Matemática Aplicada

Alexandre Motta

Florianópolis
2010

Alexandre Motta

Matemática Aplicada

Curso Superior de Tecnologia em Gestão Pública

PUBLICAÇÃO do IF-SC
Florianópolis
2010
2ª edição - revista e atualizada
1ª reimpressão

M921m Motta, Alexandre

Matemática aplicada / Alexandre Motta. – 2. ed. rev. e atual. – Florianópolis : Publicações do IF-SC, 2010.

85 p. : il. ; 27,9 cm.

Inclui Bibliografia.

ISBN: 978-85-62798-36-8

1. Matemática. 2. Matemática aplicada. 3. Matemática financeira. 4. Estatística – introdução. I. Título.

CDD: 513.93

Sistema de Bibliotecas Integradas do IF-SC
Biblioteca Dr. Hercílio Luz – Campus Florianópolis
Catalogado por: Augiza Karla Boso – CRB 14/1092
Rose Mari Lobo Goulart – CRB 14/277

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SANTA CATARINA

Ficha técnica

Organização	**Alexandre Motta**
Comissão Editorial	**Paulo Roberto Weigmann** **Dalton Luiz Lemos II**
Coordenador do Curso Superior de Tecnologia em Gestão Pública	**Felipe Cantório Soares**
Atualização de Conteúdo	**José Roque Damasco Neto**
Coordenação de Produção	**Ana Paula Lückman**
Capa, Projeto Gráfico	**Lucio Santos Baggio**
Design Instrucional	**Edson Burg**
Editoração Eletrônica	**Angelita Corrêa Pereira**
Revisão Gramatical	**Alcides Vieira de Almeida**

Material produzido com recursos do Programa Universidade Aberta do Brasil (UAB)

Sumário

Apresentação

Caro(a) estudante, seja bem-vindo(a)!

Este livro apresenta a unidade curricular Matemática Aplicada, em particular, Matemática Financeira que será vista com o objetivo de auxiliar o aprendizado de fatos e ideias realmente relevantes para seu cotidiano, com problemas práticos enfrentados por profissionais ligados aos cursos de Gestão Pública, Administração e áreas afins.

O material foi elaborado visando a uma aprendizagem autônoma; adotamos uma linguagem simples e clara, com exemplos, visando facilitar seu estudo a distância. Mas é importante que você saiba que estudar a distância não significa que você estará sozinho. Seus estudos serão acompanhados pelo Sistema de Acompanhamento. Nossa equipe terá o maior prazer em atendê-lo, pois sua aprendizagem é o nosso principal objetivo.

É importante que você saiba que para ter um bom aproveitamento nesta unidade curricular, você vai precisar de conhecimentos que envolvam a Matemática Básica (frações, equações, simplificações) e o auxílio de uma calculadora científica (sem a necessidade de calculadora financeira). Poderá utilizar, se desejar, a própria calculadora presente no computador em: **Programas – Acessórios – Calculadora**. Outra ferramenta, bastante interessante, seria o uso de uma planilha eletrônica (**Calc**, por exemplo).

Tenha sempre em mente que na modalidade de educação a distância, o seu desempenho está, diretamente, relacionado a sua dedicação, não só ao conteúdo presente no material impresso, como também na busca de outras fontes de informação e da interface permanente com nossa equipe.

Um bom trabalho a todos.

Professor Alexandre Motta

Ícones e legendas

Glossário

A presença deste ícone representa a explicação de um termo utilizado durante o texto da unidade.

Lembre-se

A presença deste ícone ao lado do texto indicará que naquele trecho demarcado deve ser enfatizada a compreensão do estudante.

Saiba mais

O professor colocará este item na coluna de indexação sempre que sugerir ao estudante um texto complementar ou acrescentar uma informação importante sobre o assunto que faz parte da unidade.

Para refletir

Quando o autor desejar que o estudante responda a um questionamento ou realize uma atividade de aproximação do contexto no qual vive ou participa.

Destaque paralelo

O texto apresentado neste tipo de box pode conter qualquer tipo de informação relevante e pode vir ou não acompanhado por um dos ícones ao lado.

Destaque de texto

A presença do retângulo com fundo colorido indicará trechos importantes do texto, destacados para maior fixação do conteúdo.

Link de hipertexto

Se no texto da unidade aparecer uma palavra grifada em cor, acompanhada do ícone da seta, no espaço lateral da página, será apresentado um conteúdo específico relativo à expressão destacada.

Assim, desta forma, serão apresentados os conteúdos relacionados à palavra destacada.

Conceitos iniciais

Unidade

1

Competências

Ao final do estudo desta unidade, você saberá abstrair as propriedades de razões e proporções e conhecerá um pouco sobre a linguagem, símbolos e esquemas matemáticos que servirão como ferramenta de comunicação.

1 Conceitos iniciais

1.1 Razão

A **razão** entre dois números a e b é a fração (ou comparação) entre duas grandezas **a** e **b**, com b≠0, que se escreve $\frac{a}{b}$ ou a: b.

Ex.1: A razão entre dois números 3 e 7 é: $\frac{3}{7}$ (lê-se: 3 está para 7).

Ex.2: De um evento patrocinado pela prefeitura municipal, estão participando 25 rapazes e 15 moças. Determine a **razão** do número de moças para o número total de participantes.

Solução:

Número de moças → 15

Total de participantes → 15 + 25 = 40

Razão → $\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$ (simplificação por 5; ou seja: em um grupo de 8 participantes, 3 são moças)

1.2 Proporção

Proporção é a igualdade entre duas **razões**.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou a : b = c : d (lê-se: a está para b, assim como c está para d)

a, d – são os extremos

b, c – são os meios

Ex.1: $\frac{9}{6} = \frac{21}{14}$ ou 9 : 6 = 21 : 14

Ex.2: Um edifício dispõe de 25 unidades para acomodar 3 pessoas em cada uma delas. Se construirmos mais 10 unidades, quantas pessoas poderão hospedar-se nesse local?

Solução:

Apartamentos		Pessoas
25	(vezes 3)	75
25 + 10		x

ou seja

$$\frac{25}{35} = \frac{75}{x} \rightarrow 25 \,.\, x = 35 \,.\, 75 \rightarrow 25.x = 2625 \rightarrow x = 105$$

Resposta:

Poderão hospedar-se nesse edifício 105 pessoas.

Obs.: Como foi visto no problema anterior, em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios (**Propriedade Fundamental das Proporções**).

1.3 Divisões proporcionais

- **Diretamente proporcionais**: os números a, b e c são **diretamente proporcionais** aos números x, y e z, quando se tem:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Ex.: Determinar x e y de modo que os elementos de A = {24, y, 12} e B = {x, 6, 4} sejam **diretamente proporcionais**.

$$\frac{24}{x} = \frac{y}{6} = \frac{12}{4}$$

$$\frac{24}{x} = \frac{12}{4} \rightarrow 12 \,.\, x = 4 \,.\, 24 \rightarrow x = 8$$

$$\frac{y}{6} = \frac{12}{4} \rightarrow 4 \,.\, y = 12 \,.\, 6 \rightarrow y = 18$$

- **Inversamente proporcionais**: os números a, b e c são **inversamente proporcionais** aos números x, y e z, quando se tem:

$$\frac{a}{1/x} = \frac{b}{1/y} = \frac{c}{1/z}$$

Ex.: Determinar x e y de modo que os elementos de A = {4, 5, x} e B = {15, y, 20} sejam inversamente proporcionais.

$4.15 = 5.y = x.20$

$4.15 = 5.y \rightarrow y = 60/5 \rightarrow y = 12$

$4.15 = x.20 \rightarrow x = 60/20 \rightarrow x = 3$

1.4 Regra de três

Alguns problemas envolvem valores de grandezas direta ou inversamente proporcionais. São problemas que envolvem 3 elementos conhecidos e outro a descobrir, o que chamamos de **regra de três**. Uma regra de três é **simples** quando envolve duas grandezas, e **composta** quando envolve mais de duas grandezas.

Para resolver um problema de regra de três **simples**:

- escrevemos numa mesma coluna as grandezas da mesma espécie;
- identificamos se as grandezas são direta ou inversamente proporcionais:
  - grandezas diretamente proporcionais: duas grandezas são diretamente proporcionais quando, aumentando uma delas, a outra aumenta na mesma razão da primeira;
  - grandezas inversamente proporcionais: duas grandezas são inversamente proporcionais quando, aumentando uma delas, a outra diminui na mesma razão da primeira;
- escrevemos a proporção correspondente e resolvemos a equação.

Para resolvermos um problema de regra de três **composta**:

- escrevemos numa mesma coluna as grandezas da mesma espécie;
- identificamos se as grandezas são direta ou inversamente proporcionais, considerando:
- as colunas duas a duas. Uma das colunas deve sempre conter o termo desconhecido;

- escrevemos a proporção correspondente, igualando a razão que contém o termo desconhecido com o produto das outras razões;
- resolvemos a equação.

Ex.1: Um restaurante serve 330 refeições em duas horas diárias de trabalho. Quantas refeições poderá oferecer se trabalhar três horas ?

Solução:

Obs.: "Se trabalhar mais horas, teoricamente, produzirá mais refeições, portanto: diretamente proporcional."

Refeições	Horas
330	2
x	3

$$\frac{330}{x} = \frac{2}{3} \rightarrow 2 . x = 330 . 3$$

$$x = 495$$

Resposta:

Poderá oferecer 495 refeições.

Ex.2: Para limpeza das salas de aula de um grande colégio, estima-se que são gastos, diariamente, 12 embalagens de um tipo de detergente, que custam R$ 6,36. Qual o custo

unitário desse produto e quantas embalagens foram gastas num determinado dia em que a compra saiu por R$ 8,48 ?

Solução:

Obs.: "Diminuiu a quantidade, diminui o valor, diretamente proporcional"

Detergente (quantidade)	Preço (R$)
12	6,36
1	x

$$\frac{12}{1} = \frac{6{,}36}{x} \rightarrow 12 . x = 6{,}36 . 1 \rightarrow x = 0{,}53$$

ou seja: R$ 0,53 a unidade.

Detergente (quantidade)	Preço (R$)
1	0,53
x	8,48

Então: maior valor, mais produtos – diretamente proporcional:

Logo:

$$\frac{1}{x} = \frac{0{,}53}{8{,}48} = x \rightarrow x \,.\, 0{,}53 = 1 \,.\, 8{,}48 \rightarrow x = 16 \text{ detergentes.}$$

Ex.3: Para alimentar 20 pessoas durante 16 dias, são necessários 600 Kg de comida. Quantas pessoas poderão ser alimentadas durante 30 dias, com 900 Kg de comida ?

Solução:

Pessoas	Dias	Comida
20	16	600
x	30	900

Obs.: "Comparando a coluna que contém a variável 'x' com a coluna 'dias', com uma determinada quantidade de 'comida' fixa, aumentando o número de dias, alimentará menos pessoas – inversamente proporcional. E, por outro lado, fixando a quantidade 'dias', mais alimentação proporciona refeição para mais pessoas, logo: diretamente proporcional."

Assim:

$$\frac{20}{x} = \frac{30}{16} \,.\, \frac{600}{900} \rightarrow 18\,000.x = 20 \,.\, 14\,400 \rightarrow x = 16$$

Portanto, 16 pessoas poderão alimentar-se durante 30 dias com 900 Kg de comida.

1.5 Porcentagem

A palavra **porcentagem** ou **percentagem** vem do latim – per e cento – e significa **por um cento**.

Em uma pesquisa de opinião, 100 pessoas foram consultadas sobre suas preferências em relação a determinados cursos de especialização A, B e C. O resultado foi:

- 37 escolheram o curso A;
- 23 escolheram o curso B;
- 40 escolheram o curso C.

Podemos estabelecer as seguintes razões entre o número de pessoas que optaram por A, B ou C e o total de consultas realizadas:

O símbolo (%) foi usado pela primeira vez por um comerciante inglês do século XVII, para registrar os cálculos que efetuava em suas operações comerciais.

$\frac{37}{100}, \frac{23}{100}$ e $\frac{40}{100}$.

Essas razões, com denominador 100, são chamadas de r**azões centesimais**; podemos indicá-las pela simbologia:

37/100 = 37% (lê-se: trinta e sete por cento);

23/100 = 23% (lê-se: vinte e três por cento);

40/100 = 40% (lê-se: quarenta por cento).

Na prática, qualquer razão pode ser representada na forma **porcentual**.

Exemplos:

¼ = 0,25 = 25/100 = 25%

½ = 0,5 = 5/10 = 50/100 = 50%

Ex.1: Calcular 25% de 864.

Solução:

25% = 25/100 então $\frac{25}{100} \cdot 864 = 216$

Ex.2: Uma determinada passagem aérea custa R$ 130,00. Sabendo que as passagens sofreram um reajuste de 15%, determine o acréscimo e o valor da nova passagem.

Solução:

15% = 15/100 então $\frac{15}{100} \cdot 130 = 19{,}50$

Resposta:

O acréscimo será de R$ 19,50 e a passagem custará

(R$ 130,00 + R$ 19,50) = R$ 149,50.

Ex.3: Numa certa época, uma locadora de automóveis cobrava R$ 560,00 pelo aluguel semanal de um carro, mais uma taxa de 9%, calculada sobre o aluguel, referente ao seguro. Qual seria a despesa total de uma pessoa que, nesse período, alugasse um carro por 3 semanas ?

Solução:

Preço	Semana(s)
R$ 560,00	1
x	3

$x \cdot 1 = 560.3 \quad \rightarrow \quad x = 1680$

$9\% = 9/100$ então $\dfrac{9}{100} \cdot 1680 = 151{,}20$

Resposta: A despesa total seria de:
(R$ 1680,00 + R$ 151,20) = R$ 1831,20.

Ex.4: Florianópolis, capital catarinense, com suas 42 praias agraciadas pela natureza, prevê para esta temporada 60% de turistas estrangeiros e um total de 150.000 turistas brasileiros. A previsão de estrangeiros será de:

Solução:

%	número de turistas
40	150.000
100	x

$40 \cdot x = 150.000 \cdot 100 \rightarrow x = 375\ 000$ será o total de turistas na cidade.

Resposta: Portanto, a previsão de estrangeiros deve ser:
375.000 – 150.000 = 225.000.

Geralmente encontramos, nos jornais e revistas, notícias referindo-se à mudança de cotação de moedas dos mais diversos países, principalmente o dólar (EUA), que influencia o mercado e as negociações na cadeia produtiva brasileira. A essa troca, mudança nos valores das moedas entre os países, dá-se o nome de câmbio.

A mudança na cotação, principalmente do dólar (EUA), que rege os negócios e produtos mundiais, para um patamar mais elevado, parece causar danos em vários setores de nossa economia.

