una sola unidad de sal es

$$U_{\text{form}} = E_{\text{transfer}} + U_{\text{coul}} + U_{\text{ex}}, \quad 9.2$$

donde  $U_{\text{ex}}$  es la energía asociada a la repulsión entre los electrones centrales debido al principio de exclusión de Pauli. El valor de  $U_{\text{form}}$  debe ser negativo para que el enlace se forme espontáneamente. La **energía de disociación** se define como la energía necesaria para separar la unidad en sus iones constituyentes, escrita

$$U_{\text{diss}} = -U_{\text{form}} \quad 9.3$$

Cada unidad de fórmula diatómica tiene su propia energía de disociación y longitud de separación de equilibrio características. Los valores de la muestra se indican en la [Tabla 9.1](#).

Molécula	Energía de disociación(eV)	Separación de equilibrio (nm)(Longitud de enlace)
NaCl	4,26	0,236
NaF	4,99	0,193
NaBr	3,8	0,250
NaI	3,1	0,271
NaH	2,08	0,189
LiCl	4,86	0,202

Molécula	Energía de disociación(eV)	Separación de equilibrio (nm)(Longitud de enlace)
LiH	2,47	0,239
LiI	3,67	0,238
KCl	4,43	0,267
KBr	3,97	0,282
RbF	5,12	0,227
RbCl	4,64	0,279
CsI	3,57	0,337
H-H	4,5	0,075
N-N	9,8	0,11
O-O	5,2	0,12
F-F	1,6	0,14
Cl-Cl	2,5	0,20

**TABLA 9.1** Longitud de enlace



### EJEMPLO 9.1

#### La energía de la sal

¿Cuál es la energía de disociación de una unidad de fórmula de sal (NaCl)?

#### Estrategia

El cloruro de sodio (NaCl) es una sal formada por enlaces iónicos. El cambio de energía asociado a este enlace depende de tres procesos principales: la ionización del Na; la aceptación del electrón de un átomo de Na por un átomo de Cl; y la atracción de Coulomb de los iones resultantes ( $\text{Na}^+$  y  $\text{Cl}^-$ ). Si los iones se acercan demasiado, se repelen debido al principio de exclusión (0,32 eV). La distancia de separación en equilibrio es  $r_0 = 0,236$  nm.

#### Solución

El cambio de energía asociado a la transferencia de un electrón de Na a Cl es de 1,52 eV, como se comentó anteriormente en esta sección. En la separación de equilibrio, los átomos tienen una separación de  $r_0 = 0,236$  nm. La energía potencial electrostática de los átomos es

$$U_{\text{coul}} = -\frac{ke^2}{r_0} = -\frac{1,44 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{0,236 \text{ nm}} = -6,10 \text{ eV}.$$

La diferencia de energía total asociada a la formación de una unidad de fórmula de NaCl es

$$E_{\text{form}} = E_{\text{xfr}} + U_{\text{coul}} + U_{\text{ex}} = 1,52 \text{ eV} + (-6,10 \text{ eV}) + 0,32 \text{ eV} = -4,26 \text{ eV}.$$

Por lo tanto, la energía disociada del NaCl es de 4,26 eV.

### Importancia

La formación de una unidad de fórmula de NaCl por enlace iónico es energéticamente favorable. La energía de disociación, o energía necesaria para separar la unidad de NaCl en  $\text{Na}^+$  y  $\text{Cl}^-$  es de 4,26 eV, lo que concuerda con la [Figura 9.2](#).

### ☑ COMPRUEBE LO APRENDIDO 9.1

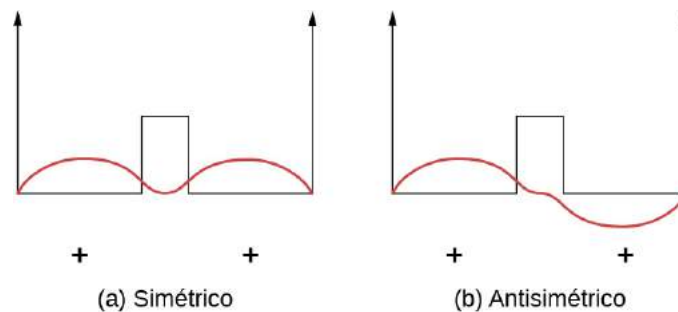
¿Por qué la energía potencial asociada al principio de exclusión es positiva en el [Ejemplo 9.1](#)?

En un ion sodio en un cristal de NaCl iónico, la expresión para la energía potencial de Coulomb  $U_{\text{coul}}$  debe ser modificada por un factor conocido como la **constante de Madelung**. Este factor tiene en cuenta la interacción del ion sodio con todos los iones cloruro y sodio cercanos. La constante de Madelung para un cristal de NaCl es de aproximadamente 1,75. Este valor implica una distancia de separación en equilibrio entre los iones de  $\text{Na}^+$  y  $\text{Cl}^-$  de 0,280 nm, ligeramente mayor que para el NaCl diatómico. Revisaremos este punto más adelante.

### Enlaces covalentes

En un enlace iónico, un electrón se transfiere de un átomo a otro. Sin embargo, en un enlace covalente, un electrón se comparte entre dos átomos. El mecanismo de enlace iónico no puede explicar la existencia de moléculas como  $\text{H}_2$ ,  $\text{O}_2$ , y  $\text{CO}$ , ya que no existe ninguna distancia de separación para la que la energía potencial negativa de atracción tenga una magnitud mayor que la energía necesaria para crear iones. Entender con precisión cómo sucede el enlace covalente entre estas moléculas depende de una comprensión más profunda de la mecánica cuántica que va más allá de la cobertura de este libro, pero describiremos cualitativamente los mecanismos en la siguiente sección.

Los enlaces covalentes pueden entenderse con el sencillo ejemplo de una molécula  $\text{H}_2^+$ , que consiste en un electrón en el campo eléctrico de dos protones. Este sistema puede ser modelado por un electrón en un pozo cuadrado doble ([Figura 9.3](#)). El electrón tiene la misma probabilidad de encontrarse en cada pozo, por lo que la función de onda es simétrica o antisimétrica en torno a un punto intermedio entre los pozos.



**FIGURA 9.3** Un modelo unidimensional de enlace covalente en una molécula  $\text{H}_2^+$ . (a) La función de onda simétrica del electrón compartida por los dos protones cargados positivamente (representados por los dos pozos cuadrados finitos). (b) La función de onda antisimétrica correspondiente.

Ahora imagine que los dos pozos están separados por una gran distancia. En el estado fundamental, la función de onda existe en uno de los dos estados posibles: un único pico positivo (una onda sinusoidal similar a una joroba) en ambos pozos (caso simétrico), o un pico positivo en un pozo y un pico negativo en el otro (caso antisimétrico). Estos estados tienen la misma energía. Sin embargo, cuando los pozos se juntan, la función de onda simétrica se convierte en el estado fundamental y el estado antisimétrico se convierte en el primer estado excitado, es decir, el nivel de energía del electrón se divide. Observe que el estado simétrico al espacio se convierte en el estado energéticamente favorable (de menor energía).

El mismo análisis es apropiado para un electrón enlazado a dos átomos de hidrógeno. En este caso, las formas de las funciones de onda del estado fundamental tienen la forma  $e^{-r/a_0}$  o  $e^{-|x|/a_0}$  en una dimensión. El estado energéticamente favorable, con simetría espacial, implica una alta densidad de carga a medio camino entre los protones, donde es probable que los electrones junten a los protones cargados positivamente.



Si se añade un segundo electrón a este sistema para formar una molécula  $H_2$ , la función de onda debe describir ambas partículas, incluyendo su relación espacial y sus espines relativos. Esta función de onda también debe respetar la indistinguibilidad de los electrones ("si has visto un electrón, los has visto todos"). En particular, cambiar o intercambiar los electrones *no* debe producir un efecto observable, una propiedad llamada **simetría de intercambio**. La simetría de intercambio puede ser *simétrica*, y no producir ningún cambio en la función de onda, o *antisimétrica*, produciendo un cambio global en el signo de la función de onda, ninguno de los cuales es observable.

Como veremos más adelante, la función de onda total de dos electrones debe ser antisimétrica en el intercambio. Por ejemplo, dos electrones unidos a una molécula de hidrógeno pueden estar en un estado de simetría espacial con espines antiparalelos ( $\uparrow\downarrow$ ) o en un estado antisimétrico espacial con espines paralelos ( $\uparrow\uparrow$ ). El estado de espines antiparalelos es energéticamente favorable y por tanto se utiliza en los enlaces covalentes. Sin embargo, si los protones se acercan demasiado, la repulsión entre ellos se vuelve sustancial. (En otras moléculas, este efecto lo proporciona el principio de exclusión) Como resultado,  $H_2$  alcanza una separación de equilibrio de unos 0,074 nm con una energía de enlace de 4,52 eV.

### INTERACTIVO

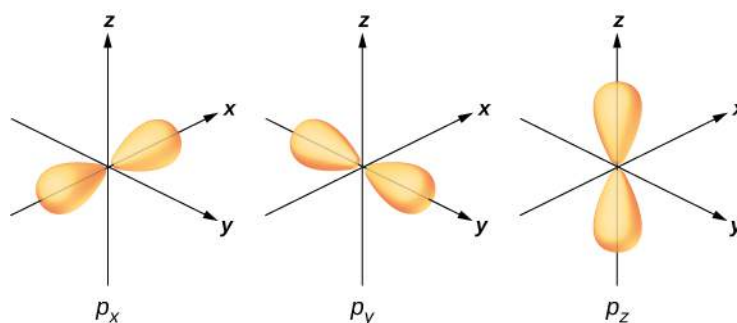
Visite este [tutorial y simulación interactiva de PBS Learning Media \(https://openstax.org/l/21covalentbond\)](https://openstax.org/l/21covalentbond) para explorar las fuerzas de atracción y repulsión que actúan sobre las partículas atómicas y el enlace covalente en una molécula  $H_2$ .

La mecánica cuántica excluye muchos tipos de moléculas. Por ejemplo, la molécula  $H_3$  no se forma, porque si un tercer átomo de H se acerca al hidrógeno diatómico, la función de onda del electrón de este átomo se superpone con los electrones de los otros dos átomos. Si los tres electrones se encuentran en los estados fundamentales de sus respectivos átomos, un par de electrones comparte todos los mismos números cuánticos, lo que está prohibido por el principio de exclusión. En cambio, se fuerza a uno de los electrones a pasar a un estado de mayor energía. No existe ninguna separación entre tres protones por la que el cambio de energía total de este proceso sea negativo, es decir, en la que el enlace se produzca espontáneamente. De la misma manera,  $He_2$  no se enlaza de forma covalente en condiciones normales, porque estos átomos no tienen electrones de valencia que compartir. Cuando los átomos se juntan, las funciones de onda de los electrones centrales se superponen y, debido al principio de exclusión, dichos electrones se ven obligados a pasar a un estado de mayor energía. No existe ninguna separación para la que dicha molécula sea energéticamente favorable.

## El enlace en las moléculas poliatómicas

Una **molécula poliatómica** es una molécula formada por más de dos átomos. Los ejemplos van desde una simple molécula de agua hasta una compleja molécula de proteína. Las estructuras de estas moléculas pueden a menudo entenderse en términos de enlace covalente e **hibridación**. La hibridación es un cambio en la estructura energética de un átomo en el que estados mixtos (estados que pueden escribirse como una superposición lineal de otros) participan en el enlace.

Para ilustrar la hibridación, considere el enlace en una molécula de agua simple,  $H_2O$ . La configuración de electrones del oxígeno es  $1s^2 2s^2 2p^4$ . Los electrones  $1s$  y  $2s$  se encuentran en "capas cerradas" y no participan en el enlace. Los cuatro electrones restantes son los electrones de valencia. Estos electrones pueden llenar seis estados posibles ( $l = 1, m = 0, \pm 1$ , además de tener un espín hacia arriba y otro hacia abajo). Las energías de estos estados son las mismas, por lo que el átomo de oxígeno puede aprovechar cualquier combinación lineal de estos estados en el enlace con los átomos de hidrógeno. Estas combinaciones lineales (que ya aprendió en el capítulo sobre la estructura atómica) se llaman orbitales atómicos, y se denotan por  $p_x, p_y$ , y  $p_z$ . Las distribuciones de carga de los electrones para estos orbitales se dan en la [Figura 9.4](#).



**FIGURA 9.4** El oxígeno tiene cuatro electrones de valencia. En el contexto de una molécula de agua, dos electrones de valencia llenan el orbital  $p_z$  y un electrón llena cada uno de los orbitales  $p_x$  y  $p_y$ . Los orbitales  $p_x$  y  $p_y$  se utilizan en el enlace con los átomos de hidrógeno para formar  $\text{H}_2\text{O}$ . Sin la repulsión de los átomos de H, el ángulo de enlace entre los átomos de hidrógeno sería de  $90^\circ$ .

La transformación de las funciones de onda de los electrones del oxígeno en los orbitales  $p_x$ ,  $p_y$ , y  $p_z$  en presencia de los átomos de hidrógeno es un ejemplo de hibridación. Dos electrones se encuentran en el orbital  $p_z$  con espines emparejados ( $\uparrow\downarrow$ ). Un electrón se encuentra en cada uno de los orbitales  $p_x$  y  $p_y$ , con espines no apareados. Estos últimos orbitales participan en el enlace con los átomos de hidrógeno. Con base en la [Figura 9.4](#), esperamos que el ángulo de enlace para H-O-H sea de  $90^\circ$ . Sin embargo, si incluimos los efectos de la repulsión entre los átomos, el ángulo de enlace es de  $104,5^\circ$ . Los mismos argumentos pueden utilizarse para entender la forma tetraédrica del metano ( $\text{CH}_4$ ) y otras moléculas.

## 9.2 Espectros moleculares

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Utilizar los conceptos de energía vibracional y rotacional para describir las transiciones energéticas en una molécula diatómica.
- Explicar las características principales de un espectro de energía vibracional-rotacional de una molécula diatómica.
- Estimar las energías permitidas de una molécula en rotación.
- Determinar la distancia de separación en equilibrio entre los átomos de una molécula diatómica a partir del espectro de absorción vibracional-rotacional.

Los niveles de energía molecular son más complicados que los niveles de energía atómica porque las moléculas también pueden vibrar y rotar. Las energías asociadas a estos movimientos se sitúan en rangos diferentes y por lo tanto pueden estudiarse por separado. Las transiciones electrónicas son del orden de  $1\text{ eV}$ , las transiciones vibracionales son del orden de  $10^{-2}\text{ eV}$ , y las transiciones rotacionales son del orden de  $10^{-3}\text{ eV}$ . En el caso de las moléculas complejas, estos cambios de energía son difíciles de caracterizar, por lo que comenzamos con el caso simple de una molécula diatómica.

Según la mecánica clásica, la energía de rotación de una molécula diatómica viene dada por

$$E_r = \frac{L^2}{2I}, \quad 9.4$$

donde  $I$  es el momento de inercia y  $L$  es el momento angular. Según la mecánica cuántica, el momento angular de rotación está cuantizado:

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar \quad (l = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad 9.5$$

donde  $l$  es el número cuántico angular orbital. Por lo tanto, el **nivel de energía rotacional** permitido de una molécula diatómica es

$$E_r = l(l+1) \frac{\hbar^2}{2I} = l(l+1) E_{0r} \quad (l = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad 9.6$$

donde la energía rotacional característica de una molécula se define como

$$E_{0r} = \frac{\hbar^2}{2I}. \quad 9.7$$

Para una molécula diatómica, el momento de inercia con masa reducida  $\mu$  es

$$I = \mu r_0^2, \quad 9.8$$

donde  $r_0$  es la distancia total entre los átomos. Por lo tanto, la diferencia de energía entre los niveles de rotación es

$$\Delta E_r = E_{l+1} - E_l = 2(l+1) E_{0r}. \quad 9.9$$

El estudio detallado de las transiciones entre niveles de energía rotacional provocadas por la absorción o emisión de radiación (la llamada **transición dipolar eléctrica**) requiere que

$$\Delta l = \pm 1. \quad 9.10$$

Esta regla, conocida como **regla de selección**, limita las posibles transiciones de un estado cuántico a otro. La [Ecuación 9.10](#) es la regla de selección para las transiciones energéticas rotacionales. Solo se aplica a las moléculas diatómicas que tienen un momento dipolar eléctrico. Por esta razón, las moléculas simétricas como  $H_2$  y  $N_2$  no experimentan transiciones energéticas rotacionales debido a la absorción o emisión de radiación electromagnética.

## EJEMPLO 9.2

### La energía rotacional del HCl

Determina los tres niveles de energía rotacional más bajos de una molécula de cloruro de hidrógeno (HCl).

#### Estrategia

El cloruro de hidrógeno (HCl) es una molécula diatómica con una distancia de separación en equilibrio de 0,127 nm. Los niveles de energía rotacional dependen únicamente del momento de inercia  $I$  y del número cuántico del momento angular orbital  $l$  (en este caso,  $l = 0, 1, y 2$ ). El momento de inercia depende, a su vez, de la distancia de separación en equilibrio (que está dada) y de la masa reducida, que depende de las masas de los átomos de H y Cl.

#### Solución

En primer lugar, calculamos la masa reducida. Si la partícula 1 es hidrógeno y la partícula 2 es cloruro, tenemos

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(1,0 \text{ u})(35,4 \text{ u})}{1,0 \text{ u} + 35,4 \text{ u}} = 0,97 \text{ u} = 0,97 \text{ u} \left( \frac{931,5 \frac{\text{MeV}}{c^2}}{1 \text{ u}} \right) = 906 \frac{\text{MeV}}{c^2}.$$

Por lo tanto, la energía de masa en reposo correspondiente es

$$\mu c^2 = 9,06 \times 10^8 \text{ eV}.$$

Esto nos permite calcular la energía característica:

$$E_{0r} = \frac{\hbar^2}{2I} = \frac{\hbar^2}{2(\mu r_0^2)} = \frac{(\hbar c)^2}{2(\mu c^2) r_0^2} = \frac{(197,3 \text{ eV} \cdot \text{nm})^2}{2(9,06 \times 10^8 \text{ eV})(0,127 \text{ nm})^2} = 1,33 \times 10^{-3} \text{ eV}.$$

(Observe cómo esta expresión se escribe en términos de la energía de la masa en reposo. Esta técnica es habitual en los cálculos de la física moderna). Los niveles de energía rotacional están dados por

$$E_r = l(l+1) \frac{\hbar^2}{2I} = l(l+1) E_{0r},$$

donde  $l$  es el número cuántico orbital. Por lo tanto, los tres niveles de energía rotacional más bajos de una molécula de HCl son

$$\begin{aligned} l = 0; E_r &= 0 \text{ eV (no hay rotación),} \\ l = 1; E_r &= 2 E_{0r} = 2,66 \times 10^{-3} \text{ eV,} \\ l = 2; E_r &= 6 E_{0r} = 7,99 \times 10^{-3} \text{ eV.} \end{aligned}$$

### Importancia

El espectro rotacional está asociado a transiciones débiles (1/1000 a 1/100 de eV). En comparación, la energía de un electrón en el estado fundamental del hidrógeno es  $-13,6 \text{ eV}$ .

## ✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 9.2

¿Qué le dice la separación energética entre las líneas de absorción en un espectro rotacional de una molécula diatómica?

El **nivel de energía vibracional**, que es el nivel de energía asociado a la energía vibracional de una molécula, es más difícil de estimar que el nivel de energía rotacional. Sin embargo, podemos estimar estos niveles suponiendo que los dos átomos de la molécula diatómica están conectados por un resorte ideal de constante de resorte  $k$ . La energía potencial de este sistema de resortes es

$$U_{\text{osc}} = \frac{1}{2} k \Delta r^2, \quad 9.11$$

Donde  $\Delta r$  es un cambio en la "longitud natural" de la molécula a lo largo de una línea que conecta los átomos. Resolviendo la ecuación de Schrödinger para este potencial se obtiene

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad 9.12$$

Donde  $\omega$  es la frecuencia angular natural de vibración y  $n$  es el número cuántico vibracional. La predicción de que los niveles de energía vibracional están uniformemente espaciados ( $\Delta E = \hbar \omega$ ) resulta ser bueno en las energías más bajas.

Un estudio detallado de las transiciones entre los niveles de energía vibracional inducidas por la absorción o emisión de radiación (y la específicamente llamada transición dipolar eléctrica) requiere que

$$\Delta n = \pm 1. \quad 9.13$$

**Ecuación 9.13** representa la regla de selección de las transiciones energéticas vibracionales. Como se dijo anteriormente, esta regla solo se aplica a las moléculas diatómicas que tienen un momento dipolar eléctrico. Las moléculas simétricas no experimentan estas transiciones.

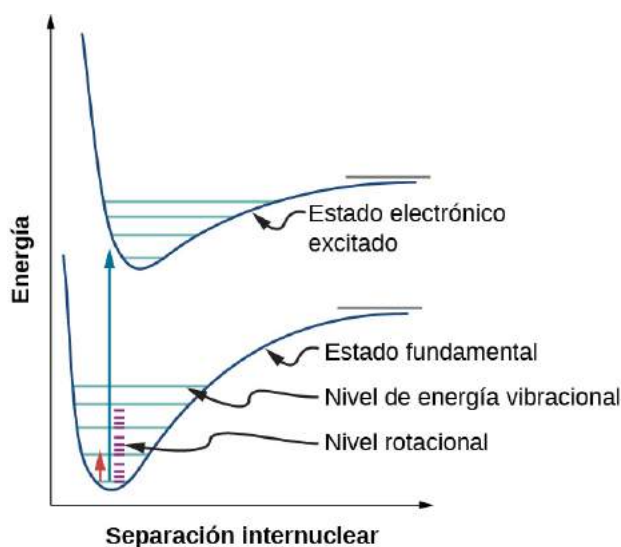
Debido a las reglas de selección, la absorción o emisión de radiación por parte de una molécula diatómica implica una transición en los estados vibracional y rotacional. En concreto, si el número cuántico vibracional ( $n$ ) cambia en una unidad, entonces el número cuántico rotacional ( $l$ ) cambia en una unidad. Un diagrama de

nivel de energía de una posible transición se ofrece en la [Figura 9.5](#). El espectro de absorción de estas transiciones en el cloruro de hidrógeno (HCl) se muestra en la [Figura 9.6](#). Los picos de absorción se deben a las transiciones de los estados vibratorios  $n = 0$  a  $n = 1$ . Las diferencias de energía para la banda de picos de la izquierda y la derecha son, respectivamente,

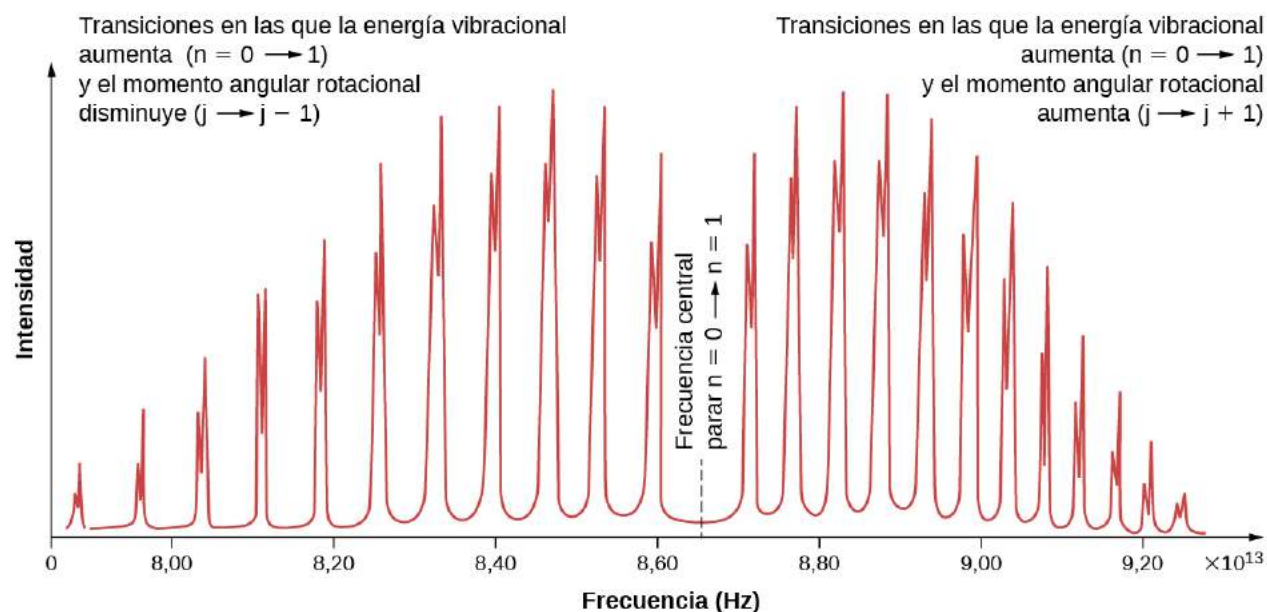
$$\Delta E_{l \rightarrow l+1} = \hbar\omega + 2(l+1)E_{0r} = \hbar\omega + 2E_{0r}, \hbar\omega + 4E_{0r}, \hbar\omega + 6E_{0r}, \dots \text{ (banda derecha) } y$$

$$\Delta E_{l \rightarrow l-1} = \hbar\omega - 2lE_{0r} = \hbar\omega - 2E_{0r}, \hbar\omega - 4E_{0r}, \hbar\omega - 6E_{0r}, \dots \text{ (banda izquierda) }.$$

El momento de inercia puede determinarse entonces a partir del espacio energético entre los picos individuales ( $2E_{0r}$ ) o de la brecha entre las bandas izquierda y derecha ( $4E_{0r}$ ). La frecuencia en el centro de esta brecha es la frecuencia de vibración.



**FIGURA 9.5** Tres tipos de niveles de energía en una molécula diatómica: electrónico, vibracional y rotacional. Si el número cuántico vibracional ( $n$ ) cambia en una unidad, entonces el número cuántico rotacional ( $l$ ) cambia en una unidad.



**FIGURA 9.6** Espectro de absorción del cloruro de hidrógeno (HCl) desde los niveles de vibración  $n = 0$  a  $n = 1$ . Los picos discretos indican una cuantización del momento angular de la molécula. Las bandas de la izquierda indican una disminución del momento angular, mientras que las de la derecha indican un aumento del momento angular.

## 9.3 Enlaces en los sólidos cristalinos

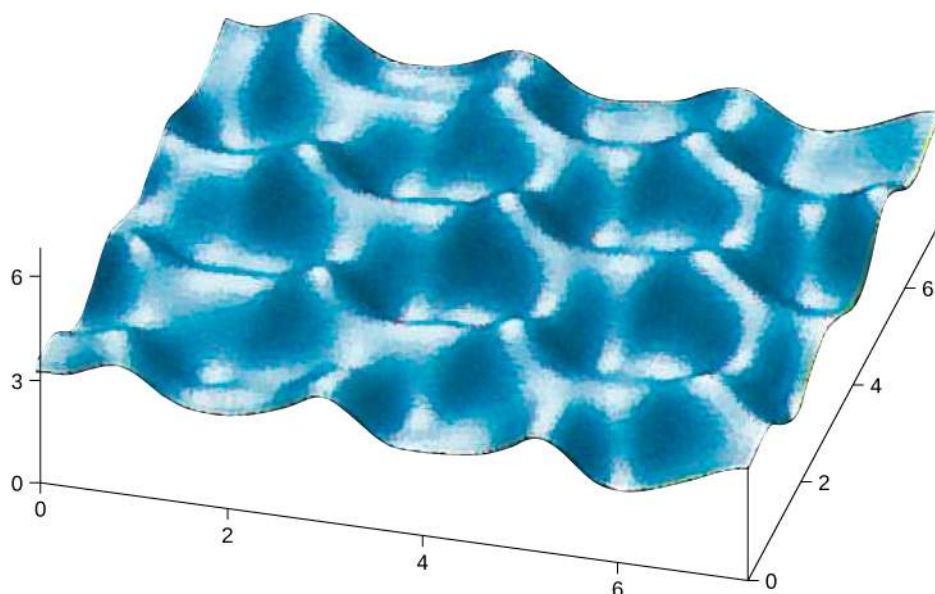
### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Describir las estructuras de empaquetamiento de los sólidos comunes.
- Explicar la diferencia entre el enlace en un sólido y en una molécula.
- Determinar la distancia de separación en equilibrio dadas las propiedades del cristal
- Determinar la energía de disociación de una sal dadas las propiedades del cristal.

A partir de esta sección, estudiaremos los sólidos cristalinos, que consisten en átomos dispuestos en un patrón regular extendido llamado **red**. Los sólidos que no forman o no pueden formar cristales se clasifican como sólidos amorfos. Aunque los sólidos amorfos (como el vidrio) tienen una variedad de aplicaciones tecnológicas interesantes, este capítulo se centrará en los sólidos cristalinos.

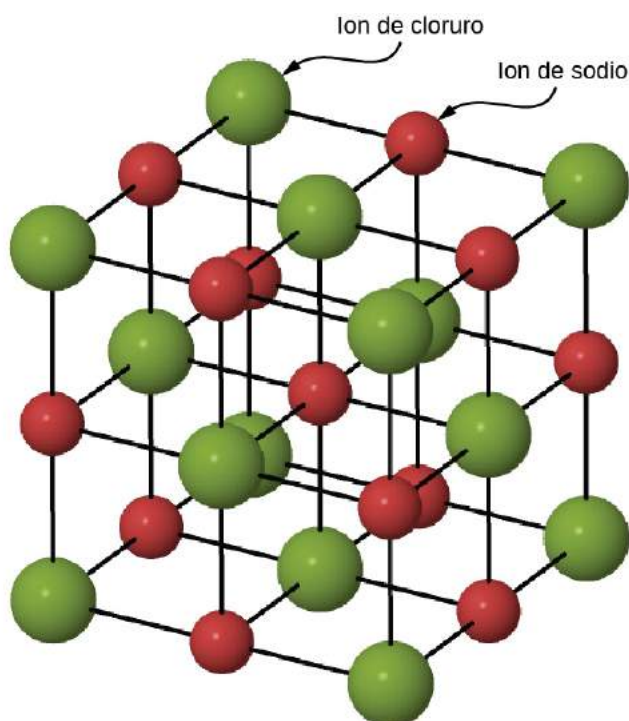
Los átomos se organizan en una red para formar un cristal debido a una fuerza de atracción neta entre los electrones que los componen y los núcleos atómicos. Los cristales formados por el enlace de los átomos pertenecen a una de las tres categorías, clasificadas por su enlace: iónico, covalente y metálico. Las moléculas también pueden unirse para formar cristales; estos enlaces, que no se tratan aquí, se clasifican como moleculares. A principios del siglo XX, el modelo atómico de un sólido era especulativo. Ahora tenemos pruebas directas de los átomos en los sólidos ([Figura 9.7](#)).



**FIGURA 9.7** Imagen realizada con un microscopio de efecto de túnel de la superficie del grafito. Los picos representan los átomos, que están dispuestos en hexágonos. La escala está en angstroms.

### Enlace iónico en los sólidos

Muchos sólidos se forman mediante enlaces iónicos. Un ejemplo prototípico es el cristal de cloruro de sodio, del que ya hemos hablado. Los electrones se transfieren de los átomos de sodio a los átomos de cloro adyacentes, ya que los electrones de valencia del sodio están débilmente enlazados y el cloro tiene una gran afinidad electrónica. Los iones de sodio cargados positivamente y los iones de cloro (cloruro) cargados negativamente se organizan en un conjunto regular extendido de átomos ([Figura 9.8](#)).



**FIGURA 9.8** Estructura del cristal de cloruro de sodio. Los iones de sodio y cloruro se disponen en una estructura cúbica centrada en la cara (FCC).

Las distribuciones de carga de los iones de sodio y cloruro son esféricamente simétricas, y el ion de cloruro tiene un diámetro aproximadamente dos veces superior al del ion de sodio. La disposición de menor energía de estos iones se denomina estructura **cúbica centrada en la cara (FCC)**. En esta estructura, cada ion está más cerca de seis iones de la otra especie. La celda unitaria es un cubo: un átomo ocupa el centro y las esquinas de cada "cara" del cubo. La energía potencial de atracción del ion de  $\text{Na}^+$  debida a los campos de estos seis iones de  $\text{Cl}^-$  se escribe

$$U_1 = -6 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad 9.14$$

donde el signo menos designa un potencial de atracción (e identificamos  $k = 1/4\pi\epsilon_0$ ). A la distancia  $\sqrt{2}r$  sus vecinos más próximos son doce iones de  $\text{Na}^+$  de la misma carga. La energía potencial total de repulsión asociada a estos iones es

$$U_2 = 12 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2}r}. \quad 9.15$$

Los siguientes más cercanos son ocho iones de  $\text{Cl}^-$  a la distancia  $\sqrt{3}r$  del ion de  $\text{Na}^+$ . La energía potencial del ion de  $\text{Na}^+$  en el campo de estos ocho iones es

$$U_3 = -8 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{3}r}. \quad 9.16$$

Continuando de la misma manera con conjuntos alternativos de iones de  $\text{Cl}^-$  y  $\text{Na}^+$ , encontramos que la energía potencial atractiva neta  $U_A$  del único ion de  $\text{Na}^+$  se puede escribir como

$$U_{\text{coul}} = -\alpha \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad 9.17$$

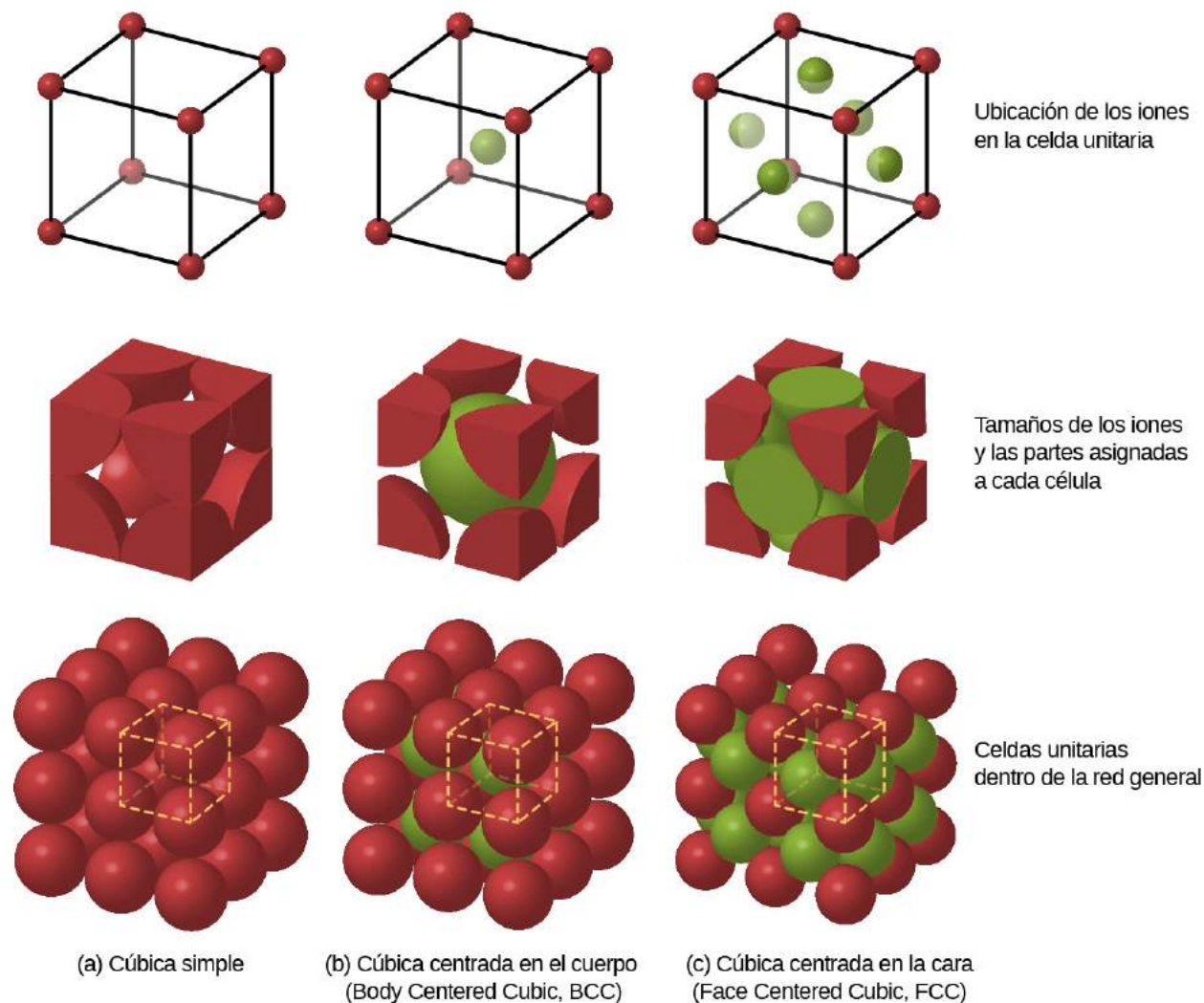
donde  $\alpha$  es la constante de Madelung, introducida anteriormente. De este análisis, podemos ver que esta constante es la suma convergente infinita



$$\alpha = 6 - \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{3}} + \dots \quad 9.18$$

Los iones lejanos contribuyen significativamente a esta suma, por lo que converge lentamente, y hay que utilizar muchos términos para calcular  $\alpha$  con precisión. Para todos los sólidos iónicos FCC,  $\alpha$  es aproximadamente 1,75.

Otras disposiciones posibles de los átomos en los sólidos son la **cúbica simple** y la **cúbica centrada en el cuerpo (BCC)**. Estas tres estructuras de empaquetamiento de sólidos se comparan en la [Figura 9.9](#). La primera fila representa la ubicación, pero no el tamaño, de los iones; la segunda fila indica las celdas unitarias de cada estructura o red; y la tercera fila representa la ubicación y el tamaño de los iones. La estructura BCC tiene ocho vecinos más cercanos, con una constante de Madelung de aproximadamente 1,76, solo ligeramente diferente a la de la estructura FCC. La determinación de la constante de Madelung para sólidos específicos es un trabajo difícil y objeto de investigación actual.



**FIGURA 9.9** Estructuras de empaquetamiento para sólidos de izquierda a derecha: (a) cúbico simple, (b) cúbico centrado en el cuerpo (BCC) y (c) cúbico centrado en la cara (FCC). Cada estructura cristalina minimiza la energía del sistema.

La energía de los iones de sodio no se debe totalmente a las fuerzas de atracción entre iones de carga opuesta. Si los iones se acercan demasiado, las funciones de onda de los electrones centrales de los iones se superponen, y los electrones se repelen debido al principio de exclusión. La energía potencial total del ion de  $\text{Na}^+$  es, por tanto, la suma del potencial de atracción de Coulomb ( $U_{\text{coul}}$ ) y del potencial de repulsión asociado al principio de exclusión ( $U_{\text{ex}}$ ). El cálculo de este potencial de repulsión requiere computadoras potentes. Sin

embargo, afortunadamente, esta energía puede describirse con precisión mediante una fórmula sencilla que contiene parámetros ajustables:

$$U_{\text{ex}} = \frac{A}{r^n} \quad 9.19$$

donde los parámetros  $A$  y  $n$  se eligen para dar predicciones consistentes con los datos experimentales. Para el problema del final de este capítulo, el parámetro  $n$  se denomina **constante de repulsión**. La energía potencial total del ion de  $\text{Na}^+$  es por lo tanto

$$U = -\alpha \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{A}{r^n}. \quad 9.20$$

En equilibrio, no hay fuerza neta sobre el ion, por lo que la distancia entre los iones vecinos  $\text{Na}^+$  y  $\text{Cl}^-$  debe ser el valor  $r_0$  para el que  $U$  es un mínimo. Suponiendo  $\frac{dU}{dr} = 0$ , tenemos

$$0 = \frac{\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} - \frac{nA}{r_0^{n+1}}. \quad 9.21$$

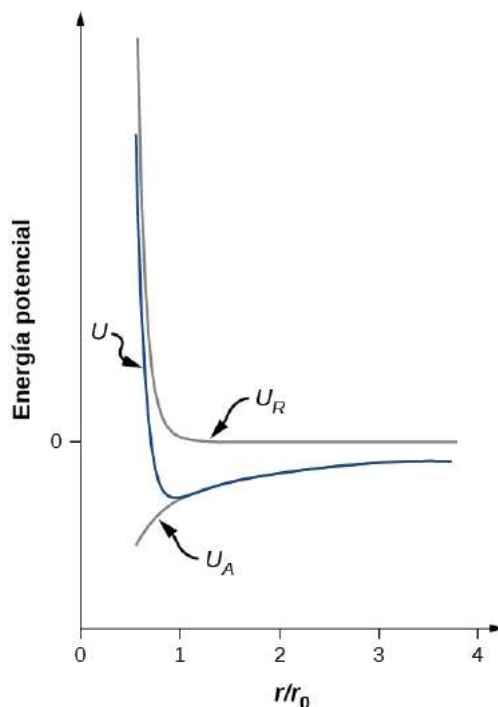
Por lo tanto,

$$A = \frac{\alpha e^2 r_0^{n-1}}{4\pi\epsilon_0 n}. \quad 9.22$$

Insertando esta expresión en la expresión de la energía potencial total, tenemos

$$U = -\frac{\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \left[ \frac{r_0}{r} - \frac{1}{n} \left( \frac{r_0}{r} \right)^n \right]. \quad 9.23$$

Observe que la energía potencial total tiene ahora un solo parámetro ajustable,  $n$ . El parámetro  $A$  ha sido sustituido por una función que implica  $r_0$ , la distancia de separación en equilibrio, que puede medirse mediante un experimento de difracción (ya hemos estudiado la difracción en un capítulo anterior). La energía potencial total se representa en la [Figura 9.10](#) para  $n = 8$ , el valor aproximado de  $n$  para el NaCl.



**FIGURA 9.10** La energía potencial de un ion de sodio en un cristal de NaCl de  $n = 8$ . La longitud de enlace de equilibrio se produce cuando la energía se minimiza.

Siempre que  $n > 1$ , la curva de  $U$  tiene la misma forma general:  $U$  se aproxima al infinito como  $r \rightarrow 0$  y  $U$  se acerca a cero cuando  $r \rightarrow \infty$ . El valor mínimo de la energía potencial viene dado por

$$U_{\min}(r = r_0) = -\alpha \frac{ke^2}{r_0} \left(1 - \frac{1}{n}\right). \quad 9.24$$

Por lo tanto, la energía por par de iones necesaria para separar el cristal en iones es

$$U_{\text{diss}} = \alpha \frac{ke^2}{r_0} \left(1 - \frac{1}{n}\right). \quad 9.25$$

Es la **energía de disociación** del sólido. La energía de disociación también puede utilizarse para describir la energía total necesaria para romper un mol de un sólido en sus iones constituyentes, a menudo expresada en kJ/mol. La energía de disociación puede determinarse experimentalmente utilizando el calor latente de vaporización. En la siguiente tabla se ofrecen valores de muestra.

	F <sup>-</sup>	Cl <sup>-</sup>	Br <sup>-</sup>	I <sup>-</sup>
Li <sup>+</sup>	1.036	853	807	757
Na <sup>+</sup>	923	787	747	704
K <sup>+</sup>	821	715	682	649
Rb <sup>+</sup>	785	689	660	630
Cs <sup>+</sup>	740	659	631	604

**TABLA 9.2** Energía de red para los haluros de metales alcalinos

Así, podemos determinar la constante de Madelung a partir de la estructura cristalina y  $n$  a partir de la energía de red. Para el NaCl, tenemos  $r_0 = 2,81 \text{ \AA}$ ,  $n \approx 8$ , y  $U_{\text{diss}} = 7,84 \text{ eV/par de iones}$ . Esta energía de disociación es relativamente grande. El fotón más energético del espectro visible, por ejemplo, tiene una energía de aproximadamente

$$hf = (4,14 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s})(7,5 \times 10^{14} \text{ Hz}) = 3,1 \text{ eV}.$$

Dado que los iones de los cristales están muy unidos, los cristales iónicos tienen las siguientes características generales:

1. Son bastante duros y estables.
2. Se vaporizan a temperaturas relativamente altas (1000 a 2000 K).
3. Son transparentes a la radiación visible, porque los fotones de la porción visible del espectro no son lo suficientemente energéticos como para excitar un electrón desde su estado fundamental a un estado excitado.
4. Son malos conductores eléctricos, porque no contienen electrones libres.
5. Suelen ser solubles en agua, porque la molécula de agua tiene un gran momento dipolar cuyo campo eléctrico es lo suficientemente fuerte como para romper los enlaces electrostáticos entre los iones.

### EJEMPLO 9.3

#### La energía de disociación de la sal

Determine la energía de disociación del cloruro de sodio (NaCl) en kJ/mol. (*Pista:* La constante de repulsión  $n$  del NaCl es aproximadamente 8).

**Estrategia**

Un cristal de cloruro de sodio tiene una separación en equilibrio de 0,282 nm. (Compare este valor con 0,236 nm para una unidad diatómica libre de NaCl). La energía de disociación depende de la distancia de separación, la constante de repulsión y la constante de Madelung para una estructura FCC. La distancia de separación depende a su vez de la masa molar y de la densidad medida. Podemos determinar la distancia de separación, y luego utilizar este valor para determinar la energía de disociación de un mol del sólido.

**Solución**

Las masas atómicas del Na y del Cl son 23,0 u y 58,4 u, por lo que la masa molar del NaCl es 58,4 g/mol. La densidad del NaCl es 2,16 g/cm<sup>3</sup>. La relación entre estas cantidades es

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{2N_A r_0^3},$$

donde  $M$  es la masa de un mol de sal,  $N_A$  es el número de Avogadro, y  $r_0$  es la distancia de separación en equilibrio. El factor 2 es necesario ya que tanto los iones de sodio como los de cloruro representan un volumen cúbico  $r_0^3$ . Resolviendo la distancia, obtenemos

$$r_0^3 = \frac{M}{2N_A \rho} = \frac{58,4 \text{ g/mol}}{2(6,03 \times 10^{23})(2,160 \text{ g/cm}^3)} = 2,23 \times 10^{-23} \text{ cm}^3,$$

o

$$r_0 = 2,80 \times 10^{-8} \text{ cm} = 0,280 \text{ nm}.$$

La energía potencial de un par de iones ( $\text{Na}^+ \text{Cl}^-$ ) es

$$U = -\alpha \frac{ke^2}{r_0} \left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

donde  $\alpha$  es la constante de Madelung,  $r_0$  es la distancia de separación en equilibrio, y  $n$  es la constante de repulsión. El NaCl es FCC, por lo que la constante de Madelung es  $\alpha = 1,7476$ . Sustituyendo estos valores, obtenemos

$$U = -1,75 \frac{1,44 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{0,280 \text{ nm}} \left(1 - \frac{1}{8}\right) = -7,88 \frac{\text{eV}}{\text{par de iones}}.$$

Por lo tanto, la energía de disociación de un mol de cloruro de sodio es

$$D = \left(\frac{7,88 \text{ eV}}{\text{par de iones}}\right) \left(\frac{23,052 \text{ kcal}}{1 \text{ mol}} \frac{1 \text{ eV}}{1 \text{ eV}}\right) = 182 \text{ kcal/mol} = 760 \text{ kJ/mol}.$$

**Importancia**

Este valor teórico de la energía de disociación de 766 kJ/mol se acerca al valor experimental aceptado de 787 kJ/mol. Observe que para una mayor densidad, la distancia de separación en equilibrio entre los pares de iones es menor, como se esperaba. Esta pequeña distancia de separación aumenta la fuerza entre los iones y, por tanto, la energía de disociación. La conversión al final de la ecuación aprovechó el factor de conversión 1 kJ = 0,239 kcal.

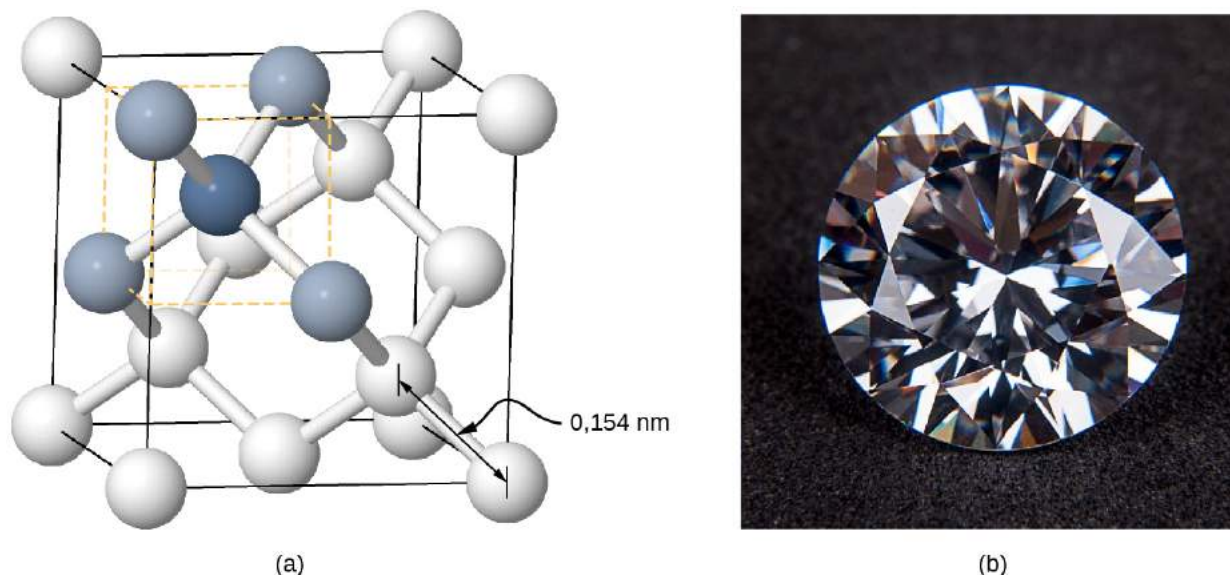
**✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 9.3**

Si la energía de disociación fuera mayor, ¿sería más fácil o más difícil la ruptura del sólido?

**Enlace covalente en los sólidos**

Los cristales también pueden formarse por enlace covalente. Por ejemplo, los enlaces covalentes son los responsables de mantener unidos los átomos de carbono en los cristales de diamante. La configuración de

electrones del átomo de carbono es  $1s^2 2s^2 2p^2$ , un núcleo de He más cuatro electrones de valencia. A esta configuración de electrones le faltan cuatro electrones para completar la capa, por lo que al compartir estos cuatro electrones con otros átomos de carbono en un enlace covalente, se llenan las capas de todos los átomos de carbono. El diamante tiene una estructura más complicada que la mayoría de los cristales iónicos (Figura 9.11). Cada átomo de carbono es el centro de un tetraedro regular, y el ángulo entre los enlaces es  $110^\circ$ . Este ángulo es una consecuencia directa de la direccionalidad de los orbitales  $p$  de los átomos de carbono.



**FIGURA 9.11** Estructura del cristal de diamante. (a) El único átomo de carbono representado por la esfera azul oscuro está unido covalentemente a los cuatro átomos de carbono representados por las esferas azul claro. (b) Los diamantes de calidad gema pueden escindirse a lo largo de planos lisos, lo que da un gran número de ángulos que causan la reflexión interna total de la luz incidente, lo que da a los diamantes su preciado brillo.

Los cristales con enlaces covalentes no son tan uniformes como los iónicos, pero son razonablemente duros, difíciles de fundir e insolubles en agua. Por ejemplo, el diamante tiene una temperatura de fusión extremadamente alta (4000 K) y es transparente a la luz visible. En comparación, el estaño con enlace covalente (también conocido como estaño alfa, que no es metálico) es relativamente blando, se funde a 600 K y refleja la luz visible. Otros dos ejemplos importantes de cristales con enlaces covalentes son el silicio y el germanio. Ambos sólidos se utilizan ampliamente en la fabricación de diodos, transistores y circuitos integrados. Volveremos a hablar de estos materiales más adelante en nuestro análisis de los semiconductores.

### Enlace metálico en los sólidos

Como su nombre indica, el enlace metálico es el responsable de la formación de los cristales metálicos. Los electrones de valencia están esencialmente libres de los átomos y pueden moverse con relativa facilidad por el cristal metálico. El enlace se debe a las fuerzas de atracción entre los iones positivos y los electrones de conducción. Los enlaces metálicos son más débiles que los iónicos o covalentes, con energías de disociación en el rango 1 – 3 eV.

## 9.4 Modelo de electrones libres de los metales

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Describir el modelo clásico de electrones libres de los metales en términos del concepto de la densidad numérica del electrón.
- Explicar el modelo cuántico de electrones libres de los metales en términos del principio de exclusión de Pauli.
- Calcular los niveles de energía y el espaciado entre niveles de energía de un electrón libre en un metal.

Los metales, como el cobre y el aluminio, se mantienen unidos por enlaces muy diferentes a los de las moléculas. En lugar de compartir e intercambiar electrones, un metal se mantiene esencialmente unido por

un sistema de electrones libres que vagan por el sólido. El modelo más simple de un metal es el **modelo de electrones libres**. Este modelo considera a los electrones como un gas. Primero consideramos el caso simple de una dimensión en la que los electrones se mueven libremente a lo largo de una línea, como por ejemplo a través de una varilla metálica muy delgada. La función potencial  $U(x)$  para este caso es un pozo potencial infinito unidimensional donde las paredes del pozo corresponden a los bordes de la varilla. Este modelo ignora las interacciones entre los electrones pero respeta el principio de exclusión. Para el caso especial de  $T = 0\text{K}$ , electrones  $N$  completan los niveles de energía, de menor a mayor, de dos en dos (con espín hacia arriba y espín hacia abajo), hasta llenar el nivel de energía más alto. La energía más alta que se llena se llama **energía de Fermi**.

El modelo unidimensional de electrones libres puede mejorarse considerando el caso tridimensional: electrones moviéndose libremente en un bloque metálico tridimensional. Este sistema se modela mediante un pozo potencial infinito tridimensional. Para determinar los estados energéticos permitidos es necesario que resolvamos la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(x, y, z) = E \psi(x, y, z), \quad 9.26$$

donde suponemos que la energía potencial dentro de la caja es cero e infinita en caso contrario. Las funciones de onda permitidas que describen los estados cuánticos del electrón pueden escribirse como

$$\psi(x, y, z) = \left( \sqrt{\frac{2}{L_x}} \sin \frac{n_x \pi x}{L_x} \right) \left( \sqrt{\frac{2}{L_y}} \sin \frac{n_y \pi y}{L_y} \right) \left( \sqrt{\frac{2}{L_z}} \sin \frac{n_z \pi z}{L_z} \right), \quad 9.27$$

donde  $n_x$ ,  $n_y$ , y  $n_z$  son números enteros positivos que representan los números cuánticos correspondientes al movimiento en las direcciones de la  $x$ , la  $y$  y la  $z$ , respectivamente, y  $L_x$ ,  $L_y$ , y  $L_z$  son las dimensiones de la caja en esas direcciones. La [Ecuación 9.27](#) es simplemente el producto de tres funciones de onda unidimensionales. Las energías permitidas de un electrón en un cubo ( $L = L_x = L_y = L_z$ ) son

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2). \quad 9.28$$

Asociado a cada conjunto de números cuánticos ( $n_x, n_y, n_z$ ) son dos estados cuánticos, con espín hacia arriba y espín hacia abajo. En un material real, el número de estados llenos es enorme. Por ejemplo, en un centímetro cúbico de metal, este número es del orden de  $10^{22}$ . Contar cuántas partículas están en cada estado es un trabajo difícil, que a menudo requiere la ayuda de un potente ordenador. Sin embargo, el esfuerzo merece la pena, porque esta información suele ser una forma eficaz de comprobar el modelo.

## EJEMPLO 9.4

### Energía de un cubo metálico

Considere un cubo metálico sólido de longitud de arista 2,0 cm. (a) ¿Cuál es el nivel de energía más bajo para un electrón dentro del metal? (b) ¿Cuál es el espacio entre este nivel y el siguiente nivel de energía?

#### Estrategia

Un electrón en un metal puede modelarse como una onda. La energía más baja corresponde a la mayor longitud de onda y al menor número cuántico  $n_x, n_y, n_z = (1, 1, 1)$ . La [Ecuación 9.28](#) proporciona este valor de energía del "estado fundamental". Dado que la energía del electrón aumenta con el número cuántico, el siguiente nivel más alto implica el menor aumento de los números cuánticos, o  $(n_x, n_y, n_z) = (2, 1, 1)$ ,  $(1, 2, 1)$ , o  $(1, 1, 2)$ .

#### Solución

El nivel de energía más bajo corresponde a los números cuánticos  $n_x = n_y = n_z = 1$ . A partir de la [Ecuación](#)



9.28, la energía de este nivel es

$$\begin{aligned} E(1, 1, 1) &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e L^2} (1^2 + 1^2 + 1^2) \\ &= \frac{3\pi^2 (1,05 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})^2}{2 (9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}) (2,00 \times 10^{-2} \text{ m})^2} \\ &= 4,48 \times 10^{-34} \text{ J} = 2,80 \times 10^{-15} \text{ eV}. \end{aligned}$$

El siguiente nivel de energía más alto se alcanza aumentando en 1 cualquiera de los tres números cuánticos. Por lo tanto, en realidad hay tres estados cuánticos con la misma energía. Supongamos que aumentamos  $n_x$  por 1. Entonces la energía se convierte en

$$\begin{aligned} E(2, 1, 1) &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e L^2} (2^2 + 1^2 + 1^2) \\ &= \frac{6\pi^2 (1,05 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})^2}{2 (9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}) (2,00 \times 10^{-2} \text{ m})^2} \\ &= 8,96 \times 10^{-34} \text{ J} = 5,60 \times 10^{-15} \text{ eV}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el espacio energético entre el estado de menor energía y el siguiente estado de mayor energía es

$$E(2, 1, 1) - E(1, 1, 1) = 2,80 \times 10^{-15} \text{ eV}.$$

### Importancia

Se trata de una diferencia energética muy pequeña. Compare este valor con la energía cinética media de una partícula,  $k_B T$ , donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann y  $T$  es la temperatura. El producto  $k_B T$  es unas 1000 veces mayor que el espacio de energía.

## ✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 9.4

¿Qué ocurre con la energía del estado fundamental de un electrón si las dimensiones del sólido aumentan?

Con frecuencia no nos interesa el número total de partículas en todos los estados, sino el número de partículas  $dN$  con energías en un estrecho intervalo de energía. Este valor puede expresarse mediante

$$dN = n(E) dE = g(E) dE \cdot F$$

donde  $n(E)$  es la **densidad numérica de los electrones**, o el número de electrones por unidad de volumen,  $g(E)$  es la **densidad de estados**, o el número de estados cuánticos permitidos por unidad de energía,  $dE$  es el tamaño del intervalo de energía, y  $F$  es el **factor de Fermi**. El factor de Fermi es la probabilidad de que el estado se llene. Por ejemplo, si  $g(E)dE$  tiene 100 estados disponibles, pero  $F$  solo tiene 5%, entonces el número de partículas en este estrecho intervalo de energía es de solo cinco. Hallar  $g(E)$  requiere resolver la ecuación de Schrödinger (en tres dimensiones) para los niveles de energía permitidos. El cálculo es complicado incluso para un modelo rudimentario, pero el resultado es sencillo:

$$g(E) = \frac{\pi V}{2} \left( \frac{8m_e}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2}, \quad 9.29$$

donde  $V$  es el volumen del sólido,  $m_e$  es la masa del electrón y  $E$  es la energía del estado. Observe que la densidad de estados aumenta con la raíz cuadrada de la energía. Hay más estados disponibles a alta energía que a baja energía. Esta expresión *no* proporciona información de la densidad de los electrones en el espacio físico, sino de la densidad de los niveles de energía en el "espacio energético". Por ejemplo, en nuestro estudio de la estructura atómica, aprendimos que los niveles de energía de un átomo de hidrógeno están mucho más espaciados para valores de energía pequeños (cerca del estado fundamental) que para valores mayores.

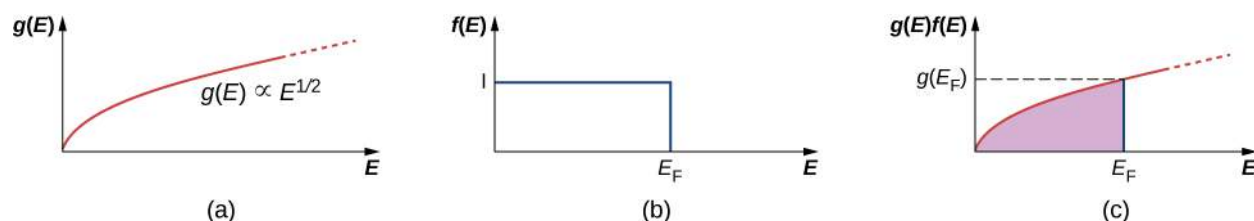
Esta ecuación nos dice cuántos estados de los electrones están disponibles en un sólido metálico tridimensional. Sin embargo, no nos dice la probabilidad de que estos estados se llenen. Por lo tanto,



necesitamos determinar el factor de Fermi,  $F$ . Consideremos el caso simple de  $T = 0$  K. Desde la física clásica, esperamos que todos los electrones ( $\sim 10^{22} / \text{cm}^3$ ) simplemente pasarían al estado fundamental para alcanzar la menor energía posible. Sin embargo, esto viola el principio de exclusión de Pauli, que establece que no puede haber dos electrones en el mismo estado cuántico. Por lo tanto, cuando empezamos a llenar los estados con electrones, los estados con menor energía se ocupan primero, y luego los estados con energías progresivamente más altas. El *último electrón* que ponemos tiene la mayor energía. Esta energía es la energía de Fermi  $E_F$  del gas de electrones libres. Un estado con energía  $E < E_F$  está ocupado por un solo electrón, y un estado con energía  $E > E_F$  está desocupado. Para describir esto en términos de una probabilidad  $F(E)$  de que un estado de energía  $E$  esté ocupado, escribimos para  $T = 0$  K:

$$\begin{aligned} F(E) &= 1 & (E < E_F) \\ F(E) &= 0 & (E > E_F). \end{aligned} \quad 9.30$$

La densidad de estados, el factor de Fermi y la densidad numérica de los electrones se representan en función de la energía en la [Figura 9.12](#).



**FIGURA 9.12** (a) Densidad de estados para un gas de electrones libres; (b) probabilidad de que un estado esté ocupado en  $T = 0$  K; (c) densidad de estados ocupados en  $T = 0$  K.

Conviene hacer algunas observaciones. En primer lugar, la distribución de la densidad numérica de electrones (última fila) cae bruscamente en la energía de Fermi. Según la teoría, esta energía viene dada por

$$E_F = \frac{h^2}{8m_e} \left( \frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3}. \quad 9.31$$

Las energías de Fermi de los materiales seleccionados se enumeran en la siguiente tabla.

Elemento	Densidad de electrones en la banda de conducción ( $10^{28} \text{ m}^{-3}$ )	Modelo de electrones libres de la energía de Fermi (eV)
Al	18,1	11,7
Ba	3,15	3,64
Cu	8,47	7,00
Au	5,90	5,53
Fe	17,0	11,1
Ag	5,86	5,49

**TABLA 9.3** Densidades de electrones de conducción y energías de Fermi para algunos metales

Observe también que solo el gráfico en la parte (c) de la figura, que responde a la pregunta "¿cuántas partículas se encuentran en el rango de energía?" se comprueba mediante el experimento. La **temperatura de Fermi** o "temperatura" efectiva de un electrón en la energía de Fermi es

$$T_F = \frac{E_F}{k_B}. \quad 9.32$$

### EJEMPLO 9.5

#### Energía de Fermi de la plata

La plata metálica es un excelente conductor. Tiene  $5,86 \times 10^{28}$  electrones de conducción por metro cúbico. (a) Calcule su energía de Fermi. (b) Compare esta energía con la energía térmica  $k_B T$  de los electrones a una temperatura ambiente de 300 K.

#### Solución

a. A partir de la [Ecuación 9.31](#), la energía de Fermi es

$$\begin{aligned} E_F &= \frac{h^2}{2m_e} (3\pi^2 n_e)^{2/3} \\ &= \frac{(1,05 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})^2}{2(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})} \times [(3\pi^2 (5,86 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}))^{2/3}] \\ &= 8,79 \times 10^{-19} \text{ J} = 5,49 \text{ eV}. \end{aligned}$$

Este es un valor típico de la energía de Fermi para los metales, como puede verse en la [Tabla 9.3](#).

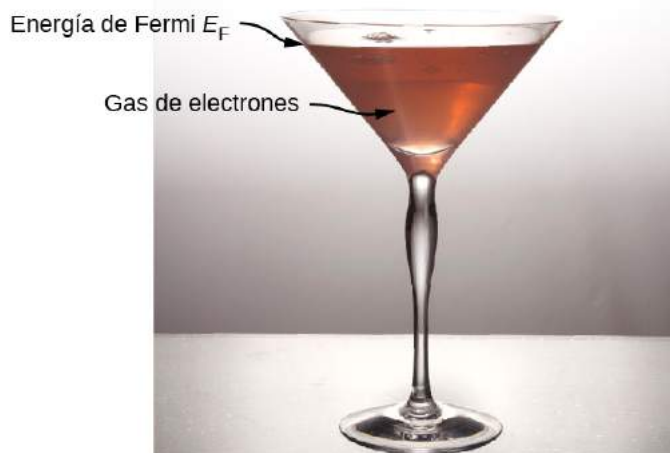
b. Podemos asociar una temperatura de Fermi  $T_F$  con la energía de Fermi escribiendo  $k_B T_F = E_F$ . Hallamos entonces para la temperatura de Fermi

$$T_F = \frac{8,79 \times 10^{-19} \text{ J}}{1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}} = 6,37 \times 10^4 \text{ K},$$

que es muy superior a la temperatura ambiente y también al punto de fusión típico ( $\sim 10^3 \text{ K}$ ) de un metal. La relación entre la energía de Fermi de la plata y la energía térmica a temperatura ambiente es

$$\frac{E_F}{k_B T} = \frac{T_F}{T} \approx 210.$$

Para visualizar cómo se llenan los estados cuánticos, podemos imaginar que se vierte agua lentamente en una copa, como la de la [Figura 9.13](#). Las primeras gotas de agua (los electrones) ocupan el fondo de la copa (los estados con menor energía). A medida que el nivel sube, se ocupan estados de energía cada vez más altos. Además, como la copa tiene una abertura amplia y un tallo estrecho, ocupa más agua en la parte superior de la copa que en la inferior. Esto refleja el hecho de que la densidad de estados  $g(E)$  es proporcional a  $E^{1/2}$ , por lo que hay un número relativamente grande de electrones de mayor energía en un gas de electrones libres. Por último, el nivel al que se llena la copa corresponde a la energía de Fermi.



**FIGURA 9.13** Una analogía de cómo los electrones llenan los estados de energía en un metal. A medida que los electrones llenan los estados de energía, de menor a mayor, el número de estados disponibles aumenta. El estado de mayor energía (correspondiente a la línea de agua) es la energía de Fermi (crédito: modificación del trabajo de "Didriks"/ Flickr).

Supongamos que en  $T = 0$  K, el número de electrones de conducción por unidad de volumen en nuestra muestra es  $n_e$ . Como cada estado de campo tiene un electrón, el número de estados llenos por unidad de volumen es el mismo que el número de electrones por unidad de volumen.

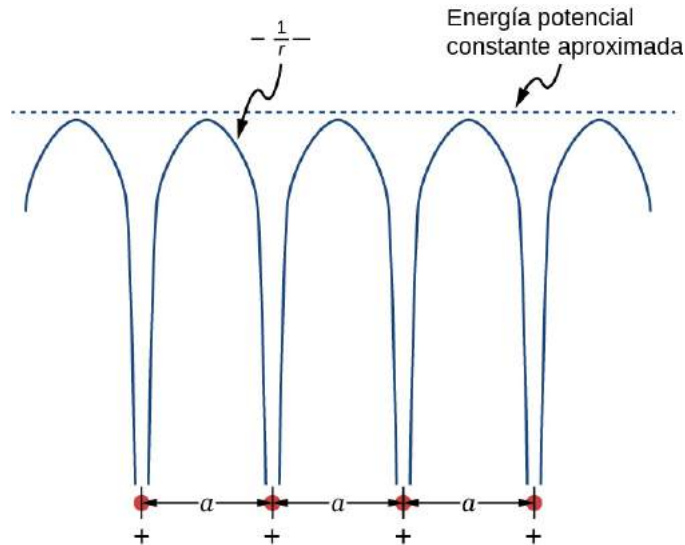
## 9.5 Teoría de bandas de los sólidos

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Describir dos enfoques principales para determinar los niveles de energía de un electrón en un cristal.
- Explicar la presencia de bandas de energía y brechas en la estructura energética de un cristal.
- Explicar por qué algunos materiales son buenos conductores y otros son buenos aislantes.
- Diferenciar entre un aislante y un semiconductor.

El modelo de electrones libres explica muchas propiedades importantes de los conductores, pero es débil en al menos dos áreas. En primer lugar, asume una energía potencial constante dentro del sólido. (Recordemos que una energía potencial constante está asociada a la ausencia de fuerzas). La [Figura 9.14](#) compara la suposición de una energía potencial constante (línea punteada) con el potencial periódico de Coulomb, que cae como  $-1/r$  en cada punto de la red, donde  $r$  es la distancia al núcleo de iones (línea sólida). En segundo lugar, el modelo de electrones libres supone una barrera impenetrable en la superficie. Esta suposición no es válida, porque en determinadas condiciones, los electrones pueden escapar de la superficie, como en el efecto fotoeléctrico. Además de estas suposiciones, el modelo de electrones libres no explica las dramáticas diferencias en las propiedades electrónicas de los conductores, semiconductores y aislantes. Por lo tanto, se necesita un modelo más completo.



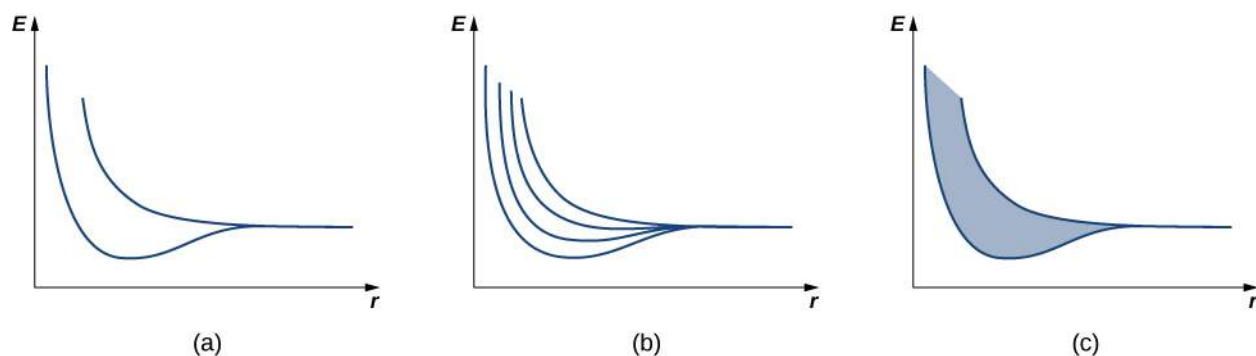
**FIGURA 9.14** El potencial periódico utilizado para modelar los electrones en un conductor. Cada ion en el sólido es la fuente de un potencial de Coulomb. Observe que el modelo de electrones libres es productivo porque la media de este campo es aproximadamente constante.

Podemos producir un modelo mejorado resolviendo la ecuación de Schrödinger para el potencial periódico que se muestra en la [Figura 9.14](#). Sin embargo, la solución requiere una matemática técnica que está fuera de nuestro alcance. Volvemos a buscar un argumento cualitativo con base en la mecánica cuántica para encontrar una vía.

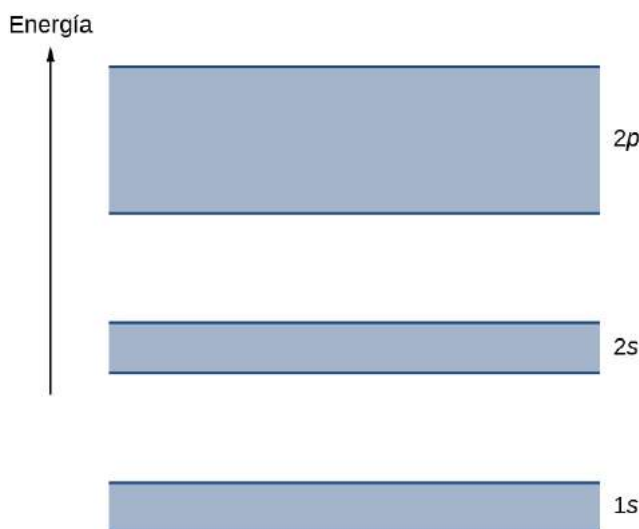
En primer lugar, repasamos el argumento utilizado para explicar la estructura energética de un enlace covalente. Considere dos átomos de hidrógeno idénticos tan alejados que no existe interacción alguna entre ellos. Supongamos además que el electrón de cada átomo se encuentra en el mismo estado fundamental: un electrón  $1s$  con una energía de  $-13,6$  eV (ignore el espín). Cuando los átomos de hidrógeno se acercan, las funciones de onda individuales de los electrones se superponen y, por el principio de exclusión, ya no pueden estar en el mismo estado cuántico, lo que divide los niveles de energía equivalentes originales en dos niveles de energía diferentes. Las energías de estos niveles dependen de la distancia interatómica,  $a$  ([Figura 9.15](#)).

Si se juntan cuatro átomos de hidrógeno, se forman cuatro niveles a partir de las cuatro simetrías posibles: una sola "joroba" de onda sinusoidal en cada pozo, alternando arriba y abajo, y así sucesivamente. En el límite de un número muy grande  $N$  de átomos, esperamos una propagación de bandas casi continuas de niveles de energía electrónica en un sólido (vea la [Figura 9.15\(c\)](#)). Cada una de estas bandas se conoce como **banda de energía**. (Los estados permitidos de energía y número de onda siguen siendo técnicamente cuantizados, pero en un gran número de átomos estos estados están tan cerca entre sí que se consideran continuos o "en el continuo").

Las bandas de energía se diferencian por el número de electrones que contienen. En las bandas de energía  $1s$  y  $2s$ , cada nivel de energía contiene hasta dos electrones (espín arriba y espín abajo), por lo que esta banda tiene una ocupación máxima de  $2N$  electrones. En la banda de energía  $2p$ , cada nivel de energía tiene hasta seis electrones, por lo que esta banda tiene una ocupación máxima de  $6N$  electrones ([Figura 9.16](#)).



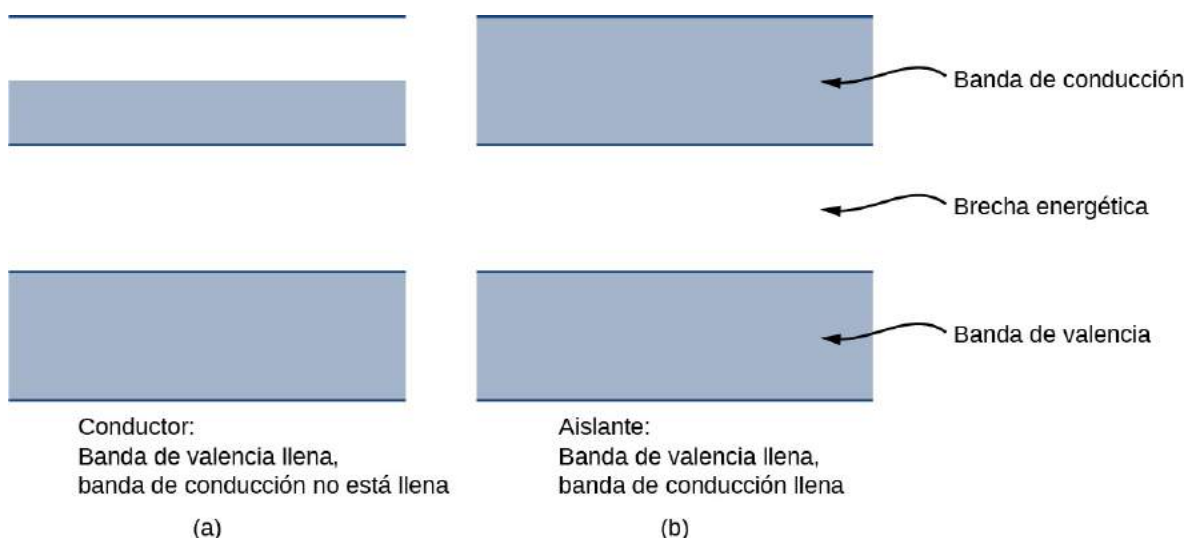
**FIGURA 9.15** La dependencia de la división del nivel de energía en la distancia media entre (a) dos átomos, (b) cuatro átomos, y (c) un gran número de átomos. Para un gran número de electrones, se produce una banda continua de energías.



**FIGURA 9.16** Una representación sencilla de la estructura energética de un sólido. Los electrones pertenecen a bandas de energía separadas por brechas energéticas.

Cada banda de energía está separada de la otra por una **brecha energética**. Las propiedades eléctricas de los conductores y los aislantes pueden entenderse en términos de bandas y brechas de energía. La banda de mayor energía que se llena se conoce como **banda de valencia**. La siguiente banda disponible en la estructura energética se conoce como **banda de conducción**. En un conductor, la banda de energía más alta que contiene electrones está parcialmente llena, mientras que en un aislante, la banda de energía más alta que contiene electrones está completamente llena. La diferencia entre un conductor y un aislante se ilustra en la [Figura 9.17](#).

Un conductor se diferencia de un aislante en la forma en que sus electrones responden a un campo eléctrico aplicado. Si un número significativo de electrones se pone en movimiento por el campo, el material es un conductor. En términos del modelo de banda, los electrones en la banda de conducción parcialmente llena ganan energía cinética del campo eléctrico llenando estados de mayor energía en la banda de conducción. Por el contrario, en un aislante, los electrones pertenecen a las bandas completamente llenas. Cuando se aplica el campo, los electrones no pueden realizar dichas transiciones (adquirir energía cinética del campo eléctrico) debido al principio de exclusión. Como resultado, el material no conduce la electricidad.



**FIGURA 9.17** Comparación de un conductor y un aislante. La banda de energía más alta está parcialmente llena en un conductor, pero completamente llena en un aislante.

### INTERACTIVO

Visite esta [simulación \(https://openstax.org/l/21bandstructure\\_es\)](https://openstax.org/l/21bandstructure_es) para conocer el origen de las bandas de energía en los cristales de los átomos y cómo la estructura de las bandas determina la forma en que un material conduce la electricidad. Explore cómo la estructura de bandas crea una red de muchos pozos.

Un **semiconductor** tiene una estructura energética similar a la de un aislante, salvo que tiene una brecha energética relativamente pequeña entre la banda más baja completamente llena y la siguiente banda disponible sin llenar. Este tipo de material constituye la base de la electrónica moderna. En  $T = 0 \text{ K}$ , el semiconductor y el aislante tienen bandas completamente llenas. La única diferencia está en el tamaño de la brecha energética (o *brecha de banda*)  $E_g$  entre la banda de energía más alta que se llena (la banda de valencia) y la banda vacía inmediatamente superior (la banda de conducción). En un semiconductor, este hueco es lo suficientemente pequeño como para que un número importante de electrones de la banda de valencia se excite térmicamente hacia la banda de conducción a temperatura ambiente. Estos electrones se encuentran entonces en una banda casi vacía y pueden responder a un campo aplicado. Como regla general, la brecha de banda de un semiconductor es de aproximadamente 1 eV. (Vea la [Tabla 9.4](#) para la silicón). Una brecha de banda superior a aproximadamente 1 eV se considera un aislante. A modo de comparación, la brecha energética del diamante (un aislante) es de varios electronvoltios.

Material	Brecha energética $E_g$ (eV)
Si	1,14
Ge	0,67
GaAs	1,43
GaP	2,26
GaSb	0,69
InAs	0,35
InP	1,35

Material	Brecha energética $E_g$ (eV)
InSb	0,16
C (diamante)	5,48

**TABLA 9.4** Brecha energética de varios materiales a 300 K. Nota: A excepción del diamante, todos los materiales mencionados son semiconductores.

## 9.6 Semiconductores y dopaje

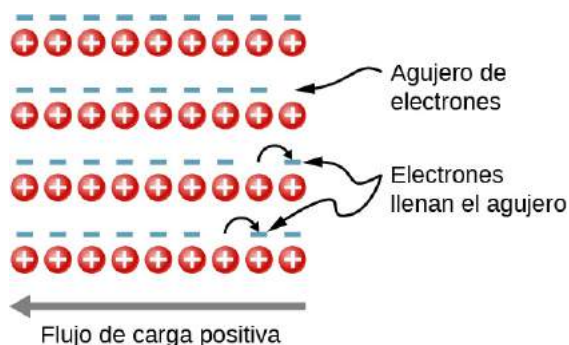
### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Describir los cambios en la estructura energética de un semiconductor debido al dopaje.
- Distinguir entre los semiconductores de tipo n y de tipo p.
- Describir el efecto Hall y explicar su importancia.
- Calcular la carga, la velocidad de deriva y la densidad numérica de los portadores de carga de un semiconductor utilizando la información de un experimento de efecto Hall.

En la sección anterior, solo hemos considerado la contribución a la corriente eléctrica debida a los electrones que ocupan estados en la banda de conducción. Sin embargo, el desplazamiento de un electrón de la banda de valencia a la banda de conducción deja un estado desocupado o **agujero** en la estructura energética de la banda de valencia, al que puede desplazarse un electrón cercano. A medida que estos agujeros son llenados por otros electrones, se crean nuevos agujeros. La corriente eléctrica asociada a este relleno puede verse como el movimiento colectivo de muchos electrones con carga negativa o el movimiento de los agujeros de electrones con carga positiva.

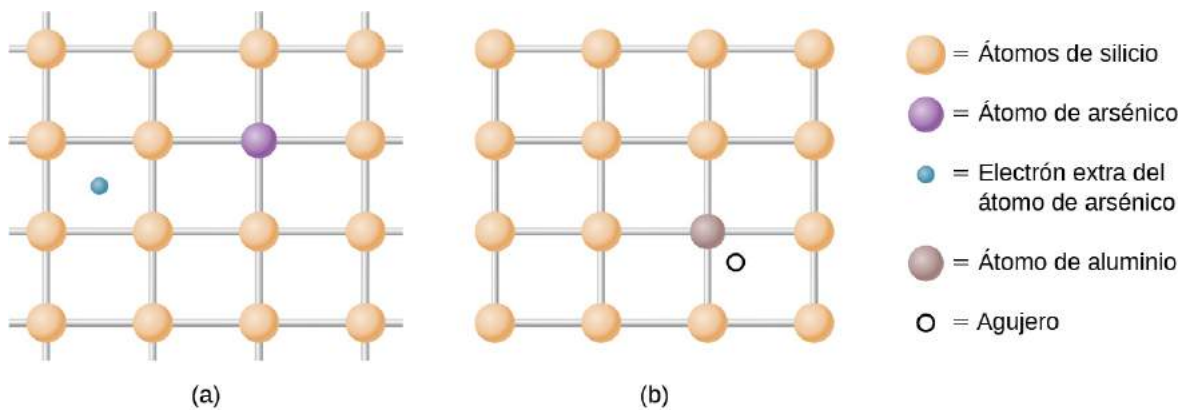
Para ilustrarlo, analicemos la red unidimensional en la [Figura 9.18](#). Supongamos que cada átomo de la red contribuye con un electrón de valencia a la corriente. A medida que el agujero de la derecha se llena, este agujero se desplaza hacia la izquierda. La corriente puede interpretarse como el flujo de carga positiva hacia la izquierda. La densidad de agujeros, o el número de agujeros por unidad de volumen, está representada por  $p$ . Cada electrón que hace la transición a la banda de conducción deja un agujero. Si la banda de conducción está originalmente vacía, la densidad de electrones de conducción  $n$  es igual a la densidad de agujeros, es decir,  $n = p$ .



**FIGURA 9.18** Movimiento de los agujeros en una red cristalina. A medida que los electrones se desplazan hacia la derecha, un agujero de electrones se desplaza hacia la izquierda.

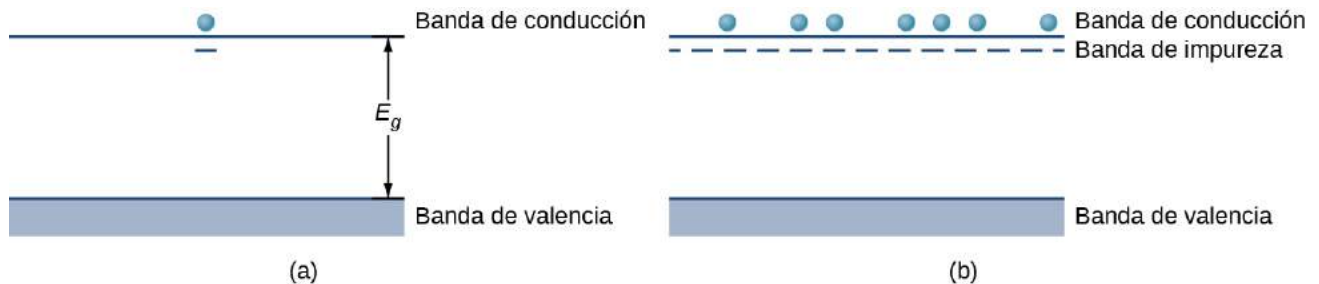
Como ya se ha dicho, un semiconductor es un material con una banda de valencia llena, una banda de conducción sin llenar y una brecha energética relativamente pequeña entre las bandas. El exceso de electrones o agujeros puede introducirse en el material mediante la sustitución en la red cristalina de un **átomo de impureza**, que es un átomo de un número de valencia ligeramente diferente. Este proceso se conoce como **dopaje**. Por ejemplo, supongamos que añadimos un átomo de arsénico a un cristal de silicio ([Figura 9.19\(a\)](#)).





**FIGURA 9.19** (a) Una impureza del donante y (b) un aceptador de impurezas. La introducción de impurezas y aceptores en un semiconductor cambia significativamente las propiedades electrónicas de este material.

El arsénico tiene cinco electrones de valencia, mientras que el silicio solo tiene cuatro. Por lo tanto, este electrón extra debe ir a la banda de conducción, ya que no hay espacio en la banda de valencia. El ion de arsénico que queda tiene una carga neta positiva que une débilmente el electrón deslocalizado. La unión es débil porque la red atómica circundante cubre el campo eléctrico del ion. Como resultado, la energía de enlace del electrón extra es solo de unos 0,02 eV. En otras palabras, el nivel de energía del electrón de impureza se encuentra en la brecha de la banda por debajo de la banda de conducción en 0,02 eV, un valor mucho menor que la energía de la brecha, 1,14 eV. A temperatura ambiente, este electrón de impureza se excita fácilmente en la banda de conducción y por lo tanto contribuye a la conductividad (Figura 9.20(a)). Una impureza con un electrón adicional se conoce como **impureza del donante**, y el semiconductor dopado se denomina **semiconductor tipo n** porque los portadores primarios de carga (electrones) son negativos.

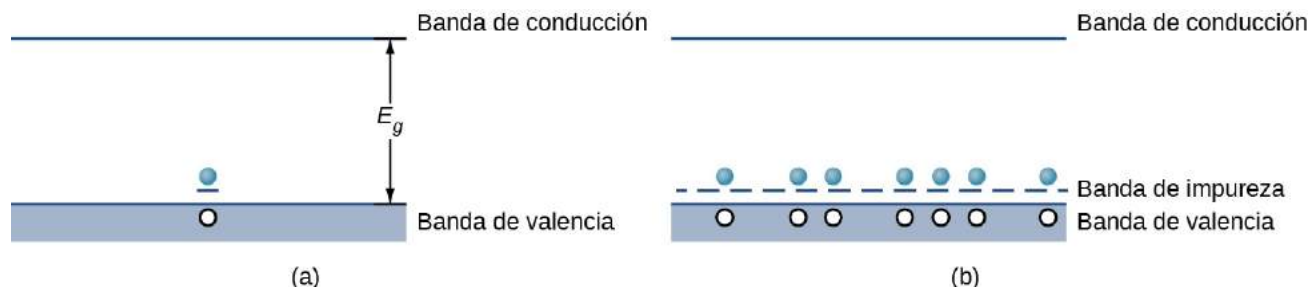


**FIGURA 9.20** (a) El electrón extra de una impureza del donante es excitado dentro de la banda de conducción; (b) formación de una banda de impureza en un semiconductor tipo n.

Al añadir más impurezas del donante, podemos crear una **banda de impureza**, una nueva banda de energía creada por el dopaje del semiconductor, como se muestra en la Figura 9.20(b). El nivel de Fermi se encuentra ahora entre esta banda y la banda de conducción. A temperatura ambiente, muchos electrones de impureza se excitan térmicamente en la banda de conducción y contribuyen a la conductividad. La conducción también puede producirse en la banda de impurezas, ya que allí se crean vacantes. Observe que los cambios en la energía de un electrón corresponden a un cambio en el movimiento (velocidades o energía cinética) de estos portadores de carga con el semiconductor, pero no el movimiento en masa del propio semiconductor.

El dopaje también puede llevarse a cabo utilizando átomos de impureza que normalmente tienen un electrón de valencia *menos* que los átomos del semiconductor. Por ejemplo, el Al, que tiene tres electrones de valencia, puede ser sustituido por el Si, como se muestra en la Figura 9.19(b). Dicha impureza se conoce como **aceptador de impurezas**, y el semiconductor dopado se denomina **semiconductor tipo p**, porque los portadores primarios de carga (agujeros) son positivos. Si un agujero se trata como una partícula positiva débilmente unida al lugar de la impureza, entonces se crea un estado de electrón vacío en la brecha de la banda justo por encima de la banda de valencia. Cuando este estado es ocupado por un electrón excitado térmicamente desde la banda de valencia (Figura 9.21(a)), se crea un agujero móvil en la banda de valencia. Al añadir más impurezas aceptadoras, podemos crear una banda de impurezas, como se muestra en la Figura

9.21(b).



