

**14/4/2010 – ALGA-1: Exercícios Resolvidos – Retas, Planos e Distâncias**

- \* Da **Lista** de exercícios de Álgebra 1 – Retas, Planos e Distâncias (UDESC-CCT-JOINVILLE);  
 \* Do **Livro** de Geometria Analítica - Alfredo Steinbruch, Paulo Winterle.

**Lista: exercício 4.**

Dada a reta  $r: \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x + 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$  como interseção de dois planos, obter a sua equação simétrica.

**Solução:**

Esta não é a única solução, porém é uma das mais fáceis. Para resolver precisamos de conhecimentos sobre planos e retas.

1 – A reta  $r$  é dada na forma de interseção, portanto resolvemos o sistema para encontrar a equação da reta ou o ponto, neste caso faremos para o ponto.

2 – Olhe para as equações da reta  $r$ , e veja que se fizermos  $x = 2$ , as equações serão simplificadas.

$$r: \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x + 3y - z - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{fazendo } x = 2 \text{ e somando as equações:}$$

$$2 + y + z - 2 + 2 + 3y - z - 2 = 0$$

$$y + z + 3y - z = 0$$

$$4y = 0 \Rightarrow y = 0$$

agora substituímos  $y = 0$  na equação e encontramos  $z$  também igual à zero (*quando  $x = 2$* ):

$$z = 0 \Rightarrow y = z$$

Essas coordenadas encontradas são um ponto da reta interseção dos planos, portanto  $P = (2, 0, 0)$ .

Agora só precisamos encontrar o vetor, há várias maneiras, uma delas é o produto vetorial dos vetores normais dos planos dados, e são facilmente encontrados, conhecendo-se a equação geral do plano:

$$ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0$$

$$\text{então para } r: \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x + 3y - z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{os vetores são } \vec{v}_1(1, 1, 1) \text{ e } \vec{v}_2(1, 3, -1)$$

Fazendo o produto vetorial  $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ :

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times (-1) - 3 \times 1, -(1 \times (-1) - 1 \times 1), 1 \times 3 - 1 \times 1 \end{pmatrix} = (-4, 2, 2)$$

e este é o vetor simultaneamente ortogonal aos dois planos dados,  
 portanto é o normal de um outro plano que contém o ponto  $P = (2, 0, 0)$ !

Substituindo na equação geral do plano:

$$-4x + 2y + 2z - (-4)2 - 2(0) - 2(0) = 0$$

$$-4x + 2y + 2z + 8 = 0 \quad (\text{dividimos por 2 para simplificar, e encontramos o vetor da reta!})$$

$$-2x + y + z + 4 = 0 \Rightarrow \vec{v}_r(-2, 1, 1)$$

Agora substituímos na equação simétrica da reta:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \Rightarrow \frac{x - 2}{-2} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 0}{1} \quad \text{ou} \quad \frac{x - 2}{-2} = y = z$$

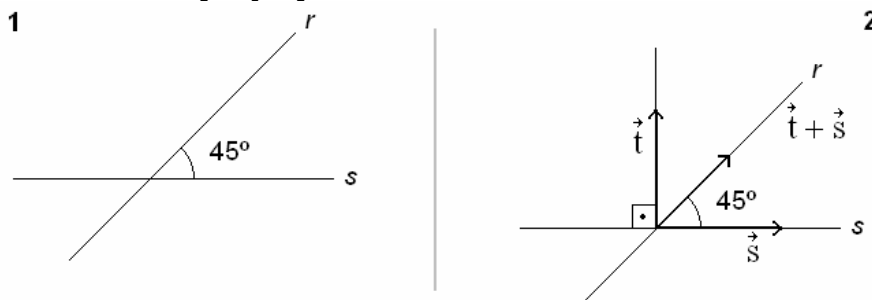
**Lista: exercício 15**

Calcular as equações das retas  $r$  que contém o ponto  $A(2,-1,1)$  e que interceptam a reta

$$s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases} \quad \text{segundo um ângulo de } 45^\circ.$$

**Solução:**

O exercício não fornece figuras. Desenhado (veja a figura 1) é assim que a reta  $r$  deve se parecer, pois forma  $45^\circ$  com  $s$ . Nesse caso o ângulo dado só serve para encontrar o vetor diretor da reta  $r$ , isso por que  $45^\circ$  é a metade de  $90^\circ$ . Então se encontrarmos um vetor perpendicular a  $\vec{s}$  (chamaremos de  $\vec{t}$ ), então podemos encontrar  $\vec{r}$ , porque podemos somar os vetores.