A indústria, por exemplo, com a alta do dólar, recebe matéria-prima mais cara e tenta vencer as resistências da venda de seus produtos para a população, para passar adiante seu aumento de custos. O vestuário, por exemplo, trabalha com tecidos de algodão e sintéticos cotados em dólar e tem dificuldade de repassar a alta da matéria-prima para o preço das roupas.

Na agricultura, os reflexos de mudanças no câmbio são sentidos por produtores e pela população. Desde a alta nos preços de máquinas e equipamentos importados, até produtos como o trigo (importado em parte pelo país) que responde, por exemplo, por 60% do custo de um produto como o macarrão (consumido por todos).

Na informática, 60% dos componentes de um computador são importados, com a alta do dólar, os preços também sobem.

Mas a alta da moeda americana, por outro lado, também tem um lado bom para a indústria. Inibe a entrada de produtos importados, aumenta as vendas das fábricas nacionais e dá mais competitividade às exportações.

Câmbio: troca de moedas, letras, notas, valores de um país pelos de outro; permutação.
Fonte: Ferreira (1972).

Síntese

Nessa unidade, você estudou conceitos iniciais de razão e proporção, regra de três e porcentagens. Aprendemos que há uma proporção entre duas grandezas quando uma relação linear relaciona as mesmas, de forma que, por exemplo, dobrando o valor de uma das grandezas, a outra é dobrada (proporção ou razão direta) ou é reduzida à metade (proporção ou razão inversa).

A porcentagem é uma razão em que o denominador é o número 100; assim: $20\% = \frac{20}{100}$. Outras taxas ou razões são expressas, normalmente, em porcentagem, como a taxa de crescimento de uma população, a taxa de inflação, a taxa de crescimento do PIB, entre outras.

Na unidade seguinte, você saberá o que são juros simples. Vamos em frente!

Matemática financeira 1: juros simples

Unidade

2

Competências

Nesta unidade, você conhecerá fatos e ideias, métodos e técnicas envolvidos nas situações de regime de capitalização de juros simples, além do conceito de juro.

2 Matemática financeira 1: juros simples

2.1 Juros simples

A Matemática Financeira tem por objetivo fornecer instrumentos para o estudo das formas de aplicação de dinheiro, bem como, de pagamento de empréstimos. Agora, você vai estudar um desses instrumentos: o regime de capitalização de juros simples.

Nesta primeira parte do estudo de Matemática Financeira, será abordado o regime de capitalização de juro simples. Nesse sistema, a remuneração (rendimento) é feita sobre o capital inicial aplicado (também chamado de principal) que, por sua vez, é diretamente proporcional ao seu valor e ao mesmo tempo de aplicação.

2.1.1 Um pouco de história

Pode-se dizer que a origem do sistema capitalista encontra-se na passagem da Idade Média para a Idade Moderna. Nos séculos XIII e XIV, surgia na Europa uma nova classe social – a burguesia. Os integrantes desse novo grupo se valiam de atividades comerciais para obter lucro.

Nesse contexto, surgem outros personagens importantes do sistema financeiro, como os banqueiros e cambistas. Estes lucravam mantendo o dinheiro em circulação.

A origem do dinheiro, ou melhor, da moeda, resulta de uma longa evolução. Antes dela existir, o comércio baseava-se na troca de mercadorias, ou seja, o escambo. Lopes e Rossetti (2002) ressaltam o fato de que as mercadorias utilizadas no escambo apresentavam-se, de maneira geral, em seu estado natural. Mas você deve imaginar que existia um grande obstáculo nesse tipo de comércio: sem valor de referência, como comparar o valor de diferentes tipos de produtos?

A solução para esse problema foi a moeda. Etimologicamente falando, a expressão moeda é atribuída ao latim moneta, que significa o lugar onde se cunhavam moedas em Roma, no templo Juno Moneta.

Vasconcellos e Garcia (2005, p. 139) definem a moeda como "um instrumento ou objeto aceito pela coletividade para intermediar as transações econômicas, para pagamento de bens ou serviços."

Para chegar ao nosso sistema monetário, a própria moeda passou por evoluções como explica Trigueiros (1987 apud SCHEINER, 2005, n.p.):

- da moeda metálica da antiguidade, de metal sem liga e sem forma definida;
- da moeda formal, constituída de liga em que predomine o metal fino e represente mercadoria autônoma, diversa de outras mercadorias, com mercado próprio;
- da moeda que deixa de ser exclusivamente de metal, mas com garantia de metal fino para lastrear o curso da moeda-papel;
- da moeda-papel exclusiva, garantida pelo seu equivalente em metal;
- e o do papel-moeda inconversível, todo ele destinado aos compromissos do câmbio internacional (metalismo cambial), constituindo área de conversibilidade limitada aos países que o adotam.

Voltando a nosso foco inicial, a Matemática Financeira, a motivação de seu desenvolvimento está relacionado ao problema econômico de escassez, ou seja, às necessidades das pessoas de consumirem bens e serviços cuja oferta é limitada. Como já fora visto historicamente, a primeira solução encontrada pela sociedade foi a troca de um bem por outro. Mais tarde surge a moeda. Para melhor acompanhar o tema de estudo é interessante definir certos termos, vejamos:

- **Preço**: denominador comum para o valor dos bens.
- **Moeda**: um meio para acumular valor e constituir riqueza ou capital.

Constatou-se então que:

- bens eram consumidos; ou
- bens guardados para o futuro

Portanto, observa-se em nossa sociedade que a maioria das pessoas prefere consumir seus bens no presente e não no futuro. Existe uma preferência temporal para consumir; as pessoas querem uma recompensa pela abstinência. Esse prêmio para que não haja consumo é o juro.

É importante que você saiba que toda riqueza capaz de dar renda ou de ser aplicada à produção é considerada pelos economistas como sendo um **capital**.

2.1.2 Como é determinado o juro?

O juro é determinado através de um coeficiente referido a um dado intervalo de tempo.

As **taxas de juros** geralmente são apresentadas de dois modos:

- **Forma Porcentual**:

Ex: Qual o juro que rende um capital de $ 1 000,00 aplicado por um ano à taxa de juros de 10% ao ano ?

Solução:

$J = ?$ $\quad\quad$ $J = C.\,i\,.\,n$

$C = 1.000$ $\quad\quad$ $J = 1.000.\,\frac{10}{10}\,.1$

$n = 1$ ano

$i = 10\ \%$ a.a. $\quad\quad$ $J = 100$

Resposta: é de $ 100,00 o total de juros que a aplicação rende em 1 ano.

- **Forma Unitária**:

Ex: Igual ao anterior.

Solução:

$J = ?$ $\quad\quad$ $J = C.i.n$

$C = 1.000$ $J = 1\ 000.0{,}1.1$

$n = 1$ ano $\quad\quad$ $J = 100$

$i = 0{,}1$ a.a.

Resposta: o juro é de $ 100,00.

Exs.:

Forma Porcentual	Transformação	Forma Unitária
12% a.a.	12/100	0,12 a.a.
6% a.s.	6/100	0,06 a.s.
1% a.m.	1/100	0,01 a.m.

Juro: pode ainda ser entendido como sendo a remuneração do capital aplicado ou custo do crédito.

2.2 Cálculo de juros simples e montante

$C \rightarrow$ Capital

$i \rightarrow$ Taxa

$n \rightarrow$ Período

$J \rightarrow$ Juros

$M \rightarrow$ Montante = Capital + Juros ($M = C + J$)

Obs.: A taxa (i) e o período (n) devem ser colocados na mesma unidade.

Exemplo: Suponhamos que se tome emprestada a quantia de \$ 1.000,00 pelo prazo de 2 anos, à taxa de 10 % a.a. Qual será o valor a ser pago como juro?

Solução:

$C = 1.000$ $J1 = 1.000.0,1.1 = 100 +$

$n = 2$ $J2 = 1.000.0,1.1 = 100$

$i = 0,1$ a.a.

$J = ?$ $J = J1 + J2 = 100 + 100 = 200$

ou

$J = 1\ 000.0,1.2 = 200$

$J = C.i.n$

Juros

$M = C + J = 1\ 000 + 200 = 1.200$

$M = C + C.i.n = C\ (\ 1 + i.n)$

$M = C.(1 + i.n)$

Montante

Valor Atual: corresponde ao valor de um compromisso (de débito ou de crédito) em uma determinada data compreendida entre o início e o término do compromisso.

Valor Nominal: é o valor da aplicação (ou do recebimento) em sua data de vencimento, ou seja, é a soma do capital + juros (montante).

Exemplo: Se tenho um título com valor nominal de R\$ 15.000,00 com vencimento daqui a 2 anos e a taxa de juros simples é de 28% a.a., qual o valor atual desse título nas seguintes datas:

- hoje;
- daqui a 1 ano.

Solução:

Em juros simples: $N = A.(1 + i.n)$

1) $15.000 = A.(1 + 0{,}28.2)$

$15.000 = A.(1 + 0{,}56)$

$15.000 = A.\ 1{,}56$

$\dfrac{15.000}{1{,}56} = A$

Então A = R$ 9 615,38

2) $15.000 = A.(1+0{,}28.1)$

$15.000 = A.(1+ 0{,}28)$

$15.000 = A.\ 1{,}28$

$\dfrac{15.000}{1{,}28} = A$

Então A = R$ 11 718,75

- **Descontos simples**

Desconto: é a quantia a ser abatida do valor nominal.

- **Desconto racional (desconto por dentro)**

É o desconto obtido pela diferença entre o valor nominal e o valor atual de um compromisso que seja saldado n períodos antes do seu vencimento.

O valor descontado é entendido como sendo a diferença entre o valor nominal e o desconto, em que se destacam:

N: valor nominal A_R: valor atual (racional)

n: número de períodos antes do vencimento

i: taxa de desconto D_R: valor do desconto

Temos: $A = \dfrac{N}{1+in}$

$$D\,r = N - A = N - \frac{N}{1+in} = \frac{N(1+in) - N}{1+in} = \frac{N}{1+in} = Ain$$

Obs.: Em juros simples, o valor descontado racional é o próprio valor atual.

Exemplo: Se o desconto racional concedido for de R$ 57,63, qual será a taxa considerada, uma vez que o valor nominal é de R$ 600,00 e o período de antecipação 5 meses?

Solução:

De acordo com as expressões desenvolvidas acima, temos:

$D_R = N - A$ e ainda $D_R = A.i.n$

$57,63 = 600 - A \longrightarrow A = 542,37$ portanto $57,63 = 542,37.i.5$

$57,63 = 2.711,85.i \longrightarrow i = 0,021$

ou $i = 2,1\%$ a.m.

Desconto comercial (desconto por fora)

É aquele valor que se obtém pelo cálculo do juro simples sobre o valor nominal do compromisso que seja saldado n períodos antes de seu vencimento.

Sendo:

N: valor nominal

n: número de períodos antes do vencimento

i: taxa de desconto

DC: desconto comercial

AC: valor atual comercial

Obtém-se o valor descontado comercial aplicando-se a definição:

$D_C = \mathbf{N.i.n}$

E o valor atual comercial:

$A_C = N - D_C = N - Nin = N(1 - in)$

Obs.: Em desconto comercial, é preciso distinguir a taxa de desconto utilizada na operação e a taxa implícita que é cobrada de fato.

Exemplo: O valor atual comercial recebido de um título é de R$ 2.360,00; considerando-se a taxa de 28%a.a. e o prazo de antecipação de 72 dias, qual é o desconto comercial?

Solução:

Conforme as expressões acima, têm-se:

$A_C = N(1 - in)$

$2.360 = N(1 - 0,28.\frac{72}{360})$

$2.360 = N(1 - 0,056)$

$2.360 = N.\ 0,944 \longrightarrow N = 2.500$

E ainda: $A_C = N - D_C \longrightarrow 2.360 = 2.500 - D_C \longrightarrow D_C =$ R$ 140,00

Obs.: A taxa e o período devem estar na mesma unidade.

Desconto bancário

Corresponde ao desconto comercial acrescido de uma taxa prefixada, cobrada sobre o valor nominal.

Sendo:

A_B: valor atual bancário

D_B: desconto bancário

D_C: desconto comercial

h: taxa de despesas administrativas

N: valor nominal

n: número de períodos antes do vencimento

i: taxa de desconto

Tem-se:

$D_B = D_C + N.h$ $D_B = Nin + Nh$ $D_B = N(in + h)$

Valor descontado bancário:

$A_B = N - D_B = N - N(in + h)$

$A_B = N(1 - (in + h))$

Exemplo: Se uma prefeitura de uma pequena cidade necessitar de R$ 10.740,00 para saldar uma duplicata, que compromisso deverá assumir por 90 dias, se a taxa corrente for de 36% a.a. e o banco cobrar 1,5% de taxa de serviço?

Solução:

$A_B = N(1 - (in + h)) \longrightarrow 10.740 = N(1 - (0{,}36.\ \frac{90}{360} + 0{,}015))$

$10.740 = N(1 - (0{,}09 + 0{,}015)) \longrightarrow 10.740 = N(1 - 0{,}105)$

$10.740 = N.0{,}895 \longrightarrow N = R\$\ 12.000{,}00$

- **Taxa de juros efetiva**

  É a taxa de juros que, aplicada sobre o valor descontado, comercial ou bancário, gera no período considerado um montante igual ao valor nominal.

  Pode ser calculada, utilizando-se a definição: $N = A\ (1 + in)$ ou através da expressão:

$$i' = \frac{i}{1 - in}$$

A **taxa efetiva** será aquela que conduz, pelo desconto racional, ao mesmo valor calculado pelo desconto comercial ou bancário – taxa essa (i') obtida na fórmula acima quando igualamos $D_R = D_C$

2.2.1 Equivalência de capitais

Assim como nos casos de desconto, é frequente a necessidade de antecipar ou prorrogar títulos nas operações financeiras. A **substituição** pode ser de um título por outro ou de um título por vários. Podemos também ter vários títulos que queremos substituir por um único. Tais problemas dizem respeito, de modo geral, à **equivalência** de valores diferentes (equivalência de capitais) referidos a datas diferentes.

Outro conceito importante é o de **data focal**: é a data que se considera como base de comparação dos valores referidos a diferentes datas. A **data focal** também é chamada **data de avaliação** ou **data de referência**.

Síntese

Ao longo da unidade 2, você conheceu brevemente a história do sistema monetário, o conceito de juros e como é calculado o juros simples. Foram abordadas ainda as formas de desconto e o que é equivalência de capitais.

A próxima unidade seguirá abordando o conceito de juros, mas agora num estudo mais aprofundado sobre juros compostos e anuidades. Mãos à obra!