**FIGURA 9.21** (a) Un electrón de la banda de conducción es excitado al estado vacío que resulta del aceptador de impurezas; (b) formación de una banda de impureza en un semiconductor *tipo p*.

La corriente eléctrica de un semiconductor dopado puede deberse al movimiento de un **portador mayoritario**, en el que los átomos de impureza aportan los agujeros, o a un **portador minoritario**, en el que únicamente las excitaciones térmicas de los electrones a través de la brecha energética aportan los agujeros. En un semiconductor de tipo *n*, los portadores mayoritarios son electrones libres aportados por átomos de impureza, y los portadores minoritarios son electrones libres producidos por excitaciones térmicas desde la banda de valencia a la de conducción. En un semiconductor tipo *p*, los portadores mayoritarios son agujeros libres que aportan los átomos de impureza, y los portadores minoritarios son agujeros libres que del llenado de estados deja debido a la excitación térmica de los electrones a través de la brecha. En general, el número de portadores mayoritarios supera por mucho al de los minoritarios. El concepto de portador mayoritario y minoritario se utilizará en la siguiente sección para explicar el funcionamiento de los diodos y transistores.

Al estudiar el dopaje tipo *pn*, es normal que nos preguntemos: ¿Los "agujeros de electrones" actúan realmente como partículas? La existencia de agujeros en un semiconductor dopado de tipo *p* se demuestra mediante el efecto Hall. El efecto Hall es la producción de una diferencia de potencial debida al movimiento de un conductor a través de un campo magnético externo (vea [El efecto Hall \(http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-2/pages/11-6-el-efecto-hall\)](http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-2/pages/11-6-el-efecto-hall)). Se muestra un esquema del efecto Hall en la [Figura 9.22\(a\)](#). Una franja de semiconductores se baña en un campo magnético uniforme (que apunta hacia el papel). A medida que los agujeros de los electrones se mueven de izquierda a derecha a través del semiconductor, una fuerza de Lorentz impulsa estas cargas hacia el extremo superior de la franja. (Recordemos que el movimiento de los portadores cargados positivamente está determinado por la regla de la mano derecha). La carga positiva continúa acumulándose en el borde superior de la franja hasta que la fuerza asociada al campo eléctrico descendente entre los bordes superior e inferior de la franja ( $F_E = Eq$ ) solo equilibra la fuerza magnética ascendente ( $F_B = qvB$ ). Si estas fuerzas son iguales entre sí, tenemos  $E = vB$ . Por lo tanto, el voltaje que se desarrolla a través de la franja

$$V_H = vBw, \quad 9.33$$

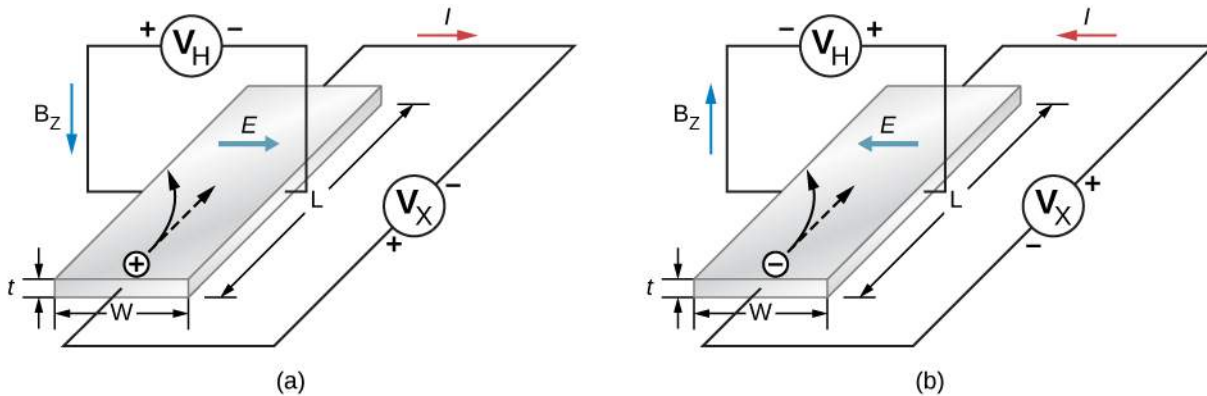
donde  $V_H$  es el voltaje Hall;  $v$  es la **velocidad de deriva** del agujero, o velocidad media de una partícula que se mueve de forma parcialmente aleatoria;  $B$  es la intensidad del campo magnético; y  $w$  es la anchura de la franja. Observe que el voltaje Hall es transversal al voltaje que produce inicialmente la corriente a través del material. La medición del signo de este voltaje (o diferencia de potencial) confirma la acumulación de agujeros en la cara superior de la franja. La magnitud del voltaje Hall da la velocidad de deriva ( $v$ ) de los portadores mayoritarios.

También puede obtenerse información adicional del voltaje Hall. Observe que la densidad de corriente de electrones (la cantidad de corriente por unidad de área de la sección transversal de la franja semiconductor) es

$$j = nqv, \quad 9.34$$

donde  $q$  es la magnitud de la carga,  $n$  es el número de portadores de carga por unidad de volumen y  $v$  es la velocidad de deriva. La densidad de corriente se determina fácilmente dividiendo la corriente total por el área de la sección transversal de la franja,  $q$  es la carga del agujero (la magnitud de la carga de un solo electrón), y  $u$

se determina por el efecto Hall [Ecuación 9.34](#). Por lo tanto, la expresión anterior para la densidad de corriente de electrones da el número de portadores de carga por unidad de volumen,  $n$ . Se puede realizar un análisis similar para los portadores cargados negativamente en un material de tipo  $n$  (vea la [Figura 9.22](#)).



**FIGURA 9.22** El efecto Hall. (a) Los agujeros de los electrones cargados positivamente son atraídos hacia la izquierda por un campo magnético uniforme que apunta hacia abajo. Se genera un campo eléctrico hacia la derecha. (b) Los electrones con carga negativa son atraídos hacia la izquierda por un campo magnético que apunta hacia arriba. Se genera un campo eléctrico hacia la izquierda.

## 9.7 Dispositivos semiconductores

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

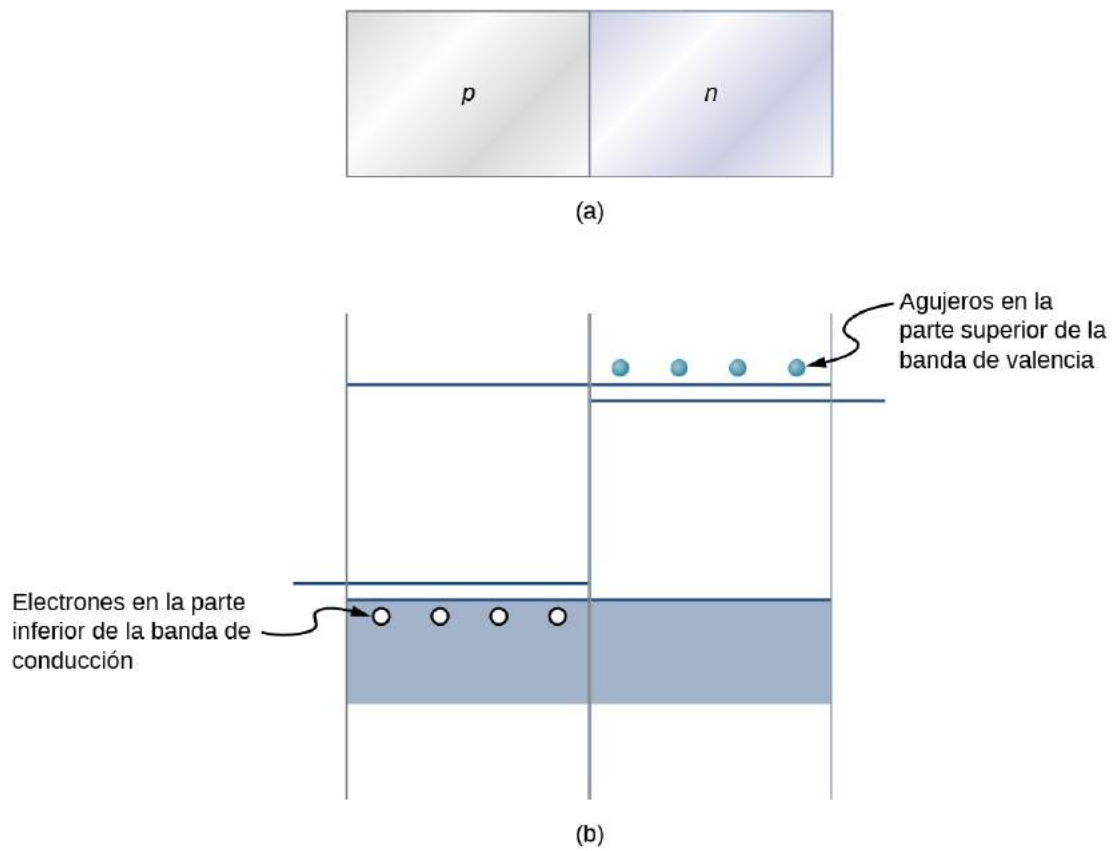
Al final de esta sección podrá:

- Describir lo que ocurre cuando se unen materiales de tipo  $n$  y  $p$  utilizando el concepto de difusión y corriente de deriva (tensión aplicada cero).
- Explicar la respuesta de una unión  $p$ - $n$  a un voltaje de polarización directa e inversa.
- Describir la función de un transistor en un circuito eléctrico.
- Utilizar el concepto de unión  $p$ - $n$  para explicar sus aplicaciones en amplificadores de audio y computadoras.

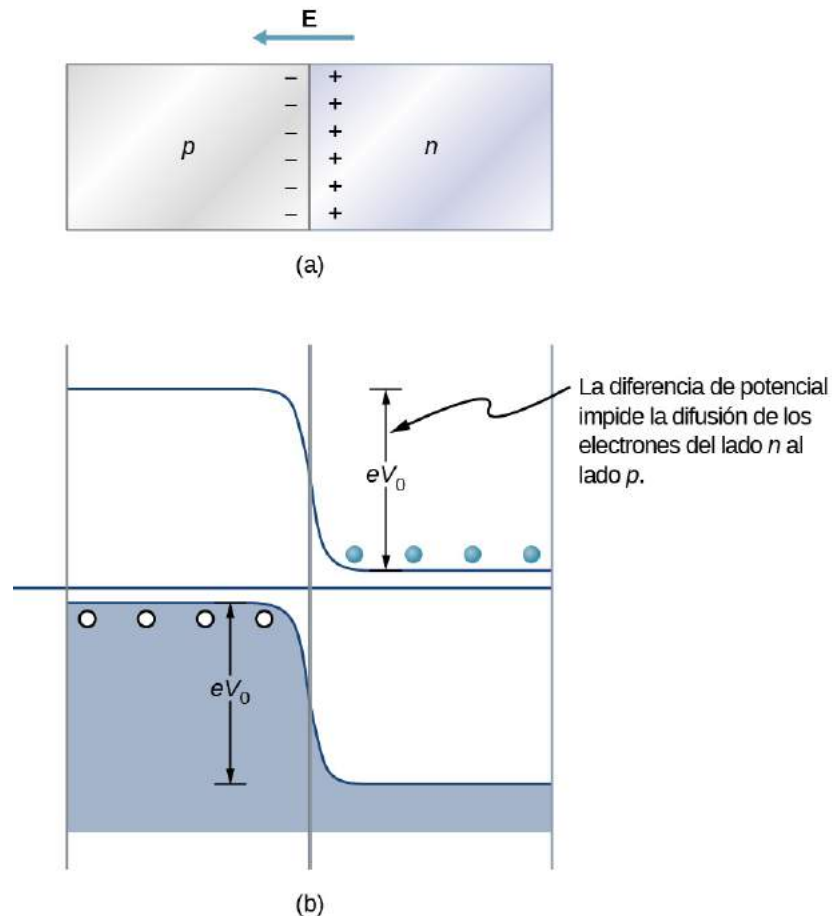
Los semiconductores tienen muchas aplicaciones en la electrónica moderna. En esta sección describimos algunos dispositivos semiconductores básicos. Una gran ventaja del uso de semiconductores para los elementos de los circuitos es el hecho de que se pueden combinar muchos miles o millones de dispositivos semiconductores en la misma pieza minúscula de silicio y conectarlos mediante vías conductoras. La estructura resultante se denomina circuito integrado (Integrated Circuit, IC), y los chips de ic son la base de muchos dispositivos modernos, desde las computadoras y los teléfonos inteligentes hasta Internet y las redes de comunicaciones globales.

### Diodos

Quizás el dispositivo más sencillo que se puede crear con un semiconductor es un diodo. Un diodo es un elemento del circuito que permite que la corriente eléctrica fluya en una sola dirección, como una válvula de un solo sentido (vea [Modelo de Conducción en los Metales \(http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-2/pages/9-2-modelo-de-conduccion-en-metales\)](http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-2/pages/9-2-modelo-de-conduccion-en-metales)). Un diodo se crea uniendo un semiconductor de tipo  $p$  con un semiconductor de tipo  $n$  ([Figura 9.23](#)). La unión entre estos materiales se denomina **unión  $p$ - $n$** . En la [Figura 9.23\(b\)](#) se muestra una comparación de las bandas de energía de un diodo de silicio. Las posiciones de las bandas de valencia y de conducción son las mismas, pero los niveles de impurezas son muy diferentes. Cuando se forma una unión  $p$ - $n$ , los electrones de la banda de conducción del material de tipo  $n$  se difunden hacia el lado  $p$ , donde se combinan con los agujeros de la banda de valencia. Esta migración de carga deja iones donantes ionizados positivos en el lado  $n$  e iones aceptadores ionizados negativos en el lado  $p$ , produciendo una estrecha capa doble de carga en la unión  $p$ - $n$  llamada **capa de agotamiento**. El campo eléctrico asociado a la capa de agotamiento impide la difusión posterior. La energía potencial de los electrones a través de la unión  $p$ - $n$  viene dada por la [Figura 9.24](#).



**FIGURA 9.23** (a) Representación de una unión  $p$ - $n$ . (b) Comparación de las bandas de energía del silicio tipo  $p$  y tipo  $n$  antes del equilibrio.



**FIGURA 9.24** En equilibrio, (a) el exceso de carga reside cerca de la interfase y la corriente neta es cero, y (b) la diferencia de energía potencial para los electrones (en azul claro) impide la difusión adicional de electrones hacia el lado  $p$ .

Ahora se puede entender el comportamiento de un diodo semiconductor. Si el lado positivo de la batería se conecta al material de tipo  $n$ , la capa de agotamiento se amplía y la diferencia de energía potencial a través de la unión  $p$ - $n$  aumenta. Pocos o ninguno de los electrones (agujeros) tienen suficiente energía para subir la barrera de potencial, y la corriente se reduce considerablemente. Esto se llama la **configuración de polarización inversa**. Por otro lado, si el lado positivo de una batería se conecta al material de tipo  $p$ , la capa de agotamiento se estrecha, la diferencia de energía potencial a través de la unión  $p$ - $n$  se reduce y los electrones (agujeros) fluyen fácilmente. Esto se llama la **configuración de polarización directa** del diodo. En resumen, el diodo permite que la corriente fluya libremente en una dirección, pero impide el flujo de corriente en la dirección opuesta. En este sentido, el diodo semiconductor es una válvula unidireccional.

Podemos estimar la relación matemática entre la corriente y el voltaje de un diodo utilizando el concepto de potencial eléctrico. Considere portadores mayoritarios  $N$  cargados negativamente (electrones donados por átomos de impureza) en el material de tipo  $n$  y una barrera de potencial  $V$  a través de la unión  $p$ - $n$ . Según la distribución de Maxwell-Boltzmann, la fracción de electrones que tienen suficiente energía para difundir a través de la barrera de potencial es  $N e^{-eV/k_B T}$ . Sin embargo, si una batería de voltaje  $V_b$  se aplica en la configuración de polarización directa, esta fracción mejora a  $N e^{-e(V-V_b)/k_B T}$ . Por lo tanto, la corriente eléctrica debida a los portadores mayoritarios del lado  $n$  al lado  $p$  es

$$I = N e^{-eV/k_B T} e^{eV_b/k_B T} = I_0 e^{eV_b/k_B T}, \quad 9.35$$

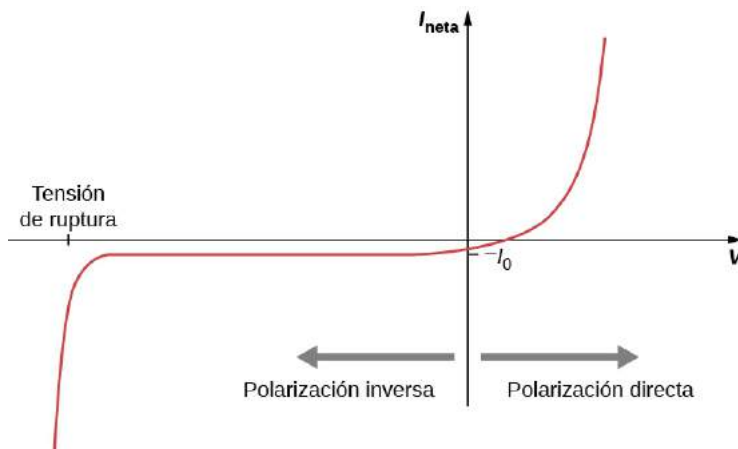
donde  $I_0$  es la corriente sin voltaje aplicado y  $T$  es la temperatura. La corriente debida a los portadores minoritarios (excitación térmica de los electrones desde la banda de valencia a la banda de conducción en el lado  $p$  y posterior atracción hacia el lado  $n$ ) es  $-I_0$ , independientemente del voltaje de polarización. Por lo

tanto, la corriente neta es

$$I_{\text{neta}} = I_0 \left( e^{eV_b/k_B T} - 1 \right).$$

9.36

Un ejemplo de gráfico de la corriente en función del voltaje de polarización aparece en la [Figura 9.25](#). En la configuración de polarización directa, pequeños cambios en el voltaje de polarización conducen a grandes cambios en la corriente. En la configuración de polarización inversa, la corriente es  $I_{\text{neta}} \approx -I_0$ . Para valores extremos de polarización inversa, los átomos del material se ionizan, lo que desencadena una avalancha de corriente. Este caso se da en la **tensión de ruptura**.



**FIGURA 9.25** Corriente en función del voltaje a través de una unión  $p$ - $n$  (diodo). En la configuración de polarización directa, la corriente eléctrica fluye fácilmente. Sin embargo, en la configuración de polarización inversa, la corriente eléctrica fluye muy poco.

## EJEMPLO 9.6

### Corriente del diodo

Al conectar el extremo positivo de una batería al lado  $p$  y el extremo negativo al lado  $n$  de un diodo semiconductor se produce una corriente de  $4,5 \times 10^{-1}$  A. La corriente de saturación inversa es  $2,2 \times 10^{-8}$  A. (La corriente de saturación inversa es la corriente de un diodo en una configuración de polarización inversa como esta). El voltaje de la batería es de 0,12 V. ¿Cuál es la temperatura del diodo?

### Estrategia

La primera disposición es una configuración de polarización directa, y la segunda es la configuración de polarización inversa. En cualquier caso, la [Ecuación 9.2](#) da la corriente.

### Solución

La corriente en las configuraciones de polarización directa e inversa viene dada por

$$I_{\text{neta}} = I_0 \left( e^{eV_b/k_B T} - 1 \right).$$

La corriente sin polarización está relacionada con la corriente de saturación inversa por

$$I_0 \approx -I_{\text{sat}} = 2,2 \times 10^{-8}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{I_{\text{neta}}}{I_0} = \frac{4,5 \times 10^{-1} \text{ A}}{2,2 \times 10^{-8} \text{ A}} = 2,0 \times 10^8.$$

[Ecuación 9.2](#) puede escribirse como

$$\frac{I_{\text{neta}}}{I_0} + 1 = e^{eV_b/k_B T}.$$

Esta relación es mucho mayor que uno, por lo que el segundo término del lado izquierdo de la ecuación desaparece. Tomando el logaritmo natural de ambos lados se obtiene

$$\frac{eV_b}{k_B T} = 19.$$

Por lo tanto, la temperatura es

$$T = \frac{eV_b}{k_B} \left( \frac{1}{19} \right) = \frac{e(0,12 \text{ V})}{8,617 \times 10^{-5} \text{ eV/K}} \left( \frac{1}{19} \right) = 73 \text{ K}.$$

### Importancia

La corriente que atraviesa un diodo en la configuración de polarización directa y en la inversa es sensible a la temperatura del diodo. Si la energía potencial suministrada por la batería es grande en comparación con la energía térmica del entorno del diodo,  $k_B T$ , entonces la corriente de polarización directa es muy grande comparada con la corriente de saturación inversa.

### ✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 9.5

¿Cómo se compara la magnitud de la corriente de polarización directa con la corriente de polarización inversa?

### 🔗 INTERACTIVO

Cree una unión  $p$ - $n$  y observe el comportamiento de un circuito sencillo para voltajes de polarización directa e inversa. Visite este [sitio \(https://openstax.org/l/21semiconductor\\_es\)](https://openstax.org/l/21semiconductor_es) para saber más sobre los diodos semiconductores.

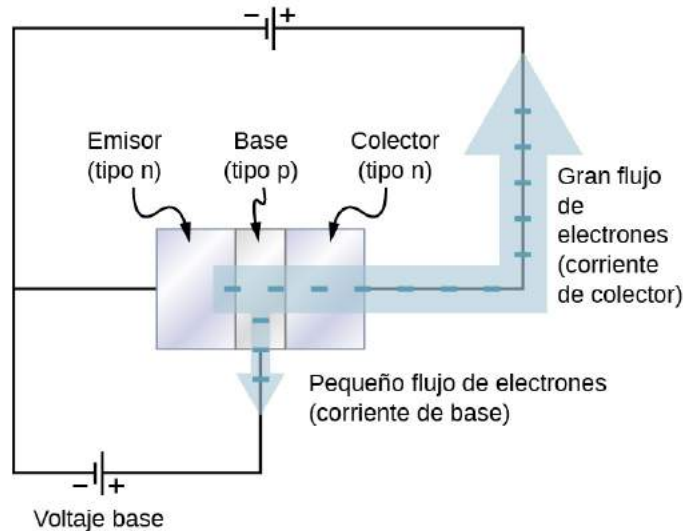
### Transistor de unión

Si los diodos son válvulas unidireccionales, los transistores son válvulas unidireccionales que pueden abrirse y cerrarse cuidadosamente para controlar la corriente. Un tipo especial de transistor es el transistor de unión. Un **transistor de unión** tiene tres partes, incluyendo un semiconductor de tipo  $n$ , también llamado emisor; un semiconductor delgado de tipo  $p$ , que es la base; y otro semiconductor de tipo  $n$ , llamado colector ([Figura 9.26](#)). Cuando se conecta un terminal positivo a la capa de tipo  $p$  (la base), una pequeña corriente de electrones, llamada **corriente de base**  $I_B$ , fluye hacia el terminal. Esto provoca que una gran **corriente de colector**  $I_C$  fluya a través del colector. La corriente de base puede ajustarse para controlar la gran corriente de colector. Por lo tanto, la ganancia de corriente es

$$I_C = \beta I_B.$$

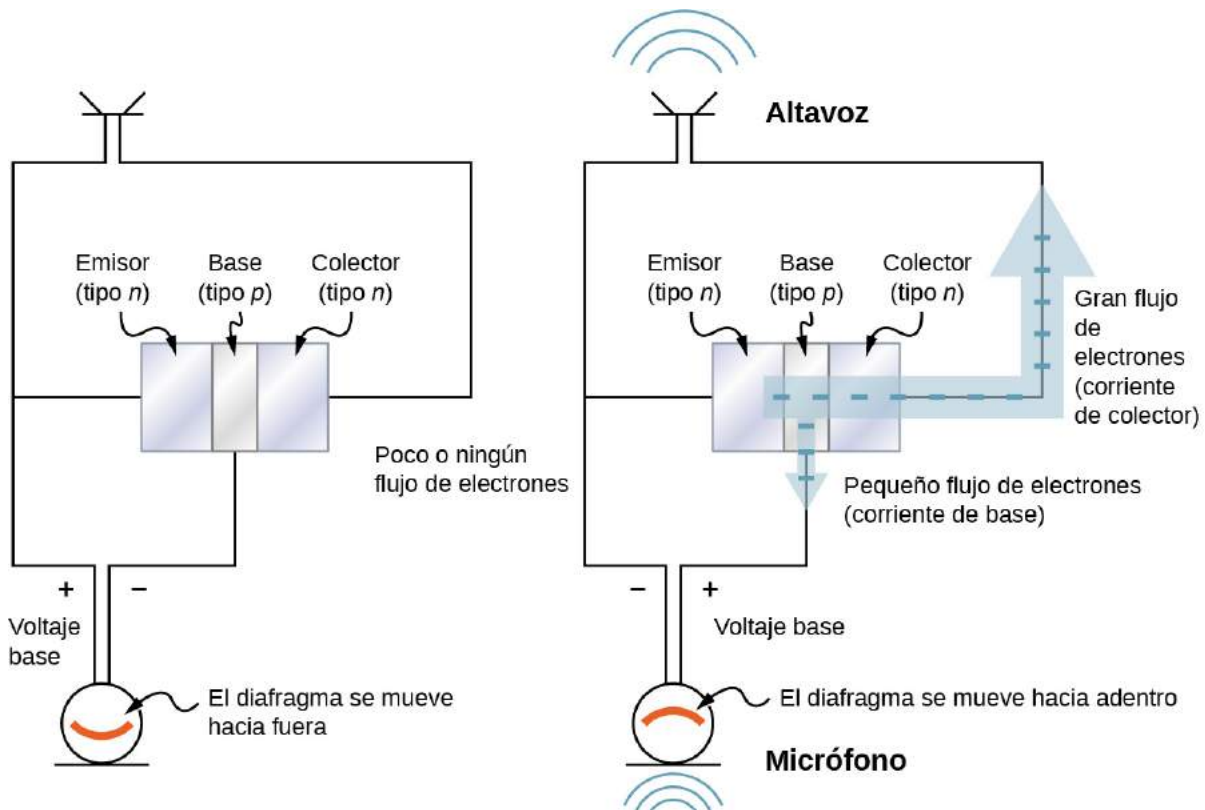
9.37





**FIGURA 9.26** Un transistor de unión tiene tres partes: emisor, base y colector. El voltaje aplicado a la base actúa como una válvula para controlar la corriente eléctrica del emisor al colector.

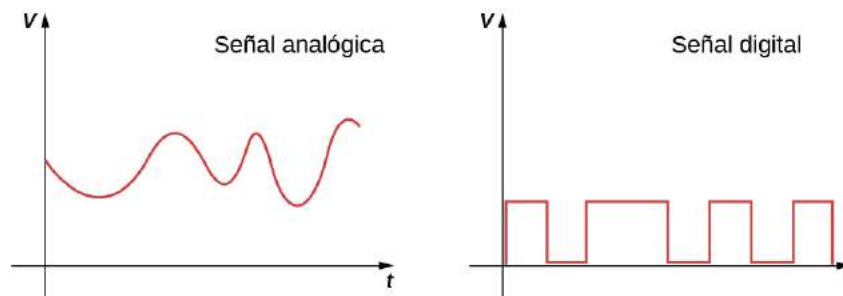
Un transistor de unión puede utilizarse para amplificar el voltaje de un micrófono para accionar un altavoz. En esta aplicación, las ondas sonoras hacen que un diafragma del interior del micrófono se mueva rápidamente hacia dentro y hacia fuera (Figura 9.27). Cuando el diafragma está en la posición de "entrada", se aplica un pequeño voltaje positivo a la base del transistor. Esto abre la "válvula" del transistor y permite un gran flujo de corriente eléctrica hacia el altavoz. Cuando el diafragma está en la posición de "salida", se aplica un pequeño voltaje negativo a la base del transistor, que apaga la válvula del transistor para que no fluya corriente al altavoz. Esto apaga la "válvula" del transistor para que no fluya corriente al altavoz. De este modo, la corriente que llega al altavoz está controlada por las ondas sonoras, y el sonido se amplifica. Cualquier dispositivo eléctrico que amplifica una señal se llama **amplificador**.



**FIGURA 9.27** Un amplificador de audio basado en un transistor de unión. El voltaje aplicado a la base por un

micrófono actúa como una válvula para controlar una corriente eléctrica mayor que pasa por un altavoz.

En los dispositivos electrónicos modernos, las señales digitales se utilizan con diodos y transistores para realizar tareas como el manejo de datos. Los circuitos eléctricos transmiten dos tipos de señales eléctricas: analógicas y digitales (Figura 9.28). Una señal analógica varía continuamente, mientras que una señal digital alterna entre dos valores fijos de voltaje, como más 1 voltio y cero voltios. En los circuitos digitales, como los de las computadoras, un transistor se comporta como un interruptor de encendido y apagado. El transistor está encendido, lo que significa que la válvula está completamente abierta, o está apagado, lo que significa que la válvula está completamente cerrada. Los circuitos integrados contienen vastas colecciones de transistores en una sola pieza de silicio. Están diseñados para manejar señales digitales que representan unos y ceros, lo que también se conoce como código binario. La invención del ic contribuyó a poner en marcha la revolución informática moderna.



**FIGURA 9.28** Los datos del mundo real son con frecuencia analógicos, lo que significa que los datos pueden variar continuamente. Los valores de intensidad de las imágenes sonoras o visuales suelen ser analógicos. Estos datos se convierten en señales digitales para su procesamiento electrónico en dispositivos de grabación o computadoras. La señal digital se genera a partir de la señal analógica exigiendo un determinado valor de corte de voltaje.

## 9.8 Superconductividad

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Describir las características principales de un superconductor.
- Describir la teoría BCS de la superconductividad.
- Determinar el campo magnético crítico para  $T = 0$  K a partir de los datos del campo magnético.
- Calcular la fuerza electromotriz (electromotive force, emf) o corriente máxima para que un alambre siga siendo superconductor.

La resistencia eléctrica puede considerarse como una medida de la fuerza de fricción en el flujo de la corriente eléctrica. Así, la resistencia eléctrica es una fuente primaria de disipación de energía en sistemas eléctricos como electroimanes, motores eléctricos y líneas de transmisión. El alambre de cobre se utiliza habitualmente en el alambrado eléctrico porque tiene una de las resistividades eléctricas a temperatura ambiente más bajas entre los conductores comunes. (En realidad, la plata tiene una resistividad más baja que el cobre, pero el alto costo y la disponibilidad limitada de la plata superan su ahorro de energía sobre el cobre).

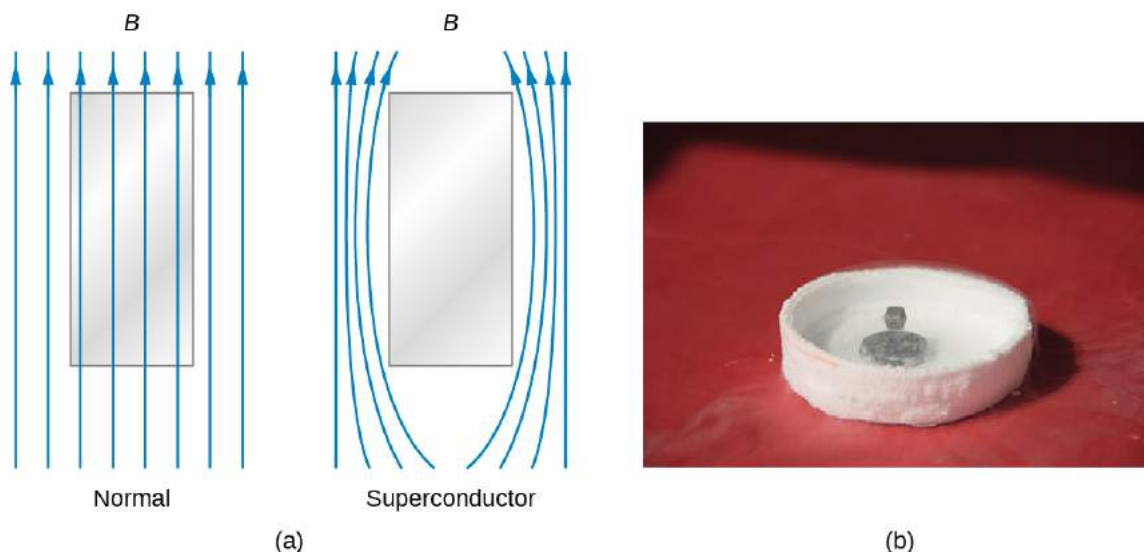
Aunque nuestra discusión sobre la conductividad parece implicar que todos los materiales deben tener resistencia eléctrica, sabemos que no es así. Cuando la temperatura disminuye por debajo de un valor crítico en muchos materiales, su resistividad eléctrica cae a cero y los materiales se convierten en superconductores (vea [Superconductores \(http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-2/pages/9-6-superconductores\)](http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-2/pages/9-6-superconductores)).

### INTERACTIVO

Vea este extracto de [video de NOVA \(https://openstax.org/l/21NOVA\)](https://openstax.org/l/21NOVA), Making Stuff Colder (enfriando las cosas) como introducción al tema de la superconductividad y sus múltiples aplicaciones.

## Propiedades de los superconductores

Además de una resistencia eléctrica cero, los superconductores también tienen un diamagnetismo perfecto. En otras palabras, en presencia de un campo magnético aplicado, el campo magnético neto dentro de un superconductor es siempre cero (Figura 9.29). Por lo tanto, cualquier línea de campo magnético que pase a través de una muestra superconductora cuando está en su estado normal es expulsada una vez que la muestra se convierte en superconductora. Se trata de manifestaciones del efecto Meissner, que conoció en el capítulo sobre corriente y resistencia.



**FIGURA 9.29** (a) En el efecto Meissner, un campo magnético es expulsado de un material una vez que se convierte en superconductor. (b) Un imán puede levitar por encima de un material superconductor, sostenido por la fuerza que expulsa el campo magnético (crédito b: modificación del trabajo de Kevin Jarrett).

Curiosamente, el efecto Meissner no es consecuencia de que la resistencia sea igual a cero. Para saber por qué, supongamos que una muestra colocada en un campo magnético experimenta una transición en la que su resistencia cae a cero. Según la ley de Ohm, la densidad de corriente,  $j$  en la muestra está relacionada con el campo eléctrico interno neto,  $E$ , y la resistividad  $\rho$  por  $j = E/\rho$ . Si  $\rho$  es cero,  $E$  también debe ser cero para que  $j$  pueda seguir siendo finito. Ahora  $E$  y el flujo magnético  $\Phi_m$  a través de la muestra están relacionados según la ley de Faraday como

$$\oint E dI = -\frac{d\Phi_m}{dt}. \quad 9.38$$

Si  $E$  es cero,  $d\Phi_m/dt$  también es cero, es decir, el flujo magnético que atraviesa la muestra no puede cambiar. Por lo tanto, las líneas de campo magnético dentro de la muestra no deben ser expulsadas cuando se produce la transición. Por eso, no se deduce que un material cuya resistencia llega a cero tenga que presentar el efecto Meissner. Más bien, el efecto Meissner es una propiedad especial de los superconductores.

Otra propiedad importante de un material superconductor es su **temperatura crítica**,  $T_c$ , la temperatura por debajo de la cual el material es superconductor. El rango conocido de temperaturas críticas va desde una fracción de 1 K hasta algo más de 100 K. Los superconductores con temperaturas críticas cercanas a este límite superior se conocen comúnmente como superconductores de "alta temperatura". Desde un punto de vista práctico, los superconductores para los que  $T_c \gg 77$  K son muy importantes. En la actualidad, las aplicaciones en las que intervienen los superconductores aún requieren que los materiales superconductores se sumerjan en helio líquido (4,2 K) para mantenerlos por debajo de su temperatura crítica. Los baños de helio líquido deben reponerse continuamente debido a la evaporación, y los costes de refrigeración pueden superar fácilmente el ahorro que supone el uso de un superconductor. Sin embargo, 77 K es la temperatura del nitrógeno líquido, que es mucho más abundante y barato que el helio líquido. Sería mucho más económico si pudiéramos fabricar y utilizar fácilmente componentes superconductores de alta temperatura que solo

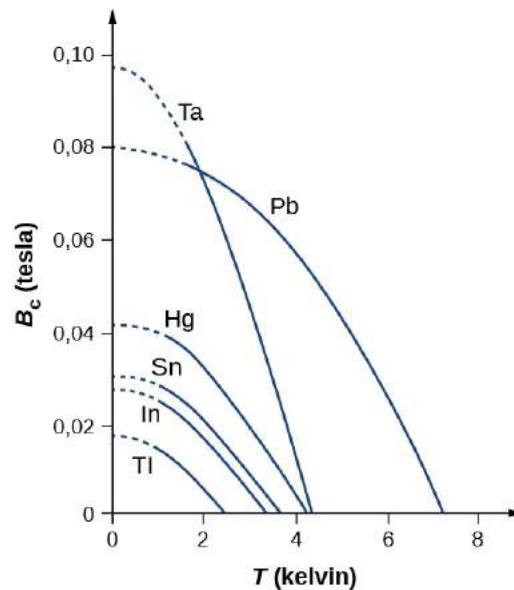
tuvieran que mantenerse en baños de nitrógeno líquido para mantener su superconductividad.

Los materiales superconductores de alta temperatura se utilizan actualmente en diversas aplicaciones. Un ejemplo es la producción de campos magnéticos en algunos aceleradores de partículas. El objetivo final es descubrir materiales superconductores a temperatura ambiente. Sin necesidad de refrigeración, la mayor parte de los componentes electrónicos y las líneas de transmisión podrían ser superconductores, lo que supondría un aumento espectacular y sin precedentes de la eficiencia y el rendimiento.

Otra propiedad importante de un material superconductor es su **campo magnético crítico**  $B_c(T)$ , que es el máximo campo magnético aplicado a una temperatura  $T$  que permitirá que un material siga siendo superconductor. Un campo aplicado mayor que el campo crítico destruirá la superconductividad. El campo crítico es de cero a la temperatura crítica y aumenta a medida que la temperatura disminuye. Los gráficos del campo crítico en función de la temperatura para varios materiales superconductores se muestran en la [Figura 9.30](#). La dependencia de la temperatura del campo crítico puede describirse aproximadamente por

$$B_c(T) = B_c(0) \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad 9.39$$

donde  $B_c(0)$  es el campo crítico a la temperatura cero absoluta. La [Tabla 9.5](#) enumera las temperaturas y campos críticos para dos clases de superconductores: **superconductor tipo I** y **superconductor tipo II**. En general, los superconductores tipo I son elementos, como el aluminio y el mercurio. Son perfectamente diamagnéticos por debajo de un campo crítico  $B_c(T)$ , y entran en el estado normal no superconductor una vez que se supera ese campo. Los campos críticos de los superconductores tipo I suelen ser bastante bajos (muy por debajo de un tesla). Por esta razón, no pueden utilizarse en aplicaciones que requieran la producción de campos magnéticos elevados, que destruirían su estado superconductor.



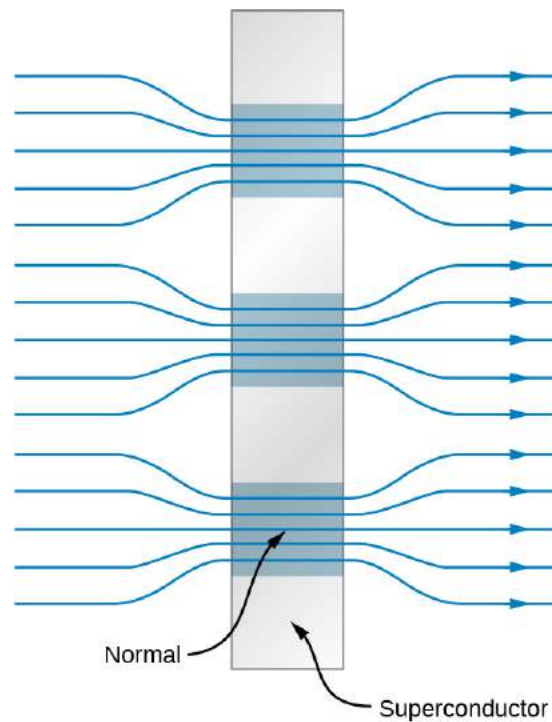
**FIGURA 9.30** Dependencia de la temperatura del campo crítico para varios superconductores. La superconductividad se produce para campos magnéticos y temperaturas inferiores a las curvas indicadas.

Material	Temperatura crítica (K)	Campo magnético crítico (T)
Tipo I		
Al	1,2	0,011
Ga	1,1	0,0051

Material	Temperatura crítica (K)	Campo magnético crítico (T)
Hg ( $\alpha$ )	4,2	0,041
In	3,4	0,029
Nb	9,3	0,20
Pb	7,2	0,080
Sn	3,7	0,031
Th	1,4	0,00016
Zn	0,87	0,0053
Tipo II		
Nb <sub>3</sub> Al	18	32
Nb <sub>3</sub> Ge	23	38
Nb <sub>3</sub> Sn	18	25
NbTi	9,3	15
YBa <sub>2</sub> Cu <sub>3</sub> O <sub>7</sub>	92	>100

**TABLA 9.5** Temperatura crítica y campo magnético crítico en  $T = 0$  K para varios superconductores

Los superconductores tipo II son, por lo general, compuestos o aleaciones que incluyen metales de transición o elementos de la serie de los actínidos. Casi todos los superconductores con temperaturas críticas relativamente altas son del tipo II. Tienen dos campos críticos, representados por  $B_{c1}(T)$  y  $B_{c2}(T)$ . Cuando el campo está por debajo de  $B_{c1}(T)$ , los superconductores tipo II son perfectamente diamagnéticos, y no puede producirse ninguna penetración de flujo magnético en el material. En un campo que exceda  $B_{c2}(T)$ , son conducidos a su estado normal. Cuando el campo es mayor que  $B_{c1}(T)$  pero menor que  $B_{c2}(T)$ , se dice que los superconductores tipo II se encuentran en un estado mixto. Aunque hay cierta penetración de flujo magnético en el estado mixto, la resistencia del material es igual a cero. Dentro del superconductor, existen regiones en forma de filamento que tienen propiedades eléctricas y magnéticas normales intercaladas entre regiones que son superconductoras con diamagnetismo perfecto. Una representación de este estado se da en la [Figura 9.31](#). El campo magnético se expulsa de las regiones superconductoras pero existe en las regiones normales. En general,  $B_{c2}(T)$  es muy grande en comparación con los campos críticos de los superconductores tipo I, por lo que el alambre de material superconductor tipo II es adecuado para los bobinados de los imanes de alto campo.



**FIGURA 9.31** Representación esquemática del estado mixto de un superconductor tipo II. Los superconductores (los cuadros grises) expulsan los campos magnéticos en su proximidad.

### EJEMPLO 9.7

#### Alambre de niobio

En un experimento, un alambre de niobio (Nb) de radio 0,25 mm se sumerge en helio líquido ( $T = 4,2$  K) y se requiere para transportar una corriente de 300 A. ¿El alambre permanece como un superconductor?

#### Estrategia

El campo magnético aplicado puede determinarse a partir del radio del alambre y de la corriente. El campo magnético crítico puede determinarse a partir de la [Ecuación 9.1](#), las propiedades del superconductor y la temperatura. Si el campo magnético aplicado es mayor que el campo crítico, se destruye la superconductividad en el hilo de Nb.

#### Solución

En  $T = 4,2$  K, el campo crítico para el Nb es, a partir de la [Ecuación 9.1](#) y la [Tabla 9.5](#),

$$B_c(4,2 \text{ K}) = B_c(0) \left[ 1 - \left( \frac{4,2 \text{ K}}{9,3 \text{ K}} \right)^2 \right] = (0,20 \text{ T})(0,80) = 0,16 \text{ T}.$$

En un capítulo anterior, aprendimos que el campo magnético en el interior de un hilo conductor de corriente de radio  $a$  viene dado por

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a},$$

donde  $r$  es la distancia desde el eje central del alambre. Así, el campo en la superficie del alambre es  $\frac{\mu_0 I r}{2\pi a}$ . Para el alambre de niobio, este campo es

$$B = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T m/A})(300 \text{ A})}{2\pi(2,5 \times 10^{-4} \text{ m})} = 0,24 \text{ T}.$$

Como esto supera la  $T$  crítica de 0,16, el hilo no permanece superconductor.

### Importancia

La superconductividad requiere bajas temperaturas y campos magnéticos bajos. Estas condiciones simultáneas se cumplen menos fácilmente para el Nb que para muchos otros metales. Por ejemplo, el aluminio es superconductor a temperaturas 7 veces menores y a campos magnéticos 18 veces menores.

## ✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 9.6

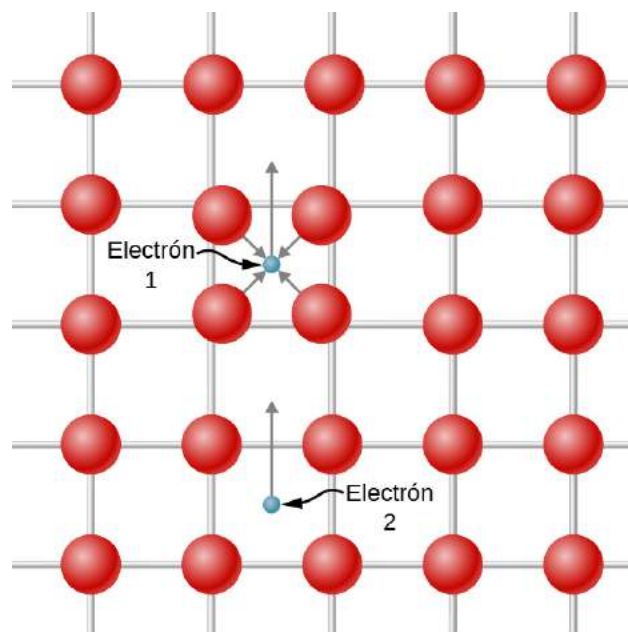
¿Qué condiciones son necesarias para la superconductividad?

### Teoría de los superconductores

En la década de 1950, John Bardeen, Leon Cooper y J. Robert Schrieffer desarrollaron con éxito una teoría de la superconductividad, por la que recibieron el Premio Nobel en 1972. Esta teoría se conoce como la **teoría BCS**. La teoría BCS es compleja, por lo que la resumimos cualitativamente a continuación.

En un conductor normal, las propiedades eléctricas del material se deben a los electrones más energéticos cercanos a la energía de Fermi. En 1956, Cooper demostró que si hay alguna interacción atractiva entre dos electrones en el nivel de Fermi, entonces los electrones pueden formar un estado enlazado en el que su energía total es menor que  $2E_F$ . Dos electrones de este tipo se conocen como un **par de Cooper**.

Es difícil imaginar que dos electrones se atraigan, ya que tienen carga similar y deberían repelerse. Sin embargo, la interacción propuesta solo se produce en el contexto de una red atómica. Una representación de la atracción se muestra en la [Figura 9.32](#). El electrón 1 desplaza ligeramente los núcleos atómicos cargados positivamente hacia sí mismo a medida que pasa debido a la atracción de Coulomb. El electrón 2 "ve" una región con una mayor densidad de carga positiva en relación con el entorno y por lo tanto resulta atraído a esta región y por eso indirectamente, al electrón 1. Debido al principio de exclusión, los dos electrones de un par de Cooper deben tener espín opuesto.

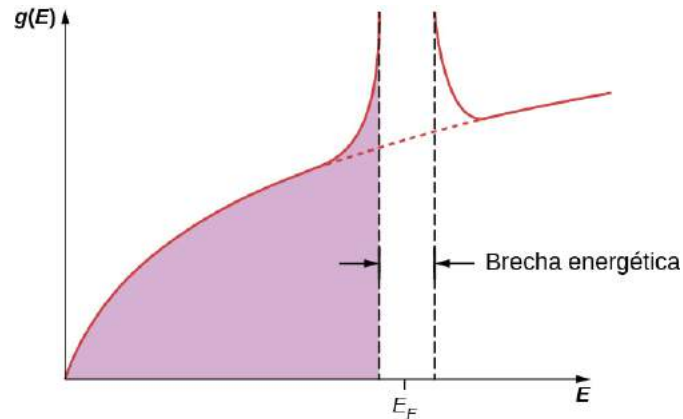


**FIGURA 9.32** Un par de Cooper puede formarse como resultado del desplazamiento de núcleos atómicos positivos. El electrón 1 desplaza ligeramente los núcleos atómicos cargados positivamente hacia sí mismo a medida que pasa debido a la atracción de Coulomb. El electrón 2 "ve" una región con una mayor densidad de carga positiva en relación con el entorno y por lo tanto es atraído a esta región.

La teoría BCS amplía las ideas de Cooper, que son para un solo par de electrones, a todo el gas de electrones



libres. Cuando se produce la transición al estado superconductor, todos los electrones se emparejan para formar pares de Cooper. A escala atómica, la distancia entre los dos electrones que forman un par de Cooper es bastante grande. Entre estos electrones suele haber unos  $10^6$  de otros electrones y cada uno de ellos también se empareja con un electrón lejano. Por lo tanto, hay una superposición considerable entre las funciones de onda de los pares individuales de Cooper, lo que resulta en una fuerte correlación entre los movimientos de los pares. Todos se mueven juntos "al paso", como los miembros de una banda de música. En la transición superconductor, la densidad de estados se modifica drásticamente cerca del nivel de Fermi. Como se muestra en la [Figura 9.33](#), aparece una brecha energética alrededor de  $E_F$  porque la colección de pares de Cooper tiene una energía del estado fundamental más baja que el gas de Fermi de los electrones que no interactúan. La aparición de esta brecha caracteriza el estado superconductor. Si este estado se destruye, la brecha desaparece y la densidad de estados vuelve a ser la del gas de electrones libres.



**FIGURA 9.33** Cuando un material se convierte en superconductor, se forma una brecha energética relativamente grande en torno a la energía de Fermi. Si este estado se destruye, la brecha desaparece y la densidad de estados vuelve a ser la del gas de electrones libres.

La teoría BCS es capaz de predecir muchas de las propiedades observadas en los superconductores. Algunos ejemplos son el efecto Meissner, la temperatura crítica, el campo crítico y, quizás lo más importante, la resistividad que se hace cero a una temperatura crítica. Podemos pensar en este último fenómeno cualitativamente como sigue. En un conductor normal, la resistividad resulta de la interacción de los electrones de conducción con la red. En esta interacción, la energía intercambiada es del orden de  $k_B T$ , la energía térmica. En un superconductor, los pares de Cooper transporta la corriente eléctrica. La única manera de que una red disperse un par de Cooper es rompiéndolo. La destrucción de un par destruye entonces el movimiento colectivo de todos los pares. Esta destrucción requiere una energía del orden de  $10^{-3}$  eV, que es el tamaño de la brecha energética. Por debajo de la temperatura crítica, no hay suficiente energía térmica disponible para este proceso, por lo que los pares de Cooper viajan sin obstáculos por todo el superconductor.

Por último, es interesante señalar que no se han encontrado pruebas de superconductividad en los mejores conductores normales, como el cobre y la plata. Esto no es inesperado según la teoría BCS. La base de la formación del estado superconductor es una interacción entre los electrones y la red. En los mejores conductores, la interacción electrón-red es más débil, como se desprende de su mínima resistividad. Podríamos esperar entonces que en estos materiales la interacción sea tan débil que no se puedan formar pares de Cooper y, por tanto, se excluya la superconductividad.

## Revisión Del Capítulo

### Términos Clave

- aceptador de impurezas** átomo sustituido por otro en un semiconductor que da lugar a un electrón libre.
- afinidad electrónica** energía asociada a un electrón aceptado (enlazado).
- agujero** estados desocupados en una banda de energía.
- amplificador** dispositivo eléctrico que amplifica una señal eléctrica.
- átomo de impureza** átomo de impureza aceptador o donante.
- banda de conducción** por encima de la banda de valencia, la siguiente banda disponible en la estructura energética de un cristal.
- banda de energía** banda casi continua de niveles de energía electrónica en un sólido.
- banda de impureza** nueva banda de energía creada por el dopaje del semiconductor.
- banda de valencia** banda de energía más alta que se llena en la estructura energética de un cristal.
- brecha energética** brecha entre bandas de energía en un sólido
- campo magnético crítico** campo máximo necesario para producir superconductividad.
- capa de agotamiento** región cercana a la unión  $p-n$  que produce un campo eléctrico.
- configuración de polarización directa** configuración de diodos que da lugar a una corriente alta.
- configuración de polarización inversa** configuración de diodos que da lugar a una corriente baja.
- constante de Madelung** constante que depende de la geometría de un cristal utilizada para determinar la energía potencial total de un ion en un cristal.
- constante de repulsión** parámetro experimental asociado a una fuerza de repulsión entre iones tan cercanos que el principio de exclusión es importante.
- corriente de base** corriente extraída del material de tipo  $n$  de la base en un transistor.
- corriente de colector** corriente extraída del material tipo  $p$  del colector.
- cúbica centrada en el cuerpo (BCC)** estructura cristalina en la que un ion está rodeado por ocho vecinos más cercanos situados en las esquinas de una celda unitaria.
- cúbica centrada en la cara (FCC)** estructura cristalina en la que un ion está rodeado por seis vecinos más cercanos situados en las caras de una celda unitaria.
- cúbico simple** estructura cristalina básica en la que cada ion se encuentra en los nodos de una cuadrícula tridimensional.
- densidad de estados** número de estados cuánticos permitidos por unidad de energía.
- densidad numérica del electrón** número de electrones por unidad de volumen.
- distancia de separación en equilibrio** distancia entre los átomos de una molécula.
- dopaje** alteración de un semiconductor por la sustitución de un tipo de átomo por otro.
- energía de disociación** cantidad de energía necesaria para romper una molécula en átomos; también, energía total por par de iones para separar el cristal en iones aislados.
- energía de Fermi** mayor energía ocupada por los electrones en un metal a  $T = 0$  K.
- enlace covalente** enlace formado por el intercambio de uno o más electrones entre átomos.
- enlace de van der Waals** enlace formado por la atracción de dos moléculas eléctricamente polarizadas.
- enlace iónico** enlace formado entre un ion positivo y otro negativo por la atracción de Coulomb.
- factor de Fermi** número que expresa la probabilidad de que un estado de energía determinada se llene.
- hibridación** cambio en la estructura energética de un átomo en el que los estados mixtos energéticamente favorables participan en el enlace.
- impureza del donante** átomo sustituido por otro en un semiconductor que da lugar a un agujero electrónico libre.
- modelo de electrones libres** modelo de un metal que ve los electrones como un gas.
- molécula poliatómica** molécula formada por más de un átomo
- nivel de energía rotacional** nivel de energía asociado a la energía rotacional de una molécula.
- nivel de energía vibracional** nivel de energía asociado a la energía vibracional de una molécula.
- par de Cooper** par de electrones unidos en un superconductor
- portador mayoritario** electrones libres (o agujeros) aportados por los átomos de impureza.

**portador minoritario** electrones libres (o agujeros) producidos por excitaciones térmicas a través de la brecha energética.

**red** conjunto o disposición regular de los átomos en una estructura cristalina.

**regla de selección** regla que limita las posibles transiciones de un estado cuántico a otro.

**semiconductor** sólido con una brecha de energía relativamente pequeña entre la banda más baja completamente llena y la siguiente banda disponible sin llenar.

**semiconductor tipo n** semiconductor dopado que conduce electrones.

**semiconductor tipo p** semiconductor dopado que conduce agujeros.

**simetría de intercambio** el modo en que cambia una función de onda total bajo el intercambio de dos electrones.

**superconductor tipo I** elemento superconductor, como el aluminio o el mercurio.

**superconductor tipo II** compuesto o aleación

superconductora, como un metal de transición o un elemento de la serie de los actínidos.

**temperatura crítica** temperatura máxima para producir superconductividad

**temperatura de Fermi** temperatura efectiva de los electrones con energías iguales a la energía de Fermi.

**tensión de ruptura** en un diodo, el voltaje de polarización inversa necesaria para provocar una avalancha de corriente.

**teoría BCS** teoría de la superconductividad con base en las interacciones electrón-red-electrón.

**transición dipolar eléctrica** transición entre niveles de energía provocada por la absorción o emisión de radiación.

**transistor de unión** válvula eléctrica con base en una unión *p-n-p*.

**unión p-n** unión formada por la unión de semiconductores de tipo *p* y *n*.

**velocidad de deriva** velocidad media de una partícula en movimiento aleatorio.

## Ecuaciones Clave

Energía electrostática para la distancia de separación en equilibrio entre los átomos

$$U_{\text{coul}} = -\frac{ke^2}{r_0}$$

Cambio de energía asociado al enlace iónico

$$U_{\text{form}} = E_{\text{transfer}} + U_{\text{coul}} + U_{\text{ex}}$$

Campo magnético crítico de un superconductor

$$B_c(T) = B_c(0) \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right]$$

Energía rotacional de una molécula diatómica

$$E_r = l(l+1) \frac{\hbar^2}{2I}$$

Energía rotacional característica de una molécula

$$E_{0r} = \frac{\hbar^2}{2I}$$

Energía potencial asociada al principio de exclusión

$$U_{\text{ex}} = \frac{A}{r^n}$$

Energía de disociación de un sólido

$$U_{\text{diss}} = \alpha \frac{ke^2}{r_0} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)$$

Momento de inercia de una molécula diatómica de masa reducida  $\mu$

$$I = \mu r_0^2$$

Energía de los electrones en un metal

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$$

Densidad de estados de los electrones de un metal

$$g(E) = \frac{\pi V}{2} \left( \frac{8m_e}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2}$$

Energía de Fermi	$E_F = \frac{h^2}{8m_e} \left( \frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3}$
Temperatura de Fermi	$T_F = \frac{E_F}{k_B}$
Efecto Hall	$V_H = uBw$
Corriente en función del voltaje de polarización en la unión <i>p-n</i>	$I_{\text{neta}} = I_0 (e^{eV_b/k_B T} - 1)$
Ganancia de corriente	$I_c = \beta I_B$
Regla de selección de las transiciones energéticas rotacionales	$\Delta l = \pm 1$
Regla de selección de las transiciones energéticas vibracionales	$\Delta n = \pm 1$

## Resumen

### 9.1 Tipos de enlaces moleculares

- Las moléculas se forman mediante dos tipos principales de enlaces: el enlace iónico y el enlace covalente. Un enlace iónico transfiere un electrón de un átomo a otro, y un enlace covalente comparte los electrones.
- El cambio de energía asociado al enlace iónico depende de tres procesos principales: la ionización de un electrón de un átomo, la aceptación del electrón por el segundo átomo y la atracción de Coulomb de los iones resultantes.
- Los enlaces covalentes implican funciones de onda simétricas en el espacio.
- Los átomos utilizan una combinación lineal de funciones de onda en el enlace con otras moléculas (hibridación).

### 9.2 Espectros moleculares

- Las moléculas poseen energía vibracional y rotacional.
- Las diferencias de energía entre los niveles de energía vibracional adyacentes son mayores que las de los niveles de energía rotacional.
- La separación entre los picos de un espectro de absorción está inversamente relacionada con el momento de inercia.
- Las transiciones entre los niveles de energía vibracional y rotacional siguen reglas de selección.

### 9.3 Enlaces en los sólidos cristalinos

- Las estructuras de empaquetamiento de las sales iónicas comunes incluyen la FCC y la BCC.

- La densidad de un cristal está inversamente relacionada con la constante de equilibrio.
- La energía de disociación de una sal es grande cuando la distancia de separación en equilibrio es pequeña.
- Las densidades y los radios de equilibrio de las sales comunes (FCC) son casi iguales.

### 9.4 Modelo de electrones libres de los metales

- Los metales conducen la electricidad, y ésta se compone de un gran número de electrones libres que chocan al azar.
- Los estados de energía permitidos de un electrón están cuantizados. Esta cuantización aparece en forma de energías del electrón muy grandes, incluso a  $T = 0$  K.
- Las energías permitidas de los electrones libres en un metal dependen de la masa de los electrones y de la densidad numérica de electrones del metal.
- La densidad de estados de un electrón en un metal aumenta con la energía, porque hay más formas de que un electrón llene un estado de alta energía que un estado de baja energía.
- El principio de exclusión de Pauli establece que solo dos electrones (con espín hacia arriba y espín hacia abajo) pueden ocupar el mismo nivel de energía. Por lo tanto, al llenar estos niveles de energía (de menor a mayor en  $T = 0$  K), el último y mayor nivel de energía que se ocupa se denomina energía de Fermi.

### 9.5 Teoría de bandas de los sólidos

- Los niveles de energía de un electrón en un

cristal pueden determinarse resolviendo la ecuación de Schrödinger para un potencial periódico y estudiando los cambios en la estructura energética del electrón cuando los átomos son empujados juntos a distancia.

- La estructura energética de un cristal se caracteriza por la existencia de bandas de energía continuas y brechas energéticas.
- La capacidad de un sólido para conducir la electricidad depende de la estructura energética del mismo.

### 9.6 Semiconductores y dopaje

- La estructura energética de un semiconductor puede alterarse sustituyendo un tipo de átomo por otro (dopaje).
- El dopaje del semiconductor tipo  $n$  crea y llena nuevos niveles de energía justo por debajo de la banda de conducción.
- El dopaje del semiconductor tipo  $p$  crea nuevos niveles de energía justo por encima de la banda de valencia.
- El efecto Hall puede utilizarse para determinar la carga, la velocidad de deriva y la densidad del número de portadores de carga de un semiconductor.

## Preguntas Conceptuales

### 9.1 Tipos de enlaces moleculares

1. ¿Cuál es la diferencia principal entre un *enlace iónico*, un *enlace covalente* y un *enlace de van der Waals*?
2. Para los siguientes casos, ¿qué tipo de enlace se espera? (a) molécula de KCl; (b)  $N_2$ .
3. Describa los tres pasos del enlace iónico.
4. ¿Qué impide que un ion positivo y uno negativo tengan una separación igual a cero?
5. En la molécula  $H_2$ , ¿por qué los espines de los electrones deben ser antiparalelos?

### 9.2 Espectros moleculares

6. ¿Depende el espectro de absorción de la molécula diatómica HCl del isótopo de cloro que contiene la molécula? Explique su razonamiento.
7. Clasifique el espacio de energía ( $\Delta E$ ) de las siguientes transiciones de menor a mayor: una transición de energía de electrones en un átomo (energía atómica), la energía rotacional de una molécula o la energía vibracional de una molécula.
8. Explique las características principales de un

### 9.7 Dispositivos semiconductores

- Un diodo se produce por una unión  $n-p$ , y permite que la corriente se mueva en una sola dirección. En la configuración de un diodo con polarización directa, la corriente aumenta exponencialmente con el voltaje.
- Un transistor se produce mediante una unión  $n-p-n$ . Un transistor es una válvula eléctrica que controla la corriente en un circuito.
- El transistor es un componente fundamental en los amplificadores de audio, computadoras y muchos otros dispositivos.

### 9.8 Superconductividad

- Un superconductor se caracteriza por dos características: la conducción de electrones con resistencia eléctrica igual a cero y la repulsión de las líneas de campo magnético.
- Se requiere una temperatura mínima para que se produzca la superconductividad.
- Un campo magnético fuerte destruye la superconductividad.
- La superconductividad puede explicarse en términos de pares de Cooper.

espectro de energía vibracional-rotacional de la molécula diatómica.

### 9.3 Enlaces en los sólidos cristalinos

9. ¿Por qué la distancia de separación en equilibrio entre  $K^+$  y  $Cl^-$  es diferente para una molécula diatómica que para el KCl sólido?
10. Describa la diferencia entre una estructura cúbica centrada en la cara (FCC) y una estructura cúbica centrada en el cuerpo (BCC).
11. En el cloruro de sodio, ¿cuántos átomos de  $Cl^-$  son los "vecinos más cercanos" de  $Na^+$ ? ¿Cuántos átomos de  $Na^+$  son los "vecinos más cercanos" de  $Cl^-$ ?
12. En el yoduro de cesio, ¿cuántos átomos de  $Cl^-$  son los "vecinos más cercanos" de  $Cs^+$ ? ¿Cuántos átomos de  $Cs^+$  son los "vecinos más cercanos" de  $Cl^-$ ?
13. La estructura cristalina del NaCl es FCC. El espacio en equilibrio es  $r_0 = 0,282$  nm. Si cada ion ocupa un volumen cúbico de  $r_0^3$ , estime la distancia entre el "vecino más cercano"  $Na^+$  los iones (de centro a centro)

### 9.4 Modelo de electrones libres de los metales

14. ¿Por qué la energía de Fermi ( $E_F$ ) aumenta con el número de electrones en un metal?
15. Si la densidad numérica de electrones ( $N/V$ ) de un metal aumenta en un factor de 8, ¿qué sucede con la energía de Fermi ( $E_F$ )?
16. ¿Por qué la línea horizontal del gráfico en la [Figura 9.12](#) se detiene de repente en la energía de Fermi?
17. ¿Por qué el gráfico en la [Figura 9.12](#) aumenta gradualmente desde el origen?
18. ¿Por qué se "suavizan" las transiciones bruscas en la energía de Fermi al aumentar la temperatura?

### 9.5 Teoría de bandas de los sólidos

19. ¿Cuáles son los dos enfoques principales utilizados para determinar los niveles de energía de los electrones en un cristal?
20. Describa dos características de los niveles de energía de un electrón en un cristal.
21. ¿Cómo se corresponde el número de niveles de energía de una banda con el número,  $N$  de átomos?
22. ¿Por qué algunos materiales son muy buenos conductores y otros muy malos?
23. ¿Por qué algunos materiales son semiconductores?
24. ¿Por qué la resistencia de un semiconductor disminuye al aumentar la temperatura?

### 9.6 Semiconductores y dopaje

25. ¿Qué tipo de semiconductor se produce si el germanio está dopado con (a) arsénico y (b) galio?

## Problemas

### 9.1 Tipos de enlaces moleculares

40. La configuración electrónica del carbono es  $1s^2 2s^2 2p^2$ . Dada esta configuración de electrones, ¿qué otro elemento podría presentar el mismo tipo de hibridación que el carbono?
41. El cloruro de potasio (KCl) es una molécula formada por un enlace iónico. En la separación de equilibrio los átomos tienen una separación de  $r_0 = 0,279$  nm. Determina la energía potencial electrostática de los átomos.
42. La afinidad electrónica del Cl es de 3,89 eV y la energía de ionización del K es de 4,34 eV. Utilice el problema anterior para determinar la energía

26. ¿Qué tipo de semiconductor se produce si el silicio está dopado con (a) fósforo y (b) indio?
27. ¿Qué es el efecto Hall y para qué se utiliza?
28. Para un semiconductor tipo  $n$ , ¿cómo alteran los átomos de impureza la estructura energética del sólido?
29. Para un semiconductor tipo  $p$ , ¿cómo alteran los átomos de impureza la estructura energética del sólido?

### 9.7 Dispositivos semiconductores

30. Cuando se unen materiales de tipo  $p$  y  $n$ , ¿por qué se genera un campo eléctrico uniforme cerca de la unión?
31. Cuando se unen materiales de tipo  $p$  y  $n$ , ¿por qué la capa de agotamiento no crece indefinidamente?
32. ¿Cómo se sabe si un diodo está en la configuración de *polarización directa*?
33. ¿Por qué la configuración de polarización inversa conduce a una corriente muy pequeña?
34. ¿Qué ocurre en el caso extremo de que los materiales de tipo  $n$  y  $p$  estén muy dopados?
35. Explique cómo funciona un amplificador de audio, utilizando el concepto de transistor.

### 9.8 Superconductividad

36. Describa dos características principales de un superconductor.
37. ¿Cómo explica la teoría BCS la superconductividad?
38. ¿Qué es el efecto Meissner?
39. ¿Qué impacto tiene un campo magnético creciente en la temperatura crítica de un semiconductor?

de disociación. (No hay que tener en cuenta la energía de repulsión).

43. La energía disociada medida del KCl es de 4,43 eV. Utilice los resultados del problema anterior para determinar la energía de repulsión de los iones debido al principio de exclusión.

### 9.2 Espectros moleculares

44. En un laboratorio de física, se mide el espectro vibracional-rotacional del HCl. La separación estimada entre los picos de absorción es  $\Delta f \approx 5,5 \times 10^{11}$  Hz. La frecuencia central de la banda es  $f_0 = 9,0 \times 10^{13}$  Hz. (a) ¿Cuál es el



momento de inercia ( $I$ )? (b) ¿Cuál es la energía de vibración de la molécula?

45. Para el problema anterior, halle la separación de equilibrio de los átomos de H y Cl. Compárela con el valor real.
46. La separación entre los átomos de oxígeno en una molécula de  $O_2$  es de aproximadamente 0,121 nm. Determine la energía característica de rotación en eV.
47. La energía característica de la molécula  $N_2$  es  $2,48 \times 10^{-4}$  eV. Determine la distancia de separación entre los átomos de nitrógeno.
48. La energía característica del KCl es  $1,4 \times 10^{-5}$  eV. (a) Determine  $\mu$  para la molécula de KCl. (b) Halle la distancia de separación entre los átomos de K y Cl.
49. Una molécula diatómica  $F_2$  se encuentra en el estado  $l = 1$ . (a) ¿Cuál es la energía de la molécula? (b) ¿Cuánta energía se irradia en una transición de un estado  $l = 2$  a un estado  $l = 1$ ?
50. En un laboratorio de física, se mide el espectro vibracional-rotacional del bromuro de potasio (KBr). La separación estimada entre los picos de absorción es  $\Delta f \approx 5,35 \times 10^{10}$  Hz. La frecuencia central de la banda es  $f_0 = 8,75 \times 10^{12}$  Hz. (a) ¿Cuál es el momento de inercia ( $I$ )? (b) ¿Cuál es la energía de vibración de la molécula?

### 9.3 Enlaces en los sólidos cristalinos

51. La estructura cristalina de la CsI es BCC. El espacio en equilibrio es aproximadamente  $r_0 = 0,46$  nm. Si el ion de  $Cs^+$  ocupa un volumen cúbico de  $r_0^3$ , cuál es la distancia desde este ion a su ion "vecino más cercano"  $I^-$ ?
52. La energía potencial de un cristal es  $-8,10$  eV/par de iones. Determine la energía de disociación de cuatro moles del cristal.
53. La densidad medida de un cristal de NaF es  $2,558$  g/cm<sup>3</sup>. ¿Cuál es la distancia de separación en equilibrio de los iones del  $Na^+$  y  $F^-$ ?
54. ¿Qué valor de la constante de repulsión,  $n$ , da la energía de disociación medida de 221 kcal/mol para el NaF?
55. Determine la energía de disociación de 12 moles de cloruro de sodio (NaCl). (Pista: la constante de repulsión  $n$  es aproximadamente 8).
56. La densidad medida de un cristal de KCl es  $1,984$  g/cm<sup>3</sup>. ¿Cuál es la distancia de separación en equilibrio de  $K^+$  y  $Cl^-$ ?
57. ¿Qué valor de la constante de repulsión,  $n$ , da la

energía de disociación medida de 171 kcal/mol para el KCl?

58. La densidad medida de un cristal de CsCl es  $3,988$  g/cm<sup>3</sup>. ¿Cuál es la distancia de separación en equilibrio de los iones del  $Cs^+$  y  $Cl^-$ ?

### 9.4 Modelo de electrones libres de los metales

59. ¿Cuál es la diferencia de energía entre el estado  $n_x = n_y = n_z = 4$  y el estado con la siguiente energía más alta? ¿Cuál es el porcentaje de cambio en la energía entre el estado  $n_x = n_y = n_z = 4$  y el estado con la siguiente energía más alta? (b) Compárelos con la diferencia de energía y el porcentaje de cambio en la energía entre el estado  $n_x = n_y = n_z = 400$  y el estado con la siguiente energía más alta.
60. Un electrón está confinado en un cubo metálico de  $l = 0,8$  cm en cada lado. Determine la densidad de estados en (a)  $E = 0,80$  eV; (b)  $E = 2,2$  eV; y (c)  $E = 5,0$  eV.
61. ¿Qué valor de energía corresponde a una densidad de estados de  $1,10 \times 10^{24}$  eV<sup>-1</sup>?
62. Compare la densidad de estados a 2,5 eV y 0,25 eV.
63. Consideremos un cubo de cobre con aristas de 1,50 mm de longitud. Estime el número de estados cuánticos de los electrones en este cubo cuyas energías están en el rango de 3,75 a 3,77 eV.
64. Si hay un electrón libre por átomo de cobre, ¿cuál es la densidad numérica de electrones de este metal?
65. Determine la energía de Fermi y la temperatura del cobre a  $T = 0$  K.

### 9.5 Teoría de bandas de los sólidos

66. Para un cristal unidimensional, escriba el espaciamiento de la red ( $a$ ) en términos de la longitud de onda del electrón.
67. ¿Cuál es la principal diferencia entre un aislante y un semiconductor?
68. ¿Cuál es la mayor longitud de onda para un fotón que puede excitar un electrón de valencia en la banda de conducción a través de una brecha energética de 0,80 eV?
69. Un electrón de valencia en un cristal absorbe un fotón de longitud de onda,  $\lambda = 0,300$  nm. Es la energía suficiente para que el electrón salte de la banda de valencia a la banda de conducción. ¿Cuál es el tamaño de la brecha energética?



### 9.6 Semiconductores y dopaje

- 70.** Se realiza un experimento para demostrar el efecto Hall. Una fina franja rectangular de semiconductor de 10 cm de anchura y 30 cm de longitud se fija a una batería y se sumerge en un campo de  $1,50\text{-}T$  perpendicular a su superficie. Esto produjo un voltaje Hall de 12 V. ¿Cuál es la velocidad de deriva de los portadores de carga?
- 71.** Supongamos que el área de la sección transversal de la franja (el área de la cara perpendicular a la corriente eléctrica) presentada en el problema anterior es de  $1\text{ mm}^2$  y la corriente se mide independientemente para ser 2 mA. ¿Cuál es la densidad numérica de los portadores de carga?
- 72.** Un cable de cobre conductor de corriente con sección transversal  $\sigma = 2\text{ mm}^2$  tiene una velocidad de deriva de  $0,02\text{ cm/s}$ . Halle la corriente total que circula por el cable.
- 73.** El efecto Hall se demuestra en el laboratorio. Una fina franja rectangular de un semiconductor con una anchura de 5 cm y un área de sección transversal de  $2\text{ mm}^2$  está conectada a una batería y sumergida en un campo perpendicular a su superficie. El voltaje Hall es de 12,5 V y la velocidad de deriva medida es de  $50\text{ m/s}$ . ¿Cuál es el campo magnético?

### 9.7 Dispositivos semiconductores

- 74.** Demuestre que para  $V$  menor que cero,  $I_{\text{neta}} \approx -I_0$ .
- 75.** Un diodo  $p\text{-}n$  tiene una corriente de saturación inversa  $1,44 \times 10^{-8}\text{ A}$ . Está polarizado directamente por lo que tiene una corriente de  $6,78 \times 10^{-1}\text{ A}$  que se mueve a través de él.

### Problemas Adicionales

- 83.** El fluoruro de potasio (KF) es una molécula formada por un enlace iónico. En la separación en equilibrio los átomos están a una distancia de  $r_0 = 0,255\text{ nm}$ . Determine la energía potencial electrostática de los átomos. La afinidad electrónica de F es de  $3,40\text{ eV}$  y la energía de ionización de K es de  $4,34\text{ eV}$ . Determine la energía de disociación. (No hay que tener en cuenta la energía de repulsión).
- 84.** Para el problema anterior, dibuje el gráfico de energía potencial frente a la separación para el enlace de iones  $\text{K}^+$  y  $\text{F}^-$ . (a) Marque el gráfico con la energía necesaria para transferir un

¿Qué voltaje de polarización se aplica si la temperatura es de  $300\text{ K}$ ?

- 76.** La corriente de colector de un transistor es de  $3,4\text{ A}$  para una corriente de base de  $4,2\text{ mA}$ . ¿Cuál es la ganancia de corriente?
- 77.** Aplicando el extremo positivo de una batería al lado  $p$  y el extremo negativo al lado  $n$  de una unión  $p\text{-}n$ , la corriente medida es  $8,76 \times 10^{-1}\text{ A}$ . Si se invierte esta polaridad se obtiene una corriente de saturación inversa de  $4,41 \times 10^{-8}\text{ A}$ . ¿Cuál es la temperatura si el voltaje de polarización es de  $1,2\text{ V}$ ?
- 78.** La corriente de base de un transistor es de  $4,4\text{ A}$ , y su ganancia de corriente de  $1126$ . ¿Cuál es la corriente de colector?

### 9.8 Superconductividad

- 79.** ¿A qué temperatura, en términos de  $T_C$ , el campo crítico de un superconductor está a la mitad de su valor en  $T = 0\text{ K}$ ?
- 80.** ¿Cuál es el campo magnético crítico para el plomo en  $T = 2,8\text{ K}$ ?
- 81.** Un alambre de Pb de  $4,0\text{ mm}$  de diámetro fuertemente enrollado en un solenoide se enfría a una temperatura de  $5,0\text{ K}$ . El alambre se conecta en serie con un resistor de  $50\text{-}\Omega$  y una fuente variable de emf. Al aumentar la emf, ¿qué valor tiene cuando se destruye la superconductividad del hilo?
- 82.** Un solenoide con un alambre fuertemente enrollado a  $4,0\text{ K}$  tiene  $50\text{ cm}$  de longitud y está construido con alambre de Nb de radio  $1,5\text{ mm}$ . ¿Qué corriente máxima puede soportar el solenoide si el alambre debe permanecer superconductor?

electrón de K a Fl. (b) Marque el gráfico con la energía de disociación.

- 85.** La separación entre los átomos de hidrógeno en una molécula  $\text{H}_2$  es de aproximadamente  $0,075\text{ nm}$ . Determine la energía característica de rotación en eV.
- 86.** La energía característica de la molécula  $\text{Cl}_2$  es  $2,95 \times 10^{-5}\text{ eV}$ . Determine la distancia de separación entre los átomos de nitrógeno.
- 87.** Determine los tres niveles de energía rotacional más bajos de  $\text{H}_2$ .
- 88.** Un átomo de carbono puede hibridarse en la configuración  $sp^2$ . (a) ¿Cuál es el ángulo entre

los orbitales híbridos?

- 89.** Enumere cinco características principales de los cristales iónicos que resultan de su alta energía de disociación.
- 90.** ¿Por qué el enlace en  $\text{H}_2^+$  es favorable? Exprese su respuesta en términos de la simetría de la función de onda del electrón.
- 91.** Los astrónomos afirman haber encontrado pruebas de  $\text{He}_2$  en los espectros de luz de una estrella lejana. ¿Les cree?
- 92.** Demuestre que el momento de inercia de una molécula diatómica es  $I = \mu r_0^2$ , donde  $\mu$  es la masa reducida, y  $r_0$  es la distancia entre las masas.
- 93.** Demuestre que la energía media de un electrón en un metal unidimensional está relacionada con la energía de Fermi por  $\bar{E} = \frac{1}{2} E_F$ .
- 94.** A continuación se indican las mediciones del campo magnético crítico de un superconductor (en  $T$ ) a distintas temperaturas (en K). Utilice una línea de mejor ajuste para determinar  $B_c(0)$ . Suponga que  $T_c = 9,3$  K.

T (en K)	$B_c(T)$
3,0	0,18
4,0	0,16
5,0	0,14

### Problemas De Desafío

- 101.** Para un electrón en un metal tridimensional, demuestre que la energía media viene dada

$$\text{por } \bar{E} = \frac{1}{N} \int_0^{E_F} E g(E) dE = \frac{3}{5} E_F,$$

T (en K)	$B_c(T)$
6,0	0,12
7,0	0,09
8,0	0,05
9,0	0,01

**TABLA 9.6**

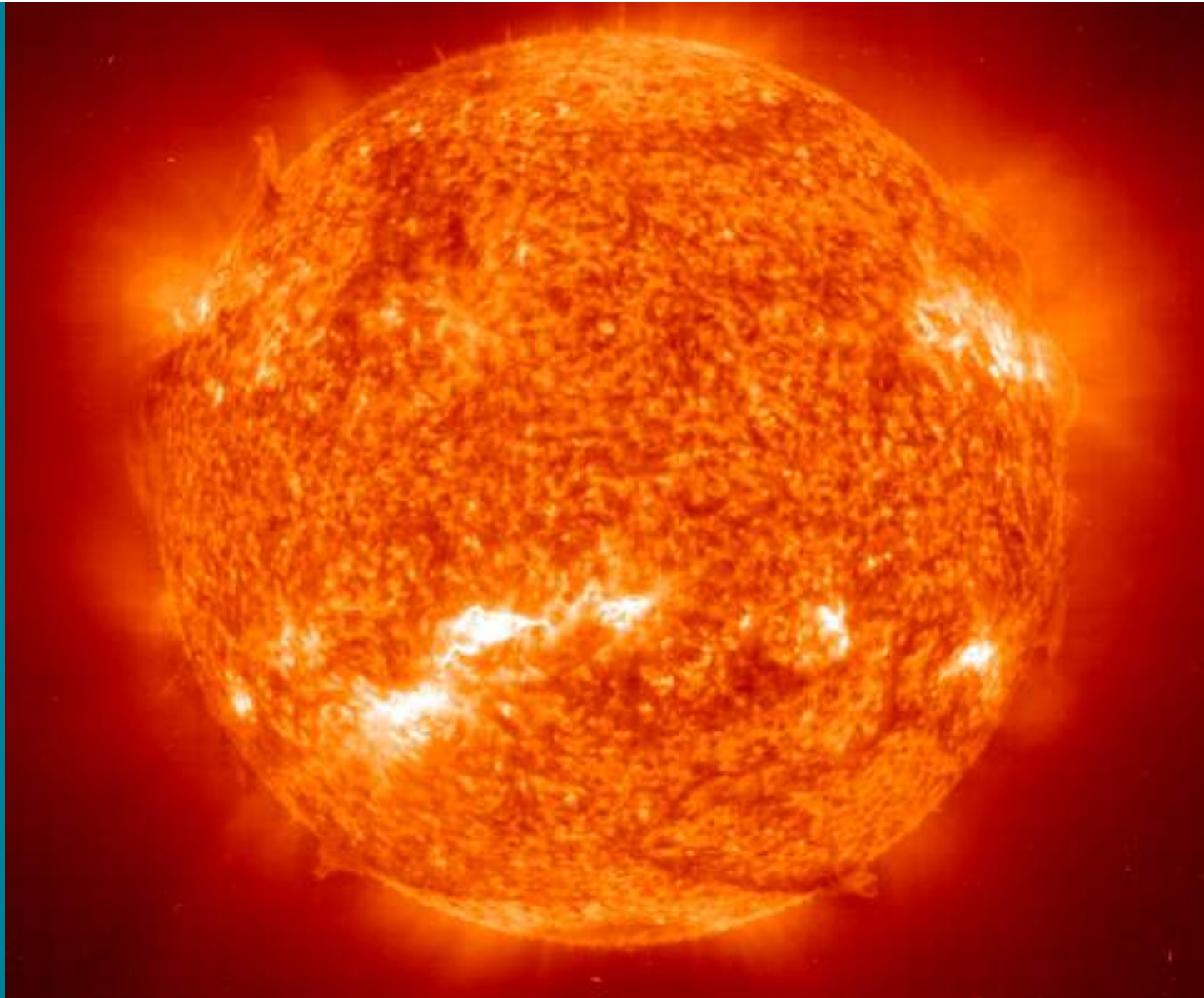
- 95.** Estime la fracción de átomos de Si que deben ser sustituidos por átomos de As para formar una banda de impureza.
- 96.** La transición en el espectro de rotación se observa a temperatura ambiente ordinaria ( $T = 300$  K). Según su compañero de laboratorio, un pico en el espectro corresponde a una transición del estado  $l = 4$  al estado  $l = 1$ . ¿Esto es posible? Si es así, determine el momento de inercia de la molécula.
- 97.** Determine las energías de Fermi para (a) Mg, (b) Na y (c) Zn.
- 98.** Determine la energía promedio de un electrón en un alambre de Zn.
- 99.** ¿Qué valor de la constante de repulsión,  $n$ , da la energía de disociación medida de 158 kcal/mol para CsCl?
- 100.** Un modelo físico de un diamante sugiere una estructura de empaquetamiento BCC. ¿Por qué no es posible?

Donde  $N$  es el número total de electrones en el metal.



# CAPÍTULO 10

## Física nuclear



**Figura 10.1** El Sol se alimenta de la fusión nuclear en su núcleo. El núcleo convierte aproximadamente  $10^{38}$  protones/segundo en helio a una temperatura de 14 millones de K. Este proceso libera energía en forma de fotones, neutrinos y otras partículas (crédito: modificación del trabajo del Consorcio del Telescopio de Imágenes de Ultravioleta Extrema (Extreme ultraviolet Imaging Telescope, EIT) del Observatorio Solar y Heliosférico (Solar and Heliospheric Observatory, SOHO), Agencia Espacial Europea (European Space Agency, ESA), Administración Nacional de Aeronáutica y del Espacio (National Aeronautics and Space Administration, NASA)).

### ESQUEMA DEL CAPITULO

**10.1** Propiedades de los núcleos

**10.2** Energía de enlace nuclear

### 10.3 Decaimiento radioactivo

### 10.4 Reacciones nucleares

### 10.5 Fisión

### 10.6 Fusión nuclear

### 10.7 Usos médicos y efectos biológicos de la radiación nuclear

**INTRODUCCIÓN** En este capítulo estudiaremos la composición y las propiedades del núcleo atómico. El núcleo se encuentra en el centro del átomo y está formado por protones y neutrones. Un conocimiento profundo del núcleo conduce a numerosas tecnologías valiosas, entre ellas dispositivos para datar rocas antiguas, cartografiar los brazos galácticos de la Vía Láctea y generar potencia eléctrica.

El Sol es la principal fuente de energía del sistema solar. El Sol tiene 109 diámetros terrestres y representa más del 99% de la masa total del sistema solar. El Sol brilla por la fusión de núcleos de hidrógeno (protones) en su interior. Una vez se acabe ese combustible, el Sol quemará helio y más tarde, otros núcleos. La fusión nuclear en el Sol se analiza hacia el final de este capítulo. Mientras tanto, investigaremos las propiedades nucleares que rigen todos los procesos nucleares, incluida la fusión.

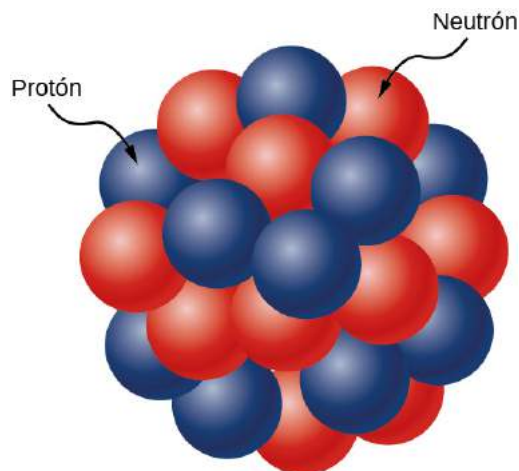
## 10.1 Propiedades de los núcleos

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Describir la composición y el tamaño de un núcleo atómico.
- Utilizar un símbolo nuclear para expresar la composición de un núcleo atómico.
- Explicar por qué el número de neutrones es mayor que el de protones en los núcleos pesados.
- Calcular la masa atómica de un elemento dados sus isótopos.

El **núcleo atómico** está compuesto de **protones** y **neutrones** (Figura 10.2). Los protones y los neutrones tienen aproximadamente la misma masa, pero los protones llevan una unidad de carga positiva ( $+e$ ), y los neutrones no poseen carga. Estas partículas se encuentran juntas en un espacio extremadamente pequeño en el centro de un átomo. Según los experimentos de dispersión, el núcleo tiene forma esférica o elipsoidal, y es aproximadamente una  $1/100000$  del tamaño de un átomo de hidrógeno. Si un átomo tuviera el tamaño de un estadio de béisbol de las grandes ligas, el núcleo tendría aproximadamente el tamaño de la bola. Los protones y neutrones del núcleo se denominan **nucleones**.



**FIGURA 10.2** El núcleo atómico está compuesto por protones y neutrones. Los protones se muestran en azul y los neutrones en rojo.

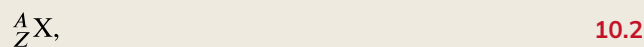
### Conteo de nucleones

El número de protones en el núcleo viene dado por el **número atómico**,  $Z$ . El número de neutrones en el núcleo es el **número de neutrones**,  $N$ . El número total de nucleones es el **número de masa**,  $A$ . Estos números

están relacionados por

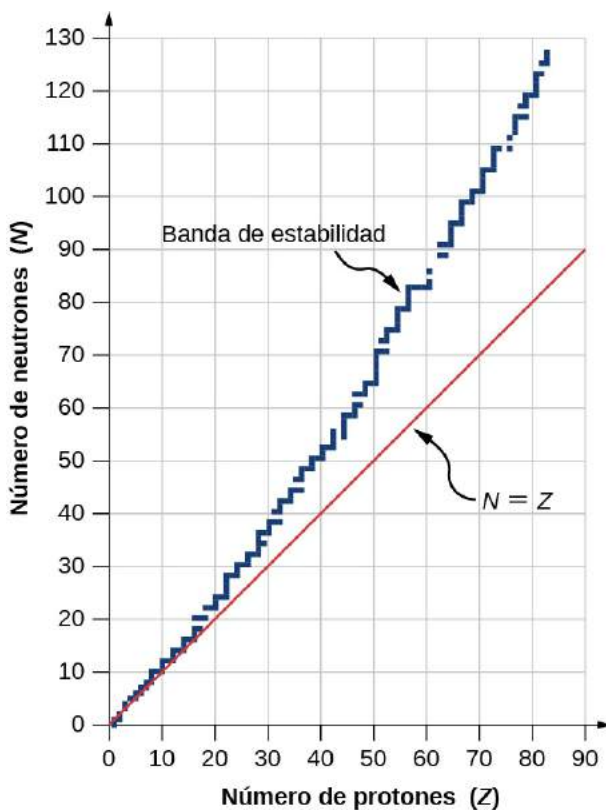
$$A = Z + N. \quad 10.1$$

Un núcleo se representa simbólicamente por



donde X representa el elemento químico, A es el número de masa y Z es el número atómico. Por ejemplo,  ${}^{12}_6\text{C}$  representa el núcleo del carbono con seis protones y seis neutrones (o 12 nucleones).