Matemática financeira 2: juros compostos e anuidades

Unidade

3

Competências

Ao final do estudo desta unidade, você terá uma visão mais aprofundada sobre Matemática Financeira, conhecendo instrumentos para análise de aplicação de dinheiro, bem como de pagamento de empréstimos. Conhecerá ainda os conceitos de juros compostos e rendas e anuidades, além de sistemas de amortização.

3 Matemática financeira 2: juros compostos e anuidades

3.1 Juros compostos

No regime de juros compostos, que tem grande importância financeira por retratar melhor a realidade, o juro gerado pela aplicação será incorporado à mesma, passando a participar da geração de juros no período seguinte.

Montante:

C_0 – capital inicial

$C_1 = C_0 (1 + i)$

$C_2 = C_1 (1 + i) = C_0 (1 + i)^2$

$C_n = C_0 (1 + i)^n$ ou $M = C (1 + i)^n$

Juro:

$J = M – C$

$J = C(1 + i)^n – C$

$J = C [(1 + i)^n - 1]$

Em termos de valor atual e valor nominal, temos:

$\mathbf{N = A (1 + i)^n}$

Exemplo: Um determinado banco anuncia que sua taxa de empréstimo para pessoa jurídica é de 2,5% a.m. Uma empresa retirou R$ 20.000,00 e, quando foi saldar sua dívida, esta importava em R$ 31.193,17. Quanto tempo a empresa levou para restituir o empréstimo (regime de capitalização composta)?

Solução:

$N = A (1 + i)^n \longrightarrow 31.193{,}17 = 20.000.(1 + 0{,}025)^n$

$\frac{31193{,}17}{20000} = 1{,}025^n \longrightarrow 1{,}5596585 = 1{,}025^n$

Obs.: Para cálculo do período, pode ser utilizada uma tabela financeira, que nem sempre vai apresentar os coeficientes desejados, ou então o uso de logaritmo em ambos os lados da expressão acima.

Assim: $\log(1{,}5596585) = \log(1{,}025)^{n}$

$\log(1{,}5596585) = n.\log(1{,}025)$ (propriedade de logaritmo)

$0{,}193029516 = n.0{,}010723865$

$n = 18$ meses

3.1.1 Taxas equivalentes

Considerando-se um mesmo capital aplicado por um mesmo intervalo de tempo a cada uma das taxas, ambas as taxas produzirão um mesmo montante se forem equivalentes.

$$(1 + i_a) = (1 + i_m)^{12} = (1 + i_s)^{2} = (1 + i_t)^{4} = (1 + i_d)^{360} = \ldots$$

Descontos compostos

O conceito de **desconto em juros compostos** é idêntico ao visto no regime de juros simples: corresponde ao abatimento por saldar-se um compromisso antes do seu vencimento.

A diferença é devida apenas ao regime de juros, sendo o raciocínio financeiro o mesmo.

Desconto racional

É obtido pela diferença entre o valor nominal e o valor atual do compromisso, que seja saldado **n** períodos antes do seu vencimento, com uma determinada taxa de desconto.

$$d_r = N - A_r = N - \frac{N}{(1+i)^n} = N\left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right)$$

d_r: desconto racional composto

n: número de períodos até o vencimento

i: taxa de juros utilizada na operação de desconto

N: nominal (ou montante)

A_r: valor atual racional

Exemplo: Uma nota promissória no valor de R$ 30.000,00 foi descontada 120 dias antes do seu vencimento pelo diretor de uma empresa de engenharia, à taxa de 4% a.m. Qual foi o desconto racional composto obtido ?

Solução:

$$d_r = 30000 \cdot (1 - \frac{1}{(1+0,04)^4}$$

Obs.: 120 dias = 4 meses

(taxa e período na mesma unidade)

$d_r = 30.000 \cdot 0,145195809 = 4.355,87$

Desconto comercial

É obtido pela diferença entre o valor nominal e o valor atual comercial do compromisso. Nesse tipo de desconto, o valor atual comercial é obtido do seguinte modo:

- calculam-se juros simples à taxa dada sobre o valor nominal, para o primeiro período dos n períodos que serão considerados no desconto;
- faz-se a diferença: N – Ji ; onde Ji = juro calculado na etapa anterior;
- $N - J_i$: novo valor nominal para o próximo período de desconto;
- repete-se o processo para n períodos do desconto.

Dessa forma, teremos: $A_c = N(1 - i)^n$

E o desconto comercial composto: $d_c = N - A_c = N - N(1 - i)^n$

$d^c = N.[1 - (1 - i)^n]$

Exemplo: Uma nota promissória no valor de R$ 30 000,00 foi descontada 120 dias antes do seu vencimento, à taxa de 4% a.m. Qual foi o desconto comercial composto obtido?

Solução:

$d_c = N.[1 - (1 - i)^n]$

$d_c = 30.000.[1 - (1 - 0,04)^4]$

$d_c = 30.000. 0,15065344 = 4.519,60$

Observação:

- Aqui, em desconto composto, também vale:

  $d_r < d_c$ e $A_r > A_c$
- Para calcular a taxa efetiva no desconto comercial, ou seja, a taxa que realmente está sendo cobrada na operação, podem-se utilizar os seguintes instrumentos:

  $N = A(1 + i)^n$ ou $i'' = \frac{i}{1-i}$

Na segunda fórmula, i: taxa de desconto, aquela que foi negociada e aceita pelas partes;

i”: taxa efetiva no desconto comercial composto.

- Do mesmo modo que foi feito em juros simples, é possível obter um desconto bancário composto. Basta que se acrescente a taxa de despesas do banco à taxa de desconto comercial composto adotada.

3.2 Rendas ou anuidades

A palavra renda contém em si vários significados. O sentido mais comum é o que a apresenta como sinônimo de rendimentos. Pode ainda ser entendida como uma contraprestação da alienação de um imóvel ou de um capital.

Pode ser basicamente de dois tipos:

- **Rendas Certas** ou **Determinísticas**: vamos abordar esse tipo de renda sob o regime de juros compostos, a menos que seja explicitado o contrário. Juro composto retrata melhor a realidade, a fórmula é de fácil manejo e os coeficientes são tabelados.

São aquelas cuja duração e pagamentos são predeterminados, não dependendo de condições externas. Os diversos parâmetros, como o valor dos termos, prazo de duração, taxa de juros, etc. são fixos e imutáveis.

- **Rendas Aleatórias ou Probabilísticas:** os valores e/ou as datas de pagamentos ou de recebimentos podem ser variáveis aleatórias. É o que ocorre, por exemplo, com os seguros de vida: os valores de pagamentos (mensalidades) são certos, sendo aleatórios o valor do seguro a receber e a data de recebimento.

3.2.1 Classificação das anuidades

- **Quanto ao prazo:**
  - **Temporárias**: quando a duração for limitada;
  - **Perpétuas**: quando a duração for ilimitada.
- **Quanto ao valor dos termos:**
  - **Constante**: se todos os termos são iguais;
  - **Variável**: se os termos não são iguais entre si.
- Quanto à forma de pagamento ou de recebimento:
  - **Imediatas**: quando os termos são exigíveis a partir do primeiro período;
  - **Diferidas**: se os termos forem exigíveis a partir de uma data que não seja o primeiro período.

  Obs.: Tanto as imediatas quanto as diferidas podem ainda ser:
  - **postecipadas:** exigíveis no fim dos períodos;
  - **antecipadas:** exigíveis no início dos períodos.

- **Quanto à periodicidade:**
  - **Periódicas**: se todos os períodos são iguais;
  - **Não-periódicas**: se os períodos não são iguais entre si.

3.2.2 Modelo básico de anuidade

Aquelas que são temporárias, constantes, periódicas, imediatas e postecipadas. E que a taxa de juros 'i' seja referida ao mesmo período dos termos.

Genericamente: Seja P um principal a ser pago em 'n' termos iguais a R; imediatos, postecipados e periódicos. (i – taxa de juros).

Então:

$$P = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^n} + \text{..............} + \frac{R}{(1+i)^n}$$

$$P = R.\ [\ \frac{1}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \text{..............} + \frac{1}{(1+i)^n}$$

(Soma dos termos de uma Progressão Geométrica – P.G.)

Temos:

$P = R\ .\ a_{n\rceil i}$

Onde: $a_{n\rceil i}$ – é a soma dos termos da P.G.;

lê-se "a, n cantoneira i" ou simplesmente "a, n, i".

Logo:

$$a_{n\rceil i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Ex.1: Uma grande empresa, com sede em São Paulo, propõe um pacote turístico com 7 noites em Paris, com todas as despesas da parte aérea e terrestre, nos seguintes valores: R$ 5.806,00 à vista ou uma entrada de R$ 581,00 e 10 prestações fixas com juros de 1,8% a.m. Qual o valor das prestações (preços por pessoa)?

Solução:

De acordo com a expressão $P = R\ .\ a_{n\rceil i}$, o valor de P passa a ser:

5.806 (à vista) – 581 (dado como entrada) = 5.225 (valor que será financiado)

$$5.225 = R.\ \frac{1-(1+0{,}018)^{-10}}{0{,}018} \rightarrow 5\ 225 = R\ .\ 9{,}077311198$$

R = R$ 575,71 (aproximadamente R$ 576,00 o valor da prestação a ser paga em 10 parcelas).

Ex.2: Uma viagem a Fortaleza com 5 noites em um grande hotel local e outras duas noites em Jericoacoara custa à vista R$ 667,00 ou 5 vezes de R$ 150,00 (sendo uma parcela dada como entrada). Qual a taxa de juros que está sendo cobrada nesse passeio?

Solução:

667 – 150 = 517 (valor que será financiado em 4 parcelas de R$ 150,00)

$$517 = 150.\ \frac{1-(1+i)^{-4}}{i}$$

$$3.4466... = \frac{517}{150} = \frac{1-(1+i)^{-4}}{i}$$

$3,4466... = a_{4\urcorner i}$ → Obs.: Esse valor pode ser obtido numa tabela financeira, numa calculadora financeira, computador ou ainda sofre um processo de interpolação – ficaremos com a última alternativa.

Interpolação: atribuímos dois valores arbitrários para a taxa 'i', de modo que se aproximem do valor 3,446666... para $a_{4\urcorner i}$, assim:

i1 = 2%...................... $a_{4\urcorner i1} = 3,807728698$

i = ? .... $a_{4\urcorner i} = 3,446666666$

i2 = 8% .... $a_{4\urcorner i2} = 3,31212684$

E então:

$$\frac{a_{4\urcorner i1} - a_{4\urcorner i}}{i_1 - i} = \frac{a_{4\urcorner i} - a_{4\urcorner i2}}{i_1 - i_2}$$

$$\frac{3,807728698 - 3,44666666}{0,02 - i} = \frac{3,44666666 - 3,31212684}{i - 0,08}$$

0,361062032 . (i – 0,08) = 0,134539826 . (0,02 – i)

0,495601858 . i = 0,031575759

i = 6,37% a.m. (caso o valor de $a_{n\urcorner i}$ não seja correspondente a 3,446666..., fazem-se novas interpolações ou tentativas para que o valor seja o mais próximo possível).

Desse modo, tem-se, com mais algumas tentativas, o valor em torno de 6,24 % a.m.

3.3 Amortização

Amortização é um processo de extinção de uma dívida através de pagamentos periódicos, que são realizados em função de um planejamento. Cada prestação corresponde à soma do reembolso do Capital (amortização) e/ou do pagamento dos juros do saldo devedor, sendo que: juros são sempre calculados sobre o saldo devedor.

Os principais sistemas de amortização são:

- Sistema de pagamento único: um único pagamento no final.
- Sistema de pagamentos variáveis: vários pagamentos diferenciados.
- Sistema americano: pagamento no final com juros calculados período a período.
- Sistema de amortização constante (SAC): a amortização da dívida é constante e igual em cada período.
- Sistema price ou francês (PRICE): os pagamentos (prestações) são iguais.

Em todos os sistemas de amortização, cada pagamento é a soma do valor amortizado com os juros do saldo devedor, isto é:

Pagamento = Amortização + Juros

Em todas as nossas análises, utilizaremos um financiamento hipotético de R$300.000,00 que será pago ao final de 5 meses à taxa mensal de 4%.

Na sequência, será essencial o uso de tabelas consolidadas com os dados de cada problema e com informações essenciais sobre o sistema de amortização. Em todas as análises, utilizaremos a mesma tabela básica que está indicada abaixo (Tabela 1), com os elementos indicados:

Sistema de amortização			
n	Juros	Amortização do saldo devedor	Pagamento
0			
1			
2			
3			
4			
5			
Totais		300.000,00	

Tabela 1: Sistema de amortização

- **Sistema de pagamento único**: o devedor paga o Montante=Capital + Juros compostos da dívida em um único pagamento ao final de n=5 períodos. O montante

pode ser calculado pela fórmula:

M = C (1+i)n

Uso comum: Letras de câmbio, Títulos descontados em bancos, Certificados a prazo fixo com renda final (Tabela 2).

Sistema de amortização			
n	Juros	Amortização do saldo devedor	Pagamento
0	0		
1	12.000,00		
2	12.480,00		
3	12.979,20		
4	13.498,37		
5	14.038,30	300.000,00	364.995,87
Totais		300.000,00	364.998,87

Tabela 2: Sistema de pagamento único

- **Sistemas de pagamentos variáveis**: o devedor paga periodicamente valores variáveis de acordo com a sua condição e de acordo com a combinação realizada inicialmente, sendo que os juros do Saldo devedor são pagos sempre ao final de cada período.

Uso comum: Cartões de crédito.

Dado: O devedor pagará a dívida da seguinte forma (Tabela 3):

- No final do 1°.mês: R$ 30.000,00 + juros
- No final do 2°.mês: R$ 45.000,00 + juros
- No final do 3°.mês: R$ 60.000,00 + juros
- No final do 4°.mês: R$ 75.000,00 + juros
- No final do 5°.mês: R$ 90.000,00 + juros

Sistema de amortização			
n	Juros	Amortização do saldo devedor	Pagamento
0	0	0	0
1	12.000,00	30.000,00	42.000,00
2	10.800,00	45.000,00	55.800,00
3	9.000,00	60.000,00	69.000,00
4	6.600,00	75.000,00	81.600,00
5	3.600,00	90.000,00	93.600,00
Totais	42.000,00	300.000,00	342.000,00

Tabela 3: Sistema de pagamentos variáveis

- Sistema americano: o devedor paga o principal em um único pagamento no final e, no final de cada período, realiza o pagamento dos juros do Saldo devedor do período. No final dos 5 períodos, o devedor paga também os juros do 5º período (Tabela 4).