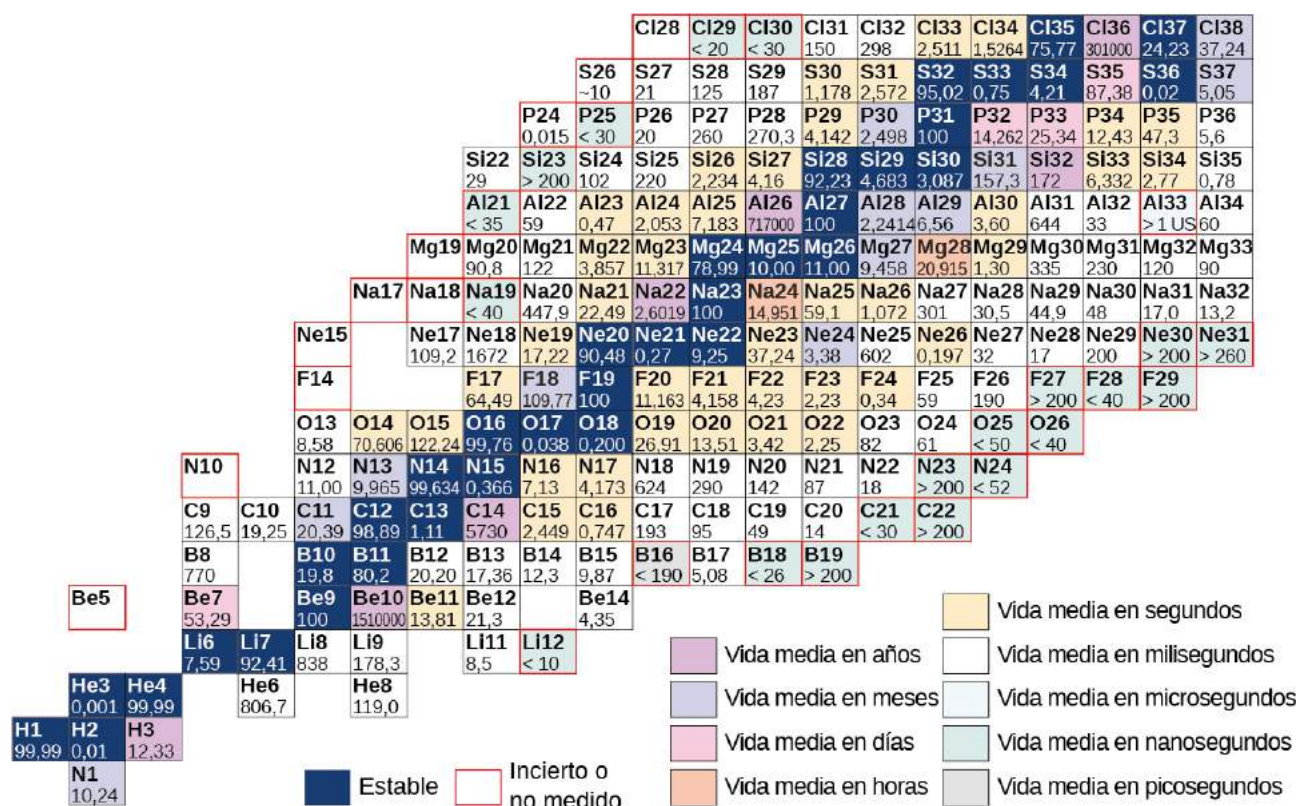
En la [Figura 10.3](#) se muestra un gráfico del número  $N$  de neutrones frente al número  $Z$  de protones para una serie de núcleos estables (**nucleídos**). Para un valor determinado de  $Z$ , son posibles múltiples valores de  $N$  (puntos azules). Para valores pequeños de  $Z$ , el número de neutrones es igual al número de protones ( $N = P$ ), y los datos caen sobre la línea roja. Para valores grandes de  $Z$ , el número de neutrones es mayor que el número de protones ( $N > P$ ), y los puntos de datos se encuentran por encima de la línea roja. El número de neutrones es generalmente mayor que el número de protones para  $Z > 15$ .



**FIGURA 10.3** Este gráfico representa el número de neutrones  $N$  en función del número de protones  $Z$  en los núcleos atómicos estables. Los núcleos más grandes, tienen más neutrones que protones.

En la [Figura 10.4](#) se muestra una tabla con base en este gráfico que proporciona información más detallada sobre cada núcleo. Este gráfico se denomina **tabla de nucleídos**. Cada celda o cuadro representa un núcleo independiente. Los núcleos están dispuestos en orden  $Z$  ascendente (a lo largo de la dirección horizontal) y  $N$  ascendente (a lo largo de la dirección vertical).





**FIGURA 10.4** Tabla parcial de los nucleídos. En los núcleos estables (fondos azules oscuros), los valores de las celdas representan el porcentaje de núcleos encontrados en la Tierra con el mismo número atómico (porcentaje de abundancia). En los núcleos inestables, el número representa la vida media.

Los átomos que contienen núcleos con el mismo número de protones ( $Z$ ) y diferente número de neutrones ( $N$ ) se llaman **isótopos**. Por ejemplo, el hidrógeno tiene tres isótopos: el hidrógeno normal (1 protón, sin neutrones), el deuterio (un protón y un neutrón) y el tritio (un protón y dos neutrones). Los isótopos de un átomo determinado comparten las mismas propiedades químicas, ya que estas propiedades están definidas por las interacciones entre los electrones exteriores del átomo, y no los nucleones. Por ejemplo, el agua que contiene deuterio en lugar de hidrógeno ("agua pesada") tiene el mismo aspecto y sabor que el agua normal. La siguiente tabla muestra una lista de isótopos comunes.

Elemento	Símbolo	Número de masa	Masa (unidades de masa atómica)	Porcentaje de abundancia*	Vida media**
Hidrógeno	H	1	1,0078	99,99	estable
	$^2\text{H}$ o D	2	2,0141	0,01	estable
	$^3\text{H}$	3	3,0160	–	12,32 años
Carbono	$^{12}\text{C}$	12	12,0000	98,91	estable
	$^{13}\text{C}$	13	13,0034	1,1	estable
	$^{14}\text{C}$	14	14,0032	–	5730 años
Nitrógeno	$^{14}\text{N}$	14	14,0031	99,6	estable

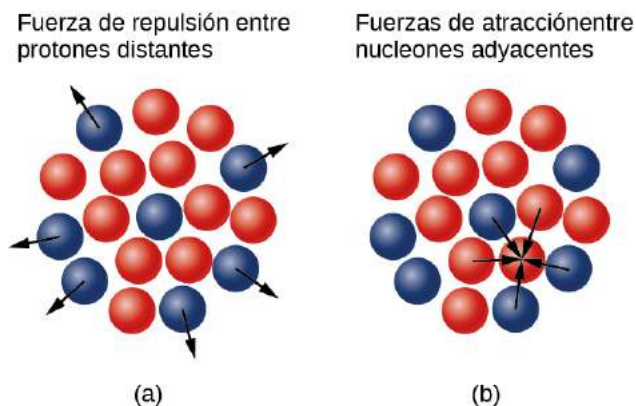


Elemento	Símbolo	Número de masa	Masa (unidades de masa atómica)	Porcentaje de abundancia*	Vida media**
	$^{15}\text{N}$	15	15,0001	0,4	estable
	$^{16}\text{N}$	16	16,0061	–	7,13 segundos
Oxígeno	$^{16}\text{O}$	16	15,9949	99,76	estable
	$^{17}\text{O}$	17	16,9991	0,04	estable
	$^{18}\text{O}$	18	17,9992	0,20	estable
	$^{19}\text{O}$	19	19,0035	–	26,46 segundos

**TABLA 10.1** Isótopos comunes \*No hay entrada si es inferior a 0,001 (cantidad de trazas).

\*\*Estable si la vida media > 10 segundos.

¿Por qué los neutrones superan en número a los protones en los núcleos más pesados (Figura 10.5)? La respuesta a esta pregunta requiere una comprensión de las fuerzas dentro del núcleo. Existen dos tipos de fuerzas: (1) la fuerza electrostática de largo alcance (Coulomb) que hace que los protones cargados positivamente se repelan entre sí; y (2) la **fuerza nuclear fuerte** de corto alcance que hace que todos los nucleones del núcleo se atraigan entre sí. Es posible que también haya oído hablar de la fuerza nuclear "débil". Esta fuerza es responsable de algunos decaimientos nucleares, pero como su nombre indica, no desempeña un papel en la estabilización del núcleo contra la fuerte repulsión de Coulomb que experimenta. Hablaremos de la fuerza nuclear fuerte con más detalle en el próximo capítulo, cuando tratemos la física de partículas. La estabilidad nuclear se produce cuando las fuerzas de atracción entre los nucleones compensan las fuerzas electrostáticas repulsivas de largo alcance entre todos los protones del núcleo. Para los núcleos pesados ( $Z > 15$ ), es necesario un exceso de neutrones para evitar que las interacciones electrostáticas rompan el núcleo, como se muestra en la Figura 10.3.



**FIGURA 10.5** (a) La fuerza electrostática es repulsiva y de largo alcance. Las flechas representan las fuerzas de salida sobre los protones (en azul) en la superficie nuclear por un protón (también en azul) en el centro. (b) La fuerza nuclear fuerte actúa entre nucleones vecinos. Las flechas representan las fuerzas de atracción que ejerce un neutrón (en rojo) sobre sus vecinos más cercanos.

Debido a la existencia de isótopos estables, debemos tener especial cuidado al citar la masa de un elemento. Por ejemplo, el cobre (Cu) tiene dos isótopos estables:

${}^{63}_{29}\text{Cu}$  (62,929595 g/mol) con una abundancia de 69,09%

${}^{65}_{29}\text{Cu}$  (64,927786 g/mol) con una abundancia de 30,91%

Dadas estas dos "versiones" del Cu, ¿cuál es la masa de este elemento? La **masa atómica** de un elemento se define como el promedio ponderado de las masas de sus isótopos. Así, la masa atómica del Cu es  $m_{\text{Cu}} = (62,929595)(0,6909) + (64,927786)(0,3091) = 63,55$  g/mol. La masa de un núcleo individual suele expresarse en **unidades de masa atómica** (u), donde  $u = 1,66054 \times 10^{-27}$  kg. (Una unidad de masa atómica se define como 1/12 de la masa de un núcleo  ${}^{12}\text{C}$ ). En unidades de masa atómica, la masa de un núcleo de helio ( $A = 4$ ) es de aproximadamente 4 u. Un núcleo de helio también se llama partícula alfa ( $\alpha$ ).

## Radio nuclear

El modelo más sencillo del núcleo es una esfera donde los nucleones se compactan densamente. El volumen  $V$  del núcleo es por tanto proporcional al número de nucleones  $A$ , expresado por

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = kA,$$

donde  $r$  es el **radio de un núcleo** y  $k$  es una constante con unidades de volumen. Al resolver  $r$ , tenemos

$$r = r_0 A^{1/3} \quad 10.3$$

donde  $r_0$  es una constante. Para el hidrógeno ( $A = 1$ ),  $r_0$  corresponde al radio de un solo protón. Los experimentos de dispersión apoyan esta relación general para una amplia gama de núcleos, y sugieren que los neutrones tienen aproximadamente el mismo radio que los protones. El valor medido experimentalmente para  $r_0$  es de aproximadamente 1,2 femtómetros (recordemos que  $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ ).



## EJEMPLO 10.1

### El núcleo de hierro

Halle el radio ( $r$ ) y la densidad aproximada ( $\rho$ ) de un núcleo de Fe-56. Supongamos que la masa del núcleo de Fe-56 es de aproximadamente 56 u.

#### Estrategia

(a) Hallar el radio de  ${}^{56}\text{Fe}$  es una aplicación directa de  $r = r_0 A^{1/3}$ , dado que  $A = 56$ . (b) Para hallar la densidad aproximada de este núcleo, suponga que el núcleo es esférico. Calcule su volumen utilizando el radio hallado en la parte (a), y luego halle su densidad a partir de  $\rho = m/V$ .

#### Solución

a. El radio de un núcleo está dado por

$$r = r_0 A^{1/3}.$$

Sustituyendo los valores de  $r_0$  y  $A$  produce

$$\begin{aligned} r &= (1,2 \text{ fm})(56)^{1/3} = (1,2 \text{ fm})(3,83) \\ &= 4,6 \text{ fm}. \end{aligned}$$

b. La densidad se define como  $\rho = m/V$ , que para una esfera de radio  $r$  es

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{(4/3)\pi r^3}.$$

Sustituyendo los valores conocidos se obtiene

$$\rho = \frac{56 \text{ u}}{(1,33)(3,14)(4,6 \text{ fm})^3} = 0,138 \text{ u/fm}^3.$$

Al hacer la conversión a unidades de  $\text{kg/m}^3$ , hallamos

$$\rho = (0,138 \text{ u/fm}^3)(1,66 \times 10^{-27} \text{ kg/u}) \left( \frac{1 \text{ fm}}{10^{-15} \text{ m}} \right) = 2,3 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3.$$

### Importancia

- El radio del núcleo de Fe-56 es de aproximadamente 5 fm, por lo que su diámetro es de unos 10 fm, o  $10^{-14}$  m. En discusiones anteriores sobre los experimentos de dispersión de Rutherford, se estimó que un núcleo ligero era de  $10^{-15}$  m de diámetro. Por lo tanto, el resultado mostrado para un núcleo de tamaño medio es razonable.
- La densidad encontrada aquí puede parecer increíble. Sin embargo, es coherente con los comentarios anteriores acerca de que el núcleo contiene casi toda la masa del átomo en una pequeña región del espacio. Un metro cúbico de materia nuclear tiene la misma masa que un cubo de agua de 61 km de lado.

### ✓ **COMPRUEBE LO APRENDIDO 10.1**

El núcleo X es dos veces mayor que el núcleo Y. ¿Cuál es la relación entre sus masas atómicas?

## 10.2 Energía de enlace nuclear

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Calcular el defecto de masa y la energía de enlace para una amplia gama de núcleos.
- Utilizar un gráfico de la energía de enlace por nucleón (binding energy per nucleon, BEN) frente a un gráfico del número de masa ( $A$ ) para evaluar la estabilidad relativa de un núcleo.
- Comparar la energía de enlace de un nucleón en un núcleo con la energía de ionización de un electrón en un átomo.

Las fuerzas que unen los nucleones en un núcleo atómico son mucho mayores que las que unen un electrón a un átomo mediante la atracción electrostática. Esto es evidente por los tamaños relativos del núcleo atómico y del átomo ( $10^{-15}$  y  $10^{-10}$  m, respectivamente). La energía necesaria para arrancar un nucleón del núcleo es, por tanto, mucho mayor que la necesaria para eliminar (o ionizar) un electrón en un átomo. En general, todos los cambios nucleares implican grandes cantidades de energía por cada partícula que sufre la reacción. Esto tiene numerosas aplicaciones prácticas.

### Defecto de masa

Según los experimentos con partículas nucleares, la masa total de un núcleo ( $m_{\text{nuc}}$ ) es *menor* que la suma de las masas de sus nucleones constituyentes (protones y neutrones). La diferencia de masa, o **defecto de masa**, viene dada por

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{nuc}} \quad 10.4$$

donde  $Zm_p$  es la masa total de los protones,  $(A - Z)m_n$  es la masa total de los neutrones, y  $m_{\text{nuc}}$  es la masa del núcleo. Según la teoría especial de la relatividad de Einstein, la masa es la medida de la energía total de un sistema ( $E = mc^2$ ). Así, la energía total de un núcleo es menor que la suma de las energías de sus nucleones constituyentes. La formación de un núcleo a partir de un sistema de protones y neutrones aislados es, por tanto, una reacción exotérmica, lo que significa que libera energía. La energía emitida, o radiada, en este proceso es  $(\Delta m)c^2$ .

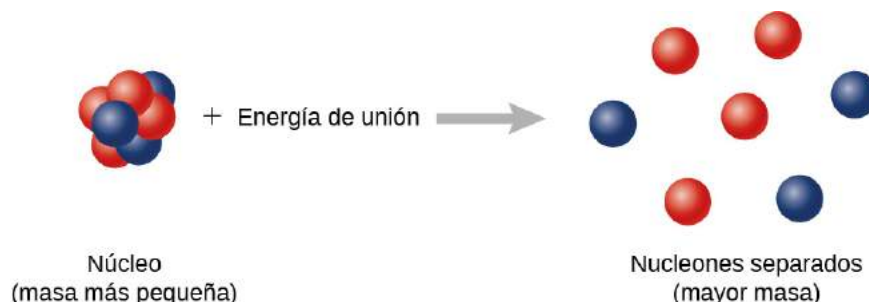
Ahora imagine que este proceso ocurre a la inversa. En lugar de formar un núcleo, se pone energía en el sistema para romper el núcleo (Figura 10.6). La cantidad de energía necesaria se denomina **energía de enlace** (binding energy, BE) total,  $E_b$ .

### Energía de enlace

La energía de enlace es igual a la cantidad de energía liberada en la formación del núcleo, y por lo tanto viene dada por

$$E_b = (\Delta m)c^2. \quad 10.5$$

Los resultados experimentales indican que la energía de enlace para un núcleo con número de masa  $A > 8$  es aproximadamente proporcional al número total de nucleones en el núcleo,  $A$ . La energía de enlace de un núcleo de magnesio ( $^{24}\text{Mg}$ ), por ejemplo, es aproximadamente dos veces mayor que para el núcleo del carbono ( $^{12}\text{C}$ ).



**FIGURA 10.6** La energía de enlace es la energía necesaria para descomponer un núcleo en los protones y neutrones que lo componen. Un sistema de nucleones separados tiene una masa mayor que un sistema de nucleones unidos.



### EJEMPLO 10.2

#### Defecto de masa y energía de enlace del deuterón

Calcule el defecto de masa y la energía de enlace del deuterón. La masa del deuterón es  $m_D = 3,34359 \times 10^{-27} \text{ kg}$  o  $1875,61 \text{ MeV}/c^2$ .

#### Solución

A partir de la [Ecuación 10.4](#), el defecto de masa para el deuterón es

$$\begin{aligned} \Delta m &= m_p + m_n - m_D \\ &= 938,28 \text{ MeV}/c^2 + 939,57 \text{ MeV}/c^2 - 1875,61 \text{ MeV}/c^2 \\ &= 2,24 \text{ MeV}/c^2. \end{aligned}$$

La energía de enlace del deuterón es entonces

$$E_b = (\Delta m)c^2 = (2,24 \text{ MeV}/c^2)(c^2) = 2,24 \text{ MeV}.$$

Se necesitan más de dos millones de electronvoltios para descomponer un deuterón en un protón y un neutrón. Este valor tan grande indica el gran poder de la fuerza nuclear. En comparación, la mayor cantidad de energía necesaria para liberar un electrón unido a un átomo de hidrógeno por una fuerza de Coulomb de atracción (una fuerza electromagnética) es de unos 10 eV.

### Gráfico de la energía de enlace por nucleón

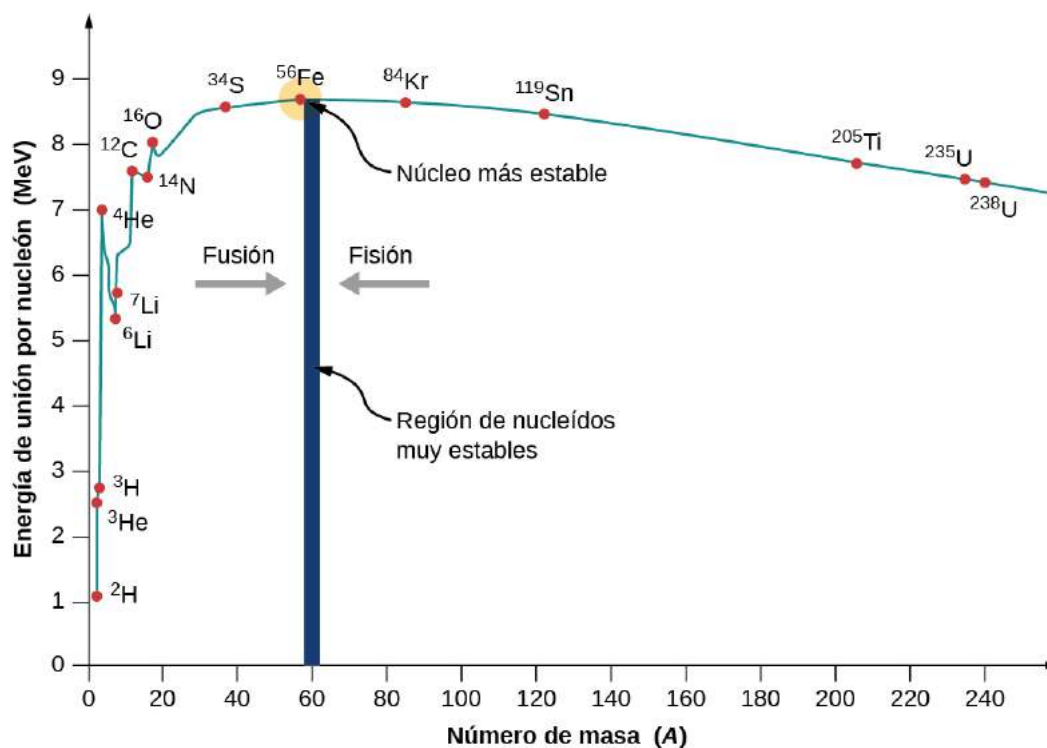
En física nuclear, una de las magnitudes experimentales más importantes es la **energía de enlace por nucleón (BEN)**, que se define por

$$BEN = \frac{E_b}{A} \quad 10.6$$

Esta cantidad es la energía promedio necesaria para eliminar un nucleón individual de un núcleo, análoga a la energía de ionización de un electrón en un átomo. Si la BEN es relativamente grande, el núcleo es relativamente estable. Los valores de la BEN se estiman a partir de experimentos de dispersión nuclear.

En la [Figura 10.7](#) se ofrece un gráfico de la energía de enlace por nucleón frente al número atómico  $A$ . Este gráfico es considerado por muchos físicos como uno de los más importantes de la física. Aquí son necesarias dos observaciones. En primer lugar, los valores típicos de la BEN oscilan entre 6 y 10 MeV, con un valor promedio de unos 8 MeV. En otras palabras, se necesitan varios millones de electronvoltios para arrancar un nucleón de un núcleo típico, en comparación con los 13,6 eV que se necesitan para ionizar un electrón en el estado fundamental del hidrógeno. Por ello, la fuerza nuclear se denomina fuerza nuclear "fuerte".

En segundo lugar, el gráfico se eleva a un nivel bajo de  $A$ , alcanza un pico muy cerca del hierro ( $\text{Fe}$ ,  $A = 56$ ), y luego se reduce a un valor alto de  $A$ . El pico sugiere que el núcleo de hierro es el más estable de la naturaleza (también es la razón por la que la fusión nuclear en los núcleos de las estrellas termina con el Fe). La razón por la que el gráfico sube y baja tiene que ver con las fuerzas que compiten en el núcleo. A valores bajos de  $A$ , la fuerza nuclear de atracción entre nucleones domina sobre la fuerza electrostática repulsiva entre protones. Pero a valores altos de  $A$ , la fuerza electrostática repulsiva entre las fuerzas comienza a dominar, y esta fuerza tiende a romper el núcleo en lugar de mantenerlo unido.



**FIGURA 10.7** En este gráfico de la energía de enlace por nucleón para los núcleos estables, la BEN es mayor para los núcleos con una masa cercana a  $^{56}\text{Fe}$ . Por lo tanto, la fusión de núcleos con números de masa mucho menores que los del Fe, y la fisión de núcleos con números de masa mayores que los del Fe, son procesos exotérmicos.

Como veremos, el gráfico BEN en función de  $A$  implica que los núcleos divididos o combinados liberan una enorme cantidad de energía. Esta es la base de una amplia gama de fenómenos, desde la producción de electricidad en una central nuclear hasta la luz solar.

### EJEMPLO 10.3

#### Nucleídos alfa estrechamente enlazados.

Calcule la energía de enlace por nucleón de una partícula  ${}^4\text{He}$  (partícula  $\alpha$ ).

#### Estrategia

Determine la energía total de enlace (BE) utilizando la ecuación  $BE = (\Delta m)c^2$ , donde  $\Delta m$  es el defecto de masa. La energía de enlace por nucleón (BEN) es la BE dividida entre  $A$ .

#### Solución

Para  ${}^4\text{He}$ , tenemos  $Z = N = 2$ . La energía total de enlace es

$$BE = \{ [2m_p + 2m_n] - m({}^4\text{He}) \} c^2.$$

Estas masas son  $m({}^4\text{He}) = 4,002602 \text{ u}$ ,  $m_p = 1,007825 \text{ u}$ , y  $m_n = 1,008665 \text{ u}$ . Por lo tanto, tenemos

$$BE = (0,030378 \text{ u}) c^2.$$

Si observamos que  $1 \text{ u} = 931,5 \text{ MeV}/c^2$ , hallamos que

$$\begin{aligned} BE &= (0,030378) (931,5 \text{ MeV}/c^2) c^2 \\ &= 28,3 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Dado que  $A = 4$ , la energía total de enlace por nucleón es

$$BEN = 7,07 \text{ MeV/nucleón}.$$

#### Importancia

Observe que la energía de enlace por nucleón para  ${}^4\text{He}$  es mucho mayor que para los isótopos de hidrógeno (solo  $\approx 3 \text{ MeV/nucleón}$ ). Por lo tanto, los núcleos de helio no pueden descomponer los isótopos de hidrógeno sin aportar energía al sistema.

### COMPRUEBE LO APRENDIDO 10.2

Si la energía de enlace por nucleón es grande, ¿hace más difícil o más fácil desprender un nucleón de un núcleo?

## 10.3 Decaimiento radioactivo

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Describir el decaimiento de una sustancia radioactiva en términos de su constante de decaimiento y su vida media.
- Utilizar la ley de decaimiento radioactivo para estimar la edad de una sustancia.
- Explicar los procesos naturales que permiten la datación de tejidos vivos mediante  ${}^{14}\text{C}$  (carbono 14).

En 1896, Antoine Becquerel descubrió que una roca rica en uranio emite rayos invisibles capaces de oscurecer una placa fotográfica en un recipiente cerrado. Los científicos exponen tres argumentos para el origen nuclear de estos rayos. En primer lugar, los efectos de la radiación no varían con el estado químico, es decir, si el material emisor está en forma de elemento o compuesto. En segundo lugar, la radiación no varía con los cambios de temperatura o presión, factores que en grado suficiente pueden afectar a los electrones de un átomo. En tercer lugar, la gran energía de los rayos invisibles (hasta cientos de eV) no coincide con las transiciones de los electrones atómicos (solo unos pocos eV). Hoy en día, esta radiación se explica por la conversión de masa en energía en lo más profundo del núcleo de un átomo. La emisión espontánea de radiación de los núcleos se denomina **radioactividad** nuclear ([Figura 10.8](#)).



**FIGURA 10.8** El símbolo internacional de las radiaciones ionizantes es universalmente reconocido como el símbolo de advertencia de las radiaciones nucleares.

### Ley de decaimiento radioactivo

Cuando un núcleo individual se transforma en otro con la emisión de radiación, se dice que el núcleo **decae**. El decaimiento radioactivo se produce en todos los núcleos con  $Z > 82$ , y también para algunos isótopos inestables con  $Z < 83$ . La tasa de decaimiento es proporcional al número de núcleos originales  $N$  (no decaídos) en una sustancia. El número de núcleos perdidos por el decaimiento,  $-dN$  en el intervalo de tiempo  $dt$ , se escribe

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad 10.7$$

donde  $\lambda$  se denomina la **constante de decaimiento**. (El signo menos indica que el número de núcleos originales disminuye con el tiempo). En otras palabras, cuantos más núcleos estén disponibles para decaer, más decaerán (en el tiempo  $dt$ ). Esta ecuación puede reescribirse como

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt. \quad 10.8$$

Integrando ambos lados de la ecuación, y definiendo  $N_0$  para que sea el número de núcleos en  $t = 0$ , obtenemos

$$\int_{N_0}^N \frac{dN'}{N'} = - \int_0^t \lambda dt'. \quad 10.9$$

Esto nos da

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t. \quad 10.10$$

Tomando los lados izquierdo y derecho de la ecuación como una potencia de  $e$ , tenemos la **ley de decaimiento radioactivo**.

#### Ley de decaimiento radioactivo

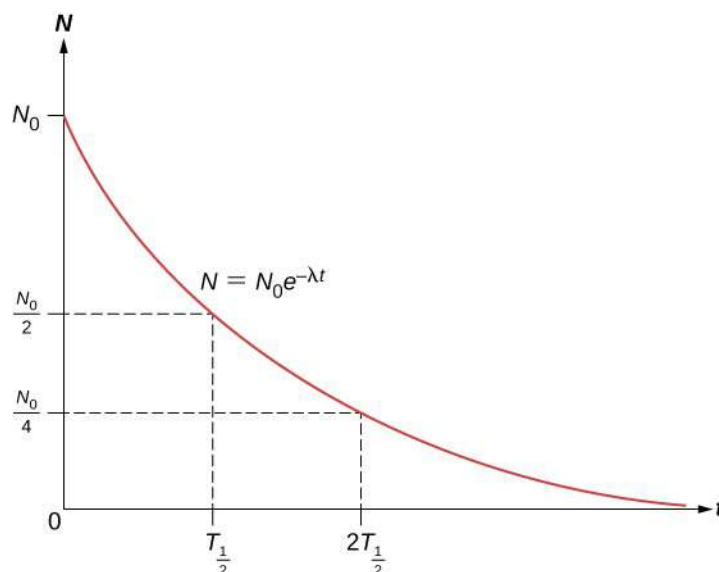
El número total  $N$  de núcleos radioactivos que quedan después del tiempo  $t$  es

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad 10.11$$

donde  $\lambda$  es la constante de decaimiento del núcleo en cuestión.

El número total de núcleos desciende muy rápidamente al principio, y luego más lentamente ([Figura 10.9](#)).





**FIGURA 10.9** Un gráfico de la ley de decaimiento radioactivo demuestra que el número de núcleos que quedan en una muestra de decaimiento disminuye drásticamente durante los primeros momentos del decaimiento.

La **vida media** ( $T_{1/2}$ ) de una sustancia radioactiva se define como el tiempo que tarda en decaer la mitad de los núcleos originales (o el tiempo en el que queda la mitad de los núcleos originales). La vida media de los isótopos inestables se muestra en la tabla de nucleídos en la [Figura 10.4](#). Por lo tanto, el número de núcleos radioactivos que quedan después de un número entero ( $n$ ) de vidas medias es

$$N = \frac{N_0}{2^n} \quad 10.12$$

Si la constante de decaimiento ( $\lambda$ ) es grande, la vida media es pequeña, y viceversa. Para determinar la relación entre estas cantidades, observe que cuando  $t = T_{1/2}$ , entonces  $N = N_0/2$ . Por lo tanto, la [Ecuación 10.10](#) puede reescribirse como

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}. \quad 10.13$$

Dividiendo ambos lados entre  $N_0$  y tomando el logaritmo natural se produce

$$\ln \frac{1}{2} = \ln e^{-\lambda T_{1/2}} \quad 10.14$$

lo que se reduce a

$$\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}}. \quad 10.15$$

Así, si conocemos la vida media  $T_{1/2}$  de una sustancia radioactiva, podemos hallar su constante de decaimiento. El **tiempo de vida**  $\bar{T}$  de una sustancia radioactiva se define como la cantidad media de existencia de un núcleo antes de decaer. El tiempo de vida de una sustancia no es más que el recíproco de la constante de decaimiento, escrito como

$$\bar{T} = \frac{1}{\lambda}. \quad 10.16$$

La **actividad**  $A$  se define como la magnitud de la tasa de decaimiento, o

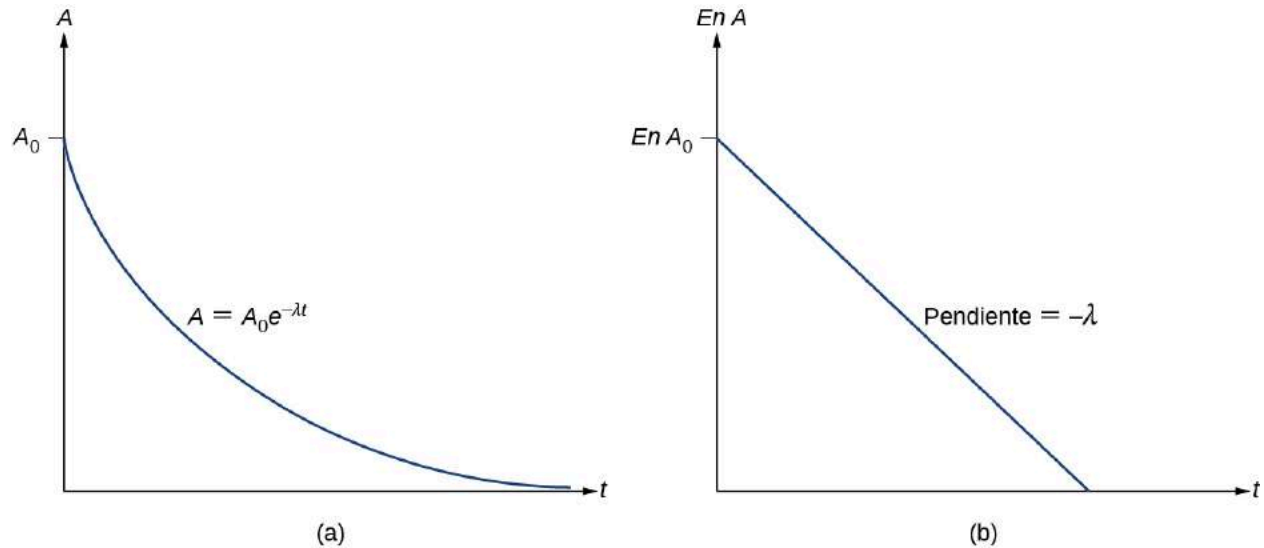
$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t}. \quad 10.17$$

El cambio infinitesimal  $dN$  en el intervalo de tiempo  $dt$  es negativo porque el número de partículas

progenitoras (que no han decaído) disminuye, por lo que la actividad ( $A$ ) es positiva. Definiendo la actividad inicial como  $A_0 = \lambda N_0$ , tenemos

$$A = A_0 e^{-\lambda t}. \quad 10.18$$

Así, la actividad  $A$  de una sustancia radioactiva disminuye exponencialmente con el tiempo (Figura 10.10).



**FIGURA 10.10** (a) Un gráfico de la actividad en función del tiempo (b) Si medimos la actividad en diferentes momentos, podemos trazar  $\ln A$  en función de  $t$ , y obtener una línea recta.



### EJEMPLO 10.4

#### Constante de decaimiento y actividad del estroncio 90

La vida media del estroncio-90,  ${}^{90}_{38}\text{Sr}$ , es de 28,8 años. Halle (a) su constante de decaimiento y (b) la actividad inicial de 1,00 g del material.

#### Estrategia

Podemos hallar la constante de decaimiento directamente a partir de la Ecuación 10.15. Para determinar la actividad, primero tenemos que hallar el número de núcleos presentes.

#### Solución

- a. La constante de decaimiento es de

$$\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}} = \left( \frac{0,693}{T_{1/2}} \right) \left( \frac{1 \text{ yr}}{3,16 \times 10^7 \text{ s}} \right) = 7,61 \times 10^{-10} \text{ s}^{-1}.$$

- b. La masa atómica de  ${}^{90}_{38}\text{Sr}$  es de 89,91 g. Usando el número de Avogadro  $N_A = 6,022 \times 10^{23}$  átomos/mol, calculamos el número inicial de núcleos en 1,00 g del material:

$$N_0 = \frac{1,00 \text{ g}}{89,91 \text{ g}} (N_A) = 6,70 \times 10^{21} \text{ núcleos}.$$

A partir de esto, hallamos que la actividad  $A_0$  en  $t = 0$  para 1,00 g de estroncio-90 es

$$\begin{aligned} A_0 &= \lambda N_0 \\ &= (7,61 \times 10^{-10} \text{ s}^{-1})(6,70 \times 10^{21} \text{ núcleos}) \\ &= 5,10 \times 10^{12} \text{ decays/s.} \end{aligned}$$

Expresando  $\lambda$  en términos de la vida media de la sustancia, obtenemos

$$A = A_0 e^{-(0,693/T_{1/2})T_{1/2}} = A_0 e^{-0,693} = A_0/2. \quad 10.19$$

Por lo tanto, la actividad se reduce a la mitad después de la vida media. Podemos determinar la constante de decaimiento  $\lambda$  midiendo la actividad en función del tiempo. Tomando el logaritmo natural de los lados izquierdo y derecho de [Ecuación 10.17](#), obtenemos

$$\ln A = -\lambda t + \ln A_0. \quad 10.20$$

Esta ecuación sigue la forma lineal  $y = mx + b$ . Si representamos  $\ln A$  en función de  $t$ , esperamos una línea recta con pendiente  $-\lambda$  y la intersección  $y \ln A_0$  ([Figura 10.10\(b\)](#)). La actividad  $A$  se expresa en unidades de **becquerelios** (Bq), donde un 1 Bq = 1 decaimiento por segundo. Esta cantidad también puede expresarse en decaimientos por minuto o decaimientos por año. Una de las unidades más comunes para la actividad es el **curie (Ci)**, que se define como la actividad de 1 g de  $^{226}\text{Ra}$ . La relación entre el Bq y el Ci es

$$1 \text{ Ci} = 3,70 \times 10^{10} \text{ Bq}.$$



### EJEMPLO 10.5

#### ¿Qué es la actividad del $^{14}\text{C}$ (carbono 14) en los tejidos vivos?

Aproximadamente 20% de la masa del cuerpo humano es carbono. Calcule la actividad debida a  $^{14}\text{C}$  (carbono 14) en 1,00 kg de carbono que posee un organismo vivo. Expresar la actividad en unidades de Bq y Ci.

#### Estrategia

La actividad del  $^{14}\text{C}$  se determina mediante la ecuación  $A_0 = \lambda N_0$ , donde  $\lambda$  es la constante de decaimiento y  $N_0$  es el número de núcleos radioactivos. El número de núcleos de  $^{14}\text{C}$  en una muestra de 1,00 kg se determina en dos pasos. En primer lugar, determinamos el número de núcleos de  $^{12}\text{C}$  (carbono 12) utilizando el concepto de mol. En segundo lugar, multiplicamos este valor por  $1,3 \times 10^{-12}$  (la abundancia conocida de  $^{14}\text{C}$  en una muestra de carbono de un organismo vivo) para determinar el número de núcleos de  $^{14}\text{C}$  en un organismo vivo. La constante de decaimiento se determina a partir de la vida media conocida del  $^{14}\text{C}$  (disponible en la [Figura 10.4](#)).

#### Solución

Un mol de carbono tiene una masa de 12,0 g, ya que es  $^{12}\text{C}$  casi puro. Así, el número de núcleos de carbono en un kilogramo es de

$$N(^{12}\text{C}) = \frac{6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{12,0 \text{ g/mol}} \times (1.000 \text{ g}) = 5,02 \times 10^{25}.$$

El número de núcleos de  $^{14}\text{C}$  en 1 kg de carbono es por lo tanto

$$N(^{14}\text{C}) = (5,02 \times 10^{25}) (1,3 \times 10^{-12}) = 6,52 \times 10^{13}.$$

Ahora podemos hallar la actividad  $A$  mediante la ecuación  $A = \frac{0,693 N}{t_{1/2}}$ . Introduciendo valores conocidos obtenemos

$$A = \frac{0,693 (6,52 \times 10^{13})}{5730 \text{ y}} = 7,89 \times 10^9 \text{ y}^{-1}$$

o  $7,89 \times 10^9$  decaimientos por año. Para hacer la conversión a la unidad Bq, simplemente transformamos los años en segundos. Por lo tanto,

$$A = (7,89 \times 10^9 \text{ y}^{-1}) \frac{1,00 \text{ y}}{3,16 \times 10^7 \text{ s}} = 250 \text{ Bq},$$

o 250 decaimientos por segundo. Para expresar  $A$  en curies, utilizamos la definición de curie,

$$A = \frac{250 \text{ Bq}}{3,7 \times 10^{10} \text{ Bq/Ci}} = 6,76 \times 10^{-9} \text{ Ci.}$$

Por lo tanto,

$$A = 6,76 \text{ nCi.}$$

### Importancia

Aproximadamente 20% del peso del cuerpo humano es carbono. Cientos de decaimientos de  $^{14}\text{C}$  ocurren cada segundo en el cuerpo humano. El carbono 14 y otras sustancias radioactivas naturales del cuerpo componen la exposición de fondo de una persona a la radiación nuclear. Como veremos más adelante en este capítulo, este nivel de actividad está muy por debajo de las dosis máximas recomendadas.

### Datación radiométrica

La **datación radiométrica** es una técnica que utiliza la radioactividad natural para determinar la edad de un material, como una roca o un artefacto antiguo. El enfoque básico consiste en estimar el número original de núcleos en un material y el número actual de núcleos en el material (después del decaimiento), y luego utilizar el valor conocido de la constante de decaimiento  $\lambda$  y la [Ecuación 10.10](#) para calcular el tiempo total del decaimiento,  $t$ .

Un método importante de datación radiométrica es la **datación por carbono 14**. Los núcleos de carbono 14 se producen cuando la radiación solar de alta energía incide en los núcleos de  $^{14}\text{N}$  en la atmósfera superior y posteriormente decaen con una vida media de 5730 años. El carbono radioactivo tiene la misma química que el carbono estable, por lo que se combina con la ecósfera y acaba formando parte de todo organismo vivo. El carbono 14 tiene una abundancia de 1,3 partes por billón de carbono normal. Por lo tanto, si se conoce el número de núcleos de carbono en un objeto, se multiplica ese número por  $1,3 \times 10^{-12}$  para calcular el número de núcleos de  $^{14}\text{C}$  en ese objeto. Cuando un organismo muere, el intercambio de carbono con el medio ambiente cesa, y el  $^{14}\text{C}$  no se repone a medida que decae.

Al comparar la abundancia de  $^{14}\text{C}$  en un artefacto, como las envolturas de las momias, con la abundancia normal en los tejidos vivos, es posible determinar la edad de la momia (o el tiempo transcurrido desde la muerte de la persona). La datación por carbono 14 puede utilizarse para tejidos biológicos de hasta 50.000 años de antigüedad, pero generalmente es más precisa para muestras más jóvenes, ya que la abundancia de núcleos de  $^{14}\text{C}$  en ellos es mayor. Los materiales biológicos muy antiguos no contienen  $^{14}\text{C}$  en absoluto. La validez de la datación por carbono puede comprobarse a través de otros medios, como el conocimiento histórico o el recuento de los anillos de los árboles.



### EJEMPLO 10.6

#### Una cueva funeraria antigua

En una cueva funeraria antigua, usted y su equipo de arqueólogos descubren un antiguo mobiliario de madera. Solo el 80% del  $^{14}\text{C}$  original permanece en la madera. ¿Cuántos años tienen los muebles?

#### Estrategia

El planteamiento del problema implica que  $N/N_0 = 0,80$ . Por lo tanto, la ecuación  $N = N_0 e^{-\lambda t}$  se puede utilizar para hallar el producto,  $\lambda t$ . Sabemos que la vida media del  $^{14}\text{C}$  es 5730 años, por lo que también conocemos su constante de decaimiento, y por lo tanto el tiempo  $t$  total de decaimiento.

#### Solución

Resolviendo la ecuación  $N = N_0 e^{-\lambda t}$  para  $N/N_0$  nos da

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}.$$

Por lo tanto,

$$0,80 = e^{-\lambda t}.$$

Tomando el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación se obtiene

$$\ln 0,80 = -\lambda t,$$

para que

$$-0,223 = -\lambda t.$$

Reordenando la ecuación para aislar  $t$  nos da

$$t = \frac{0,223}{\lambda},$$

donde

$$\lambda = \frac{0,693}{t_{1/2}} = \frac{0,693}{5730 \text{ y}}.$$

Al combinar esta información se produce

$$t = \frac{0,223}{\left(\frac{0,693}{5730 \text{ y}}\right)} = 1.844 \text{ y}.$$

### Importancia

Los muebles tienen casi 2000 años de antigüedad, lo que significa un descubrimiento impresionante. La incertidumbre típica en la datación por carbono 14 es de aproximadamente 5%, por lo que los muebles tienen entre 1750 y 1950 años. Este rango de fechas debe ser confirmado por otras pruebas, como los registros históricos.

### ✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 10.3

Un nucleído radioactivo tiene una alta tasa de decaimiento. ¿Qué significado tiene esto para su vida media y su actividad?

### 🔗 INTERACTIVO

Visite el [Radioactive Dating Game \(https://openstax.org/l/21raddatgame\\_es\)](https://openstax.org/l/21raddatgame_es) (juego de datación radiométrica) para conocer los tipos de datación radiométrica y hacer el intento de datar algunos objetos antiguos.

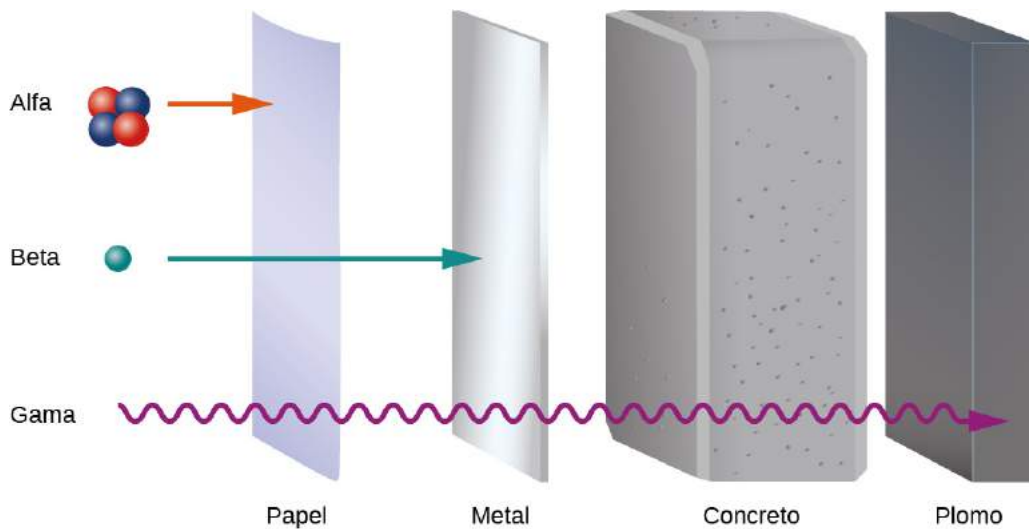
## 10.4 Reacciones nucleares

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

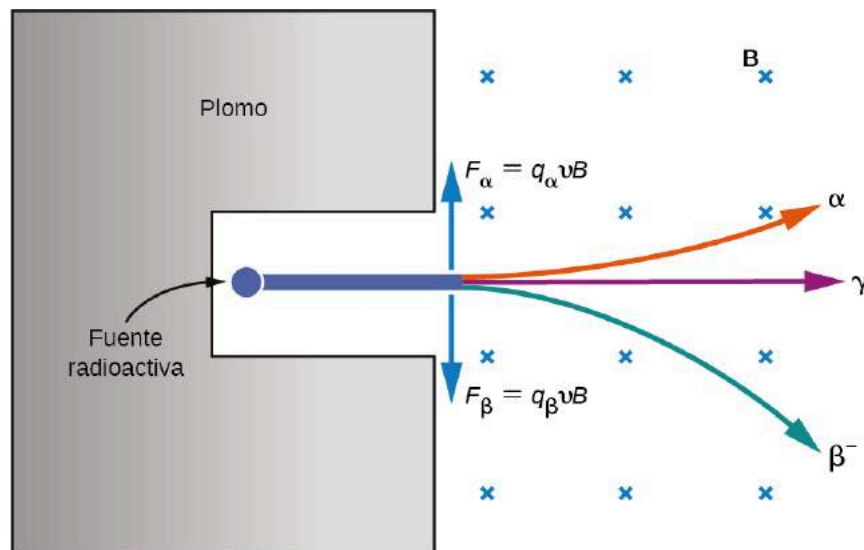
- Describir y comparar tres tipos de radiación nuclear
- Utilizar los símbolos nucleares para describir los cambios que se producen durante las reacciones nucleares
- Describir los procesos que intervienen en la serie de decaimiento de los elementos pesados

Los primeros experimentos revelaron tres tipos de "rayos" o radiaciones nucleares: **rayos alfa** ( $\alpha$ ), **rayos beta** (los rayos  $\beta$ ) y **rayos gama** ( $\gamma$ ). Estos tres tipos de radiación se diferencian por su capacidad de penetrar en la materia. La radiación alfa apenas puede atravesar una fina hoja de papel. La radiación beta puede penetrar el aluminio hasta una profundidad de unos 3 mm, y la radiación gama puede penetrar el plomo hasta una profundidad de 2 o más centímetros ([Figura 10.11](#)).



**FIGURA 10.11** Una comparación de las profundidades de penetración de la radiación alfa ( $\alpha$ ), beta (los rayos  $\beta$ ), y gama ( $\gamma$ ) a través de diversos materiales.

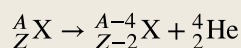
Las propiedades eléctricas de estos tres tipos de radiación se investigan haciéndolos pasar por un campo magnético uniforme, como se muestra en [Figura 10.12](#). Según la ecuación de la fuerza magnética  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ , las partículas con carga positiva son desviadas hacia arriba, las partículas con carga negativa son desviadas hacia abajo, y las partículas sin carga pasan a través del campo magnético sin ser desviadas. Al final, los rayos  $\alpha$  se identificaron con núcleos de helio ( ${}^4\text{He}$ ), los rayos  $\beta$  con electrones y **positrones** (electrones con carga positiva o **antielectrones**), y los rayos  $\gamma$  con fotones de alta energía. En el resto de esta sección hablaremos en detalle de las radiaciones alfa, beta y gama.



**FIGURA 10.12** El efecto de un campo magnético sobre la radiación alfa ( $\alpha$ ), beta (los rayos  $\beta$ ), y gama ( $\gamma$ ). Esta figura es solo un esquema. Las trayectorias relativas de las partículas dependen de sus masas y energías cinéticas iniciales.

### Decaimiento Alfa

Los núcleos inestables pesados emiten radiación  $\alpha$ . En el decaimiento de partículas  $\alpha$  (o **decaimiento alfa**), el núcleo pierde dos protones y dos neutrones, por lo que el número atómico disminuye en dos, mientras que su número de masa disminuye en cuatro. Antes del decaimiento, el núcleo se llama **núcleo padre**. El núcleo o los núcleos producidos en el decaimiento se denominan **núcleo hija** o núcleos hijas. Representamos un decaimiento  $\alpha$  simbólicamente por



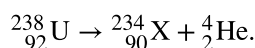
10.21

donde  ${}^A_Z X$  es el núcleo padre,  ${}^{A-4}_{Z-2} X$  es el núcleo hija, y  ${}^4_2 \text{He}$  es la partícula  $\alpha$ . En el decaimiento  $\alpha$ , un núcleo de número atómico  $Z$  decae en un núcleo de número atómico  $Z - 2$  y de masa atómica  $A - 4$ . Curiosamente, el sueño de los antiguos alquimistas de convertir otros metales en oro es científicamente factible mediante el proceso de decaimiento alfa. Los esfuerzos de los alquimistas fracasaron porque se basaron en las interacciones químicas y no en las nucleares.

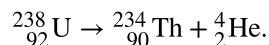
### INTERACTIVO

Observe cómo las partículas alfa escapan de un núcleo de polonio, provocando un decaimiento alfa radiactivo. Vea cómo los tiempos de decaimiento aleatorios se relacionan con la vida media. Para probar una simulación del decaimiento alfa, visite [partículas alfa \(https://openstax.org/l/21alphaparvid\\_es\)](https://openstax.org/l/21alphaparvid_es)

Un ejemplo de decaimiento alfa es el uranio-238:



El número atómico ha bajado de 92 a 90. El elemento químico con  $Z = 90$  es torio. Por lo tanto, el Uranio-238 ha decaído a Torio-234 por la emisión de una partícula  $\alpha$ , escrito como



Posteriormente,  ${}^{234}_{90} \text{Th}$  decae por emisión los rayos  $\beta$  con una vida media de 24 días. La energía liberada en este decaimiento alfa toma la forma de energías cinéticas de los núcleos de torio y helio, aunque la energía cinética del torio es menor que la del helio debido a su mayor masa y menor velocidad.



### EJEMPLO 10.7

#### Decaimiento alfa del plutonio

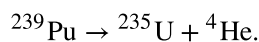
Halle la energía emitida en el decaimiento  $\alpha$  de  ${}^{239}\text{Pu}$ .

#### Estrategia

La energía emitida en el decaimiento  $\alpha$  de  ${}^{239}\text{Pu}$  se puede encontrar utilizando la ecuación  $E = (\Delta m) c^2$ . Primero debemos hallar  $\Delta m$ , la diferencia de masa entre el núcleo padre y los productos del decaimiento.

#### Solución

La ecuación de decaimiento es



Por lo tanto, las masas pertinentes son las de  ${}^{239}\text{Pu}$ ,  ${}^{235}\text{U}$ , y la de la partícula  $\alpha$  o  ${}^4\text{He}$ , todas ellas conocidas. La masa inicial era  $m({}^{239}\text{Pu}) = 239,052157$  u. La masa final es la suma

$$\begin{aligned} m({}^{235}\text{U}) + m({}^4\text{He}) &= 235,043924 \text{ u} + 4,002602 \text{ u} \\ &= 239,046526 \text{ u}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Delta m &= m({}^{239}\text{Pu}) - [m({}^{235}\text{U}) + m({}^4\text{He})] \\ &= 239,052157 \text{ u} - 239,046526 \text{ u} \\ &= 0,0005631 \text{ u}. \end{aligned}$$



Ahora podemos hallar  $E$  introduciendo  $\Delta m$  en la ecuación:

$$E = (\Delta m) c^2 = (0,005631 \text{ u}) c^2.$$

Sabemos que  $1 \text{ u} = 931,5 \text{ MeV}/c^2$ , por lo que tenemos

$$\begin{aligned} E &= (0,005631) (931,5 \text{ MeV}/c^2) (c^2) \\ &= 5,25 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

### Importancia

La energía liberada en este decaimiento  $\alpha$  está en el rango de los MeV, muchas veces mayor que las energías de las reacciones químicas. La mayor parte de esta energía se convierte en energía cinética de la partícula  $\alpha$  (o núcleo  ${}^4\text{He}$ ), que se aleja a gran velocidad. La energía arrastrada por el retroceso del núcleo  ${}^{235}\text{U}$  es mucho más pequeño debido a su masa relativamente grande. El núcleo  ${}^{235}\text{U}$  puede quedar en un estado excitado para emitir posteriormente fotones ( $\gamma$  rayos).

## Decaimiento Beta

En la mayoría de decaimientos de partículas los rayos  $\beta$  (o **decaimiento beta**), ya sea un electrón (los rayos  $\beta_-$ ) o positrón (los rayos  $\beta_+$ ) es emitido por un núcleo. Un positrón tiene la misma masa que el electrón, pero su carga es  $+e$ . Por esta razón, el positrón se llama a veces antielectrón. ¿Cómo se produce el decaimiento los rayos  $\beta$ ? Una posible explicación es que el electrón (positrón) está confinado en el núcleo antes del decaimiento y de alguna manera se escapa. Para obtener una estimación aproximada de la energía de escape, consideremos un modelo simplificado de un electrón atrapado en una caja (o en la terminología de la mecánica cuántica, un pozo cuadrado unidimensional) que tiene la anchura de un núcleo típico ( $10^{-14} \text{ m}$ ). Según el principio de incertidumbre de Heisenberg en [Mecánica cuántica](#), la incertidumbre del momento del electrón es:

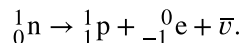
$$\Delta p > \frac{h}{\Delta x} = \frac{6,6 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \cdot \text{kg/s}}{10^{-14} \text{ m}} = 6,6 \times 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

Tomando este valor de momento (una subestimación) como el "valor verdadero", la energía cinética del electrón en el escape es aproximadamente

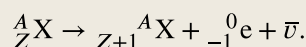
$$\frac{(\Delta p)^2}{2m_e} = \frac{(6,6 \times 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m/s})^2}{2(9,1 \times 10^{-31} \text{ kg})} = 2,0 \times 10^{-9} \text{ J} = 12.400 \text{ MeV}.$$

Experimentalmente, los electrones emitidos en el decaimiento los rayos  $\beta_-$  se encuentran con energías cinéticas del orden de solo unos pocos MeV. Por lo tanto, concluimos que el electrón se produce de alguna manera en el decaimiento en lugar de escapar del núcleo. La producción de partículas (aniquilación) se describe mediante teorías que combinan la mecánica cuántica y la relatividad, un tema de un curso más avanzado de física.

El decaimiento nuclear beta implica la conversión de un nucleón en otro. Por ejemplo, un neutrón puede decaer en un protón mediante la emisión de un electrón (los rayos  $\beta_-$ ) y una partícula casi sin masa llamada **antineutrino** ( $\bar{\nu}$ ):



La notación  ${}_{-1}^0\text{e}$  se utiliza para designar al electrón. Su número de masa es 0 porque no es un nucleón, y su número atómico es  $-1$  para indicar que tiene una carga de  $-e$ . El protón está representado por  ${}_1^1\text{p}$  porque su número de masa y su número atómico son 1. Cuando esto ocurre dentro de un núcleo atómico, tenemos la siguiente ecuación para el decaimiento beta:



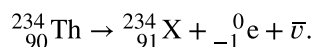
10.22

Como se ha comentado en otro capítulo, este proceso se produce debido a la fuerza nuclear débil.

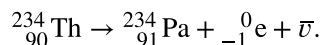
## INTERACTIVO

Observe cómo se produce el [decaimiento beta](https://openstax.org/l/21betadecayvid_es) ([https://openstax.org/l/21betadecayvid\\_es](https://openstax.org/l/21betadecayvid_es)) de un conjunto de núcleos o de un núcleo individual.

Como ejemplo, el isótopo  ${}^{234}_{90}\text{Th}$  es inestable y decae por emisión los rayos  $\beta_-$  con una vida media de 24 días. Su decaimiento puede representarse como

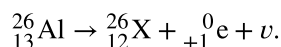


Como el elemento químico de número atómico 91 es el protactinio (Pa), podemos escribir el decaimiento los rayos  $\beta_-$  del torio como

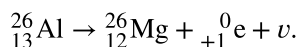


El proceso inverso también es posible: Un protón puede decaer en un neutrón mediante la emisión de un positrón (los rayos  $\beta_+$ ) y una partícula casi sin masa llamada **neutrino** ( $\nu$ ). Esta reacción se escribe como  ${}^1_1\text{p} \rightarrow {}^1_0\text{n} + {}^0_{+1}\text{e} + \nu$ .

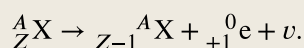
El positrón  ${}^0_{+1}\text{e}$  se emite con el neutrino  $\nu$ , y el neutrón permanece en el núcleo. (Como el decaimiento los rayos  $\beta_-$ , el positrón no precede al decaimiento sino que se produce en él). Para un protón aislado, este proceso es imposible porque el neutrón es más pesado que el protón. Sin embargo, este proceso es posible dentro del núcleo porque el protón puede recibir energía de otros nucleones para la transición. Como ejemplo, el isótopo de aluminio  ${}^{26}_{13}\text{Al}$  decae por emisión los rayos  $\beta_+$  con una vida media de  $7,40 \times 10^5$  años. El decaimiento se escribe como



El número atómico 12 corresponde al magnesio. Por lo tanto,



Como reacción nuclear, la emisión de positrones puede escribirse como



**10.23**

El neutrino no se detectó en los primeros experimentos sobre decaimiento los rayos  $\beta$ . Sin embargo, las leyes de la energía y el momento parecían exigir una partícula de este tipo. Más tarde, los neutrinos se detectaron a través de sus interacciones con los núcleos.



## EJEMPLO 10.8

### Decaimiento alfa y beta del bismuto

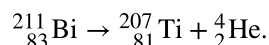
El núcleo  ${}^{211}_{83}\text{Bi}$  se somete a ambos decaimientos  $\alpha$  y los rayos  $\beta_-$ . Para cada caso, ¿cuál es el núcleo hija?

#### Estrategia

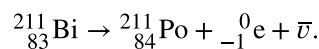
Podemos utilizar los procesos descritos por la [Ecuación 10.21](#) y la [Ecuación 10.22](#), así como la Tabla Periódica, para identificar los elementos resultantes.

#### Solución

El número atómico y el número de masa de la partícula  $\alpha$  son 2 y 4, respectivamente. Por lo tanto, cuando un núcleo de bismuto-211 emite una partícula  $\alpha$ , el núcleo hija tiene un número atómico de 81 y un número de masa de 207. El elemento con número atómico 81 es el talio, por lo que el decaimiento está dado por



En el decaimiento los rayos  $\beta^-$ , el número atómico aumenta en 1, mientras que el número de masa permanece igual. El elemento con número atómico 84 es el polonio, por lo que el decaimiento está dado por

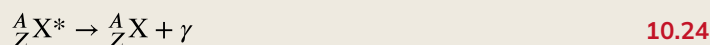


### ✓ **COMPRUEBE LO APRENDIDO 10.4**

En el decaimiento beta radiactivo, ¿el número de masa atómica,  $A$ , aumenta o disminuye?

### Decaimiento gama

Un núcleo en estado excitado puede decaer a un estado inferior mediante la emisión de un fotón de "rayos gama", lo que se conoce como **decaimiento gama**. Esto es análogo a la desexcitación de un electrón atómico. El decaimiento gama se representa simbólicamente por

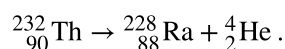


donde el asterisco (\*) en el núcleo indica un estado excitado. En el decaimiento  $\gamma$ , ni el número atómico ni el número de masa cambian, por lo que el tipo de núcleo no cambia.

### Serie de decaimiento radiactivo

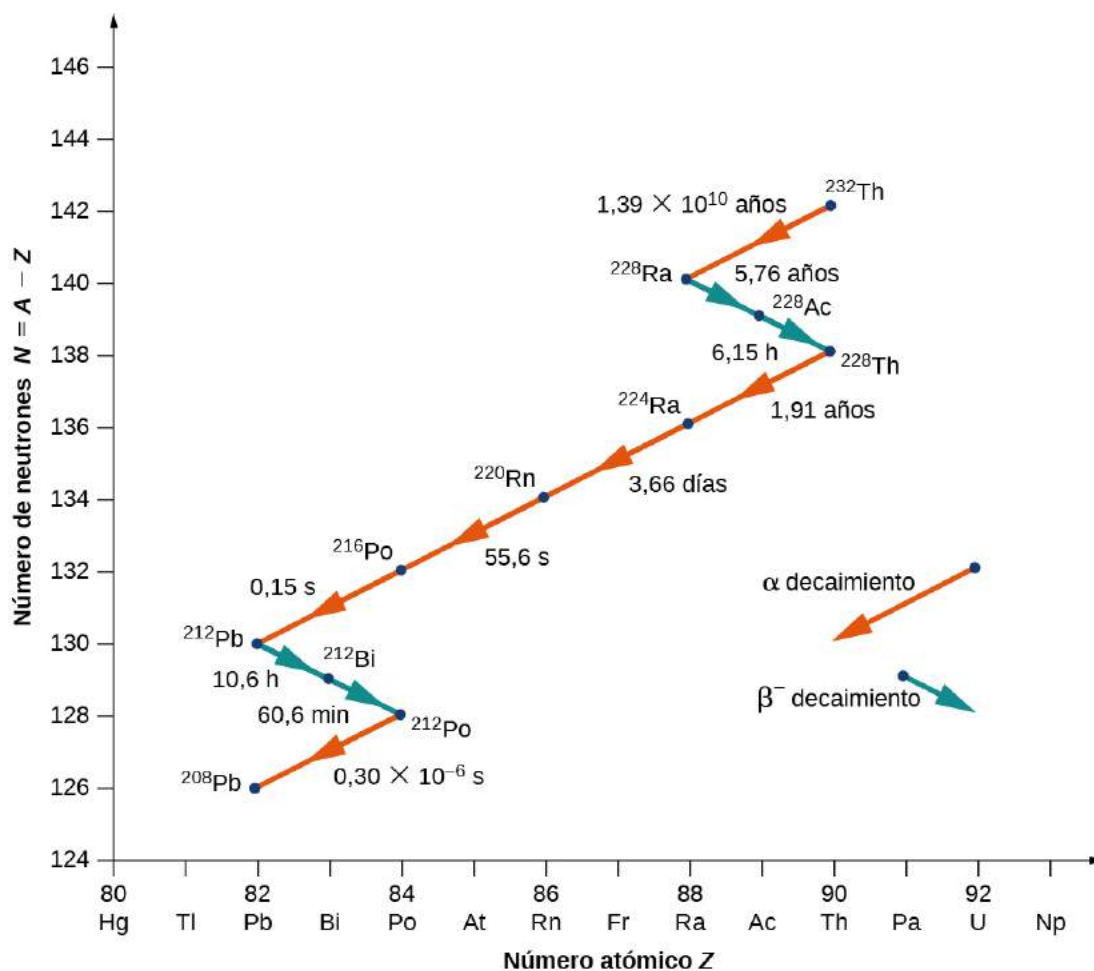
Núcleos con  $Z > 82$  son inestables y decaen de forma natural. Muchos de estos núcleos tienen una vida muy corta, por lo que no se encuentran en la naturaleza. Algunas excepciones notables son  ${}_{90}^{232}\text{Th}$  (o Th-232) con una vida media de  $1,39 \times 10^{10}$  años, y  ${}_{92}^{238}\text{U}$  (o U-238) con una vida media de  $7,04 \times 10^8$  años. Cuando un núcleo pesado decae en uno más ligero, el núcleo hija más ligero puede convertirse en el núcleo padre para el siguiente decaimiento, y así sucesivamente. Este proceso puede producir una larga serie de decaimientos nucleares llamada **serie de decaimiento**. La serie termina con un núcleo estable.

Para ilustrar el concepto de una serie de decaimiento, considere el decaimiento de la serie Th-232 ([Figura 10.13](#)). El número de neutrones,  $N$ , se representa en el eje vertical de la  $y$ , el número atómico,  $Z$ , se representa en el eje horizontal de la  $x$ , por lo que el Th-232 se encuentra en las coordenadas  $(N, Z) = (142, 90)$ . El Th-232 decae por emisión  $\alpha$  con una vida media de  $1,39 \times 10^{10}$  años. El decaimiento alfa disminuye el número atómico en 2 y el número de masa en 4, por lo que tenemos



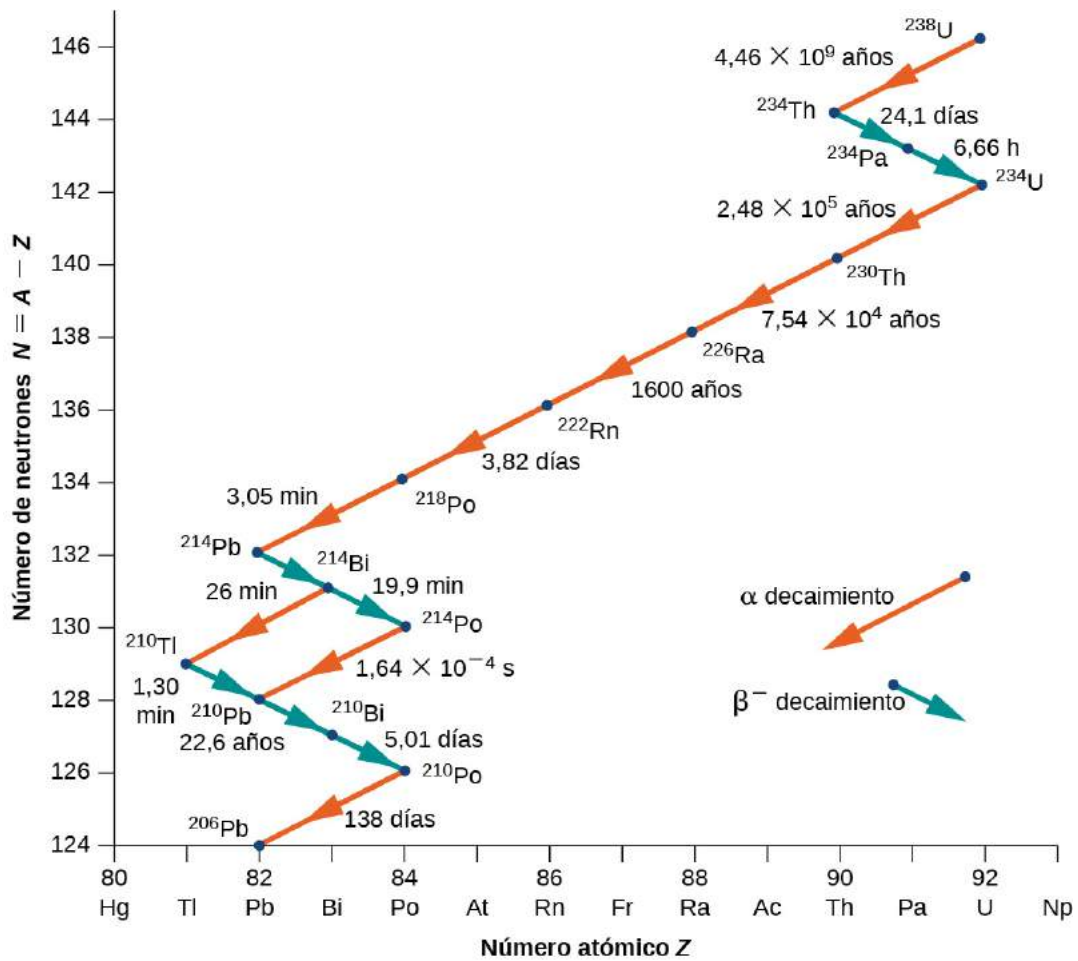
El número de neutrones del Radio-228 es 140, por lo que se encuentra en el diagrama en las coordenadas  $(N, Z) = (140, 88)$ . El radio-228 también es inestable y decae por emisión los rayos  $\beta^-$  con una vida media de 5,76 años a Actinium-228. El número atómico aumenta en 1, el número de masa permanece igual y el número de neutrones disminuye en 1. Observe que en el gráfico, la emisión  $\alpha$  aparece como una línea inclinada hacia la izquierda, con  $N$  y  $Z$  disminuyendo en 2. La emisión beta, por otro lado, aparece como una línea inclinada hacia la derecha, con  $N$  disminuyendo en 1 y  $Z$  aumentando en 1. Tras varios decaimientos alfa y beta adicionales, la serie termina con el núcleo estable Pb-208.

La frecuencia relativa de los distintos tipos de decaimiento radiactivo (alfa, beta y gama) depende de muchos factores, entre ellos el poder de las fuerzas implicadas y el número de formas en que puede producirse una reacción determinada sin violar la conservación de la energía y el momento. La frecuencia con la que se produce un decaimiento radiactivo suele depender de un delicado equilibrio de las fuerzas fuertes y electromagnéticas. Estas fuerzas se analizan en [Física de partículas y cosmología](#).



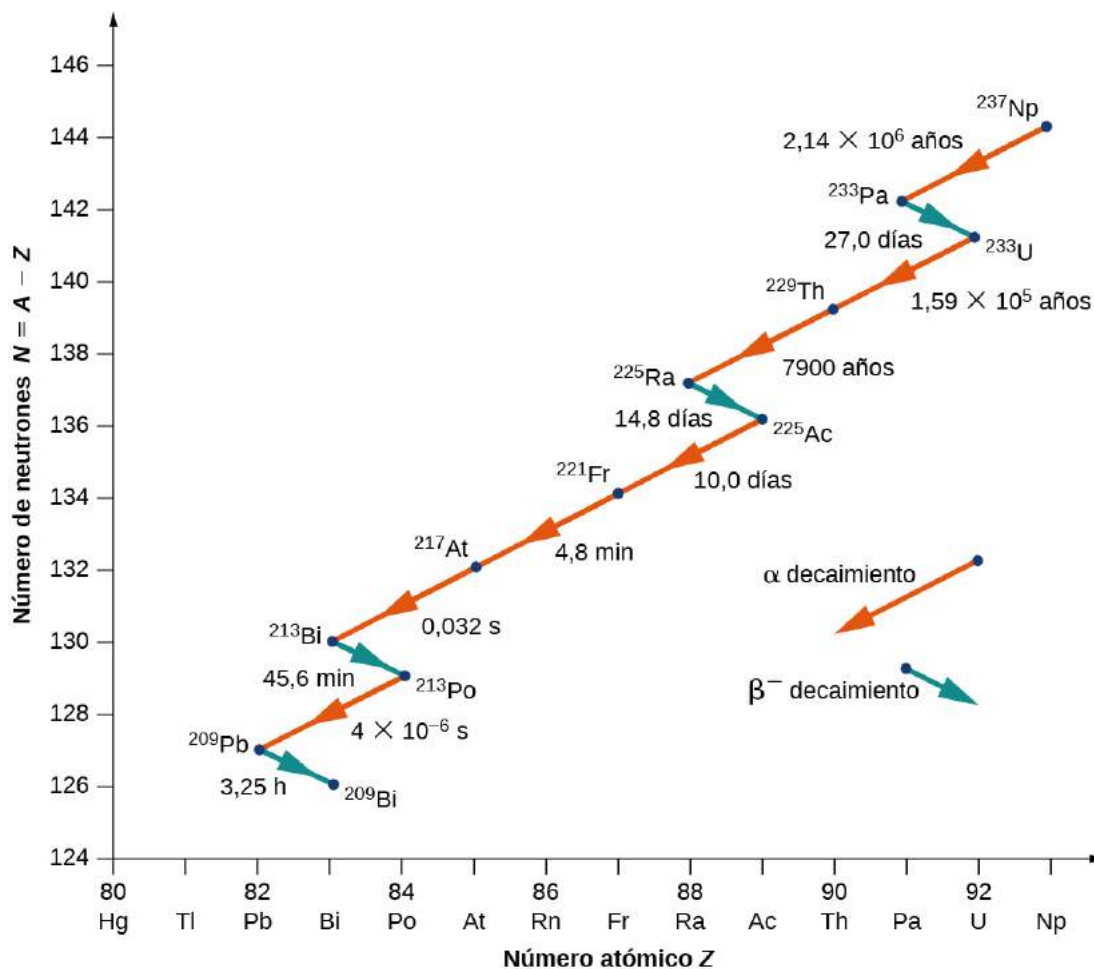
**FIGURA 10.13** En la serie de decaimiento del torio  $^{232}_{90}\text{Th}$ , los decaimientos alfa ( $\alpha$ ) reducen el número atómico, como indican las flechas rojas. Los decaimientos beta (los rayos  $\beta^-$ ) aumentan el número atómico, como indican las flechas azules. La serie termina en el núcleo estable Pb-208.

Como otro ejemplo, considere la serie de decaimiento del U-238 que se muestra en la [Figura 10.14](#). Tras numerosos decaimientos alfa y beta, la serie termina con el núcleo estable Pb-206. Un ejemplo de un decaimiento cuyo núcleo padre ya no existe de forma natural se muestra en la [Figura 10.15](#). Comienza con el Neptunio-237 y termina en el núcleo estable Bismuto-209. El neptunio se denomina **elemento transuránico** porque se encuentra más allá del uranio en la tabla periódica. El uranio tiene el mayor número atómico ( $Z = 92$ ) de cualquier elemento que se encuentre en la naturaleza. Elementos con  $Z > 92$  solo pueden producirse en el laboratorio. Lo más probable es que también existieran en la naturaleza en el momento de la formación de la Tierra, pero debido a su vida relativamente corta, se han decaído por completo. No hay ninguna diferencia fundamental entre los elementos naturales y los artificiales.



**FIGURA 10.14** En la serie de decaimiento del Uranio-238, los decaimientos alfa ( $\alpha$ ) reducen el número atómico, como indican las flechas rojas. Los decaimientos beta (los rayos  $\beta^-$ ) aumentan el número atómico, como indican las flechas azules. La serie termina en el núcleo estable Pb-206.

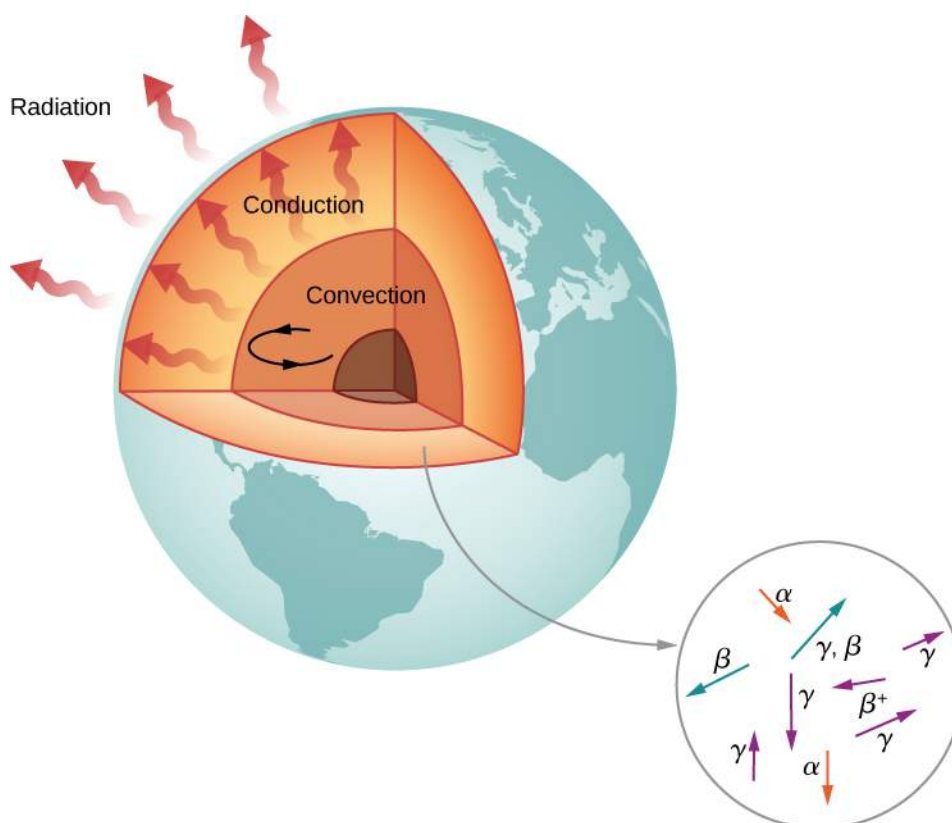
Observe que en el caso de Bi (21), el decaimiento puede ser alfa o beta.



**FIGURA 10.15** En la serie de decaimiento del Neptunio-237, los decaimientos alfa ( $\alpha$ ) reducen el número atómico, como indican las flechas rojas. Los decaimientos beta (los rayos  $\beta^-$ ) aumentan el número atómico, como indican las flechas azules. La serie termina en el núcleo estable Bi-209.

### La radioactividad en la Tierra

Según los geólogos, si no hubiera ninguna fuente de calor, la Tierra debería haberse enfriado hasta su temperatura actual en no más de 1.000 millones de años. Sin embargo, la Tierra tiene más de 4.000 millones de años. ¿Por qué la Tierra se enfría tan lentamente? La respuesta es la radioactividad nuclear, es decir, las partículas de alta energía producidas en los decaimientos radiactivos calientan la Tierra desde el interior ([Figura 10.16](#)).



**FIGURA 10.16** La Tierra se calienta mediante reacciones nucleares (decaimientos alfa, beta y gama). Sin estas reacciones, el núcleo y el manto de la Tierra estarían mucho más fríos que ahora.

Los núcleos candidatos para este modelo de calentamiento son  $^{238}\text{U}$  y  $^{40}\text{K}$ , que poseen vidas medias similares o superiores a la edad de la Tierra. La energía producida por estos decaimientos (por segundo y por metro cúbico) es pequeña, pero la energía no puede escapar fácilmente, por lo que el núcleo de la Tierra está muy caliente. La energía térmica del núcleo de la Tierra se transfiere a la superficie terrestre y se aleja de ella mediante los procesos de convección, conducción y radiación.

## 10.5 Fisión

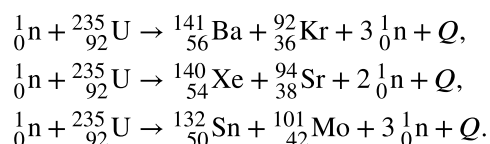
### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Describir el proceso de fisión nuclear en términos de su producto y reactivos.
- Calcular las energías de las partículas producidas por una reacción de fisión.
- Explicar el concepto de fisión en el contexto de las bombas de fisión y las reacciones nucleares.

En 1934, Enrico Fermi bombardeó elementos químicos con neutrones para crear isótopos de otros elementos. Supuso que bombardear el uranio con neutrones lo haría inestable y produciría un nuevo elemento. Por desgracia, Fermi no pudo determinar los productos de la reacción. Varios años después, Otto Hahn y Fritz Strassman reprodujeron estos experimentos y descubrieron que los productos de estas reacciones eran núcleos más pequeños. A partir de esto, concluyeron que el núcleo de uranio se había dividido en dos núcleos más pequeños.

La división de un núcleo se llama **fisión**. Curiosamente, la fisión del U-235 no siempre produce los mismos fragmentos. Algunos ejemplos de reacciones de fisión son:

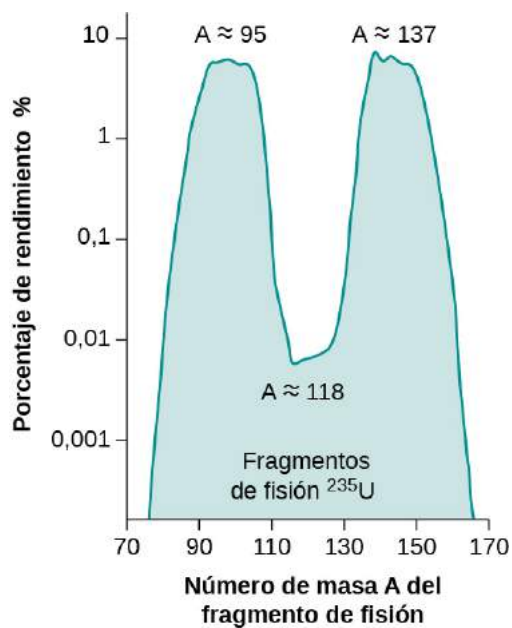




En cada caso, la suma de las masas de los núcleos del producto es menor que las masas de los reactivos, por lo que la fisión del uranio es un proceso exotérmico ( $Q > 0$ ). Esta es la idea en la que se basa el uso de los reactores de fisión como fuentes de energía (Figura 10.17). La energía arrastrada por la reacción toma la forma de partículas con energía cinética. El porcentaje de rendimiento de los fragmentos de una fisión de U-235 se indica en la Figura 10.18.



**FIGURA 10.17** La central nuclear de Phillipsburg, en Alemania, utiliza un reactor de fisión para generar electricidad.

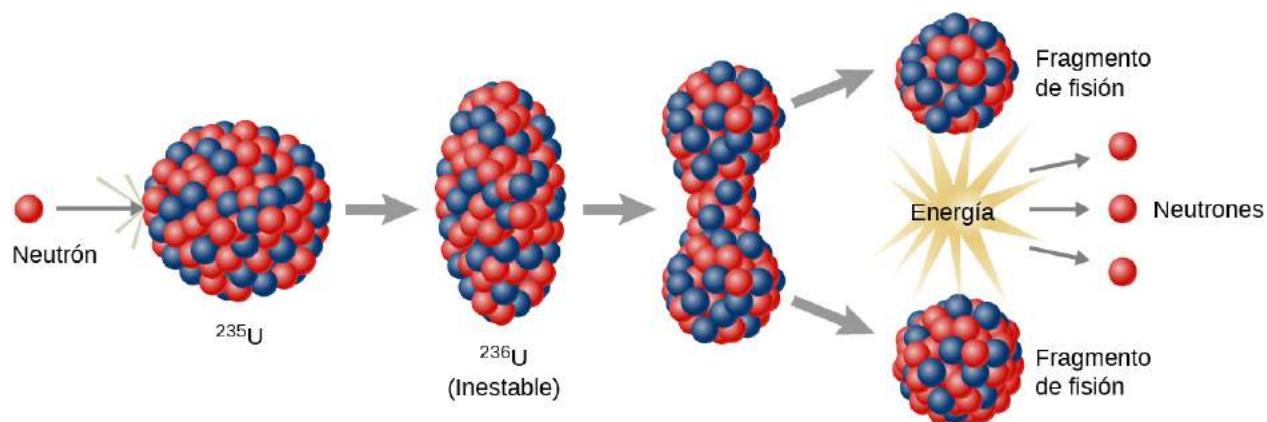


**FIGURA 10.18** En este gráfico de fragmentos de fisión del U-235, los picos del gráfico indican los núcleos que se

producen en mayor abundancia por el proceso de fisión.

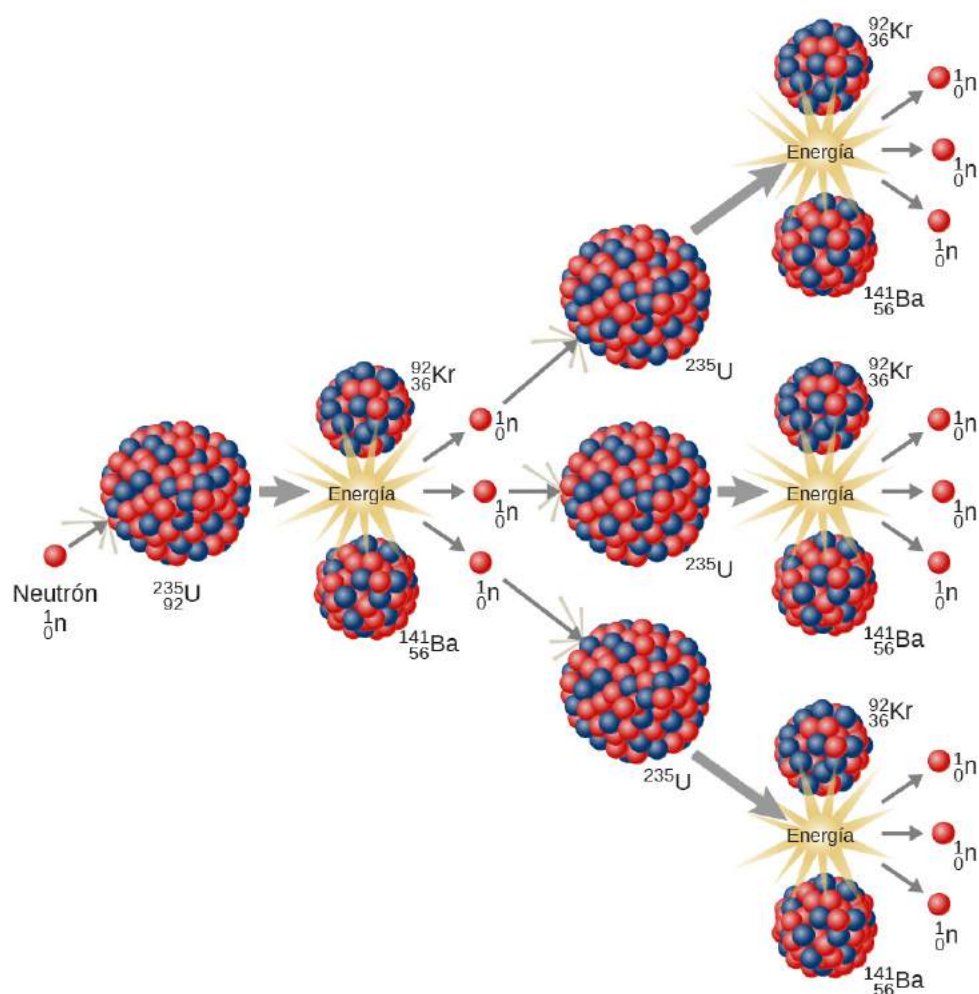
Los cambios de energía en una reacción de fisión nuclear pueden entenderse en términos de la curva de energía de enlace por nucleón (Figura 10.7). El valor de la energía de enlace por nucleón (Binding Energy per Nucleon, BEN) del uranio ( $A = 236$ ) es ligeramente inferior a sus núcleos hijas, que se encuentran más cerca del pico del hierro (Fe). Esto significa que los nucleones de los fragmentos nucleares están más unidos que los del núcleo de U-235. Por lo tanto, una reacción de fisión da lugar a un descenso de la energía promedio de un nucleón. Esta energía es arrastrada por los neutrones de alta energía.