Sistema de amortização			
n	Juros	Amortização do saldo devedor	Pagamento
0	0	0	0
1	12.000,00		12.000,00
2	12.000,00		12.000,00
3	12.000,00		12.000,00
4	12.000,00		12.000,00
5	12.000,00		312.000,00
Totais	60.000,00	300.000,00	360.000,00

Tabela 4: Sistema americano

- **Sistema de amortização constante (SAC):** o devedor paga o Principal em n=5 pagamentos sendo que as amortizações são sempre constantes e iguais (Tabela 5). Uso comum: Sistema Financeiro da Habitação

Sistema de amortização constante			
n	Juros	Amortização do saldo devedor	Pagamento
0	0	0	0
1	12.000,00	60.000,00	72.000,00
2	9.600,00	60.000,00	69.600,00
3	7.200,00	60.000,00	67.200,00
4	4.800,00	60.000,00	64.800,00
5	2.400,00	60.000,00	62.400,00
Totais	36.000,00	300.000,00	336.000,00

Tabela 5: Sistema de amortização constante

- **Sistema price (Sistema francês):** todas as prestações (pagamentos) são iguais (Tabela 6). Uso comum: Financiamentos em geral de bens de consumo.

Cálculo: O cálculo da prestação R é a divisão do valor financiado P = 300.000,00 dado pela fórmula P = R . anùi, onde i é a taxa ao período e n é o número de períodos. Para essa tabela, o cálculo fornece:

P = 67.388,13

Sistema francês			
n	Juros	Amortização do saldo devedor	Pagamento
0	0	0	0
1	12.000,00	55.388,13	67.388,13
2	9.784,47	57.603,66	67.388,13
3	7.480,32	59.907,81	67.388,13
4	5.084,01	62.304,12	67.388,13
5	2.591,85	64.796,28	67.388,13
Totais	36.940,65	300.000,00	

Tabela 6: Sistema francês

Síntese

Nesta unidade, você viu conceitos e fórmulas bastante importantes para uso diário e ao longo deste curso. Não se esqueça de que para fazermos as equivalências das taxas em **juros compostos** precisaremos das relações: $(1 + i_a) = (1 + i_s)^2 = (1 + i_m)^{12} = ...$

Para **anuidades**, vimos a expressão $P = R.\ a_{n|i}$, onde $a_{n|i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Essa expressão é usada em muitas situações do nosso dia-a-dia, principalmente nas compras a prazo, quando precisamos determinar o valor da prestação (R), o valor à vista de uma mercadoria (P) ou quando queremos descobrir a taxa de juros (i) de uma operação financeira.

Agora, vamos aprender conceitos inicias de estatística e como aplicá-la no cotidiano. Bons estudos!

Introdução à estatística

Unidade

4

Competências

Nesta Unidade, serão repassados conceitos iniciais de estatística e sua aplicabilidade no cotidiano. Você conhecerá orientações de como organizar, descrever e classificar os dados estatísticos, além de usar as medidas de tendência central para representação de um conjunto de dados.

4 Introdução à estatística

4.1 Histórico da estatística

A Matemática é considerada "a ciência que une à clareza do raciocínio a síntese da linguagem". Originou-se do convívio social, das trocas, da contagem, com caráter prático, utilitário, empírico. A Estatística, ramo da Matemática Aplicada, teve origem semelhante.

Desde a Antiguidade, vários povos já registravam o número de habitantes, de nascimentos, de óbitos; faziam estimativas das riquezas individual e social, distribuíam equitativamente terras ao povo, cobravam impostos e realizavam inquéritos quantitativos por processos que, hoje, chamaríamos de **Estatística**.

Na Idade Média, colhiam-se informações, geralmente com finalidades tributárias ou bélicas. A partir do século XVI, começaram a surgir as primeiras análises sistemáticas de fatos sociais, como batizados, casamentos, funerais, originando as primeiras tábuas e tabelas e os primeiros números relativos.

No século XVIII, o estudo de tais fatos foi adquirindo, aos poucos, feição verdadeiramente científica.

Godofredo Achenwall batizou a nova ciência (ou método) com o nome de Estatística, determinando o seu objetivo e suas relações com as ciências. (CRESPO, p. 11, 1996).

Godofredo Achenwall: economista alemão, nascido na Prússia em 1719 e morreu em 1772. É considerado o inventor da Estatística. É o autor de vários livros sobre a história dos países europeus, sobre o direito político e da política econômica. Os principais são:
"Elements of the major statistical European States";
"Brief History of the major current of Europe"; "Top of political economy".

4.2 O que é estatística

Atualmente, o público leigo (leitor de jornais e revistas) posiciona-se em dois extremos divergentes e igualmente errôneos quanto à validade das conclusões estatísticas: ou crê em sua infalibilidade ou afirma que elas nada provam. Os que assim pensam ignoram os objetivos, o campo e o rigor do método estatístico: ignoram a estatística, quer teórica, quer prática, ou a conhecem muito superficialmente.

Na era da automação, do computador, da Internet, da informação, etc., os estudos estatísticos têm avançado rapidamente e, com seus processos e técnicas, têm contribuído para a organização dos negócios e recursos do mundo moderno.

A Estatística tem basicamente duas finalidades: descrever os fenômenos e suas características e fazer predições sobre as ocorrências futuras de certo fenômeno em condições semelhantes àquelas em que ele ocorreu no passado. Tais avaliações, feitas com base num conjunto de dados representativos do fenômeno em estudo, estarão sempre sujeitas a certo nível de incerteza, variável conforme o grau de regularidade do fenômeno. No processamento dos dados, seja para descrever o fenômeno em estudo ou predizer propriedades, comportamento futuro, podem ser necessários conhecimentos, informações, técnicas ou teorias desenvolvidas por outras ciências, razão pela qual o estatístico muitas vezes tem de ser orientado por especialistas na área em estudo, tanto na coleta quanto na análise dos dados e interpretação dos resultados.

Podemos, portanto, definir a Estatística como ramo da Matemática aplicada que fornece métodos para a coleta, organização, descrição, análise e interpretação de dados e para a utilização dos mesmos na tomada de decisões; ou ainda como conjunto de procedimentos obtidos para reunir, organizar, interpretar um conjunto de dados numéricos para tirar conclusões ou fazer previsões a respeito de determinado fato. As representações podem ser feitas de várias formas, como tabelas, gráficos, entre outros.

A aplicação prática da estatística nas mais diversas áreas de conhecimento humano comprova sua utilidade, destacadamente nos ramos onde a experimentação é de fundamental importância como, por exemplo, na Medicina, na Engenharia, no controle de qualidade, entre tantas outras. Entre as áreas de trabalho, basta citar os mapas e relatórios de venda, produção, crescimento e desempenho, de larga utilização na indústria e no comércio, os quais retratam a posição dos dados em determinados instantes e as respectivas projeções para o futuro.

Outro ponto bastante importante em termos de aplicação estatística refere-se ao modelo matemático aplicável ao fenômeno em estudo. Em termos gerais vale dizer que o modelo ideal é aquele que considera o maior número possível de variáveis significativas do fenômeno. O grande inconveniente desse modelo é que ele nem sempre é operacionalmente viável. Mas essa é uma restrição "contornável" pela habilidade matemática do estatístico ou da equipe encarregada do estudo e pelo nível de sofisticação do equipamento disponível para o processamento das informações.

O que pode ser impossível de ser executado por um solitário estudante em sala de aula, utilizando uma calculadora manual, pode ser elementar para um centro de pesquisa governamental, ligado a uma grande universidade e equipado com computadores de última geração. Em síntese, a dificuldade apresentada pelo modelo matemático é simplesmente relativa. Devemos primeiro buscar a qualidade, as dificuldades devem ser enfrentadas com criatividade e utilizando ao máximo os recursos disponíveis.

O planejamento de qualquer trabalho deve sempre visar a algum problema ou objetivo previamente definido. Uma vez estabelecido o alvo, deve-se tentar imaginar quais são os procedimentos e quais as informações necessárias para se atingir a meta visada, ou a solução do problema proposto. Quanto às informações, deve-se identificar onde, como e quando poderão ser obtidas. O grupo em estudo também deve ser analisado, observando-se seus limites, as características individuais dos seus elementos e as condições em que serão efetuados os levantamentos dos dados. Devem-se prever o universo da pesquisa, o detalhamento do tempo de sua execução (passo a passo) e a precisão necessária dos dados coletados.

As empresas de qualquer tipo, privadas, estatais, ou governamentais, são as vigas-mestras da economia dos povos; seus diretores exigem de seus administradores a importante tarefa de tomar decisões e, o conhecimento e o uso da estatística facilitarão seu tríplice trabalho de organizar, dirigir e controlar a empresa.

Através de sondagem, por meio de coleta de dados e de recenseamento de opiniões, podemos conhecer a realidade geográfica e social, os recursos naturais, humanos e financeiros disponíveis, as expectativas da comunidade sobre a empresa e estabelecer suas metas, seus objetivos com maior possibilidade de serem alcançados a curto, médio ou longo prazo.

A Estatística ajudará na seleção e organização da estratégia a ser adotada no empreendimento, ou ainda na escolha das técnicas de verificação da quantidade e da qualidade do produto e mesmo dos possíveis lucros e ou perdas.

A Estatística pode ser dividida em três ramos: descritiva, indutiva ou interferência estatística e teoria das probabilidades:

- **Estatística descritiva:** preocupa-se com a coleta, organização e descrição dos dados. Utiliza-se de números para descrever fatos e simplifica informações. Tem por finalidade tornar as coisas fáceis de entender, de relatar e de discutir. Os dados coletados são resumidos e organizados em tabelas ou mostrados em gráficos. Evidentemente, ao resumir os dados, através do uso da estatística descritiva, muitas informações irão necessariamente se perder. Exemplos: taxa de inflação, taxa de acidentes de trânsito, custo de vida, índice de aprovação, taxa de desemprego, entre outros.
- **Estatística indutiva ou inferência estatística:** é aquela que se preocupa com a interpretação e análise de dados amostrais para tirar conclusões (tomar decisões). A partir de ocorrências observadas nas repetições passadas de um determinado fenômeno, pode-se concluir ou predizer a evolução do mesmo ao longo do tempo.
- **Teoria das probabilidades:** é útil para analisar situações que ocorrem ao acaso. Exemplos: acertar na Mega-Sena, jogo de dados e cartas, a decisão de um fabricante de empreender uma grande campanha visando aumentar sua participação no mercado, a decisão de parar de imunizar pessoas com menos de vinte anos contra determinada doença, entre outros.

Neste curso, você vai estudar a estatística descritiva, e para tanto serão necessários alguns conceitos que são de suma importância para o desenvolvimento da disciplina. Leia com atenção, e consulte seu tutor sempre que necessitar de auxílio.

4.2.1 Estatística descritiva

Como dissemos anteriormente, para o estudo da estatística descritiva é de suma importância a compreensão de alguns conceitos. São eles:

- **População ou universo:** é o conjunto composto de todos os elementos (ou observações) (pessoas ou objetos) do grupo de estudo, com pelo menos uma característica comum.

A população pode ser:

  - **Finita:** é a que contém um número finito de elementos.
  - **Infinita:** é a que contém um número infinito de elementos. Pode ser enumerável ou não-enumerável.

- **Amostra:** é um subconjunto da população (necessariamente finito) escolhido por meio de critérios estatísticos. Através da amostra se fazem juízo ou inferência (conclusões).
- **Censo:** processo de levantamento que estuda a população inteira.
- **Amostragem:** processo de estudo que usa uma amostra da população.
- **Variável:** são os aspectos que estão sendo considerados na pesquisa. Em estatística, a característica de interesse poderá ser qualitativa ou quantitativa. Temos, portanto, variáveis qualitativas ou variáveis quantitativas.
- **Variável qualitativa:** quando resultar de uma classificação por tipos ou atributos.
- **Variável qualitativa nominal:** é aquela onde os elementos são alocados em categorias que não possuem ordem entre si. Ex: sexo (masculino, feminino), estado de origem (PR, SC, SP, etc.).
- **Variável qualitativa ordinal:** é aquela onde os elementos são alocados em categorias (postos) que são ordenadas entre si. Ex: nível de instrução (Ensino Fundamental Completo, Ensino Médio Completo, Ensino Superior Completo, Pós-Graduação) e classe social (alta, média, baixa).

Exemplos:

1) População (moradores de Florianópolis); variável: cor dos olhos (azuis, verdes, castanhos, pretos,...) [qualitativa nominal].

2) População: Peças produzidas por uma máquina; variável: qualidade (perfeita ou defeituosa) [qualitativa nominal].

3) População: Candidatos ao exame de classificação da Federal; variável: Sexo (Masculino, ou Feminino) [qualitativa nominal].

4) População: Professores da Rede Municipal; variável: nível de instrução (Graduação, Mestrado, Doutorado) [qualitativa ordinal].

- **Variáveis quantitativas:** quando os resultados das observações forem expressos através de valores numéricos. Podem ser discretas ou contínuas.
- **Variável quantitativa discreta:** variável enumerável em um intervalo assume um número finito de valores. Normalmente a variável discreta resulta de contagem, razão pela qual seus valores são expressos através de números inteiros não-negativos.
- **Variável quantitativa contínua:** é aquela que, em um intervalo qualquer, pode variar infinitamente. São grandezas mensuráveis, como, por exemplo, peso, altura, etc.

Exemplos:

1) População: casais residentes em Florianópolis; variável: número de filhos [quantitativa discreta].

2) População: estudantes da Escola Básica; variável: altura dos alunos [quantitativa contínua].

3) População: peças produzidas por uma máquina; variável: diâmetro externo [quantitativa contínua].

- **Atributo:** é uma qualidade da variável.
- **Aleatório:** ocorre ao acaso. O mesmo que randômico, impossível de prever, estocástico.
- **Determinístico:** o oposto de aleatório.
- **Dados brutos:** são os dados obtidos na amostragem (ou censo), e que ainda não foram numericamente organizados.
- **Rol:** é toda sequência de dados numéricos brutos em ordem crescente ou decrescente de grandeza, isto é, cada termo, a partir do segundo, é maior ou igual (menor ou igual) ao seu antecessor.

4.2.2 Técnicas de amostragem

Nos estudos estatísticos, na maioria das vezes, por impossibilidade econômica ou temporal, limitamos as observações referentes a uma determinada pesquisa a apenas uma parte da população, denominada amostra. Para que as conclusões sejam confiáveis é necessário que a amostra seja representativa da população, isto é, a amostra deve possuir as mesmas características básicas da população, portanto você deve ter muito cuidado na escolha da amostra para minimizar os erros que poderiam induzir a conclusões erradas.

Exemplo: Para conhecer a estatura média da mulher brasileira, adotam-se os critérios a seguir:

- escolhem-se aleatoriamente mulheres adultas (logicamente as crianças ou adolescentes ainda não estão com a altura definida e ocasionaria um erro);
- escolhem-se aleatoriamente mulheres em todas as regiões do Brasil (sabidamente no nordeste as pessoas têm, em geral, menor estatura que no resto do país);
- as quantidades de mulheres devem ser proporcionais às quantidades de mulheres das várias regiões;
- em cada região, escolhem-se mulheres de todas as classes sociais;
- as quantidades de mulheres em cada região deve ser proporcional às quantidades de mulheres nas várias classes sociais.

Tais critérios procuram tornar a tendência da amostra a mais próxima possível da tendência da população. É muito complexo o problema de como selecionar a amostra de uma população, de modo a se poder tirar conclusões válidas sobre ela.

A seguir vamos apresentar a você as três principais técnicas de amostragem: casual ou aleatória simples, proporcional estratificada e sistemática, observadas em CRESPO, (1996). Veja:

- **Amostragem casual ou aleatória simples:** esse tipo de amostragem é equivalente a um sorteio aleatório. Nesse tipo de amostragem é necessário que os elementos da população sejam numerados. Quando o número de elementos da amostra é muito grande, esse tipo de sorteio torna-se muito trabalhoso. A fim de facilitá-lo, são elaboradas tabelas que encontramos em diversas publicações na área de estatística.

- **Amostragem proporcional estratificada:** muitas vezes a população se divide em subpopulações – estratos. Como é provável que a variável em estudo apresente, de estrato em estrato, um comportamento heterogêneo e, dentro de cada estrato, um comportamento homogêneo, convém que o sorteio dos elementos da amostra leve em consideração tais estratos. Quando empregamos a amostragem proporcional estratificada, que, além de considerar a existência de estratos, obtém os elementos da amostra proporcional ao número de elementos dos mesmos.

Exemplo: o professor de matemática deseja fazer uma pesquisa com os 66 alunos das três turmas em que leciona Estatística, onde 57 são meninos e 9 são meninas, temos portanto dois estratos (sexo masculino e feminino). Para uma amostra de 10% da população temos (Tabela 7):

Amostra proporcional estratificada CST Gestão – Brasília – 2000		
Sexo	População	10%
F	9	0,9
M	57	5,7
Total	66	6,6

Tabela 7: exemplo de amostra proporcional estratificada
Fonte: Diário de Classe

- **Amostragem sistemática:** quando os elementos da amostra já se acham ordenados, não há necessidade de construir o sistema de referência. Exemplos: linha de produção, prédio de uma rua, prontuários de um hospital, entre outros. Nesses casos, a seleção dos elementos que constituirão a amostra pode ser feita por um sistema feito pelo pesquisador. Assim, no caso de uma linha de produção, podemos, a cada dez itens produzidos, retirar um para pertencer a uma amostra da produção diária. Nesse caso, estaríamos fixando o tamanho da amostra em 10% da população.

Exemplo: suponhamos que, contendo 450 motores elétricos ordenados no estoque de uma fábrica, dos quais se deseja obter uma amostra formada de 25 motores. Podemos, nesse caso, usar o seguinte procedimento: como 45025 = 18, escolhemos por sorteio casual um número de 1 a 18 (inclusive), o qual indicaria o primeiro elemento sorteado para a amostra; os demais seriam periodicamente considerados de 18 em 18. Assim, se o número sorteado fosse o 4, tomaríamos o 4º motor, o 22º, 40º etc., até completar o estoque.

4.2.3 Dados absolutos e dados relativos

- **Dados absolutos:** são os dados estatísticos resultantes da coleta direta da fonte, sem outra manipulação senão a contagem ou medida.
- **Dados relativos:** são os resultados de comparações por quociente (razões) que se estabelecem entre dados absolutos e têm por finalidade realçar ou facilitar as comparações entre quantidades. Traduzem-se os dados relativos, em geral, por meio de percentagens, índices, coeficientes e taxas. Veja a definição de cada um desses termos:
  - **Percentagens:** o emprego das percentagens é de grande valia quando o intuito é destacar a participação da parte no todo.

Exemplo:

Matrículas nas escolas da cidade A Março/2000	
Categorias	Número de alunos
1° Grau	19.286
2° Grau	1.681
3° Grau	234
Total	21.201

Fonte: Dados hipotéticos

  - **Índices:** são razões entre duas grandezas tais que uma não inclui a outra.

Exemplos:

$$\text{Densidade demográfica} = \frac{\text{população}}{\text{superfície}}$$

$$\text{Renda per capita} = \frac{\text{renda}}{\text{população}}$$

$$\text{Produção per capita} = \frac{\text{valor total da produção}}{\text{população}}$$

- **Coeficientes:** são razões entre o número de ocorrência e o número total (número de ocorrências e número de não-ocorrências).

Exemplos:

$$\text{Coeficiente de natalidade} = \frac{\text{número de nascimentos}}{\text{população total}}$$

$$\text{Coeficiente de mortalidade} = \frac{\text{número de óbitos}}{\text{população total}}$$

$$\text{Coeficiente de evasão escolar} = \frac{\text{número de alunos evadidos}}{\text{número inicial de matrículas}}$$

- Taxas: são os coeficientes multiplicados por uma potência de 10 para tornar o resultado mais inteligível.

Exemplos:

Taxa de mortalidade = coeficiente de mortalidade x 1.000

Taxa de natalidade = coeficiente de natalidade x 1.000

Taxa de evasão escolar = coeficiente de evasão escolar x 100

4.3 Método estatístico

Muitos dos conhecimentos que temos foram obtidos na Antiguidade por acaso e, outros, por necessidades práticas, sem aplicação de um método. Atualmente, quase todo acréscimo de conhecimento resulta da observação e do estudo. Mesmo que muito desse conhecimento possa ter sido observado inicialmente por acaso, a verdade é que desenvolvemos processos científicos para seu estudo e para adquirirmos tal conhecimento.

Podemos então dizer que método é o conjunto de meios dispostos convenientemente para se chegar a um fim que se deseja. O método pode ser experimental ou estatístico:

- **Método experimental:** consiste em manter constantes todas as causas (fatores), menos uma, e variar esta causa de modo que o pesquisador possa descobrir seus efeitos, caso existam. É, por exemplo, o método preferido no estudo da física e da química.
- **Método estatístico:** diante da impossibilidade de manter as cau-

sas constantes, admite todas essas causas presentes variando-as, registrando essas variações e procurando determinar, no resultado final, que influências cabem a cada uma delas. Exemplos: preço das mercadorias, nas Ciências Sociais, entre outras.

4.3.1 Fases do método estatístico

Para o desenvolvimento de um trabalho estatístico, é necessário seguir normas ou diretrizes. As fases a serem seguidas são: definição do problema; planejamento; coleta de dados; crítica dos dados; apuração dos dados; e análise e divulgação dos dados. Veja, na sequência, detalhes sobre cada uma das fases:

- **Definição do problema:** é o tiro de largada para a obtenção de sua solução. Sem problema não há solução possível. Dado o problema, verifique se ele já foi resolvido ou ao menos estudado por alguém. Se for, certifique-se de que as soluções obtidas estão corretas e atendem as suas necessidades. Se não, procure a solução;
- **Planejamento:** no planejamento devem-se determinar os procedimentos necessários para resolver o problema e, principalmente decidir como fazer o levantamento das informações sobre o assunto objeto de estudo. Que dados deverão ser obtidos? Como obtê-los? É nessa fase que será escolhido o tipo de levantamento a ser utilizado, se censitário, isto é, abrangendo todo o universo ou por amostragem, se a contagem for parcial. Ainda, é importante nessa fase o cronograma das atividades, através do qual são fixados os prazos para as várias fases, os custos envolvidos, o material necessário, o delineamento da amostra, a forma como serão colhidos os dados;
- **Coleta de dados:** é essencialmente operacional, refere-se à obtenção, reunião e registro sistemático de dados. A coleta de dados é classificada de acordo com o tempo em contínua, periódica e ocasional:
    - **contínua (registro):** quando feita continuamente, tal como o número de vendas à vista de uma empresa comercial;
    - **periódica:** é feita em intervalos constantes de tempo, como nos censos (de 10 em 10 anos) e as avaliações mensais dos estudantes;

- **ocasional:** quando feita de modo que não se considera o tempo nem o período. É feita quando requer o estudo de um fenômeno, como no caso de epidemias que assolam ou dizimam rebanhos inteiros, etc.

Três são as formas de coleta de dados mais usadas: observação direta, entrevistas e autoentrevista:

- **observação direta:** consiste em fazer uma observação do fato através de uma pessoa ou de uma câmera de TV. Exemplos: nascimentos, censo demográfico, etc.;
- **entrevista (questionário):** é o método mais eficiente, porém muito caro, pois a entrevista pessoal é feita com cada um dos componentes, seja da amostra ou da população;
- **autoentrevista (questionário)**: permite que se faça pesquisa com grande número de elementos, a um custo relativamente baixo, principalmente quando sua distribuição é feita pelo correio. Estudos comprovam que em média 20% dos questionários são devolvidos.

- **Crítica dos dados:** os dados brutos, isto é, antes de organizá-los, devem ser submetidos a uma crítica com o objetivo de eliminar valores impróprios e erros grosseiros que possam interferir nos resultados obtidos;
- **Apuração dos dados:** é a etapa do processamento dos dados e disposição dos resultados mediante critérios de classificação. A apuração pode ser manual ou mecânica, dependendo da urgência e dos recursos de que o pesquisador dispõe;
- **Análise e apresentação dos dados:** após a apuração dos valores representativos, eles podem ser expostos em tabelas, listas, gráficos, tornando mais fácil o exame daquilo que está sendo estudado, que é a parte mais importante do trabalho estatístico, já que o objetivo último é tirar conclusões sobre o todo (população) a partir de informações fornecidas por parte representativa do todo (amostra), através dos métodos da Estatística Indutiva.

4.3.2 Algumas considerações sobre a elaboração de um questionário

Todo cuidado é necessário na elaboração das perguntas de um questionário, pois se for mal formulado levará a dados não confiáveis. Observe sempre:

- explicar o objetivo do questionário, como ele pode ser devolvido e quais as questões cujas respostas são indispensáveis;
- a redação deve ser clara, leve e dirigida ao leitor, como se o entrevistador estivesse conversando com ele;
- as questões devem ser curtas e objetivas, nunca exigindo duas ou mais informações numa mesma pergunta;
- devem-se preferir questões cujas respostas sejam quantificáveis, seguindo certa escala ou então as do tipo "sim" ou "não";
  - devem-se evitar questões:
  - declarativas ou opinativas, a menos que isso seja o objeto do estudo;
  - que exijam cálculos ou raciocínios complicados ou ainda a consulta a longas notas explicativas;
  - polêmicas ou que possam ferir suscetibilidades;
  - para facilitar as respostas, as questões devem estar dispostas em ordem cronológica e segundo um grau crescente de dificuldade;
  - prever e dispor as respostas numa forma tal que facilite a sua tabulação para processamento posterior;
  - uma vez confeccionado o questionário e antes de ser utilizado na pesquisa, devemos fazer o que se denomina pré-teste ou pesquisa-piloto, que corresponde à experimentação do questionário, a fim de verificar se as perguntas estão formuladas de forma clara e se não há nenhum problema no seu entendimento.

4.4 Tabelas

A análise estatística se inicia quando um conjunto de dados torna-se disponível de acordo com a definição do problema da pesquisa. Um conjunto de dados, seja de uma população ou de uma amostra, contém muitas vezes um número muito grande de valores. Além disso, esses valores, na sua

Tabela: é um quadro que resume um conjunto de observações.

Série Estatística: define-se como toda e qualquer coleção de dados estatísticos referidos a uma mesma ordem de classificação quantitativa. No sentido mais amplo, série é uma sucessão de números referidos a qualquer variável. Se os números expressarem dados estatísticos, a série será chamada de série estatística.

forma bruta, encontram-se muito desorganizados. Eles variam de um valor para outro sem qualquer ordem ou padrão.

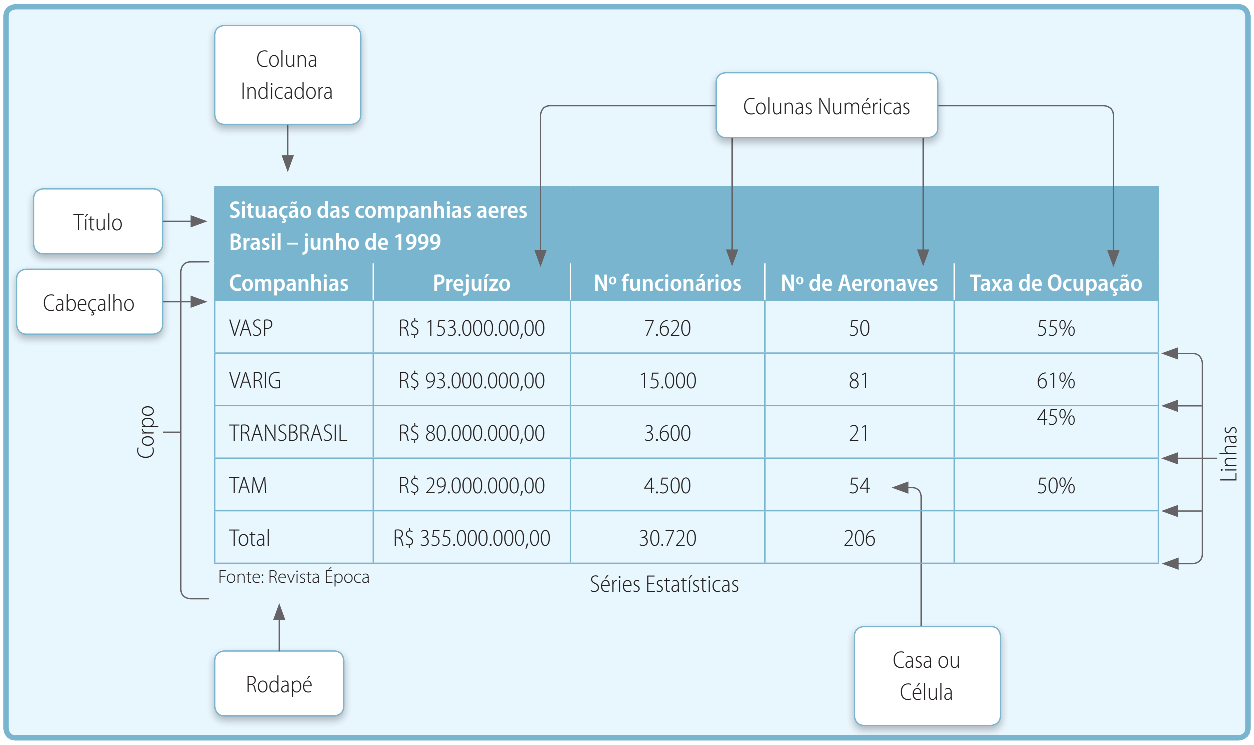
Os dados precisam ser organizados e apresentados em uma forma sistemática e sequencial por meio de uma tabela ou gráfico. Quando fazemos isso, as propriedades dos dados tornam-se mais aparentes e tornamo-nos capazes de determinar os métodos estatísticos mais apropriados para serem aplicados no seu estudo. A organização dos dados denomina-se séries estatísticas.