Niels Bohr y John Wheeler desarrollaron el **modelo de la gota líquida** para entender el proceso de fisión. Según este modelo, disparar un neutrón a un núcleo es análogo a perturbar una gota de agua (Figura 10.19). La analogía funciona porque las fuerzas de corto alcance entre los nucleones de un núcleo son similares a las fuerzas de atracción entre las moléculas de agua en una gota de agua. En particular, las fuerzas entre los nucleones en la superficie del núcleo dan lugar a una tensión superficial similar a la de una gota de agua. Un neutrón disparado a un núcleo de uranio puede hacerlo vibrar. Si esta vibración es lo suficientemente violenta, el núcleo se divide en núcleos más pequeños y también emite dos o tres neutrones individuales.



**FIGURA 10.19** En el modelo de la gota líquida de la fisión nuclear, el núcleo de uranio se divide en dos núcleos más ligeros mediante un neutrón de alta energía.

La fisión del U-235 puede producir una reacción en cadena. En un compuesto formado por muchos núcleos de U-235, los neutrones del decaimiento de un núcleo de U-235 pueden iniciar la fisión de otros núcleos de U-235 (Figura 10.20). Esta reacción en cadena puede tener lugar de forma controlada, como en un reactor nuclear de una central eléctrica, o de forma incontrolada, como en una explosión.



**FIGURA 10.20** En una reacción de fisión en cadena del U-235, la fisión del núcleo de uranio produce neutrones de alta energía que pasan a dividir más núcleos. La energía liberada en este proceso puede utilizarse para producir electricidad.

### INTERACTIVO

Vea una simulación sobre la [fisión nuclear \(https://openstax.org/l/21nuclrfissvid\\_es\)](https://openstax.org/l/21nuclrfissvid_es) para iniciar una reacción en cadena, o para introducir isótopos no radiactivos para evitarla. Controlar la producción de energía en un reactor nuclear.

## La bomba atómica

La posibilidad de una reacción en cadena en el uranio, con su enorme liberación de energía, llevó a los científicos nucleares a concebir la fabricación de una bomba, una bomba atómica. (Estos descubrimientos tuvieron lugar en los años previos a la Segunda Guerra Mundial y muchos de los físicos europeos que participaron en ellos procedían de países que estaban siendo invadidos). El uranio natural contiene 99,3% de U-238 y solo 0,7% de U-235, y no produce una reacción en cadena. Para producir una reacción en cadena controlada y sostenible, el porcentaje de U-235 debe aumentarse hasta aproximadamente 50%. Además, la muestra de uranio debe ser lo suficientemente masiva como para que un neutrón típico tenga más probabilidades de inducir la fisión que de escapar. La masa mínima necesaria para que se produzca la reacción en cadena se denomina **masa crítica**. Cuando la masa crítica alcanza un punto en el que la reacción en cadena se vuelve autosostenible, es una condición conocida como **criticidad**. El diseño original requería dos piezas de U-235 por debajo de la masa crítica. Cuando una pieza en forma de bala se dispara contra la segunda, se supera la masa crítica y se produce una reacción en cadena.

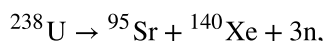
Un obstáculo importante para la bomba de U-235 es la producción de una masa crítica de material fisible. Por ello, los científicos desarrollaron una bomba de plutonio-239 porque el Pu-239 es más fisible que el U-235 y, por lo tanto, requiere una masa crítica menor. La bomba se fabricó en forma de esfera con trozos de plutonio, cada uno por debajo de la masa crítica, en el borde de la esfera. Una serie de explosiones químicas dispararon simultáneamente los trozos de plutonio hacia el centro de la esfera. Cuando todas estas piezas de plutonio se juntaron, la combinación superó la masa crítica y produjo una reacción en cadena. Tanto las bombas de U-235 como las de Pu-239 se utilizaron en la Segunda Guerra Mundial. El desarrollo y la utilización de las armas atómicas siguen siendo dos de las cuestiones más importantes a las que se enfrenta la civilización humana.



## EJEMPLO 10.9

### Cálculo de la energía liberada por la fisión

Calcule la energía liberada en la siguiente reacción de fisión espontánea poco frecuente:



Las masas atómicas son  $m({}^{238}\text{U}) = 238,050784 \text{ u}$ ,  $m({}^{95}\text{Sr}) = 94,919388 \text{ u}$ ,  $m({}^{140}\text{Xe}) = 139,921610 \text{ u}$ , y  $m(\text{n}) = 1,008665 \text{ u}$ .

#### Estrategia

Como siempre, la energía liberada es igual a la masa destruida por  $c^2$ , por lo que debemos calcular la diferencia de masa entre el  ${}^{238}\text{U}$  padre y los productos de fisión.

#### Solución

Los productos tienen una masa total de

$$\begin{aligned} m_{\text{productos}} &= 94,919388 \text{ u} + 139,921610 \text{ u} + 3(1,008665 \text{ u}) \\ &= 237,866993 \text{ u}. \end{aligned}$$

La masa perdida es la masa de  ${}^{238}\text{U} - m_{\text{productos}}$  o

$$\Delta m = 238,050784 \text{ u} - 237,8669933 \text{ u} = 0,183791 \text{ u}.$$

Por lo tanto, la energía liberada es

$$E = (\Delta m) c^2 = (0,183791 \text{ u}) \frac{931,5 \text{ MeV}/c^2}{\text{u}} c^2 = 171,2 \text{ MeV}.$$

#### Importancia

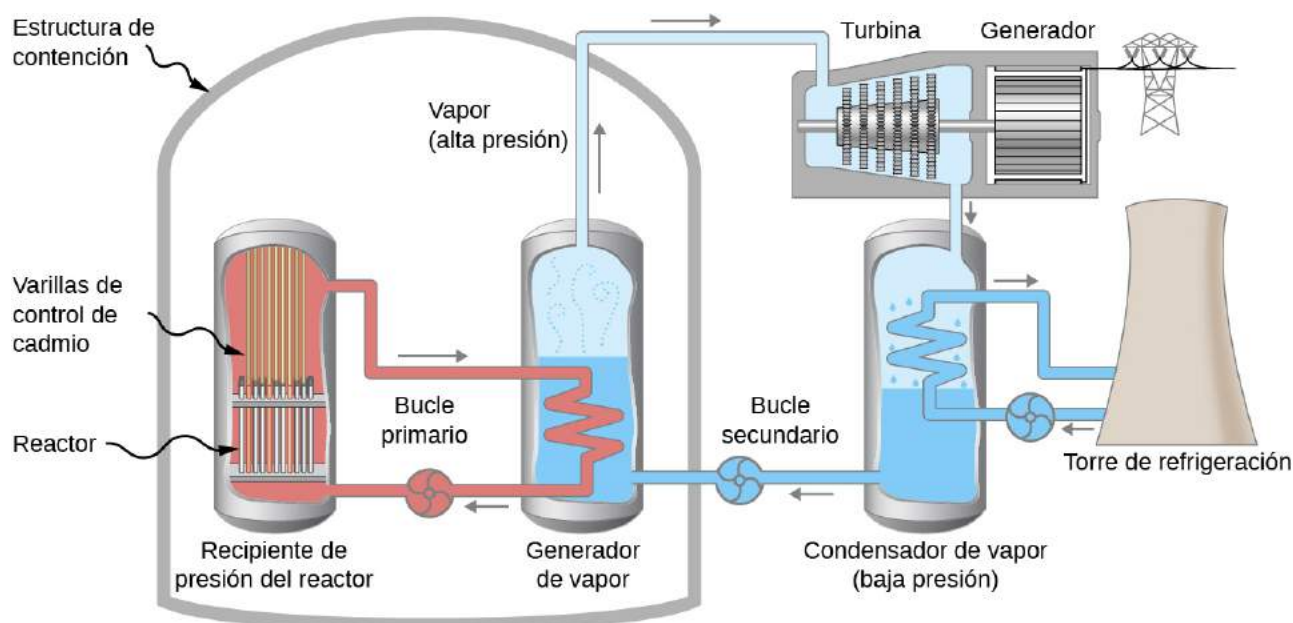
En este ejemplo surgen varios aspectos importantes. El desprendimiento de energía es grande, pero menor de lo que sería si el núcleo se dividiera en dos partes iguales, ya que la energía se la llevan los neutrones. Sin embargo, esta reacción de fisión produce neutrones y no divide el núcleo en dos partes iguales. La fisión de un determinado nucleído, como  ${}^{238}\text{U}$ , no siempre produce los mismos productos. La fisión es un proceso estadístico en el que se producen toda una serie de productos con distintas probabilidades. La mayor parte de la fisión produce neutrones, aunque el número varía. Este es un aspecto extremadamente importante de la fisión, porque *los neutrones pueden inducir más fisiones*, permitiendo reacciones en cadena autosostenibles.

### Reactores nucleares de fisión

El primer reactor nuclear fue construido por Enrico Fermi en una pista de squash del campus de la Universidad de Chicago el 2 de diciembre de 1942. El propio reactor contenía U-238 enriquecido con 3,6% de U-235. Los neutrones producidos por la reacción en cadena se mueven demasiado rápido para iniciar reacciones de fisión. Una forma de ralentizarlos es encerrar todo el reactor en un baño de agua a alta presión. Los neutrones chocan con las moléculas de agua y se ralentizan lo suficiente como para ser utilizados en el proceso de fisión. Los neutrones ralentizados dividen más núcleos de U-235 y se produce una reacción en cadena. El ritmo de la reacción en cadena se controla mediante una serie de varillas de “control” de cadmio insertadas en el reactor. El cadmio es capaz de absorber un gran número de neutrones sin volverse inestable.



Un diseño de reactor nuclear, llamado reactor de agua presurizada, también puede utilizarse para generar electricidad (Figura 10.21). Un reactor de agua presurizada (a la izquierda en la figura) está diseñado para controlar la fisión de grandes cantidades de  $^{235}\text{U}$ . La energía liberada en este proceso es absorbida por el agua que fluye por las tuberías del sistema (el "bucle primario") y se produce vapor. Las varillas de control de cadmio ajustan el flujo de neutrones (la tasa de flujo de neutrones que pasa por el sistema) y, por lo tanto, controlan la reacción. En caso de que el reactor se sobrecaliente y el agua hierva, la reacción en cadena termina, ya que el agua se utiliza para termalizar los neutrones. (Este dispositivo de seguridad puede ser superado en circunstancias extremas). A continuación, el agua caliente a alta presión pasa por una tubería a un segundo depósito de agua a presión normal en el generador de vapor. El vapor producido en un extremo del generador de vapor llena una cámara que contiene una turbina. Este vapor está a una presión muy alta. Mientras tanto, un condensador de vapor conectado al otro lado de la cámara de la turbina mantiene el vapor a baja presión. Las diferencias de presión obligan a pasar el vapor por la cámara, que hace girar la turbina. La turbina, a su vez, alimenta un generador eléctrico.



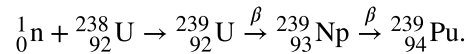
**FIGURA 10.21** Un reactor nuclear utiliza la energía producida en la fisión del U-235 para producir electricidad. La energía de una reacción de fisión nuclear produce vapor caliente a alta presión que hace girar una turbina. Cuando la turbina gira, se produce electricidad.

El principal inconveniente de un reactor de fisión son los residuos nucleares. La fisión del U-235 produce núcleos con vidas medias largas como el  $^{236}\text{U}$ , que debe ser almacenado. Estos productos no pueden verterse en los océanos ni dejarse en ningún lugar en el que puedan contaminar el medio ambiente, como el suelo, el aire o el agua. Muchos científicos creen que el mejor lugar para almacenar los residuos nucleares es el fondo de las antiguas minas de sal o el interior de las montañas estables.

Muchas personas temen que un reactor nuclear pueda explotar como una bomba atómica. Sin embargo, un reactor nuclear no contiene suficiente U-235 para hacerlo. Además, un reactor nuclear está diseñado para que el fallo de cualquier mecanismo del reactor haga que las varillas de control de cadmio caigan completamente en el reactor, deteniendo el proceso de fisión. Como demuestran las catástrofes de Fukushima y Chernóbil, estos sistemas pueden fallar. Los sistemas y procedimientos para evitar estas catástrofes son una prioridad importante para los defensores de la energía nuclear.

Si toda la energía eléctrica se produjera por fisión nuclear del U-235, las reservas conocidas de uranio de la Tierra se agotarían en menos de un siglo. Sin embargo, el suministro de material fisible de la Tierra puede ampliarse considerablemente mediante un **reactor reproductor**. Un reactor reproductor funciona por primera vez mediante la fisión del U-235, tal como se acaba de describir para el reactor de agua presurizada. Pero además de producir energía, algunos de los neutrones rápidos originados por la fisión del U-235 son

absorbidos por el U-238, dando lugar a la producción de Pu-239 mediante el conjunto de reacciones



El Pu-239 es, a su vez, altamente fisible y, por tanto, puede utilizarse como combustible nuclear en lugar del U-235. Dado que el 99,3% del uranio natural es el isótopo U-238, el uso de los reactores reproductores debería aumentar nuestro suministro de combustible nuclear en aproximadamente un factor de 100. Los reactores reproductores ya están en funcionamiento en Gran Bretaña, Francia y Rusia. Los reactores reproductores también tienen inconvenientes. En primer lugar, los reactores reproductores producen plutonio, que puede producir graves problemas de salud pública si se filtra al medio ambiente. En segundo lugar, el plutonio puede utilizarse para construir bombas, lo que aumenta considerablemente el riesgo de proliferación nuclear.



### EJEMPLO 10.10

#### Cálculo de la energía del combustible fisible

Calcule la cantidad de energía producida por la fisión de 1,00 kg de  ${}^{235}\text{U}$  dado que la reacción de fisión media de  ${}^{235}\text{U}$  produce 200 MeV.

#### Estrategia

La energía total producida es el número de átomos de  ${}^{235}\text{U}$  multiplicado por la energía dada por fisión de  ${}^{235}\text{U}$ . Por lo tanto, deberíamos calcular el número de átomos de  ${}^{235}\text{U}$  en 1,00 kg.

#### Solución

El número de átomos de  ${}^{235}\text{U}$  en 1,00 kg es el número de Avogadro por el número de moles. Un mol de  ${}^{235}\text{U}$  tiene una masa de 235,04 g; por lo tanto, hay  $(1.000 \text{ g}) / (235,04 \text{ g/mol}) = 4,25 \text{ mol}$ . El número de átomos  ${}^{235}\text{U}$  es por tanto

$$(4,25 \text{ mol}) (6,02 \times 10^{23} \text{ }^{235}\text{U/mol}) = 2,56 \times 10^{24} \text{ }^{235}\text{U}.$$

Por lo tanto, la energía total liberada es

$$E = (2,56 \times 10^{24} \text{ }^{235}\text{U}) \left( \frac{200 \text{ MeV}}{235 \text{ U}} \right) \left( \frac{1,60 \times 10^{-13} \text{ J}}{\text{MeV}} \right) = 8,21 \times 10^{13} \text{ J}.$$

#### Importancia

Se trata de otra cantidad de energía impresionante, equivalente a unos 14.000 barriles de petróleo crudo o 600.000 galones de gasolina. Sin embargo, es solo una cuarta parte de la energía producida por la fusión de una mezcla de un kilogramo de deuterio y tritio. Aunque cada reacción de fisión produce unas 10 veces la energía de una reacción de fusión, la energía por kilogramo de combustible de fisión es menor, porque hay muchos menos moles por kilogramo de nucleidos pesados. El combustible de fisión es también mucho más escaso que el de fusión, y menos que 1% de uranio (el  ${}^{235}\text{U}$ ) es fácilmente utilizable.

### ✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 10.5

¿Qué tiene un mayor rendimiento energético por reacción de fisión, una muestra grande o pequeña de  ${}^{235}\text{U}$ ?

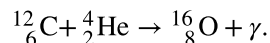
## 10.6 Fusión nuclear

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

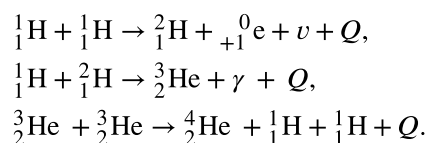
- Describir el proceso de fusión nuclear en términos de su producto y reactivos.
- Calcular las energías de las partículas producidas por una reacción de fusión.
- Explicar el concepto de fisión en el contexto de las bombas de fusión, la producción de energía por el Sol y la nucleosíntesis.

El proceso de combinación de núcleos más ligeros para obtener núcleos más pesados se denomina **fusión nuclear**. Al igual que las reacciones de fisión, las reacciones de fusión son exotérmicas: liberan energía. Supongamos que fusionamos un núcleo de carbono y otro de helio para producir oxígeno:

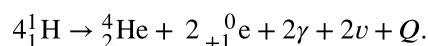


Los cambios de energía en esta reacción pueden entenderse mediante un gráfico de energía de enlace por nucleón (Figura 10.7). Al comparar la energía de enlace por nucleón para el oxígeno, el carbono y el helio, el núcleo de oxígeno está enlazado más fuertemente que los núcleos de carbono y helio, lo que indica que la reacción produce un descenso de la energía del sistema. Esta energía se libera en forma de radiación gama. Se dice que las reacciones de fusión son exotérmicas cuando la cantidad de energía liberada en cada reacción (conocida como *valor Q*) es mayor que cero ( $Q > 0$ ).

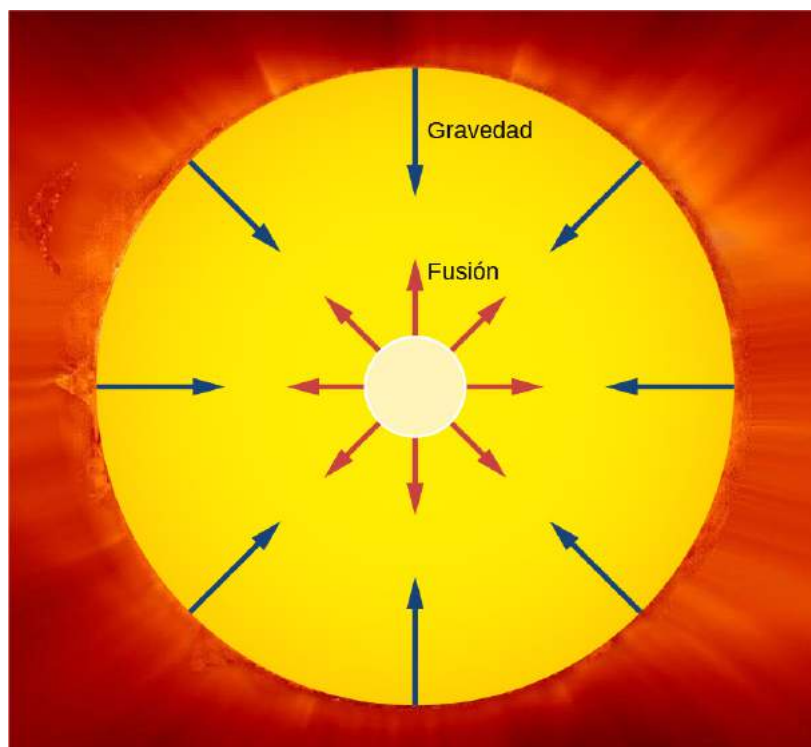
Un ejemplo importante de fusión nuclear en la naturaleza es la producción de energía en el Sol. En 1938, Hans Bethe propuso que el Sol produce energía cuando los núcleos de hidrógeno ( ${}^1\text{H}$ ) se fusionan en núcleos estables de helio ( ${}^4\text{He}$ ) en el núcleo del Sol (Figura 10.22). Este proceso, denominado **cadena protón-protón**, se resume en tres reacciones:



Por lo tanto, de la fusión de los núcleos del átomo de hidrógeno se forma un núcleo estable de helio. Estas tres reacciones pueden resumirse en



El valor  $Q$  neto es de unos 26 MeV. La liberación de esta energía produce una presión de gas térmica hacia el exterior que evita que el Sol colapse por gravedad. Los astrofísicos han descubierto que la fusión de hidrógeno suministra la energía que las estrellas necesitan para mantener el equilibrio energético durante la mayor parte de la vida de estas.



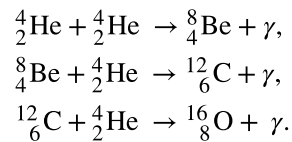
**FIGURA 10.22** El Sol produce energía mediante la fusión de hidrógeno en helio en su núcleo. Las flechas rojas



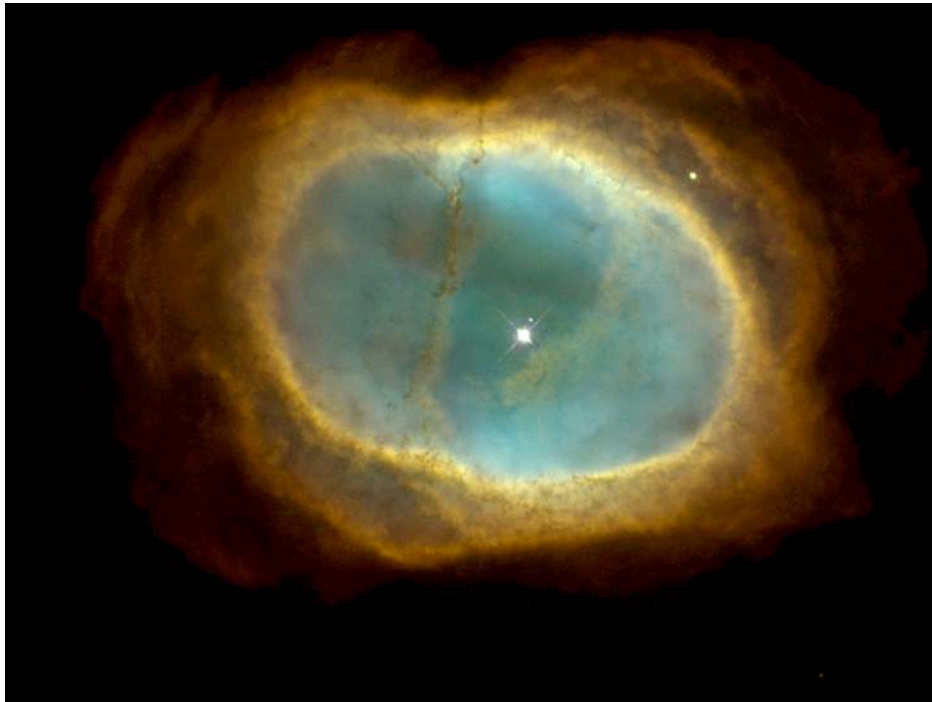
muestran la presión hacia el exterior debida al gas térmico, que tiende a hacer que el Sol se expanda. Las flechas azules muestran la presión hacia el interior debida a la gravedad, que tiende a hacer que el Sol se contraiga. Estas dos influencias se equilibran mutuamente.

### Nucleosíntesis

Los científicos creen ahora que muchos de los elementos pesados que se encuentran en la Tierra y en todo el universo se sintetizaron originalmente por fusión dentro de los núcleos calientes de las estrellas. Este proceso se conoce como **nucleosíntesis**. Por ejemplo, en las estrellas más ligeras, el hidrógeno se combina para formar helio mediante la cadena protón-protón. Una vez agotado el combustible de hidrógeno, la estrella entra en la siguiente fase de su vida y fusiona el helio. Un ejemplo de reacción nuclear en cadena que puede ocurrir es:

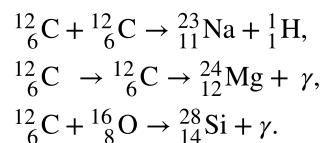


Los núcleos de carbono y oxígeno producidos en estos procesos acaban llegando a la superficie de la estrella por convección. Cerca del final de su vida, la estrella pierde sus capas exteriores hacia el espacio, enriqueciendo así el medio interestelar con los núcleos de elementos más pesados ([Figura 10.23](#)).



**FIGURA 10.23** Una nebulosa planetaria se produce al final de la vida de una estrella. El color verdoso de esta nebulosa planetaria procede de los iones de oxígeno (crédito: Equipo del Hubble Heritage (Instituto de Ciencias del Telescopio Espacial (Space Telescope Science Institute, STScI), Asociación de Universidades para la Investigación Astronómica (Association of Universities for Research in Astronomy, AURA), Administración Nacional de Aeronáutica y del Espacio (National Aeronautics and Space Administration, NASA), Agencia Espacial Europea (European Space Agency, ESA)).

Las estrellas de masa similar a la del Sol no se calientan lo suficiente como para fusionar núcleos tan pesados (o más pesados) que los del oxígeno. Sin embargo, en las estrellas masivas cuyos núcleos se calientan mucho más ( $T > 6 \times 10^8 \text{ K}$ ), se producen núcleos aún más complejos. Algunas reacciones representativas son



La nucleosíntesis continúa hasta que el núcleo es principalmente de metal de hierro y níquel. Ahora bien, el hierro tiene la propiedad peculiar de que cualquier reacción de fusión o fisión en la que participe el núcleo de hierro es endotérmica, lo que significa que se absorbe energía en lugar de producirla. Por lo tanto, no se puede generar energía nuclear en un núcleo rico en hierro. Al carecer de una presión hacia el exterior procedente de las reacciones de fusión, la estrella comienza a contraerse debido a la gravedad. Este proceso calienta el núcleo hasta una temperatura del orden de  $5 \times 10^9 \text{K}$ . Las ondas expansivas de choque generadas en el interior de la estrella debido a su colapso hacen que explote rápidamente. La luminosidad de la estrella puede aumentar temporalmente hasta casi la de toda una galaxia. Durante este evento, la avalancha de neutrones energéticos reacciona con el hierro y los demás núcleos para producir elementos más pesados que el hierro. Estos elementos, junto con gran parte de la estrella, son expulsados al espacio por la explosión. Las supernovas y la formación de nebulosas planetarias desempeñan conjuntamente un papel importante en la dispersión de elementos químicos en el espacio.

Con el tiempo, gran parte del material perdido por las estrellas es atraído por la fuerza gravitacional y se condensa en una nueva generación de estrellas y planetas acompañantes. Imágenes recientes del Telescopio Espacial Hubble permiten ver este magnífico proceso que tiene lugar en la constelación de La Serpiente (Figura 10.24). La nueva generación de estrellas comienza de nuevo el proceso de nucleosíntesis, con un mayor porcentaje de elementos más pesados. Así, las estrellas son "fábricas" de elementos químicos, y muchos de los átomos de nuestro cuerpo formaron parte de estrellas.



**FIGURA 10.24** Esta imagen tomada por el telescopio espacial Spitzer de la NASA y el Reconocimiento en Dos Micrómetros de Todo el Cielo (Two Micron All Sky Survey, 2MASS), muestra el núcleo de la nube de La Serpiente, una región de formación estelar en la constelación del mismo nombre. Situado a unos 750 años luz de distancia, este cúmulo de estrellas se forma a partir del enfriamiento de polvo y gases. Se usó luz infrarroja para revelar las estrellas más jóvenes de color naranja y amarillo (crédito: NASA/JPL-Caltech/2MASS).

## EJEMPLO 10.11

### Energía del Sol

La potencia del Sol es de aproximadamente  $3,8 \times 10^{26} \text{ J/s}$ . La mayor parte de esta energía se produce en el núcleo del Sol mediante la cadena protón-protón. Esta energía se transmite hacia el exterior mediante los procesos de convección y radiación. (a) ¿Cuántas de estas reacciones de fusión por segundo deben producirse para suministrar la energía irradiada por el Sol? (b) ¿Cuál es el ritmo de disminución de la masa del Sol? (c) Dentro de unos 5.000 millones de años, el núcleo central del Sol se quedará sin hidrógeno. ¿En qué porcentaje habrá disminuido la masa del Sol con respecto a su valor actual cuando el núcleo se haya quedado sin hidrógeno?

**Estrategia**

La producción total de energía por segundo se indica en el enunciado del problema. Si conocemos la energía liberada en cada reacción de fusión, podemos determinar la velocidad de las reacciones de fusión. Si se conoce la pérdida de masa por reacción de fusión, se conoce la tasa de pérdida de masa. Multiplicando esta tasa por 5.000 millones de años se obtiene la masa total perdida por el Sol. Este valor se divide entre la masa original del Sol para determinar el porcentaje de la masa del Sol que se ha perdido al agotarse el combustible de hidrógeno.

**Solución**

- a. La disminución de la masa para la reacción de fusión es

$$\begin{aligned}\Delta m &= 4m\left({}_1^1\text{H}\right) - m\left({}_2^4\text{He}\right) - 2m\left({}_+1^0\text{e}\right) \\ &= 4(1,007825 \text{ u}) - 4,002603 \text{ u} - 2(0,000549 \text{ u}) \\ &= 0,0276 \text{ u}.\end{aligned}$$

La energía liberada por reacción de fusión es

$$Q = (0,0276 \text{ u})(931,49 \text{ MeV/u}) = 25,7 \text{ MeV}.$$

Por lo tanto, para suministrar  $3,8 \times 10^{26} \text{ J/s} = 2,38 \times 10^{39} \text{ MeV/s}$ , debe haber

$$\frac{2,38 \times 10^{39} \text{ MeV/s}}{25,7 \text{ MeV/reacción}} = 9,26 \times 10^{37} \text{ reacción/s}.$$

- b. La masa del Sol disminuye en  $0,0276 \text{ u} = 4,58 \times 10^{-29} \text{ kg}$  por reacción de fusión, por lo que la velocidad a la que disminuye su masa es

$$(9,26 \times 10^{37} \text{ reacción/s})(4,58 \times 10^{-29} \text{ kg/reacción}) = 4,24 \times 10^9 \text{ kg/s}.$$

- c. En el decaimiento  $5 \times 10^9 \text{ años} = 1,6 \times 10^{17} \text{ s}$ , la masa del Sol disminuirá, por lo tanto, en

$$\Delta M = (4,24 \times 10^9 \text{ kg/s})(1,6 \times 10^{17} \text{ s}) = 6,8 \times 10^{26} \text{ kg}.$$

La masa actual del Sol es de aproximadamente  $2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$ , por lo que el porcentaje de disminución de su masa cuando se agote su combustible de hidrógeno será

$$\left(\frac{6,8 \times 10^{26} \text{ kg}}{2,0 \times 10^{30} \text{ kg}}\right) \times 100\% = 0,034\%.$$

**Importancia**

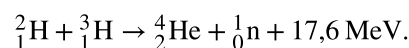
Después de cinco mil millones de años, el Sol tiene actualmente casi la misma masa. La quema de hidrógeno influye muy poco en los cambios de masa del Sol. Este cálculo supone que solo el cambio por el decaimiento protón-protón es responsable de la potencia emitida por el Sol.

**✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 10.6**

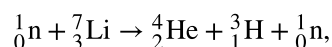
¿Dónde se origina la energía del Sol?

**La bomba de hidrógeno**

En 1942, Robert Oppenheimer sugirió que la altísima temperatura de una bomba atómica podría utilizarse para desencadenar una reacción de fusión entre el deuterio y el tritio, produciendo así una bomba de fusión (o de hidrógeno). La reacción entre el deuterio y el tritio, ambos isótopos del hidrógeno, está dada por



El deuterio es relativamente abundante en el agua del océano, pero el tritio es escaso. Sin embargo, el tritio puede generarse en un reactor nuclear mediante una reacción en la que interviene el litio. Los neutrones del reactor provocan la reacción

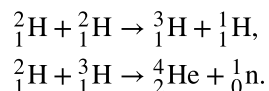




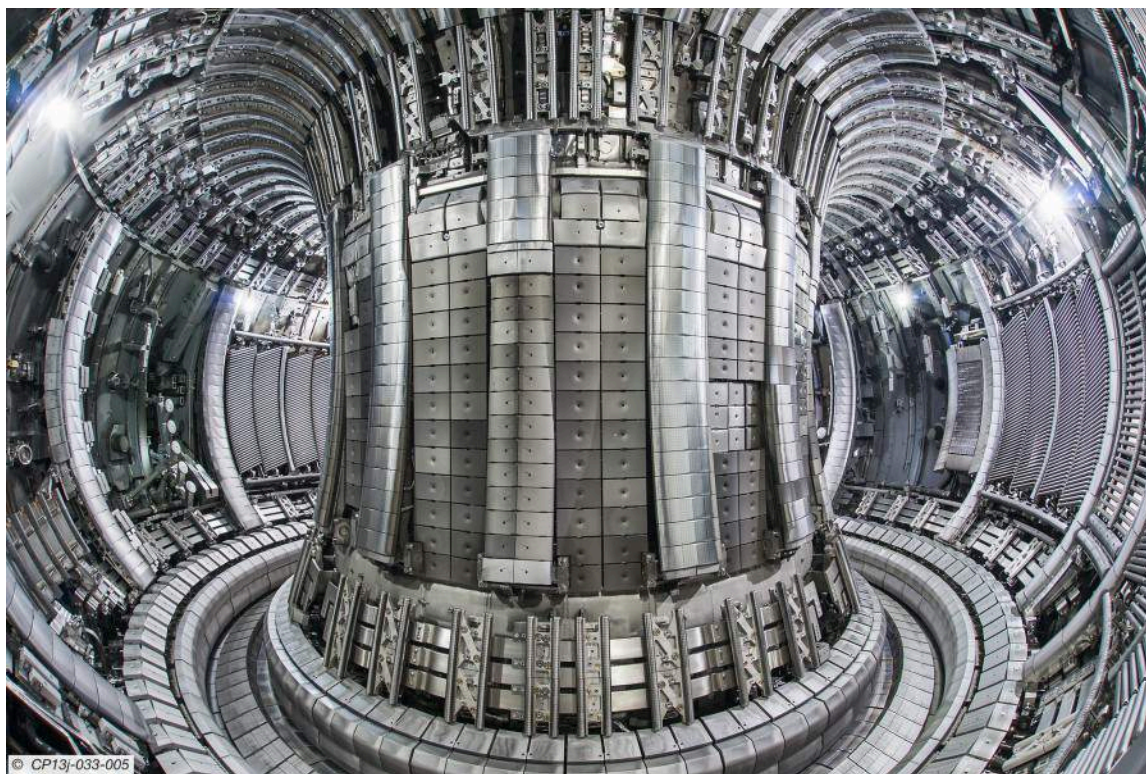
para producir el tritio deseado. La primera bomba de hidrógeno se detonó en 1952 en la remota isla de Eniwetok, en las Islas Marshall. Nunca se ha utilizado la bomba de hidrógeno en una guerra. Las bombas de hidrógeno modernas son aproximadamente 1000 veces más potentes que las bombas de fisión lanzadas sobre Hiroshima y Nagasaki en la Segunda Guerra Mundial.

### El reactor de fusión

La cadena de fusión que se considera más práctica para su uso en un **reactor de fusión nuclear** es el siguiente proceso de dos pasos:



Esta cadena, al igual que la cadena protón-protón, produce energía sin ningún subproducto radiactivo. Sin embargo, hay un problema muy difícil que debe superarse antes de que la fusión pueda utilizarse para producir cantidades significativas de energía: Son necesarias temperaturas extremadamente altas ( $\sim 10^7\text{K}$ ) para impulsar el proceso de fusión. Para hacer frente a este reto, se están desarrollando reactores de fusión de prueba que soportan temperaturas 20 veces superiores a la temperatura del núcleo del Sol. Un ejemplo es el Toro Común Europeo (Joint European Torus, JET) que se muestra en la [Figura 10.25](#). Todavía queda mucho trabajo por hacer en la tecnología de los reactores de fusión, pero muchos científicos predicen que la energía de fusión alimentará las ciudades del mundo a finales del siglo XX.



**FIGURA 10.25** El detector de fusión de tipo tokamak Toro Común Europeo (JET) utiliza campos magnéticos para fusionar núcleos de deuterio y tritio (crédito: EUROfusion).

## 10.7 Usos médicos y efectos biológicos de la radiación nuclear

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Describir dos usos médicos de la tecnología nuclear.
- Explicar el origen de los efectos biológicos ocasionados por la radiación nuclear.
- Enumerar las fuentes comunes de radiación y sus efectos.
- Estimar la exposición a la radiación nuclear utilizando unidades de dosis comunes.

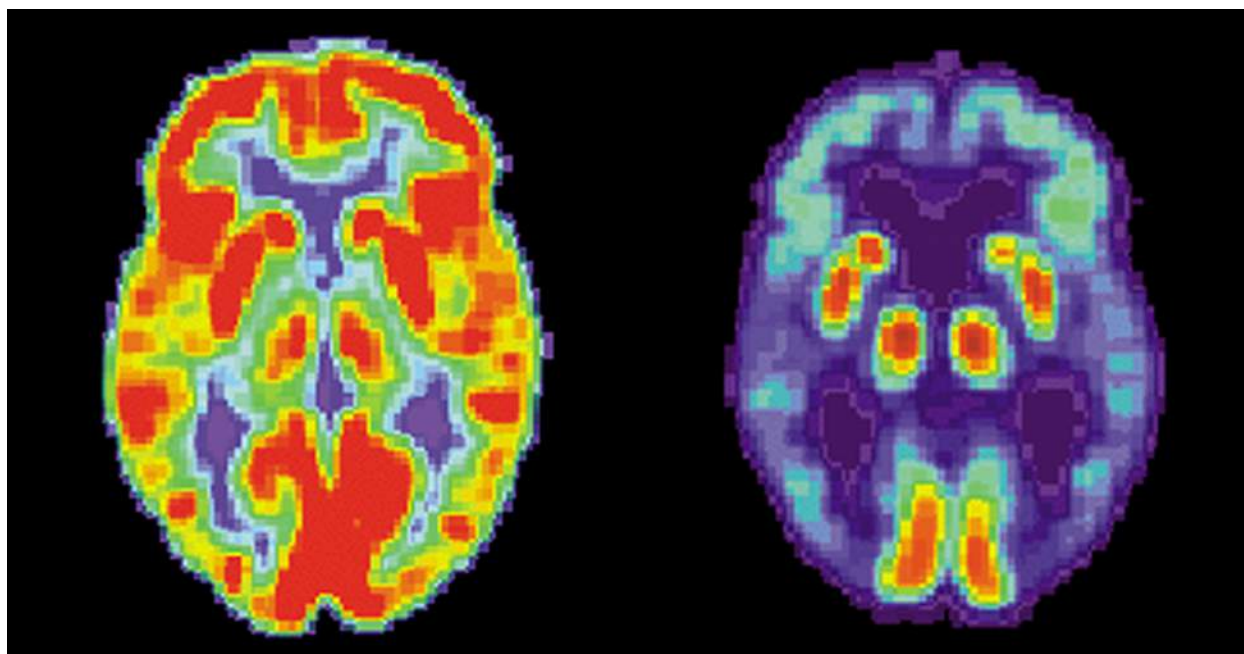
La física nuclear forma parte de nuestra vida cotidiana ([Figura 10.26](#)). Los compuestos radiactivos se utilizan para identificar el cáncer, estudiar artefactos antiguos y suministrar energía a nuestras ciudades. La fusión nuclear también impulsa al Sol, la principal fuente de energía de la Tierra. Este capítulo se centra en la radiación nuclear. En esta sección nos preguntaremos lo siguiente: ¿Cómo se utiliza la radiación nuclear en beneficio de la sociedad? ¿Cuáles son sus riesgos para la salud? ¿A qué cantidad de radiación nuclear se expone una persona común a lo largo de su vida?



**FIGURA 10.26** La Dra. Tori Randall, curadora del Museo del Hombre de San Diego, utiliza la radiación nuclear para estudiar una momia infantil peruana de hace 500 años. Esta radiación se origina en transformación de un núcleo en otro (crédito: Samantha A. Lewis, Marina de los EE. UU.).

### Usos médicos

El uso médico de la radiación nuclear es bastante común en los hospitales y clínicas actuales. Uno de los usos más importantes de la radiación nuclear es la localización y el estudio de los tejidos enfermos. Este uso requiere un medicamento especial llamado **radiofármaco**. Un radiofármaco contiene un isótopo radiactivo inestable. Cuando el fármaco entra en el organismo, tiende a concentrarse en las regiones inflamadas del cuerpo. (Recordemos que la interacción del fármaco con el organismo no depende de que un determinado núcleo sea sustituido por uno de sus isótopos, ya que esta interacción viene determinada por las interacciones químicas). Los detectores de radiación utilizados fuera del cuerpo utilizan la radiación nuclear de los radioisótopos para localizar el tejido enfermo. Los radiofármacos se denominan **marcadores radioactivos** porque permiten a los médicos seguir la actividad de los medicamentos en el cuerpo. Los marcadores radioactivos sirven para muchos fines, como la identificación de células cancerosas en los huesos, tumores cerebrales y la enfermedad de Alzheimer ([Figura 10.27](#)). Los marcadores radioactivos también se utilizan para controlar el funcionamiento de los órganos, como el flujo sanguíneo, la actividad del músculo cardíaco y la captación de yodo en la glándula tiroides.



**FIGURA 10.27** Estas imágenes cerebrales se producen utilizando un radiofármaco. Los colores indican la actividad metabólica o bioquímica relativa (el rojo indica alta actividad y el azul, baja). La figura de la izquierda muestra un cerebro normal y la figura de la derecha muestra el de una persona diagnosticada con la enfermedad de Alzheimer. La imagen del cerebro normal indica una actividad metabólica mucho mayor (una mayor fracción de áreas rojas y naranjas) (crédito: modificación de obras de los Institutos Nacionales de Salud (National Institutes of Health)).

La [Tabla 10.2](#) enumera algunos usos de diagnóstico médico de los radiofármacos, incluyendo los isótopos y los niveles típicos de actividad ( $A$ ). Una prueba diagnóstica habitual utiliza el yodo para obtener imágenes del tiroides, ya que el yodo se concentra en ese órgano. Otro diagnóstico nuclear habitual es la gammagrafía con talio para el sistema cardiovascular, que revela obstrucciones en las arterias coronarias y examina la actividad del corazón. Se puede utilizar la sal  $TlCl$  porque actúa como el  $NaCl$  y sigue a la sangre. Tenga en cuenta que la [Tabla 10.2](#) enumera muchos usos de diagnóstico para el  $^{99m}Tc$ , donde "m" representa el estado metaestable del núcleo del tecnecio. Este isótopo se utiliza en muchos compuestos para obtener imágenes del esqueleto, el corazón, los pulmones y los riñones. Aproximadamente el 80% de todos los radiofármacos contienen  $^{99m}Tc$  porque produce una radiación fácilmente identificable de rayos  $\gamma$  de 0,142-MeV y tiene una vida media corta de 6,0 horas, lo que reduce la exposición a la radiación.

Procedimiento, Isótopo		Actividad (mCi), donde $1 \text{ mCi} = 3,7 \times 10^7 \text{ Bq}$	Procedimiento, Isótopo	Actividad (mCi), donde $1 \text{ mCi} = 3,7 \times 10^7 \text{ Bq}$
<i>Escaneo cerebral</i>			<i>Escaneo tiroideo</i>	
$^{99m}Tc$		7,5	$^{131}I$	0,05
$^{15}O$ Tomografía por emisión de positrones (Positron Emission Tomography, PET)		50	$^{123}I$	0,07
<i>Escaneo pulmonar</i>			<i>Escaneo hepático</i>	
$^{133}Xe$		7,5	$^{198}Au$ (coloide)	0,1



Procedimiento, Isótopo	Actividad (mCi), donde $1 \text{ mCi} = 3,7 \times 10^7 \text{ Bq}$	Procedimiento, Isótopo	Actividad (mCi), donde $1 \text{ mCi} = 3,7 \times 10^7 \text{ Bq}$
$^{99\text{m}}\text{Tc}$	2	$^{99\text{m}}\text{Tc}$ (coloide)	2
<i>Imágenes de la acumulación de sangre cardíaca</i>		<i>Gammagrafía ósea</i>	
$^{131}\text{I}$	0,2	$^{85}\text{Sr}$	0,1
$^{99\text{m}}\text{Tc}$	2	$^{99\text{m}}\text{Tc}$	10
<i>Flujo cardiovascular arterial</i>		<i>Escaneo renal</i>	
$^{201}\text{Tl}$	3	$^{197}\text{Hg}$	0,1
$^{24}\text{Na}$	7,5	$^{99\text{m}}\text{Tc}$	1,5

**TABLA 10.2** Usos diagnósticos de los radiofármacos

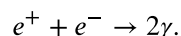
Los primeros detectores de radiación producían imágenes bidimensionales, como una foto tomada con una cámara. Sin embargo, para producir imágenes tridimensionales se puede utilizar una matriz circular de detectores que pueda girar. Esta técnica es similar a la utilizada en la tomografía computarizada (TC) de rayos X. Una de las aplicaciones de esta técnica es la denominada **tomografía computarizada de emisión monofotónica (Single-Photon-Emission Computed Tomography, SPECT)** (Figura 10.28). La resolución espacial de esta técnica es de aproximadamente 1 cm.



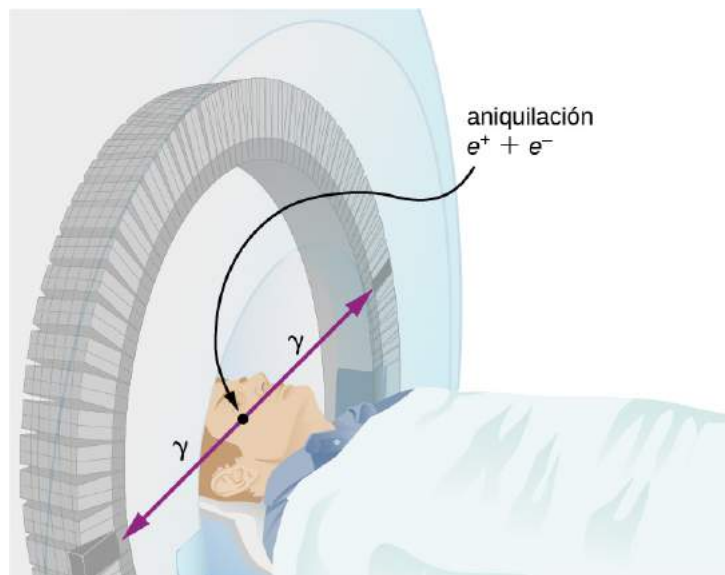
**FIGURA 10.28** La máquina de SPECT utiliza compuestos radiofarmacológicos para producir una imagen del cuerpo humano. La máquina aprovecha la física del decaimiento del pulso nuclear y las colisiones electrón-positrón (crédito: "Woldo"/Wikimedia Commons).



La mejora de la resolución de la imagen se consigue mediante una técnica conocida como **tomografía por emisión de positrones (PET)**. Esta técnica utiliza radioisótopos que decaen por radiación  $\beta^+$ . Cuando un positrón se encuentra con un electrón, estas partículas se aniquilan y producen dos fotones de rayos gamma. Esta reacción está representada por



Estos fotones de rayos  $\gamma$  tienen energías idénticas de 0,511-MeV y se alejan directamente unos de otros ([Figura 10.29](#)). Esta firma de decaimiento fácilmente identificable puede utilizarse para hallar la ubicación del isótopo radiactivo. Entre los ejemplos de isótopos emisores de  $\beta^+$  que se utilizan en la PET están  $^{11}\text{C}$ ,  $^{13}\text{N}$ ,  $^{15}\text{O}$ , y  $^{18}\text{F}$ . Los núcleos tienen la ventaja de funcionar como etiquetas para los compuestos naturales del cuerpo. Su resolución de 0,5 cm es mejor que la de la SPECT.



**FIGURA 10.29** Un sistema PET aprovecha los dos fotones idénticos de rayos  $\gamma$  producidos por la aniquilación positrón-electrón. Estos fotones de rayos  $\gamma$  se emiten en direcciones opuestas, de modo que se determina la línea a lo largo de la cual se emite cada par.

Los escáneres PET son especialmente útiles para examinar la anatomía y la función del cerebro. Por ejemplo, pueden utilizarse para controlar el uso del oxígeno y el agua por parte del cerebro, identificar las regiones de metabolismo reducido (relacionadas con la enfermedad de Alzheimer) y localizar las diferentes partes del cerebro responsables de la vista, el habla y la motricidad fina.

### INTERACTIVO

¿Es un tumor? Vea una [animación \(https://openstax.org/l/21simmagresimg\\_es\)](https://openstax.org/l/21simmagresimg_es) de una imagen de resonancia magnética (Magnetic Resonance Imaging, MRI) simplificada para ver si puede entenderla. Su cabeza está llena de pequeños transmisores de radio (los espines nucleares de los núcleos de hidrógeno de sus moléculas de agua). En una unidad de resonancia magnética, se hace que estas pequeñas radios transmitan sus posiciones, ofreciendo una imagen detallada del interior de la cabeza.

## Efectos biológicos

La radiación nuclear puede tener efectos tanto positivos como negativos en los sistemas biológicos. Sin embargo, también puede utilizarse para tratar e incluso curar el cáncer. ¿Cómo entendemos estos efectos? Para responder a esta pregunta, piense en las moléculas dentro de las células, en particular las moléculas de ADN.

Las células tienen largas moléculas de ADN de doble hélice que contienen códigos químicos que rigen la función y los procesos de la célula. La radiación nuclear puede alterar las características estructurales de la

cadena de ADN, lo que provoca cambios en el código genético. En las células humanas, podemos tener hasta un millón de casos individuales de daños en el ADN por célula al día. El ADN contiene códigos que comprueban si está dañado y puede repararse a sí mismo. Esta capacidad de reparación del ADN es vital para mantener la integridad del código genético y para el funcionamiento normal de todo el organismo. Debe estar activo constantemente y debe responder rápidamente. La tasa de reparación del ADN depende de varios factores, como el tipo y la edad de la célula. Si la radiación nuclear daña la capacidad de la célula para reparar el ADN, la célula puede

1. Retirarse a un estado irreversible de latencia (conocido como senescencia);
2. Suicidarse (lo que se conoce como muerte celular programada); o
3. Pasar a la división celular no regulada, que puede dar lugar a tumores y cánceres.

La radiación nuclear también puede dañar el cuerpo humano de muchas otras maneras. Por ejemplo, las dosis altas de radiación nuclear pueden causar quemaduras e incluso la pérdida del cabello.

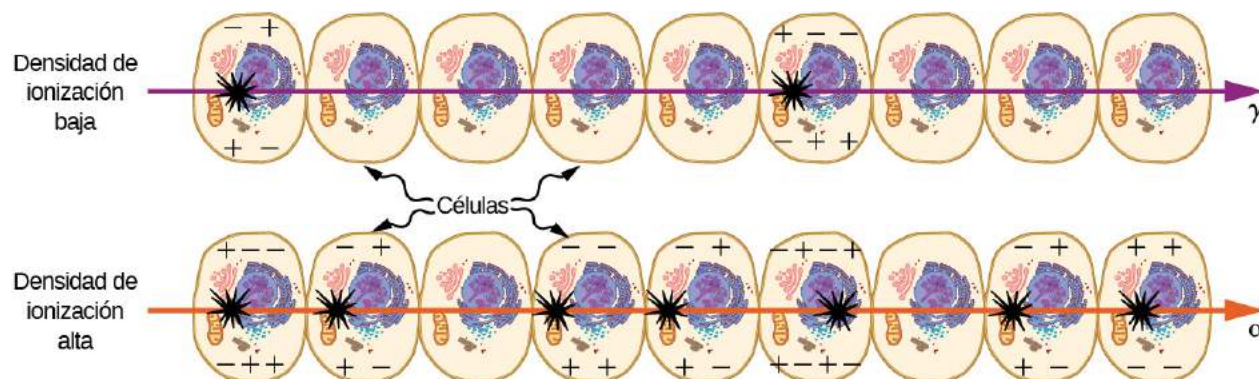
Los efectos biológicos de la radiación nuclear se expresan mediante muchas cantidades físicas diferentes y en muchas unidades distintas. Una unidad común para expresar los efectos biológicos de la radiación nuclear es el **rad** o **unidad de dosis de radiación**. Un rad equivale a 1/100 de julio de energía nuclear depositada por kilogramo de tejido, escrito como:

$$1 \text{ rad} = 0,01 \text{ J/kg.}$$

Por ejemplo, si una persona de 50,0 kg se expone todo su cuerpo a la radiación nuclear y absorbe 1,00 J, su dosis de radiación en todo el cuerpo es

$$(1,00 \text{ J}) / (50,0 \text{ kg}) = 0,0200 \text{ J/kg} = 2,00 \text{ rad.}$$

Las radiaciones nucleares dañan las células al ionizar los átomos de las mismas al atravesarlas (Figura 10.30). Los efectos de las radiaciones ionizantes dependen de la dosis en rads, pero también del tipo de radiación (alfa, beta, gamma o rayos X) y del tipo de tejido. Por ejemplo, si el rango de la radiación es corto, como ocurre con los rayos  $\alpha$ , entonces la ionización y el daño creado son más concentrados y más difíciles de reparar para el organismo. Para tener en cuenta estos efectos, definimos la **eficacia biológica relativa** (relative biological effectiveness, RBE). En la Tabla 10.3 se ofrecen ejemplos de valores de RBE para varios tipos de radiación nuclear ionizante.



**FIGURA 10.30** La imagen muestra la ionización ocasionada en las células por las radiaciones  $\alpha$  y  $\gamma$ . Debido a su rango menor, la ionización y el daño ocasionados por los rayos  $\alpha$  se concentran más y para el organismo es más difícil repararlos. Por lo tanto, la RBE en los rayos  $\alpha$  es mayor que la RBE en los rayos  $\gamma$ , aunque producen la misma cantidad de ionización con la misma energía.

Tipo y energía de la radiación	RBE <sup>[1]</sup>
Rayos X	1
Rayos $\gamma$	1

Tipo y energía de la radiación	RBE <sup>[1]</sup>
Rayos $\beta$ superiores a 32 keV	1
Rayos $\beta$ inferiores a 32 keV	1,7
Neutrones, térmicos a lentos (<20 keV)	2–5
Neutrones, rápidos (1-10 MeV)	10 (cuerpo), 32 (ojos)
Protones (1-10 MeV)	10 (cuerpo), 32 (ojos)
Rayos $\alpha$ procedentes del decaimiento radiactivo	10–20
Iones pesados de los aceleradores	10–20

**TABLA 10.3** Eficacia biológica relativa <sup>[1]</sup> Valores aproximados. Dificiles de determinar.

Una unidad de dosis que se relaciona estrechamente con los efectos en los tejidos biológicos se denomina **hombre equivalente a roentgen (Roentgen Equivalent Man, rem)** y se define como la dosis (en rads) multiplicada por la eficacia biológica relativa (RBE). Así, si una persona recibe una dosis en todo el cuerpo de 2,00 rad de radiación  $\gamma$ , la dosis en rem sería de (2,00 rad) (1) = 2,00 rem para todo el cuerpo. Si la persona recibió una dosis en todo el cuerpo de 2,00 rad de radiación  $\alpha$ , entonces la dosis en rem sería de (2,00 rad) (20) = 40,0 rem para todo el cuerpo. Los rayos  $\alpha$  tendrían un efecto 20 veces mayor en la persona que los rayos  $\gamma$  para la misma energía depositada. El equivalente en el Sistema de Unidades (System of Units, SI) del rem, y el término más estándar, es el **sievert (Sv)**:

$$1 \text{ Sv} = 100 \text{ rem.}$$

Las RBE mostradas en la [Tabla 10.3](#) son aproximadas pero reflejan una comprensión de la radiación nuclear y su interacción con el tejido vivo. Por ejemplo, se sabe que los neutrones causan más daño que los rayos  $\gamma$ , aunque ambos son neutros y tienen rangos grandes, debido a la radiación secundaria. Cualquier dosis inferior a 100 mSv (10 rem) se denomina **dosis baja**, de 0,1 Sv a 1 Sv (de 10 a 100 rem) se denomina **dosis moderada**, y toda dosis superior a 1 Sv (100 rem) se denomina **dosis alta**. Es difícil determinar si una persona ha estado expuesta a menos de 10 mSv.

Los efectos biológicos de los distintos niveles de radiación nuclear en el cuerpo humano se recogen en la [Tabla 10.4](#). El primer indicio de que una persona ha estado expuesta a la radiación es un cambio en el recuento sanguíneo, lo cual no es sorprendente, ya que las células sanguíneas son las que se reproducen más rápidamente en el cuerpo. A dosis más altas, se observan náuseas y pérdida de cabello, lo que puede deberse a la interferencia con la reproducción celular. Las células del revestimiento del sistema digestivo también se reproducen rápidamente y su destrucción provoca náuseas. Cuando el crecimiento de las células capilares se ralentiza, los folículos pilosos se adelgazan y se rompen. Las dosis altas causan una importante muerte celular en todos los sistemas, pero las dosis más bajas que causan muertes lo hacen debilitando el sistema inmunitario mediante la pérdida de glóbulos blancos.

Dosis en Sv <sup>[1]</sup>	Efecto
0–0,10	Ningún efecto observable.
0,1–1	Disminución leve a moderada del recuento de glóbulos blancos.
0,5	Esterilidad temporal; 0,35 para las mujeres, 0,50 para los hombres.

Dosis en Sv <sup>[1]</sup>	Efecto
1-2	Reducción significativa del recuento de células sanguíneas, náuseas y vómitos breves. Rara vez es mortal.
2-5	Náuseas, vómitos, pérdida de cabello, daños graves en la sangre, hemorragias, muerte.
4,5	Letal para el 50% de la población en los 32 días siguientes a la exposición si no se trata.
5-20	Los peores efectos se deben al mal funcionamiento del intestino delgado y del sistema sanguíneo. Supervivencia limitada.
>20	Fatal en pocas horas debido al colapso del sistema nervioso central.

**TABLA 10.4** Efectos inmediatos de la radiación (adultos, cuerpo entero, exposición única) <sup>[1]</sup> Multiplicar por 100 para obtener la dosis en rem.

### Fuentes de radiación

El ser humano también está expuesto a muchas fuentes de radiación nuclear. En la [Tabla 10.5](#) se ofrece un resumen de las dosis medias de radiación de las distintas fuentes por países. La Tierra emite radiación debido a los isótopos de uranio, torio y potasio. Los niveles de radiación de estas fuentes dependen de la ubicación y pueden variar en un factor de 10. Los fertilizantes contienen isótopos de potasio y uranio, que digerimos en los alimentos que consumimos. Los fertilizantes tienen más de 3.000 Bq/kg de radioactividad, en comparación con los 66 Bq/kg del carbono 14.

Fuente	Dosis (mSv/a) <sup>[1]</sup>			
	Australia	Alemania	EE. UU	Mundial
Radiación natural - externa				
Rayos cósmicos	0,30	0,28	0,30	0,39
Tierra, materiales de construcción	0,40	0,40	0,30	0,48
Gas radón	0,90	1,1	2,0	1,2
Radiación natural - interna				
<sup>40</sup> K, <sup>14</sup> C, <sup>226</sup> Ra	0,24	0,28	0,40	0,29
Radiación artificial				
Atención médica y dental	0,80	0,90	0,53	0,40
TOTAL	2,6	3,0	3,5	2,8

**TABLA 10.5** Fuentes de radiación de fondo y dosis medias <sup>[1]</sup> Multiplique por 100 para obtener las dosis en mrem/y.

Las consultas médicas también son una fuente de radiación nuclear. Una muestra de las dosis de radiación nuclear más comunes se encuentra en la [Tabla 10.6](#). Estas dosis son generalmente bajas y pueden reducirse aún más con técnicas mejoradas y detectores más sensibles. Con la posible excepción de las radiografías dentales de rutina, el uso médico de la radiación nuclear se utiliza solo cuando el riesgo-beneficio es favorable. Las radiografías de tórax proporcionan las dosis más bajas -alrededor de 0,1 mSv al tejido afectado, con menos de 5% de dispersión en los tejidos de los que no se obtiene una imagen directa. Otros procedimientos de rayos X alcanzan unos 10 mSv en una TC, y unos 5 mSv (0,5 rem) por radiografía dental, y en ambos casos solo afectan al tejido fotografiado. Las imágenes médicas con radiofármacos dan dosis que van de 1 a 5 mSv, generalmente localizadas.

Procedimiento	Dosis efectiva (mSv)
Pecho	0,02
Dientes	0,01
Cráneo	0,07
Pierna	0,02
Mamografía	0,40
Enema de bario	7,0
Serie gastrointestinal superior	3,0
TC de cabeza	2,0
TC de abdomen	10,0

**TABLA 10.6** Dosis típicas recibidas durante los exámenes de diagnóstico por rayos X



### EJEMPLO 10.12

#### ¿Qué cantidad de masa de $^{137}\text{Cs}$ escapó de Chernóbil?

El accidente de Chernóbil en Ucrania (anteriormente parte la Unión Soviética) expuso a la población circundante a una gran cantidad de radiación a través del decaimiento de  $^{137}\text{Cs}$ . El nivel de radioactividad inicial era de aproximadamente  $A = 6,0 \text{ MCi}$ . Calcule la masa total de  $^{137}\text{Cs}$  de este accidente.

#### Estrategia

El número total de núcleos,  $N$ , puede determinarse a partir de la vida media y la actividad conocidas del  $^{137}\text{Cs}$  (30,2 años). La masa se puede calcular a partir de  $N$  utilizando el concepto de mol.

#### Solución

Resolviendo la ecuación  $A = \frac{0,693 N}{t_{1/2}}$  para  $N$  da

$$N = \frac{A t_{1/2}}{0,693}$$

Introduciendo los valores dados produce

$$N = \frac{(6,0 \text{ MCi})(30,2 \text{ y})}{0,693}$$

Para convertir de curies a becquerels y de años a segundos, escribimos

$$N = \frac{(6,0 \times 10^6 \text{ Ci}) (3,7 \times 10^{10} \text{ Bq/Ci}) (30,2 \text{ y}) (3,16 \times 10^7 \text{ s/y})}{0,693} = 3,1 \times 10^{26}.$$

Un mol de un nucleido  ${}^A\text{X}$  tiene una masa de  $A$  gramos, por lo que un mol de  ${}^{137}\text{Cs}$  tiene una masa de 137 g. Un mol tiene  $6,02 \times 10^{23}$  núcleos. Por lo tanto, la masa de  ${}^{137}\text{Cs}$  liberada fue

$$m = \left( \frac{137 \text{ g}}{6,02 \times 10^{23}} \right) (3,1 \times 10^{26}) = 70 \times 10^3 \text{ g} = 70 \text{ kg}.$$

### Importancia

La masa de  ${}^{137}\text{Cs}$  del accidente de Chernóbil es un material pequeño comparado con la cantidad típica de combustible utilizado en un reactor nuclear. Sin embargo, unas 250 personas fueron ingresadas en los hospitales locales inmediatamente después del accidente con un diagnóstico de síndrome agudo de radiación. Recibieron dosis de radiación externa de entre 1 y 16 Sv. Si nos referimos a los efectos biológicos en la [Tabla 10.4](#), estas dosis son extremadamente peligrosas. Se calcula que el número de víctimas mortales fue de unas 4000 personas, principalmente debido al cáncer inducido por la radiación.

### ✓ **COMPRUEBE LO APRENDIDO 10.7**

La radiación se propaga en todas las direcciones desde su fuente, como la radiación electromagnética de una bombilla. ¿El concepto de *actividad* es más parecido al de potencia, intensidad o luminosidad?

## Revisión Del Capítulo

### Términos Clave

**actividad** magnitud de la tasa de decaimiento de los nucleídos radioactivos.

**antielectrones** otro término para los positrones

**antineutrino** antipartícula del neutrino de un electrón en el decaimiento los rayos  $\beta^-$

**becquerel (Bq)** unidad del SI para la tasa de decaimiento de un material radioactivo, igual a 1 decaimiento/segundo.

**cadena protón-protón** reacciones combinadas que fusionan núcleos de hidrógeno para producir núcleos de He.

**constante de decaimiento** cantidad inversamente proporcional a la vida media y que se utiliza en la ecuación del número de núcleos en función del tiempo.

**criticidad** condición en la que una reacción en cadena se convierte fácilmente en autosuficiente

**curie (Ci)** unidad de tasa de decaimiento, o la actividad de 1 g de  $^{226}\text{Ra}$ , igual a  $3,70 \times 10^{10}$  Bq

**datación por carbono 14** método para determinar la edad de un tejido anteriormente vivo utilizando la relación  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$

**datación radiométrica** aplicación del decaimiento radioactivo en el que la edad de un material se determina por la cantidad de radioactividad de un tipo particular que se produce.

**decaimiento** proceso por el cual un núcleo atómico individual de un átomo inestable pierde masa y energía emitiendo partículas ionizantes.

**decaimiento alfa** decaimiento nuclear radiactivo asociado a la emisión de una partícula alfa

**decaimiento beta** decaimiento nuclear radiactivo asociado a la emisión de una partícula beta

**decaimiento gama** decaimiento nuclear radiactivo asociado a la emisión de radiación gama

**defecto de masa** diferencia entre la masa de un núcleo y la masa total de sus nucleones constituyentes.

**dosis alta** dosis de radiación superior a 1 Sv (100 rem)

**dosis baja** dosis de radiación inferior a 100 mSv (10 rem)

**dosis moderada** dosis de radiación de 0,1 Sv a 1 Sv (10 a 100 rem)

**eficacia biológica relativa (RBE)** número que expresa la cantidad relativa de daño que una cantidad fija de radiación ionizante de un tipo determinado puede infligir a los tejidos biológicos

**elemento transuránico** elemento que se encuentra más allá del uranio en la tabla

periódica

**energía de enlace (BE)** energía necesaria para descomponer un núcleo en sus protones y neutrones constituyentes.

**energía de enlace por nucleón (BEN)** energía necesaria para eliminar un nucleón de un núcleo.

**fiisión** división de un núcleo.

**fuerza nuclear fuerte** fuerza que une a los nucleones en el núcleo.

**fusión nuclear** proceso de combinación de núcleos más ligeros para formar núcleos más pesados.

**hombre equivalente a roentgen (rem)** unidad de dosis estrechamente relacionada con los efectos en el tejido biológico.

**isótopos** núcleos con el mismo número de protones pero diferente número de neutrones.

**ley de decaimiento radioactivo** describe la disminución exponencial de los núcleos progenitores en una muestra radioactiva.

**marcadores radioactivos** medicamentos especiales (radiofármacos) que permiten a los médicos seguir el movimiento de otros medicamentos en el cuerpo.

**masa atómica** masa total de los protones, neutrones y electrones de un átomo.

**masa crítica** masa mínima necesaria de un nucleído determinado para que se produzca la fiisión autosostenida.

**modelo de la gota líquida** modelo de núcleo (solo para entender algunas de sus características) en el que los nucleones de un núcleo actúan como los átomos de una gota.

**neutrino** partícula elemental subatómica que no tiene carga eléctrica neta

**nucleído** núcleo

**núcleo atómico** grupo de nucleones estrechamente concentrados en el centro de un átomo.

**núcleo hija** núcleo producido por el decaimiento de un núcleo padre

**núcleo padre** núcleo original antes del decaimiento

**nucleones** protones y neutrones dentro del núcleo de un átomo.

**nucleosíntesis** proceso de fusión por el que se cree que se crearon todos los elementos de la Tierra.

**número atómico** número de protones en un núcleo.

**número de masa** número de nucleones en un



núcleo.

**número de neutrones** número de neutrones en un núcleo.

**positrón** electrón con carga positiva

**radio del núcleo** el radio de un núcleo se define como  $r = r_0 A^{1/3}$

**radioactividad** emisión espontánea de radiación de los núcleos.

**radiofármaco** compuesto utilizado para la obtención de imágenes médicas

**rayos alfa ( $\alpha$ )** uno de los tipos de rayos emitidos por el núcleo de un átomo como partículas alfa

**rayos beta (los rayos  $\beta$ )** uno de los tipos de rayos emitidos por el núcleo de un átomo como partículas beta

**rayos gama ( $\gamma$ )** uno de los tipos de rayos emitidos desde el núcleo de un átomo como partículas gama

**reactor de fusión nuclear** reactor nuclear que utiliza la cadena de fusión para producir energía.

**reactor reproductor** reactor que está diseñado para hacer plutonio.

**serie de decaimiento** serie de decaimientos

nucleares que terminan en un núcleo estable

**sievert (Sv)** Equivalente del SI del rem

**tabla de nucleídos** gráfico que comprende los núcleos estables e inestables.

**tiempo de vida** tiempo medio de existencia de un núcleo antes de su decaimiento.

**tomografía computarizada por emisión monofotónica (SPECT)** tomografía realizada con radiofármacos que emiten radiación  $\gamma$ .

**tomografía por emisión de positrones (PET)** técnica de tomografía que utiliza emisores  $\beta^+$  y detecta los dos rayos  $\gamma$ , producidos por la aniquilación, ayudando a la localización de la fuente.

**unidad de dosis de radiación (rad)** energía ionizante depositada por kilogramo de tejido.

**unidad de masa atómica** unidad utilizada para expresar la masa de un núcleo individual, donde  $1u = 1,66054 \times 10^{-27}$  kg

**vida media** tiempo para que la mitad de los núcleos originales decaigan (o la mitad de los núcleos originales permanezcan).

### Ecuaciones Clave

Número de masa atómica	$A = Z + N$
Formato estándar para expresar un isótopo	${}^A_Z X$
Radio nuclear, donde $r_0$ es el radio de un solo protón.	$r = r_0 A^{1/3}$
Defecto de masa	$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{nuc}}$
Energía de enlace	$E = (\Delta m)c^2$
Energía de enlace por nucleón	$BE N = \frac{E_b}{A}$
Tasa de decaimiento radiactivo	$-\frac{dN}{dt} = \lambda N$
Ley de decaimiento radiactivo	$N = N_0 e^{-\lambda t}$
Constante de decaimiento	$\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}}$
Tiempo de vida de una sustancia	$\bar{T} = \frac{1}{\lambda}$
Actividad de una sustancia radiactiva	$A = A_0 e^{-\lambda t}$
Actividad de una sustancia radiactiva (forma lineal)	$\ln A = -\lambda t + \ln A_0$

Decaimiento alfa	${}^A_ZX \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}X + {}^4_2\text{He}$
Decaimiento beta	${}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z+1}X + {}^0_{-1}e + \bar{\nu}$
Emisión de positrones	${}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z-1}X + {}^0_{+1}e + \nu$
Decaimiento gamma	${}^A_ZX^* \rightarrow {}^A_ZX + \gamma$

## Resumen

### 10.1 Propiedades de los núcleos

- El núcleo atómico está compuesto por protones y neutrones.
- El número de protones en el núcleo viene dado por el número atómico,  $Z$ . El número de neutrones en el núcleo es el número de neutrones,  $N$ . El número de nucleones es el número de masa,  $A$ .
- Los núcleos atómicos con el mismo número atómico  $Z$ , pero diferente número de neutrones  $N$ , son isótopos del mismo elemento.
- La masa atómica de un elemento es el promedio ponderado de las masas de sus isótopos.

### 10.2 Energía de enlace nuclear

- El defecto de masa de un núcleo es la diferencia entre la masa total de un núcleo y la suma de las masas de todos sus nucleones constituyentes.
- La energía de enlace (BE) de un núcleo es igual a la cantidad de energía liberada en la formación del núcleo, o el defecto de masa multiplicado por la velocidad de la luz al cuadrado.
- Un gráfico de la energía de enlace por nucleón (BEN) en función del número atómico  $A$  implica que los núcleos divididos o combinados liberan una enorme cantidad de energía.
- La energía de enlace de un nucleón en un núcleo es parecida a la energía de ionización de un electrón en un átomo.

### 10.3 Decaimiento radioactivo

- En el decaimiento de una sustancia radioactiva, si la constante de decaimiento ( $\lambda$ ) es grande, la vida media es pequeña, y viceversa.
- La ley de decaimiento radioactivo,  $N = N_0 e^{-\lambda t}$ , utiliza las propiedades de las sustancias radioactivas para estimar la edad de una sustancia.
- El carbono radioactivo tiene la misma química que el carbono estable, por lo que se mezcla en la ecósfera y acaba formando parte de todo

organismo vivo. Al comparar la abundancia de  $^{14}\text{C}$  en un artefacto con la abundancia normal en el tejido vivo, es posible determinar la edad del artefacto.

### 10.4 Reacciones nucleares

- Los tres tipos de radiación nuclear son rayos alfa ( $\alpha$ ), rayos beta (los rayos  $\beta$ ), y los rayos gama ( $\gamma$ ).
- Representamos el decaimiento  $\alpha$  simbólicamente por  ${}^A_ZX \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}X + {}^4_2\text{He}$ . Hay dos tipos de decaimiento los rayos  $\beta$ : un electrón (los rayos  $\beta_-$ ) o un positrón (los rayos  $\beta_+$ ) es emitido por un núcleo. El decaimiento  $\gamma$  se representa simbólicamente por  ${}^A_ZX^* \rightarrow {}^A_ZX + \gamma$ .
- Cuando un núcleo pesado decae en uno más ligero, el núcleo hija más ligero puede convertirse en el núcleo padre para el siguiente decaimiento, y así sucesivamente, produciendo una serie de decaimiento.

### 10.5 Fisión

- La fisión nuclear es un proceso en el que la suma de las masas de los núcleos del producto es menor que las masas de los reactivos.
- Los cambios de energía en una reacción de fisión nuclear pueden entenderse en términos de la curva de energía de enlace por nucleón.
- La producción de isótopos nuevos o diferentes por transformación nuclear se denomina reproducción, y los reactores diseñados para este fin se llaman reactores reproductores.

### 10.6 Fusión nuclear

- La fusión nuclear es una reacción en la que dos núcleos se combinan para formar un núcleo mayor; se libera energía cuando los núcleos ligeros se fusionan para formar núcleos de masa media.
- La cantidad de energía liberada por una

reacción de fusión se conoce como valor  $Q$ .

- La fusión nuclear explica la reacción entre el deuterio y el tritio que produce una bomba de fusión (o de hidrógeno); la fusión también explica la producción de energía en el Sol, el proceso de nucleosíntesis y la creación de los elementos pesados.

### 10.7 Usos médicos y efectos biológicos de la radiación nuclear

- La tecnología nuclear se utiliza en medicina para localizar y estudiar los tejidos enfermos mediante fármacos especiales llamados radiofármacos. Los marcadores radioactivos se utilizan para identificar células cancerosas en los huesos, tumores cerebrales y la enfermedad de Alzheimer, y para controlar el funcionamiento de los órganos del cuerpo, como el flujo sanguíneo, la actividad del músculo

cardíaco y la captación de yodo en la glándula tiroides.

- Los efectos biológicos de las radiaciones ionizantes se deben a dos efectos que tienen sobre las células: la interferencia con la reproducción celular y la destrucción de la función celular.
- Las fuentes comunes de radiación incluyen la emitida por la Tierra debido a los isótopos de uranio, torio y potasio; la radiación natural de los rayos cósmicos, los suelos y los materiales de construcción, y las fuentes artificiales de las pruebas de diagnóstico médico y dental.
- Los efectos biológicos de las radiaciones nucleares se expresan a través de muchas cantidades físicas diferentes y en muchas unidades distintas, incluida la unidad de rad o dosis de radiación.

## Preguntas Conceptuales

### 10.1 Propiedades de los núcleos

1. Defina y distinga claramente los términos neutrón, nucleón, núcleo y nucleído.
2. ¿Qué son los isótopos? ¿Por qué los isótopos del mismo átomo comparten las mismas propiedades químicas?

### 10.2 Energía de enlace nuclear

3. Explique por qué un sistema enlazado debe tener menos masa que sus componentes. ¿Por qué no se observa esto tradicionalmente, por ejemplo, en un edificio de ladrillos?
4. ¿Por qué el número de neutrones es mayor que el número de protones en los núcleos estables que tienen un  $A$  superior a unos 40? ¿Por qué este efecto es más pronunciado para los núcleos más pesados?
5. Para obtener el valor más preciso de la energía de enlace por nucleón, es importante tener en cuenta las fuerzas entre nucleones en la superficie del núcleo. ¿Los efectos de superficie aumentarán o disminuirán las estimaciones de la  $BEN$ ?

### 10.3 Decaimiento radioactivo

6. ¿Cómo se relaciona la tasa de actividad inicial de una sustancia radioactiva con su vida media?
7. En la datación del carbono descrita en este capítulo, ¿qué suposición importante se hace sobre la variación temporal de la intensidad de

los rayos cósmicos?

### 10.4 Reacciones nucleares

8. ¿Cuál es la diferencia clave y la similitud clave entre decaimiento beta (los rayos  $\beta^-$ ) y decaimiento alfa?
9. ¿Cuál es la diferencia entre rayos  $\gamma$  y los rayos X característicos y luz visible?
10. ¿Qué características de la radioactividad demuestran que es de origen nuclear y no atómico?
11. Considere la [Figura 10.12](#). Si se sustituye el campo magnético por un campo eléctrico apuntando hacia la página, en qué direcciones se doblan los rayos  $\alpha^-$ , los rayos  $\beta_+^+$ , y  $\gamma$ ?
12. ¿Por qué está fundido el núcleo de la Tierra?

### 10.5 Fisión

13. ¿Debería una bomba atómica llamarse realmente bomba *nuclear*?
14. ¿Por qué se produce una reacción en cadena durante una reacción de fisión?
15. ¿En qué sentido se parece un núcleo atómico a una gota de líquido?

### 10.6 Fusión nuclear

16. Explique la diferencia entre la fisión nuclear y la fusión nuclear.
17. ¿Por qué la fusión de núcleos ligeros en núcleos

más pesados libera energía?

### 10.7 Usos médicos y efectos biológicos de la radiación nuclear

- ¿Por qué es más precisa una PET que una SPECT?
- Los isótopos que emiten radiación  $\alpha$  son

## Problemas

### 10.1 Propiedades de los núcleos

- Calcule los números atómicos, números de masa y números de neutrones de (a)  ${}^{58}_{29}\text{Cu}$ , (b)  ${}^{24}_{11}\text{Na}$ , (c)  ${}^{210}_{84}\text{Po}$ , (d)  ${}^{45}_{20}\text{Ca}$ , y (e)  ${}^{206}_{82}\text{Pb}$ .
- La plata tiene dos isótopos estables. El núcleo,  ${}^{107}_{47}\text{Ag}$ , tiene una masa atómica de 106,905095 g/mol con una abundancia de 51,83%; mientras que  ${}^{109}_{47}\text{Ag}$  tiene una masa atómica de 108,904754 g/mol con una abundancia de 48,17%. Calcule la masa atómica del elemento plata.
- La masa ( $M$ ) y el radio ( $r$ ) de un núcleo pueden expresarse en términos del número de masa,  $A$ . (a) Demuestre que la densidad de un núcleo es independiente de  $A$ . (b) Calcule la densidad de un núcleo de oro (Au). Compare su respuesta con la del hierro (Fe).
- Una partícula tiene una masa igual a 10 u. Si esta masa se convierte completamente en energía, ¿cuánta energía se libera? Exprese su respuesta en mega-electronvoltios (MeV). (Recordemos que  $1\text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19}\text{ J}$ ).
- Halle la longitud de un lado de un cubo que tiene una masa de 1,0 kg y la densidad de la materia nuclear.
- El detalle que se puede observar con una sonda está limitado por su longitud de onda. Calcule la energía de una partícula que tiene una longitud de onda de  $1 \times 10^{-16}\text{ m}$ , lo suficientemente pequeño como para detectar detalles de una décima parte del tamaño de un nucleón.

### 10.2 Energía de enlace nuclear

- ¿Cuánta energía se liberaría si seis átomos de hidrógeno y seis neutrones se combinaran para formar  ${}^{12}_6\text{C}$ ?
- Halle el defecto de masa y la energía de enlace para el núcleo de helio-4.
- ${}^{56}\text{Fe}$  es uno de los nucleídos más ligados. Constituye más del 90% del hierro natural. Tenga en cuenta que el  ${}^{56}\text{Fe}$  tiene un número

relativamente seguros fuera del cuerpo y excepcionalmente peligrosos dentro. Explique por qué.

- Las radiaciones ionizantes pueden perjudicar la capacidad de la célula para reparar el ADN. ¿Cuáles son las tres formas en que la célula puede responder?

par de protones y neutrones. Calcule la energía de enlace por nucleón para el  ${}^{56}\text{Fe}$  y compárelo con el valor aproximado obtenido del gráfico en la [Figura 10.7](#).

- ${}^{209}\text{Bi}$  es el nucleído estable más pesado, y su BEN es baja en comparación con los nucleídos de masa media. Calcule la BEN de este núcleo y compárela con el valor aproximado obtenido del gráfico en la [Figura 10.7](#).
- (a) Calcule la BEN para  ${}^{235}\text{U}$ , el más raro de los dos isótopos de uranio más comunes; (b) Calcule la BEN para  ${}^{238}\text{U}$ . (La mayor parte del uranio es  ${}^{238}\text{U}$ ).
- El hecho de que la BEN alcance su punto máximo alrededor de  $A = 60$  implica que el *alcance* de la fuerza nuclear fuerte es aproximadamente el diámetro de este núcleo. (a) Calcule el diámetro del núcleo  $A = 60$ . (b) Compare la BEN para  ${}^{58}\text{Ni}$  y  ${}^{90}\text{Sr}$ . El primero es uno de los nucleídos más enlazados, mientras que el segundo es más grande y menos enlazado.

### 10.3 Decaimiento radioactivo

- Se obtiene una muestra de material radioactivo de una roca muy antigua. Un gráfico de  $\ln A$  en función de  $t$  arroja un valor de pendiente de  $-10^{-9}\text{ s}^{-1}$  (vea la [Figura 10.10\(b\)](#)). ¿Cuál es la vida media de este material?
- Demuestre que:  $\bar{T} = \frac{1}{\lambda}$ .
- La vida media del estroncio  ${}^{91}_{38}\text{Sr}$  es de 9,70 h. Halle (a) su constante de decaimiento y (b) para una muestra inicial de 1,00 g, la actividad después de 15 horas.
- Una muestra de carbono 14 puro ( $T_{1/2} = 5730\text{ y}$ ) tiene una actividad de  $1,0\ \mu\text{ Ci}$ . ¿Cuál es la masa de la muestra?
- Una muestra radioactiva contiene inicialmente  $2,40 \times 10^{-2}\text{ mol}$  de un material radioactivo cuya vida media es de 6,00 h. ¿Cuántos moles de material radioactivo quedan después de 6,00 h? ¿Después de 12,0 h? ¿Después de 36,0 h?

38. Se descubre una antigua hoguera durante una excavación arqueológica. Su carbón vegetal contiene menos de 1/1000 de la cantidad normal de  $^{14}\text{C}$ . Estime la edad mínima del carbón vegetal, teniendo en cuenta que  $2^{10} = 1024$ .
39. Calcule la actividad  $R$ , en curies de 1,00 g de  $^{226}\text{Ra}$ . (b) Explique por qué su respuesta no es de exactamente 1,00 Ci, dado que originalmente se suponía que el curie era exactamente la actividad de un gramo de radio.
40. El uranio natural se compone de  $^{235}\text{U}$  (porcentaje de abundancia = 0,7200%,  $\lambda = 3,12 \times 10^{-17}/\text{s}$ ) y  $^{238}\text{U}$  (porcentaje de abundancia = 99,27%,  $\lambda = 4,92 \times 10^{-18}/\text{s}$ ). ¿Cuáles fueron los valores de la abundancia porcentual de  $^{235}\text{U}$  y  $^{238}\text{U}$  cuando se formó la Tierra hace  $4,5 \times 10^9$  años?
41. Los aviones de la Segunda Guerra Mundial tenían instrumentos con diales pintados con radio. La actividad de uno de estos instrumentos fue  $1,0 \times 10^5$  Bq cuando era nuevo. (a) ¿Qué masa de  $^{226}\text{Ra}$  estaba presente? (b) Después de algunos años, los fósforos de los diales se deterioraron químicamente, pero el radio no se escapó. ¿Cuál es la actividad de este instrumento 57,0 años después de su fabricación?
42. Los rayos  $^{210}\text{Po}$  utilizada en un laboratorio de física se marcó con una actividad de  $1,0 \mu\text{Ci}$  en la fecha en que se preparó. Una estudiante mide la radioactividad de esta fuente con un contador Geiger y observa 1500 recuentos por minuto. Se da cuenta de que la fuente se preparó 120 días antes de su laboratorio. ¿Qué fracción de los decaimientos observa con su aparato?
43. Los aviones disparan proyectiles perforantes con núcleos de uranio empobrecido contra los tanques. (La alta densidad del uranio los hace eficaces). El uranio se llama empobrecido porque se eliminó su  $^{235}\text{U}$  para su uso por el reactor y es  $^{238}\text{U}$  casi puro. El uranio empobrecido ha sido calificado erróneamente como no radioactivo. Para demostrar que eso es incorrecto: (a) Calcule la actividad de 60,0 g de  $^{238}\text{U}$  puro. (b) Calcule la actividad de 60,0 g de uranio natural, ignorando la  $^{234}\text{U}$  y todos los nucleídos hija.
44.  $^{249}\text{Cf}$  sufre un decaimiento alfa. (a) Escriba la ecuación de la reacción. (b) Halle la energía liberada en el decaimiento.
45. (a) Calcule la energía liberada en el decaimiento  $\alpha$  de  $^{238}\text{U}$ . (b) ¿Qué fracción de la masa de un solo  $^{238}\text{U}$  se destruye en el decaimiento? La masa de  $^{234}\text{Th}$  es 234,043593 u. (c) Aunque la pérdida de masa fraccionada es grande para un solo núcleo, es difícil de observar para una muestra macroscópica entera de uranio. ¿Por qué?
46. Las partículas los rayos  $\beta$  emitidas en el decaimiento de  $^3\text{H}$  (tritio) interactúan con la materia para crear luz en un cartel de salida que brilla en la oscuridad. En el momento de la fabricación, dicho cartel contiene 15,0 Ci de  $^3\text{H}$ . (a) ¿Cuál es la masa del tritio? (b) ¿Cuál es su actividad 5,00 años después de su fabricación?
47. (a) Escriba la versión completa de la ecuación de decaimiento los rayos  $\beta$  para  $^{90}\text{Sr}$ , un importante producto de desecho de los reactores nucleares. (b) Halle la energía liberada en el decaimiento.
48. Escriba una reacción de decaimiento nuclear los rayos  $\beta$  que produce el núcleo  $^{90}\text{Y}$ . (Pista: El nucleído padre es un importante producto de desecho de los reactores y tiene una química similar a la del calcio, por lo que se concentra en los huesos si se ingiere).
49. Escriba la ecuación de decaimiento completa en la notación  $^A_Z\text{X}_N$  completa para el decaimiento beta (los rayos  $\beta$ ) de  $^3\text{H}$  (tritio), un isótopo manufacturado del hidrógeno utilizado en algunas pantallas de relojes digitales, y fabricado principalmente para su uso en bombas de hidrógeno.
50. Si un trozo de plomo de 1,50 cm de grosor puede absorber 90,0% de los rayos de una fuente radiactiva, ¿cuántos centímetros de plomo se necesitan para absorber todo menos 0,100% de los rayos?
51. Un electrón puede interactuar con un núcleo a través del proceso de decaimiento beta:  

$$^A_Z\text{X} + e^- \rightarrow Y + \nu_e.$$
 (a) Escriba la ecuación de reacción completa para la captura de electrones por  $^7\text{Be}$ .  
 (b) Calcule la energía liberada.
52. (a) Escriba la ecuación de reacción completa para la captura de electrones por  $^{15}\text{O}$ .  
 (b) Calcule la energía liberada.
53. Se ha observado un modo de decaimiento poco frecuente en el que  $^{222}\text{Ra}$  emite un núcleo  $^{14}\text{C}$ . (a) La ecuación de decaimiento es  $^{222}\text{Ra} \rightarrow ^A\text{X} + ^{14}\text{C}$ . Identifique el nucleído  $^A\text{X}$ .

#### 10.4 Reacciones nucleares

(b) Halle la energía emitida en el decaimiento. La masa de  $^{222}\text{Ra}$  es 222,015353 u.

### 10.5 Fisión

54. Un gran reactor de potencia que ha estado en funcionamiento durante algunos meses se apaga, pero la actividad residual en el núcleo sigue produciendo 150 MW de potencia. Si la energía media por decaimiento de los productos de fisión es de 1,00 MeV, ¿cuál es la actividad del núcleo?
55. (a) Calcule la energía liberada en esta fisión inducida por neutrones poco frecuente  $n + ^{238}\text{U} \rightarrow ^{96}\text{Sr} + ^{140}\text{Xe} + 3n$ , dado que  $m(^{96}\text{Sr}) = 95,921750 \text{ u}$  y  $m(^{140}\text{Xe}) = 139,92164 \text{ u}$ .  
(b) Este resultado es unos 6 MeV mayor que el resultado de la fisión espontánea. ¿Por qué?  
(c) Verifique que el número total de nucleones y la carga total se conservan en esta reacción.
56. (a) Calcule la energía liberada en la reacción de fisión inducida por neutrones  $n + ^{235}\text{U} \rightarrow ^{92}\text{Kr} + ^{142}\text{Ba} + 2n$ , dado que  $m(^{92}\text{Kr}) = 91,926269 \text{ u}$  y  $m(^{142}\text{Ba}) = 141,916361 \text{ u}$ . (b) Confirme que el número total de nucleones y la carga total se conservan en esta reacción.
57. La potencia eléctrica de un gran reactor nuclear es de 900 MW. Tiene un 35,0% de eficiencia en la conversión de energía nuclear en energía eléctrica.  
(a) ¿Cuál es la potencia térmica nuclear en megavatios?  
(b) ¿Cuántos núcleos  $^{235}\text{U}$  se fisionan cada segundo, suponiendo que la fisión media produce 200 MeV?  
(c) ¿Qué masa de  $^{235}\text{U}$  se fisiona en 1 año de funcionamiento a plena potencia?
58. Calcule la energía total liberada si 1,00 kg de  $^{235}_{92}\text{U}$  se sometiera a la fisión.