Os dados de uma pesquisa, organizados em tabelas ou gráficos, fornecem informações coerentes e seguras para o diagnóstico de um problema ou para tomada de decisões.

A elaboração de tabelas obedece à resolução nº 886 de 26 de outubro de 1966, do Conselho Nacional de Estatística (alguns autores citam a resolução como sendo do IBGE). Uma tabela compõe-se, basicamente, dos seguintes itens:

- **título:** acha-se localizado no topo da tabela e deve conter informações suficientes para que possam ser respondidas as seguintes questões: o quê? (referente ao fato); onde? (relativo ao lugar); quando? (relativo à época);
- **cabeçalho:** é a parte superior da tabela, que especifica o conteúdo das colunas;
- **corpo:** é o conjunto de linhas e colunas que contêm informações sobre a variável em estudo;
- **coluna indicadora:** é a parte da tabela que especifica o conteúdo das linhas;
- **linhas:** são retas imaginárias que facilitam a leitura, no sentido horizontal, de dados que se inscrevem nos seus cruzamentos com as colunas;
- **casa ou célula:** é o espaço destinado a um só número;
- **rodapé:** fica reservado para a identificação da fonte de dados, bem como para as informações pertinentes em geral.

De acordo com a resolução a que nos referimos, devemos colocar um traço horizontal (-), quando o valor for zero; três pontos (...), quando não dispomos dos dados e um ponto de interrogação (?), quando temos dúvidas quanto à exatidão de determinado valor. A Figura 1 apresenta um exemplo de tabela com indicações dos itens:



Situação das companhias aeres
Brasil – junho de 1999

Companhias	Prejuízo	Nº funcionários	Nº de Aeronaves	Taxa de Ocupação
VASP	R$ 153.000.00,00	7.620	50	55%
VARIG	R$ 93.000.000,00	15.000	81	61%
TRANSBRASIL	R$ 80.000.000,00	3.600	21	45%
TAM	R$ 29.000.000,00	4.500	54	50%
Total	R$ 355.000.000,00	30.720	206	

Fonte: Revista Época

Figura 1: Exemplo de tabela com indicação de itens.
Fonte: Adaptado da Revista Época pelo autor

Denominamos série estatística toda tabela que apresenta a distribuição de um conjunto de dados estatísticos em função da época, do local, ou da espécie. As séries estatísticas podem ser classificadas em:

- **Séries históricas, temporais, cronológicas ou marchas:** são as séries cujos dados estão dispostos em correspondência com o tempo (variam com o tempo). Exemplos:

Comércio eletrônico no Brasil
1998-2003

Ano	Em bilhões de U$
1998	0,09
1999	0,25
2000	0,4
2001	0,8
2002	1,6
2003	2,7

Fonte: Júpiter Communications

O Brasil tem uma população absoluta muito alta

Ano	População
1872	9.903.478
1900	17.438.434
1940	41.236.315
1960	70.070.457
1980	119.002.706
2000	169.544.443

Fonte: IBGE

- **Séries geográficas, espaciais, territoriais ou de localização:** são as séries cujos dados estão dispostos em correspondência com a região geográfica de sua proveniência (variam com o local). Exemplos:

Exportações do fumo
1994

País	Em bilhões de U$
Brasil	275
EUA	195
Zimbábue	186
Grécia	112
Itália	80
Outros	938

Fonte: Ambifumo

Salário anual de presidentes de empresas

País	Salário em dólares
EUA	1.300.000
Argentina	909.000
Inglaterra	668.000
Alemanha	534.000
Brasil	493.000
Japão	487.000

Fonte: Towers Perrin

- **Séries específicas ou categóricas:** são as séries cujos dados estão dispostos em correspondência com as espécies ou categorias, isto é, variam com o tipo de dado. Exemplos:

Conteúdo de alcatrão no cigarro brasileiro
Maio de 1996

Espécie	Em bilhões de U$
Derby	17,1
Hollywood	13,5
Dallas	16,1
Marlboro	15,0
Free	10,9

Fonte: Revista Veja

Em quem o brasileiro confia?
Março de 1994

Profissão	%
Bombeiros	56
Professores	51
Médicos	42
Advogados	24
Políticos	1

Fonte: Vox Populi

- **Séries conjugadas, compostas ou mistas:** são as séries que se obtém combinando-se as séries anteriores e são apresentadas como tabelas de duplas entradas. Exemplo:

Pessoas com curso de nível superior concluído, por cor ou raça, segundo as áreas gerais de formação – Brasil -2000							
Áreas gerais de formação	Pessoas com curso de nível superior concluído						
	Total	Cor ou raça (%) (1)					
		Branca	Preta	Amarela	Parda	Indígena
Total (2)	5.890.631	82,8	2,1	2,3	12,2	0,1
Educação	659.886	79,7	2,7	1,0	16,0	0,1
Artes, Humanidades e Letras	659.999	79,6	3,0	1,5	15,4	0,2
Ciências Sociais, Administração e Direito	2.314.816	84,4	1,9	2,1	11,1	0,1
Ciências, Matemática e Computação	546.265	80,9	2,2	2,9	13,5	0,1
Engenharia, Produção e Construção	567.093	85,7	1,3	4,0	8,5	0,1
Agricultura e Veterinária	126.228	53,4	1,1	3,6	11,6	0,0
Saúde e Bem-estar social	889.409	83,2	2,0	2,8	11,4	0,1
Serviços	54.726	82,1	1,9	1,3	14,0	0,3

(1)Exclusive as pessoas sem declarações de cor
(2)Inclusive as áreas de formação mal especificadas

Tabela 8: Pessoas com curso de nível superior concluído, por cor ou raça, segundo as áreas gerais de formação – Brasil -2000
Fonte: IBGE, Censo Demográfico 2000

- **Série distribuição de frequências:** por se tratar de um conceito estatístico de suma importância, merecerá um tratamento especial. Nesse momento, diremos que é a série cujos dados podem ser agrupados, ou não, em subintervalos do intervalo que se observa. Exemplos:

Notas de um concurso Florianópolis – 1999

Notas	Nº de pessoas
5,0 – 5,7	1
5,7 – 6,4	12
6,4 – 7,1	11
7,1 – 7,8	22
7,8 – 8,5	14
8,5 – 9,2	10
9,2 – 9,9	6

Fonte: Livro "Introdução à Estatística"

Média de acidentes de trânsito por dia em uma determinada cidade

Intervalo das médias	%
0,0 – 1,5	10
1,5 – 3,0	20
3,0 – 4,5	28
4,5 – 6,0	16
6,0 – 7,5	26
7,5 – 9,0	8
9,0 – 10,5	2

Fonte: Dados fictícios

- Procure exemplos de séries estatísticas na internet (www.ibge.gov.br), em jornais, revistas, periódicos, etc., e copie-os, classificando essas séries.
- Pesquise na internet, em jornais, revistas, periódicos, etc., e copie exemplos que envolvam dados absolutos, dados relativos, percentagens, índices, coeficientes e taxas.

4.5 Gráficos estatísticos

Os gráficos permitem a representação da relação entre variáveis e podem facilitar a compreensão dos dados, se apresentados de forma clara e objetiva. Também propiciam uma ideia preliminar satisfatória da concentração e/ou dispersão de valores, uma vez que através deles os dados estatísticos se apresentam em termos de grandezas visualmente interpretáveis.

> O gráfico estatístico é uma forma de apresentação dos dados estatísticos, cujo objetivo é o de produzir, no investigador ou no público em geral, uma impressão mais rápida e viva do fenômeno em estudo, já que os gráficos falam mais rápido à compreensão que as séries.

A representação gráfica das séries estatísticas tem por finalidade dar uma ideia, a mais imediata possível, dos resultados obtidos, permitindo chegar-se a conclusões sobre a evolução do fenômeno ou sobre como se relacionam os valores da série. Não há apenas uma maneira de representar graficamente uma série estatística. A escolha do gráfico mais apropriado ficará a critério do analista.

A representação gráfica de um fenômeno deve obedecer a certos requisitos fundamentais para ser realmente útil: simplicidade, clareza e veracidade. Veja:

- **Simplicidade:** o gráfico deve ser destituído de detalhes de importância secundária, assim como de traços desnecessários que possam levar o observador a uma análise morosa ou com erros.
- **Clareza:** o gráfico deve possibilitar uma correta interpretação dos valores representativos do fenômeno em estudo.
- **Veracidade:** o gráfico deve expressar a verdade sobre o fenômeno em estudo. É importante que o gráfico seja construído com o máximo de cuidado, seja com o traçado, seja com a escala.

A modificação de uma escala pode alterar o traçado do gráfico e desviar a análise correta.

Podemos classificar os gráficos estatísticos, segundo a forma, em: diagramas, cartogramas, pictogramas e estereogramas. Veja:

- **diagramas:** são gráficos geométricos dispostos em duas dimensões;

- **cartogramas:** são ilustrações relativas a cartas geográficas, largamente difundidas em geografia, história e demografia;
- **pictogramas:** representação gráfica feita com figuras;
- **estereogramas:** são as representações em três dimensões, utilizando volumes.

Os gráficos estatísticos podem também ser classificados, segundo o objetivo, em: gráficos de informação e gráficos de análise. Veja:

- gráfico de informação: são gráficos destinados principalmente ao público em geral, objetivando proporcionar uma visualização rápida e clara da intensidade das modalidades e dos valores relativos ao fenômeno observado. São tipicamente explosivos, devendo, portanto, ser o mais completo possível, dispensando comentários explicativos adicionais;
- gráfico de análise: esses gráficos prestam-se melhor ao trabalho estatístico, fornecendo elementos úteis à face de análise dos dados, sem deixar de ser também informativo.

Quando se usam gráficos para apresentar os resultados de uma análise, estes, frequentemente, vêm acompanhados de uma tabela, inclui-se, muitas vezes, um texto dissertativo, chamando a atenção do leitor para os pontos principais revelados pelo gráfico ou pela tabela.

Muitas vezes, o uso indevido dos gráficos pode trazer uma ideia falsa dos dados que estão sendo analisados, chegando a confundir o leitor. Portanto, diferentes tipos de gráficos representando o mesmo fenômeno podem dar a impressão de que os gráficos representam dados nitidamente diferentes, bem como nos casos em que mudança(s) e/ou problema(s) de escala na construção e/ou outros detalhes técnicos certamente será (ão) recebido(s) por leigos ou leitores distraídos como informações contrárias parcialmente ou completamente equivocadas.

Em estatística são usados vários tipos de gráficos. Dentre eles, temos o gráfico de linha, o gráfico de barras, gráfico de setores, cartograma, pictograma, gráfico polar, histograma, polígono de frequência e ogiva de galton. Veja:

- **Gráfico de linha:** os dados são colocados num sistema cartesiano ortogonal. Em geral representam dados de uma tabela. Graficamente temos pontos que são ligados através de segmentos de retas. As linhas são particularmente mais eficientes do que os demais tipos de gráficos, quando existem flutuações nas séries, ou quando há necessidade de se representar várias séries em um mesmo gráfico. Podemos ter gráficos de linha simples ou linhas múltiplas. Exemplos (Figuras 2 e 3):

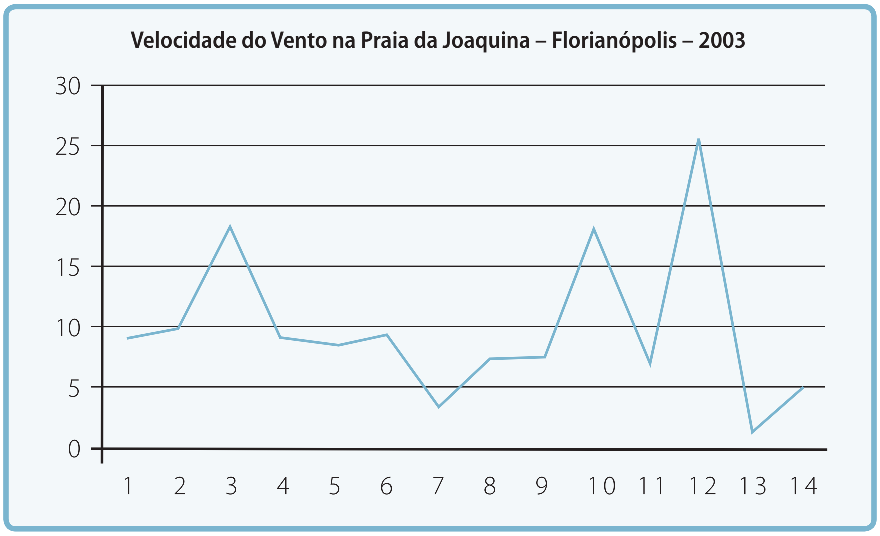


Figura 2: Exemplo de gráfico de linha simples
Fonte: Epagri

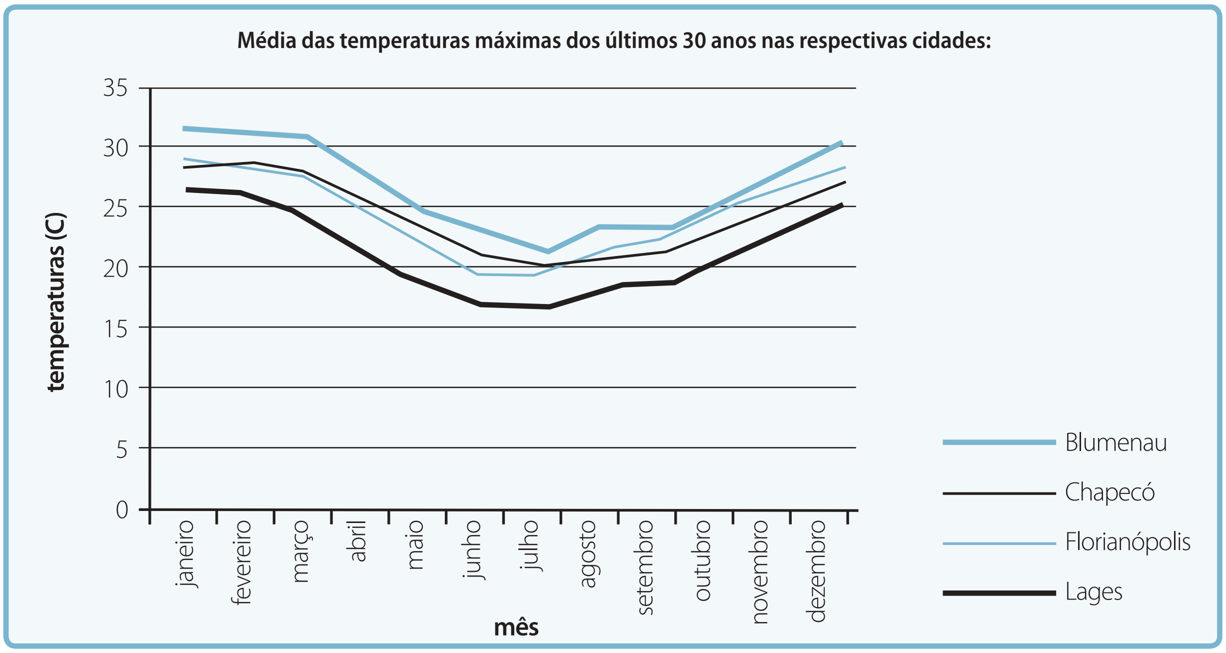


Figura 3: Exemplo de gráfico de linhas múltiplas
Fonte: Epagri

- **Gráfico barras:** é a representação de uma tabela de dados por meio de retângulos de mesma medida e separados por distâncias iguais. As frequências dos fatos observados são dadas pelas alturas dos retângulos, anotadas no eixo y, se as barras forem verticais (também chamadas de colunas). Se as barras forem horizontais, ocorre o contrário. Podemos ter gráfico de barras simples ou gráfico de barras múltiplas. Exemplos (Figuras 4, 5 e 6):

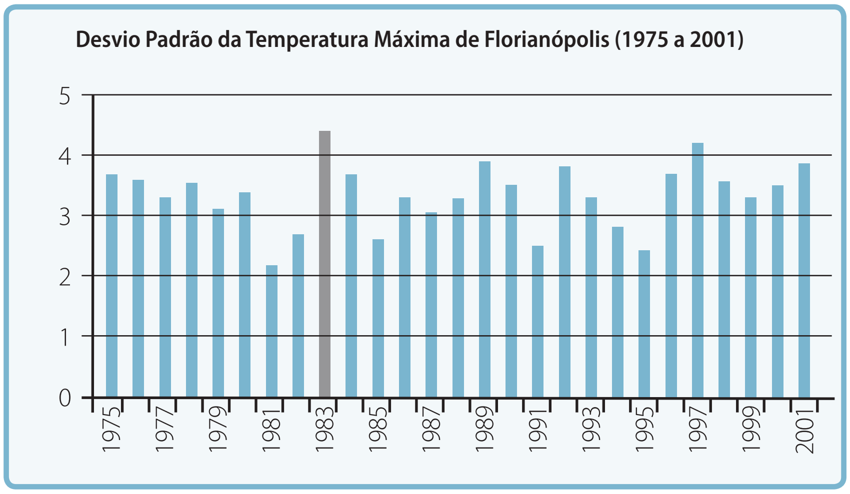


Figura 4: Exemplo de gráfico de barras simples verticais
Fonte: Epagri

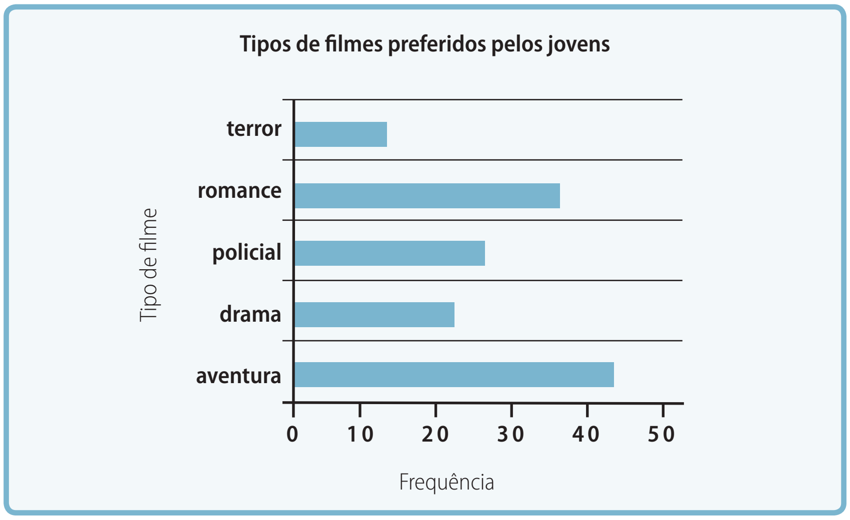


Figura 5: Exemplo de gráfico de barras simples horizontais

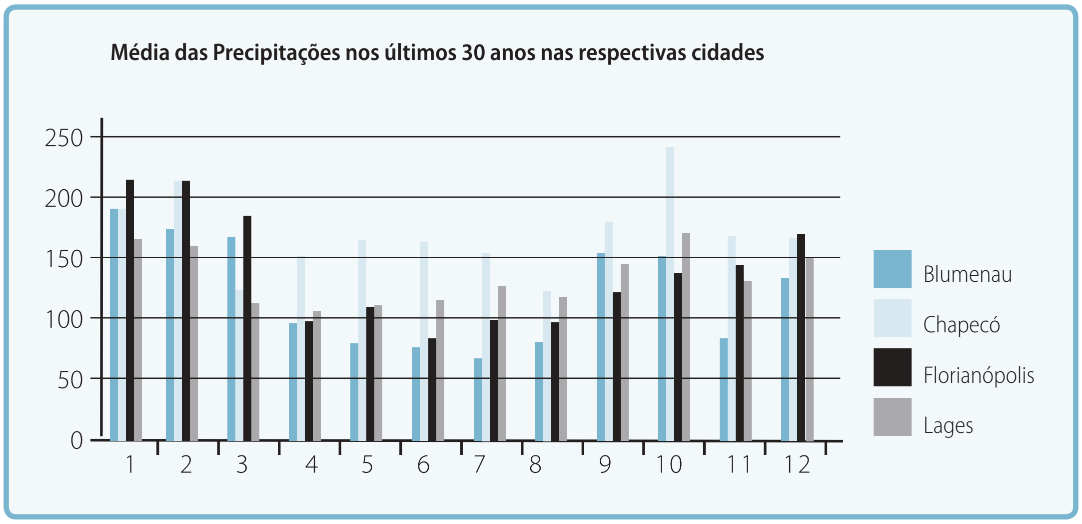


Figura 6: Exemplo de gráfico de barras múltiplas

- Gráfico de setores: os dados são representados em setores circulares que são proporcionais aos valores. São utilizados principalmente quando se pretende comparar cada valor da série com o total. A volta do círculo (360º) corresponde ao total (100%) dos dados e estabelecemos através de uma regra de três o ângulo relativo ao setor circular de acordo com cada valor. Exemplo (Figura 7):

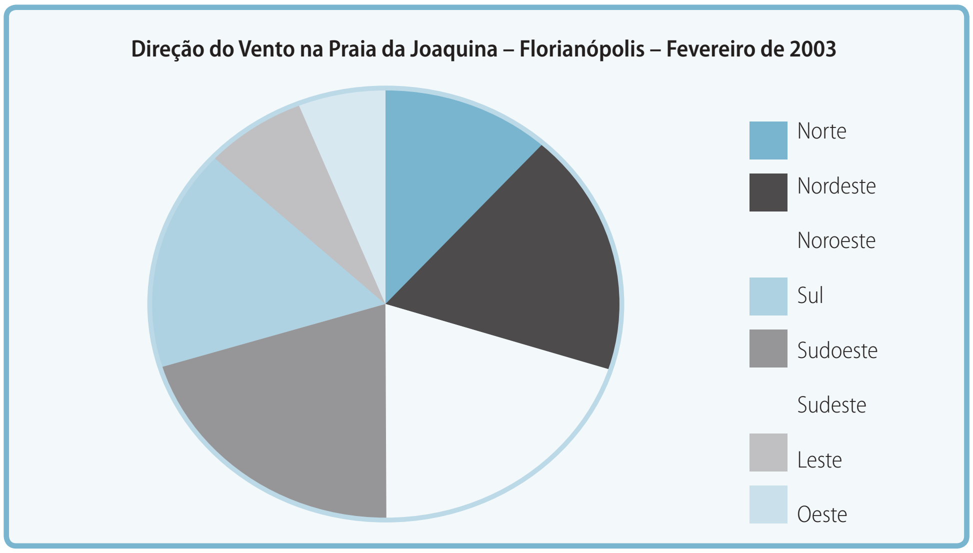


Figura 7: Exemplo de gráfico de setores
Fonte: Epagri

- **Cartograma:** é a representação sobre uma carta geográfica. Esse gráfico é empregado quando o objetivo é o de figurar os dados estatísticos diretamente relacionados com as áreas geográficas ou políticas. Exemplo (Figura 8):

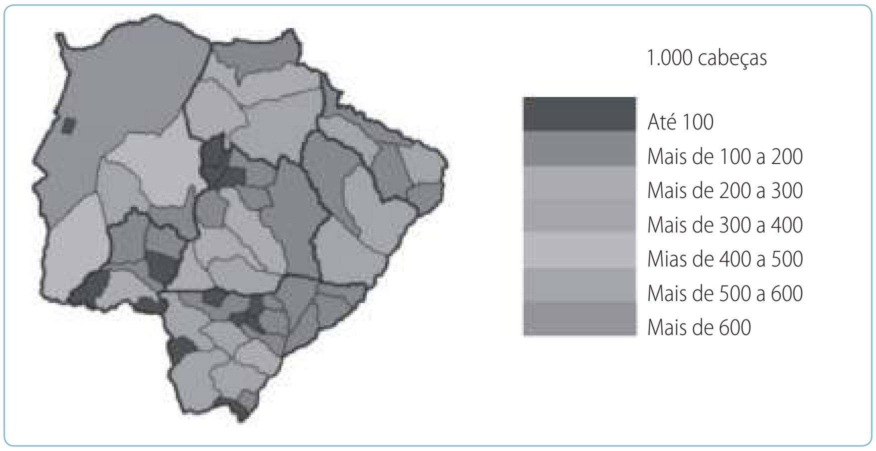


Figura 8: Cartograma do efetivo bovino de Mato Grosso do Sul 1980
Fonte: </www.cnpgc.embrapa.br/publicacoes/doc/doc16/03descricao.html>. Acesso em 18 de out. de 2007

- **Pictograma:** constitui um dos processos gráficos que melhor fala ao público, pela sua forma atraente e sugestiva. A representação gráfica consta de figuras. Exemplo (Figura 9):

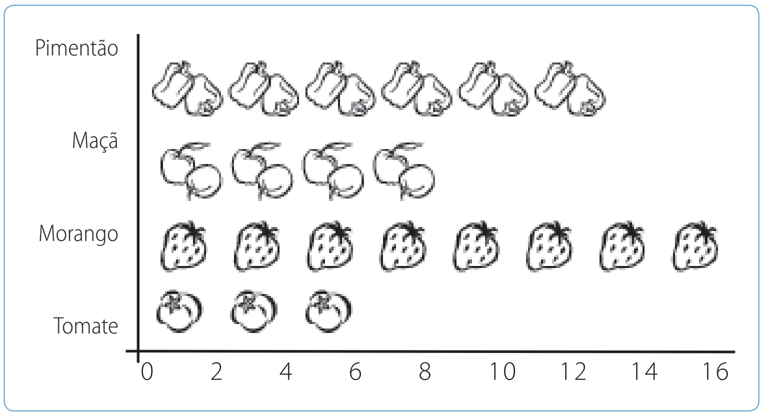


Figura 9: Exemplo de Pictograma
Fonte: Revista Veja (12 de abr de 1995)

- **Gráfico polar:** é o gráfico ideal para representar séries temporais cíclicas (sazonais), isto é, séries temporais que apresentam em seu desenvolvimento determinada periodicidade, como, por exemplo, a variação da precipitação pluviométrica ao longo do ano. O gráfico faz uso do sistema de coordenadas polares. Exemplo (Figura 10):

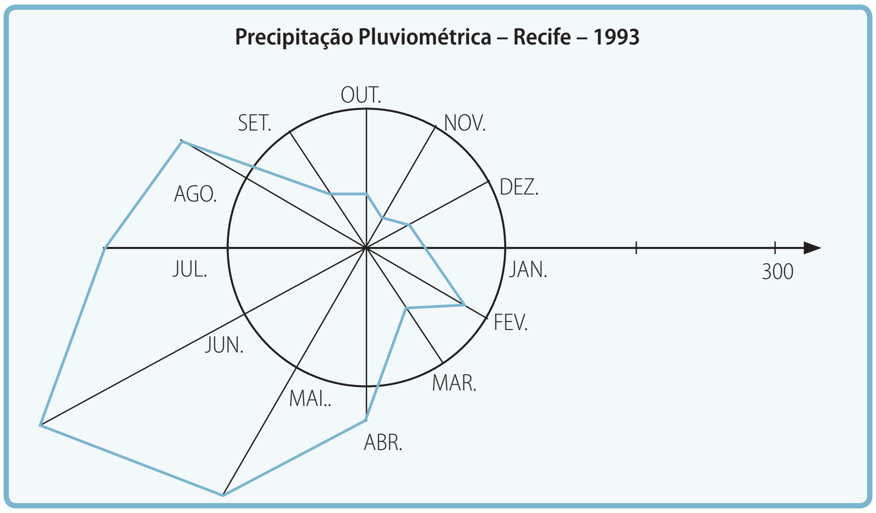


Figura 10: Exemplo de gráfico polar
Fonte: Ministério da Agricultura

- **Histograma:** é formado por retângulos justapostos, sendo o número de retângulos igual ao número de intervalos de classes. A base de cada retângulo é igual à amplitude do intervalo de classe, enquanto sua altura representa a frequência do intervalo de classe. A área do histograma é proporcional à soma das frequências. Exemplo (Figura 11):