### 10.6 Fusión nuclear

59. Verifique que el número total de nucleones y la carga total se conservan en cada una de las siguientes reacciones de fusión en la cadena protón-protón.  
(i)  $^1\text{H} + ^1\text{H} \rightarrow ^2\text{H} + e^+ + \nu_e$ ,  
(ii)  $^1\text{H} + ^2\text{H} \rightarrow ^3\text{He} + \gamma$ , y (iii)  $^3\text{He} + ^3\text{He} \rightarrow ^4\text{He} + ^1\text{H} + ^1\text{H}$ .  
(Enumere el valor de cada una de las cantidades que se conservan antes y después de cada una

de las reacciones).

60. Calcule la salida de energía en cada una de las reacciones de fusión en la cadena protón-protón, y verifique los valores determinados en el problema anterior.
61. Demuestre que la energía total liberada en la cadena protón-protón es de 26,7 MeV, considerando el efecto general en  $^1\text{H} + ^1\text{H} \rightarrow ^2\text{H} + e^+ + \nu_e$ ,  $^1\text{H} + ^2\text{H} \rightarrow ^3\text{He} + \gamma$ , y  $^3\text{He} + ^3\text{He} \rightarrow ^4\text{He} + ^1\text{H} + ^1\text{H}$ . Asegúrese de incluir la energía de aniquilación.
62. Dos reacciones de fusión mencionadas en el texto son  $n + ^3\text{He} \rightarrow ^4\text{He} + \gamma$  y  $n + ^1\text{H} \rightarrow ^2\text{H} + \gamma$ . Ambas reacciones liberan energía, pero la segunda también crea más combustible. Confirme que las energías producidas en las reacciones son de 20,58 y 2,22 MeV, respectivamente. Comente qué nucleído del producto está más fuertemente enlazado,  $^4\text{He}$  o  $^2\text{H}$ .
63. La potencia del Sol es  $4 \times 10^{26} \text{ W}$ . (a) Si el 90% de esta energía la suministra la cadena protón-protón, ¿cuántos protones se consumen por segundo? (b) ¿Cuántos neutrinos por segundo debe haber por metro cuadrado en la superficie de la Tierra a partir de este proceso?
64. Otro conjunto de reacciones que fusiona el hidrógeno en helio en el Sol y, especialmente, en las estrellas más calientes se denomina ciclo carbono-nitrógeno-oxígeno (CNO):  
 $^{12}\text{C} + ^1\text{H} \rightarrow ^{13}\text{N} + \gamma$   
 $^{13}\text{N} \rightarrow ^{13}\text{C} + e^+ + \nu_e$   
 $^{13}\text{C} + ^1\text{H} \rightarrow ^{14}\text{N} + \gamma$   
 $^{14}\text{N} + ^1\text{H} \rightarrow ^{15}\text{O} + \gamma$   
 $^{15}\text{O} \rightarrow ^{15}\text{N} + e^+ + \nu_e$   
 $^{15}\text{N} + ^1\text{H} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^4\text{He}$   
Este proceso es un "ciclo" porque  $^{12}\text{C}$  aparece al principio y al final de estas reacciones. Escriba el efecto global de este ciclo (como se hizo en la cadena protón-protón en  $2e^- + 4^1\text{H} \rightarrow ^4\text{He} + 2\nu_e + 6\gamma$ ). Supongamos que los positrones aniquilan electrones para formar más rayos  $\gamma$ .
65. (a) Calcule la energía liberada por la fusión de una mezcla de deuterio y tritio de 1,00 kg, que produce helio. Hay igual número de núcleos de deuterio y tritio en la mezcla.  
(b) Si este proceso tiene lugar de forma continua durante un año, ¿cuál es la potencia promedio?



### 10.7 Usos médicos y efectos biológicos de la radiación nuclear

66. ¿Cuál es la dosis en mSv para: (a) rayos X de 0,1 Gray (Gy)? (b) 2,5 mGy de exposición del ojo a los neutrones? (c) 1,5m Gy de exposición  $\alpha$ ?
67. Calcule la dosis de radiación en Gy para: (a) Una serie de rayos X fluoroscópicos de 10 mSv. (b) 50 mSv de exposición de la piel a un emisor  $\alpha$ . (c) 160 mSv de rayos  $\beta^-$  y  $\gamma$  de  $^{40}\text{K}$  en su cuerpo.
68. Calcule la masa de  $^{239}\text{Pu}$  que tiene una actividad de 1,00  $\mu\text{Ci}$ .
69. En la década de 1980, se utilizó el término picowave para describir la irradiación de alimentos a fin de que el público superara su rechazo a la conocida seguridad de la radiación de microondas. Halle la energía en MeV de un fotón que tiene una longitud de onda de un picómetro.
70. ¿Cuál es la dosis en Sv en un tratamiento de cáncer que expone al paciente a 200 Gy de rayos  $\gamma$ ?
71. La mitad de los rayos  $\gamma$  de  $^{99\text{m}}\text{Tc}$  son absorbidos por un blindaje de plomo de 0,170 mm de espesor. La mitad de los rayos  $\gamma$  que atraviesan la primera capa de plomo son absorbidos por una segunda capa de igual espesor. ¿Qué grosor de plomo absorberá todos estos elementos menos uno de cada 1000 rayos  $\gamma$ ?
72. ¿Cuántos Gy de exposición se necesitan para dar a un tumor canceroso una dosis de 40 Sv si se expone a una actividad  $\alpha$ ?
73. Un fontanero de una central nuclear recibe una dosis de cuerpo entero de 30 mSv en 15 minutos mientras repara una válvula crucial. Halle el riesgo anual de muerte por cáncer inducido por la radiación y la posibilidad de defectos genéticos a causa de esta exposición máxima permitida.
74. Calcule la dosis en rem/a para los pulmones de un empleado de una fábrica de armas que inhala y retiene una actividad de 1,00  $\mu\text{Ci}$   $^{239}\text{Pu}$  en un accidente. La masa del tejido pulmonar afectado es de 2,00 kg y el plutonio decae por la emisión de una partícula  $\alpha$  de 5,23-MeV. Supongamos un valor de RBE de 20.

### Problemas Adicionales

75. El sitio web wiki-phony afirma que la masa atómica del cloro es de 40 g/mol. Compruebe ese resultado. *Pista:* Los dos isótopos estables más comunes del cloro son  $^{35}_{17}\text{Cl}$  y  $^{37}_{17}\text{Cl}$ . (La abundancia de Cl-35 es de 75,8%, y la abundancia de Cl-37 es de 24,2%).
76. Un físico de partículas descubre una partícula neutra con una masa de 2,02733 u que supone son dos neutrones unidos.  
(a) Calcule la energía de enlace.  
(b) ¿Qué es poco razonable en este resultado?
77. Un físico nuclear encuentra 1,0  $\mu\text{g}$  de  $^{236}\text{U}$  en un trozo de mineral de uranio ( $T_{1/2} = 2,348 \times 10^7$  y). (a) Utilice la ley de decaimiento para determinar cuánto  $^{236}\text{U}$  tendría que haber en la Tierra cuando esta se formó hace  $4,543 \times 10^9$  y para que hoy queden 1,0  $\mu\text{g}$ . (b) ¿Qué tiene de poco razonable este resultado? (c) ¿Cómo se resuelve este resultado poco razonable?
78. Un grupo de científicos utiliza la datación por carbono para datar un trozo de madera con una antigüedad de 3.000 millones de años. ¿Por qué esto no tiene sentido?
79. Según su compañero de laboratorio, un cristal de yoduro de sodio de 2,00 cm de grosor absorbe todo menos un 10% de rayos provenientes de una fuente radiactiva y un trozo de 4,00 cm del mismo material absorbe todo menos un 5%? ¿Es razonable este resultado?
80. En la sección de ciencia del periódico, un artículo informa sobre los esfuerzos de un grupo de científicos para crear un nuevo reactor nuclear con base en la fisión del hierro (Fe). ¿Es una buena idea?
81. El esmalte cerámico de un plato "Fiestaware" rojo-naranja es  $\text{U}_2\text{O}_3$  y contiene 50,0 gramos de  $^{238}\text{U}$ , pero muy poco  $^{235}\text{U}$ . (a) ¿Cuál es la actividad del plato? (b) Calcule la energía total que será liberada por el decaimiento del  $^{238}\text{U}$ . (c) Si la energía vale 12,0 céntimos por  $\text{kW} \cdot \text{h}$ , ¿cuál es el valor monetario de la energía emitida? (Estos platos de cerámica de colores brillantes dejaron de fabricarse hace unos 30 años, pero todavía se pueden adquirir como objetos de colección).
82. Grandes cantidades de uranio empobrecido ( $^{238}\text{U}$ ) están disponibles como subproducto del procesamiento del uranio para el combustible de los reactores y las armas. El uranio es muy denso y constituye un buen contrapeso para los aviones. Suponga que tiene un bloque de 4000 kg de  $^{238}\text{U}$ . (a) Halle su actividad. (b) ¿Cuántas



calorías al día se generan por la termalización de la energía de decaimiento? (c) ¿Cree que podría detectar esto como calor? Explique.

- 83.** Un trozo de madera procedente de una antigua tumba egipcia se somete a la prueba de la

### Problemas De Desafío

- 84.** Este problema demuestra que la energía de enlace del electrón en estado fundamental de un átomo de hidrógeno es mucho menor que las energías de masa en reposo del protón y del electrón.

(a) Calcule el equivalente en masa en  $u$  de la energía de enlace de  $13,6 \text{ eV}$  de un electrón en un átomo de hidrógeno, y compárelo con la masa conocida del átomo de hidrógeno.  
 (b) Réstele a la masa conocida del protón la masa conocida del átomo de hidrógeno.  
 (c) Tome la relación entre la energía de enlace del electrón ( $13,6 \text{ eV}$ ) y el equivalente energético de la masa del electrón ( $0,511 \text{ MeV}$ ).  
 (d) Discuta cómo sus respuestas confirman el propósito declarado de este problema.

- 85.** La sonda espacial *Galileo* fue lanzada en su largo viaje más allá de Venus y la Tierra en 1989, con el objetivo final de llegar a Júpiter. Su fuente de energía proviene de  $11,0 \text{ kg}$  de  $^{238}\text{Pu}$ , un subproducto de la producción de plutonio para armas nucleares. La energía eléctrica se genera de forma termoeléctrica a partir del calor producido cuando las partículas  $\alpha$  de  $5,59\text{-MeV}$  emitidas en cada decaimiento se estrellan en el interior del plutonio y su blindaje. La vida media de  $^{238}\text{Pu}$  es de  $87,7$  años.

(a) ¿Cuál era la actividad original del  $^{238}\text{Pu}$  en becquerels?  
 (b) ¿Qué potencia se emitió en kilovatios?  
 (c) ¿Qué potencia se emitió  $12,0$  años después del lanzamiento? Puede ignorar la energía extra de los nucleidos hija y las pérdidas por escape de rayos  $\gamma$ .

- 86.** Calcule la energía emitida en el decaimiento  $\beta^-$  de  $^{60}\text{Co}$ .

- 87.** A menudo se recurre a los ingenieros para que inspeccionen y, si es necesario, reparen los equipos de las centrales nucleares. Supongamos que las luces de la ciudad se apagan. Después de inspeccionar el reactor nuclear, encuentra una tubería con fugas que va del generador de vapor a la cámara de la turbina. (a) ¿Cómo se comparan las lecturas de

actividad del carbono  $^{14}\text{C}$ . Se encuentra que tiene una actividad por gramo de carbono de  $A = 10$  decaimiento/min  $\cdot$  g. ¿Cuál es la edad de la madera?

presión de la cámara de la turbina y del condensador de vapor? (b) ¿Por qué el reactor nuclear *no* genera electricidad?

- 88.** Para que dos núcleos se fusionen en una reacción nuclear, deben moverse lo suficientemente rápido como para que la fuerza repulsiva de Coulomb entre ellos no les impida acercarse entre sí dentro de  $R \approx 10^{-14} \text{ m}$ . A esta distancia o una menor, la fuerza nuclear de atracción puede superar a la fuerza de Coulomb, y los núcleos son capaces de fusionarse.

(a) Halle una fórmula sencilla que pueda utilizarse para estimar la energía cinética mínima que deben tener los núcleos para fusionarse. Para simplificar el cálculo, suponga que los dos núcleos son idénticos y se mueven el uno hacia el otro con la misma velocidad  $v$ .  
 (b) Utilice esta energía cinética mínima para estimar la temperatura mínima que debe tener un gas de los núcleos antes de que un número significativo de ellos experimente la fusión. Calcule esta temperatura mínima primero para el hidrógeno y luego para el helio. (*Pista:* Para que se produzca la fusión, la energía cinética mínima cuando los núcleos están alejados debe ser igual a la energía potencial de Coulomb cuando están a una distancia  $R$ ).

- 89.** Para la reacción,  $n + ^3\text{He} \rightarrow ^4\text{He} + \gamma$ , calcule la cantidad de transferencias de energía a  $^4\text{He}$  y  $\gamma$  (en el lado derecho de la ecuación). Supongamos que los reactivos están inicialmente en reposo. (*Pista:* Utilice el principio de conservación del momento).

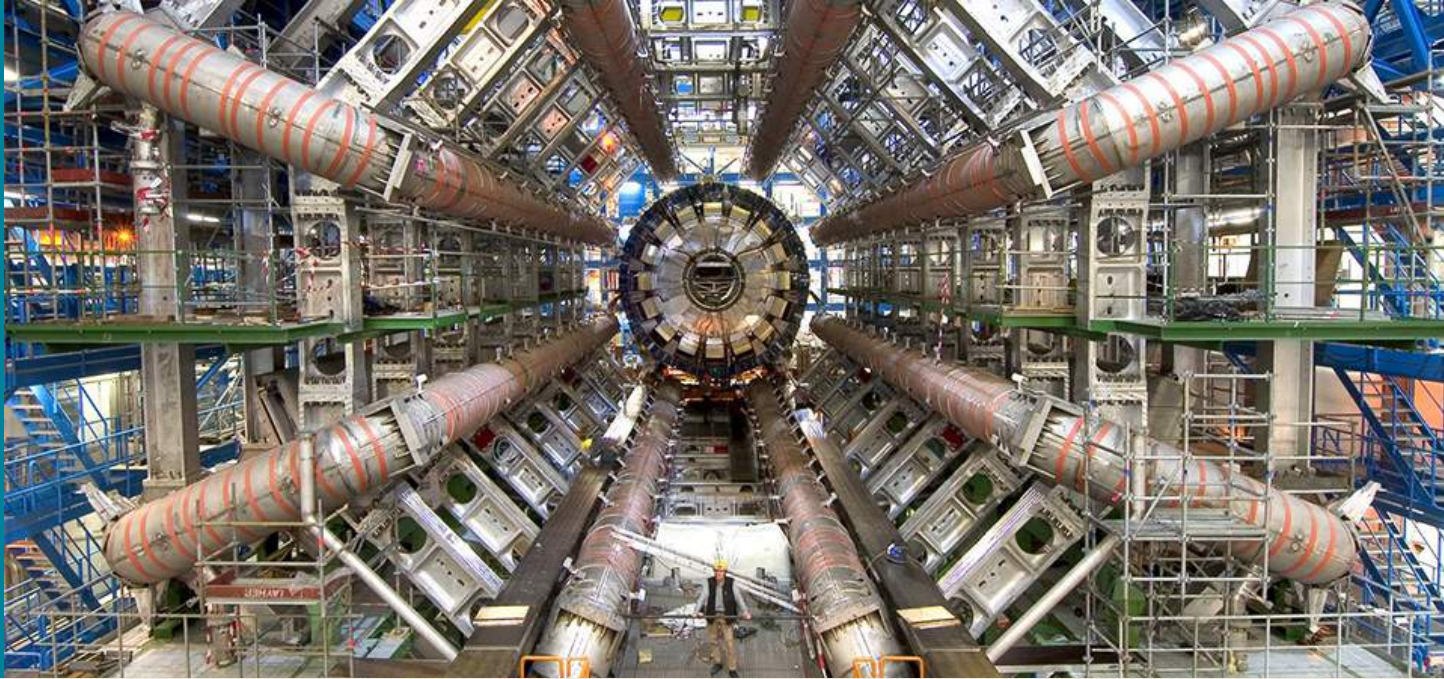
- 90.** A menudo se les pide a los ingenieros que inspeccionen y, si es necesario, reparen los equipos de los hospitales. Supongamos que el sistema PET funciona mal. Después de inspeccionar la unidad, usted sospecha que uno de los detectores de fotones PET está desalineado. Para probar su teoría, coloca un detector en el lugar  $(r, \theta, \varphi) = (1,5, 45, 30)$  en relación con una muestra de prueba radiactiva en el centro de la cama del paciente. (a) Si el segundo detector de fotones está correctamente alineado, ¿dónde debería estar situado? (b) ¿Qué

lectura de energía se espera?



# CAPÍTULO 11

## Física de partículas y cosmología



**Figura 11.1** El Gran Colisionador de Hadrones (LHC) está situado a más de 150 metros (500 pies) bajo tierra en la frontera entre Suiza y Francia, cerca de Ginebra (Suiza). El LHC es la máquina más potente jamás desarrollada para comprobar nuestra comprensión de las interacciones de las partículas elementales. Aquí se muestra el detector ATLAS, que ayuda a identificar nuevas partículas formadas en las colisiones (crédito: modificación del trabajo de Maximilien Brice, Consejo Europeo para la Investigación Nuclear (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire, CERN)).

### ESQUEMA DEL CAPITULO

#### 11.1 Introducción a la física de partículas

#### 11.2 Leyes de conservación de las partículas

#### 11.3 Cuarks

#### 11.4 Aceleradores y detectores de partículas

#### 11.5 El modelo estándar

#### 11.6 El Big Bang

#### 11.7 Evolución del universo primigenio

**INTRODUCCIÓN** Al principio de este texto hemos hablado de la amplia gama de escalas que abarca la física, desde las partículas más pequeñas hasta la mayor escala posible: el propio universo. En este último capítulo examinamos algunas de las fronteras de la investigación en estas escalas extremas. La física de partículas se ocupa de los componentes básicos de la materia y de las fuerzas que los mantienen unidos. La cosmología es el estudio de las estrellas, galaxias y estructuras galácticas que pueblan nuestro universo, así como su historia pasada y su evolución futura.

Estas dos áreas de la física no están tan desvinculadas como podría creerse. El estudio de las partículas elementales requiere enormes energías para producir partículas aisladas, lo que involucra a algunas de las mayores máquinas que el ser humano ha construido. Pero esas energías elevadas estuvieron presentes en las

primeras etapas del universo y el universo que vemos hoy en día se formó en parte por la naturaleza y las interacciones de las partículas elementales creadas entonces. Hay que tener en cuenta que tanto la física de partículas como la cosmología son áreas de intensa investigación actual, sujetas a gran especulación por parte de los físicos (así como de los escritores de ciencia ficción). En este capítulo trataremos de hacer hincapié en lo que se sabe a partir de las deducciones de las evidencias empíricas, y de identificar las ideas que son conjeturas y que aún no se han demostrado.

## 11.1 Introducción a la física de partículas

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Describir las cuatro fuerzas fundamentales y qué partículas participan en ellas.
- Identificar y describir fermiones y bosones.
- Identificar y describir las familias de cuarks y leptones.
- Distinguir entre partículas y antipartículas, y describir sus interacciones.

La física de partículas elementales es el estudio de las partículas fundamentales y sus interacciones en la naturaleza. Los que estudian la física de las partículas elementales, los físicos de partículas, se diferencian de los demás físicos en la escala de los sistemas que estudian. Un físico de partículas no se contenta con estudiar el mundo microscópico de las células, las moléculas, los átomos o incluso los núcleos atómicos. Se interesa por los procesos físicos que ocurren a escalas incluso más pequeñas que los núcleos atómicos. Al mismo tiempo, se enfrenta a los misterios más profundos de la naturaleza: ¿Cómo empezó el universo? ¿Qué explica el patrón de masas en el universo? ¿Por qué hay más materia que antimateria en el universo? ¿Por qué se conservan la energía y el momento? ¿Cómo evolucionará el universo?

### Cuatro fuerzas fundamentales

Un paso importante para responder a estas preguntas es entender las partículas y sus interacciones. Las interacciones de las partículas se expresan en términos de cuatro **fuerzas fundamentales**. Por orden de fuerza decreciente, estas fuerzas son la **fuerza nuclear fuerte**, la fuerza electromagnética, la **fuerza nuclear débil** y la fuerza gravitacional.

1. **Fuerza nuclear fuerte.** La fuerza nuclear fuerte es una fuerza de atracción muy fuerte que actúa solo en distancias muy cortas (alrededor de  $10^{-15}$  m). La fuerza nuclear fuerte es la responsable de la unión de protones y neutrones en los núcleos atómicos. No todas las partículas participan en la fuerza nuclear fuerte; por ejemplo, los electrones y los neutrinos no se ven afectados por ella. Como su nombre indica, esta fuerza es mucho más fuerte que las demás.
2. **Fuerza electromagnética.** La fuerza electromagnética puede actuar a distancias muy grandes (tiene un alcance infinito), pero solo es 1/100 de la fuerza nuclear fuerte. Se dice que las partículas que interactúan mediante esta fuerza tienen "carga". En la teoría clásica de la electricidad estática (ley de Coulomb), la fuerza eléctrica varía como el producto de las cargas de las partículas que interactúan y como el cuadrado inverso de las distancias entre ellas. A diferencia de la fuerza fuerte, la fuerza electromagnética puede ser atractiva o repulsiva (las cargas opuestas se atraen y las similares se repelen). La fuerza magnética depende de forma más complicada de las cargas y sus movimientos. La unificación de la fuerza eléctrica y la magnética en una sola fuerza electromagnética (un logro de James Clerk Maxwell) se erige como uno de los mayores logros intelectuales del siglo XIX. Esta fuerza es fundamental para los modelos científicos de la estructura atómica y el enlace molecular.
3. **Fuerza nuclear débil.** La fuerza nuclear débil actúa en distancias muy cortas ( $10^{-15}$  m) y, como su nombre indica, es muy débil. Tiene una fuerza de aproximadamente  $10^{-6}$  de la fuerza nuclear fuerte. Esta fuerza se manifiesta sobre todo en el decaimiento de las partículas elementales y en las interacciones de los neutrinos. Por ejemplo, el neutrón puede decaer en protón, electrón y neutrino electrónico a través de la fuerza débil. La fuerza débil es de vital importancia porque es esencial para entender la nucleosíntesis estelar, el proceso que crea nuevos núcleos atómicos en los núcleos de las estrellas.
4. **Fuerza gravitacional.** Al igual que la fuerza electromagnética, la fuerza gravitacional puede actuar a distancias infinitamente grandes; sin embargo, solo tiene  $10^{-38}$  de la fuerza nuclear fuerte. En la teoría



clásica de la gravedad de Newton, la fuerza de la gravedad varía como el producto de las masas de las partículas que interactúan y como el cuadrado inverso de la distancia entre ellas. Esta fuerza es una fuerza de atracción que actúa entre todas las partículas con masa. En las teorías modernas de la gravedad, este comportamiento de la fuerza se considera un caso especial para las interacciones macroscópicas de baja energía. En comparación con las demás fuerzas de la naturaleza, la gravedad es, con mucho, la más débil.

Las fuerzas fundamentales pueden no ser realmente "fundamentales", sino que en realidad pueden ser diferentes aspectos de la misma fuerza. Al igual que las fuerzas eléctrica y magnética se unificaron en una fuerza electromagnética, en los años 70 los físicos unificaron la fuerza electromagnética con la fuerza nuclear débil en una **fuerza electrodébil**. Cualquier teoría científica que intente unificar la fuerza electrodébil y la fuerza nuclear fuerte se denomina **teoría de gran unificación**, y cualquier teoría que intente unificar las cuatro fuerzas se denomina **teoría del todo**. Volveremos al concepto de unificación más adelante en este capítulo.

## Clasificaciones de las partículas elementales

En la naturaleza existe un gran número de partículas subatómicas. Estas partículas pueden clasificarse de dos maneras: la propiedad del espín y la participación en las cuatro fuerzas fundamentales. Recordemos que el espín de una partícula es análogo a la rotación de un objeto macroscópico alrededor de su propio eje. A continuación, estas dos clasificaciones se describen por separado.

### Clasificación por espín

Las partículas de la materia pueden dividirse en **fermiones** y **bosones**. Los fermiones tienen un espín semientero ( $\frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar, \dots$ ) y los bosones tienen espín entero ( $0\hbar, 1\hbar, 2\hbar, \dots$ ). Ejemplos conocidos de fermiones son los electrones, los protones y los neutrones. Un ejemplo conocido de bosón es el fotón. Los fermiones y los bosones se comportan de forma muy diferente en grupo. Por ejemplo, cuando los electrones están confinados en una pequeña región del espacio, el principio de exclusión de Pauli establece que no hay dos electrones que puedan ocupar el mismo estado mecánico-cuántico. Sin embargo, cuando los fotones están confinados en una pequeña región del espacio, no existe esa limitación.

El comportamiento de los fermiones y bosones en los grupos puede entenderse en términos de la propiedad de indistinguibilidad. Se dice que las partículas son "indistinguibles" si son idénticas entre sí. Por ejemplo, los electrones son indistinguibles porque cada electrón del universo tiene exactamente la misma masa y el mismo espín que todos los demás electrones: "cuando has visto un electrón, los has visto todos". Si se cambian dos partículas indistinguibles en una pequeña región del espacio, el cuadrado de la función de onda que describe este sistema y que se puede medir ( $|\psi|^2$ ) no cambia. Si no fuera así, podríamos saber si las partículas se han intercambiado o no y la partícula no sería realmente indistinguible. Los fermiones y los bosones se diferencian por cómo el signo de la función de onda ( $\psi$ ) (no directamente observable) cambia:

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow -\psi \text{ (fermiones indistinguibles),} \\ \psi &\rightarrow +\psi \text{ (bosones indistinguibles).}\end{aligned}$$

Se dice que los fermiones son "antisimétricos en el intercambio" y los bosones son "simétricos en el intercambio". El principio de exclusión de Pauli es una consecuencia de la **simetría de intercambio** de los fermiones, una conexión que se desarrolla en un curso más avanzado de física moderna. La estructura electrónica de los átomos se basa en el principio de exclusión de Pauli y, por tanto, está directamente relacionada con la indistinguibilidad de los electrones.

### Clasificación por interacciones de fuerza

Los fermiones pueden dividirse a su vez en **cuarks** y **leptones**. La principal diferencia entre estos dos tipos de partículas es que los cuarks interactúan mediante la fuerza fuerte y los leptones no. Los cuarks y los leptones (así como los bosones, de los que hablaremos más adelante) se organizan en la [Figura 11.2](#). Las dos filas superiores (las tres primeras columnas en púrpura) contienen seis cuarks. Estos cuarks se organizan en dos familias de partículas: arriba (up), encantado (charm) y superior (top) ( $u, c, t$ ), y abajo (down), extraño (strange), e inferior (bottom) ( $d, s, b$ ). Los miembros de una misma familia de partículas comparten las mismas propiedades pero difieren en la masa (dada en  $\text{MeV}/c^2$ ). Por ejemplo, la masa del cuark superior es mucho

mayor que la del cuark encantado, y la masa de este es mucho mayor que la del cuark arriba. Todos los cuarks interactúan entre sí a través de la fuerza nuclear fuerte.

	I	II	III	
Masa	2,4 MeV	1,27 GeV	171,2 GeV	0
Carga	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
Espín	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
Nombre	<b>u</b> up (arriba)	<b>c</b> charm (encanto)	<b>t</b> top (superior)	$\gamma$ fotón
Cuarks				
	4,8 MeV	104 MeV	4,2 GeV	0
	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	<b>d</b> down (abajo)	<b>s</b> strange (extrano)	<b>b</b> bottom (inferior)	<b>g</b> gluon
	< 2,2 eV	< 0,17 MeV	< 15,5 MeV	91,2 GeV
	0	0	0	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
Leptones	$\nu_e$ neutrino de electrones	$\nu_\mu$ Neutrino de muones	$\nu_\tau$ neutrino tau	$Z^0$ weak force (fuerza débil)
	0,511 MeV	105,7 MeV	1,777 GeV	80,4 GeV $_{\pm}$
	-1	-1	-1	$\pm 1$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	<b>e</b> electrón	<b><math>\mu</math></b> muon	<b><math>\tau</math></b> tau	<b>W</b> weak force (fuerza débil)

**FIGURA 11.2** Las familias de partículas subatómicas, clasificadas por los tipos de fuerzas con las que interactúan (crédito: modificación del trabajo de "MissMJ"/Wikimedia Commons).

La materia ordinaria está formada por dos tipos de cuarks: el cuark arriba (carga elemental,  $q = +2/3$ ) y el cuark abajo ( $q = -1/3$ ). Los cuarks más pesados son inestables y decaen rápidamente en otros más ligeros a través de la fuerza débil. Los cuarks se unen en grupos de dos y tres llamados **hadrones** mediante la fuerza fuerte. Los hadrones que constan de dos cuarks se llaman **mesones**, y los que constan de tres cuarks se llaman **bariones**. Los ejemplos de mesones son el pion y el kaón, y los ejemplos de bariones son el protón y el neutrón. Un protón son dos cuarks arriba y un cuark abajo ( $p = uud$ ,  $q = +1$ ) y un neutrón es un cuark arriba y dos cuarks abajo ( $n = udd$ ,  $q = 0$ ). Las propiedades de los mesones y bariones de muestra se indican en la [Tabla 11.1](#). Los cuarks participan en las cuatro fuerzas fundamentales: fuerte, débil, electromagnética y gravitacional.

Las dos filas inferiores de la figura (en verde) contienen seis leptones organizados en dos familias de partículas: electrón, muon y tau ( $e$ ,  $\mu$ ,  $\tau$ ), y el neutrino electrónico, el neutrino muon y el neutrino tau ( $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\nu_\tau$ ). El muon es más de 200 veces más pesado que un electrón, pero por lo demás es similar al electrón. El tau es unas 3500 veces más pesado que el electrón, pero por lo demás es similar al muon y al electrón. Una vez creados, el muon y el tau decaen rápidamente en partículas más ligeras a través de la fuerza débil. Los leptones no participan en la fuerza fuerte. Los cuarks y los leptones se tratarán más adelante en este capítulo. Los leptones participan en las fuerzas débil, electromagnética y gravitacional, pero no participan en la fuerza fuerte.

Los bosones (mostrados en rojo) son los portadores de fuerza de los fermiones. En este modelo, los leptones y los cuarks interactúan entre sí enviando y recibiendo bosones. Por ejemplo, la interacción coulombiana se produce cuando dos partículas con carga positiva envían y reciben (intercambian) fotones. Se dice que los fotones "llevan" la fuerza entre las partículas cargadas. Asimismo, la atracción entre dos cuarks en un núcleo atómico se produce cuando dos cuarks envían y reciben **gluones**. Otros ejemplos son los **bosones W y Z** (que transmiten la fuerza nuclear débil) y los gravitones (que transmiten la fuerza gravitatoria). El bosón de Higgs es una partícula especial: Cuando interactúa con otras partículas, no las dota de fuerza sino de masa. En otras palabras, el bosón de Higgs ayuda a explicar *por qué* las partículas tienen masa. Estas afirmaciones forman parte de un modelo científico tentativo pero muy productivo (el Modelo Estándar) que se trata más adelante.



## Partículas y antipartículas

A finales de la década de 1920, la teoría especial de la relatividad y la mecánica cuántica se combinaron en una teoría cuántica relativista del electrón. Un resultado sorprendente de esta teoría fue la predicción de dos estados de energía para cada electrón: Una está vinculada con el electrón, y la otra con otra partícula con la misma masa de un electrón pero con una carga de  $e^+$ . Esta partícula se llama antielectrón o **positrón**. El positrón se descubrió experimentalmente en la década de 1930.

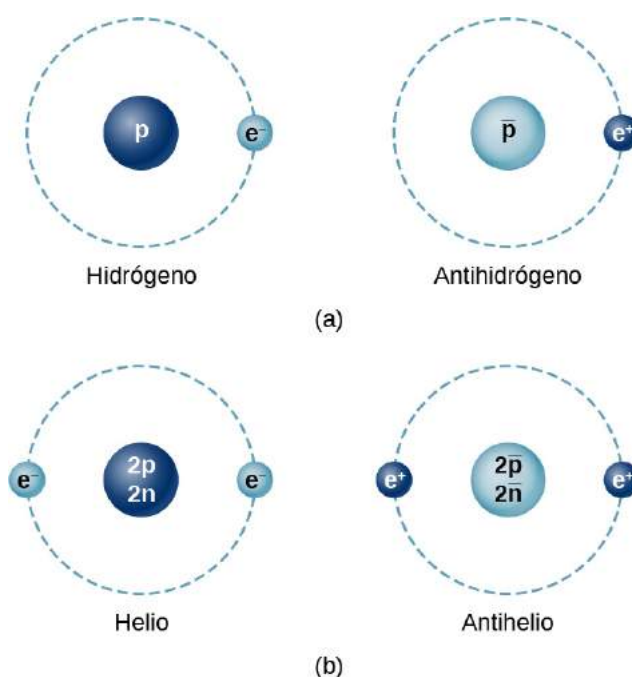
Pronto se descubrió que para cada partícula de la naturaleza existe una **antipartícula** correspondiente. Una antipartícula tiene la misma masa y vida que su partícula asociada, y el signo opuesto de la carga eléctrica. Estas partículas se producen en reacciones de alta energía. Algunos ejemplos de partículas de alta energía son el antimuon ( $\mu^+$ ), el anticuark arriba ( $\bar{u}$ ), y el anticuark abajo ( $\bar{d}$ ). (Observe que las antipartículas de los cuarks se designan con una barra encima). Muchos mesones y bariones contienen antipartículas. Por ejemplo, el antiprotón ( $\bar{p}$ ) es  $\bar{u}\bar{u}\bar{d}$  y el pion cargado positivamente ( $\pi^+$ ) es  $u\bar{d}$ . Algunas partículas neutras, como el fotón y el mesón  $\pi^0$ , son sus propias antipartículas. Las partículas de muestra, las antipartículas y sus propiedades se enumeran en la [Tabla 11.1](#).

	Nombre de la partícula	Símbolo	Antipartícula	Masa ( $\text{MeV}/c^2$ )	Tiempo de vida (s) promedio
Leptones					
	Electrón	$e^-$	$e^+$	0,511	Estable
	Neutrino electrónico	$\nu_e$	$\bar{\nu}_e$	$\approx 0$	Estable
	Muon	$\mu^-$	$\mu^+$	105,7	$2,20 \times 10^{-6}$
	Neutrino muónico	$\nu_\mu$	$\bar{\nu}_\mu$	$\approx 0$	Estable
	Tau	$\tau^-$	$\tau^+$	1.784	$< 4 \times 10^{-13}$
	Neutrino tauónico	$\nu_\tau$	$\bar{\nu}_\tau$	$\approx 0$	Estable
Hadrones					
Bariones	Protón	p	$\bar{p}$	938,3	Estable
	Neutrón	n	$\bar{n}$	939,6	920
	Lambda	$\Lambda^0$	$\bar{\Lambda}^0$	1115,6	$2,6 \times 10^{-10}$
	Sigma	$\Sigma^+$	$\Sigma^-$	1189,4	$0,80 \times 10^{-10}$
	Xi	$\Xi^+$	$\Xi^-$	1.315	$2,9 \times 10^{-10}$
	Omega	$\Omega^+$	$\Omega^-$	1.672	$0,82 \times 10^{-10}$
Mesones	Pion	$\pi^+$	$\pi^-$	139,6	$2,60 \times 10^{-8}$
	$\pi$ -Cero	$\pi^0$	$\pi^0$	135,0	$0,83 \times 10^{-16}$

	Nombre de la partícula	Símbolo	Antipartícula	Masa (MeV/c <sup>2</sup> )	Tiempo de vida (s) promedio
	Kaón	K <sup>+</sup>	K <sup>-</sup>	493,7	1,24 × 10 <sup>-8</sup>
	<i>k</i> -corto	K <sub>S</sub> <sup>0</sup>	$\bar{K}_S^0$	497,6	0,89 × 10 <sup>-10</sup>
	<i>k</i> -largo	K <sub>L</sub> <sup>0</sup>	$\bar{K}_L^0$	497,6	5,2 × 10 <sup>-8</sup>
	J/ψ	J/ψ	J/ψ	3.100	7,1 × 10 <sup>-21</sup>
	Upsilon	Υ	Υ	9.460	1,2 × 10 <sup>-20</sup>

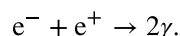
**TABLA 11.1** Las partículas y sus propiedades

Las mismas fuerzas que mantienen unida la materia ordinaria también mantienen unida la antimateria. En las condiciones adecuadas, es posible crear antiátomos como el antihidrógeno, antioxígeno e incluso antiagua. En los antiátomos, los positrones orbitan alrededor de un núcleo cargado negativamente de antiprotones y antineutrones. La [Figura 11.3](#) compara átomos y antiátomos.



**FIGURA 11.3** Comparación de los átomos más simples de materia y antimateria. (a) En el modelo de Bohr, un átomo de antihidrógeno está formado por un positrón que orbita alrededor de un antiprotón. (b) Un átomo de antihelio está formado por dos positrones que orbitan alrededor de un núcleo de dos antiprotones y dos antineutrones.

La antimateria no puede existir durante mucho tiempo en la naturaleza porque las partículas y las antipartículas se aniquilan entre sí para producir una radiación de alta energía. Un ejemplo común es la aniquilación electrón-positrón. Este proceso sucede mediante la reacción



El electrón y el positrón desaparecen por completo y en su lugar se producen dos fotones. (Resulta que la producción de un solo fotón violaría la conservación de la energía y el momento) Esta reacción también puede producirse en sentido inverso: Dos fotones pueden aniquilarse entre sí para producir un par de electrones y

positrones. O bien, un solo fotón puede producir un par electrón-positrón en el campo de un núcleo, un proceso llamado producción de pares. Las reacciones de este tipo se miden de forma rutinaria en los detectores de partículas modernos. La existencia de antipartículas en la naturaleza no es ciencia ficción.

### INTERACTIVO

Vea este [video \(https://openstax.org/l/21matter\)](https://openstax.org/l/21matter) para saber más sobre las partículas de materia y antimateria.

## 11.2 Leyes de conservación de las partículas

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

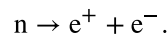
- Distinguir tres leyes de conservación: número bariónico, número de leptones y extrañeza.
- Utilizar reglas para determinar el número bariónico total, el número de leptones y la extrañeza de las partículas antes y después de una reacción.
- Utilizar el número bariónico, el número de leptones y la conservación de la extrañeza para determinar si se producen reacciones o decaimientos de partículas.

Las leyes de conservación son fundamentales para comprender la física de las partículas. Existen pruebas sólidas de que la energía, el momento y el momento angular se conservan en todas las interacciones de las partículas. La aniquilación de un electrón y un positrón en reposo, por ejemplo, no puede producir un solo fotón porque esto viola la conservación del momento lineal. Como se explica en [Relatividad](#), la teoría especial de la relatividad modifica las definiciones de momento, energía y otras magnitudes conocidas. En particular, el momento relativista de una partícula difiere de su momento clásico en un factor  $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$  que varía de 1 a  $\infty$ , según la velocidad de la partícula.

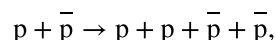
En los capítulos anteriores, también nos encontramos con otras leyes de conservación. Por ejemplo, la carga se conserva en todos los fenómenos electrostáticos. La carga que se pierde en un lugar se gana en otro porque la carga es transportada por las partículas. Ningún proceso físico conocido viola la conservación de la carga. En la siguiente sección, describiremos las tres leyes de conservación menos conocidas: el número bariónico, el número de leptones y la extrañeza. Estas no son en absoluto las únicas leyes de conservación en la física de partículas.

### Conservación del número bariónico

Ninguna ley de conservación considerada hasta ahora impide que un neutrón decaiga mediante una reacción como



Este proceso conserva la carga, la energía y el momento. Sin embargo, no se produce porque viola la ley de conservación del número bariónico. Esta ley requiere que el número bariónico total de una reacción sea el mismo antes y después de que ocurra la misma. Para determinar el número bariónico total, a cada partícula elemental se le asigna un **número bariónico**  $B$ . El número bariónico tiene el valor  $B = +1$  para los bariones,  $-1$  para los antibariones y  $0$  para todas las demás partículas. Volviendo al caso anterior (el decaimiento del neutrón en un par electrón-positrón), el neutrón tiene un valor  $B = +1$ , mientras que el electrón y el positrón tienen un valor de  $0$  cada uno. Así, el decaimiento no se produce porque el número bariónico total cambia de  $1$  a  $0$ . Sin embargo, el proceso de colisión protón-antiprotón



satisface la ley de conservación del número bariónico porque el número bariónico es cero antes y después de la interacción. El número bariónico de varias partículas comunes se indica en la [Tabla 11.2](#).

Nombre de la partícula	Símbolo	Número de Lepton ( $L_e$ )	Número de Lepton ( $L_\mu$ )	Número de Lepton ( $L_\tau$ )	Número bariónico ( $B$ )	Número de extrañeza
Electrón	$e^-$	1	0	0	0	0
Neutrino electrónico	$\nu_e$	1	0	0	0	0
Muon	$\mu^-$	0	1	0	0	0
Neutrino muónico	$\nu_\mu$	0	1	0	0	0
Tau	$\tau^-$	0	0	1	0	0
Neutrino tauónico	$\nu_\tau$	0	0	1	0	0
Pion	$\pi^+$	0	0	0	0	0
Kaón positivo	$K^+$	0	0	0	0	1
Kaón negativo	$K^-$	0	0	0	0	-1
Protón	p	0	0	0	1	0
Neutrón	n	0	0	0	1	0
Lambda cero	$\Lambda^0$	0	0	0	1	-1
Sigma positivo	$\Sigma^+$	0	0	0	1	-1
Sigma negativo	$\Sigma^-$	0	0	0	1	-1
Xi cero	$\Xi^0$	0	0	0	1	-2
Xi negativo	$\Xi^-$	0	0	0	1	-2
Omega	$\Omega^-$	0	0	0	1	-3

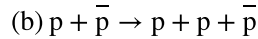
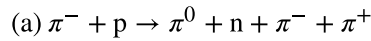
**TABLA 11.2** Propiedades conservadas de las partículas



### EJEMPLO 11.1

#### Conservación del número bariónico

Según la ley de conservación del número bariónico, ¿cuál de las siguientes reacciones puede producirse?



### Estrategia

Determine el número bariónico total para los reactivos y los productos, y busque que ese valor no cambie en la reacción.

### Solución

Para la reacción (a), el número bariónico neto de los dos reactivos es  $0 + 1 = 1$  y el número bariónico neto de los cuatro productos es  $0 + 1 + 0 + 0 = 1$ . Como los números bariónicos netos de los reactivos y los productos son iguales, esta reacción está permitida según la ley de conservación del número bariónico.

Para la reacción (b), el número bariónico neto de los reactivos es  $1 + (-1) = 0$  y el número bariónico neto de los productos propuestos es  $1 + 1 + (-1) = 1$ . Como los números bariónicos netos de los reactivos y los productos propuestos no son iguales, esta reacción no puede ocurrir.

### Importancia

El número bariónico se conserva en la primera reacción, pero no en la segunda. La conservación del número bariónico limita las reacciones que pueden y no pueden producirse en la naturaleza.

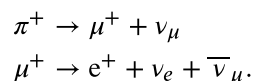
## ✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 11.1

¿Cuál es el número bariónico de un núcleo de hidrógeno?

## Conservación del número de Lepton

La conservación del número de Lepton establece que la suma de los números de leptones antes y después de la interacción debe ser la misma. Existen tres **números leptónicos** diferentes: el número electrón-leptón  $L_e$ , el número muon-leptón  $L_\mu$ , y el número tau-leptón  $L_\tau$ . En cualquier interacción, cada una de estas cantidades debe conservarse *por separado*. Para los electrones y los neutrinos electrónicos,  $L_e = 1$ ; para sus antipartículas,  $L_e = -1$ ; todas las demás partículas tienen  $L_e = 0$ . De manera similar,  $L_\mu = 1$  para muones y neutrinos muónicos,  $L_\mu = -1$  para sus antipartículas, y  $L_\mu = 0$  para todas las demás partículas. Finalmente,  $L_\tau = 1, -1, \text{ o } 0$ , dependiendo de si tenemos un tau o neutrino tauónico, sus antipartículas, o cualquier otra partícula respectivamente. La conservación del número de leptones garantiza que el número de electrones y positrones en el universo permanece relativamente constante. (Nota: El número total de leptones, por lo que sabemos, se conserva en la naturaleza. Sin embargo, las observaciones han mostrado variaciones del número en la familia de leptones (por ejemplo,  $L_e$ ) en un fenómeno llamado *oscilaciones de neutrinos*.)

Para ilustrar la ley de conservación del número de leptones, considere el siguiente proceso conocido de decaimiento de dos pasos:



En el primer decaimiento, todos los números de leptones para  $\pi^+$  son 0. Para los productos de este decaimiento,  $L_\mu = -1$  para  $\mu^+$  y  $L_\mu = 1$  para  $\nu_\mu$ . Por lo tanto, el número de muones-leptones se conserva. Ni los electrones ni los tau están involucrados en este decaimiento, por lo que  $L_e = 0$  y  $L_\tau = 0$  para la partícula inicial y todos los productos de decaimiento. Por lo tanto, los números electrón-leptón y tau-leptón también se conservan. En el segundo decaimiento,  $\mu^+$  tiene un número de muon-leptón  $L_\mu = -1$ , mientras que el número neto muon-leptón de los productos del decaimiento es  $0 + 0 + (-1) = -1$ . Por lo tanto, el número de

muones-leptones se conserva. El número de electrones-leptones también se conserva, ya que  $L_e = 0$  para  $\mu^+$ , mientras que el número neto electrón-leptón de los productos del decaimiento es  $(-1) + 1 + 0 = 0$ . Por último, como en este decaimiento no intervienen taus ni neutrinos tauónicos, el número tau-leptón también se conserva.



## EJEMPLO 11.2

### Conservación del número de Lepton

Según la ley de conservación del número de leptones, ¿cuál de los siguientes decaimientos puede ocurrir?

$$(a) n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$(b) \pi^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$$

#### Estrategia

Determine el número total de leptones para los reactivos y los productos, y busque que este valor no cambie en la reacción.

#### Solución

Para el decaimiento (a), el número electrón-leptón del neutrón es 0, y el número neto de electrón-leptón de los productos del decaimiento es  $0 + 1 + (-1) = 0$ . Dado que los números netos de electrones-leptones antes y después del decaimiento son iguales, el decaimiento es posible según de la ley de conservación del número de electrones-leptones. Además, como no hay muones ni taus implicados en este decaimiento, los números muon-leptón y tauón-leptón se conservan.

En el decaimiento (b), el número muon-leptón del  $\pi^-$  es 0, y el número neto de muones-leptones de los productos de decaimiento propuestos es  $1 + 1 + (-1) = 1$ . Por lo tanto, según la ley de conservación del número de muones-leptones, este decaimiento no puede ocurrir.

#### Importancia

El número de leptones se conserva en la primera reacción, pero no en la segunda. La conservación del número de leptones limita las reacciones que pueden y no pueden producirse en la naturaleza.

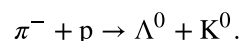


## COMPRUEBE LO APRENDIDO 11.2

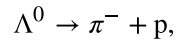
¿Cuál es el número de leptones de un par electrón-positrón?

### Conservación de la extrañeza

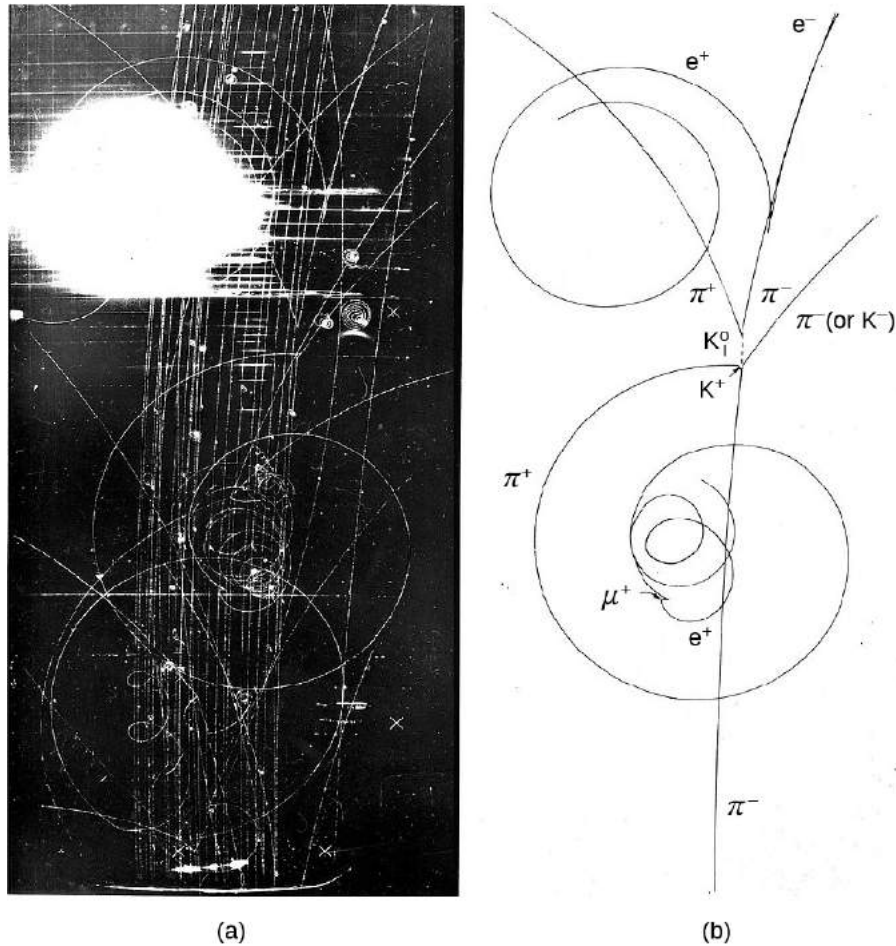
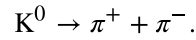
A finales de la década de 1940 y a principios de 1950, los experimentos con rayos cósmicos revelaron la existencia de partículas que nunca se habían observado en la Tierra. Estas partículas se produjeron en colisiones de piones con protones o neutrones en la atmósfera. Su producción y decaimiento eran inusuales. Se produjeron en las interacciones nucleares fuertes de piones y nucleones, por lo que se dedujo que eran hadrones; sin embargo, su decaimiento fue mediado por la interacción nuclear débil, que actúa mucho más lentamente. Sus tiempos de vida fueron del orden de  $10^{-10}$  a  $10^{-8}$  s, mientras que el tiempo de vida típico de una partícula que decae a través de la reacción nuclear fuerte es  $10^{-23}$  s. Estas partículas también eran inusuales porque siempre se producían en pares en las colisiones pion-nucleón. Por estas razones, estas partículas recién descubiertas fueron calificadas de *extrañas*. La producción y posterior decaimiento de un par de partículas extrañas se ilustra en la [Figura 11.4](#) y sigue la reacción



La partícula lambda decae entonces a través de la interacción nuclear débil según



y el kaón decae a través de la interacción débil



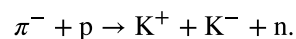
**FIGURA 11.4** Las interacciones de los hadrones. (a) Fotografía de la cámara de burbujas; (b) esquema que representa la fotografía.

Para racionalizar el comportamiento de estas extrañas partículas, los físicos de partículas inventaron una propiedad de las partículas que se conserva en las interacciones fuertes pero no en las débiles. Esta propiedad se denomina **extrañeza** y, como su nombre indica, está asociada a la presencia de un cuark extraño. La extrañeza de una partícula es igual al número de cuarks extraños de la partícula. La conservación de la extrañeza requiere que la extrañeza total de una reacción o decaimiento (sumando la extrañeza de todas las partículas) sea la misma antes y después de la interacción. La conservación de la extrañeza no es absoluta: Se conserva en las interacciones fuertes y en las electromagnéticas, pero no en las débiles. El número de extrañeza para varias partículas comunes se da en la [Tabla 11.2](#).

### EJEMPLO 11.3

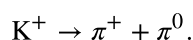
#### Conservación de la extrañeza

(a) Con base en la conservación de la extrañeza, ¿puede producirse la siguiente reacción?



(b) El siguiente decaimiento se produce a través de la fuerza nuclear débil:





¿El decaimiento conserva la extrañeza? Si no es así, ¿puede producirse el decaimiento?

### Estrategia

Determine la extrañeza de los reactivos y productos y busque que este valor no cambie en la reacción.

### Solución

- La extrañeza neta de los reactivos es  $0 + 0 = 0$ , y la extrañeza neta de los productos es  $1 + (-1) + 0 = 0$ . Por lo tanto, la interacción nuclear fuerte entre un pión y un protón no está prohibida por la ley de conservación de la extrañeza. Observe que el número bariónico también se conserva en la reacción.
- La extrañeza neta antes y después de este decaimiento es 1 y 0, por lo que el decaimiento no conserva la extrañeza. Sin embargo, el decaimiento aún puede ser posible, porque la ley de conservación de la extrañeza no se aplica a los decaimientos débiles.

### Importancia

La extrañeza se conserva en la primera reacción, pero no en la segunda. La conservación de la extrañeza limita las reacciones que pueden y no pueden producirse en la naturaleza.

## ✓ **COMPRUEBE LO APRENDIDO 11.3**

¿Cuál es el número de extrañeza de un muon?

## 11.3 Cuarks

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Comparar y contrastar los seis cuarks conocidos.
- Utilizar la composición de cuarks de los hadrones para determinar la carga total de estas partículas.
- Explicar las principales pruebas de la existencia de los cuarks

En la década de 1960, los físicos de partículas comenzaron a darse cuenta de que los hadrones no son partículas elementales, sino que están formados por partículas llamadas *cuarks*. (El nombre "cuark" fue acuñado por el físico Murray Gell-Mann, a partir de una frase de la novela de James Joyce *Finnegans Wake*) Inicialmente, se creía que solo había tres tipos de cuarks, llamados *arriba* (up, *u*), *abajo* (down, *d*) y *extraño* (strange, *s*). Sin embargo, este número pronto creció a seis, curiosamente, el mismo que el número de leptones, para incluir el *encantado* (charmed, *c*), el *inferior* (bottom, *b*) y el *superior* (top, *t*).

Todos los cuarks son fermiones de medio espín ( $s = 1/2$ ), tienen una carga fraccionaria ( $1/3$  o  $2/3e$ ), y tienen un número bariónico  $B = 1/3$ . Cada cuark tiene un anticuark con la misma masa pero con carga y número bariónico opuestos. Los nombres y propiedades de los seis cuarks figuran en la [Tabla 11.3](#).

Cuark	Carga (unidades de $e$ )	Espín ( $s$ )	Número bariónico	Número de extrañeza
Abajo ( <i>d</i> )	$-1/3$	$1/2$	$1/3$	0
Arriba ( <i>u</i> )	$+2/3$	$1/2$	$1/3$	0
Extraño ( <i>s</i> )	$-1/3$	$1/2$	$1/3$	$-1$
Encantado ( <i>c</i> )	$+2/3$	$1/2$	$1/3$	0
Inferior ( <i>b</i> )	$-1/3$	$1/2$	$1/3$	0

Cuark	Carga (unidades de e)	Espín (s)	Número bariónico	Número de extrañeza
Superior ( <i>t</i> )	+2/3	1/2	1/3	0

TABLA 11.3 Cuarks

### Combinaciones de cuarks

Como se ha mencionado anteriormente, los cuarks se unen en grupos de dos o tres para formar hadrones. Los bariones están formados por tres cuarks. Las muestras de bariones, incluido el contenido y las propiedades de los cuarks, se indican en la [Tabla 11.4](#). Curiosamente, el barión delta más ( $\Delta^+$ ) está formado por los mismos tres cuarks que el protón, pero el espín total de la partícula es 3/2 en lugar de 1/2. Del mismo modo, la masa de  $\Delta^+$  con espín 3/2 es 1,3 veces la masa del protón, y el barión delta cero ( $\Delta^0$ ) con un espín 3/2 es 1,3 veces la masa del neutrón. Evidentemente, la energía asociada al espín (o momento angular) de la partícula contribuye a su energía de masa. También es que no se cree que existan bariones con cuarks top, porque los cuarks top decaen demasiado rápido para unirse a los otros cuarks en su producción.

Nombre	Símbolo	Cuarks	Carga (unidad de e)	Espín (s)	Masa (GeV/ $c^2$ )
Protón	p	<i>u u d</i>	1	1/2	0,938
Neutrón	n	<i>u d d</i>	0	1/2	0,940
Delta más más	$\Delta^{++}$	<i>u u u</i>	2	3/2	1,232
Delta más	$\Delta^+$	<i>u u d</i>	1	3/2	1,232
Delta cero	$\Delta^0$	<i>u d d</i>	0	3/2	1,232
Delta menos	$\Delta^-$	<i>d d d</i>	-1	3/2	1,232
Lambda cero	$\Lambda^0$	<i>u d s</i>	0	1/2	1,116
Sigma positivo	$\Sigma^+$	<i>u u s</i>	1	1/2	1,189
Sigma neutral	$\Sigma^0$	<i>u d s</i>	0	1/2	1,192
xi negativo	$\Xi^-$	<i>s d s</i>	-1	1/2	1,321
xi neutral	$\Xi^0$	<i>s u s</i>	0	1/2	1,315
Omega menos	$\Omega^-$	<i>s s s</i>	-1	3/2	1,672
Lambda encantado	$\Lambda_C^+$	<i>u d c</i>	1	1/2	2,281
Lambda inferior	$\Lambda_b^0$	<i>u d b</i>	0	1/2	5,619

TABLA 11.4 Cuarks bariónicos

Los mesones están formados por dos cuarks que conforman un par cuark-anticuark. Los mesones de muestra, incluido el contenido y las propiedades de los cuarks, figuran en la [Tabla 11.5](#). Consideremos la formación del pión ( $\pi^+ = u\bar{d}$ ). Con base en su contenido de cuarks, la carga del pión es

$$\frac{2}{3}e + \frac{1}{3}e = e.$$

Ambos cuarks son de medio espín ( $s = 1/2$ ), por lo que el espín resultante es 0 o 1. El espín del mesón  $\pi^+$  es 0. La misma combinación cuark-anticuark da el mesón rho ( $\rho$ ) con espín 1. Este mesón tiene una masa aproximadamente 5,5 veces la del mesón  $\pi^+$ .

## EJEMPLO 11.4

### Estructura de los cuarks

Demuestre que la composición de cuarks dada en la [Tabla 11.5](#) para  $\Xi^0$  es coherente con la carga, el espín y la extrañeza conocidos de este barión.

#### Estrategia

$\Xi^0$  está compuesto por dos cuarks extraño y un cuark arriba ( $s u s$ ). Podemos sumar las propiedades de los cuarks para predecir las propiedades resultantes del barión  $\Xi^0$ .

#### Solución

La carga del cuark  $s$  es  $-e/3$  y la carga del cuark  $u$  es  $2e/3$ . Así, la combinación ( $s u s$ ) no tiene carga neta, de acuerdo con la carga conocida de  $\Xi^0$ . Dado que tres cuarks de espín  $-1/2$  pueden combinarse para producir una partícula con espín de  $1/2$  o  $3/2$ , la composición de cuarks es consistente con el espín conocido ( $s = 1/2$ ) de  $\Xi^0$ . Finalmente, la extrañeza neta de la combinación ( $s u s$ ) es  $(-1) + 0 + (-1) = -2$ , que también coincide con el experimento.

#### Importancia

La carga, el espín y la extrañeza de la partícula  $\Xi^0$  puede determinarse a partir de las propiedades de los cuarks que la componen. La gran diversidad de bariones y mesones se debe a las propiedades de solo seis cuarks: arriba, abajo, encantado, extraño, superior y e inferior.

## COMPRUEBE LO APRENDIDO 11.4

¿Cuál es el número bariónico de un pion?

Nombre	Símbolo	Cuarks	Carga (e)	Espín	Masa (GeV/c <sup>2</sup> )
Pion positivo	$\pi^+$	$\bar{u}d$	1	0	0,140
Rho positivo	$\rho^+$	$\bar{u}d$	1	1	0,768
Pion negativo	$\pi^-$	$\bar{u}d$	-1	0	0,140
Rho negativo	$\rho^-$	$\bar{u}d$	-1	1	0,768
Pion neutral	$\pi^0$	$\bar{u}u$ o $\bar{d}d$	0	0	0,135
Eta neutral	$\eta^0$	$\bar{u}u, \bar{d}d$ o $\bar{s}s$	0	0	0,547
Kaón positivo	$K^+$	$u\bar{s}$	1	0	0,494

Nombre	Símbolo	Cuarks	Carga (e)	Espín	Masa (GeV/c <sup>2</sup> )
Kaón neutral	K <sup>0</sup>	$d\bar{s}$	0	0	0,498
Kaón negativo	K <sup>-</sup>	$\bar{u}s$	-1	0	0,494
J/Psi	J/ψ	$\bar{c}c$	0	1	3,10
Eta encantada	η <sub>0</sub>	$\bar{c}c$	0	0	2,98
D neutral	D <sup>0</sup>	$\bar{u}c$	0	0	1,86
D neutral	D <sup>*0</sup>	$\bar{u}c$	0	1	2,01
D positivo	D <sup>+</sup>	$\bar{d}c$	1	0	1,87
B neutral	B <sup>0</sup>	$\bar{d}b$	0	0	5,26
Upsilon	Υ	$\bar{b}b$	0	1	9,46

TABLA 11.5 Cuarks mesones

## Color

Los cuarks son fermiones que obedecen el principio de exclusión de Pauli, por lo que es sorprendente saber que tres cuarks pueden unirse dentro de un núcleo. Por ejemplo, ¿cómo pueden existir dos cuarks arriba en la misma pequeña región del espacio dentro de un protón? La solución es inventar una tercera propiedad nueva para distinguirlas. Esta propiedad se llama **color**, y juega el mismo papel en la interacción nuclear fuerte que la carga en las interacciones electromagnéticas. Por esta razón, el color de los cuarks se llama a veces "carga fuerte".

Los cuarks son de tres colores: rojo, verde y azul. (Estas son solo marcas, los cuarks no tienen color). Cada tipo de cuark ( $u, d, c, s, b, t$ ) puede ser de cualquier otro color. Por ejemplo, existen tres cuarks extraños: un cuark extraño rojo, un cuark extraño verde y un cuark extraño azul. Los anticuarks tienen anticolor. Los cuarks que se unen para formar hadrones (bariones y mesones) deben ser de color neutro, incoloro o "blanco". Por lo tanto, un barión debe contener un cuark rojo, azul y verde. Asimismo, un mesón contiene un par de cuarks rojo-antirrojo, azul-antiazul o verde-antiverde. Así, dos cuarks pueden encontrarse en el mismo estado de espín en un hadrón, sin violar el principio de exclusión de Pauli, porque sus colores son diferentes.

## Confinamiento de cuarks

Las primeras pruebas sólidas de la existencia de los cuarks proceden de una serie de experimentos realizados en el Centro del Acelerador Lineal de Stanford (Stanford Linear Accelerator Center, SLAC) y en la Organización Europea para la Investigación Nuclear (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire, CERN) hacia 1970. Este experimento se diseñó para sondear la estructura del protón, al igual que Rutherford estudió la estructura del interior del átomo con sus experimentos de dispersión de partículas α. Los electrones colisionaron con protones con energía superior a 20 GeV. Con esta energía,  $E \approx pc$ , por lo que la longitud de onda de De Broglie de un electrón es

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{E} \approx 6 \times 10^{-17} \text{ m.}$$

11.1

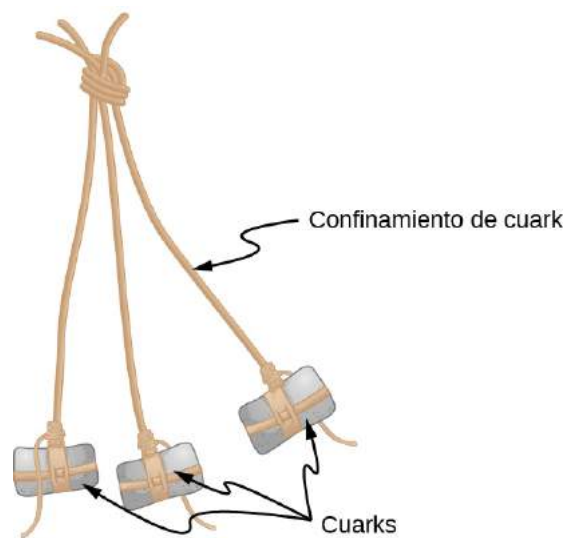
La longitud de onda del electrón es mucho menor que el diámetro del protón (aproximadamente  $10^{-15}$  m). Por lo tanto, al igual que un automóvil que viaja a través de una cordillera rocosa, los electrones pueden utilizarse para sondear la estructura del núcleo.

Los experimentos del SLAC descubrieron que algunos electrones se desviaban en ángulos muy grandes, lo que indicaba la existencia de pequeños centros de dispersión dentro del protón. La distribución de la dispersión era consistente con la dispersión de los electrones desde sitios con espín  $1/2$ , el espín de los cuarks. Los experimentos del CERN utilizaron neutrinos en lugar de electrones. Este experimento también encontró pruebas de los diminutos centros de dispersión. En ambos experimentos, los resultados sugieren que las cargas de las partículas de dispersión eran  $+2/3e$  o  $-1/3e$ , conforme con el modelo de cuarks.

### INTERACTIVO

Vea este [vídeo \(https://openstax.org/l/21quarks\)](https://openstax.org/l/21quarks) para saber más sobre los cuarks.

El modelo de los cuarks ha tenido mucho éxito a la hora de organizar el complejo mundo de las partículas subatómicas. Sin embargo, es interesante que ningún experimento haya producido un cuark aislado. Todos los cuarks tienen carga fraccionaria y, por tanto, deberían ser fácilmente distinguibles de las partículas elementales conocidas, cuyas cargas son todas un múltiplo entero de  $e$ . ¿Por qué no se observan cuarks aislados? En los modelos actuales de interacciones de partículas, la respuesta se expresa en términos de confinamiento de cuarks. El confinamiento de cuarks se refiere al confinamiento de cuarks en grupos de dos o tres en una pequeña región del espacio. Los cuarks tienen total libertad para moverse en este espacio y enviar y recibir gluones (los portadores de la fuerza fuerte). Sin embargo, si estos cuarks se alejan demasiado unos de otros, la fuerza fuerte los hace retroceder. Esta acción se asemeja a una boleadora, un arma utilizada para la caza (Figura 11.5). Las piedras están atadas a un punto central mediante una cuerda, de modo que ninguna de las rocas puede alejarse demasiado de las demás. La boleadora corresponde a un barión, las piedras a los cuarks y la cuerda a los gluones que mantienen unido el sistema.



**FIGURA 11.5** Un barión es análogo a una boleadora, un arma utilizada para la caza. Las rocas de esta imagen corresponden a los cuarks bariónicos. Los cuarks son libres de moverse pero deben permanecer cerca de otros cuarks.

## 11.4 Aceleradores y detectores de partículas

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

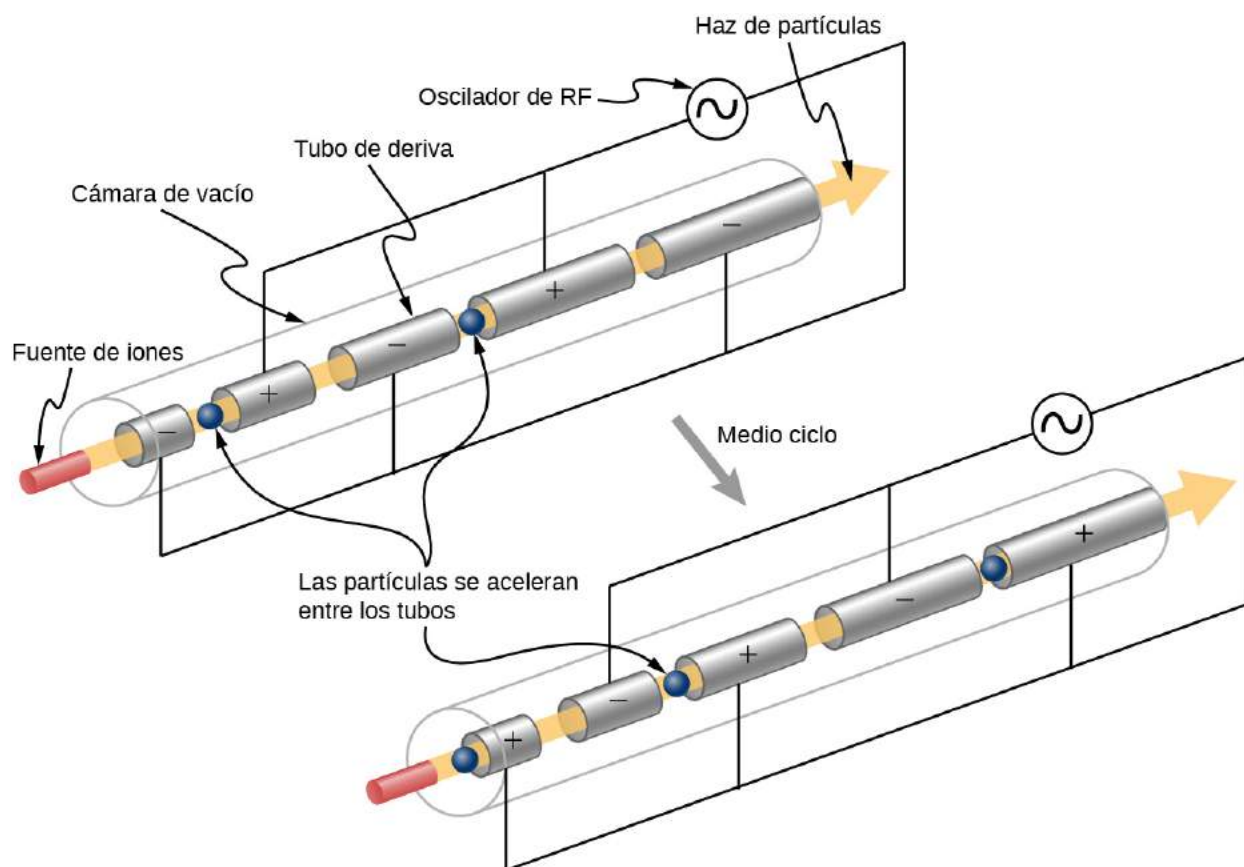
- Comparar y contrastar diferentes tipos de aceleradores de partículas.
- Describir la finalidad, los componentes y el funcionamiento de una máquina colisionadora de haces típica.
- Explicar la función de cada tipo de subdetector en un detector de partículas multipropósito típico.
- Utilizar la curvatura de una pista de carga para determinar el momento de una partícula.

El objetivo de la física experimental de partículas es medir con precisión las partículas elementales. El principal método utilizado para lograrlo es producir estas partículas en colisiones de alta energía y luego medir los productos utilizando detectores de partículas altamente sensibles. Estos experimentos se utilizan para probar y revisar los modelos científicos de las interacciones de las partículas. El objetivo de esta sección es describir los aceleradores y detectores de partículas. Las máquinas modernas se basan en las anteriores, por lo que resulta útil presentar una breve historia de los aceleradores y detectores.

### Los primeros aceleradores de partículas

Un **acelerador de partículas** es una máquina diseñada para acelerar partículas cargadas. Esta aceleración suele conseguirse con fuertes campos eléctricos, magnéticos o ambos. Un ejemplo sencillo de acelerador de partículas es el acelerador de Van de Graaff (vea [Potencial eléctrico \(http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-2/pages/7-introduccion\)](http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-2/pages/7-introduccion)). Este tipo de acelerador recoge las cargas en una esfera metálica hueca mediante una banda móvil. Cuando la diferencia de potencial electrostático de la esfera es lo suficientemente grande, el campo se utiliza para acelerar las partículas a través de un tubo evacuado. Las energías producidas por un acelerador Van de Graaff no son lo suficientemente grandes como para crear nuevas partículas, pero la máquina fue importante para la exploración temprana del núcleo atómico.

Un acelerador lineal (llamado "linac") puede producir energías mayores. Las partículas cargadas producidas al principio del linac se aceleran por una línea continua de tubos huecos cargados. El voltaje entre un par de tubos determinado se ajusta para atraer la partícula cargada, y una vez que ésta llega, el voltaje entre el siguiente par de tubos se ajusta para empujar la partícula cargada hacia fuera. En otras palabras, los voltajes se aplican de tal manera que los tubos dan una serie de "patadas" eléctricas cuidadosamente sincronizadas ([Figura 11.6](#)). Los linacs modernos emplean cavidades de radiofrecuencia (RF) que establecen campos electromagnéticos oscilantes, que impulsan la partícula hacia adelante como un surfista en una ola del océano. Los linacs pueden acelerar los electrones hasta más de 100 MeV. (Los electrones con energías cinéticas superiores a 2 MeV se mueven muy cerca de la velocidad de la luz). En la investigación moderna de partículas, los aceleradores lineales se utilizan a menudo en la primera etapa de la aceleración.



**FIGURA 11.6** En un acelerador lineal, los tubos cargados aceleran las partículas en una serie de "patadas" electromagnéticas. Cada tubo es más largo que el anterior porque la partícula se mueve más rápido al acelerar.

### EJEMPLO 11.5

#### Tubos aceleradores

Un acelerador lineal diseñado para producir un haz de protones de 800-MeV tiene 2000 tubos de aceleración separados por brechas. ¿Qué voltaje promedio hay que aplicar entre los tubos para conseguir la energía deseada? (Pista:  $U = qV$ .)

#### Estrategia

La energía que recibe el protón en cada brecha entre tubos es  $U = qV$ , donde  $q$  es la carga del protón y  $V$  es la diferencia de potencial (voltaje) a través de la brecha. Dado que  $q = q_e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$  y  $1 \text{ eV} = (1 \text{ V})(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})$ , el protón gana 1 eV de energía por cada voltio que atraviesa la brecha. El voltaje alterno aplicado a los tubos está programada para que se sume a la energía de cada brecha. El voltaje efectivo es la suma de los voltajes de las brechas y es igual a 800 MV para dar a cada protón una energía de 800 MeV.

#### Solución

Hay 2.000 brechas y la suma de los voltajes que los atraviesan es de 800 MV. Por lo tanto, el voltaje medio aplicado es de 0,4 MV o 400 kV.

#### Importancia

Un voltaje de esta magnitud no es difícil de conseguir en el vacío. Se necesitarían voltajes de brecha mucho mayores para energías más altas, como las de la instalación del Centro del Acelerador Lineal de Stanford (Stanford Linear Accelerator Center, SLAC), de 50-GeV. Los sincrotrones se ven favorecidos por la trayectoria circular de las partículas aceleradas, que pueden orbitar muchas veces, multiplicando efectivamente el



número de aceleraciones por el número de órbitas. Esto permite alcanzar energías superiores a 1 TeV.

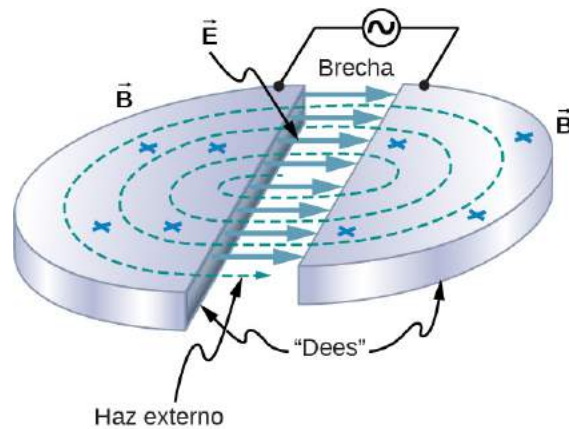
### ✓ **COMPRUEBE LO APRENDIDO 11.5**

¿Cuánta energía recibe un electrón al acelerar a través de una diferencia de potencial de 1 V?

El acelerador de próxima generación después del linac es el ciclotrón (Figura 11.7). Un ciclotrón utiliza campos eléctricos alternos e imanes fijos para acelerar partículas en una trayectoria circular en espiral. Una partícula en el centro del ciclotrón se acelera en primer lugar por un campo eléctrico en una brecha entre dos imanes en forma de D (Dees). Cuando la partícula cruza sobre el imán en forma de D, se dobla en una trayectoria circular por una fuerza de Lorentz. (La fuerza de Lorentz se estudió en [Fuerzas y campos magnéticos \(http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-2/pages/11-introduccion\)](http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-2/pages/11-introduccion)). Suponiendo que no hay pérdidas de energía, el momento de la partícula está relacionado con su radio de curvatura por

$$p = 0,3Br \quad 11.2$$

donde  $p$  es el momento en GeV/c,  $B$  está en teslas, y  $r$  es el radio de la trayectoria ("órbita") en metros. Esta expresión es válida para las velocidades clásicas y relativistas. La trayectoria circular devuelve la partícula a la brecha del campo eléctrico, el campo eléctrico se invierte y el proceso continúa. A medida que la partícula se acelera, el radio de curvatura se hace cada vez más grande (en forma de espiral) hasta que los electrones salen del dispositivo.



**FIGURA 11.7** Los ciclotrones utilizan un campo magnético para hacer que las partículas se muevan en órbitas circulares. A medida que las partículas pasan entre las placas del "Dees", el voltaje a través de la brecha se invierte para que las partículas se aceleren dos veces en cada órbita.

### 🔗 **INTERACTIVO**

Vea este [vídeo \(https://openstax.org/l/21cyclotron\)](https://openstax.org/l/21cyclotron) para saber más sobre los ciclotrones.

Un **sincrotrón** es un acelerador circular que utiliza un voltaje alterno y una intensidad de campo magnético creciente para acelerar las partículas hasta alcanzar energías más altas. Las partículas cargadas son aceleradas por cavidades de radiofrecuencia y dirigidas y enfocadas por imanes. Las cavidades de RF se *sincronizan* para dar "patadas" a las partículas a su paso, de ahí su nombre. Para dirigir partículas de alta energía se necesitan campos magnéticos potentes, por lo que se suelen utilizar imanes superconductores para reducir las pérdidas de calor. Cuando las partículas cargadas se mueven en círculo, irradian energía: Según la teoría clásica, cualquier partícula cargada que se acelera (y el movimiento circular es un movimiento acelerado) también irradia. En un sincrotrón, dicha radiación se denomina **radiación de sincrotrón**. Esta radiación es útil para muchos otros fines, como la investigación médica y de materiales.

## EJEMPLO 11.6

### La energía de un electrón en un ciclotrón

Un electrón se acelera con un ciclotrón. Si el campo magnético es de 1,5 T y el radio del "Dees" es de 1,2 m, ¿cuál es la energía cinética de la partícula saliente?

#### Estrategia

Si el radio de la órbita del electrón supera el radio del "Dees", el electrón sale del dispositivo. Así, el radio del "Dees" pone un límite superior al radio y, por tanto, al momento y la energía de la partícula acelerada. El momento de salida de la partícula se determina utilizando el radio de la órbita y la intensidad del campo magnético. La energía de salida de la partícula se puede determinar el momento de la partícula ([Relatividad](#)).

#### Solución

Suponiendo que no hay pérdidas de energía, el momento de la partícula en el ciclotrón es

$$p = 0,3Br = 0,3(1,5 \text{ T})(1,2 \text{ m}) = 0,543 \text{ GeV}/c.$$

La energía del momento  $pc^2 = 0,543 \text{ GeV} = 543 \text{ MeV}$  es mucho mayor que la energía de la masa en reposo del electrón,  $mc^2 = 0,511 \text{ MeV}$ , por lo que hay que utilizar la expresión relativista para la energía del electrón (vea [Relatividad](#)). La energía total del electrón es

$$E_{\text{total}} = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} = \sqrt{(543)^2 + (0,511)^2} \approx 543 \text{ MeV y}$$

$$K = E_{\text{total}} - mc^2 = 543 \text{ GeV} - 0,511 \text{ GeV} \approx 543 \text{ MeV}.$$

#### Importancia

La energía total del electrón es mucho mayor que la energía de su masa en reposo. En otras palabras, la energía total del electrón es casi toda en forma de energía cinética. Los ciclotrones pueden utilizarse para realizar experimentos de física nuclear o en la terapia de partículas para tratar el cáncer.

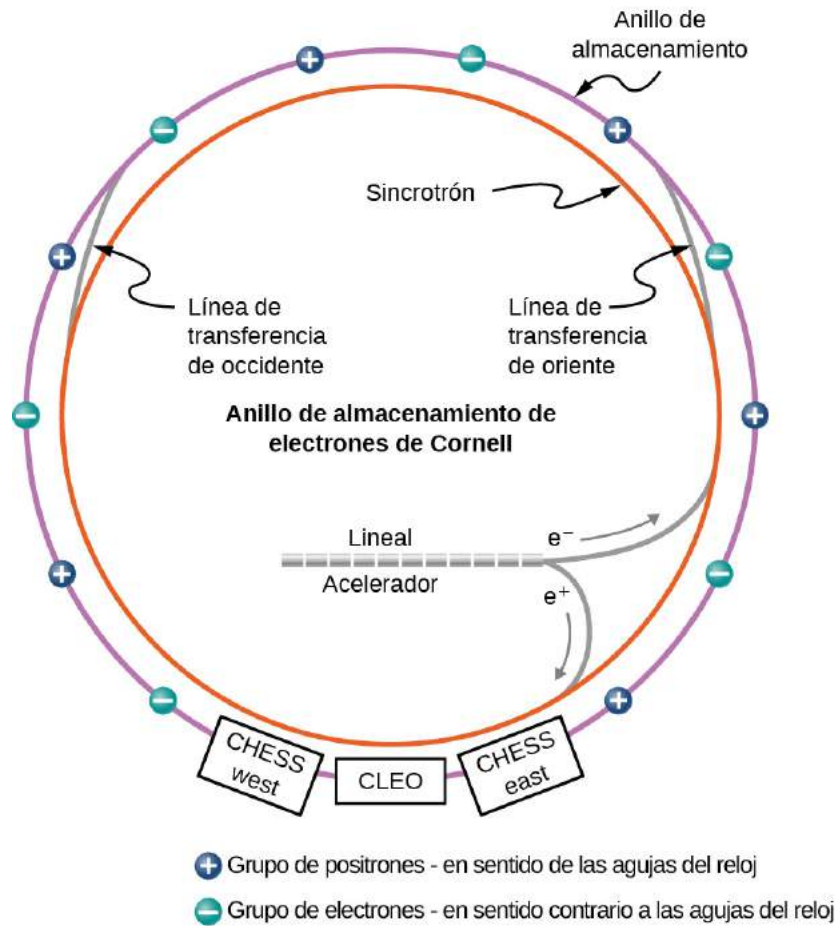
## COMPRUEBE LO APRENDIDO 11.6

Una partícula cargada de un determinado momento se desplaza en un arco a través de un campo magnético uniforme. ¿Qué ocurre si se duplica el campo magnético?

### Máquina de haces de partículas colisionantes

Se pueden crear nuevas partículas mediante la colisión de partículas a altas energías. Según la relación masa-energía de Einstein, las energías de las partículas que colisionan se convierten en energía de la masa de la partícula creada. La forma más eficaz de hacerlo es con máquinas de haces de partículas colisionantes. Una máquina de haces de partículas colisionantes crea dos haces que giran en sentido contrario en un acelerador circular, los almacena con una energía constante y a continuación, en el momento deseado, enfoca los haces entre sí en el centro de un detector sensible.

El prototipo de máquina de haces de colisión es el Anillo de almacenamiento de electrones de Cornell (Cornell Electron Storage Ring) situado en Ithaca, Nueva York ([Figura 11.8](#)). Los electrones ( $e^-$ ) y los positrones ( $e^+$ ) se crean al principio del acelerador lineal y se aceleran hasta 150 MeV. A continuación, las partículas se inyectan en el anillo interior del sincrotrón, donde se aceleran mediante cavidades de RF hasta alcanzar entre 4,5 y 6 GeV. Cuando los haces adquieren velocidad, se transfieren y "almacenan" en un anillo de almacenamiento exterior con la misma energía. Los dos haces que giran en sentido contrario viajan por el mismo tubo evacuado, pero se mantienen separados hasta que se desea que colisionen. Los electrones y positrones giran alrededor de la máquina en grupos 390.000 veces por segundo.



**FIGURA 11.8** El anillo de almacenamiento de electrones de Cornell utiliza un acelerador lineal y un sincrotrón para acelerar electrones y positrones a 4,5 - 6 GeV. Las partículas se mantienen en el anillo de almacenamiento exterior a esa energía hasta que se las hace colisionar en un detector de partículas (crédito: modificación del trabajo del Laboratorio de Estudios Nucleares, Anillo de almacenamiento de electrones de Cornell).

Cuando un electrón y un positrón colisionan, se aniquilan mutuamente para producir un fotón, que existe durante un tiempo demasiado corto para ser detectado. El fotón produce un par de leptones (por ejemplo, un electrón y una posición, un muon o un antimuon, o un tau y un antitau) o un par de cuarks. Si se producen cuarks, se forman mesones, como  $c\bar{c}$  y  $b\bar{b}$ . Estos mesones se crean casi en reposo ya que el momento total inicial del sistema electrón-positrón es cero. Observe que los mesones no pueden crearse a cualquier energía de colisión, sino solo a las energías "resonantes" que corresponden a las masas únicas de los mesones (Tabla 11.5). Los mesones creados de este modo son muy inestables y decaen rápidamente en partículas más ligeras, como electrones, protones y fotones. Los "fragmentos" de las colisiones proporcionan una valiosa información sobre las interacciones de las partículas.

A medida que avanza el campo de la física de partículas, las máquinas de haces de partículas colisionantes son cada vez más potentes. El Gran Colisionador de Hadrones (Large Hadron Collider, LHC), actualmente el mayor acelerador del mundo colisiona protones a energías de haz superiores a 6 TeV. La energía del centro de masa ( $W$ ) se refiere a la energía total disponible para crear nuevas partículas en una máquina de colisión, o la energía total de las partículas entrantes en el marco del centro de masa. (El concepto de marco de referencia del centro de masa se trata en [Momento lineal y colisiones \(http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-1/pages/9-introduccion\)](http://openstax.org/books/fisica-universitaria-volumen-1/pages/9-introduccion)). Por lo tanto, el LHC es capaz de producir una o más partículas con una masa total superior a 12 TeV. La energía del centro de masa está dada por:

$$W^2 = 2 [E_1 E_2 + (p_1 c)(p_2 c)] + (m_1 c^2)^2 + (m_2 c^2)^2,$$

donde  $E_1$  y  $E_2$  son las energías totales de las partículas entrantes (1 y 2),  $p_1$  y  $p_2$  son las magnitudes de sus momentos, y  $m_1$  y  $m_2$  son sus masas en reposo.



### EJEMPLO 11.7

#### Creación de una nueva partícula

La masa del mesón upsilon ( $\Upsilon$ ) ( $b\bar{b}$ ) se crea en un colisionador simétrico de electrones y positrones. ¿Qué energía del haz se necesita?

#### Estrategia

El Grupo de Datos de Partículas (<https://openstax.org/l/21particledata>) (Particle Data Group) ha declarado que la energía de la masa en reposo de este mesón es de aproximadamente 10,58 GeV. La expresión anterior para la energía del centro de masa puede simplificarse porque un colisionador simétrico implica  $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ . Además, las masas en reposo de los electrones y positrones que colisionan son idénticas ( $m_e c^2 = 0,511$  MeV) y mucho menores que la masa de la partícula de energía creada. Así, la energía del centro de la masa ( $W$ ) puede expresarse completamente en términos de la energía del haz,  $E_{\text{haz}} = E_1 = E_2$ .

#### Solución

Con base en las suposiciones anteriores, tenemos

$$W^2 \approx 2[E_1 E_2 + E_1 E_2] = 4E_1 E_2 = 4E_1^2.$$

Por lo tanto, la energía del haz es

$$E_{\text{haz}} \approx E_1 = \frac{W}{2}.$$

La energía de la masa en reposo de la partícula creada en la colisión es igual a la energía del centro de masa, por lo que

$$E_{\text{haz}} \approx \frac{10,58 \text{ GeV}}{2} = 5,29 \text{ GeV}.$$

#### Importancia

Dada la escala de energía de este problema, la energía de masa en reposo del mesón upsilon ( $\Upsilon$ ) se debe casi por completo a las energías cinéticas iniciales del electrón y los positrones. Este mesón es muy inestable y decae rápidamente en partículas más ligeras y estables. La existencia de la partícula upsilon ( $\Upsilon$ ) aparece como un aumento dramático de tales eventos a 5,29 GeV.