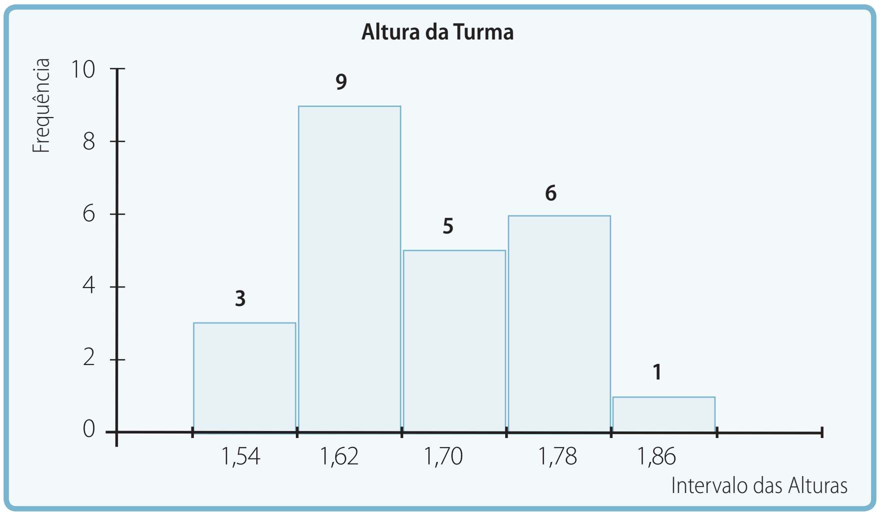


Figura 11: Exemplo de histograma

- **Polígono de frequência:** é um gráfico em linha, sendo as frequências marcadas sobre perpendiculares ao eixo horizontal, levantadas pelos pontos médios dos intervalos de classe. Exemplo (Figura 12):

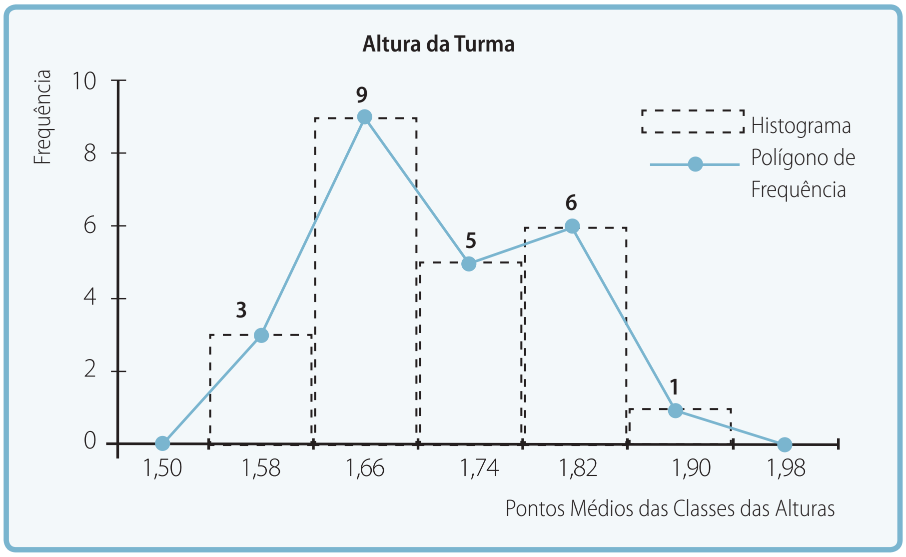


Figura 12: Exemplo de Polígono de frequência

- **Ogiva de Galton:** é utilizada para representar as frequências acumuladas de uma distribuição. É traçado marcando-se as frequências acumuladas sobre perpendiculares ao eixo horizontal, levantadas nos pontos correspondentes aos limites superiores dos intervalos de classe. Exemplo (Figura 13):

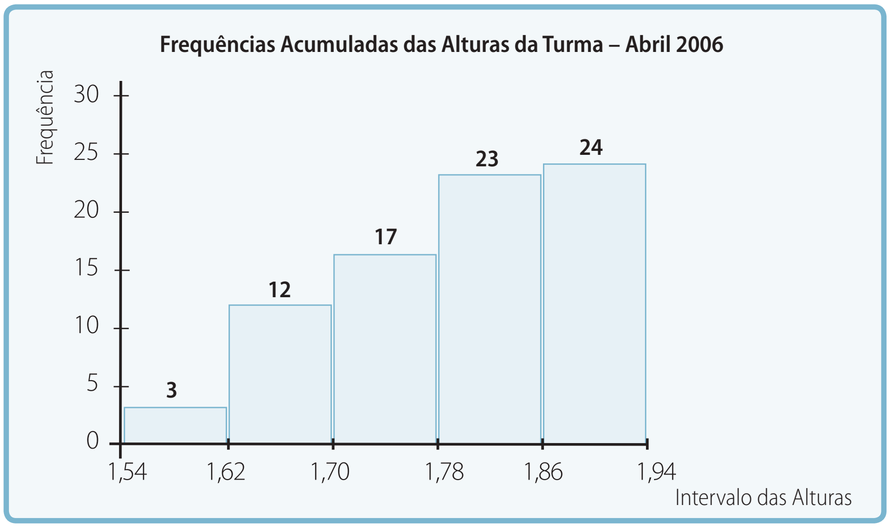


Figura 13: Exemplo de ogiva de Galton

4.6 Tipos de frequências

- fi: frequência simples
- fr%: frequência relativa percentual
- Fi: frequência simples acumulada
- FR%: frequência relativa percentual acumulada

xi	fi	Fi	fr%	FR%
2	1	1	5%	5%
4	5	6	25%	30%
6	4	10	20%	50%
8	10	20	50%	100%

$$fr\% = \frac{f_i}{\sum f_i} * 100$$

4.6.1 Medidas de tendência central

Podem ser de três formas: média ($\overline{X}$), moda (Mo) e mediana (Md). Veja cada uma delas:

- **Média aritmética simples:** pressupõe-se que todos os elementos envolvidos possuam a mesma importância.

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Ex1: Para dados brutos ou ROL, calcule a média

X: 1, 3, 4, 9, 7, 10

Onde:

xi = cada elemento da sequência x

n = total de observações

$$\overline{X} = \frac{1+3+4+9+7+10}{6} = 5{,}67$$

Ex2: Para variável discreta ou contínua:

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Calcule a média ou o salário médio dos funcionários admitidos este ano nas lojas do Sr. Valter.

$$x_i = \frac{l_i + L_i}{2}$$

classe	salários	fi	xi	xi fi
1	200 |--- 400	1	300	300
2	400 |--- 600	3	500	1.500
3	600 |--- 800	10	700	7.000
4	800 |--- 1.000	7	900	6.300
5	1.000 |--- 1.200	2	1.100	2.200
		23		R$ 17.300

Onde:

li=limite inferior

Li=Limite Superior

O salário médio dessa amostra é de R$ 752,17; ou seja, em média as pessoas abordadas recebem em torno de R$ 752,17.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{17.300}{23} = R\$752{,}17$$

- **Moda:** é o valor mais frequente de uma distribuição. Uma série pode apresentar mais de uma moda (bimodal, trimodal, etc.) assim como pode ser classificada como amodal (sem moda).

Ex1: Calcule a moda:

X: 1, 2, 2, 3, 5, 7, 8	mo = 2
Y: 3, 4, 7, 9, 7, 3, 4, 10, 3, 7	mo = 3 e mo = 7
Z: 1, 2, 3, 4, 5	amodal (ausência de moda)

- **Moda de Czuber para variável contínua**

$$mo = I_{mo} + \frac{f_{mo} - f_{ant}}{2f_{mo} - (f_{ant} + f_{post})} * h$$

Ex2: Aproveitando a tabela de salários dos funcionários da loja do Sr. Valter, exibida no exemplo 2, calcule a moda de Czuber.

classe	salários	fi
1	200 |---- 400	1
2	400 |---- 600	3
3	600 |---- 800	10
4	800 |---- 1.000	7
5	1.000 |---- 1.200	2

$$mo = 600 + \frac{10-3}{20-10} * 200 = R\$ 740,00$$

Interpretação: o salário mais observado (frequente) é de R$ 740,00.

- **Mediana:** é o valor que divide uma sequência em duas partes iguais. É o termo central em uma distribuição.

Ex1:

xi	fi	Fi
1	5	5
2	6	11
3	7	18
4	8	26
	26	

Se Sfi = 26 é par, então existirão dois termos centrais, o 13º termo e o seu sucessor o 14º termo.

Para calcular a mediana nesse caso, basta calcularmos a média aritmética entre os dois termos centrais, da seguinte forma:

$$md = \frac{13^o\, termo + 14^o\, termo}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$$

Logo a md=3, isso quer dizer que 50% dos valores são maiores ou iguais a 3.

Ex2: voltando ao assunto dos salários dos funcionários do Sr. Valter, a mediana para esse exemplo é calculada da seguinte maneira:

classe	salários	fi
1	200 |---- 400	1
2	400 |---- 600	3
3	600 |---- 800	10
4	800 |---- 1.000	7
5	1.000 |---- 1.200	2

$$md = I_{md} + \frac{\frac{n}{2} - F_{ant}}{f_{md}} * h$$

$$\frac{n}{2} = \frac{23}{2} = 11,5$$

$$md = 600 + \frac{11,5-4}{10} * 200 = R\$ 750,00$$

Isso quer dizer que 50% dos funcionários do Sr. Valter recebem salários menores ou iguais a R$ 750,00 e 50% recebem salários maiores ou iguais a R$ 750,00.

4.6.2 Medidas de dispersão ou variabilidade

As medidas de dispersão ou variabilidade podem ser:

- **Amplitude:** é a diferença entre o maior e o menor valor observada em uma amostra.

Ex1: Sejam os seguintes valores de xi: 40, 45, 52, 62, 70

Nesse caso, a amplitude será de 70 – 40 = 30

No caso dos dados serem em intervalos de classe, a amplitude será dada por: Li – li

- **Variância:** mede o grau de desvios em torno de uma média aritmética, ou seja, mede o quanto estão afastados os dados de sua média, porém essa distância está ao quadrado.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 * f_i}{\sum f_i} \Rightarrow$$ Variância populacional onde xi é o ponto médio da classe i

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 * f_i}{\sum f_i - 1} \Rightarrow$$ Variância amostral

Ex2: Calcule a variância da sequência X: 4, 5, 8, 5.

n = 4

Calculando a média temos:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{4+5+8+5}{4} = 5{,}5$$

Logo, os quadrados das diferenças valem: $(x_i - \bar{x})^2$

$$(x_1 - \bar{x})^2 = (4 - 5{,}5)^2 = 2{,}25$$
$$(x_2 - \bar{x})^2 = (5 - 5{,}5)^2 = 0{,}25$$
$$(x_3 - \bar{x})^2 = (8 - 5{,}5)^2 = 6{,}25$$

Somando-se estes valores $$(x_4 - \bar{x})^2 = (5 - 5{,}5)^2 = 0{,}25$$

obtém-se, assim, a variância dada por: $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 9$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

- **Desvio-padrão:** é uma medida de dispersão, assim como a variância, porém, na mesma medida que a variável que está sendo analisada. O desvio-padrão é calculado através da raiz quadrada da variância.

$$s = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 * f_i}{n}}$$

Ex3: Com os dados do exemplo anterior calcular o desvio padrão.

$$s = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 * f_i}{n}} = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$$

Caso os dados estejam agrupados em intervalos de classe, existe uma maneira mais prática de se calcular o desvio-padrão, é calcular o ponto médio para cada intervalo de classe e, em seguida ,aplicar a fórmula da variância e extrair a raiz quadrada.

- **Coeficiente de Variação:** serve para caracterizar a dispersão ou variabilidade dos dados em termos relativos a seu valor médio, permitindo assim estabelecer comparações entre diferentes amostras ou variáveis.

Ex4: Utilizando os dados $CV = \frac{s}{\overline{x}}$ do exemplo 2, o coeficiente de variação (CV) é dado:

$$CV = \frac{1,5}{5,5} = 0,2727 = 27,27\%$$

Síntese

No decorrer desta Unidade, você conheceu a importância da estatística para a nossa vida de um modo geral e, em particular, para gestores públicos, quando precisam descrever, organizar e classificar os dados e informações dos órgãos e empresas que gerenciam ou pretendem administrar.

As tabelas e gráficos que vimos têm a finalidade de organizar as informações de um modo claro e objetivo. As medidas de tendência central servem para representar um grupo de informações com a escolha de seu representante: média, mediana ou moda. E, por último, as medidas de dispersão mostram o quanto as informações de que dispomos estão afastadas da média.

Tudo o que aqui trabalhamos e construímos foi feito, na tentativa de mostrar que o gestor público, quando bem fundamentado teoricamente, poderá organizar de forma clara e simples os dados de que dispõe e, consequentemente, administrar de forma organizada aquilo que os leigos chamam de "a coisa pública".

Considerações finais

É evidente que numa unidade curricular com duração de 60 horas/aula não podemos nos aprofundar muito, mas temos a certeza de que você tem agora os elementos básicos para compreender e utilizar a Matemática Aplicada na sua vida profissional. Não pare por aqui!

Foi muito bom estar com você!

Referências

BUSSAB, W. O. e MORETTIN, P. A. **Estatística básica**. São Paulo: Atual, 1986.

FERREIRA, Aurélio B. de Hollanda. **Pequeno dicionário brasileiro da língua portuguesa**. Companhia Editora Nacional, São Paulo, 1972.

COSTA NETO, P. L. de O. **Estatística**. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1977.

CRESPO, A.A. **Estatística fácil**. São Paulo: Saraiva, 1996

LEVIN, J. **Estatística aplicada a ciências humanas**. 2 ed. São Paulo: Harbra, 1987.

LOPES, J.C.; ROSSETTI, J.P.. **Economia monetária**. 8 ed. São Paulo: Atlas, 2002.

MALVEIRA, L.. **Matemática fácil**. 5a. ed. São Paulo: Ática, 1993.

MATHIAS, W.F.; GOMES, J.M. **Matemática financeira**. São Paulo: Atlas, 1989.

PARENTE, E.; CARIBÉ, R. **Matemática comercial & financeira**. São Paulo: FTD, 1996.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Sociedade Brasileira de Matemática. n°. 38, 3º quadrimestre de 1998. Universidade de São Paulo.

SCHEINER, A. **História da moeda**: textos, artigos e análises. Disponível em: <http:// www.bancocentral.gov.br.htm>. Acesso em: 25 ago. 2010.

SPIEGEL, M.R. **Álgebra superior**. Tradução: Celso F. Albuquerque. São Paulo: McGraw-Hill, 1971. Coleção Schaum.

VASCONCELLOS, M.A.S.; GARCIA, M.E.. **Fundamentos de economia**. 2 ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

Sobre o autor

Alexandre Motta é doutor em Educação Científica e Tecnológica (2011) pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), mestre em Engenharia de Produção (2000) pela mesma instituição, especialista em Ensino de Matemática (1995) também pela UFSC e especialista em Meteorologia (2002) pela Universidade Federal de Pelotas. Atualmente, é professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Equações Diferenciais.