### COMPRUEBE LO APRENDIDO 11.7

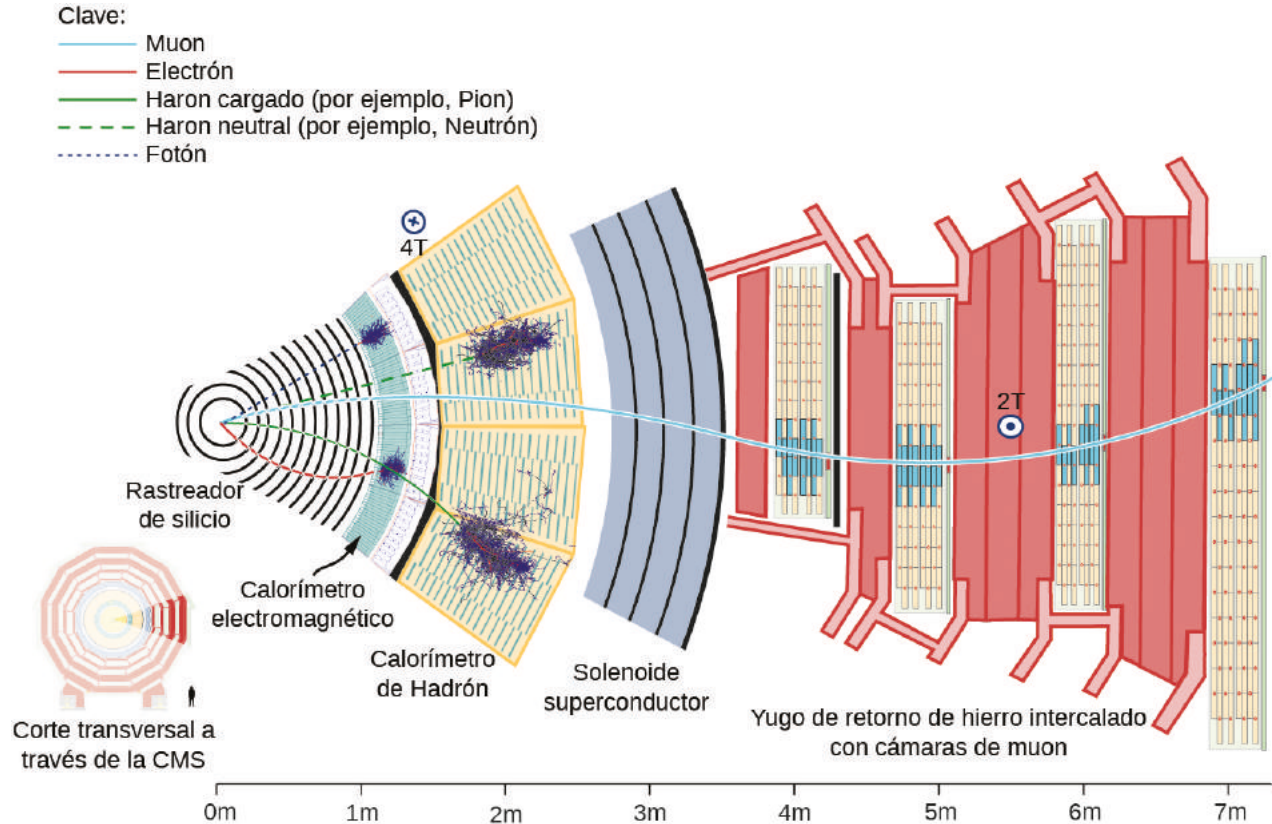
¿Por qué un colisionador simétrico es "simétrico"?

Las energías de los haces más altas requieren aceleradores más grandes, por lo que las máquinas modernas de haces de colisión son muy grandes. El LHC, por ejemplo, tiene 17 millas de circunferencia (Figura 5.27). (¡En los años 40, Enrico Fermi imaginó un acelerador que rodeara toda la Tierra!) Un importante reto científico del siglo XXI es reducir el tamaño de los aceleradores de partículas.

#### Detectores de partículas

El objetivo de un **detector de partículas** es medir con precisión el resultado de las colisiones creadas por un acelerador de partículas. Los detectores son multipropósito. En otras palabras, el detector está dividido en muchos subdetectores, cada uno de ellos diseñado para medir un aspecto diferente del evento de colisión. Por ejemplo, un detector puede estar diseñado para medir fotones y otro para medir muones. Para ilustrar cómo los subdetectores contribuyen a la comprensión de un evento de colisión completo, describimos los subdetectores del Solenoide Compacto de Muones (Compact Muon Solenoid, CMS), que fue utilizado para

descubrir el Bosón de Higgs en el LHC ([Figura 11.9](#)).

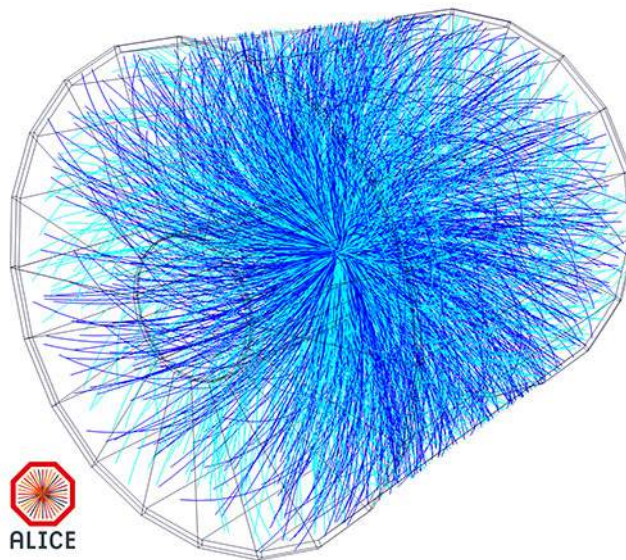


**FIGURA 11.9** Detector solenoide compacto de muones El detector consta de varias capas, cada una de las cuales se encarga de medir diferentes tipos de partículas (crédito: modificación del trabajo de David Barney / CERN).

El tubo del haz del detector está fuera (y dentro) de la página de la izquierda. Las partículas producidas por las colisiones  $pp$  (los "fragmentos de colisión") salen del detector en todas las direcciones. Estas partículas se encuentran con múltiples capas de subdetectores. Un subdetector es un detector de partículas dentro de un sistema mayor de detectores diseñado para medir ciertos tipos de partículas. Hay varios tipos principales de subdetectores. Los dispositivos de seguimiento determinan la trayectoria y por tanto, el momento de una partícula; los calorímetros miden la energía de una partícula; y los detectores de identificación de partículas determinan la identidad de una partícula (su masa).

El primer conjunto de subdetectores que encuentran las partículas es el sistema de seguimiento de silicio. Este sistema está diseñado para medir el momento de las partículas cargadas (como los electrones y los protones). El detector está inmerso en un campo magnético uniforme, por lo que las partículas cargadas se doblan en una trayectoria circular por una fuerza de Lorentz (como en el caso del ciclotrón). Si el momento de la partícula es grande, el radio de la trayectoria es grande y la trayectoria es casi recta. Pero si el momento es pequeño, el radio de la trayectoria es pequeño, y la trayectoria está muy curvada. A medida que las partículas pasan por el detector, interactúan con los detectores de microbandas (microstrips) de silicio en múltiples puntos. Estos detectores producen pequeñas señales eléctricas cuando las partículas cargadas pasan cerca de los elementos detectores. A continuación, las señales se amplifican y se registran. Una serie de "golpes" eléctricos se utiliza para determinar la trayectoria de la partícula en el sistema de seguimiento. Un "mejor ajuste" generado por computadora para esta trayectoria da el radio de la pista y en consecuencia, el momento de la partícula. En el LHC, se registra un gran número de pistas para el mismo evento de colisión. Las líneas azules y verdes de la [Figura 11.10](#) muestran los ajustes de las pistas.





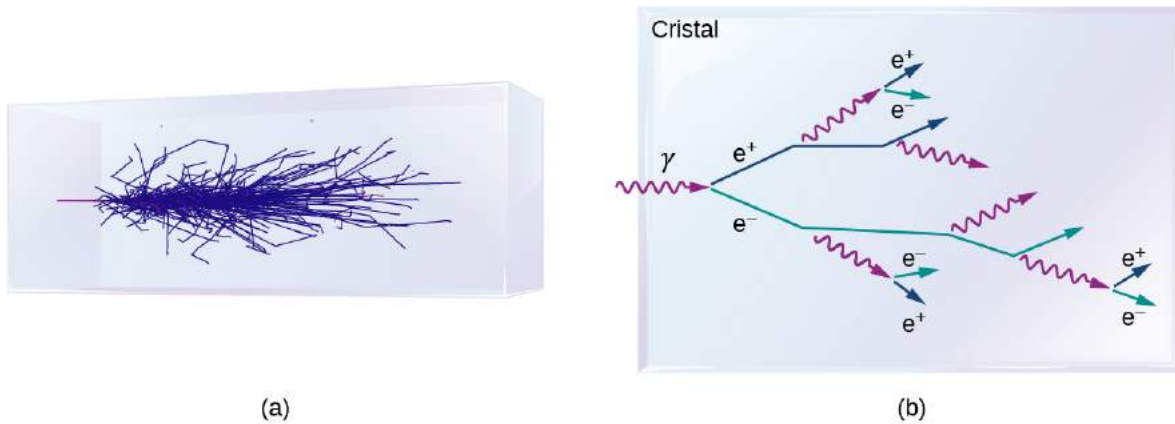
**FIGURA 11.10** Vista tridimensional de un evento de colisión de iones pesados en el LHC visto por el detector ALICE (crédito: LHC/CERN).

Más allá de las capas de seguimiento está el calorímetro electromagnético. Este detector está fabricado con cristales transparentes a base de plomo. Cuando los electrones interactúan con los cristales, irradian fotones de alta energía. Los fotones interactúan con el cristal para producir pares electrón-positrón. Luego, estas partículas irradian más fotones. El proceso se repite, produciendo una lluvia de partículas (el cristal "brilla"). Un modelo simplificado de este proceso es el siguiente.

Un electrón con energía  $E_0$  golpea el cristal y pierde la mitad de su energía en forma de fotón. El fotón produce un par electrón-positrón, y cada partícula se aleja con la mitad de la energía del fotón. Mientras tanto, el electrón original vuelve a irradiar. Así, nos quedan cuatro partículas: dos electrones, un positrón y un fotón, cada uno con una energía  $E_0/4$ . El número de partículas en la lluvia aumenta geométricamente. Después de  $n$  eventos de radiación, hay partículas  $N = 2^n$ . Por lo tanto, la energía total por partícula después de  $n$  eventos de radiación es

$$E(t) = \frac{E_0}{2^n},$$

donde  $E_0$  es la energía incidente y  $E(t)$  es la cantidad de energía por partícula después de  $n$  eventos. Un fotón entrante desencadena una cadena de acontecimientos similar (Figura 11.11). Si la energía por partícula cae por debajo de un determinado valor umbral, otros tipos de procesos radioactivos adquieren importancia y la lluvia de partículas cesa. Finalmente, la energía total de la partícula entrante se absorbe y se convierte en una señal eléctrica.



**FIGURA 11.11** (a) Una lluvia de partículas producida en un calorímetro de cristal. (b) Un diagrama que muestra una secuencia típica de reacciones en una lluvia de partículas.

Más allá del calorímetro de cristal está el calorímetro de hadrones. Como su nombre indica, este subdetector mide hadrones como protones y piones. El calorímetro de hadrones está formado por capas de latón y acero separadas por centelleadores de plástico. Su objetivo es absorber la energía de las partículas y convertirla en una señal electrónica. Más allá de este detector hay una gran bobina magnética que se utiliza para producir un campo uniforme para el seguimiento.

El último subdetector es el detector de muones, que consiste en placas de hierro que solo pueden atravesar los muones (y los neutrinos). Entre las placas de hierro hay varios tipos de elementos de seguimiento de muones que miden con precisión el momento del muon. Los detectores de muones son importantes porque el bosón de Higgs (del que hablaremos en breve) puede detectarse a través de sus desintegraciones en cuatro muones, de ahí el nombre del detector.

Una vez recogidos los datos de cada uno de los subdetectores de partículas, se puede evaluar el evento de colisión completo. La energía de la  $i$ -ésima partícula se escribe

$$E_i = \sqrt{(p_i c)^2 + (m_i c^2)^2},$$

donde  $p_i$  es la magnitud absoluta del momento de la  $i$ -ésima partícula, y  $m_i$  es su masa en reposo.

Por lo tanto, la energía total de todas las partículas es

$$E_{\text{total}} = \sum_i E_i.$$

Si se detectan todas las partículas, la energía total debe ser igual a la energía del centro de masa de la máquina del haz que colisiona ( $W$ ). En la práctica, no se identifican todas las partículas, ya sea porque son demasiado difíciles de detectar (neutrinos) o porque estas partículas "se escapan". En muchos casos, se pueden "reconstruir" cadenas enteras de decaimiento, como si se recompusiera un reloj que se ha hecho pedazos. La información sobre estas cadenas de decaimiento es fundamental para la evaluación de los modelos de interacciones de las partículas.

## 11.5 El modelo estándar

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección podrá:

- Describir el modelo estándar en términos de las cuatro fuerzas fundamentales y las partículas de intercambio.
- Dibujar un diagrama de Feynman de una interacción simple de partículas.
- Utilizar el principio de incertidumbre de Heisenberg para determinar el rango de fuerzas descrito por el modelo estándar.
- Explicar los fundamentos de las teorías de la gran unificación.



La principal actividad intelectual de cualquier científico es el desarrollo y la revisión de modelos científicos. Un físico de partículas busca desarrollar modelos de interacciones de partículas. Este trabajo se basa directamente en los trabajos realizados sobre la gravedad y el electromagnetismo en los siglos XVII, XVIII y XIX. El objetivo final de la física es una "teoría del todo" unificada que describa todas las interacciones de las partículas en términos de una única ecuación elegante y una imagen. La ecuación en sí puede ser compleja, pero muchos científicos sospechan que la *idea* que hay detrás de la ecuación nos hará exclamar: "¿Cómo se nos pudo escapar? ¡Era tan obvio!"

En esta sección, presentamos el modelo estándar, que es el mejor modelo actual de las interacciones de las partículas. Describimos el modelo estándar en detalle en términos de fuerzas electromagnéticas y nucleares débiles y fuertes. Al final de esta sección, revisaremos las teorías de unificación en la física de partículas.

## Introducción al modelo estándar

El **modelo estándar** de las interacciones entre partículas contiene dos ideas: la *teoría electrodébil* y la  **cromodinámica cuántica (QCD)** (la fuerza que actúa entre las cargas de color). La teoría electrodébil unifica la teoría de la **electrodinámica cuántica (QED)**, el equivalente moderno del electromagnetismo clásico, y la teoría de las interacciones nucleares débiles. El modelo estándar combina la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica.

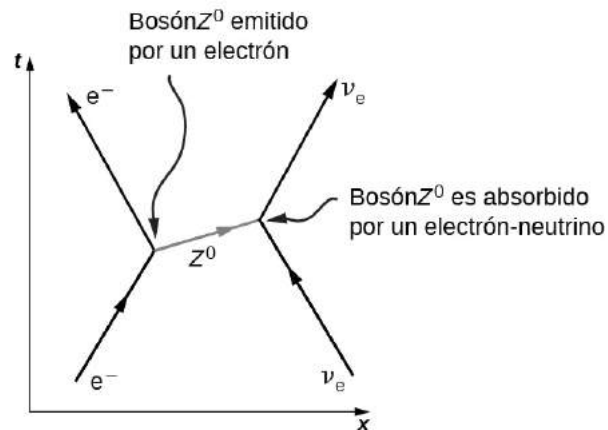
En el modelo estándar, las interacciones de las partículas se producen mediante el intercambio de bosones, los "portadores de fuerza". Por ejemplo, la fuerza electrostática se comunica entre dos partículas con carga positiva enviando y recibiendo fotones sin masa. Esto puede ocurrir en un rango teórico infinito. El resultado de estas interacciones es la repulsión (o atracción) de Coulomb. Del mismo modo, los cuarks se unen mediante el intercambio de gluones sin masa. Los leptones se desprenden de otros leptones (o decaen en partículas más ligeras) mediante el intercambio de bosones masivos W y Z. Un resumen de las fuerzas descritas por el modelo estándar se encuentra en la [Tabla 11.6](#). La fuerza gravitacional, mediada por el intercambio de gravitones sin masa, se añade en esta tabla para completarla, pero no forma parte del modelo estándar.

Fuerza	Fuerza relativa	Partículas de intercambio (bosones)	Partículas que reciben la acción	Rango
Fuerte	1	Gluon	Cuarks	$10^{-15}$ m
Electromagnética	1/137	fotón	Partículas cargadas	$\infty$
Débil	$10^{-10}$	$W^+$ , $W^-$ , bosones Z	Cuarks, leptones y neutrinos	$10^{-18}$ m
Gravitacional	$10^{-38}$	gravitón	Todas las partículas	$\infty$

**TABLA 11.6** Las cuatro fuerzas y el modelo estándar

El modelo estándar puede expresarse en términos de ecuaciones y diagramas. Las ecuaciones son complejas y suelen tratarse en un curso más avanzado de física moderna. Sin embargo, la esencia del modelo estándar puede captarse mediante los **diagramas de Feynman**. El diagrama de Feynman, inventado por el físico estadounidense Richard Feynman (1918 a 1988), es un diagrama espacio-tiempo que describe cómo se mueven e interactúan las partículas. Se utilizan diferentes símbolos para diferentes partículas. Las interacciones de las partículas en una dimensión se muestran como un gráfico tiempo-posición (no un gráfico posición-tiempo). Como ejemplo, considere la dispersión de un electrón y un neutrino electrónico ([Figura 11.12](#)). El electrón se mueve hacia valores positivos de la  $x$  (hacia la derecha) y colisiona con un neutrino electrónico que se mueve hacia la izquierda. El electrón intercambia un bosón Z (carga cero). El electrón se dispersa hacia la izquierda y el neutrino se dispersa hacia la derecha. Este intercambio no es instantáneo. El bosón Z viaja de una partícula a otra en un corto periodo de tiempo. Se dice que la interacción del electrón y el

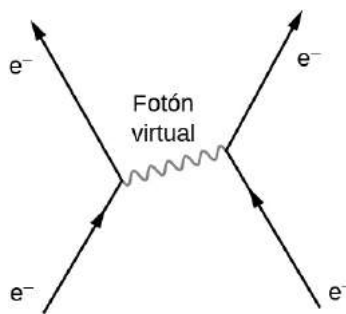
neutrino se produce a través de la fuerza nuclear débil. Esta fuerza no puede ser explicada por el electromagnetismo clásico porque la carga del neutrino es cero. La fuerza nuclear débil se analiza de nuevo más adelante en esta sección.



**FIGURA 11.12** En este diagrama de Feynman, el intercambio de un  $Z^0$  virtual transporta la fuerza nuclear débil entre un electrón y un neutrino.

### Fuerza electromagnética

Según la QED, la fuerza electromagnética se transmite entre las partículas cargadas mediante el intercambio de fotones. La teoría se basa en tres procesos básicos: Un electrón viaja de un lugar a otro, emite o absorbe un fotón y vuelve a viajar de un lugar a otro. Cuando dos electrones interactúan, uno de ellos emite el fotón y el otro lo recibe ([Figura 11.13](#)). Los fotones transfieren energía y momento de un electrón a otro. El resultado neto en este caso es una fuerza de repulsión. Los fotones intercambiados son virtuales. Una **partícula virtual** es una partícula que existe durante un tiempo demasiado corto para ser observable. Dado que el tiempo de tránsito de los fotones  $\Delta t$  es extremadamente pequeño, el principio de incertidumbre de Heisenberg establece que la incertidumbre en la energía del fotón,  $\Delta E$ , puede ser muy grande.



**FIGURA 11.13** Diagrama de Feynman de dos electrones que interactúan mediante el intercambio de un fotón.

Para estimar el alcance de la interacción electromagnética, supongamos que la incertidumbre sobre la energía es comparable a la energía del propio fotón, escrita como

$$\Delta E \approx E. \quad 11.4$$

El principio de incertidumbre de Heisenberg establece que

$$\Delta E \approx \frac{h}{\Delta t}. \quad 11.5$$

Combinando estas ecuaciones, tenemos

$$\Delta t \approx \frac{h}{E}. \quad 11.6$$

La energía de un fotón está dada por  $E = hf$ , así que

$$\Delta t \approx \frac{h}{hf} \approx \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c}. \quad 11.7$$

La distancia  $d$  que el fotón puede desplazarse en este tiempo es, por tanto

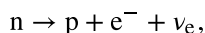
$$d = c \Delta t \approx c \left( \frac{\lambda}{c} \right) = \lambda. \quad 11.8$$

La energía del fotón virtual puede ser arbitrariamente pequeña, por lo que su longitud de onda puede ser arbitrariamente grande; en principio, incluso infinitamente grande. La fuerza electromagnética es, por tanto, una fuerza de largo alcance.

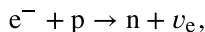
### Fuerza nuclear débil

La fuerza nuclear débil es la responsable del decaimiento radiactivo. El alcance de la fuerza nuclear débil es muy corto (solo alrededor de  $10^{-18}$  m) y al igual que las otras fuerzas del modelo estándar, puede describirse en términos de intercambio de partículas. (No existe una función simple como la fuerza de Coulomb para describir estas interacciones). La partícula intercambiada es uno de los tres bosones:  $W^+$ ,  $W^-$ , y  $Z^0$ . El modelo estándar predice la existencia de estas partículas de espín 1 y también predice sus masas específicas. En combinación con experimentos anteriores, se predijo que la masa de los bosones  $W$  cargados era  $81 \text{ GeV}/c^2$  y la de los bosones  $Z^0$  se preveía como  $90 \text{ GeV}/c^2$ . Un experimento de la Organización Europea para la Investigación Nuclear (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire, CERN) descubrió en la década de 1980 partículas con exactamente estas masas, una victoria impresionante para el modelo.

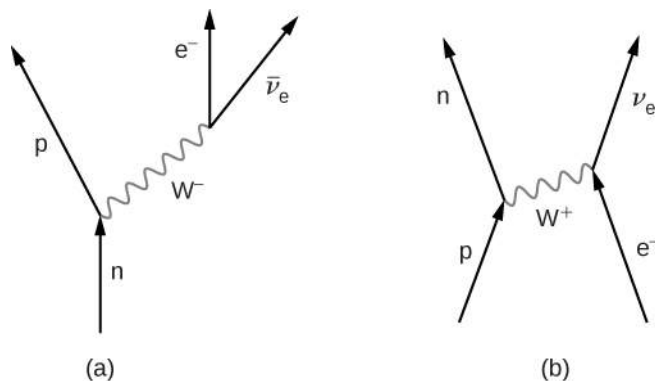
La fuerza nuclear débil se asocia con mayor frecuencia a la dispersión y decaimiento de partículas inestables en partículas ligeras. Por ejemplo, los neutrones decaen en protones a través de la fuerza nuclear débil. Esta reacción se escribe



donde  $n$  es un neutrón,  $p$  es un protón,  $e^-$  es un electrón, y  $\nu_e$  es un neutrino electrónico casi sin masa. Este proceso, llamado decaimiento beta, es importante en muchos procesos físicos. Un diagrama de Feynman del decaimiento beta se muestra en la [Figura 11.14\(a\)](#). El neutrón emite un  $W^-$  y se convierte en un protón, y luego el  $W^-$  produce un electrón y un antineutrino. Este proceso es similar al evento de dispersión



En este proceso, el protón emite un  $W^+$  y se convierte en un neutrón (b). El  $W^+$  se combina entonces con el electrón, formando un neutrino. En los ejercicios se analizan otras interacciones electrodébiles.



**FIGURA 11.14** Diagrama de Feynman de partículas que interactúan mediante el intercambio de un bosón  $W$ : (a) decaimiento beta; (b) conversión de un protón en un neutrón.

El alcance de la fuerza nuclear débil puede estimarse con un argumento similar al anterior. Suponiendo que la incertidumbre sobre la energía es comparable a la energía de la partícula de intercambio por ( $E \approx mc^2$ ), tenemos

$$\Delta t \approx \frac{h}{mc^2}. \quad 11.9$$

La distancia máxima  $d$  que puede recorrer la partícula de intercambio (suponiendo que se desplaza a una velocidad cercana a  $c$ ) es, por lo tanto

$$d \approx c\Delta t = \frac{h}{mc}. \quad 11.10$$

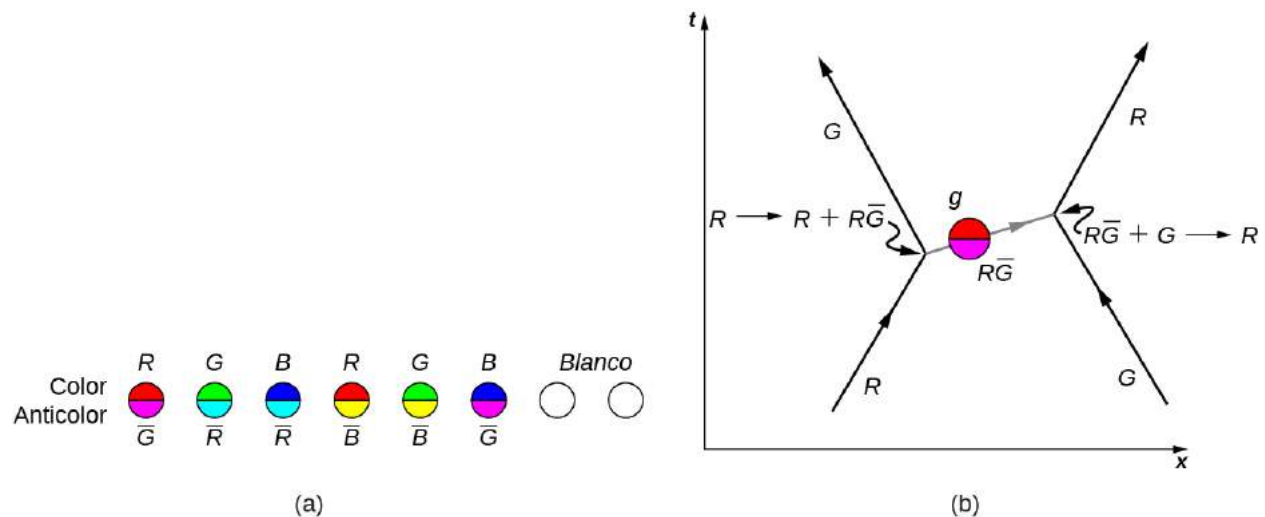
Para uno de los bosones vectoriales cargados con  $mc^2 \approx 80 \text{ GeV} = 1,28 \times 10^{-8} \text{ J}$ , obtenemos  $mc = 4,27 \times 10^{-17} \text{ J} \cdot \text{s/m}$ . Por lo tanto, el rango de la fuerza mediada por este bosón es

$$d \approx \frac{1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{4,27 \times 10^{-17} \text{ J} \cdot \text{s/m}} \approx 2 \times 10^{-18} \text{ m}. \quad 11.11$$

## Fuerza nuclear fuerte

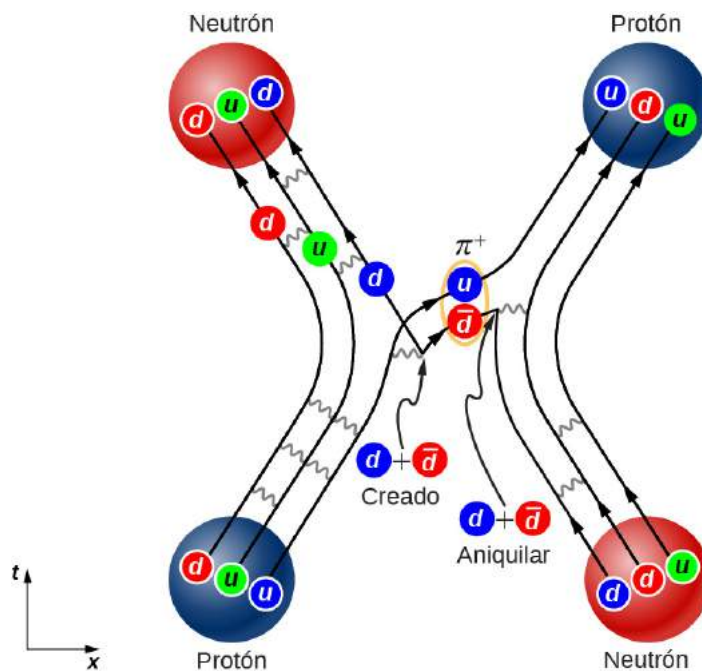
Las interacciones nucleares fuertes describen las interacciones entre los cuarks. Los detalles de estas interacciones son descritos por la QCD. Según esta teoría, los cuarks se unen enviando y recibiendo gluones. Al igual que los cuarks llevan carga eléctrica [ya sea  $(+2/3)e$  o  $(-1/3)e$ ] que determina la fuerza de las interacciones electromagnéticas entre los cuarks, estos también llevan "carga de color" (ya sea rojo, azul o verde) que determina la fuerza de las interacciones nucleares fuertes. Como ya se ha comentado, los cuarks se unen en grupos en combinaciones de color neutro (o "blanco"), como el rojo-azul-verde y el rojo-antirrojo.

Curiosamente, los propios gluones llevan carga de color. Existen ocho gluones conocidos: seis que llevan un color y un anticolor, y dos que son de color neutro (Figura 11.15(a)). Para ilustrar la interacción entre cuarks mediante el intercambio de gluones cargados, considere el diagrama de Feynman en la parte (b). A medida que aumenta el tiempo, un cuark rojo abajo se desplaza hacia la derecha y un cuark verde extraño se desplaza hacia la izquierda. (Estos aparecen en el borde inferior del gráfico). El cuark arriba intercambia un gluón rojo-antiverde con el cuark extraño. (Los anticolores se muestran como colores secundarios. Por ejemplo, el antirrojo se representa con el cian porque el cian se mezcla con el rojo para formar la luz blanca). Según la QCD, todas las interacciones en este proceso (identificadas con los vértices) deben ser de color neutro. Por lo tanto, el cuark abajo se transforma de rojo a verde, y el cuark extraño se transforma de verde a rojo.



**FIGURA 11.15** (a) Ocho tipos de gluones transportan la fuerza nuclear fuerte. Los gluones blancos son mezclas de pares color-anticolor. (b) Una interacción entre dos cuarks mediante el intercambio de un gluón.

Como sugiere este ejemplo, la interacción entre cuarks en un núcleo atómico puede ser muy complicada. La Figura 11.16 muestra la interacción entre un protón y un neutrón. Observe que el protón se convierte en neutrón y el neutrón se convierte en protón durante la interacción. La presencia de pares cuark-anticuark en el intercambio sugiere que la unión entre nucleones puede modelarse como un intercambio de piones.



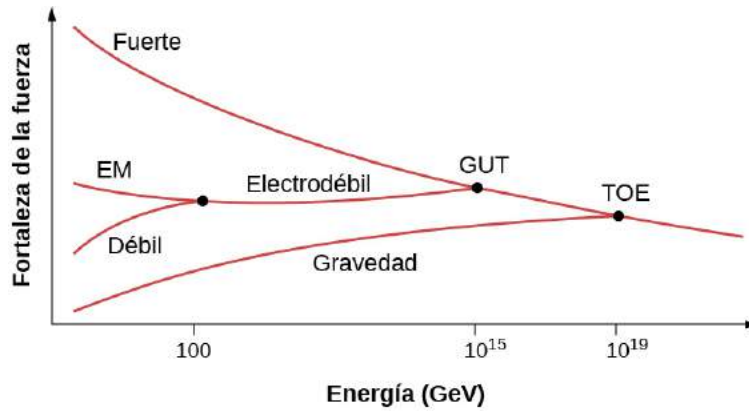
**FIGURA 11.16** Diagrama de Feynman que describe una interacción nuclear fuerte entre un protón y un neutrón.

En la práctica, las predicciones de la QCD son difíciles de producir. Esta dificultad se debe a la fuerza inherente de la fuerza y a la imposibilidad de ignorar términos en las ecuaciones. Por ello, los cálculos de la QCD se realizan a menudo con la ayuda de supercomputadoras. La existencia de los gluones está respaldada por los experimentos de dispersión electrón-nucleón. Los momentos estimados de los cuarks implicados en estos eventos de dispersión son mucho más pequeños de lo que esperaríamos sin gluones porque estos se llevan parte del momento de cada colisión.

### Teorías de la unificación

Los físicos saben desde hace tiempo que la fuerza de una interacción entre partículas depende de la distancia de la interacción. Por ejemplo, dos partículas con carga positiva experimentan una fuerza de repulsión mayor a corta distancia que a larga. En los experimentos de dispersión, la fuerza de una interacción depende de la energía de la partícula que interactúa, ya que una mayor energía implica interacciones más cercanas y más fuertes.

Los físicos de partículas sospechan ahora que la fuerza de todas las interacciones de las partículas (las cuatro fuerzas) se fusionan en altas energías, y los detalles de las interacciones de las partículas a estas energías pueden describirse en términos de una sola fuerza (Figura 11.17). Una teoría unificada describe estas interacciones y explica por qué esta descripción se rompe a escalas de baja energía. La teoría de la gran unificación intenta describir la interacción fuerte y electrodébil en términos de una sola fuerza. Una teoría del todo (theory of everything, TOE) lleva el concepto de unificación un paso más allá. Una TOE combina las cuatro fuerzas fundamentales (incluida la gravedad) en una sola teoría.



**FIGURA 11.17** Gran unificación de fuerzas a altas energías.

## 11.6 El Big Bang

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

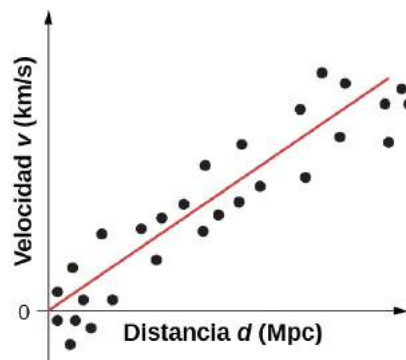
Al final de esta sección podrá:

- Explicar la expansión del universo en términos de la gráfica de Hubble y el corrimiento al rojo en cosmología.
- Describir la analogía entre la expansión cosmológica y un globo que se expande.
- Utilizar la ley de Hubble para predecir la velocidad medida de las galaxias lejanas

Hemos hablado de las partículas elementales, que son algunas de las cosas más pequeñas que podemos estudiar. Ahora examinaremos lo que sabemos sobre el universo, que es lo más grande que podemos estudiar. El vínculo entre estos dos temas es de alta energía: El estudio de las interacciones de las partículas requiere energías muy altas, y las energías más altas que conocemos existieron durante la evolución temprana del universo. Algunos físicos piensan que las teorías de la fuerza unificada que hemos descrito en la sección anterior pueden haber gobernado realmente el comportamiento del universo en sus primeros momentos.

### Ley de Hubble

En 1929, Edwin Hubble publicó uno de los descubrimientos más importantes de la astronomía moderna. Hubble descubrió que (1) las galaxias parecen alejarse de la Tierra y (2) la velocidad de recesión ( $v$ ) es proporcional a la distancia ( $d$ ) de la galaxia a la Tierra. Tanto  $v$  como  $d$  pueden determinarse utilizando los espectros de luz estelar. El mejor ajuste a los datos ilustrativos de la muestra se ofrece en la [Figura 11.18](#). (El gráfico original de Hubble presentaba una considerable dispersión, pero la tendencia general seguía siendo evidente).



**FIGURA 11.18** Este gráfico del corrimiento al rojo en función a la distancia de las galaxias muestra una relación lineal, con corrimientos al rojo mayores a distancias más grandes, lo que implica un universo en expansión. La pendiente da un valor aproximado de la tasa de expansión (crédito: John Cub).

La tendencia de los datos sugiere la relación proporcional simple:

$$v = H_0 d,$$

**11.12**

donde  $H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}$  se conoce como la **constante de Hubble**. (Nota: 1 Mpc es un megaparsec o un millón de parsecs, donde un parsec son 3,26 años luz). Esta relación, denominada **ley de Hubble**, establece que las estrellas y galaxias lejanas se alejan de nosotros a una velocidad de 70 km/s por cada megaparsec de distancia. La constante de Hubble corresponde a la pendiente de la línea en la [Figura 11.18](#). La constante de Hubble es un poco errónea, porque varía con el tiempo. El valor que se da aquí es solo su valor *actual*.

### INTERACTIVO

Vea este [video \(https://openstax.org/l/21hubble\)](https://openstax.org/l/21hubble) para saber más sobre la historia de la constante de Hubble.

La ley de Hubble describe un comportamiento regular de todas las galaxias, excepto las más cercanas. Por ejemplo, una galaxia situada a 100 Mpc de distancia (según su tamaño y brillo) suele alejarse de nosotros a una velocidad de

$$v = \left( \left( 70 \frac{\text{km}}{\text{s}} \right) / \text{Mpc} \right) (100 \text{ Mpc}) = 7.000 \text{ km/s}.$$

Esta velocidad puede variar debido a las interacciones con las galaxias vecinas. Por el contrario, si se comprueba que una galaxia se aleja de nosotros a una velocidad de 100.000 km/s con base en su corrimiento al rojo, se encuentra a una distancia

$$d = v/H_0 = (100.000 \text{ km/s}) / \left( \left( 70 \frac{\text{km}}{\text{s}} \right) / \text{Mpc} \right) = 143 \text{ Mpc}.$$

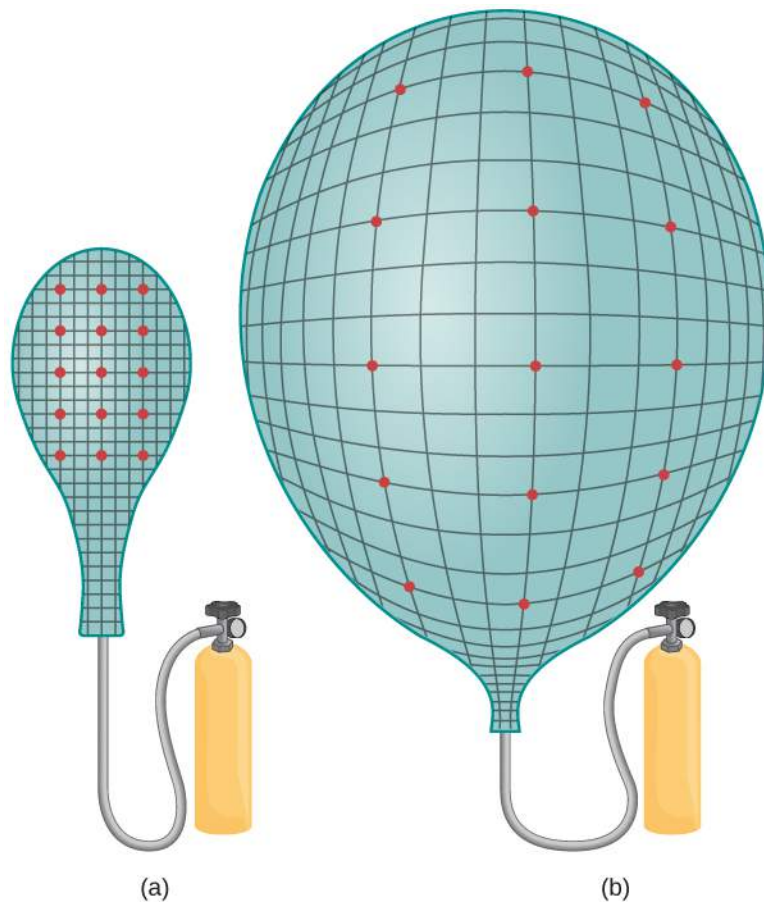
Este último cálculo es aproximado porque supone que el ritmo de expansión era el mismo hace 5.000 millones de años que ahora.

### Modelo del Big Bang

Los científicos que estudian el origen, la evolución y el destino final del universo (**cosmología**) creen que el universo comenzó en una explosión, llamada **Big Bang**, hace aproximadamente 13.700 millones de años. Esta explosión no fue una explosión de partículas a través del espacio, como los fuegos artificiales, sino una rápida expansión del propio espacio. Las distancias y velocidades de las estrellas y galaxias que se expanden hacia el exterior nos permiten estimar cuándo estuvo toda la materia del universo unida en el principio de los tiempos.

Los científicos suelen explicar la expansión del Big Bang mediante un modelo de globo inflado ([Figura 11.19](#)). Los puntos marcados en la superficie del globo representan galaxias, y la piel del globo representa el espacio-tiempo cuádrimensional ([Relatividad](#)). A medida que el globo se infla, cada punto "ve" a los otros puntos alejarse. Este modelo arroja dos perspectivas. En primer lugar, la expansión es observada por todos los observadores del universo, independientemente de su ubicación. El "centro de expansión" no existe, por lo que la Tierra no reside en el centro "privilegiado" de la expansión (vea el [Ejercicio 11.24](#)).





**FIGURA 11.19** Una analogía con el universo en expansión: Los puntos se alejan unos de otros a medida que el globo se expande; compare (a) con (b) después de la expansión.

En segundo lugar, como ya se ha mencionado, la expansión del Big Bang se debe a la expansión del espacio, no al aumento de la separación de las galaxias en el espacio tridimensional ordinario (estático). Esta expansión cosmológica afecta a todas las cosas: polvo, estrellas, planetas e incluso la luz. Así, la longitud de onda de la luz ( $\lambda$ ) emitida por galaxias lejanas se "estira". Esto hace que la luz parezca más "roja" (de menor energía) para el observador, un fenómeno llamado **corrimiento al rojo** cosmológico. El corrimiento al rojo cosmológico solo se puede medir en las galaxias que se encuentran a más de 50 millones de años luz.

### EJEMPLO 11.8

#### Cálculo de velocidades y distancias galácticas

Se observa que una galaxia tiene un corrimiento al rojo:

$$z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{emit}}}{\lambda_{\text{emit}}} = 4,5.$$

Este valor indica una galaxia que se mueve casi a la velocidad de la luz. Utilizando la fórmula relativista del corrimiento al rojo (dada en [Relatividad](#)), determine (a) ¿A qué velocidad se aleja la galaxia con respecto a la Tierra? (b) ¿A qué distancia está la galaxia?

#### Estrategia

Tenemos que utilizar la fórmula relativista de Doppler para determinar la velocidad a partir del corrimiento al rojo y luego utilizar la ley de Hubble para hallar la distancia a partir de la velocidad.

**Solución**

- a. Según la fórmula del corrimiento al rojo relativista:

$$z = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} - 1,$$

donde los rayos  $\beta = v/c$ . Sustituyendo el valor de  $z$  y resolviendo para los rayos  $\beta$ , obtenemos los rayos  $\beta = 0,93$ . Este valor implica que la velocidad de la galaxia es de  $2,8 \times 10^8$  m/s.

- b. Utilizando la ley de Hubble, podemos calcular la distancia hasta la galaxia si conocemos su velocidad de recesión:

$$d = \frac{v}{H_0} = \frac{2,8 \times 10^8 \text{ m/s}}{73,8 \times 10^3 \text{ m/s por Mpc}} = 3,8 \times 10^3 \text{ Mpc}.$$

**Importancia**

Las galaxias lejanas parecen alejarse muy rápidamente de la Tierra. El corrimiento al rojo de la luz estelar de estas galaxias puede utilizarse para determinar la velocidad precisa de recesión, sobre un 90% de la velocidad de la luz en este caso. Este movimiento no se debe al movimiento de la galaxia a través del espacio, sino a la expansión del propio espacio.

**✓ COMPRUEBE LO APRENDIDO 11.8**

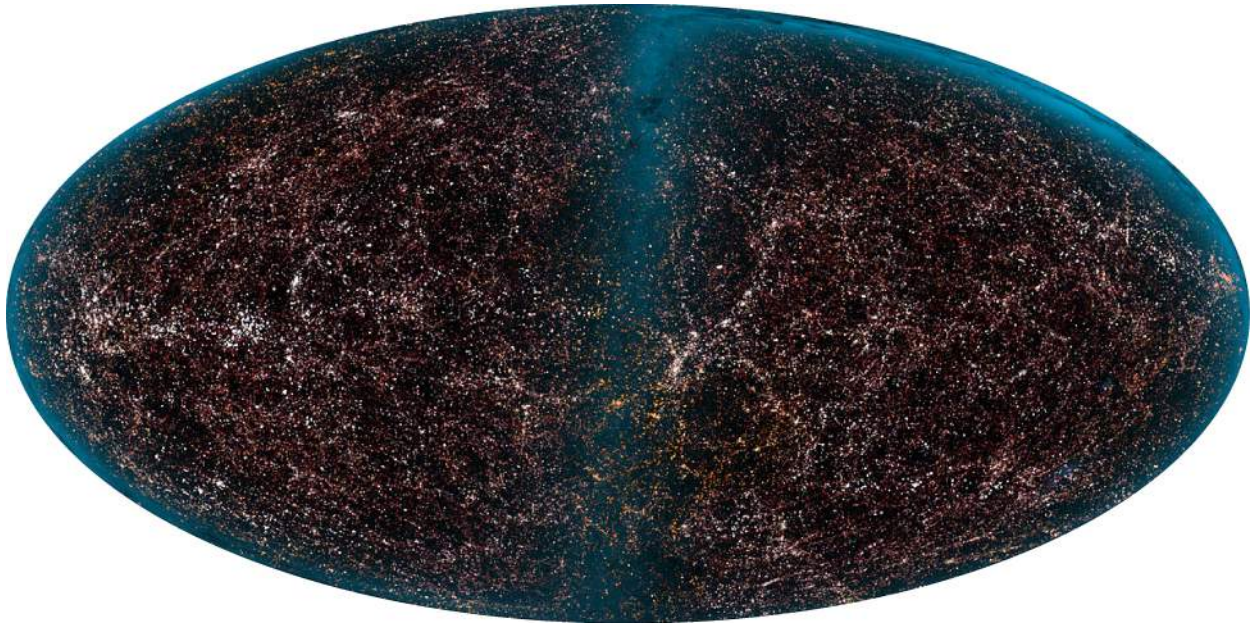
La luz de una galaxia que se aleja de nosotros se "corre hacia el rojo". ¿Qué le ocurre a la luz de una galaxia que se mueve hacia nosotros?

**🎧 INTERACTIVO**

Vea este [video \(https://openstax.org/l/21expansion\)](https://openstax.org/l/21expansion) para saber más sobre la expansión cosmológica.

**Estructura y dinámica del universo**

A gran escala, se cree que el universo es isotrópico y homogéneo. Se cree que el universo es isotrópico porque parece ser igual en todas las direcciones, y homogéneo porque parece ser igual en todos los lugares. Un universo que es isotrópico y homogéneo se dice que es liso. La suposición de un universo liso está respaldada por la Investigación sobre Galaxias por Medición Automática de Placas (Automated Plate Measurement Galaxy Survey) realizada en la década de 1980 y 1990 ([Figura 11.20](#)). Sin embargo, incluso antes de que se recopilaran estos datos, los teóricos utilizaban la hipótesis de un universo liso para simplificar los modelos de expansión del universo. Esta suposición de un universo liso en ocasiones se denomina el principio cosmológico.



**FIGURA 11.20** La investigación sobre Galaxias por Medición Automática de Placas (Automated Plate Measurement, APM). Más de 2 millones de galaxias se representan en una región de 100 grados de diámetro centrada en el polo sur de la Vía Láctea (crédito: 2MASS / T. H. Jarrett, J. Carpenter y R. Hurt)

El destino de este universo liso y en expansión es una incógnita. Según la teoría general de la relatividad, una forma importante de caracterizar el estado del universo es a través de la métrica del espacio-tiempo:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 d\Sigma^2, \quad 11.13$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz,  $a$  es un factor de escala (una función del tiempo), y  $d\Sigma$  es el elemento de longitud del espacio. En coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ , este elemento de longitud puede escribirse

$$d\Sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad 11.14$$

donde  $k$  es una constante con unidades de área inversa que describe la curvatura del espacio. Esta constante distingue entre universos abiertos, cerrados y planos:

- $k = 0$  (universo plano)
- $k > 0$  (universo cerrado, como una esfera)
- $k < 0$  (universo abierto, como una hipérbola)

En términos del factor de escala  $a$ , esta métrica también distingue entre universos estáticos, en expansión y en contracción:

- $a = 1$  (universo estático)
- $da/dt > 0$  (universo en expansión)
- $da/dt < 0$  (universo en contracción)

El factor de escala  $a$  y la curvatura  $k$  se determinan a partir de la teoría general de la relatividad de Einstein. Si tratamos el universo como un gas de galaxias de densidad  $\rho$  y la presión  $p$ , y se supone que  $k = 0$  (un universo plano), entonces el factor de escala  $a$  está dado por

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a, \quad 11.15$$

donde  $G$  es la constante gravitacional universal. (En la materia ordinaria, esperamos que la cantidad  $\rho + 3p$  sea mayor que cero). Si el factor de escala es positivo ( $a > 0$ ), el valor del factor de escala se "desacelera" ( $d^2 a/dt^2 < 0$ ), y la expansión del universo se ralentiza con el tiempo. Si el numerador es menor que cero (de

alguna manera, la presión del universo es negativa), el valor del factor de escala se "acelera", y la expansión del universo se acelera con el tiempo. Según datos cosmológicos recientes, el universo parece estar en expansión. Muchos científicos explican el estado actual del universo en términos de una expansión muy rápida en el universo primitivo. Esta expansión se llama inflación.

## 11.7 Evolución del universo primigenio

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

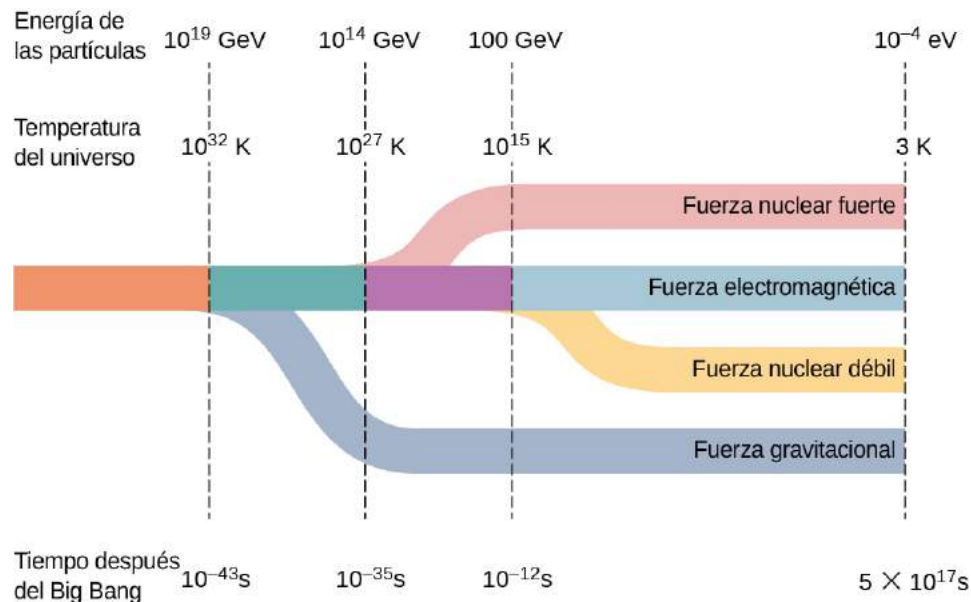
Al final de esta sección podrá:

- Describir la evolución del universo primitivo en términos de las cuatro fuerzas fundamentales.
- Utilizar el concepto de la lente gravitacional para explicar los fenómenos astronómicos
- Aportar pruebas del Big Bang en términos de radiación cósmica de fondo.
- Distinguir entre materia oscura y energía oscura.

En la sección anterior hablamos de la estructura y la dinámica del universo. En particular, el universo parece estar expandiéndose e incluso acelerándose. Pero, ¿cómo era el universo al principio de los tiempos? En esta sección, analizaremos las pruebas que los científicos han podido reunir sobre el universo primitivo y su evolución hasta la actualidad.

### El universo primitivo

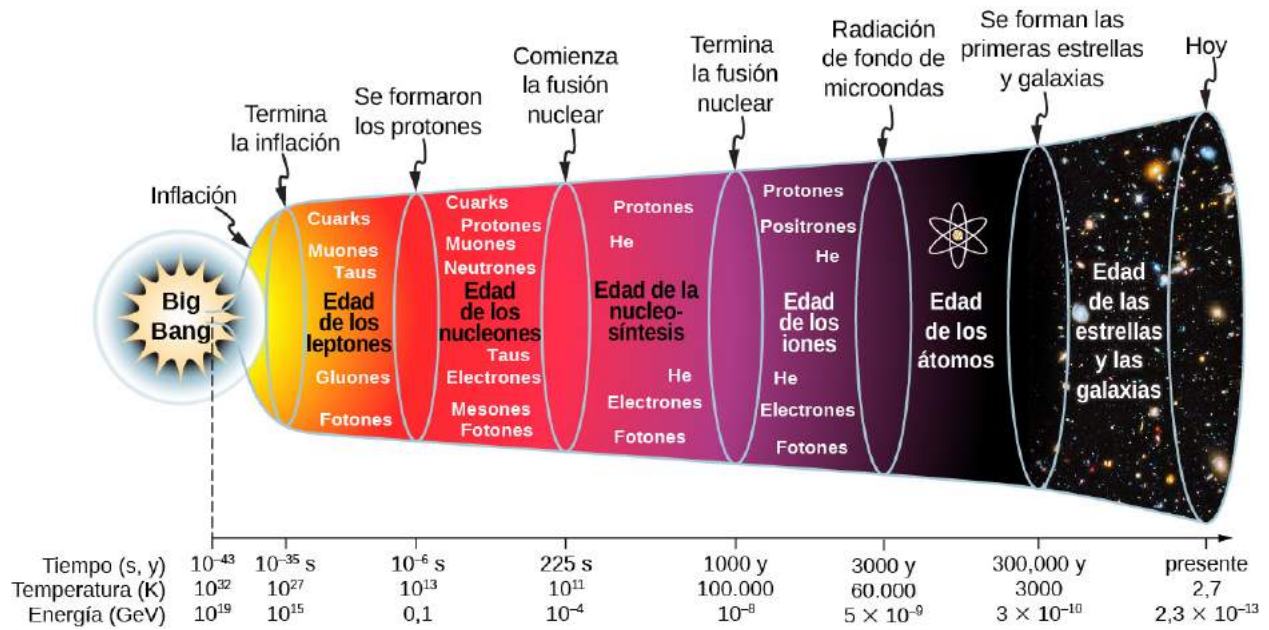
Antes del breve periodo de inflación cósmica, los cosmólogos creen que toda la materia del universo estaba comprimida en un espacio mucho más pequeño que un átomo. Los cosmólogos creen además que el universo era extremadamente denso y caliente, y que una sola fuerza regía las interacciones entre las partículas. En otras palabras, las cuatro fuerzas fundamentales (nuclear fuerte, electromagnética, nuclear débil y gravitacional) se fusionan en una en estas energías (Figura 11.21). Cómo y por qué se rompe esta "unidad" a bajas energías es un importante problema sin resolver en la física.



**FIGURA 11.21** La separación de las cuatro fuerzas fundamentales en el universo primigenio.

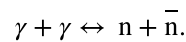
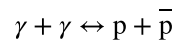
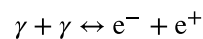
Los modelos científicos del universo primitivo son muy especulativos. La Figura 11.22 muestra un esbozo de una posible línea temporal de los acontecimientos.



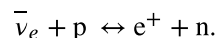
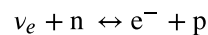


**FIGURA 11.22** Una línea de tiempo aproximada de la evolución del universo desde el Big Bang hasta el presente.

- Big Bang** ( $t < 10^{-43}$  s) : Las leyes actuales de la física se quebrantan. Al final del evento inicial del Big Bang, la temperatura del universo es aproximadamente  $T = 10^{32}$  K.
- Fase inflacionaria** ( $t = 10^{-43}$  a  $10^{-35}$  s) : El universo se expande exponencialmente y la gravedad se separa de las demás fuerzas. El universo se enfría hasta aproximadamente  $T = 10^{27}$  K.
- Edad de los leptones** ( $t = 10^{-35}$  a  $10^{-6}$  s) : A medida que el universo sigue expandiéndose, la fuerza nuclear fuerte se separa de las fuerzas electromagnética y nuclear débil (o fuerza electrodébil). Poco después, la fuerza nuclear débil se separa de la fuerza electromagnética. El universo es una sopa caliente de cuarks, leptones, fotones y otras partículas.
- Edad de los nucleones** ( $t = 10^{-6}$  a 225 s) : El universo está formado por leptones y hadrones (como protones, neutrones y mesones) en equilibrio térmico. La producción de pares y la aniquilación de pares se producen con la misma facilidad, por lo que los fotones permanecen en equilibrio térmico:



El número de protones es aproximadamente igual al número de neutrones a través de las interacciones con los neutrinos:



La temperatura del universo se asienta en aproximadamente  $10^{11}$  K (demasiado frío para la producción continuada de pares nucleón-antinucleón). Los números de protones y neutrones comienzan a dominar sobre sus antipartículas, por lo que las aniquilaciones protón-antiprotón ( $p\bar{p}$ ) y neutrón-antineutrón ( $n\bar{n}$ ) disminuyen. Comienzan a formarse deuterones (pares protón-neutrón).

- Edad de la nucleosíntesis** ( $t = 225$  s a 1.000 años): A medida que el universo continúa expandiéndose, los deuterones reaccionan con protones y neutrones para formar núcleos más grandes; estos núcleos más

grandes reaccionan con protones y neutrones para formar núcleos aún más grandes. Al final de este período, aproximadamente 1/4 de la masa del universo es helio. (Esto explica la cantidad actual de helio en el universo). Los fotones carecen de la energía necesaria para continuar la producción de electrones y positrones, por lo que los electrones y los positrones se aniquilan mutuamente hasta convertirse en fotones.

6. *Edad de los iones* ( $t = 1.000$  a  $3.000$  años): El universo está lo suficientemente caliente como para ionizar cualquier átomo formado. El universo está formado por electrones, positrones, protones, núcleos ligeros y fotones.
7. *Edad de los átomos* ( $t = 3.000$  a  $300.000$  años): El universo se enfría por debajo de  $10^5$  K y se forman los átomos. Los fotones no interactúan fuertemente con los átomos neutros, por lo que se "desacoplan" (separan) de los átomos. Estos fotones constituyen la **radiación de fondo de microondas** de la que hablaremos más adelante.
8. *Edad de las estrellas y galaxias* ( $t = 300.000$  años hasta el presente): Los átomos y las partículas se juntan por la gravedad y forman grandes masas. Los átomos y partículas de las estrellas sufren una reacción de fusión nuclear.

### INTERACTIVO

Vea este [video \(https://openstax.org/l/21bigbang\)](https://openstax.org/l/21bigbang) para saber más sobre la cosmología del Big Bang.

Para describir cuantitativamente las condiciones del universo primitivo, recordemos la relación entre la energía térmica promedio de las partículas ( $E$ ) en un sistema de partículas que interactúan y la temperatura de equilibrio ( $T$ ) de dicho sistema:

$$E = k_B T, \quad 11.16$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann. En las condiciones de calor del universo primigenio, las energías de las partículas eran inimaginablemente grandes.

### EJEMPLO 11.9

#### ¿Cuál era la energía térmica promedio de una partícula justo después del Big Bang?

##### Estrategia

La energía térmica media de una partícula en un sistema de partículas que interactúan depende de la temperatura de equilibrio de dicho sistema ([Ecuación 11.1](#)). En la línea de tiempo anterior se nos da esta temperatura aproximada.

##### Solución

Los cosmólogos creen que la temperatura del universo justo después del Big Bang era aproximadamente  $T = 10^{32}$  K. Por lo tanto, la energía térmica promedio de una partícula habría sido

$$k_B T \approx (10^{-4} \text{ eV/K})(10^{32} \text{ K}) = 10^{28} \text{ eV} = 10^{19} \text{ GeV}.$$

##### Importancia

Esta energía es por muchos órdenes de magnitud mayor que las energías de las partículas producidas por los aceleradores de partículas de fabricación humana. En la actualidad, estos aceleradores funcionan a energías inferiores a  $10^4$  GeV.

### COMPRUEBE LO APRENDIDO 11.9

Compare la abundancia de helio por masa 10.000 años después del Big Bang y ahora.

Los nucleones se forman a energías aproximadamente iguales a la masa en reposo de un protón, o sea 1.000 MeV. Por lo tanto, la temperatura correspondiente a esta energía es

$$T = \frac{1.000 \text{ MeV}}{8,62 \times 10^{11} \text{ MeV} \cdot \text{K}^{-1}} = 1,2 \times 10^{13} \text{ K.}$$

En el primer segundo del universo primitivo existían temperaturas de este valor o superiores. Un análisis similar puede hacerse para los átomos. Los átomos se forman a una energía igual a la energía de ionización del hidrógeno en estado básico (13 eV). Por lo tanto, la temperatura efectiva para la formación de los átomos es

$$T = \frac{13 \text{ eV}}{8,62 \times 10^5 \text{ eV} \cdot \text{K}^{-1}} = 1,6 \times 10^5 \text{ K.}$$

Esto ocurre mucho después de que las cuatro fuerzas fundamentales se hayan separado, incluyendo las fuerzas necesarias para unir los protones y los neutrones en el núcleo (fuerza nuclear fuerte), y para unir los electrones al núcleo (fuerza electromagnética).

### La nucleosíntesis de los elementos ligeros

Las abundancias relativas de los elementos ligeros hidrógeno, helio, litio y berilio en el universo proporcionan una prueba clave del Big Bang. Los datos sugieren que gran parte del helio del universo es primordial. Por ejemplo, resulta que el 25 % de la materia del universo es helio, lo cual es una abundancia demasiado alta y no puede explicarse en base a la producción de helio en las estrellas.

¿Cuántos elementos del universo se crearon en el Big Bang? Si hacemos andar el reloj hacia atrás, el universo se comprime cada vez más, y se calienta cada vez más. Finalmente, se alcanzan temperaturas que permiten la **nucleosíntesis**, el periodo de formación de núcleos, similar a lo que ocurre en el núcleo del Sol. Se cree que la nucleosíntesis del Big Bang se produjo a los pocos cientos de segundos del mismo.

¿Cómo se produjo la nucleosíntesis del Big Bang? Al principio, los protones y los neutrones se combinaron para formar deuterones,  $^2\text{H}$ . El deuterón capturó un neutrón para formar el tritón,  $^3\text{H}$ , que es el núcleo del hidrógeno radiactivo llamado tritio. Los deuterones también capturaron protones para hacer helio  $^3\text{He}$ . Cuando  $^3\text{H}$  captura un protón o  $^3\text{He}$  captura un neutrón, da como resultado el helio  $^4\text{He}$ . En esta etapa del Big Bang, la proporción de protones y neutrones era de aproximadamente 7:1. Por lo tanto, el proceso de conversión a  $^4\text{He}$  utilizó casi todos los neutrones. El proceso duró unos 3 minutos y casi 25% de toda la materia se convirtió en  $^4\text{He}$ , junto con pequeños porcentajes de  $^2\text{H}$ ,  $^3\text{H}$ , y  $^3\text{He}$ . También se formaron pequeñas cantidades de  $^7\text{Li}$  y  $^7\text{Be}$ . La expansión durante este tiempo enfrió el universo lo suficiente como para que las reacciones nucleares se detuvieran. La abundancia de los núcleos ligeros  $^2\text{H}$ ,  $^4\text{He}$ , y  $^7\text{Li}$  creados después del Big Bang son muy dependientes de la densidad de la materia.

Las abundancias predichas de los elementos en el universo proporcionan una prueba rigurosa del Big Bang y de la nucleosíntesis del Big Bang. Las recientes estimaciones experimentales de la densidad de materia de la Sonda de Anisotropía de Microondas Wilkinson (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, WMAP) coinciden con las predicciones del modelo. Esta concordancia proporciona una prueba convincente del modelo del Big Bang.

### Radiación de fondo de microondas

Según los modelos cosmológicos, el Big Bang debería haber dejado tras de sí una radiación térmica denominada radiación de fondo de microondas (Cosmic Microwave Background Radiation, CMBR). La intensidad de esta radiación debe seguir la curva de radiación de cuerpo negro ([Fotones y ondas de materia](#)). La ley de Wien establece que la longitud de onda de la radiación en su intensidad máxima es

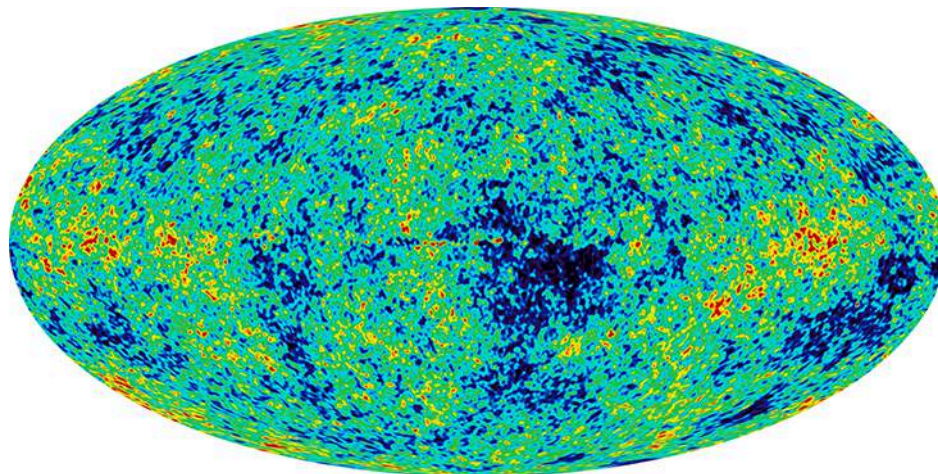
$$\lambda_{\text{max}} = \frac{2.898 \times 10^{-3} \text{ m-K}}{T}, \quad 11.17$$

donde  $T$  es la temperatura en kelvins. Los científicos esperaban que la expansión del universo "estirara la luz" y que la temperatura fuera muy baja, por lo que la radiación cósmica de fondo debería ser de gran longitud de onda y baja energía.

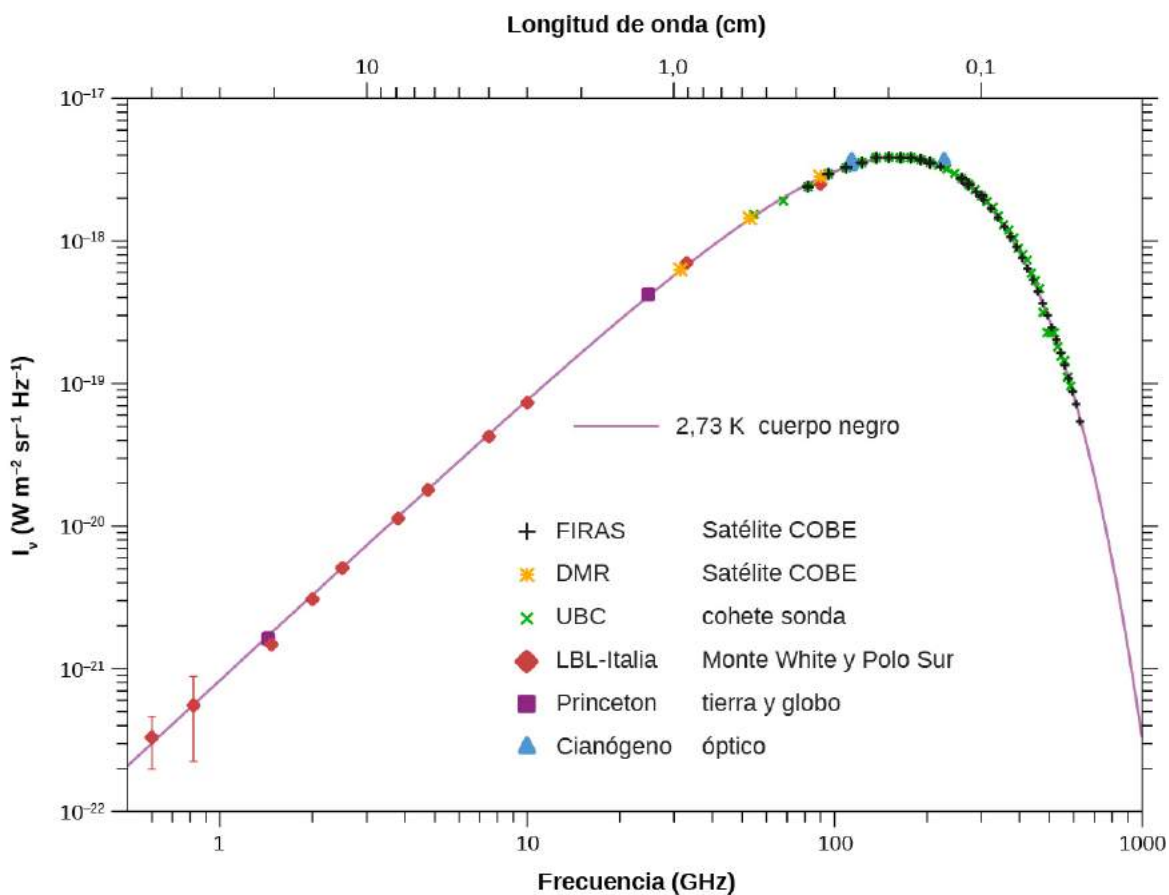
En la década de 1960, Arno Penzias y Robert Wilson, de los Laboratorios Bell se dieron cuenta de que sin importar lo que hicieran, no podían eliminar un débil ruido de fondo en su sistema de comunicación por



satélite. El ruido se debía a la radiación con longitudes de onda en el rango de los centímetros (la región de las microondas). Posteriormente, este ruido se asoció a la radiación cósmica de fondo. Un mapa de intensidad de la radiación cósmica de fondo aparece en la [Figura 11.23](#). El espectro térmico se modela bien mediante una curva de cuerpo negro que corresponde a una temperatura  $T = 2,7\text{K}$  ([Figura 11.24](#)).



**FIGURA 11.23** Este mapa del cielo utiliza el color para mostrar las fluctuaciones, o surcos, en el fondo cósmico de microondas observado con la nave espacial WMAP. La Vía Láctea ha sido eliminada para mayor claridad. El rojo representa una mayor temperatura y una mayor densidad, mientras que el azul indica una menor temperatura y densidad. Este mapa no contradice la afirmación anterior de homogeneidad porque las mayores fluctuaciones son solo una parte en un millón (crédito: Equipo científico de la NASA / WMAP).



**FIGURA 11.24** Distribución de la intensidad de la radiación de fondo de microondas. Las predicciones del modelo (la línea) concuerdan muy bien con los resultados experimentales (los puntos). Los valores de frecuencia y brillo se

muestran en un eje logarítmico (crédito: modificación del trabajo de George Smoot / Proyecto de Explorador Cósmico de Fondo (Cosmic Background Explorer, COBE) de la NASA).

La formación de átomos en el universo primitivo hace que estos átomos tengan menos posibilidades de interactuar con la luz. Por tanto, los fotones que pertenecen a la radiación cósmica de fondo deben haberse separado de la materia a una temperatura  $T$  asociada a 1 eV (la energía de ionización aproximada de un átomo). La temperatura del universo en este punto era

$$k_B T \sim 1 \text{ eV} \Rightarrow T = \frac{1 \text{ eV}}{8.617 \times 10^5 \text{ eV/K}} \sim 10^4 \text{ K.}$$

Según los modelos cosmológicos, el momento en que los fotones dispersaron por última vez las partículas cargadas fue aproximadamente 380.000 años después del Big Bang. Antes de ese momento, la materia del universo estaba en forma de plasma y los fotones estaban "termalizados".

### Antimateria y materia

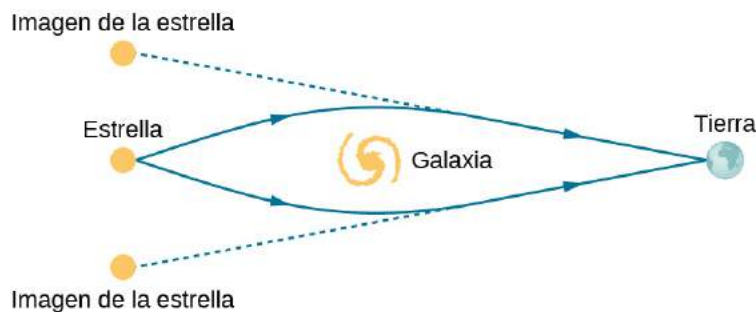
Sabemos por observación directa que la antimateria es rara. La Tierra y el sistema solar son casi pura materia, y la mayor parte del universo también parece dominada por la materia. Esto se demuestra por la falta de radiación de aniquilación que nos llega del espacio, en particular la ausencia relativa de rayos  $\gamma$  de 0,511-MeV creados por la aniquilación mutua de electrones y positrones. (La antimateria en la naturaleza se crea en las colisiones de partículas y en los decaimientos los rayos  $\beta^+$ , pero solo en pequeñas cantidades que se aniquilan rápidamente, dejando que sobreviva la materia casi pura).

A pesar del predominio observado de la materia sobre la antimateria en el universo, el modelo estándar de las interacciones de las partículas y las mediciones experimentales sugieren solo pequeñas diferencias en las formas en que interactúan la materia y la antimateria. Por ejemplo, los decaimientos de kaones neutros producen solo un poco más de materia que de antimateria. Sin embargo, si a través de ese decaimiento se produjo algo más de materia que de antimateria en el universo primitivo, el resto podría aniquilarse par a par, dejando en su mayoría materia ordinaria para formar las estrellas y las galaxias. De este modo, la gran cantidad de estrellas que observamos puede ser solo un diminuto remanente de la materia original creada en el Big Bang.

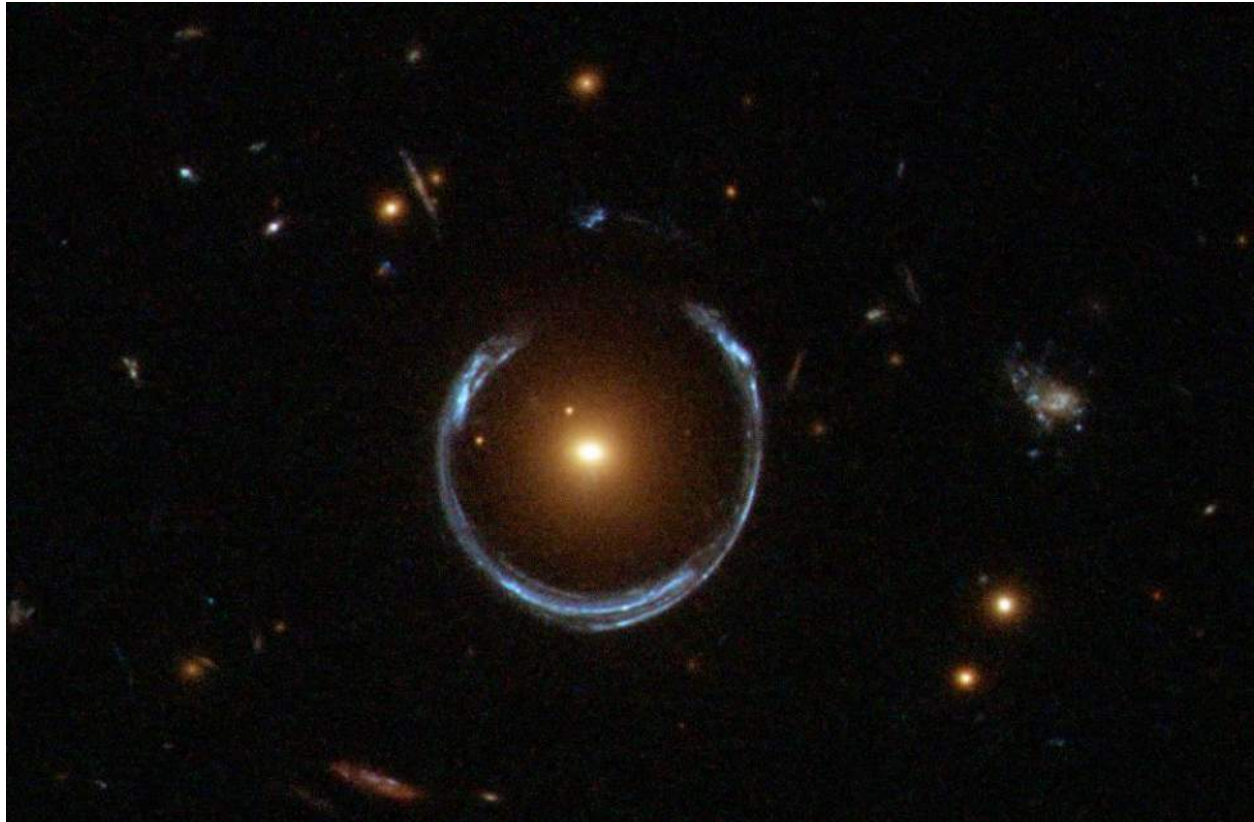
### Materia oscura y energía oscura

En las dos últimas décadas, nuevas y más potentes técnicas han revelado que el universo está lleno de **materia oscura**. Este tipo de materia es interesante e importante porque en la actualidad los científicos no saben qué es. Sin embargo, podemos inferir su existencia por la desviación de la luz estelar lejana. Por ejemplo, si la luz de una galaxia lejana es desviada por el campo gravitacional de un cúmulo de materia oscura entre nosotros y la galaxia, es posible que se produzcan dos imágenes de la misma galaxia ([Figura 11.25](#)). La curvatura de la luz por el campo gravitacional de la materia se denomina lente gravitacional. En algunos casos, la luz de las estrellas viaja hasta un observador por múltiples vías alrededor de la galaxia, produciendo un anillo ([Figura 11.26](#)).

Según las investigaciones actuales, los científicos solo saben que la materia oscura es fría, se mueve lentamente e interactúa débilmente con la materia ordinaria. Entre los candidatos a materia oscura se encuentran los neutralinos (contrapartes de los bosones Z, los fotones y los bosones de Higgs en la "teoría de la supersimetría") y las partículas que circulan en diminutos anillos creados por dimensiones espaciales adicionales.



**FIGURA 11.25** La luz de una estrella lejana se desvía alrededor de una galaxia. En las condiciones adecuadas, se pueden ver dos imágenes duplicadas de la misma estrella.

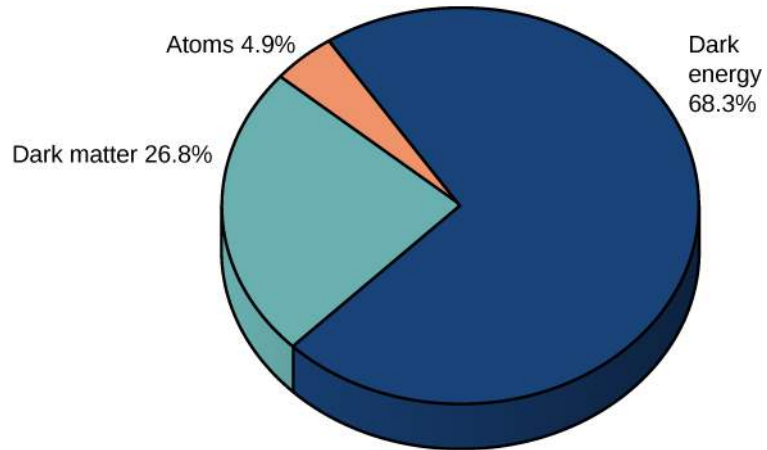


**FIGURA 11.26** La luz de una estrella lejana se desvía alrededor de una galaxia. En las condiciones adecuadas, podemos ver un anillo de luz en lugar de una sola estrella (crédito: modificación del trabajo de la Agencia Espacial Europea (European Space Agency, ESA) / Hubble y la Administración Nacional de Aeronáutica y Espacio (National Aeronautics and Space Administration, NASA)).

Las mediciones astronómicas cada vez más precisas del universo en expansión también revelan la presencia de una nueva forma de energía llamada **energía oscura**. Se cree que esta energía explica los valores mayores de lo esperado de los desplazamientos galácticos observados en las galaxias lejanas. Estos corrimientos al rojo sugieren que el universo no solo se está expandiendo, sino que lo hace a un ritmo creciente. No se sabe prácticamente nada sobre la naturaleza y las propiedades de la energía oscura. Juntos, la energía y la materia oscuras representan dos de los enigmas más interesantes y sin resolver de la física moderna. Los científicos atribuyen 68,3% de la energía del universo a la energía oscura, 26,8% a la materia oscura, y solo 4,9% a la masa-energía de las partículas ordinarias (Figura 11.27). Dado el gran misterio actual sobre la naturaleza de la materia y la energía oscuras, las humildes palabras de Isaac Newton son tan ciertas ahora como hace siglos:

"No sé lo que pueda parecerle al mundo, pero a mí mismo me parece que solo he sido como un niño jugando en la orilla del mar, y entreteniéndome de vez en cuando encontrando un guijarro más liso o una concha más

bonita que la ordinaria, mientras que el gran océano de la verdad yace sin descubrir ante mí".



**FIGURA 11.27** Estimación de la distribución de la materia y la energía en el universo (crédito: Equipo científico de la NASA / WMAP).

## Revisión Del Capítulo

### Términos Clave

**acelerador de partículas** máquina diseñada para acelerar partículas cargadas; esta aceleración suele conseguirse con fuertes campos eléctricos, magnéticos o ambos.

**antipartícula** partícula subatómica con la misma masa y tiempo de vida que su partícula asociada, pero con carga eléctrica opuesta.

**bariones** grupo de tres cuarks

**Big Bang** expansión rápida del espacio que marcó el comienzo del universo.

**bosón** partícula con espín entero que son simétricas en el intercambio.

**bosones W y Z** partícula con una masa relativamente grande que transporta la fuerza nuclear débil entre leptones y cuarks.

**color** propiedad de las partículas que desempeña el mismo papel en las interacciones nucleares fuertes que la carga eléctrica en las interacciones electromagnéticas.

**constante de Hubble** en la ley de Hubble, constante que relaciona velocidad y distancia.

**corrimiento al rojo** alargamiento de la longitud de onda de la luz (o enrojecimiento) debido a la expansión cosmológica.

**cosmología** estudio del origen, evolución y destino final del universo.

**cromodinámica cuántica (QCD)** teoría que describe las interacciones fuertes entre los cuarks.

**cuark** fermión que participa en la fuerza electrodébil y en la nuclear fuerte

**detector de partículas** detector diseñado para medir con precisión el resultado de las colisiones creadas por un acelerador de partículas; los detectores de partículas son herméticos y multipropósito.

**diagrama de Feynman** diagrama espacio-tiempo que describe cómo se mueven e interactúan las partículas.

**electrodinámica cuántica (QED)** teoría que describe la interacción de los electrones con los fotones.

**energía oscura** forma de energía que se cree responsable de la aceleración observada en el universo.

**extrañeza** propiedad de la partícula asociada a la presencia de un cuark extraño.

**fermión** partícula con espín semientero que es antisimétrica en el intercambio.

**fuerza electrodébil** unificación de las

interacciones de la fuerza electromagnética y de la fuerza nuclear débil.

**fuerza fundamental** una de las cuatro fuerzas que actúan entre cuerpos de materia: la nuclear fuerte, la electromagnética, la nuclear débil y la gravitacional.

**fuerza nuclear débil** fuerza débil relativa (alrededor de  $10^{-6}$  la fuerza nuclear fuerte) responsable de los decaimientos de las partículas elementales y de las interacciones de los neutrinos.

**fuerza nuclear fuerte** fuerza de atracción relativamente fuerte que actúa en distancias cortas (alrededor de  $10^{-15}$  m) responsable de la unión de protones y neutrones en los núcleos atómicos.

**gluon** partícula que transporta la fuerza nuclear fuerte entre cuarks dentro de un núcleo atómico.

**hadrón** mesón o un barión.

**leptón** fermión que participa en la fuerza electrodébil.

**ley de Hubble** relación entre la velocidad y la distancia de las estrellas y las galaxias.

**materia oscura** materia en el universo que no interactúa con otras partículas, pero que puede deducirse por la desviación de la luz estelar a distancia.

**mesones** grupo de dos cuarks

**Modelo estándar** modelo de interacciones de partículas que contiene la teoría electrodébil y la cromodinámica cuántica (QCD).

**nucleosíntesis** creación de elementos pesados, que se produce durante el Big Bang.

**número bariónico** el número bariónico tiene el valor  $B = +1$  para los bariones,  $-1$  para los antibariones, y  $0$  para todas las demás partículas y se conserva en las interacciones de las partículas

**número de Lepton** número de electrones-leptones  $L_e$ , el número muon-leptón  $L_\mu$ , y el número tau-leptón  $L_\tau$  se conservan por separado en cada interacción de partículas.

**partícula virtual** partícula que existe durante un tiempo demasiado corto para ser observable.

**positrón** antielectrón

**radiación de fondo de microondas (CMBR)** radiación térmica producida por el evento del Big Bang.

**radiación de sincrotrón** radiación de alta energía producida en un acelerador de sincrotrón por el



movimiento circular de un haz cargado.

**simetría de intercambio** propiedad de un sistema de partículas indistinguibles que requiere que el intercambio de dos partículas cualesquiera sea inobservable.

**sincrotrón** acelerador circular que utiliza un voltaje alterno y campos magnéticos cada vez más intensos para acelerar las partículas a

energías cada vez más altas.

**teoría de la gran unificación** teoría de las interacciones de las partículas que unifica las fuerzas nuclear fuerte, fuerza electromagnética y fuerza nuclear débil.

**teoría del todo** teoría de las interacciones de las partículas que unifica las cuatro fuerzas fundamentales.

## Ecuaciones Clave

Momento de una partícula cargada en un ciclotrón

$$p = 0,3Br$$

Energía del centro de masa de una máquina colisionadora de haces

$$W^2 = 2[E_1 E_2 + (p_1 c)(p_2 c)] + (m_1 c^2)^2 + (m_2 c^2)^2$$

Tiempo aproximado de intercambio de una partícula virtual entre otras dos partículas

$$\Delta t = \frac{\hbar}{E}$$

Ley de Hubble

$$v = H_0 d$$

Métrica cosmológica del espacio-tiempo

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 d\Sigma^2$$

## Resumen

### 11.1 Introducción a la física de partículas

- Las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza son, por orden de intensidad: nuclear fuerte, electromagnética, nuclear débil y gravitacional. Los cuarks interactúan mediante la fuerza fuerte, pero los leptones no. Tanto los cuarks como los leptones interactúan a través de las fuerzas electromagnética, débil y gravitacional.
- Las partículas elementales se clasifican en fermiones y bosones. Los fermiones tienen un espín semientero y obedecen el principio de exclusión. Los bosones tienen espín entero y no obedecen este principio. Los bosones son los portadores de fuerza de las interacciones de las partículas.
- Los cuarks y los leptones pertenecen a familias de partículas compuestas por tres miembros cada una. Los miembros de una familia comparten muchas propiedades (carga, espín, participación en las fuerzas) pero no la masa.
- Todas las partículas tienen antipartículas. Las partículas comparten las mismas propiedades que las partículas de antimateria, pero llevan carga opuesta.

### 11.2 Leyes de conservación de las partículas

- Las interacciones de las partículas elementales se rigen por las leyes de conservación de las partículas, que pueden utilizarse para determinar qué reacciones y decaimientos de partículas son posibles (o están prohibidas).
- La ley de conservación del número bariónico y la ley de conservación del número de tres leptones son válidas en todos los procesos físicos. Sin embargo, la conservación de la extrañeza solo es válida en las interacciones nucleares fuertes y las interacciones electromagnéticas.

### 11.3 Cuarks

- Existen seis cuarks conocidos: arriba (up,  $u$ ), abajo (down,  $d$ ), encantado (charm,  $c$ ), extraño (strange,  $s$ ), superior (top,  $t$ ) e inferior (bottom,  $b$ ). Estas partículas son fermiones con espín semientero y carga fraccionaria.
- Los bariones están formados por tres cuarks y los mesones por un par cuark-anticuark. Debido a la fuerza fuerte, los cuarks no pueden existir de forma aislada.
- Las pruebas de los cuarks se encuentran en los experimentos de dispersión.

### 11.4 Aceleradores y detectores de partículas

- Se han desarrollado muchos tipos de aceleradores de partículas para estudiarlas y sus interacciones. Entre ellos se encuentran los aceleradores lineales, los ciclotrones, los sincrotrones y los haces de colisión.
- Las máquinas de haces de partículas colisionantes se utilizan para crear partículas masivas que se decaen rápidamente en partículas más ligeras.
- Los detectores multipropósito se utilizan para diseñar todos los aspectos de las colisiones de alta energía. Entre ellos se encuentran los detectores para medir el momento y las energías de las partículas de carga y los fotones.
- Las partículas cargadas se miden doblando estas partículas en un círculo mediante un campo magnético.
- Las partículas se miden mediante calorímetros que las absorben.

### 11.5 El modelo estándar

- El modelo estándar describe las interacciones entre partículas a través de las fuerzas nuclear fuerte, electromagnética y fuerza nuclear débil.
- Las interacciones de las partículas se representan mediante los diagramas de Feynman. Un diagrama de Feynman representa las interacciones entre partículas en un gráfico espacio-tiempo.

## Preguntas Conceptuales

### 11.1 Introducción a la física de partículas

1. ¿Cuáles son las cuatro fuerzas fundamentales? Descríbalas brevemente.
2. Distinga los fermiones y bosones utilizando los conceptos de indistinguibilidad y simetría de intercambio.
3. Enumere las familias de cuarks y leptones.
4. Distinga entre partículas elementales y antipartículas. Describa sus interacciones.

### 11.2 Leyes de conservación de las partículas

5. ¿Cuáles son las seis leyes de conservación de las partículas? Descríbalas brevemente.
6. En general, ¿cómo determinamos si se produce una reacción o decaimiento de partículas?
7. ¿Por qué la detección de una interacción de partículas que viola una ley de conservación de partículas establecida puede considerarse algo *bueno* para un científico?

- Las fuerzas electromagnéticas actúan a gran distancia, pero las fuerzas fuertes y débiles actúan a corta distancia. Estas fuerzas se transmiten entre las partículas mediante el envío y la recepción de bosones.
- Las teorías de la gran unificación buscan una comprensión del universo en términos de una sola fuerza.

### 11.6 El Big Bang

- El universo se expande como un globo: cada punto se aleja de los demás.
- Las galaxias lejanas se alejan de nosotros a una velocidad proporcional a su distancia. Esta tasa se mide en aproximadamente 70 km/s/Mpc. Así, cuanto más lejos estén las galaxias de nosotros, mayor será su velocidad. Estas "velocidades de recesión" pueden medirse mediante el corrimiento Doppler de la luz.
- Según los modelos cosmológicos actuales, el universo comenzó con el Big Bang hace aproximadamente 13.700 millones de años.

### 11.7 Evolución del universo primigenio

- El universo primitivo era caliente y denso.
- El universo es isotrópico y se expande.
- La radiación cósmica de fondo es una prueba del Big Bang.
- La gran parte de la masa y la energía del universo no se comprenden bien.

### 11.3 Cuarks

8. ¿Cuáles son los seis cuarks conocidos? Resuma sus propiedades.
9. ¿Cuál es la composición general de cuarks de un barión? ¿Y de un mesón?
10. ¿Qué pruebas existen de la existencia de los cuarks?
11. ¿Por qué los bariones con la misma composición de cuarks difieren a veces en sus energías de masa en reposo?

### 11.4 Aceleradores y detectores de partículas

12. Compare brevemente el acelerador Van de Graaff, el acelerador lineal, el ciclotrón y el acelerador de sincrotrón.
13. Describa los componentes básicos y el funcionamiento de una máquina de haces de partículas colisionantes típica.
14. ¿Qué son los subdetectores del experimento del



solenoides compactos de muones? Descríbalos brevemente.

15. ¿Cuál es la ventaja de un acelerador de haces de partículas colisionantes sobre uno que dispara partículas hacia un objetivo fijo?
16. Un electrón aparece en los detectores de muones del CMS. ¿Cómo es posible?

### 11.5 El modelo estándar

17. ¿Qué es el modelo estándar? Exprese su respuesta en términos de las cuatro fuerzas fundamentales y las partículas de intercambio.
18. Dibuje un diagrama de Feynman para representar la aniquilación de un electrón y un positrón en un fotón.
19. ¿Cuál es la motivación de las teorías de la gran unificación?
20. Si se desarrolla una teoría que unifique las cuatro fuerzas, ¿seguirá siendo correcto decir que la órbita de la Luna está determinada por la fuerza gravitacional? Explique por qué.
21. Si se descubre el bosón de Higgs y se comprueba que tiene masa, ¿se le considerará el portador definitivo de la fuerza débil? Explique su respuesta.
22. Uno de los modos de decaimiento comunes de  $\Lambda^0$  es  $\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p$ . Aunque en este decaimiento solo intervienen hadrones, se produce a través de la fuerza nuclear débil. ¿Cómo sabemos que este decaimiento no se produce a través de la fuerza nuclear fuerte?

### 11.6 El Big Bang

23. ¿Qué se entiende por expansión cosmológica? Exprese su respuesta en términos de una gráfica de Hubble y del corrimiento al rojo de la luz estelar lejana.

## Problemas

### 11.1 Introducción a la física de partículas

31. ¿Cuánta energía se libera cuando un electrón y un positrón en reposo se aniquilan mutuamente? (Para las masas de las partículas, vea la [Tabla 11.1](#).)
32. Si  $1,0 \times 10^{30}$  MeV de energía se libera en la aniquilación de una esfera de materia y antimateria, y las esferas son de igual masa, ¿cuáles son las masas de las esferas?
33. Cuando un electrón y un positrón están en reposo, pueden aniquilarse mutuamente según la reacción

24. Describa la analogía del globo para la expansión cosmológica. Explique por qué tan solo *parece* que estamos en el centro de expansión del universo.
25. Las distancias a las galaxias locales se determinan midiendo el brillo de las estrellas, llamadas variables cefeidas, que pueden observarse individualmente y que tienen brillos absolutos a una distancia estándar bien conocida. Explique cómo variaría la luminosidad medida con la distancia, en comparación con la luminosidad absoluta.

### 11.7 Evolución del universo primigenio

26. ¿Qué se entiende por "modelo cosmológico del universo primigenio"? Describa brevemente este modelo en términos de las cuatro fuerzas fundamentales.
27. Describa dos evidencias que apoyen el modelo del Big Bang.
28. ¿En qué sentido somos, como dijo Newton, "un niño jugando en la orilla del mar"? Exprese su respuesta en términos de los conceptos de materia y energía oscuras.
29. Si se descubre alguna causa desconocida del corrimiento hacia el rojo (como que la luz se "canse" por viajar largas distancias a través del espacio vacío), ¿qué efecto tendría en la cosmología?
30. En el pasado, muchos científicos creían que el universo era infinito. Sin embargo, si el universo es infinito, cualquier línea de visión debería caer eventualmente sobre la superficie de una estrella y el cielo nocturno debería ser muy brillante. ¿Cómo se resuelve esta paradoja en la cosmología moderna?

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma.$$

En este caso, ¿cuáles son la energía, el momento y la frecuencia de cada fotón?

34. ¿Cuál es la *energía cinética total* que se llevan las partículas de los siguientes decaimientos?
  - (a)  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$
  - (b)  $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$
  - (c)  $\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$
  - (d)  $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma.$

### 11.2 Leyes de conservación de las partículas

35. ¿Cuáles de los decaimientos a continuación no pueden ocurrir porque se viola la ley de conservación del número de leptones?

- (a)  $n \rightarrow p + e^-$                       (e)  $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$   
 (b)  $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$                 (f)  $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$   
 (c)  $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$         (g)  $\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p$   
 (d)  $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$               (h)  $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$

36. ¿Cuál de las siguientes reacciones no puede darse porque viola la ley de conservación de la extrañeza?

- (a)  $p + n \rightarrow p + p + \pi^-$   
 (b)  $p + n \rightarrow p + p + K^-$   
 (c)  $K^- + p \rightarrow K^- + \Sigma^+$   
 (d)  $\pi^- + p \rightarrow K^+ + \Sigma^-$   
 (e)  $K^- + p \rightarrow \Sigma^0 + K^+ + \pi^-$   
 (f)  $K^- + p \rightarrow \Sigma^0 + \pi^- + \pi^-$   
 (g)  $\pi^+ + p \rightarrow \Sigma^+ + K^+$   
 (h)  $\pi^- + n \rightarrow K^- + \Lambda^0$

37. Identifique un posible decaimiento para cada una de las siguientes antipartículas:

- (a)  $\bar{n}$ , (b)  $\bar{\Lambda}^0$ , (c)  $\bar{\Omega}^+$ , (d)  $K^-$ , y (e)  $\bar{\Sigma}$ .

38. Cada una de las siguientes reacciones nucleares fuertes está prohibida. Identifique una ley de conservación que se infrinja en cada una de ellas.

- (a)  $p + \bar{p} \rightarrow p + n + \bar{p}$   
 (b)  $p + n \rightarrow p + \bar{p} + n + \pi^+$   
 (c)  $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^+ + K^-$   
 (d)  $K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + n$

### 11.3 Cuarks

39. Con base en la composición de cuarks de un protón, demuestre que su carga es +1.  
 40. Con base en la composición de cuarks de un neutrón, demuestre que su carga es 0.  
 41. Argumente que la composición de cuarks dada en la [Tabla 11.5](#) para el kaón positivo es consistente con la carga, el espín y la extrañeza conocidos de este barión.  
 42. Los mesones están formados por las siguientes combinaciones de cuarks (los subíndices indican el color y  $AR =$  antirojo):  $(d_R, \bar{d}_{AR})$ ,  $(s_G, \bar{u}_{AG})$ , y  $(s_R, \bar{s}_{AR})$ .  
 (a) Determine la carga y la extrañeza de cada combinación. (b) Identifique uno o más

mesones formados por cada combinación cuark-anticuark.

43. ¿Por qué ninguno de los dos conjuntos de cuarks que se muestran a continuación puede formar un hadrón?



(a)



(b)

44. Los resultados experimentales indican que una partícula aislada con carga  $+2/3$  es un cuark aislado. ¿Qué cuark podría ser? ¿Por qué es importante este descubrimiento?  
 45. Exprese el decaimiento  $\beta n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$  y  $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$  en términos de decaimientos  $\beta$  de cuarks. Compruebe que las leyes de conservación de la carga, el número leptónico y el número bariónico se ven satisfechos por el decaimiento  $\beta$  del cuark.

### 11.4 Aceleradores y detectores de partículas

46. Una partícula cargada en un campo magnético de 2,0 T se dobla en un círculo de radio de 75 cm. ¿Cuál es el momento de la partícula?  
 47. Una pista de protones atraviesa un campo magnético de 50 cm de radio. La intensidad del campo magnético es de 1,5 T. ¿Cuál es la energía total del protón?  
 48. Derive la ecuación  $p = 0,3 Br$  utilizando los conceptos de aceleración centrípeta ([Movimiento en dos y tres dimensiones](#)) y momento relativista ([Relatividad](#)).  
 49. Supongamos que la energía del haz de un colisionador electrón-positrón es de aproximadamente 4,73 GeV. ¿Cuál es la masa total ( $W$ ) de una partícula producida en la aniquilación de un electrón y un positrón en este colisionador? ¿Qué mesón se produciría?  
 50. A plena energía, los protones en el sincrotrón de Fermilab, de 2,00 km de diámetro, viajan casi a la velocidad de la luz, ya que su energía es unas 1000 veces la energía de su masa en reposo. (a) ¿Cuánto tiempo tarda un protón en completar una vuelta? (b) ¿Cuántas veces por

segundo pasará por la zona del objetivo?

51. Supongamos que un  $W^-$  creado en un detector de partículas vive por  $5,00 \times 10^{-25}$  s. ¿Qué distancia recorre en este tiempo si viaja a  $0,900c$ ? (Tenga en cuenta que el tiempo es más largo que el tiempo de vida dado  $W^-$ , que puede deberse a la naturaleza estadística del decaimiento o a la dilatación del tiempo).
52. ¿Cuál es la longitud del rastro que un  $\pi^+$  que viaja a  $0,100c$  deja en una cámara de burbujas si se crea allí y vive durante  $2,60 \times 10^{-8}$  s? (Los que se mueven más rápido o viven más tiempo pueden escapar del detector antes de decaer).
53. El SLAC, de 3,20 km de longitud, produce un haz de electrones de 50,0 GeV. Si hay 15000 tubos de aceleración, ¿qué voltaje promedio debe haber en las brechas entre ellos para alcanzar esta energía?

### 11.5 El modelo estándar

54. Utilizando el principio de incertidumbre de Heisenberg, determine el alcance de la fuerza débil si esta se produce por el intercambio de un bosón Z.
55. Utilice el principio de incertidumbre de Heisenberg para estimar el alcance de un decaimiento nuclear débil que involucre un gravitón.
56. (a) El siguiente decaimiento está mediado por la fuerza electrodébil:  
 $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ .  
 Dibuje el diagrama de Feynman para el decaimiento.  
 (b) La siguiente dispersión está mediada por la fuerza electrodébil:  
 $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$ .  
 Dibuje el diagrama de Feynman para la dispersión.
57. Suponiendo la conservación del momento, ¿cuál es la energía de cada rayo  $\gamma$  producido en el decaimiento de un pion neutro en reposo, en la reacción  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ ?
58. ¿Cuál es la longitud de onda de un electrón de 50 GeV, que se produce en el SLAC? Esto nos da una idea del límite de detalle que puede sondear.
59. El modo de decaimiento primario para el pion negativo es  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ . (a) ¿Cuál es la energía liberada en MeV en este decaimiento? (b) Utilizando la conservación del momento, cuánta energía recibe cada uno de los productos del decaimiento, dado que  $\pi^-$  está en reposo cuando decae? Puede suponer que el antineutrino muon no tiene masa y tiene momento  $p = E/c$ , al igual que un fotón.
60. Suponga que está diseñando un experimento de decaimiento de protones y que puede detectar el 50 por ciento de los decaimientos de protones en un tanque de agua. (a) ¿Cuántos kilogramos de agua necesitaría para ver un decaimiento por mes, suponiendo un tiempo de vida de  $10^{31}$  años? (b) ¿De cuántos metros cúbicos de agua se trata? (c) Si la vida útil real es  $10^{33}$  años, ¿cuánto tiempo habría que esperar en promedio para ver el decaimiento de un solo protón?

### 11.6 El Big Bang

61. Si la velocidad de una galaxia lejana es de  $0,99c$ , ¿cuál es la distancia de la galaxia respecto a un observador terrestre?
62. La distancia de una galaxia a nuestro sistema solar es de 10 Mpc. (a) ¿Cuál es la velocidad de recesión de la galaxia? (b) ¿En qué fracción se corre al rojo la luz estelar de esta galaxia (es decir, cuál es su valor  $z$ )?
63. Si una galaxia está a 153 Mpc de nosotros, ¿a qué velocidad esperamos que se mueva y en qué dirección?
64. En promedio, a qué distancia están las galaxias que se alejan de nosotros a un 2,0% de la velocidad de la luz?
65. Nuestro sistema solar orbita alrededor del centro de la Vía Láctea. Suponiendo una órbita circular de 30.000 años luz de radio y una rapidez orbital de 250 km/s, ¿cuántos años tarda una revolución? Observe que esta es una aproximación, suponiendo una velocidad constante y una órbita circular, pero es representativo del tiempo que tardan nuestro sistema y las estrellas locales en dar una vuelta alrededor de la galaxia.
66. (a) ¿Cuál es la velocidad aproximada respecto a nosotros de una galaxia cercana al borde del universo conocido, a unos 10 Gly (giga-año luz) de distancia? (b) ¿Qué fracción de la velocidad de la luz es ésta? Observe que hemos observado galaxias que se alejan de nosotros a más de  $0,9c$ .
67. (a) Calcule la edad aproximada del universo a partir del valor medio de la constante de Hubble,  $H_0 = 20 \text{ km/s} \cdot \text{Mly}$ . Para ello, calcule el tiempo que tardaría en recorrer 0,307 Mpc a una velocidad de expansión constante de 20 km/s. (b) Si se produce alguna aceleración, ¿la edad real del universo sería mayor o menor que

la que encontramos aquí? Explique

- 68.** La Galaxia de Andrómeda es la galaxia más grande y visible a simple vista. Estime su brillo en relación con el Sol, suponiendo que tiene una luminosidad de  $10^{12}$  veces la del Sol y se encuentra a 0,613 Mpc de distancia.
- 69.** Demuestre que la velocidad de una estrella que orbita una galaxia en una órbita circular es

inversamente proporcional a la raíz cuadrada de su radio orbital, suponiendo que la masa de las estrellas dentro de su órbita actúa como una masa única en el centro de la galaxia. Puede utilizar una ecuación de un capítulo anterior para apoyar su conclusión, pero debe justificar su uso y definir todos los términos utilizados.

### Problemas Adicionales

- 70.** Los resultados experimentales sugieren que un muon decae en un electrón y un fotón. ¿Cómo es posible?
- 71.** A cada una de las siguientes reacciones le falta una sola partícula. Identifique la partícula que falta en cada reacción.
- (a)  $p + \bar{p} \rightarrow n + ?$
- (b)  $p + p \rightarrow p + \Lambda^0 + ?$
- (c)  $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^- + ?$
- (d)  $K^- + n \rightarrow \Lambda^0 + ?$
- (e)  $\tau^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + ?$
- (f)  $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + ?$
- 72.** Debido a la pérdida de energía debida a la radiación de sincrotrón en el LHC del CERN, solo se añaden 5,00 MeV a la energía de cada protón durante cada revolución alrededor del anillo principal. ¿Cuántas revoluciones son necesarias para producir protones de 7,00 TeV (7.000 GeV), si se inyectan con una energía inicial de 8,00 GeV?
- 73.** Un protón y un antiprotón colisionan frontalmente, teniendo cada uno una energía cinética de 7,00 TeV (como en el LHC del CERN). ¿De cuánta energía de colisión se dispone, teniendo en cuenta la aniquilación de las dos masas? (Observe que esto no es significativamente mayor que la energía cinética extremadamente relativista).
- 74.** Cuando un electrón y un positrón colisionan en la instalación SLAC, cada uno de ellos tiene energías cinéticas de 50,0 GeV. ¿Cuál es la

energía total de colisión disponible, teniendo en cuenta la energía de aniquilación? Observe que la energía de aniquilación es insignificante, porque los electrones son altamente relativistas.

- 75.** El núcleo de una estrella colapsa durante una supernova, formando una estrella de neutrones. El momento angular del núcleo se conserva, por lo que la estrella de neutrones gira rápidamente. Si el radio inicial del núcleo es  $5,0 \times 10^5$  km y colapsa a 10,0 km, calcule la velocidad angular de la estrella de neutrones en revoluciones por segundo, dado que la velocidad angular del núcleo era originalmente de 1 revolución por 30,0 días.
- 76.** Utilizando la solución del problema anterior, calcule el aumento de la energía cinética rotacional, dado que la masa del núcleo es 1,3 veces la de nuestro Sol. ¿De dónde procede este aumento de la energía cinética?
- 77.** (a) ¿Qué constante de Hubble corresponde a una edad aproximada del universo de  $10^{10}$  años? Para obtener un valor aproximado, supongamos que la tasa de expansión es constante y calculemos la velocidad a la que deben alejarse dos galaxias para estar separadas por 1 Mly (mega año luz) (separación media actual de las galaxias) en un tiempo de  $10^{10}$  años. (b) De forma similar, ¿qué constante de Hubble corresponde a un universo de aproximadamente  $2 \times 10^{10}$  años?

### Problemas De Desafío

- 78.** Los electrones y los positrones colisionan en un acelerador circular. Deduzca la expresión para la energía del centro de masa de la partícula.
- 79.** La intensidad de la radiación de los rayos cósmicos disminuye rápidamente con el aumento de la energía, pero ocasionalmente hay rayos cósmicos extremadamente

energéticos que producen una lluvia de radiación de todas las partículas que crean al golpear un núcleo en la atmósfera. Supongamos que una partícula de rayo cósmico con una energía de  $10^{10}$  GeV convierte su energía en partículas con masa media de  $200 \text{ MeV}/c^2$ . (a) ¿Cuántas partículas se crean? (b) Si las

- partículas llueven sobre un área de  $1.00\text{-km}^2$ , ¿cuántas partículas hay por metro cuadrado?
- 80.** (a) Calcule la cantidad relativista  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$  para protones de  $1.00\text{-TeV}$  producidos en el Fermilab. (b) Si dicho protón creara un  $\pi^+$  teniendo la misma velocidad, ¿cuánto duraría su vida en el laboratorio? (c) ¿Qué distancia podría recorrer en este tiempo?
- 81.** Los planes para un acelerador que produzca un haz secundario de mesones K que se dispersen desde los núcleos, con el fin de estudiar la fuerza fuerte, requieren que tengan una energía cinética de  $500\text{ MeV}$ . (a) ¿Cuál sería la cantidad relativista  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$  para estas partículas? (b) ¿Cuál sería su vida media en el laboratorio? (c) ¿Qué distancia podrían recorrer en este tiempo?
- 82.** En las supernovas, los neutrinos se producen en grandes cantidades. Se detectaron a partir de la supernova 1987A en la Nube de Magallanes, que está a unos  $120.000$  años luz de la Tierra (relativamente cerca de nuestra Vía Láctea). Si los neutrinos tienen masa, no pueden viajar a la velocidad de la luz, pero si su masa es pequeña, su velocidad sería casi la de la luz. (a) Supongamos un neutrino con una masa  $7\text{-eV}/c^2$  tiene una energía cinética de  $700\text{ keV}$ . Halle la cantidad relativista  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$  para él. (b) Si el neutrino sale de la supernova 1987A al mismo tiempo que un fotón y ambos viajan a la Tierra, ¿con qué antelación llega el fotón? No se trata de una gran diferencia de tiempo, dado que es imposible saber qué neutrino partió con qué fotón y la escasa eficacia de los detectores de neutrinos. Por tanto, el hecho de que los neutrinos se hayan observado a las pocas horas del resplandor de la supernova solo pone un límite superior a la masa del neutrino. (*Pista:* Es posible que tenga que utilizar una expansión en serie para hallar  $v$  para el neutrino, ya que su  $\gamma$  es muy grande).
- 83.** Suponiendo una órbita circular para el Sol alrededor del centro de la Vía Láctea, calcule su rapidez orbital utilizando la siguiente información: La masa de la galaxia equivale a una sola masa  $1,5 \times 10^{11}$  veces la del Sol ( $3 \times 10^{41}\text{ kg}$ ), situado a  $30.000$  años luz de distancia.
- 84.** (a) ¿Cuál es la fuerza de gravedad aproximada sobre una persona de  $70\text{ kg}$  debida a la galaxia de Andrómeda, suponiendo que su masa total es  $10^{13}$  la de nuestro Sol y actúa como una sola masa a  $0,613\text{ Mpc}$  de distancia? (b) ¿Cuál es la relación entre esta fuerza y el peso de la persona? Observe que Andrómeda es la galaxia grande más cercana.
- 85.** (a) Una partícula y su antipartícula están en reposo respecto a un observador y se aniquilan (destruyendo completamente ambas masas), creando dos rayos  $\gamma$  de igual energía. ¿Cuál es la energía característica de los rayos  $\gamma$  que usted buscaría si se tratara de una prueba de aniquilación protón-antiprotón? (El hecho de que dicha radiación se observe raramente es una prueba de que hay muy poca antimateria en el universo). (b) ¿Cómo se compara esto con la energía de  $0,511\text{-MeV}$  asociada a la aniquilación electrón-positrón?
- 86.** El pico de intensidad del CMBR se produce a una longitud de onda de  $1,1\text{ mm}$ . (a) ¿Cuál es la energía en eV de un fotón de  $1,1\text{ mm}$ ? (b) Hay aproximadamente  $10^9$  fotones por cada partícula masiva en el espacio profundo. Calcule la energía de  $10^9$  de dichos fotones. (c) Si la partícula masiva promedio en el espacio tiene una masa de la mitad de la de un protón, ¿qué energía se crearía al convertir su masa en energía? (d) ¿Implica esto que el espacio está "dominado por la materia"? Explique brevemente.
- 87.** (a) Utilice el principio de incertidumbre de Heisenberg para calcular la incertidumbre en la energía para un intervalo de tiempo correspondiente de  $10^{-43}\text{ s}$ . (b) Compare esta energía con la energía de unificación de fuerzas  $10^{19}\text{ GeV}$  y diga por qué son similares.



# APÉNDICE A

## Unidades

Cantidad	Símbolo común	Unidad	Unidad en términos de unidades SI básicas
Aceleración	$\vec{a}$	m/s <sup>2</sup>	m/s <sup>2</sup>
Cantidad de sustancia	$n$	<b>mol</b>	mol
Ángulo	$\theta, \phi$	radián (rad)	
Aceleración angular	$\vec{\alpha}$	rad/s <sup>2</sup>	s <sup>-2</sup>
Frecuencia angular	$\omega$	rad/s	s <sup>-1</sup>
Momento angular	$\vec{L}$	kg · m <sup>2</sup> /s	kg · m <sup>2</sup> /s
Velocidad angular	$\vec{\omega}$	rad/s	s <sup>-1</sup>
Área	$A$	m <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>
Número atómico	$Z$		
Capacidad	$C$	faradio (F)	A <sup>2</sup> · s <sup>4</sup> /kg · m <sup>2</sup>
Carga	$q, Q, e$	culombio (C)	A · s
Densidad de carga:			
Línea	$\lambda$	C/m	A · s/m
Superficie	$\sigma$	C/m <sup>2</sup>	A · s/m <sup>2</sup>
Volumen	$\rho$	C/m <sup>3</sup>	A · s/m <sup>3</sup>
Conductividad	$\sigma$	1/Ω · m	A <sup>2</sup> · s <sup>3</sup> /kg · m <sup>3</sup>
Corriente	$I$	<b>amperio</b>	A
Densidad de corriente	$\vec{j}$	A/m <sup>2</sup>	A/m <sup>2</sup>
Densidad	$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	kg/m <sup>3</sup>
Constante dieléctrica	$\kappa$		
Momento dipolar eléctrico	$\vec{p}$	C · m	A · s · m



Cantidad	Símbolo común	Unidad	Unidad en términos de unidades SI básicas
Campo eléctrico	$\vec{E}$	N/C	$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{A} \cdot \text{s}^3$
Flujo eléctrico	$\Phi$	$\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^3/\text{A} \cdot \text{s}^3$
Fuerza electromotriz	$\epsilon$	voltios (V)	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{A} \cdot \text{s}^3$
Energía	$E, U, K$	julio (J)	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$
Entropía	$S$	J/K	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \cdot \text{K}$
Fuerza	$\vec{F}$	newton (N)	$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$
Frecuencia	$f$	hercio (Hz)	$\text{s}^{-1}$
Calor	$Q$	julio (J)	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$
Inductancia	$L$	henrio (H)	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{A}^2 \cdot \text{s}^2$
Longitud:	$\ell, L$	<b>metro</b>	m
Desplazamiento	$\Delta x, \Delta \vec{r}$		
Distancia	$d, h$		
Posición	$x, y, z, \vec{r}$		
Momento dipolar magnético	$\vec{\mu}$	$\text{N} \cdot \text{J}/\text{T}$	$\text{A} \cdot \text{m}^2$
Campo magnético	$\vec{B}$	tesla (T) $= (\text{Wb}/\text{m}^2)$	$\text{kg}/\text{A} \cdot \text{s}^2$
Flujo magnético	$\Phi_m$	weber (Wb)	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{A} \cdot \text{s}^2$
Masa	$m, M$	<b>kilogramo</b>	kg
Calor específico molar	$C$	$\text{J}/\text{mol} \cdot \text{K}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \cdot \text{mol} \cdot \text{K}$
Momento de inercia	$I$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
Momento	$\vec{p}$	$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}$	$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}$
Periodo	$T$	s	s
Permeabilidad del espacio libre	$\mu_0$	$\text{N}/\text{A}^2 = (\text{H}/\text{m})$	$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{A}^2 \cdot \text{s}^2$

Cantidad	Símbolo común	Unidad	Unidad en términos de unidades SI básicas
Permeabilidad del espacio libre	$\epsilon_0$	$C^2/N \cdot m^2 = (F/m)$	$A^2 \cdot s^4/kg \cdot m^3$
Potencial	$V$	voltios (V) = (J/C)	$kg \cdot m^2/A \cdot s^3$
Potencia	$P$	vatio (W) = (J/s)	$kg \cdot m^2/s^3$
Presión	$p$	pascal (P) = (N/m <sup>2</sup> )	$kg/m \cdot s^2$
Resistencia	$R$	ohm ( $\Omega$ ) = (V/A)	$kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^3$
Calor específico	$c$	J/kg · K	$m^2/s^2 \cdot K$
Velocidad	$v$	m/s	m/s
Temperatura	$T$	<b>kelvin</b>	K
Tiempo	$t$	<b>segundo</b>	s
Torque	$\vec{\tau}$	N · m	$kg \cdot m^2/s^2$
Velocidad	$\vec{v}$	m/s	m/s
Volumen	$V$	m <sup>3</sup>	m <sup>3</sup>
Longitud de onda	$\lambda$	m	m
Trabajo	$W$	julio (J) = (N · m)	$kg \cdot m^2/s^2$

**TABLA A1** Unidades que se usan en física (unidades fundamentales en negritas)



# APÉNDICE B

## Factores de conversión

	<b>m</b>	<b>cm</b>	<b>km</b>
1 metro	1	$10^2$	$10^{-3}$
1 centímetro	$10^{-2}$	1	$10^{-5}$
1 kilómetro	$10^3$	$10^5$	1
1 pulgada	$2,540 \times 10^{-2}$	2,540	$2,540 \times 10^{-5}$
1 pie	0,3048	30,48	$3,048 \times 10^{-4}$
1 milla	1.609	$1,609 \times 10^4$	1,609
1 angstrom	$10^{-10}$		
1 fermi	$10^{-15}$		
1 año luz			$9,460 \times 10^{12}$
	<b>in</b>	<b>ft</b>	<b>mi</b>
1 metro	39,37	3,281	$6,214 \times 10^{-4}$
1 centímetro	0,3937	$3,281 \times 10^{-2}$	$6,214 \times 10^{-6}$
1 kilómetro	$3,937 \times 10^4$	$3,281 \times 10^3$	0,6214
1 pulgada	1	$8,333 \times 10^{-2}$	$1,578 \times 10^{-5}$
1 pie	12	1	$1,894 \times 10^{-4}$
1 milla	$6,336 \times 10^4$	5.280	1

**TABLA B1** Longitud

### Área

$$1 \text{ cm}^2 = 0,155 \text{ in}^2$$

$$1 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ cm}^2 = 10,76 \text{ ft}^2$$

$$1 \text{ in}^2 = 6,452 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ ft}^2 = 144 \text{ in}^2 = 0,0929 \text{ m}^2$$

**Volumen**

$$1 \text{ litro} = 1.000 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3 = 0,03531 \text{ ft}^3 = 61,02 \text{ in}^3$$

$$1 \text{ ft}^3 = 0,02832 \text{ m}^3 = 28,32 \text{ litros} = 7,477 \text{ galones}$$

$$1 \text{ galón} = 3,788 \text{ litros}$$

	s	min	h	día	año
1 segundo	1	$1,667 \times 10^{-2}$	$2,778 \times 10^{-4}$	$1,157 \times 10^{-5}$	$3,169 \times 10^{-8}$
1 minuto	60	1	$1,667 \times 10^{-2}$	$6,944 \times 10^{-4}$	$1,901 \times 10^{-6}$
1 hora	3.600	60	1	$4,167 \times 10^{-2}$	$1,141 \times 10^{-4}$
1 día	$8,640 \times 10^4$	1.440	24	1	$2,738 \times 10^{-3}$
1 año	$3,156 \times 10^7$	$5,259 \times 10^5$	$8,766 \times 10^3$	365,25	1

**TABLA B2** Tiempo

	m/s	cm/s	ft/s	mi/h
1 metro/segundo	1	$10^2$	3,281	2,237
1 centímetro/segundo	$10^{-2}$	1	$3,281 \times 10^{-2}$	$2,237 \times 10^{-2}$
1 pie/segundo	0,3048	30,48	1	0,6818
1 milla/hora	0,4470	44,70	1,467	1

**TABLA B3** Velocidad**Aceleración**

$$1 \text{ m/s}^2 = 100 \text{ cm/s}^2 = 3,281 \text{ ft/s}^2$$

$$1 \text{ cm/s}^2 = 0,01 \text{ m/s}^2 = 0,03281 \text{ ft/s}^2$$

$$1 \text{ ft/s}^2 = 0,3048 \text{ m/s}^2 = 30,48 \text{ cm/s}^2$$

$$1 \text{ mi/h} \cdot \text{s} = 1,467 \text{ ft/s}^2$$

	kg	g	slug	u
1 kilogramo	1	$10^3$	$6,852 \times 10^{-2}$	$6,024 \times 10^{26}$
1 gramo	$10^{-3}$	1	$6,852 \times 10^{-5}$	$6,024 \times 10^{23}$
1 slug	14,59	$1,459 \times 10^4$	1	$8,789 \times 10^{27}$
1 unidad de masa atómica	$1,661 \times 10^{-27}$	$1,661 \times 10^{-24}$	$1,138 \times 10^{-28}$	1

	kg	g	slug	u
1 tonelada métrica	1.000			

TABLA B4 Masa

	N	dina	lb
1 newton	1	$10^5$	0,2248
1 dina	$10^{-5}$	1	$2,248 \times 10^{-6}$
1 libra	4,448	$4,448 \times 10^5$	1

TABLA B5 Fuerza

	Pa	dina/cm <sup>2</sup>	atm	cmHg	lb/in <sup>2</sup>
1 pascal	1	10	$9,869 \times 10^{-6}$	$7,501 \times 10^{-4}$	$1,450 \times 10^{-4}$
1 dina/centímetro <sup>2</sup>	$10^{-1}$	1	$9,869 \times 10^{-7}$	$7,501 \times 10^{-5}$	$1,450 \times 10^{-5}$
1 atmósfera	$1,013 \times 10^5$	$1,013 \times 10^6$	1	76	14,70
1 centímetro de mercurio*	$1,333 \times 10^3$	$1,333 \times 10^4$	$1,316 \times 10^{-2}$	1	0,1934
1 libra/pulgada <sup>2</sup>	$6,895 \times 10^3$	$6,895 \times 10^4$	$6,805 \times 10^{-2}$	5,171	1
1 bar	$10^5$				
1 torr				1 (mmHg)	

\* Donde la aceleración debido a la gravedad es  $9,80665 \text{ m/s}^2$  y la temperatura es  $0^\circ\text{C}$

TABLA B6 Presión

	J	erg	ft.lb
1 julio	1	$10^7$	0,7376
1 erg	$10^{-7}$	1	$7,376 \times 10^{-8}$
1 pie-libra	1,356	$1,356 \times 10^7$	1
1 electronvoltio	$1,602 \times 10^{-19}$	$1,602 \times 10^{-12}$	$1,182 \times 10^{-19}$
1 caloría	4,186	$4,186 \times 10^7$	3,088
1 unidad térmica británica	$1,055 \times 10^3$	$1,055 \times 10^{10}$	$7,779 \times 10^2$

	J	erg	ft.lb
1 kilovatio-hora	$3,600 \times 10^6$		
	eV	cal	Btu
1 julio	$6,242 \times 10^{18}$	0,2389	$9,481 \times 10^{-4}$
1 erg	$6,242 \times 10^{11}$	$2,389 \times 10^{-8}$	$9,481 \times 10^{-11}$
1 pie-libra	$8,464 \times 10^{18}$	0,3239	$1,285 \times 10^{-3}$
1 electronvoltio	1	$3,827 \times 10^{-20}$	$1,519 \times 10^{-22}$
1 caloría	$2,613 \times 10^{19}$	1	$3,968 \times 10^{-3}$
1 unidad térmica británica	$6,585 \times 10^{21}$	$2,520 \times 10^2$	1

**TABLA B7** Trabajo, energía, calor

### Potencia

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$$

$$1 \text{ hp} = 746 \text{ W} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}$$

$$1 \text{ Btu/h} = 0,293 \text{ W}$$

### Ángulo

$$1 \text{ rad} = 57,30^\circ = 180^\circ/\pi$$

$$1^\circ = 0,01745 \text{ rad} = \pi/180 \text{ rad}$$

$$1 \text{ revolución} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

$$1 \text{ rev./min (rpm)} = 0,1047 \text{ rad/s}$$



# APÉNDICE C

## Constantes fundamentales

Cantidad	Símbolo	Valor
Unidad de masa atómica	u	$1,660\,538\,782\,(83) \times 10^{-27}$ kg $931,494\,028\,(23)$ MeV/c <sup>2</sup>
Número de Avogadro	$N_A$	$6,02214076 \times 10^{23}$ mol recíproco (mol <sup>-1</sup> )
Magnetón de Bohr	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$	$9,274\,009\,15\,(23) \times 10^{-24}$ J/T
Radio de Bohr	$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2 k_e}$	$5,291\,772\,085\,9\,(36) \times 10^{-11}$ m
La constante de Boltzmann	$k_B = \frac{R}{N_A}$	$1,380649 \times 10^{-23}$ julio por kelvin (J · K <sup>-1</sup> )
Longitud de onda Compton	$\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$	$2,426\,310\,217\,5\,(33) \times 10^{-12}$ m
Constante de Coulomb	$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$8,987\,551\,788\dots \times 10^9$ N · m <sup>2</sup> /C <sup>2</sup> (exactamente)
Masa de deuterón	$m_d$	$3,343\,583\,20\,(17) \times 10^{-27}$ kg $2,013\,553\,212\,724\,(78)$ u $1875,612\,859$ MeV/c <sup>2</sup>
Masa del electrón	$m_e$	$9,109\,382\,15\,(45) \times 10^{-31}$ kg $5,485\,799\,094\,3\,(23) \times 10^{-4}$ u $0,510\,998\,910\,(13)$ MeV/c <sup>2</sup>
Voltaje de electrón	eV	$1,602\,176\,487\,(40) \times 10^{-19}$ J
Cargo elemental	e	$1,602176634 \times 10^{-19}$ C
Constante universal de los gases ideales	R	$8,314\,472\,(15)$ J/mol · K
Constante gravitacional	G	$6,674\,28\,(67) \times 10^{-11}$ N · m <sup>2</sup> /kg <sup>2</sup>
Masa de neutrón	$m_n$	$1,674\,927\,211\,(84) \times 10^{-27}$ kg $1,008\,664\,915\,97\,(43)$ u $939,565\,346\,(23)$ MeV/c <sup>2</sup>

Cantidad	Símbolo	Valor
Magnetón nuclear	$\mu_n = \frac{e\hbar}{2m_p}$	$5,050\,783\,24\,(13) \times 10^{-27} \text{ J/T}$
Permeabilidad del espacio libre	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ (exactamente)
Permeabilidad del espacio libre	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$	$8,854\,187\,817\dots \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ (exactamente)
Constante de Planck	$h$ $\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$6,62607015 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ $1,05457182 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Masa de protón	$m_p$	$1,672\,621\,637\,(83) \times 10^{-27} \text{ kg}$ $1,007\,276\,466\,77\,(10) \text{ u}$ $938,272\,013\,(23) \text{ MeV}/c^2$
Constante de Rydberg	$R_H$	$1,097\,373\,156\,852\,7\,(73) \times 10^7 \text{ m}^{-1}$
Velocidad de la luz en el vacío	$c$	$2,997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m/s}$ (exactamente)

**TABLA C1** Constantes fundamentales *Nota:* Estas constantes son los valores recomendados en 2006 por el Comité de Información para Ciencia y Tecnología (Committee on Data for Science and Technology, CODATA), basados en un ajuste por mínimos cuadrados de los datos de diferentes mediciones. Los números entre paréntesis de los valores representan las imprecisiones de los dos últimos dígitos.

**Combinaciones útiles de constantes para los cálculos:**

$$hc = 12.400 \text{ eV} \cdot \text{Å} = 1.240 \text{ eV} \cdot \text{nm} = 1.240 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$$

$$\hbar c = 1.973 \text{ eV} \cdot \text{Å} = 197,3 \text{ eV} \cdot \text{nm} = 197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$$

$$k_e e^2 = 14,40 \text{ eV} \cdot \text{Å} = 1,440 \text{ eV} \cdot \text{nm} = 1,440 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$$

$$k_B T = 0,02585 \text{ eV en } T = 300 \text{ K}$$

# APÉNDICE D

## Datos astronómicos

Objeto celestial	Distancia media al Sol (millones de km)	Periodo de revolución (d = días) (y = años)	Periodo de rotación en el ecuador	Excentricidad de la órbita
Sol	–	–	27 d	–
Mercurio	57,9	88 d	59 d	0,206
Venus	108,2	224,7 d	243 d	0,007
Tierra	149,6	365,25 d	23 h 56 min 4 s	0,017
Marte	227,9	687 d	24 h 37 min 23 s	0,093
Júpiter	778,4	11,9 y	9 h 50 min 30 s	0,048
Saturno	1.426,7	29,5 y	10 h 14 min	0,054
Urano	2.871,0	84,0 y	17 h 14 min	0,047
Neptuno	4.498,3	164,8 y	16 h	0,009
La Luna de la Tierra	149,6 (0,386 desde la Tierra)	27,3 d	27,3 d	0,055
Objeto celestial	Diámetro ecuatorial (km)	Masa (Tierra = 1)	Densidad (g/cm <sup>3</sup> )	
Sol	1.392.000	333.000	1,4	
Mercurio	4.879	0,06	5,4	
Venus	12.104	0,82	5,2	
Tierra	12.756	1,00	5,5	
Marte	6.794	0,11	3,9	
Júpiter	142.984	317,83	1,3	
Saturno	120.536	95,16	0,7	
Urano	51.118	14,54	1,3	
Neptuno	49.528	17,15	1,6	

Objeto celestial	Distancia media al Sol (millones de km)	Periodo de revolución (d = días) (y = años)	Periodo de rotación en el ecuador	Excentricidad de la órbita
La Luna de la Tierra	3.476	0,01	3,3	

**TABLA D1** Datos astronómicos

**Otros datos:**

Masa de la Tierra:  $5,97 \times 10^{24}$  kg

Masa de la Luna:  $7,36 \times 10^{22}$  kg

Masa del Sol:  $1,99 \times 10^{30}$  kg

# APÉNDICE E

## Fórmulas matemáticas

### Fórmula cuadrática

Si  $ax^2 + bx + c = 0$ , entonces  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Triángulo de base $b$ y altura $h$ Área = $\frac{1}{2}bh$		
Círculo de radio $r$	Circunferencia = $2\pi r$	Área = $\pi r^2$
Esfera de radio $r$	Superficie = $4\pi r^2$	Volumen = $\frac{4}{3}\pi r^3$
Cilindro de radio $r$ y altura $h$	Superficie curva = $2\pi rh$	Volumen = $\pi r^2 h$

**TABLA E1** Geometría

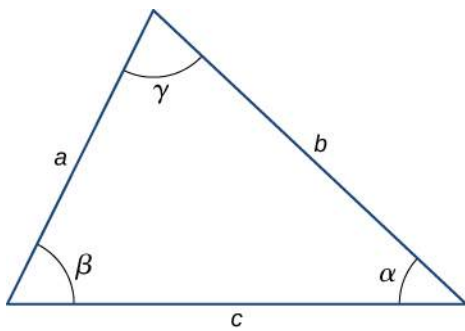
### Trigonometría

#### Identidades trigonométricas

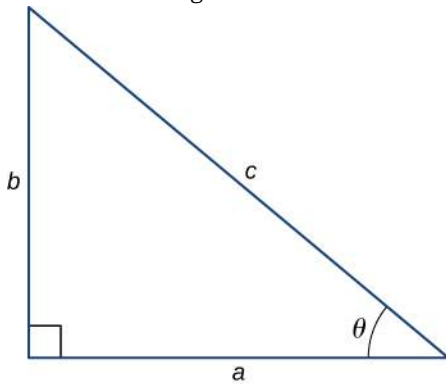
- $\operatorname{sen} \theta = 1/\operatorname{csc} \theta$
- $\operatorname{cos} \theta = 1/\operatorname{sec} \theta$
- $\operatorname{tan} \theta = 1/\operatorname{cot} \theta$
- $\operatorname{sen} (90^\circ - \theta) = \operatorname{cos} \theta$
- $\operatorname{cos} (90^\circ - \theta) = \operatorname{sen} \theta$
- $\operatorname{tan} (90^\circ - \theta) = \operatorname{cot} \theta$
- $\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1$
- $\operatorname{sec}^2 \theta - \operatorname{tan}^2 \theta = 1$
- $\operatorname{tan} \theta = \operatorname{sen} \theta / \operatorname{cos} \theta$
- $\operatorname{sen} (\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta \pm \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \beta$
- $\operatorname{cos} (\alpha \pm \beta) = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$
- $\operatorname{tan} (\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tan} \alpha \pm \operatorname{tan} \beta}{1 \mp \operatorname{tan} \alpha \operatorname{tan} \beta}$
- $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta$
- $\operatorname{cos} 2\theta = \operatorname{cos}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = 2\operatorname{cos}^2 \theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \theta$
- $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{cos} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
- $\operatorname{cos} \alpha + \operatorname{cos} \beta = 2\operatorname{cos} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{cos} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

#### Triángulos

- Ley de los senos:  $\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$
- Ley de los cosenos:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{cos} \gamma$



3. Teorema de Pitágoras:  $a^2 + b^2 = c^2$



### Ampliaciones de la serie

1. Teorema del binomio  $(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!} + \dots$
2.  $(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} \pm \dots$  ( $x^2 < 1$ )
3.  $(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp \frac{nx}{1!} + \frac{n(n+1)x^2}{2!} \mp \dots$  ( $x^2 < 1$ )
4.  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$
5.  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$
6.  $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$
7.  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$
8.  $\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$  ( $|x| < 1$ )

### Derivadas

1.  $\frac{d}{dx}[af(x)] = a \frac{d}{dx}f(x)$
2.  $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$
3.  $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x) \frac{d}{dx}g(x) + g(x) \frac{d}{dx}f(x)$
4.  $\frac{d}{dx}f(u) = \left[\frac{d}{du}f(u)\right] \frac{du}{dx}$
5.  $\frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$
6.  $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
7.  $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
8.  $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$
9.  $\frac{d}{dx} \cot x = -\operatorname{csc}^2 x$
10.  $\frac{d}{dx} \sec x = \tan x \sec x$
11.  $\frac{d}{dx} \csc x = -\cot x \csc x$
12.  $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

13.  $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
14.  $\frac{d}{dx} \operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15.  $\frac{d}{dx} \operatorname{cos}^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16.  $\frac{d}{dx} \operatorname{tan}^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$

### Integrales

1.  $\int af(x) dx = a \int f(x) dx$
2.  $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
3.  $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} (m \neq -1)$   
 $= \ln x (m = -1)$
4.  $\int \operatorname{sen} x dx = -\operatorname{cos} x$
5.  $\int \operatorname{cos} x dx = \operatorname{sen} x$
6.  $\int \operatorname{tan} x dx = \ln |\operatorname{sec} x|$
7.  $\int \operatorname{sen}^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$
8.  $\int \operatorname{cos}^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$
9.  $\int \operatorname{sen} ax \operatorname{cos} ax dx = -\frac{\operatorname{cos} 2ax}{4a}$
10.  $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
11.  $\int xe^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$
12.  $\int \ln ax dx = x \ln ax - x$
13.  $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{tan}^{-1} \frac{x}{a}$
14.  $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right|$
15.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{senh}^{-1} \frac{x}{a}$
16.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a}$
17.  $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{senh}^{-1} \frac{x}{a}$
18.  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a}$





# APÉNDICE F

## Química

Periodo	Grupo																18		
1	1												13		14	15	16	17	2
1	1	2											5	6	7	8	9	10	2
	H 1,008 hidrógeno												B 10,81 boro	C 12,01 carbono	N 14,01 nitrógeno	O 16,00 oxígeno	F 19,00 flúor	Ne 20,18 neón	
2	3	4											13	14	15	16	17	18	
	Li 6,94 litio	Be 9,012 berilio											Al 26,98 aluminio	Si 28,09 silicio	P 30,97 fósforo	S 32,06 azufre	Cl 35,45 cloro	Ar 39,95 argón	
3	11	12	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
	Na 22,99 sodio	Mg 24,31 magnesio	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr	
4	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	
	K 39,10 potasio	Ca 40,08 calcio	Scandio	Titanio	Vanadio	Cromo	Manganeso	Hierro	Cobalto	Níquel	Cobre	Zinc	Gaio	Germanio	Arsénico	Selenio	Bromo	Kriptón	
5	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	
	Rb 85,47 rubidio	Sr 87,62 estronecio	Yttrio	Zirconio	Niobio	Mo	Tc [97] tecnecio	Ru 101,1 rutenio	Rh 102,9 rodio	Pd 106,4 paladio	Ag 107,9 plata	Cd 112,4 cadmio	In 114,8 indio	Sn 118,7 estano	Sb 121,8 antimonio	Te 127,6 telurio	I 126,9 yodo	Xe 131,3 xenón	
6	55	56	57-71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	
	Cs 132,9 cesio	Ba 137,3 bario	Lantano-Luterio	Hafnio	Tantalio	Wolframio	Renio	Osmio	Ir 192,2 iridio	Pt 195,1 platino	Au 197,0 oro	Hg 200,6 mercurio	Tl 204,4 talio	Pb 207,2 plomo	Bi 209,0 bismuto	Po [209] polonio	At [210] astato	Rn [222] radón	
7	87	88	89-103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	
	Fr [223] francio	Ra [226] radio	Actinido-Lutecio	Rutherfordio	Dubnio	Sg [271] seaborgio	Bh [270] bohrio	Hs [277] hassium	Mt [276] meitnerio	Ds [281] darmstadtio	Rg [282] roentgenio	Cn [285] copernicio	Nh [286] nihonio	Fl [289] flerovio	Mc [288] moscovio	Lv [293] livermorio	Ts [294] teneso	Og [294] oganesson	
			57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71		
			La 138,9 lantano	Ce 140,1 cerio	Pr 140,9 praseodimio	Nd 144,2 neodimio	Pm [145] prometio	Sm 150,4 samario	Eu 152,0 europio	Gd 157,3 gadolinio	Tb 158,9 terbio	Dy 162,5 disprocio	Ho 164,9 holmio	Er 167,3 erbio	Tm 168,9 tulio	Yb 173,1 tercio	Lu 175,0 lutecio		
			**	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	
			Ac [227] actinio	Th 232,0 torio	Pa 231,0 protactinio	U 238,0 uranio	Np [237] neptunio	Pu [244] plutonio	Am [243] americio	Cm [247] curcio	Bk [247] berkelio	Cf [251] californio	Es [252] einsteinio	Fm [257] fermio	Md [258] mendelivio	No [259] nobelio	Lr [262] lawrencio		

Código de colores	
<span style="background-color: #f0f0f0; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 15px; height: 10px;"></span> Metales representativos	<b>Sólido</b>
<span style="background-color: #c0c0c0; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 15px; height: 10px;"></span> Metales de transición y de transición interna	<b>Líquido</b>
<span style="background-color: #e0e0e0; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 15px; height: 10px;"></span> Elementos radioactivos	<b>Gas</b>
<span style="background-color: #d0d0d0; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 15px; height: 10px;"></span> Metaloides	
<span style="background-color: #a0a0a0; border: 1px solid black; display: inline-block; width: 15px; height: 10px;"></span> No metal	



# APÉNDICE G

## El alfabeto griego

Nombre	Mayúsculas	Minúsculas	Nombre	Mayúsculas	Minúsculas
Alpha	A	$\alpha$	Nu	N	$\nu$
Beta	B	$\beta$	Xi	$\Xi$	$\xi$
Gamma	$\Gamma$	$\gamma$	Ómicron	O	$o$
Delta	$\Delta$	$\delta$	Pi	$\Pi$	$\pi$
Épsilon	E	$\epsilon$	Rho	P	$\rho$
Zeta	Z	$\zeta$	Sigma	$\Sigma$	$\sigma$
Eta	H	$\eta$	Tau	T	$\tau$
Theta	$\Theta$	$\theta$	Ípsilon	$\Upsilon$	$\upsilon$
Iota	I	$\iota$	Phi	$\Phi$	$\phi$
Kappa	K	$\kappa$	Chi	X	$\chi$
Lambda	$\Lambda$	$\lambda$	Psi	$\Psi$	$\psi$
Mu	M	$\mu$	Omega	$\Omega$	$\omega$

**TABLA G1** El alfabeto griego



# CLAVE DE RESPUESTAS

## Capítulo 1

### Compruebe Lo Aprendido

- 1.1 2,1% (con dos cifras significativas)
- 1.2  $15,1^\circ$
- 1.3 Del aire al agua, porque no se cumple la condición de que el segundo medio debe tener un índice de refracción menor
- 1.4 9,3 cm
- 1.5  $AA'$  se alarga,  $A'B'$  se aleja de la superficie, y el rayo refractado se aleja de la normal.
- 1.6 también 90,0%
- 1.7 Solo habrá refracción, pero no reflexión.

### Preguntas Conceptuales

1. La luz puede modelarse como un rayo cuando los dispositivos son grandes en comparación con la longitud de onda, y como una onda cuando los dispositivos son comparables o pequeños en comparación con la longitud de onda.
3. Este hecho simplemente demuestra que la velocidad de la luz es mayor que la del sonido. Si se conoce la distancia a la que se encuentra el rayo y la velocidad del sonido, se podría, en principio, determinar la velocidad de la luz a partir de los datos. En la práctica, como la velocidad de la luz es tan grande, los datos tendrían que conocerse con una precisión poco práctica.
5. El polvo está formado por muchas partículas pequeñas con superficies orientadas al azar. Esto conduce a una reflexión difusa, reduciendo el brillo.
7. “al acercarse a” la perpendicular cuando aumenta  $n$  (aire a agua, agua a vidrio); “al alejarse de” la perpendicular cuando disminuye  $n$  (vidrio a aire)
9. Un rayo de una pierna emerge del agua después de la refracción. El observador en el aire percibe una ubicación aparente para la fuente, como si un rayo viajara en línea recta. Vea el rayo discontinuo de abajo



11. La piedra preciosa se vuelve invisible cuando su índice de refracción es el mismo, o al menos similar, al del agua que la rodea. Como el diamante tiene un índice de refracción especialmente alto, puede seguir brillando como resultado de la reflexión interna total, no se hace invisible.
13. Se puede medir el ángulo crítico buscando la aparición de la reflexión interna total a medida que se varía el ángulo de incidencia. La [Ecuación 1.5](#) puede entonces aplicarse para calcular el índice de refracción.
15. Además de la reflexión interna total, los rayos que se refractan dentro y fuera de los cristales de diamante

están sujetos a la dispersión debido a los diferentes valores de  $n$  a lo largo del espectro, lo que da lugar a un brillante despliegue de colores.

17. Sí
19. No. Las ondas sonoras no son ondas transversales.
21. La energía se absorbe en los filtros.
23. Las puestas de sol se ven con la luz viajando directamente desde el Sol hacia nosotros. Cuando la luz azul se dispersa fuera de esta trayectoria, la luz roja restante domina el aspecto general del Sol poniente.
25. El eje de polarización de los lentes de sol se ha girado  $90^\circ$ .

### Problemas

27.  $2,99705 \times 10^8$  m/s;  $1,97 \times 10^8$  m/s
29. hielo en  $0^\circ\text{C}$
31. 1,03 ns
33. 337 m
35. compruebe
37. compruebe
39. Reflexión:  $70^\circ$ ; refracción:  $45^\circ$
41.  $42^\circ$
43. 1,53
45. a. 2,9 m; b. 1,4 m
47. a.  $24,42^\circ$ ; b.  $31,33^\circ$
49.  $79,11^\circ$
51. a. 1,43, fluorita; b.  $44,2^\circ$
53. a.  $48,2^\circ$ ; b.  $27,3^\circ$
55.  $46,5^\circ$  para el rojo,  $46,0^\circ$  para el violeta
57. a.  $0,04^\circ$ ; b. 1,3 m
59.  $72,8^\circ$
61.  $53,5^\circ$  para el rojo,  $55,2^\circ$  para el violeta
63. 0,500
65. 0,125 o  $1/8$
67.  $84,3^\circ$
69.  $0,250 I_0$
71. a. 0,500; b. 0,250; c. 0,187
73.  $67,54^\circ$
75.  $53,1^\circ$

### Problemas Adicionales

77. 114 radianes/s
79. 3,72 mm
81.  $41,2^\circ$
83. a. 1,92. La gema no es un diamante (es un circón). b.  $55,2^\circ$
85. a. 0,898; b. No podemos obtener  $n < 1,00$ , dado que esto implicaría una velocidad mayor de  $c$ . c. El ángulo de refracción es demasiado grande en relación con el ángulo de incidencia.
87.  $0,707 B_1$
89. a.  $1,69 \times 10^{-2}^\circ\text{C/s}$ ; b. sí

### Problemas De Desafío

91. Primera parte:  $88,6^\circ$ . El resto depende de la complejidad de la solución que el lector construya.
93. prueba; 1,33
95. a. 0,750; b. 0,563; c. 1,33



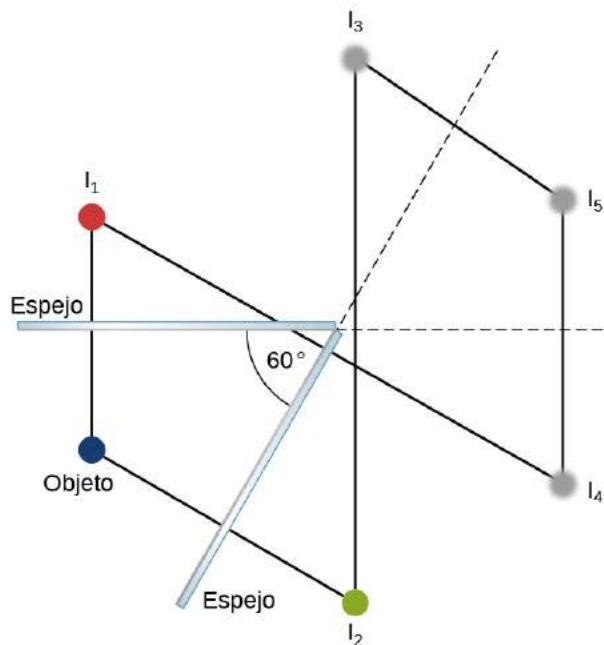
## Capítulo 2

### Preguntas Conceptuales

1. La imagen virtual no puede proyectarse en una pantalla. No se puede distinguir una imagen real de una imagen virtual simplemente juzgando por la imagen percibida con el ojo.
3. Sí, puede fotografiar una imagen virtual. Por ejemplo, si se fotografía el reflejo de un espejo plano, se obtiene una fotografía de una imagen virtual. La cámara enfoca la luz que entra en su objetivo para formar una imagen; no importa si la fuente de la luz es un objeto real o un reflejo del espejo (es decir, una imagen virtual).
5. No, puede ver la imagen real de la misma manera que puede ver la imagen virtual. La retina de su ojo sirve efectivamente de pantalla.
7. El espejo debe ser de la mitad de su tamaño y su borde superior debe llegarle a la altura de los ojos. El tamaño no depende de la distancia de usted al espejo.
9. cuando el objeto está en el infinito; consulte la ecuación del espejo
11. Sí, el aumento negativo significa simplemente que la imagen está al revés; esto no impide que la imagen sea más grande que el objeto. Por ejemplo, para un espejo cóncavo, si la distancia al objeto es mayor que una distancia focal pero menor que dos distancias focales, la imagen se invertirá y se ampliará.
13. las respuestas pueden variar
15. La distancia focal del objetivo es fija, por lo que la distancia de imagen cambia en función de la distancia del objeto.
17. Sí, la distancia focal cambiará. La ecuación del fabricante de lentes muestra que la distancia focal depende del índice de refracción del medio que rodea la lente. Dado que el índice de refracción del agua es diferente al del aire, la distancia focal de la lente cambiará cuando se sumerja en el agua.
19. Un ojo relajado y de visión normal enfocará rayos de luz paralelos sobre la retina.
21. Una persona con una lente intraocular necesitará anteojos para leer porque sus músculos no pueden distorsionar el cristalino como lo hace con las lentes biológicas, por lo que no puede enfocar los objetos cercanos. Para corregir la miopía, la potencia de la lente intraocular debe ser inferior a la del cristalino extraído.
23. Los microscopios crean imágenes de tamaño macroscópico, por lo que se aplica la óptica geométrica.
25. El ocular se alejaría ligeramente del objetivo para que la imagen formada por el objetivo se sitúe justo por encima de la distancia focal del ocular.

## Problemas

27.



29. Está en el punto focal del espejo grande y en el centro de curvatura del espejo pequeño.

31.  $f = \frac{R}{2} \Rightarrow R = +1,60 \text{ m}$

33.  $d_o = 27,3 \text{ cm}$

35. Paso 1: Se trata de la formación de imágenes mediante un espejo.

Paso 2: Dibuje la configuración del problema cuando sea posible.

Paso 3: Utilice la ecuación de lentes delgadas para resolver este problema.

Paso 4: Encuentre  $f$ .

Paso 5: Dado que:  $m = 1,50$ ,  $d_o = 0,120 \text{ m}$ .

Paso 6: No es necesario el trazado de rayos.

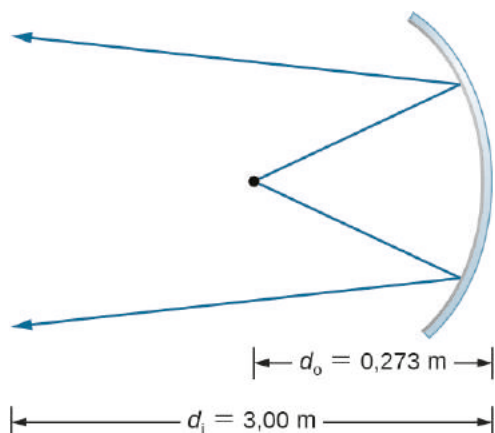
Paso 7: Al utilizar  $m = \frac{d_i}{d_o}$ ,  $d_i = -0,180 \text{ m}$ . Entonces,  $f = 0,360 \text{ m}$ .

Paso 8: La imagen es virtual porque la distancia de imagen es negativa. La distancia focal es positiva, por lo que el espejo es cóncavo.

37. a. para un espejo convexo  $d_i < 0 \Rightarrow m > 0$ .  $m = +0,111$ ; b  $d_i = -0,334 \text{ cm}$  (detrás de la córnea);  
c  $f = -0,376 \text{ cm}$ , por lo que  $R = -0,752 \text{ cm}$

39.  $m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o} = -\frac{-d_o}{d_o} = \frac{d_o}{d_o} = 1 \Rightarrow h_i = h_o$

41.



- $m = -11,0$   
 $A' = 0,110 \text{ m}^2$   
 $I = 6,82 \text{ kW/m}^2$   
 $x_{2m} = -x_{2m-1}, (m = 1, 2, 3, \dots),$   
**43.**  $x_{2m+1} = b - x_{2m}, (m = 0, 1, 2, \dots),$  con  $x_0 = a.$   
**45.**  $d_i = -55 \text{ cm}; m = +1,8$   
**47.**  $d_i = -41 \text{ cm}, m = 1,4$   
**49.** compruebe  
**51.** a.  $\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_o} = \frac{1}{f} \Rightarrow d_i = 3,43 \text{ m};$   
 b.  $m = -33,33,$  de modo que  
 $(2,40 \times 10^{-2} \text{ m})(33,33) = 80,0 \text{ cm}$  y  
 $(3,60 \times 10^{-2} \text{ m})(33,33) = 1,20 \text{ m} \Rightarrow 0,800 \text{ m} \times 1,20 \text{ m}$  o  $80,0 \text{ cm} \times 120 \text{ cm}$   
**53.** a.  $\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f};$   
 $d_i = 5,08 \text{ cm}$   
 b.  $m = -1,695 \times 10^{-2},$  por lo que la altura máxima es  $\frac{0,036 \text{ m}}{1,695 \times 10^{-2}} = 2,12 \text{ m} \Rightarrow 100\%;$   
 c. Esto parece bastante razonable, dado que a 3,00 m es posible obtener una imagen de longitud completa de una persona.  
**55.** a.  $\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f} \Rightarrow d_o = 2,55 \text{ m};$   
 b.  $\frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o} \Rightarrow h_o = 1,00 \text{ m}$   
**57.** a. Al utilizar  $\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}, d_i = -56,67 \text{ cm}.$  Entonces podemos determinar el aumento,  $m = 6,67.$  b.  
 $d_i = -190 \text{ cm}$  y  $m = +20,0;$  c. El aumento  $m$  se incrementa rápidamente a medida que aumenta la distancia del objeto hacia la distancia focal.  
 $\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}$   
**59.**  $d_i = \frac{1}{(1/f) - (1/d_o)}$   
 $\frac{d_i}{d_o} = 6,667 \times 10^{-13} = \frac{h_i}{h_o}$   
 $h_i = -0,933 \text{ mm}$   
**61.**  $d_i = -6,7 \text{ cm}$   
 $h_i = 4,0 \text{ cm}$   
**63.** 83 cm a la derecha de la lente convergente,  $m = -2,3, h_i = 6,9 \text{ cm}$   
**65.**  $P = 52,0 \text{ D}$   
**67.**  $\frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o} \Rightarrow h_i = -h_o \left( \frac{d_i}{d_o} \right) = -(3,50 \text{ mm}) \left( \frac{2,00 \text{ cm}}{30,0 \text{ cm}} \right) = -0,233 \text{ mm}$   
**69.** a.  $P = +62,5 \text{ D};$   
 b.  $\frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o} \Rightarrow h_i = -0,250 \text{ mm};$   
 c.  $h_i = -0,0800 \text{ mm}$   
**71.**  $P = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} \Rightarrow d_o = 28,6 \text{ cm}$   
**73.** Originalmente, la visión cercana era de 51,0 D. Por lo tanto,  $P = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} \Rightarrow d_o = 1,00 \text{ m}$   
**75.** Originalmente,  $P = 70,0 \text{ D};$  ya que la potencia para la visión lejana normal es de 50,0 D, la potencia debe disminuirse en 20,0 D  
**77.**  $P = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} \Rightarrow d_o = 0,333 \text{ m}$   
**79.** a.  $P = 52,0 \text{ D};$

$$P' = 56,16 \text{ D}$$

b.

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = P \Rightarrow d_o = 16,2 \text{ cm}$$

81. Necesitamos  $d_i = -18,5 \text{ cm}$  cuando  $d_o = \infty$ , así que  $P = -5,41 \text{ D}$

83. Supongamos que  $x =$  punto lejano

$$\Rightarrow P = \frac{1}{-(x-0,0175 \text{ m})} + \frac{1}{\infty} \Rightarrow -xP + (0,0175 \text{ m})P = 1$$

$$\Rightarrow x = 26,8 \text{ cm}$$

85.  $M = 6 \times$

$$M = \left( \frac{25 \text{ cm}}{L} \right) \left( 1 + \frac{L-l}{f} \right)$$

87.

$$L - l = d_o$$

$$d_o = 13 \text{ cm}$$

89.  $M = 2,5 \times$

91.  $M = -2,1 \times$

93.  $M = \frac{25 \text{ cm}}{f}$

$$M_{\text{máx}} = 5$$

$$M_{\text{máx}}^{\text{joven}} = 1 + \frac{18 \text{ cm}}{f} \Rightarrow f = \frac{18 \text{ cm}}{M_{\text{máx}}^{\text{joven}} - 1}$$

95.

$$M_{\text{máx}}^{\text{anciano}} = 9,8 \times$$

97. a.  $\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f} \Rightarrow d_i = 4,65 \text{ cm};$

$$\Rightarrow m = -30,0$$

$$\text{b. } M_{\text{neto}} = -240$$

99. a.  $\frac{1}{d_o^{\text{obj}}} + \frac{1}{d_i^{\text{obj}}} = \frac{1}{f^{\text{obj}}} \Rightarrow d_i^{\text{obj}} = 18,3 \text{ cm}$  detrás de la lente del objetivo;

$$\text{b. } m^{\text{obj}} = -60,0;$$

$$d_o^{\text{ajo}} = 1,70 \text{ cm}$$

$$\text{c. } d_i^{\text{ajo}} = -11,3 \text{ cm}$$

delante del ocular; d.  $M^{\text{ajo}} = 13,5;$

$$\text{e. } M_{\text{neto}} = -810$$

101.  $M = -40,0$

103.  $f^{\text{obj}} = \frac{R}{2}, M = -1,67$

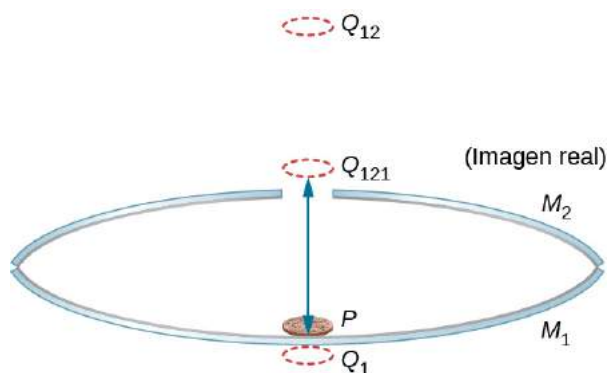
105.  $M = -\frac{f^{\text{obj}}}{f^{\text{ajo}}}, f^{\text{ajo}} = +10,0 \text{ cm}$

107. Las respuestas variarán.

109. 12 cm a la izquierda del espejo,  $m = 3/5$

111. 27 cm frente al espejo,  $m = 0,6, h_i = 1,76 \text{ cm}$ , orientación vertical

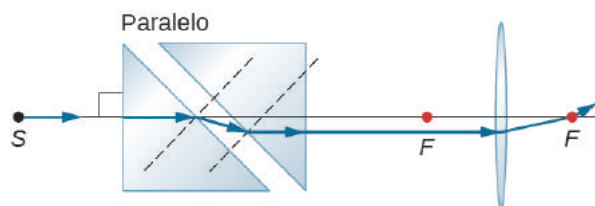
113. La siguiente figura muestra tres imágenes sucesivas empezando por la imagen  $Q_1$  en el espejo  $M_1$ .  $Q_1$  es la imagen en el espejo  $M_1$ , cuya imagen en el espejo  $M_2$  es  $Q_{12}$  cuya imagen en el espejo  $M_1$  es la imagen real  $Q_{121}$ .



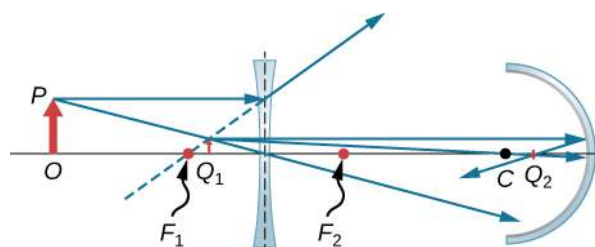
115. 5,4 cm del eje

117. Supongamos que el vértice del espejo cóncavo es el origen del sistema de coordenadas. La imagen 1 está a  $-10/3$  cm (-3,3 cm), la imagen 2 está a  $-40/11$  cm (-3,6 cm). Estos sirven como objetos para las imágenes posteriores, que se encuentran a  $-310/83$  cm (-3,7 cm),  $-9340/2501$  cm (-3,7 cm),  $-140.720/37.681$  cm (-3,7 cm). Todas las imágenes restantes están a aproximadamente -3,7 cm.

119.



121.

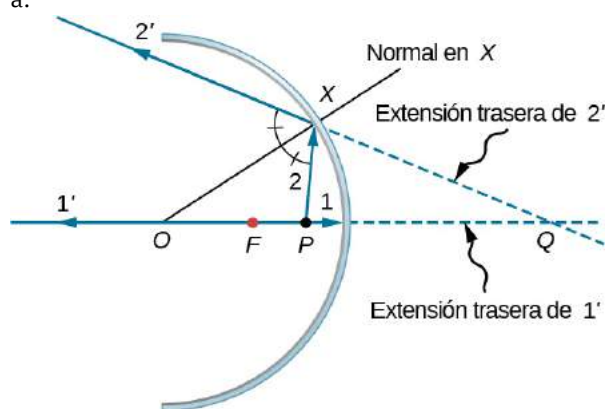


123. -5 D

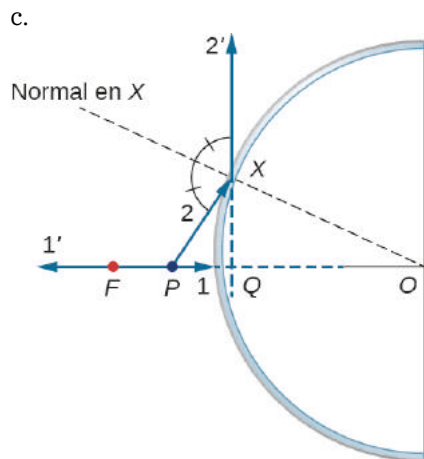
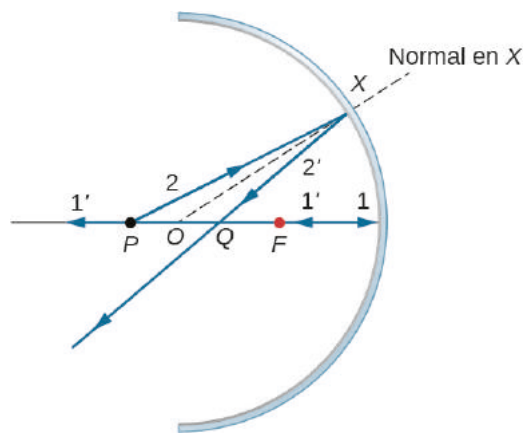
125. 11

### Problemas Adicionales

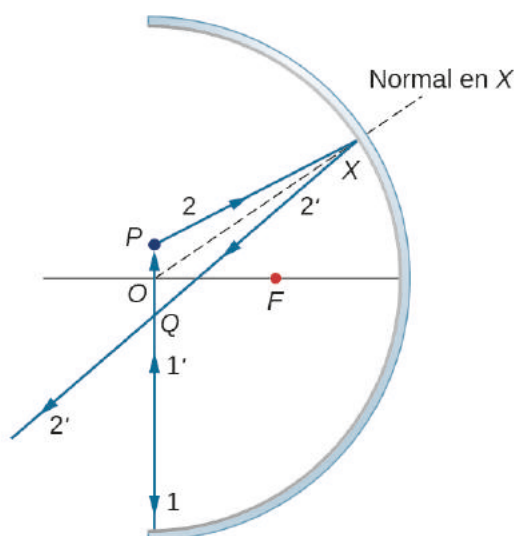
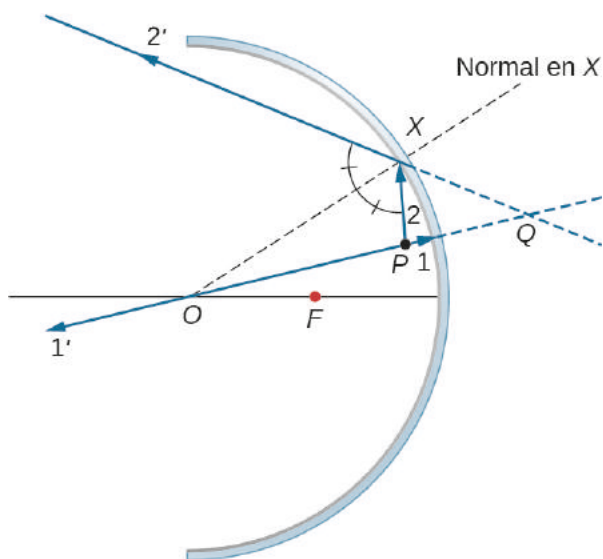
127. a.



b.



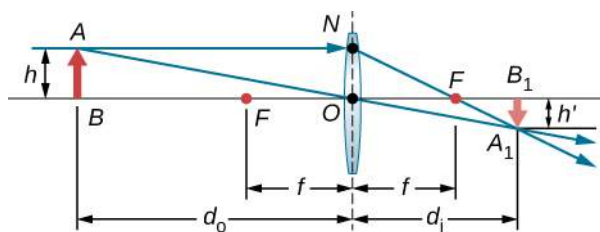
d. Similar a la imagen anterior, pero con el punto  $P$  fuera de la distancia focal; e. Repita (a)-(d) para un objeto puntual fuera del eje. Se deja como ejercicios un objeto puntual colocado fuera del eje delante de un espejo cóncavo correspondiente a las partes (a) y (b), el caso del espejo convexo.



129.  $d_i = -10/3$  cm,  $h_i = 2$  cm, en posición vertical

131. Prueba

133.



Triángulos  $BAO$  y  $B_1A_1O$  son triángulos similares. Así,  $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{d_i}{d_o}$ . Triángulos  $NOF$  y  $B_1A_1F$  son triángulos similares. Así,  $\frac{NO}{f} = \frac{A_1B_1}{d_i - f}$ . Si observamos que  $NO = AB$  da como resultado  $\frac{AB}{f} = \frac{A_1B_1}{d_i - f}$  o  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{f}{d_i - f}$ . Si invertimos esto se obtiene  $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{d_i - f}{f}$ . Si se igualan las dos expresiones de la relación  $\frac{A_1B_1}{AB}$  da como resultado  $\frac{d_i}{d_o} = \frac{d_i - f}{f}$ . Al dividir entre  $d_i$  da como resultado  $\frac{1}{d_o} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_i}$  o  $\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}$ .

135. 70 cm



- 137.** El espejo plano tiene un punto focal infinito, por lo que  $d_i = -d_o$ . La distancia total aparente del hombre en el espejo será su distancia real, más la distancia de imagen aparente, o  $d_o + (-d_i) = 2d_o$ . Si esta distancia debe ser inferior a 20 cm, deberá situarse a  $d_o = 10$  cm.
- 139.** Aquí queremos  $d_o = 25$  cm  $- 2,20$  cm = 0,228 m. Si  $x$  = punto cercano,  $d_i = -(x - 0,0220$  m). Así,  $P = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{0,228 \text{ m}} + \frac{1}{x-0,0220 \text{ m}}$ . Al utilizar  $P = 0,75$  D da como resultado  $x = 0,253$  m, por lo que el punto cercano es de 25,3 cm.
- 141.** Si suponemos que una lente está a 2,00 cm del ojo del niño, la distancia de imagen debe ser  $d_i = -(500 \text{ cm} - 2,00 \text{ cm}) = -498$  cm. Para un objeto de distancia infinita, la potencia necesaria es  $P = \frac{1}{d_i} = -0,200$  D. Por lo tanto, las  $-4,00$  D de la lente corregirán la miopía.
- 143.** 87  $\mu\text{m}$
- 145.** Utilice,  $M_{\text{neto}} = -\frac{d_i^{\text{obj}}(f^{\text{ojo}}+25 \text{ cm})}{f^{\text{obj}}f^{\text{ojo}}}$ . La distancia de imagen para el objetivo es  $d_i^{\text{obj}} = -\frac{M_{\text{neto}}f^{\text{obj}}f^{\text{ojo}}}{f^{\text{ojo}}+25 \text{ cm}}$ . Al utilizar  $f^{\text{obj}} = 3,0$  cm,  $f^{\text{ojo}} = 10$  cm, y  $M = -10$  da como resultado  $d_i^{\text{obj}} = 8,6$  cm. Queremos que esta imagen esté en el punto focal del ocular para que este forme una imagen en el infinito que permita una visión cómoda. Por lo tanto, la distancia  $d$  entre las lentes debe ser  $d = f^{\text{ojo}} + d_i^{\text{obj}} = 10 \text{ cm} + 8,6 \text{ cm} = 19$  cm.
- 147.** a. distancia focal de la lente correctora  $f_c = -80$  cm; b.  $-1.25$  D
- 149.**  $2 \times 10^{16}$  km
- 151.**  $10^5$  m

## Capítulo 3

### Compruebe Lo Aprendido

- 3.1**  $3,63^\circ$  y  $7,27^\circ$ , respectivamente
- 3.2** a. 853 nm, 1097 nm; b. 731 nm, 975 nm
- 3.3** a. demasiado pequeño; b. hasta  $8 \times 10^{-5}$

### Preguntas Conceptuales

- No. Dos fuentes de luz independientes no tienen fase coherente.
- Porque las dos lámparas de sodio no son pares coherentes de fuentes de luz. Dos láseres que funcionan de forma independiente tampoco son coherentes, por lo que no se produce ningún patrón de interferencia.
- Las fuentes monocromáticas producen franjas en ángulos según  $d \sin \theta = m\lambda$ . Con la luz blanca, cada longitud de onda constitutiva producirá franjas en su propio conjunto de ángulos, mezclándose con las franjas de las longitudes de onda adyacentes. Esto da lugar a patrones de arcoíris.
- Las diferentes longitudes de trayecto dan lugar a diferentes fases en el destino, lo que en consecuencia provoca una interferencia constructiva o destructiva. El reflejo puede causar un cambio de fase de  $180^\circ$ , que también afecta a la forma en que las ondas interfieren. La refracción en otro medio cambia la longitud de onda dentro de ese medio, de manera que una onda puede salir del medio con una fase diferente en comparación con otra onda que haya recorrido la misma distancia en un medio diferente.
- Los cambios de fase se producen por reflexión en la parte superior del cubreobjetos y en la parte superior del portaobjetos.
- El hecho de que la superficie del jamón esté húmeda significa que hay una fina capa de líquido, lo que causa una interferencia de película delgada. Como el grosor exacto de la película varía a lo largo del trozo de jamón que se ilumina con luz blanca, las diferentes longitudes de onda producen franjas brillantes en diferentes lugares, lo que da lugar a los colores del arcoíris.
- Otras longitudes de onda no suelen cumplir  $t = \frac{\lambda/n}{4}$  para el mismo valor de  $t$  por lo que las reflexiones darán lugar a una interferencia completamente destructiva. Para un ángulo de incidencia  $\theta$ , la longitud de la trayectoria dentro del revestimiento se incrementará en un factor  $1/\cos \theta$  por lo que la nueva condición para la interferencia destructiva pasa a ser  $\frac{t}{\cos \theta} = \frac{\lambda/n}{4}$ .
- En un brazo, coloque una cámara transparente que se llenará con el gas. Consulte la [Ejemplo 3.6](#).

## Problemas

17.  $0,997^\circ$
19.  $0,290 \mu\text{m}$
21.  $5,77 \times 10^{-7} \text{ m} = 577 \text{ nm}$
23. 62,5; como  $m$  debe ser un número entero, el orden más alto es entonces  $m = 62$ .
25.  $1,44 \mu\text{m}$
27. a.  $20,3^\circ$ ; b.  $4,98^\circ$ ; c.  $5,76$ , el orden más alto es  $m = 5$ .
29. a. 2,37 cm; b. 1,78 cm
31. 560 nm
33. 1,2 mm
35. a.  $0,40^\circ$ ,  $0,53^\circ$ ; b.  $4,6 \times 10^{-3} \text{ m}$
37. 1:9
39. 532 nm (verde)
41.  $8,39 \times 10^{-8} \text{ m} = 83,9 \text{ nm}$
43. 620 nm (naranja)
45. 380 nm
47. a. Suponiendo que  $n$  para el avión es mayor que 1,20, entonces hay dos cambios de fase: 0,833 cm. b. Es demasiado grueso, y el avión sería demasiado pesado. c. Es irrazonable pensar que la capa de material pueda tener cualquier grosor cuando se utiliza en un avión real.
49.  $4,55 \times 10^{-4} \text{ m}$
51.  $D = 2,53 \times 10^{-6} \text{ m}$

## Problemas Adicionales

53.  $0,29^\circ$  y  $0,86^\circ$
55. a. 4,26 cm; b. 2,84 cm
57. 6
59. 0,20 m
61. 0,0839 mm
63. a. 9,8, 10,4, 11,7 y 15,7 cm; b. 3,9 cm
65.  $0,0575^\circ$
67. 700 nm
69. 189 nm
71. a. verde (504 nm); b. magenta (blanco menos verde)
73. 1,29
75.  $52,7 \mu\text{m}$  y  $53,0 \mu\text{m}$
77. 125 nm
79. 413 nm y 689 nm
81.  $73,9 \mu\text{m}$
83. 47
85.  $8,5 \mu\text{m}$
87.  $0,013^\circ\text{C}$

## Problemas De Desafío

89. Las franjas brillantes y oscuras cambian de lugar.
91. La longitud del trayecto debe ser inferior a la cuarta parte de la longitud de onda visible más corta en el petróleo. El grosor del petróleo es la mitad de la longitud del recorrido, por lo que debe ser inferior a un octavo de la longitud de onda visible más corta en el petróleo. Si tomamos 380 nm como la longitud de onda visible más corta en el aire, 33,9 nm.
93.  $4,42 \times 10^{-5} \text{ m}$
95. para un cambio de fase: 950 nm (infrarrojo); para tres cambios de fase: 317 nm (ultravioleta); Por lo tanto, la película de petróleo aparecerá negra, ya que la luz reflejada no está en la parte visible del espectro.

## Capítulo 4

### Compruebe Lo Aprendido

- 4.1  $17,8^\circ$ ,  $37,7^\circ$ ,  $66,4^\circ$ ; no  
 4.2  $74,3^\circ$ ,  $0,0083I_0$   
 4.3 Al utilizar  $d \sin \theta = m\lambda$ , el máximo de interferencia se produce en  $2,87^\circ$  para  $m = 20$ . A partir de la [Ecuación 4.1](#), este es también el ángulo para el segundo mínimo de difracción. (Nota: Ambas ecuaciones utilizan el índice  $m$  pero se refieren a fenómenos distintos)  
 4.4  $3,332 \times 10^{-6}$  m o 300 líneas por milímetro  
 4.5  $8,4 \times 10^{-4}$  rad, 3000 veces más amplio que el telescopio Hubble  
 4.6  $38,4^\circ$  y  $68,8^\circ$ ; entre  $\theta = 0^\circ \rightarrow 90^\circ$ , los órdenes 1, 2 y 3, son todos los que existen.

### Preguntas Conceptuales

- El patrón de difracción se hace más amplio.
- Los *walkie-talkies* utilizan ondas de radio cuyas longitudes de onda son comparables al tamaño de la colina y, por tanto, son capaces de difractarse alrededor de ella. Las longitudes de onda visibles de la linterna viajan en forma de rayos a esta escala de tamaño.
- El patrón de difracción se convierte en bidimensional, con franjas principales, que ahora son manchas, que van en direcciones perpendiculares y manchas más tenues en direcciones intermedias.
- El parámetro  $\beta = \phi/2$  es el ángulo de arco mostrado en el diagrama fasorial en la [Figura 4.7](#). La diferencia de fase entre la primera y la última ondícula de Huygens a través de una rendija es  $2\beta$  y está relacionada con la curvatura del arco que forma el fasor resultante que determina la intensidad de la luz.
- azul; La menor longitud de onda de la luz azul da lugar a un ángulo menor para el límite de difracción.
- No, estas distancias son tres órdenes de magnitud menores que la longitud de onda de la luz visible, por lo que la luz visible es una mala forma deficiente de detectar los átomos.
- Las longitudes de onda de los rayos ultravioleta son mucho mayores que las separaciones de la red de los cristales, por lo que no hay difracción. La ecuación de Bragg implica un valor de  $\sin \theta$  mayor que la unidad, que no tiene solución.
- La imagen aparecerá en una ubicación o tamaño ligeramente diferente cuando se vea con longitud de onda 10% menor, pero exactamente a la mitad de la longitud de onda, una interferencia de orden superior reconstruye la imagen original, de diferente color.

### Problemas

- a.  $33,4^\circ$ ; b. no
- a.  $1,35 \times 10^{-6}$  m; b.  $69,9^\circ$
- 750 nm
- 2,4 mm, 4,7 mm
- a.  $1,00\lambda$ ; b.  $50,0\lambda$ ; c.  $1.000\lambda$
- 1,92 m
- $45,1^\circ$
- $I/I_0 = 2,2 \times 10^{-5}$
- $0,63I_0$ ,  $0,11I_0$ ,  $0,0067I_0$ ,  $0,0062I_0$ ,  $0,00088I_0$
- 0,200
- 3
- 9
- $5,97^\circ$
- $8,99 \times 10^3$
- 707 nm
- a.  $11,8^\circ$ ,  $12,5^\circ$ ,  $14,1^\circ$ ,  $19,2^\circ$ ; b.  $24,2^\circ$ ,  $25,7^\circ$ ,  $29,1^\circ$ ,  $41,0^\circ$ ; c. La disminución del número de líneas por centímetro en un factor  $x$  significa que el ángulo para el máximo de orden  $x$ es el mismo que el ángulo original para el máximo de primer orden.
- a. utilizando  $\lambda = 700$  nm,  $\theta = 5,0^\circ$ ; b. utilizando  $\lambda = 460$  nm,  $\theta = 30,3^\circ$

51. a. 26 300 líneas/cm; b. sí; c. no  
 53.  $1,13 \times 10^{-2}$  m  
 55. 107 m  
 57. a.  $7,72 \times 10^{-4}$  rad; b. 23.2 m; c. 590 km  
 59. a.  $2,24 \times 10^{-4}$  rad; b. 5,81 km; c. 0,179 mm; d. puede distinguir los detalles a 0,2 mm de distancia a la distancia del brazo  
 61.  $2,9 \mu\text{m}$   
 63. 6,0 cm  
 65. 7,71 km  
 67. 1.0 m  
 69. 1,2 cm o menos  
 71. no  
 73. 0,120 nm  
 75.  $4,51^\circ$   
 77.  $13,2^\circ$

### Problemas Adicionales

79. a. 2,2 mm; b.  $0,172^\circ$ , el amarillo de segundo orden y el violeta de tercer orden coinciden  
 81. 2,2 km  
 83. 1,3 cm  
 85. a. 0,28 mm; b. 0,28 m; c. 280 m; d. 113 km  
 87. 33 m  
 89. a. verticalmente; b.  $\pm 20^\circ$ ,  $\pm 44^\circ$ ; c. 0,  $\pm 31^\circ$ ,  $\pm 60^\circ$ ; d. 89 cm; e. 71 cm  
 91. 0,98 cm  
 93.  $I/I_0 = 0,041$   
 95. 340 nm  
 97. a. 0,082 rad y 0,087 rad; b. 480 nm y 660 nm  
 99. dos órdenes  
 101. sí y N/A  
 103. 600 nm  
 105. a.  $3,4 \times 10^{-5}^\circ$ ; b.  $51^\circ$   
 107. 0,63 m  
 109. 1  
 111.  $0,17 \text{ mW/cm}^2$  para  $m = 1$  únicamente, sin órdenes superiores  
 113.  $28,7^\circ$   
 115. a. 42,3 nm; b. Esta longitud de onda no está en el espectro visible. c. El número de rendijas de esta rejilla de difracción es demasiado grande. El grabado en los circuitos integrados puede hacerse con una resolución de 50 nm, por lo que las separaciones de las rendijas de 400 nm están en el límite de lo que podemos hacer hoy en día. Este espacio entre líneas es demasiado pequeño para producir difracción de la luz.  
 117. a. 549 km; b. Se trata de un telescopio excesivamente grande. c. Es irrazonable asumir el límite de difracción para los telescopios ópticos, a menos que sea en el espacio, debido a los efectos atmosféricos.

### Problemas De Desafío

119. a.  $I = 0,00500 I_0$ ,  $0,00335 I_0$ ; b.  $I = 0,00500 I_0$ ,  $0,00335 I_0$   
 121. 12.800  
 123.  $1,58 \times 10^{-6}$  m

## Capítulo 5

### Compruebe Lo Aprendido

- 5.1 La relatividad especial solo se aplica a los objetos que se mueven a velocidad constante, mientras que la

relatividad general se aplica a los objetos que experimentan una aceleración.

$$5.2 \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,650c)^2}{c^2}}} = 1,32$$

$$5.3 \quad a. \Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2,10 \times 10^{-8} \text{ s}}{\sqrt{1-\frac{(1,90 \times 10^8 \text{ m/s})^2}{(3,00 \times 10^8 \text{ m/s})^2}}} = 2,71 \times 10^{-8} \text{ s.}$$

5.3 b. Solo importa la velocidad relativa de las dos naves espaciales, porque no hay movimiento absoluto en el espacio. La señal se emite desde un lugar fijo en el marco de referencia de  $A$ , por lo que el tiempo propio de su emisión es  $\tau = 1,00 \text{ s}$ . La duración de la señal medida desde el marco de referencia  $B$  es entonces

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1,00 \text{ s}}{\sqrt{1-\frac{(4,00 \times 10^7 \text{ m/s})^2}{(3,00 \times 10^8 \text{ m/s})^2}}} = 1,01 \text{ s.}$$

$$5.4 \quad L = L_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = (2,50 \text{ km}) \sqrt{1-\frac{(0,750c)^2}{c^2}} = 1,65 \text{ km}$$

5.5 Empiece por definir el incremento de tiempo propio:

$$d\tau = \sqrt{-(ds)^2/c^2} = \sqrt{dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)/c^2}.$$

donde  $(dx, dy, dz, cdt)$  se miden en el marco inercial de un observador que no necesariamente ve esa partícula en reposo. Por lo tanto, esto se convierte en

$$d\tau = \sqrt{-(ds)^2/c^2} = \sqrt{dt^2 - [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]/c^2}$$

$$= dt \sqrt{1 - \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right] / c^2}$$

$$= dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$dt = \gamma d\tau.$$

5.6 Aunque los desplazamientos perpendiculares al movimiento relativo son los mismos en ambos marcos de referencia, el intervalo de tiempo entre eventos difiere, y las diferencias en  $dt$  y  $dt'$  conducen a diferentes velocidades vistas desde los dos marcos.

5.7 Podemos sustituir los datos directamente en la ecuación de la frecuencia Doppler relativista:

$$f_{\text{obs}} = f_s \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} = (1,50 \text{ GHz}) \sqrt{\frac{1-\frac{0,350c}{c}}{1+\frac{0,350c}{c}}} = 1,04 \text{ GHz.}$$

5.8 Sustituya los datos en la ecuación dada:

$$p = \gamma mu = \frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})(0,985)(3,00 \times 10^8 \text{ m/s})}{\sqrt{1-\frac{(0,985c)^2}{c^2}}} = 1,56 \times 10^{-21} \text{ kg}\cdot\text{m/s.}$$

$$K_{\text{rel}} = (\gamma - 1) mc^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right) mc^2$$

$$5.9 \quad = \left( \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,992c)^2}{c^2}}} - 1 \right) (9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})(3,00 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 5,67 \times 10^{-13} \text{ J}$$

## Preguntas Conceptuales

1. El segundo postulado, relativo a la velocidad de la luz; la física clásica ya incluía la idea de que las leyes de la mecánica, al menos, eran las mismas en todos los marcos inerciales, pero la velocidad de un pulso de luz era diferente en los distintos marcos que se movían entre sí
3. Sí, siempre que el avión vuele a velocidad constante respecto a la Tierra; en ese caso, un objeto sin fuerza

que actúe sobre él dentro del avión no tiene ningún cambio de velocidad respecto al avión y ningún cambio de velocidad respecto a la Tierra; tanto el avión como el suelo son marcos inerciales para describir el movimiento del objeto.

5. El observador que se mueve con el proceso ve su tiempo propio, que es el más corto visto por cualquier observador.
7. La longitud de un objeto es mayor para un observador que se mueve con el objeto y, por tanto, mide su longitud propia.
9. a. No, no dentro del propio marco de referencia del astronauta. b. Ve que los relojes de la Tierra están en su marco de reposo moviéndose al ritmo de él y, por lo tanto, los ve ralentizados. c. No, no dentro del propio marco de referencia del astronauta. d. Sí, mide que la distancia entre las dos estrellas es más corta. e. Los dos observadores coinciden en su velocidad relativa.
11. En este caso no se mide ningún cambio en la longitud de onda o en la frecuencia. El efecto Doppler relativista solo depende de la velocidad relativa de la fuente y del observador, no de cualquier velocidad relativa a un medio para las ondas luminosas.
13. Demuestra que las estrellas están cada vez más alejadas de la Tierra, que el universo se expande, y lo hace a un ritmo acelerado, con mayor velocidad para las estrellas más lejanas].
15. Sí. Esto puede ocurrir si la fuerza externa se equilibra con otras fuerzas aplicadas externamente, de modo que la fuerza externa neta sea cero.
17. Como pierde energía térmica, que es la energía cinética del movimiento aleatorio de sus partículas constituyentes, su masa disminuye en una cantidad extremadamente pequeña, como se describe en la equivalencia energía-masa.
19. Sí, en principio habría un efecto similar en la masa para cualquier disminución de energía, pero el cambio sería tan pequeño en los cambios de energía en una reacción química que sería indetectable en la práctica.
21. No según la relatividad especial. Nada con masa puede alcanzar la velocidad de la luz.

## Problemas

23. a. 1,0328; b. 1,15
25.  $5,96 \times 10^{-8}$  s
27.  $0,800c$
29.  $0,140c$
31. 48,6 m
33. Al utilizar los valores dados en [Ejemplo 5.3](#): a. 0,627 km; b. 2,00 km; c. 2,00 km
35. a.  $10,0c$ ; b. La velocidad resultante del frasco es mayor que  $c$ , una imposibilidad. c. Es irrazonable suponer que el frasco se moverá hacia la tierra a  $1,20c$ .
37. El ángulo  $\alpha$  se aproxima a los  $45^\circ$ , y los ejes  $t'$ - y  $x'$  están en rotación hacia el borde del cono de luz.
39. 15 m/s al este
41. 32 m/s
43. a. La segunda bola se aproxima con velocidad  $-v$  y se detiene mientras la otra bola continúa con velocidad  $-v$ ; b. Así se conserva el momento.
45. a.  $t_1' = 0$ ;  $x_1' = 0$ ;  $t_2' = \tau$ ;  $x_2' = 0$ ; b.  $t_1' = 0$ ;  $x_1' = 0$ ;  
 $t_2' = \frac{\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ ;  $x_2' = \frac{-v\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$
47.  $0,615c$
49.  $0,696c$
51. (Prueba)
53.  $4,09 \times 10^{-19}$  kg · m/s
55. a.  $3,000000015 \times 10^{13}$  kg · m/s; b. 1,000000005
57.  $2,988 \times 10^8$  m/s
59. 0,512 MeV según el número de cifras significativas indicadas. El valor exacto está más cerca de 0,511 MeV.
61.  $2,3 \times 10^{-30}$  kg; a dos dígitos porque la diferencia de energías de masa en reposo se encuentra a dos dígitos.
63. a.  $1,11 \times 10^{27}$  kg; b.  $5,56 \times 10^{-5}$

65. a.  $7,1 \times 10^{-3}$  kg; b.  $7,1 \times 10^{-3} = 7,1 \times 10^{-3}$ ; c.  $\frac{\Delta m}{m}$  es mayor para el hidrógeno.  
 67. a. 208; b. 0,999988c; seis dígitos utilizados para mostrar la diferencia con c  
 69. a.  $6,92 \times 10^5$  J; b. 1,54  
 71. a. 0,914c; b. La energía de la masa en reposo de un electrón es de 0,511 MeV, por lo que la energía cinética es aproximadamente el 150 % de la energía de la masa en reposo. El electrón debería viajar cerca de la velocidad de la luz.

### Problemas Adicionales

73. a. 0,866c; b. 0,995c  
 75. a. 4,303 y a cuatro dígitos para mostrar cualquier efecto; b. 0,1434 y; c.  $1/\sqrt{(1-v^2/c^2)} = 29,88$ .  
 77. a. 4,00; b.  $v = 0,867c$   
 79. a. A envía un pulso de radio en cada latido a B, que conoce su velocidad relativa y utiliza la fórmula de dilatación del tiempo para calcular el intervalo de tiempo propio entre latidos a partir de la señal observada. b. (66 latidos/min)  $\sqrt{1-v^2/c^2} = 57,1$  latidos/min

81. a. primer fotón: (0, 0, 0) en  $t = t'$ ; segundo fotón:

$$t' = \frac{-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{-(c/2)(1,00 \text{ m})/c^2}{\sqrt{0,75}} = -\frac{0,577 \text{ m}}{c} = 1,93 \times 10^{-9} \text{ s}$$

$$x' = \frac{x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1,00 \text{ m}}{\sqrt{0,75}} = 1,15 \text{ m}$$

b. simultáneo en A, no simultáneo en B

$$t' = \frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{(4,5 \times 10^{-4} \text{ s}) - (0,6c)\left(\frac{150 \times 10^3 \text{ m}}{c^2}\right)}{\sqrt{1-(0,6)^2}}$$

$$= 1,88 \times 10^{-4} \text{ s}$$

83.  $x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{150 \times 10^3 \text{ m} - (0,60)(3,00 \times 10^8 \text{ m/s})(4,5 \times 10^{-4} \text{ s})}{\sqrt{1-(0,6)^2}}$   
 $= 8,6 \times 10^4 \text{ m} = 86 \text{ km}$

$$y = y' = 15 \text{ km}$$

$$z = z' = 1 \text{ km}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + v\Delta x'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

85.  $0 = \frac{\Delta t' + v(500 \text{ m})/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}};$

dado que  $v \ll c$ , podemos ignorar el término  $v^2/c^2$  y encontrar

$$\Delta t' = -\frac{(50 \text{ m/s})(500 \text{ m})}{(3,00 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = -2,78 \times 10^{-13} \text{ s}$$

La ruptura de la simultaneidad newtoniana es insignificante, pero no exactamente nula, a velocidades de tren realistas de 50 m/s.

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - v\Delta x/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

87.  $0 = \frac{(0,30 \text{ s}) - \frac{(v)(2,0 \times 10^9 \text{ m})}{(3,00 \times 10^8 \text{ m/s})^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$$v = \frac{(0,30 \text{ s})}{(2,0 \times 10^9 \text{ m})} (3,00 \times 10^8 \text{ m/s})^2$$

$$v = 1,35 \times 10^7 \text{ m/s}$$

89. Tenga en cuenta que todas las respuestas a este problema se indican con cinco cifras significativas, para distinguir los resultados. a. 0,99947c; b.  $1,2064 \times 10^{11}$  y; c.  $1,2058 \times 10^{11}$  y



91. a.  $-0,400c$ ; b.  $-0,909c$
93. a.  $1,65 \text{ km/s}$ ; b. Sí, si la velocidad de la luz fuera tan pequeña, las velocidades que podemos alcanzar en la vida cotidiana serían superiores al 1 % de la velocidad de la luz y podríamos observar los efectos relativistas con mucha más frecuencia.
95.  $775 \text{ MHz}$
97. a.  $1,12 \times 10^{-8} \text{ m/s}$ ; b. La pequeña velocidad nos indica que la masa de una proteína es sustancialmente menor que la de una cantidad mínima de materia macroscópica.
99. a.
- $$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right)$$
- $$= \frac{du}{dt} \left( \frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) - \frac{1}{2} \frac{mu^2}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} 2 \frac{du}{dt} ;$$
- $$= \frac{m}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \frac{du}{dt}$$
- b.
- $$F = \frac{m}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \frac{du}{dt}$$
- $$= \frac{1 \text{ kg}}{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{3/2}} (1 \text{ m/s}^2)$$
- $$= 1,53 \text{ N}$$
101.  $90,0 \text{ MeV}$
103. a.  $\gamma^2 - 1$ ; b. sí
105.  $1,07 \times 10^3$
107. a.  $6,56 \times 10^{-8} \text{ kg}$ ; b.  $m = (200 \text{ L}) (1 \text{ m}^3/1000 \text{ L}) (750 \text{ kg/m}^3) = 150 \text{ kg}$ ; por lo tanto,  $\frac{\Delta m}{m} = 4,37 \times 10^{-10}$
109. a.  $0,314c$ ; b.  $0,99995c$  (Cinco dígitos utilizados para mostrar la diferencia con respecto a  $c$ )
111. a.  $1,00 \text{ kg}$ ; b. Esta cantidad de masa sería medible, pero probablemente no observable a simple vista porque es el 0,01 % de la masa total.
113. a.  $6,06 \times 10^{11} \text{ kg/s}$ ; b.  $4,67 \times 10^{10} \text{ y}$ ; c.  $4,27 \times 10^9 \text{ kg}$ ; d.  $0,32 \%$

## Capítulo 6

### Compruebe Lo Aprendido

- 6.1 Mechero Bunsen
- 6.2 La longitud de onda del máximo de radiación disminuye al aumentar la temperatura.
- 6.3  $T_\alpha/T_\beta = 1/\sqrt{3} \cong 0,58$ , así que la estrella  $\beta$  es más caliente.
- 6.4  $3,3 \times 10^{-19} \text{ J}$
- 6.5 No, porque entonces  $\Delta E/E \approx 10^{-21}$
- 6.6  $-0,91 \text{ V}$ ;  $1040 \text{ nm}$
- 6.7  $h = 6,40 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 4,0 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$ ;  $-3,5\%$
- 6.8  $(\Delta\lambda)_{\min} = 0 \text{ m}$  en un ángulo de  $0^\circ$ ;  $71,0 \text{ pm} + 0,5\lambda_c = 72,215 \text{ pm}$
- 6.9  $121,5 \text{ nm}$  y  $91,1 \text{ nm}$ ; no es posible, estas bandas espectrales están en el ultravioleta
- 6.10  $v_2 = 1,1 \times 10^6 \text{ m/s} \cong 0,0036c$ ;  $L_2 = 2\hbar$   $K_2 = 3,4 \text{ eV}$
- 6.11  $29 \text{ pm}$
- 6.12  $\lambda = 2\pi na_0 = 2(3,324 \text{ \AA}) = 6,648 \text{ \AA}$
- 6.13  $\lambda = 2,14 \text{ pm}$ ;  $K = 261,56 \text{ keV}$
- 6.14  $0,052^\circ$
- 6.15 lo duplica

## Preguntas Conceptuales

1. la de una estrella amarilla
3. va del rojo al violeta pasando por el arcoíris de colores
5. no diferirían
7. el ojo humano no ve la radiación IR
9. No
11. desde la pendiente
13. Las respuestas pueden variar
15. el carácter de las partículas
17. Las respuestas pueden variar
19. no; sí
21. no
23. ángulo recto
25. no
27. Están en estado fundamental.
29. Las respuestas pueden variar
31. aumenta.
33. para los valores mayores de  $n$
35. Sí, el exceso de 13,6 eV se convertirá en energía cinética de un electrón libre.
37. no
39. Rayos X, mejor poder de resolución.
41. protón
43. las longitudes de onda de De Broglie son ínfimas.
45. para evitar la colisión con las moléculas de aire.
47. Las respuestas pueden variar
49. Las respuestas pueden variar
51. sí
53. sí

## Problemas

55. a. 0,81 eV; b.  $2,1 \times 10^{23}$ ; c. 2 min 20 seg
57. a. 7245 K; b. 3,62  $\mu\text{m}$
59. alrededor de 3 K
61.  $4,835 \times 10^{18}$  Hz; 0,620  $\text{\AA}$
63. 263 nm; no
65. 3,68 eV
67. 4,09 eV
69. 5,60 eV
71. a. 1,89 eV; b. 459 THz; c. 1,21 V
73. 264 nm; UV
75.  $1,95 \times 10^6$  m/s
77.  $1,66 \times 10^{-32}$  kg · m/s
79. 56,21 eV
81.  $6,63 \times 10^{-23}$  kg · m/s; 124 keV
83. 82,9 fm; 15 MeV
85. (Prueba)
87.  $\Delta\lambda_{30}/\Delta\lambda_{45} = 45,74\%$
89. 121,5 nm
91. a. 0,661 eV; b. -10,2 eV; c. 1,511 eV
93. 3038 THz
95. 97,33 nm
97. a.  $h/\pi$ ; b. 3,4 eV; c. - 6,8 eV; d. - 3,4 eV

99.  $n = 4$   
 101. 365 nm; UV  
 103. no  
 105. 7  
 107. 145,5 pm  
 109. 20 fm; 9 fm  
 111. a. 2,103 eV; b. 0,846 nm  
 113. 80,9 pm  
 115.  $2,21 \times 10^{-19}$  m/s  
 117.  $9,929 \times 10^{32}$   
 119.  $\gamma = 1060$ ; 0,00124 fm  
 121. 24,11 V  
 123. a.  $P = 2I/c = 8,67 \times 10^{-6}$  N/m<sup>2</sup>; b.  $a = PA/m = 8,67 \times 10^{-4}$  m/s<sup>2</sup>; c. 74,91 m/s  
 125.  $x = 4,965$

### Problemas Adicionales

127.  $7,124 \times 10^{16}$  W/m<sup>3</sup>  
 129. 1,034 eV  
 131.  $5,93 \times 10^{18}$   
 133. 387,8 nm  
 135. a.  $4,02 \times 10^{15}$ ; b. 0,533 mW  
 137. a.  $4,02 \times 10^{15}$ ; b. 0,533 mW; c. 0,644 mA; d. 2,57 ns  
 139. a. 0,132 pm; b. 9,39 MeV; c. 0,047 MeV  
 141. a. 2 kJ; b.  $1,33 \times 10^{-5}$  kg · m/s; c.  $1,33 \times 10^{-5}$  N; d. sí  
 143. a. 0,003 nm; b. 105,56°  
 145.  $n = 3$   
 147. a.  $a_0/2$ ; b.  $-54,4$  eV/ $n^2$ ; c.  $a_0/3, -122,4$  eV/ $n^2$   
 149. a. 36; b. 18,2 nm; c. UV  
 151. 396 nm; 5,23 neV  
 153. 7,3 keV  
 155. 728 m/s 1,5  $\mu$ V  
 157.  $\lambda = hc/\sqrt{K(2E_0 + K)} = 3,705 \times 10^{-12}$  m,  $K = 100$  keV  
 159.  $\Delta\lambda_c^{(\text{electrón})}/\Delta\lambda_c^{(\text{protón})} = m_p/m_e = 1.836$   
 161. (Prueba)  
 163.  $5,1 \times 10^{17}$  Hz

## Capítulo 7

### Compruebe Lo Aprendido

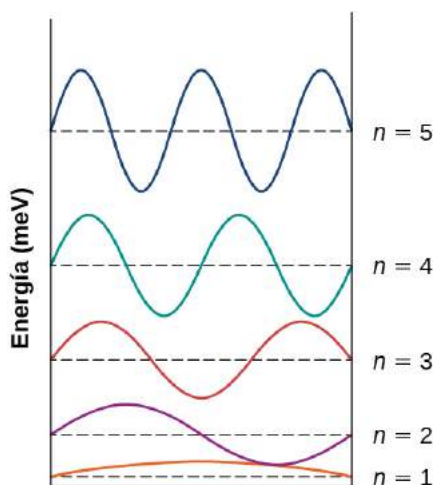
- 7.1  $(3 + 4i)(3 - 4i) = 9 - 16i^2 = 25$   
 7.2  $A = \sqrt{2/L}$   
 7.3  $(1/2 - 1/\pi)/2 = 9\%$   
 7.4  $4,1 \times 10^{-8}$  eV;  $1,1 \times 10^{-5}$  nm  
 7.5  $0,5m\omega^2 x^2 \psi(x)^* \psi(x)$   
 7.6 Ninguna. La primera función tiene una discontinuidad; la segunda función es de doble valor; y la tercera función diverge, por lo que no es normalizable.  
 7.7 a. 9,1 %; b. 25 %  
 7.8 a. 295 N/m; b. 0,277 eV  
 7.9  $\langle x \rangle = 0$   
 7.10  $L_{\text{protón}}/L_{\text{electrón}} = \sqrt{m_e/m_p} = 2,3\%$

## Preguntas Conceptuales

1.  $1/\sqrt{L}$ , donde  $L = \text{longitud}$ ;  $1/L$ , donde  $L = \text{longitud}$
3. La función de onda no se corresponde directamente con ninguna cantidad medida. Es una herramienta para predecir los valores de las cantidades físicas.
5. El valor medio de la cantidad física para un gran número de partículas con la misma función de onda.
7. Sí, si su posición es completamente desconocida. Sí, si su momento es completamente desconocido.
9. No. Según el principio de incertidumbre, si la incertidumbre sobre la posición de la partícula es pequeña, la incertidumbre sobre su momento es grande. Del mismo modo, si la incertidumbre sobre la posición de la partícula es grande, la incertidumbre sobre su momento es pequeña.
11. No, significa que las predicciones sobre la partícula (expresadas en términos de probabilidades) son independientes del tiempo.
13. No, porque la probabilidad de que la partícula exista en un intervalo estrecho (infinitesimalmente pequeño) en la discontinuidad es indefinida.
15. No. En un pozo cuadrado infinito, el espacio entre los niveles de energía aumenta con el número cuántico  $n$ . La energía *más pequeña* medida corresponde a la transición de  $n = 2$  a  $1$ , que es tres veces la energía del estado fundamental. La mayor *energía* medida corresponde a una transición de  $n = \infty$  a  $1$ , que es infinito. (Nota: Incluso las partículas con energías extremadamente grandes permanecen ligadas a un pozo potencial infinito: nunca pueden "escapar").
17. No. Esta energía corresponde a  $n = 0,25$ , pero  $n$  debe ser un número entero.
19. Porque el menor valor permitido del número cuántico  $n$  para un oscilador armónico simple es  $0$ . No, porque la mecánica cuántica y la mecánica clásica solo coinciden en el límite de grandes  $n$ .
21. Sí, dentro de las limitaciones del principio de incertidumbre. Si la partícula oscilante está localizada, el momento y por tanto la energía del oscilador están distribuidos.
23. duplicar el ancho de la barrera
25. No, la fuerza restauradora sobre la partícula en las paredes de un pozo potencial infinito es infinita.

## Problemas

27.  $|\psi(x)|^2 \sin^2 \omega t$
29. (a) y (e), se pueden normalizar
31. a.  $A = \sqrt{2\alpha/\pi}$ ; b. probabilidad = 29,3%; c.  $\langle x \rangle = 0$ ; d.  $\langle p \rangle = 0$ ; e.  $\langle K \rangle = \alpha^2 \hbar^2 / 2m$
33. a.  $\Delta p \geq 2,11 \times 10^{-34} \text{ N} \cdot \text{s}$ ; b.  $\Delta v \geq 6,31 \times 10^{-8} \text{ m}$ ; c.  $\Delta v / \sqrt{k_B T / m_\alpha} = 5,94 \times 10^{-11}$
35.  $\Delta \tau \geq 1,6 \times 10^{-25} \text{ s}$
37. a.  $\Delta f \geq 1,59 \text{ MHz}$ ; b.  $\Delta \omega / \omega_0 = 3,135 \times 10^{-9}$
39. La realización de las derivadas produce  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ .
41. Al realizar las derivadas (como en el caso anterior) para la función seno se obtiene un coseno en el lado derecho de la ecuación, por lo que la igualdad falla. Lo mismo ocurre con la solución del coseno.
43.  $E = \hbar^2 k^2 / 2m$
45.  $\hbar^2 k^2$ ; La partícula tiene un momento definido y por tanto un momento definido al cuadrado.
47. 9,4 eV, 64 %
49. 0,38 nm
51. 1,82 MeV
53. 24,7 nm
55. 6,03 Å
57. a.



;

b.  $\lambda_{5 \rightarrow 3} = 12,9 \text{ nm}$ ,  $\lambda_{3 \rightarrow 1} = 25,8 \text{ nm}$ ,  $\lambda_{4 \rightarrow 3} = 29,4 \text{ nm}$ 

59. prueba

61.  $6,662 \times 10^{14} \text{ Hz}$ 63.  $n \approx 2,037 \times 10^{30}$ 65.  $\langle x \rangle = 0,5m\omega^2 \langle x^2 \rangle = \hbar\omega/4$ ;  $\langle K \rangle = \langle E \rangle - \langle U \rangle = \hbar\omega/4$ 

67. prueba

69. Una función compleja de la forma  $Ae^{i\phi}$ , satisface la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Los operadores de energía cinética y total son lineales, por lo que cualquier combinación lineal de dichas funciones de onda es también una solución válida de la ecuación de Schrödinger. Por lo tanto, concluimos que la [Ecuación 7.68](#) satisface la [Ecuación 7.61](#), y la [Ecuación 7.69](#) satisface la [Ecuación 7.63](#).

71. a. 4,21 %; b. 0,84 %; c. 0,06 %

73. a. 0,13 %; b. cerca del 0 %

75. 0,38 nm

### Problemas Adicionales

77. prueba

79. a. 4,0 %; b. 1,4 %; c. 4,0 %; d. 1,4 %

81. a.  $t = mL^2/h = 2,15 \times 10^{26}$  años; b.  $E_1 = 1,46 \times 10^{-66} \text{ J}$ ,  $K = 0,4 \text{ J}$ 

83. prueba

85. 1,2 N/m

87. 0

### Problemas De Desafío

89.  $19,2 \mu\text{m}$ ;  $11,5 \mu\text{m}$ 

91. 3,92 %

93. prueba

## Capítulo 8

### Compruebe Lo Aprendido

8.1 No. El número cuántico  $m = -l, -l + 1, \dots, 0, \dots, l - 1, l$ . Por lo tanto, la magnitud de  $L_z$  es siempre menor que  $L$  porque  $< \sqrt{l(l+1)}$

8.2  $s = 3/2 <$ 

8.3 la frecuencia se cuadruplica

## Preguntas Conceptuales

- $n$  (número cuántico principal)  $\rightarrow$  energía total  
 $l$  (número cuántico angular orbital)  $\rightarrow$  magnitud absoluta total del momento angular orbital  $m$  (número cuántico de proyección angular orbital)  $\rightarrow$  componente  $z$  del momento angular orbital.
- El modelo de Bohr describe al electrón como una partícula que se mueve alrededor del protón en órbitas bien definidas. El modelo de Schrödinger describe el electrón como una onda, y el conocimiento de la posición del electrón se limita a las declaraciones de probabilidad. La energía total del electrón en el estado fundamental (y en todos los estados excitados) es la misma para ambos modelos. Sin embargo, el momento angular orbital del estado fundamental es diferente para estos modelos. En el modelo de Bohr,  $L$  (estado fundamental) = 1, y en el modelo de Schrödinger,  $L$  (estado fundamental) = 0.
- a, c, d; La energía total se modifica (división Zeeman). El trabajo realizado sobre el átomo de hidrógeno lo hace girar, por lo que el componente  $z$  del momento angular y el ángulo polar se ven afectados. Sin embargo, el momento angular no se ve afectado.
- Incluso en el estado fundamental ( $l = 0$ ), un átomo de hidrógeno tiene propiedades magnéticas debido al espín electrónico intrínseco (interno). El momento magnético de un electrón es proporcional a su espín.
- Para todos los electrones,  $s = \frac{1}{2}$  y  $m_s = \pm\frac{1}{2}$ . Como veremos, no todas las partículas tienen el mismo número cuántico de espín. Por ejemplo, un fotón tiene un espín 1 ( $s = 1$ ), y un bosón de Higgs tiene un espín 0 ( $s = 0$ ).
- Un electrón tiene un momento magnético asociado a su espín intrínseco (interno). El acoplamiento espín-órbita se produce cuando éste interactúa con el campo magnético producido por el momento angular orbital del electrón.
- Los elementos que pertenecen a la misma columna en la tabla periódica de los elementos tienen los mismos rellenos de sus capas exteriores y, por tanto, el mismo número de electrones de valencia. Por ejemplo:  
Li  $1s^2 2s^1$  (un electrón de valencia en la capa  $n = 2$ )  
Na:  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$  (un electrón de valencia en la capa  $n = 2$ )  
Tanto el Li como el Na pertenecen a la primera columna.
- Se dice que los espectros atómicos y moleculares son "discretos", porque solo se observan determinadas líneas espectrales. En cambio, los espectros de una fuente de luz blanca (formada por muchas frecuencias de fotones) son continuos porque se observa un arcoíris continuo de colores.
- La luz ultravioleta está formada por fotones de frecuencia relativamente alta (longitud de onda corta). Así, la energía del fotón absorbido y la transición energética ( $\Delta E$ ) en el átomo es relativamente grande. En comparación, la luz visible está formada por fotones de frecuencia relativamente baja. Por lo tanto, la transición energética en el átomo y la energía del fotón emitido es relativamente pequeña.
- En los sistemas macroscópicos, los números cuánticos son muy grandes, por lo que la diferencia de energía ( $\Delta E$ ) entre niveles de energía adyacentes (órbitas) es muy pequeño. La energía liberada en las transiciones entre estos niveles de energía estrechamente cercanas es demasiado pequeña para ser detectada.
- La luz láser se basa en el proceso de emisión estimulada. En este proceso, los electrones deben estar preparados en un estado metaestable excitado (superior) de tal manera que el paso de la luz a través del sistema produzca disminución del estado excitado y, por tanto, luz adicional.
- Un reproductor de Blu-Ray utiliza luz láser azul para sondear las protuberancias y las fosas del disco y un reproductor de CD utiliza luz láser roja. La luz azul de longitud de onda relativamente corta es necesaria para sondear las fosas y protuberancias más pequeñas de un disco Blu-ray; las fosas y protuberancias más pequeñas corresponden a densidades de almacenamiento más altas.

## Problemas

- $(r, \theta, \phi) = (\sqrt{6}, 66^\circ, 27^\circ)$ .
- $\pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$  son posibles
- 18
- $F = -k \frac{Qq}{r^2}$

33. (1, 1, 1)
35. Para el número cuántico del momento angular orbital,  $l$ , los valores permitidos de  $m = -l, -l + 1, \dots, 0, \dots, l - 1, l$ .  
Con la excepción de  $m = 0$ , el número total es solo  $2l$  porque el número de estados a cada lado de  $m = 0$  es solo  $l$ . Incluyendo  $m = 0$ , el número total de estados de momento angular orbital para el número cuántico de momento angular orbital,  $l$ , es  $2l + 1$ . (Más adelante, cuando consideremos el espín del electrón, el número total de estados de momento angular se encontrará al doble de este valor porque cada estado de momento angular orbital está asociado a dos estados de espín del electrón: espín arriba y espín abajo).
37. La probabilidad de que el electrón  $1s$  de un átomo de hidrógeno se encuentre fuera del radio de Bohr es
- $$\int_{a_0}^{\infty} P(r) dr \approx 0,68$$
39. Para  $n = 2, l = 0$  (1 estado), y  $l = 1$  (3 estados). El total es de 4.
41. El estado  $3p$  corresponde a  $n = 3, l = 2$ . Por lo tanto,  $\mu = \mu_B \sqrt{6}$
43. La relación de sus masas es  $1/207$ , por lo que la relación de sus momentos magnéticos es 207. El momento magnético del electrón es más de 200 veces mayor que el del muon.
45. a. El estado  $3d$  corresponde a  $n = 3, l = 2$ . Así que,  
 $I = 4,43 \times 10^{-7}$  A.  
b. El torque máximo se produce cuando los vectores momento magnético y campo magnético externo están en ángulo recto ( $\sin \theta = 1$ ). En este caso:  
 $|\vec{\tau}| = \mu B$ .  
 $\tau = 5,70 \times 10^{-26}$  N · m.
47. Un electrón  $3p$  está en el estado  $n = 3$  y  $l = 1$ . La magnitud mínima del torque se produce cuando los vectores del momento magnético y del campo magnético externo son los más paralelos (antiparalelos). Esto ocurre cuando  $m = \pm 1$ . La magnitud del torque viene dada por  
 $|\vec{\tau}| = \mu B \sin \theta$ ,  
Donde  
 $\mu = (1,31 \times 10^{-24} \text{ J/T})$ .  
Para  $m = \pm 1$ , tenemos:  
 $|\vec{\tau}| = 2,32 \times 10^{21}$  N · m.
49. Un trabajo infinitesimal  $dW$  realizado por un torque magnético  $\tau$  para hacer poner en rotación el momento magnético en un ángulo  $-d\theta$   
 $dW = \tau(-d\theta)$ ,  
donde  $\tau = |\vec{\mu} \times \vec{B}|$ . El trabajo realizado se interpreta como una disminución de la energía potencial  $U$ , por lo que  
 $dW = -dU$ .  
El cambio de energía total se determina sumando los cambios infinitesimales de la energía potencial:  
 $U = -\mu B \cos \theta$   
 $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ .
51. Espín ascendente (relativo al eje de la  $z$  positiva)  
 $\theta = 55^\circ$ .  
Espín descendente (respecto al eje de la  $z$  positiva)  
 $\theta = \cos^{-1} \left( \frac{S_z}{S} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{-1}{\sqrt{3}} \right) = 125^\circ$ .
53. El número cuántico de proyección del espín es  $m_s = \pm 1/2$ , por lo que el componente  $z$  del momento magnético es  
 $\mu_z = \pm \mu_B$ .  
La energía potencial asociada a la interacción entre el electrón y el campo magnético externo es  
 $U = \mp \mu_B B$ .  
La diferencia de energía entre estos estados es  $\Delta E = 2\mu_B B$ , por lo que la longitud de onda de la luz producida es



$$\lambda = 8,38 \times 10^{-5} \text{ m} \approx 84 \mu\text{m}$$

55. Se incrementa en un factor de 2.

57. a. 32; b.

$\ell$		$2(2\ell + 1)$	
0	<i>s</i>	$2(0 + 1)$	$= 2$
1	<i>p</i>	$2(2 + 1)$	$= 6$
2	<i>d</i>	$2(4 + 1)$	$= 10$
3	<i>f</i>	$2(6 + 1)$	$= 14$
			$32$

59. a. y e. están permitidas; las otras no.

b.  $l = 3$  no está permitida para  $n = 1$ ,  $l \leq (n - 1)$ .

c. No puede tener tres electrones en la subcapa *s* porque  $3 > 2(2l + 1) = 2$ .

d. No puede haber siete electrones en la subcapa *p* (máximo 6)  $2(2l + 1) = 2(2 + 1) = 6$ .

61.  $[\text{Ar}] 4s^2 3d^6$

63. a. El valor mínimo de  $\ell$  es  $l = 2$  para tener nueve electrones.

b.  $3d^9$ .

65.  $[\text{He}] 2s^2 2p^2$

67. En  $\text{He}^+$ , un electrón "orbita" un núcleo con dos protones y dos neutrones ( $Z = 2$ ). La energía de ionización se refiere a la energía necesaria para eliminar el electrón del átomo. La energía necesaria para eliminar el electrón en el estado fundamental de un ion de  $\text{He}^+$  hasta el infinito el valor de la energía del estado fundamental es negativo, escrito

$$E = -54,4 \text{ eV.}$$

Por lo tanto, la energía para ionizar el electrón es  $+54,4 \text{ eV}$ .

Del mismo modo, la energía necesaria para eliminar un electrón en el primer estado excitado de un ion  $\text{Li}^{2+}$  al infinito, el valor de la energía del primer estado excitado es negativo, y se escribe:

$$E = -30,6 \text{ eV.}$$

La energía para ionizar el electrón es de  $30,6 \text{ eV}$ .

69. La longitud de onda del láser viene dada por

$$\lambda = \frac{hc}{-\Delta E},$$

donde  $E_\gamma$  es la energía del fotón y  $\Delta E$  es la magnitud de la diferencia de energía. Resolviendo esto último, obtenemos

$$\Delta E = -2,795 \text{ eV.}$$

El signo negativo indica que el electrón perdió energía en la transición.

71.  $\Delta E_{L \rightarrow K} \approx (Z - 1)^2 (10,2 \text{ eV}) = 3,68 \times 10^3 \text{ eV}$ .

73. Según la conservación de la energía, la energía potencial del electrón se convierte completamente en energía cinética. La energía cinética inicial del electrón es cero (el electrón comienza en reposo). Por lo tanto, la energía cinética del electrón justo antes de golpear el objetivo es:

$$K = e\Delta V.$$

Si *toda* esta energía se convierte en radiación de frenado, la frecuencia de la radiación emitida es máxima, por tanto

$$f_{\text{max}} = \frac{e\Delta V}{h}.$$

Cuando la frecuencia emitida es un máximo, entonces la longitud de onda emitida es un mínimo, por lo que

$$\lambda_{\text{min}} = 0,1293 \text{ nm.}$$

75. Un muon es 200 veces más pesado que un electrón, pero la longitud de onda mínima no depende de la masa, por lo que el resultado no cambia.

77.  $4,13 \times 10^{-11} \text{ m}$

79.  $72,5 \text{ keV}$

81. Los números atómicos del Cu y del Au son  $Z = 29$  y  $79$ , respectivamente. La frecuencia de los fotones de los rayos X en el oro es mayor que en el cobre por un factor

$$\left(\frac{f_{\text{Au}}}{f_{\text{Cu}}}\right)^2 = \left(\frac{79-1}{29-1}\right)^2 \approx 8.$$

Por lo tanto, la longitud de onda de los rayos X del Au es unas ocho veces más corta que la del cobre.

83. a. Si la carne tiene la misma densidad que el agua, entonces usamos  $1,34 \times 10^{23}$  fotones. b. 2,52 MW

### Problemas Adicionales

85. El ángulo más pequeño corresponde a  $l = n - 1$  y  $m = l = n - 1$ . Por lo tanto,  $\theta = \cos^{-1} \left( \sqrt{\frac{n-1}{n}} \right)$ .
87. a. Según la [Ecuación 8.1](#), cuando  $r = 0$ ,  $U(r) = -\infty$ , y cuando  $r = +\infty$ ,  $U(r) = 0$ . b. El resultado anterior sugiere que el electrón puede tener una energía potencial negativa infinita. El modelo cuántico del átomo de hidrógeno evita esta posibilidad porque la densidad de probabilidad en  $r = 0$  es cero.
89. Una solución formal mediante sumas es algo complicada. Sin embargo, la respuesta se encuentra fácilmente estudiando el patrón matemático entre el número cuántico principal y el número total de estados de momento angular orbital.  
Para  $n = 1$ , el número total de estados de momento angular orbital es 1; para  $n = 2$ , el número total es 4; y cuando  $n = 3$ , el número total es 9, y así sucesivamente. El patrón sugiere que el número total de estados de momento angular orbital para la *enésima* capa es  $n^2$ .  
(Más adelante, cuando consideremos el espín del electrón, el número total de estados de momento angular resultará ser  $2n^2$ , porque cada estado de momento angular orbital está asociado a dos estados de espín del electrón; espín ascendente y espín descendente).
91. 50
93. El número máximo de estados de momento angular orbital de los electrones en la *enésima* capa de un átomo es  $n^2$ . Cada uno de estos estados puede ser llenado por un electrón de con espín ascendente y descendente. Por lo tanto, el número máximo de estados de los electrones en la *enésima* capa es  $2n^2$ .
95. a., c. y e. están permitidas; las demás no. b  $l > n$  no está permitido.  
d.  $7 > 2(2l + 1)$
97.  $f = 1,8 \times 10^9$  Hz
99. Los números atómicos del Cu y la Ag son  $Z = 29$  y 47, respectivamente. La frecuencia de los fotones de rayos X para la plata es mayor que la del cobre por el siguiente factor:  
$$\left(\frac{f_{\text{Ag}}}{f_{\text{Cu}}}\right)^2 = 2,7.$$
  
Por lo tanto, la longitud de onda de los rayos X de la Ag es aproximadamente tres veces más corta que la del cobre.
101. a. 3,24; b.  $n_i$  no es un número entero. c. La longitud de onda no debe ser la correcta. Dado que  $n_i > 2$ , la suposición de que la línea pertenecía a las series de Balmer es posible, pero la longitud de onda de la luz no produjo un valor entero para  $n_i$ . Si la longitud de onda es correcta, entonces la suposición de que el gas es hidrógeno es incorrecta; en su lugar podría ser sodio.

## Capítulo 9

### Compruebe Lo Aprendido

- 9.1 Corresponde a una fuerza de repulsión entre los electrones centrales de los iones.
- 9.2 el momento de inercia
- 9.3 sería más difícil
- 9.4 Disminuye.
- 9.5 La corriente de polarización directa es mucho mayor. En una buena aproximación, los diodos permiten el flujo de corriente en una sola dirección.
- 9.6 una baja temperatura y un bajo campo magnético

### Preguntas Conceptuales

1. Un enlace iónico se forma por la atracción de un ion positivo y otro negativo. Un enlace covalente se forma

cuando los átomos comparten uno o más electrones. Un enlace de van der Waals se forma por la atracción de dos moléculas eléctricamente polarizadas.

3. 1. Se retira un electrón de un átomo. El átomo resultante es un ion positivo. 2. Se absorbe un electrón de otro átomo. El átomo resultante es un ion negativo. 3. Los iones positivos y negativos se atraen entre sí hasta alcanzar una separación de equilibrio.
5. El enlace está asociado a una función espacial que es simétrica bajo el intercambio de los dos electrones. En este estado, la configuración electrónica es mayor entre los átomos. La función total debe ser antisimétrica (ya que los electrones son fermiones), por lo que la función de espín debe ser antisimétrica. En este estado, los espines de los electrones son antiparalelos.
7. energía rotacional, energía vibracional y energía atómica
9. Cada ion está en el campo de múltiples iones de la carga opuesta.
11. 6, 6
13. 0,399 nm
15. aumenta en un factor de  $\sqrt[3]{8^2} = 4$
17. Para energías mayores, el número de estados accesibles aumenta.
19. (1) Resolver la ecuación de Schrödinger para los estados y energías permitidos. (2) Determinar los niveles de energía para el caso de un espaciado de red muy grande y luego determinar los niveles de energía a medida que se reduce este espaciado.
21. Para  $N$  átomos separados entre sí, hay  $N$  funciones de onda diferentes, todas con la misma energía (similar al caso de un electrón en el pozo doble de  $H_2$ ). Al juntar los átomos, las energías de estas funciones de onda  $N$  diferentes se dividen. Por el principio de exclusión, cada electrón debe tener un único conjunto de números cuánticos, por lo que los átomos  $N$  que reúnen electrones  $N$  deben tener al menos estados  $N$ .
23. En un semiconductor, existe una brecha energética relativamente grande entre la banda más baja completamente llena y la siguiente banda disponible sin llenar. Normalmente, un número de electrones atraviesa la brecha y, por tanto, la conductividad eléctrica es pequeña. Las propiedades de un semiconductor son sensibles a la temperatura: al aumentar la temperatura, las excitaciones térmicas promueven portadores de carga desde la banda de valencia a través de la brecha y hacia la banda de conducción.
25. a. El germanio tiene cuatro electrones de valencia. Si el germanio está dopado con *arsénico* (cinco electrones de valencia), cuatro se utilizan en el enlace y queda un electrón para la conducción. Esto produce un material de tipo  $n$ . b. Si el germanio está dopado con *galio* (tres electrones de valencia), los tres electrones se utilizan en el enlace, dejando un agujero para la conducción. El resultado es un material de tipo  $p$ .
27. El efecto Hall es la producción de una diferencia de potencial debida al movimiento de un conductor a través de un campo magnético externo. Este efecto puede utilizarse para determinar la velocidad de deriva de los portadores de carga (electrones o agujeros). Si se mide la densidad de corriente, este efecto puede determinar también el número de portadores de carga por unidad de volumen.
29. Produce nuevos niveles de energía sin llenar justo por encima de la banda de valencia llena. Estos niveles aceptan electrones de la banda de valencia.
31. El campo eléctrico producido por los iones descubiertos reduce la difusión posterior. En equilibrio, las corrientes de difusión y de deriva se anulan, por lo que la corriente neta es cero. Por lo tanto, la resistencia de la región de agotamiento es grande.
33. El terminal positivo se aplica al lado  $n$ , lo que descubre más iones cerca de la unión (amplía la capa de agotamiento), aumenta la diferencia de voltaje de la unión y por tanto, reduce la difusión de agujeros a través de la unión.
35. El sonido mueve un diafragma hacia dentro y hacia fuera, lo que hace variar la corriente de entrada o base del circuito del transistor. El transistor amplifica esta señal (semiconductor  $p-n-p$ ). La corriente de salida o de colector acciona un altavoz.
37. La teoría BSC explica la superconductividad en términos de las interacciones entre pares de electrones (pares de Cooper). Un electrón de un par interactúa con la red, que interactúa con el segundo electrón. La interacción combinada electrón-red-electrón une el par de electrones de forma que supera su repulsión mutua.

39. Al aumentar la magnitud del campo magnético, la temperatura crítica disminuye.

### Problemas

41.  $U = -5,16 \text{ eV}$   
 43.  $-4,43 \text{ eV} = -4,69 \text{ eV} + U_{\text{ex}}, U_{\text{ex}} = 0,26 \text{ eV}$   
 45. El valor medido es de  $0,484 \text{ nm}$ , y el valor real se acerca a  $0,127 \text{ nm}$ . Los resultados del laboratorio son del mismo orden de magnitud, pero con un factor 4 elevado.  
 47.  $0,110 \text{ nm}$   
 49. a.  $E = 2,2 \times 10^{-4} \text{ eV}$ ; b.  $\Delta E = 4,4 \times 10^{-4} \text{ eV}$   
 51.  $0,65 \text{ nm}$   
 53.  $r_0 = 0,240 \text{ nm}$   
 55.  $2196 \text{ kcal}$   
 57.  $11,5$   
 59. a.  $4\%$ ; b.  $4,2 \times 10^{-4}\%$ ; para valores muy grandes de los números cuánticos, el espacio entre niveles de energía adyacentes es muy pequeño ("en el continuo"). Esto es consistente con la expectativa de que para grandes números cuánticos, la mecánica cuántica y la clásica dan aproximadamente las mismas predicciones.  
 61.  $10,0 \text{ eV}$   
 63.  $4,55 \times 10^9$   
 65. La energía de Fermi,  $E_F = 7,03 \text{ eV}$ , Temperatura,  $T_F = 8,2 \times 10^4 \text{ K}$   
 67. En un aislante, la brecha energética entre la banda de valencia y la banda de conducción es mayor que en un semiconductor.  
 69.  $4,13 \text{ keV}$   
 71.  $n = 1,56 \times 10^{19} \text{ agujeros/m}^3$   
 73.  $5 \text{ T}$   
 75.  $V_b = 0,458 \text{ V}$   
 77.  $T = 829 \text{ K}$   
 79.  $T = 0,707 T_c$   
 81.  $61 \text{ kV}$

### Problemas Adicionales

83.  $U_{\text{coul}} = -5,65 \text{ eV}$   
 $E_{\text{form}} = -4,71 \text{ eV}, E_{\text{diss}} = 4,71 \text{ eV}$   
 85.  $E_{0r} = 7,43 \times 10^{-3} \text{ eV}$   
 87.  $E_{0r} = 7,43 \times 10^{-3} \text{ eV}; l = 0; E_r = 0 \text{ eV}$  (sin rotación);  
 $l = 1; E_r = 1,49 \times 10^{-2} \text{ eV}; l = 2; E_r = 4,46 \times 10^{-2} \text{ eV}$   
 89. i. Son bastante duros y estables.  
 ii. Se vaporizan a temperaturas relativamente altas (1000 a 2000 K).  
 iii. Son transparentes a la radiación visible, porque los fotones de la porción visible del espectro no son lo suficientemente energéticos como para excitar un electrón desde su estado fundamental a un estado excitado.  
 iv. Son malos conductores eléctricos porque no contienen electrones libres.  
 v. Suelen ser solubles en agua, porque la molécula de agua tiene un gran momento dipolar cuyo campo eléctrico es lo suficientemente fuerte como para romper los enlaces electrostáticos entre los iones.  
 91. No, los átomos de He no contienen electrones de valencia que puedan ser compartidos en la formación de un enlace químico.  
 93.  $\sum_1^{N/2} n^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{N}{2}\right)^3$ , así que  $\bar{E} = \frac{1}{3} E_F$   
 95. Se formará una banda de impurezas cuando la densidad de los átomos donantes sea lo suficientemente alta como para que las órbitas de los electrones extra se superpongan. Hemos visto antes que el radio orbital es de unos 50 Angstroms, por lo que la distancia máxima entre las impurezas para que se forme una banda es de 100 Angstroms. Por lo tanto, si utilizamos 1 Angstrom como distancia interatómica entre

los átomos de Si, encontramos que 1 de cada 100 átomos a lo largo de una cadena lineal debe ser un átomo donante. Y en un cristal tridimensional, aproximadamente 1 de  $10^6$  átomos deben ser sustituidos por un átomo donante para que se forme una banda de impureza.

97. a.  $E_F = 7,11 \text{ eV}$ ; b.  $E_F = 3,24 \text{ eV}$ ; c.  $E_F = 9,46 \text{ eV}$

99.  $9,15 \approx 9$

## Problemas De Desafío

101. En tres dimensiones, la energía de un electrón viene dada por

$E = R^2 E_1$ , donde  $R^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$ . Cada estado energético permitido corresponde a un nodo en el espacio  $N(n_1, n_2, n_3)$ . El número de partículas corresponde al número de estados (nodos) en el primer octante, dentro de una esfera de radio,  $R$ . Este número viene dado por  $N = 2 \left(\frac{1}{8}\right) \left(\frac{4}{3}\right) \pi R^3$ , donde el factor 2 representa dos estados de espín. La densidad de estados se encuentra diferenciando esta expresión por la energía:

$$g(E) = \frac{\pi V}{2} \left(\frac{8m_e}{h^2}\right)^{3/2} E^{1/2}. \text{ Al integrar resulta: } \bar{E} = \frac{3}{5} E_F.$$

## Capítulo 10

### Compruebe Lo Aprendido

10.1 ocho

10.2 más difícil

10.3 La vida media está inversamente relacionada con la tasa de decaimiento, por lo que la vida media es corta. La actividad depende tanto del número de partículas en decaimiento como de la tasa de decaimiento, por lo que la actividad puede ser grande o pequeña.

10.4 Ninguna de las dos; permanece igual.

10.5 es igual

10.6 en la conversión de masa en energía

10.7 potencia

### Preguntas Conceptuales

1. El núcleo de un átomo está formado por uno o varios nucleones. Un nucleón es un protón o un neutrón. Un nucleído es un núcleo estable.
3. Un sistema enlazado debe tener menos masa que sus componentes debido a la equivalencia energía-masa ( $E = mc^2$ ). Si la energía de un sistema se reduce, la masa total del sistema se reduce. Si se colocan dos ladrillos uno al lado del otro, la atracción entre ellos es puramente gravitacional, suponiendo que los ladrillos sean eléctricamente neutros. La fuerza gravitacional entre los ladrillos es relativamente pequeña (comparada con la fuerza nuclear fuerte), por lo que el defecto de masa es demasiado pequeño para ser observado. Si los ladrillos se pegan con cemento, el defecto de masa es igualmente pequeño porque las interacciones eléctricas entre los electrones que intervienen en la unión son todavía relativamente pequeñas.
5. Los nucleones en la superficie de un núcleo interactúan con menos nucleones. Esto reduce la energía de enlace por nucleón, que se basa en un promedio de todos los nucleones del núcleo.
7. Que es constante.
9. Los rayos gama ( $\gamma$ ) se producen por interacciones nucleares y los rayos X y la luz se producen por interacciones atómicas. Los rayos gama suelen tener una longitud de onda más corta que los rayos X, y éstos son más cortos que la luz.
11. Supongamos un sistema de coordenadas rectangular con un plano  $xy$  que corresponde al plano del papel.  $\alpha$  se dobla en la página (trayectoria parabólica en el plano  $xz$ ), los rayos  $\beta_+$  se dobla en la página (trayectoria parabólica en el plano  $xz$ ), y  $\gamma$  está sin doblar.
13. Sí. Una bomba atómica es una bomba de fisión, y una bomba de fisión se produce al dividir el núcleo del átomo.

15. Las fuerzas de corto alcance entre los nucleones de un núcleo son análogas a las fuerzas entre las moléculas de agua en una gota de agua. En particular, las fuerzas entre los nucleones en la superficie del núcleo producen una tensión superficial similar a la de una gota de agua.
17. Los núcleos producidos en el proceso de fusión tienen una mayor energía de enlace por nucleón que los núcleos fusionados. Es decir, la fusión nuclear disminuye la energía media de los nucleones del sistema. La diferencia de energía se elimina en forma de radiación.
19. Las partículas alfa no penetran fácilmente en materiales como la piel y la ropa. (Recordemos que la radiación alfa apenas puede atravesar una fina hoja de papel) Sin embargo, cuando se producen dentro del cuerpo, las células vecinas son vulnerables.

## Problemas

21. Utilice la regla  $A = Z + N$ .

	Número atómico (Z)	Número de neutrones (N)	Número de masa (A)
(a)	29	29	58
(b)	11	13	24
(c)	84	126	210
(d)	20	25	45
(e)	82	124	206

23. a.  $r = r_0 A^{1/3}$ ,  $\rho = \frac{3u}{4\pi r_0^3}$ ;  
 b.  $\rho = 2,3 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$
25. longitud lateral =  $1,6 \mu\text{m}$
27.  $92,4 \text{ MeV}$
29.  $8,790 \text{ MeV} \approx$  valor del gráfico
31. a.  $7570 \text{ MeV}$ ; b.  $7,591 \text{ MeV} \approx$  valor del gráfico
33. La constante de decaimiento es igual al valor negativo de la pendiente o  $10^{-9} \text{ s}^{-1}$ . La vida media de los núcleos, y por tanto del material, es de  $T_{1/2} = 693 \text{ million years}$ . (millones de años).
35. a. La constante de decaimiento es  $\lambda = 1,99 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . b. Como el estroncio-91 tiene una masa atómica de  $90,90 \text{ g}$ , el número de núcleos en una muestra de  $1,00 \text{ g}$  es inicialmente  $N_0 = 6,63 \times 10^{21}$  núcleos.  
 La actividad inicial del estroncio 91 es  
 $A_0 = \lambda N_0$   
 $= 1,32 \times 10^{17} \text{ decays/s}$   
 La actividad en  $t = 15,0 \text{ h} = 5,40 \times 10^4 \text{ s}$  es  
 $A = 4,51 \times 10^{16} \text{ decays/s}$ .
37.  $1,20 \times 10^{-2} \text{ mol}$ ;  $6,00 \times 10^{-3} \text{ mol}$ ;  $3,75 \times 10^{-4} \text{ mol}$
39. a.  $0,988 \text{ Ci}$ ; b. La vida media de  $^{226}\text{Ra}$  se conoce con más precisión que cuando se creó la unidad Ci.
41. a.  $2,73 \mu\text{g}$ ; b.  $9,76 \times 10^4 \text{ Bq}$
43. a.  $7,46 \times 10^5 \text{ Bq}$ ; b.  $7,75 \times 10^5 \text{ Bq}$
45. a.  $4,273 \text{ MeV}$ ; b.  $1,927 \times 10^{-5}$ ; c. Dado que  $^{238}\text{U}$  es una sustancia que decae lentamente, solo un número muy pequeño de núcleos decae en escalas de tiempo humanas; por lo tanto, aunque esos núcleos que decaen pierden una fracción notable de su masa, el cambio en la masa total de la muestra no es detectable para una muestra macroscópica.
47. a.  $^{90}_{38}\text{Sr}_{52} \rightarrow ^{90}_{39}\text{Y}_{51} + \text{los rayos}_{-1}^{\beta} + \bar{\nu}_e$ ; b.  $0,546 \text{ MeV}$
49.  $^3_1\text{H}_2 \rightarrow ^3_2\text{He}_1 + \text{los rayos}_{-1}^{\beta} + \bar{\nu}_e$

51. a.  ${}^7_4\text{Be}_3 + e^- \rightarrow {}^7_3\text{Li}_4 + \nu_e$ ; b. 0,862 MeV
53. a.  $X = {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$ ; b. 33,05 MeV
55. a. 177,1 MeV; b. Este valor es aproximadamente igual a la BEN promedio de los núcleos pesados. c.  
 $n + {}^{238}_{92}\text{U}_{146} \rightarrow {}^{96}_{38}\text{Sr}_{58} + {}^{140}_{54}\text{Xe}_{86} + 3n,$   
 $A_i = 239 = A_f,$   
 $Z_i = 92 = 38 + 54 = Z_f$
57. a.  $2,57 \times 10^3$  MW; b.  $8,04 \times 10^{19}$  fisiones/s; c. 991 kg  
 ${}^1_1\text{H} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^2_1\text{H} + e^+ + \nu_e$
59. i.  $A_i = 1 + 1 = 2; A_f = 2 \quad Z_i = 1 + 1 = 2;$   
 $Z_f = 1 + 1 = 2$   
 ${}^1_1\text{H} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^2_1\text{H} + \gamma$
- ii.  $A_i = 1 + 2 = 3; A_f = 3 + 0 = 3 \quad Z_i = 1 + 1 = 2;$   
 $Z_f = 1 + 1 = 2$   
 ${}^3_2\text{H} + {}^3_2\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{H} + {}^1_1\text{H} + {}^1_1\text{H}$
- iii.  $A_i = 3 + 3 = 6; A_f = 4 + 1 + 1 = 6 \quad Z_i = 2 + 2 = 4$   
 $Z_f = 2 + 1 + 1 = 4$
61. 26,73 MeV
63. a.  $3 \times 10^{38}$  protones/s; b.  $6 \times 10^{14}$  neutrinos/m<sup>2</sup> · s;  
 Este número enorme es indicativo de lo poco que interactúa un neutrino, ya que los grandes detectores observan muy pocos al día.
65. a. La masa atómica del deuterio ( ${}^2\text{H}$ ) es de 2,014102 u, mientras que la del tritio ( ${}^3\text{H}$ ) es de 3,016049 u, para un total de 5,032151 u por reacción. Así, un mol de reactivos tiene una masa de 5,03 g, y en 1,00 kg hay  $(1.000 \text{ g}) / (5,03 \text{ g/mol}) = 198,8$  mol de reactivos. Por lo tanto, el número de reacciones que se producen es  
 $(198,8 \text{ mol}) (6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}) = 1,20 \times 10^{26}$  reacciones.  
 La producción total de energía es el número de reacciones multiplicado por la energía por reacción:  
 $E = 3,37 \times 10^{14} \text{ J};$   
 b. La potencia es la energía por unidad de tiempo. Un año tiene  $3,16 \times 10^7$  s, así que  
 $P = 10,7 \text{ MW}.$   
 Esperamos que los procesos nucleares produzcan grandes cantidades de energía, y ciertamente este es el caso. La producción de energía de  $3,37 \times 10^{14} \text{ J}$  de la fusión de 1,00 kg de deuterio y tritio equivale a 2,6 millones de galones de gasolina y a unas ocho veces la producción de energía de la bomba que destruyó Hiroshima. Sin embargo, una piscina promedio del patio trasero tiene unos 6 kg de deuterio, por lo que el combustible es abundante si se puede utilizar de forma controlada.
67.  $\text{Gy} = \frac{\text{Sv}}{\text{RBE}}$ : a. 0,01 Gy; b. 0,0025 Gy; c. 0,16 Gy
69. 1,24 MeV
71. 1,69 mm
73. Para el cáncer:  $(3 \text{ rem}) \left( \frac{10}{10^6 \text{ rem}\cdot\text{y}} \right) = \frac{30}{10^6 \text{ y}}$ , El riesgo anual de muerte por cáncer inducido es de 30 entre un millón. Para el defecto genético:  $(3 \text{ rem}) \left( \frac{3,3}{10^6 \text{ rem}\cdot\text{y}} \right) = \frac{9,9}{10^6 \text{ y}}$ , La probabilidad anual de que se produzca un defecto genético inducido es de 10 entre un millón.

### Problemas Adicionales

75. masa atómica (Cl) = 35,5 g/mol
77. a.  $1,71 \times 10^{58}$  kg; b. Esta masa es insosteniblemente grande; es mayor que la masa de toda la Vía Láctea.  
 c. El  ${}^{236}\text{U}$  no se produce a través de procesos naturales que operan durante mucho tiempo en la Tierra, sino a través de procesos artificiales en un reactor nuclear.
79. Si 10% de rayos quedan después de 2,00 cm, entonces solo quedan  $(0,100)^2 = 0,01 = 1\%$  después de 4,00



cm. Esto es mucho menor que el resultado de su compañero de laboratorio (5%).

81. a.  $1,68 \times 10^{-5}$  Ci; (b) A partir del [Apéndice B](#), la energía liberada por decaimiento es de 4,27 MeV, por lo que  $8,65 \times 10^{10}$  J; (c) El valor monetario de la energía es de  $2,9 \times 10^3$
83. Sabemos que  $\lambda = 3,84 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}$  y  $A_0 = 0,25 \text{ decaimiento/s} \cdot \text{g} = 15 \text{ decaimiento/min} \cdot \text{g}$ .

Por lo tanto, la edad de la tumba es de

$$t = -\frac{1}{3,84 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}} \ln \frac{10 \text{ decaimiento/min} \cdot \text{g}}{15 \text{ decaimiento/min} \cdot \text{g}} = 1,06 \times 10^{11} \text{ s} \approx 3.350 \text{ y.}$$

## Problemas De Desafío

85. a.  $6,97 \times 10^{15}$  Bq; b. 6,24 kW; c. 5,67 kW
87. a. Debido a la fuga, la presión en la cámara de la turbina disminuyó considerablemente. La diferencia de presión entre la cámara de la turbina y el condensador de vapor es ahora muy baja. b. Se necesita una gran diferencia de presión para que el vapor pase por la cámara de la turbina y la haga girar.
89. Las energías son
- $$E_\gamma = 20,6 \text{ MeV}$$
- $$E_{4\text{He}} = 5,68 \times 10^{-2} \text{ MeV}$$
- Observe que la mayor parte de la energía va al rayo  $\gamma$ .

## Capítulo 11

### Compruebe Lo Aprendido

- 11.1 1
- 11.2 0
- 11.3 0
- 11.4 0
- 11.5 1 eV
- 11.6 El radio de la vía se reduce a la mitad.
- 11.7 Las partículas que colisionan tienen masa idéntica pero momentos vectoriales opuestos.
- 11.8 corrimiento al azul
- 11.9 casi igual

### Preguntas Conceptuales

- Fuerza nuclear fuerte: interacción entre cuarks, por intermedio de los gluones. Fuerza electromagnética: interacción entre partículas de carga, por intermedio de los fotones. Fuerza nuclear débil: interacciones entre fermiones, por intermedio de los bosones pesados. Fuerza gravitacional: interacciones entre partículas materiales (con masa), por intermedio de gravitones hipotéticos.
- electrón, muon, tau; neutrino electrónico, neutrino muónico, neutrino tauónico; cuark abajo, cuark extraño, cuark inferior; cuark arriba, cuark encantado, cuark superior.
- Conservación de la energía, del momento y de la carga (conocidos por la mecánica clásica y relativista). Además, la conservación del número bariónico, el número de leptones y la extrañeza, números que no cambian antes y después de una colisión o decaimiento.
- Significa la teoría que requiere la ley de conservación aún no se comprende. El fracaso de una teoría establecida desde hace tiempo suele conducir a una comprensión más profunda de la naturaleza.
- 3 cuarks, 2 cuarks (un par cuark-anticuark)
- Los bariones con la misma composición de cuarks difieren en la energía de reposo porque esta energía depende de la energía interna de los cuarks ( $m = E/c^2$ ). Así, se espera que un barión que contiene un cuark con un gran momento angular sea más masivo que el mismo barión con menos momento angular.
- el "linac" para acelerar las partículas en línea recta, un sincrotrón para acelerar y almacenar las partículas en movimiento en un anillo circular, y un detector para medir los productos de las colisiones.
- En un experimento de haces de colisión, la energía de las partículas que colisionan pasa a la energía de masa en reposo de la nueva partícula. En un experimento de objetivo fijo, parte de esta energía se pierde en el momento de la nueva partícula, ya que el centro de masa de las partículas que colisionan no es fijo.

17. El modelo estándar es un modelo de las interacciones de las partículas elementales. Este modelo contiene la teoría electrodébil y la cromodinámica cuántica (QCD). Describe la interacción de leptones y cuarks mediante el intercambio de fotones (electromagnetismo) y bosones (teoría débil), y la interacción de cuarks mediante el intercambio de gluones (QCD). Este modelo no describe las interacciones gravitacionales.
19. Explique las interacciones de las partículas que involucran las fuerzas nuclear fuerte, electromagnética y fuerza nuclear débil de forma unificada.
21. No, pero explicará por qué los bosones W y Z son masivos (ya que el Higgs "imparte" masa a estas partículas), y por tanto por qué la fuerza débil es de corto alcance.
23. La expansión cosmológica es una expansión del espacio. Esta expansión es diferente de la explosión de una bomba, en la que las partículas *atraviesan* rápidamente el espacio. Un gráfico de la velocidad de recesión de una galaxia es proporcional a su distancia. Esta velocidad se mide mediante el corrimiento al rojo de la luz estelar lejana.
25. Con la distancia, el brillo absoluto es el mismo, pero el brillo aparente es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia (o por la ley de Hubble la velocidad de recesión).
27. La expansión observada del universo y el espectro de radiación cósmica de fondo.
29. Si la luz se ralentiza, tarda en llegar a la Tierra más de lo esperado. Llegamos a la conclusión de que el objeto está mucho más cerca de lo que realmente está. Así, para cada velocidad de recesión (con base en la frecuencia de la luz, que suponemos no está perturbada por la ralentización), la distancia es menor que el valor "verdadero", la constante de Hubble es mayor que el valor "verdadero" y la edad del universo es menor que el valor "verdadero".

## Problemas

31. 1,022 MeV
33. 0,511 MeV,  $2,73 \times 10^{-22}$  kg · m/s,  $1,23 \times 10^{20}$  Hz
35. a, b y c
37. a.  $\bar{p}_e^+ ve$ ; b.  $\bar{p}\pi^+$  o  $\bar{p}\pi^0$ ; c.  $\Xi^0\pi^0$  o  $\Lambda^0\text{K}^+$ ; d.  $\mu^-\bar{\nu}_\mu$  o  $\pi^-\pi^0$ ; e.  $\bar{p}\pi^0$  o  $\bar{n}\pi^-$
39. Un protón está formado por dos cuarks arriba y un cuark abajo. La carga total de un protón es por tanto  $+\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + -\frac{1}{3} = +1$ .
41. Los rayos  $\text{K}^+$  está compuesto por un cuark arriba y un anticuark extraño ( $u\bar{s}$ ). Como los cambios de este cuark y anticuark son  $2e/3$  y  $e/3$ , respectivamente, la carga neta del mesón  $\text{K}^+$  es  $e$ , de acuerdo con su valor conocido. Dos partículas de espín  $-1/2$  pueden combinarse para producir una partícula con espín de 0 o 1, de acuerdo con el espín del mesón  $\text{K}^+$  de 0. La extrañeza neta del cuark arriba y del anticuark extraño es  $0 + 1 = 1$ , de acuerdo con la extrañeza medida de  $\text{K}^+$ .
43. a. color; b. cuark-anticuark
45.  $d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$ ;  $u \rightarrow d + e^+ + \nu_e$
47. 965 GeV
49. Según [Ejemplo 11.7](#),  
 $W = 2E_{\text{haz}} = 9,46 \text{ GeV}$ ,  
 $M = 9,46 \text{ GeV}/c^2$ .  
 Esta es la masa del mesón upsilon ( $1S$ ) observada por primera vez en el laboratorio Fermi en 1977. El mesón upsilon está formado por un cuark inferior y su antipartícula ( $b\bar{b}$ ).
51. 0,135 fm; como esta distancia es demasiado corta para hacer una pista, la presencia del  $W^-$  debe inferirse a partir de los productos de su decaimiento.
53. 3,33 MV
55. El gravitón no tiene masa, por lo que al igual que el fotón está asociado a una fuerza de alcance infinito.
57. 67,5 MeV
59. a. 33,9 MeV; b. Por la conservación del momento,  $|p_\mu| = |p_\nu| = p$ . Por la conservación de la energía,  $E_\nu = 29,8 \text{ MeV}$ ,  $E_\mu = 4,1 \text{ MeV}$
61.  $(0,99)(299792 \text{ km/s}) = \left(70 \frac{\text{km}}{\text{s}}\right) / \text{Mpc}$  ( $d$ ),  $d = 4.240 \text{ Mpc}$

63.  $1,0 \times 10^4$  km/s de distancia de nosotros.  
 65.  $2,26 \times 10^8$  años  
 67. a.  $1,5 \times 10^{10}$  años = 15 mil millones de años; b. Mayor, ya que si en el pasado se movía más despacio tardaría menos en recorrer la distancia.  
 69.  $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

### Problemas Adicionales

71. a.  $\bar{n}$ ; b.  $K^+$ ; c.  $K^+$ ; d.  $\pi^-$ ; e.  $\bar{\nu}_\tau$ ; f.  $e^+$   
 73.  $14,002 \text{ TeV} \approx 14,0 \text{ TeV}$   
 75.  $964 \text{ rev/s}$   
 77. a.  $H_0 = \frac{30 \text{ km/s}}{1 \text{ Mly}} = 30 \text{ km/s} \cdot \text{Mly}$ ; b.  $H_0 = \frac{15 \text{ km/s}}{1 \text{ Mly}} = 15 \text{ km/s} \cdot \text{Mly}$

### Problemas De Desafío

79. a.  $5 \times 10^{10}$ ; b. divida el número de partículas por el área que golpean:  $5 \times 10^4$  partículas/m<sup>2</sup>  
 81. a. 2,01; b.  $2,50 \times 10^{-8}$  s; c. 6,50 m

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow$$

83.

$$v = \left(\frac{GM}{r}\right)^{1/2} = \left[\frac{(6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(3 \times 10^{41} \text{ kg})}{(30.000 \text{ años luz})(9,46 \times 10^{15} \text{ m/ly})}\right] = 2,7 \times 10^5 \text{ m/s}$$

85. a.  $938,27 \text{ MeV}$ ; b.  $1,84 \times 10^3$   
 87. a.  $3,29 \times 10^{18} \text{ GeV} \approx 3 \times 10^{18} \text{ GeV}$ ; b. 0,3; La unificación de las tres fuerzas se rompe poco después de la separación de la gravedad de la fuerza de unificación (cerca del intervalo de tiempo de Planck). La incertidumbre en el tiempo es entonces mayor. De ahí que la energía disponible sea menor que la energía de unificación necesaria.



# ÍNDICE

## Símbolos

$\alpha$ - $\alpha$  [277](#), [277](#)

$\beta$  [277](#)

## A

aberración [70](#)

aberración esférica [70](#)

abertura [167](#)

absorbente [254](#)

acelerador de partículas [535](#)

acelerador de Van de Graaff  
[535](#)

acelerador lineal [535](#)

aceptador de impurezas [439](#)

acomodación [88](#)

acoplamiento espín-órbita [382](#)

actividad [474](#)

ADN [174](#)

afinidad electrónica [414](#)

agujero [438](#)

Albert Einstein [191](#)

amplificador [446](#)

análisis de estrés óptico [44](#)

ancho de banda elevado [23](#)

ancho del pico central [158](#)

ángulo crítico [20](#)

ángulo de Brewster [39](#)

ángulo de dispersión [270](#)

Anillo de almacenamiento de  
electrones de Cornell [538](#)

anillos de Newton [135](#)

antielectrones [479](#)

antineutrino [481](#)

antipartícula [523](#)

aproximación de lentes

delgadas [81](#)

aproximación para ángulos

pequeños [63](#)

arcoíris [25](#)

átomo de impureza [438](#)

aumento [59](#)

aumento angular [97](#)

aumento lineal [67](#)

aumento neto [101](#)

## B

Balmer [275](#)

banda de conducción [436](#)

banda de energía [435](#)

banda de impureza [439](#)

banda de valencia [436](#)

Bardeen [452](#)

bariones [522](#)

barrera de potencial [344](#)

Becquerel [472](#)

becquerelios [476](#)

Betelgeuse [256](#)

Bethe [494](#)

Big Bang [550](#)

birrefringentes [44](#)

Bohr [277](#), [489](#)

bomba atómica [490](#)

bosone [521](#)

bosones W y Z [522](#)

Bragg [175](#), [288](#), [288](#)

brecha energética [436](#)

burbuja de jabón [132](#)

## C

cadena protón-protón [494](#)

cámaras [94](#)

campo magnético crítico [449](#)

capa [386](#)

capa de agotamiento [441](#)

catástrofe ultravioleta [259](#)

Chadwick [277](#)

ciclotrón [537](#)

colapso de la función de onda  
[317](#)

color [533](#)

coma [71](#)

Compton [270](#)

cóncava [75](#)

condición de normalización  
[314](#)

configuración de electrones  
[386](#)

configuración de polarización  
directa [443](#)

configuración de polarización  
inversa [443](#)

cono de luz [219](#)

constante de decaimiento [473](#)

constante de Hubble [550](#)

constante de Madelung [417](#)

constante de Planck [260](#)

constante de Planck reducida  
[270](#)

constante de repulsión [426](#)

constante de Rydberg para el  
hidrógeno [275](#)

constante de Stefan-Boltzmann  
[257](#)

contracción de la longitud [208](#)

convenciones de signos [81](#)

convergente [75](#)

convexa [75](#)

Cooper [452](#)

córnea [87](#)

corriente de base [445](#)

corriente de colector [445](#)

corrimiento al rojo [551](#)

cosmología [550](#)

criterio de Rayleigh [168](#)

criticidad [490](#)

cromodinámica cuántica (QCD)  
[544](#)

cuark [521](#)

cúbica centrada en el cuerpo  
(BCC) [425](#)

cúbica centrada en la cara

(FCC) [424](#)

cúbica simple [425](#)

cúbit [319](#)

cuerpo negro [254](#)

curie (Ci) [476](#)

## D

datación por carbono 14 [477](#)

datación radiométrica [477](#)

Davisson [287](#)

de Broglie [284](#)

decae [473](#)

decaimiento alfa [479](#)  
 decaimiento beta [481](#)  
 decaimiento gama [483](#)  
 decaimiento radiactivo [349](#)  
 defecto de masa [469](#)  
 densidad de estados [431](#)  
 densidad de probabilidad [313](#)  
 densidad numérica de los electrones [431](#)  
 detector ALICE [542](#)  
 detector de partículas [540](#)  
 diagrama fasorial [154](#)  
 diagramas de Feynman [544](#)  
 diamantes [24](#)  
 difracción [150](#)  
 difracción de rayos X [174](#)  
 dilatación del tiempo [198](#)  
 diodo de túnel [353](#)  
 diodo túnel resonante [354](#)  
 dioptrías [89](#)  
 Dirac [295](#)  
 dirección de polarización [35](#)  
 diseño de Cassegrain [106](#)  
 diseño newtoniano [106](#)  
 dispersión de Compton [270](#)  
 dispersión espectroscópica [165](#)  
 dispositivos de carga acoplada (CCD) [94](#)  
 distancia de imagen [59](#)  
 distancia de separación en equilibrio [415](#)  
 distancia del objeto [59](#)  
 distancia focal [61](#)  
 divergente [75](#)  
 dopaje [438](#)  
 dosis alta [504](#)  
 dosis baja [504](#)  
 dosis moderada [504](#)  
 dualidad onda-partícula [292](#)

## E

ecuación de lentes delgadas [80](#)  
 ecuación de Schrödinger [366](#)  
 ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo [328](#)  
 ecuación de Schrödinger independiente del tiempo [330](#)  
 ecuación del espejo [66](#)  
 ecuación del fabricante de

lentes [81](#)  
 efecto Compton [270](#)  
 efecto fotoeléctrico [262](#)  
 efecto túnel [343](#)  
 efecto túnel resonante [353](#)  
 efecto Zeeman [378](#)  
 eficacia biológica relativa [503](#)  
 Einstein [265](#)  
 eje óptico [60](#)  
 el deuterio [466](#)  
 El gato de Schrödinger. [318](#)  
 El principio de incertidumbre de Heisenberg [324](#)  
 el tritio [466](#)  
 electrodinámica cuántica (QED) [544](#)  
 electrones de valencia [386](#)  
 elemento transuránico [484](#)  
 emisión de campo [351](#)  
 emisión estimulada [401](#)  
 emisor [254](#)  
 endoscopio [22](#)  
 energía cinética relativista [232](#)  
 energía de disociación [415, 427](#)  
 energía de enlace [469](#)  
 energía de enlace por nucleón (BEN) [470](#)  
 energía de Fermi [430](#)  
 energía de ionización [280](#)  
 energía de un fotón [265](#)  
 energía del estado fundamental [333](#)  
 energía del estado fundamental del átomo de hidrógeno [280](#)  
 energía en reposo [236](#)  
 energía oscura [560](#)  
 energía total [236](#)  
 energías cuantizadas [260](#)  
 enlace covalente [390, 414](#)  
 enlace de van der Waals [414](#)  
 enlace iónico [390, 414](#)  
 enlace metálico [429](#)  
 espacio-tiempo [217](#)  
 esparcimiento inelástico [273](#)  
 espectro de absorción [274](#)  
 espectro de emisión [274](#)  
 espectro energético del hidrógeno [280](#)

espejo [58](#)  
 espejo cóncavo [60](#)  
 espejo convexo [60](#)  
 espejo curvo [60](#)  
 estado cuántico de un oscilador de Planck [260](#)  
 estado fundamental [369](#)  
 estado metaestable [401](#)  
 estados de energía excitada de un átomo de hidrógeno [280](#)  
 estados de onda estacionaria [333](#)  
 estados estacionario [333](#)  
 estructura fina [382](#)  
 estructura hiperfina [383](#)  
 evento [213](#)  
 experimento Davisson-Germer [287](#)  
 experimento de interferencia de doble rendija [292](#)  
 experimento de la lámina de oro de Rutherford [277](#)  
 experimento de Michelson-Morley [194](#)  
 experimento de Stern-Gerlach [382](#)  
 experimento mental [197](#)  
 extrañeza [529](#)

## F

factor de Fermi [431](#)  
 factor de Lorentz [199](#)  
 factor de modulación del tiempo [329](#)  
 fenómeno cuántico [265](#)  
 Fermi [487, 491](#)  
 fermione [521](#)  
 Feynman [544](#)  
 fibra óptica [21](#)  
 fisión [487](#)  
 Fizeau [8](#)  
 fluorescencia [394](#)  
 foco de imagen [74](#)  
 fórmula de Balmer [275](#)  
 fórmula de Rydberg [276](#)  
 fotocorriente [263](#)  
 fotoelectrodo [262](#)  
 fotoelectrones [262](#)  
 fotón [265](#)

Foucault [9](#)  
 franjas [126](#)  
 franjas de interferencia [122](#)  
 Fraunhofer [274](#)  
 frecuencia de corte [264](#)  
 Fresnel [149](#)  
 fuerza electrodébil [521](#)  
 fuerza nuclear débil [520](#)  
 fuerza nuclear fuerte [467, 520](#)  
 fuerzas fundamentale [520](#)  
 función antisimétrica [321](#)  
 función de densidad y  
 probabilidad radial [374](#)  
 función de onda [312](#)  
 función de trabajo [265](#)  
 función impar [321](#)  
 función par [321](#)  
 funciones compleja [319](#)  
 fusión nuclear [494](#)

## G

Gabor [178](#)  
 Galileo [103](#)  
 Gamow [345](#)  
 Gell-Mann [530](#)  
 Germer [287](#)  
 gluone [522](#)  
 gráfica de Moseley [397](#)  
 Gran Colisionador de Hadrones  
 (Large Hadron Collider, LHC)  
[539](#)  
 grupo químico [388](#)

## H

hadrone [522](#)  
 Hahn [487](#)  
 Heisenberg [295](#)  
 hibridación [418](#)  
 hipermetropía [90](#)  
 hiperopía [90](#)  
 hipótesis de los cuantos de  
 energía de Planck [260](#)  
 holografía [178](#)  
 holograma [176](#)  
 hombre equivalente a roentgen  
 (Roentgen Equivalent Man,  
 rem) [504](#)  
 Hund [345](#)  
 Huygens [121](#)

## I

imagen real [58](#)  
 imagen virtual [58](#)  
 impureza del donante [439](#)  
 incoherente [123](#)  
 índice de refracción [9](#)  
 intensidad de potencia [255](#)  
 interferencia constructiva [124](#)  
 interferencia de dos rendijas  
[312](#)  
 interferencia de película  
 delgada [130](#)  
 interferencia destructiva [124](#)  
 interferencia destructiva para  
 una rendija [152](#)  
 interferómetro [136](#)  
 interpretación de Born [313](#)  
 interpretación de Copenhague  
[317](#)  
 inversión de población [401](#)  
 iones hidrogenoides [283](#)  
 iridiscencia [164](#)  
 isótopos [466](#)

## L

la hipótesis de De Broglie sobre  
 las ondas de materia [284](#)  
 la notación espectroscópica  
[369](#)  
 La simultaneidad [221](#)  
 las aberraciones cromáticas [77](#)  
 las ecuaciones de Maxwell, [192](#)  
 láser [401](#)  
 lentes delgadas [76](#)  
 leptone [521](#)  
 ley de Brewster [39](#)  
 ley de decaimiento radioactivo  
[473](#)  
 ley de desplazamiento de Wien  
[256](#)  
 ley de Hubble [550](#)  
 ley de Malus [37](#)  
 ley de Moseley [397](#)  
 ley de Rayleigh-Jeans [259](#)  
 ley de reflexión [12](#)  
 ley de refracción [18](#)  
 ley de Snell [18](#)  
 ley de Stefan [257](#)  
 límite de difracción [168](#)

límite de ionización del  
 hidrógeno [280](#)  
 línea de universo [217](#)  
 líneas de Fraunhofer [274](#)  
 longitud de enlace [415](#)  
 longitud de onda Compton [272](#)  
 longitud de onda de corte [266](#)  
 Longitud propia [208](#)  
 lupa [96](#)  
 lupa simple [96](#)  
 luz difusa [13](#)

## M

magnetograma [378](#)  
 magnetón de Bohr [377](#)  
 marcadores radioactivos [499](#)  
 marco de referencia inercial  
[193](#)  
 marco de reposo [192](#)  
 masa atómica [468](#)  
 masa crítica [490](#)  
 masa en reposo [230](#)  
 materia oscura [559](#)  
 máximo secundario [129](#)  
 máximos principales [129](#)  
 mecánica cuántica de ondas  
[284](#)  
 mecánica de Newton [192](#)  
 mesones [522](#)  
 metales de transición [389](#)  
 Michelson [9, 136](#)  
 microscopía electrónica [296](#)  
 microscopio compuesto [100](#)  
 microscopio de efecto de túnel  
 (STM) [352](#)  
 microscopio electrónico de  
 barrido (scanning electron  
 microscope, SEM) [296](#)  
 microscopio electrónico de  
 transmisión (transmission  
 electron microscope, TEM) [296](#)  
 miopía [90](#)  
 modelo atómico nuclear [277](#)  
 modelo de Bohr [366](#)  
 modelo de Bohr del átomo de  
 hidrógeno [277](#)  
 modelo de electrones libres  
[430](#)  
 modelo de la gota líquida [489](#)



modelo de rayos de luz [12](#)  
 modelo estándar [544](#)  
 molécula poliatómica [418](#)  
 momento dipolar magnético orbital [376](#)  
 Momento relativista [230](#)  
 monocromática [123, 401](#)  
 muones [200](#)

**N**

nanotecnología [353](#)  
 neutrino [482](#)  
 neutrones [464](#)  
 Newton [106](#)  
 nivel de energía rotacional [419](#)  
 nivel de energía vibracional [421](#)  
 niveles de energía [333](#)  
 no polarizada [35](#)  
 normalización [373](#)  
 nucleído [465](#)  
 núcleo atómico [464](#)  
 núcleo hija [479](#)  
 núcleo padre [479](#)  
 nucleones [464](#)  
 nucleosíntesis [495, 557](#)  
 número atómico [464](#)  
 número bariónico [525](#)  
 número cuántico [260](#)  
 número cuántico de [280](#)  
 número cuántico de energía [333](#)  
 número cuántico de espín [380](#)  
 número cuántico de momento angular orbital [369](#)  
 número cuántico de proyección del espín [380](#)  
 número cuántico de proyección del momento angular [369](#)  
 número cuántico magnético orbital [378](#)  
 número cuántico principal [333, 368](#)  
 número de masa [464](#)  
 número de neutrones [464](#)  
 número de onda [270](#)  
 número imaginario [329](#)  
 números leptónicos [527](#)

**O**

objetivo [100, 104](#)  
 objetivo focal [73](#)  
 ocular [100, 104](#)  
 onda de De Broglie [284](#)  
 ondas coherentes [123](#)  
 operador de momento [321](#)  
 operador de posición [320](#)  
 óptica de onda [30, 121](#)  
 óptica geométrica [12](#)  
 ópticamente activas [43](#)  
 orbital atómico [374](#)  
 orden [125](#)  
 orden faltante [160](#)

**P**

pantallas de cristal líquido (LCD) [42](#)  
 paquete de ondas [295, 324](#)  
 par de Cooper [452](#)  
 paradoja de los gemelos [205, 220](#)  
 partícula virtual [545](#)  
 patrón de difracción por una rendija [150](#)  
 Penzias [557](#)  
 Planck [259](#)  
 plano focal [79](#)  
 planos de Bragg [176](#)  
 polarizadas [35](#)  
 polarizadas horizontalmente [35](#)  
 polarizadas verticalmente [35](#)  
 Polinomio de Hermite [339](#)  
 portador mayoritario [440](#)  
 portador minoritario [440](#)  
 positrón [523](#)  
 positrones [479](#)  
 postulados del modelo de Bohr [277](#)  
 potencia óptica [88](#)  
 potencial de frenado [263](#)  
 pozo potencial infinito [331](#)  
 Pozzi [293](#)  
 primer foco [73](#)  
 primer postulado [193](#)  
 principio cosmológico [552](#)  
 principio de correspondencia [323, 337](#)

principio de exclusión de Pauli [384, 521](#)  
 principio de Huygens [30, 151](#)  
 principio de incertidumbre de Heisenberg [295, 481](#)  
 principio de incertidumbre energía-tiempo [327](#)  
 probabilidad de transmisión [346](#)  
 probabilidad de tunelización [346](#)  
 profundidad aparente [72](#)  
 protones [464](#)  
 punto cercano [88](#)  
 punto cuántico [353](#)  
 punto de Poisson [149](#)  
 punto focal [61](#)  
 punto lejano [88](#)

**R**

rad [503](#)  
 radiación de cuerpo negro [254](#)  
 radiación de fondo de microondas [556](#)  
 radiación de frenado [394](#)  
 radiación de sincrotrón [537](#)  
 radio de Bohr del hidrógeno [279](#)  
 radio de un núcleo [468](#)  
 radioactividad [472](#)  
 radiofármaco [499](#)  
 rayo [11](#)  
 rayos alfa ( $\alpha$ ) [478](#)  
 rayos beta (los rayos  $\beta$  los rayos  $\beta$ ) [478](#)  
 rayos gama ( $\gamma$ ) [478](#)  
 rayos principales [64](#)  
 rayos- $\gamma$  [277](#)  
 reacción en cadena [489](#)  
 reactor de fusión nuclear [498](#)  
 reactor nuclear [491](#)  
 reactor reproductor [492](#)  
 recubrimientos antirreflejantes [133](#)  
 red [423](#)  
 reducción de estado [317](#)  
 reflector de esquina [14](#)  
 reflexión interna total [20](#)  
 refracción [16](#)

regla de selección [420](#)  
 reglas de selección [391](#)  
 rejilla de difracción [163](#)  
 relatividad galileana [192](#)  
 reproductor de Blu-Ray [403](#)  
 reproductor de CD [402](#)  
 resolución [168](#)  
 retina [87](#)  
 revestimiento [23](#)  
 Rigel [256](#)  
 Roemer [8](#)  
 Ruska, [295](#)  
 Rutherford [277](#)

**S**

Schrieffer [452](#)  
 Schrödinger [295](#)  
 segundo foco [74](#)  
 segundo postulado de la relatividad especial [194](#)  
 semiconductor [437](#)  
 semiconductor tipo n [439](#)  
 semiconductor tipo p [439](#)  
 serie de Balmer [276](#)  
 serie de Brackett [276](#)  
 serie de decaimiento [483](#)  
 serie de Humphreys [276](#)  
 serie de Lyman [276](#)  
 serie de Paschen [276](#)  
 serie de Pfund [276](#)  
 sievert (Sv) [504](#)  
 simetría de intercambio [418](#), [521](#)  
 simultaneidad [196](#)  
 sincrotrón [537](#)

Snell [18](#)  
 sólidos amorfos [423](#)  
 Sonda de Anisotropía de Microondas Wilkinson (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, WMAP) [557](#)  
 Strassman [487](#)  
 subcapa [386](#)  
 suma de la velocidad clásica (galileana) [224](#)  
 suma de velocidades relativistas [224](#)  
 superconductor tipo I [449](#)  
 superconductor tipo II [449](#)

**T**

tabla de nucleídos [465](#)  
 tabla periódica [388](#)  
 telescopio espacial Hubble [169](#)  
 telescopio Hubble [107](#)  
 telescopio Keck [107](#)  
 temperatura crítica [448](#)  
 temperatura de Fermi [432](#)  
 tensión de ruptura [444](#)  
 teoría BCS [452](#)  
 teoría de gran unificación [521](#)  
 teoría del todo [521](#)  
 teoría especial de la relatividad [192](#)  
 Thomson [277](#)  
 tiempo de vida [474](#)  
 tiempo propio [199](#)  
 tomografía computarizada de emisión monofotónica (Single-Photon-Emission Computed

Tomography, SPECT) [501](#)  
 tomografía por emisión de positrones (PET) [502](#)  
 Tonomura [294](#)  
 transformación de Lorentz [214](#)  
 transformación galileana [213](#)  
 transición dipolar eléctrica [420](#)  
 transiciones de espín-flip [383](#)  
 transistor de unión [445](#)  
 trazado de rayos [63](#), [76](#)

**U**

unidad de dosis de radiación [503](#)  
 unidades de masa atómica [468](#)  
 unión p-n [441](#)

**V**

valor esperado [320](#)  
 valor Q [494](#)  
 vector de propagación [270](#)  
 velocidad de deriva [440](#)  
 velocidad de grupo [284](#)  
 velocidad de la luz [193](#), [233](#)  
 vértice [60](#)  
 vida media [474](#)  
 visión corta [90](#)  
 von Laue [175](#)

**W**

Wheeler [489](#)  
 Wilson [557](#)

**Y**

Young [122](#)