Temos a equação paramétrica da reta  $s$ , e pela fórmula identificamos o vetor e o ponto, então:

$$s: \begin{cases} x = ta + x_1 = 1 + 2t \\ y = tb + y_1 = -1 \\ z = tc + z_1 = t \end{cases} \quad \text{Então o vetor de } s \text{ é } \vec{s}(2,0,1)$$

Agora precisamos de um vetor perpendicular a  $\vec{s}(2,0,1)$ , pela condição de ortogonalidade, **dois vetores são ortogonais quando o produto escalar é igual a zero**, então:

$$\vec{s} \cdot \vec{t} = 0 \rightarrow (2,0,1)(x,y,z) = 0$$

Note que a componente  $b$  do vetor  $\vec{s}$  é nula, fazendo o vetor  $\vec{t}$  também pertencer ao plano  $xOz$ .

Fazendo  $x = 1$  temos:

$$\vec{s} \cdot \vec{t} = 0 \rightarrow (2,0,1)(1,y,z) = 0 \Rightarrow 2 + 0 + z = 0 \Rightarrow z = -2$$

$$\text{Então } \vec{t}(1,0,-2)$$

$$\text{Agora somamos os vetores (veja a figura 2): } \vec{t} + \vec{s} = (1,0,-2) + (2,0,1) = (3,0,-1)$$

Que é o vetor diretor da reta  $r$ .

Pode-se fazer  $\vec{t} - \vec{s}$  que dará um outro vetor para  $r$ , mas também formando  $45^\circ$  com a reta  $s$ .

$$\vec{t} - \vec{s} = (-1,0,-3).$$

Encontramos os vetores e temos o ponto  $A(2,-1,1)$ , então é só escrever as equações paramétricas de  $r$ .

$$r: \begin{cases} x = ta + x_1 = 3t + 2 \\ y = tb + y_1 = -1 \\ z = tc + z_1 = -t + 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad r: \begin{cases} x = -t + 2 \\ y = -1 \\ z = -3t + 1 \end{cases}$$

**Lista: exercício 16.**

Obter a equação do plano que contém a reta  $r: \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ x - y + 2z + 5 = 0 \end{cases}$  e seja paralelo ao eixo das abscissas.

**Solução:**

1 - Para resolver devemos obter o vetor da reta, e o Ponto.

2 - Depois devemos obter um vetor perpendicular ao eixo das abscissas e ao vetor da reta. Que será o vetor do plano, pois cumpre com as restrições.

1 - Das equações da reta  $r$ , resolvemos o sistema, colocamos na forma reduzida e tiramos as informações necessárias (ou seja escrevemos  $y$  e  $z$  em função de  $x$ ).

$$r: \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ x - y + 2z + 5 = 0 \end{cases} \quad (\text{basta somar as duas equações})$$

$$2x + y - y - z + 2z + 3 + 5 = 0$$

$$2x + z + 8 = 0$$

$$z = -2x - 8$$

$$r: \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ x - y + 2z + 5 = 0 \end{cases} \quad (\text{multiplicamos por 2 para fazer } z \text{ desaparecer})$$

$$2x + 2y - 2z + 6 + x - y + 2z + 5 = 0$$

$$3x + y + 11 = 0$$

$$y = -3x - 11$$

Da fórmula da equação reduzida podemos identificar o vetor e o ponto.

$$r: \begin{cases} \vec{v}_r(1, -3, -2) \\ P_r(0, -11, -8) \end{cases} \quad (\text{isso quando fazemos } x=0)$$

Agora devemos fazer o produto vetorial do vetor diretor da reta, pelo vetor diretor do eixo das abscissas, assim encontramos um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores dados.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-3 \times 0 - 0 \times -2, -(1 \times 0 - (1 \times -2)), 1 \times 0 - (1 \times -3)) = (0, -2, 3) \text{ e este é o vetor } \textit{normal} (\vec{n}) \text{ do plano!}$$

Como já temos o ponto  $P_r(0, -11, -8)$ , agora é só substituir na equação geral do plano.

$$ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0$$

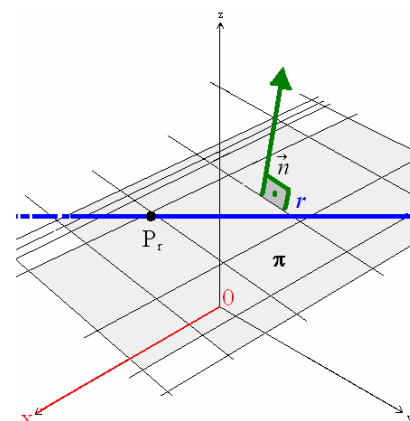
$$0x + (-2)y + 3z - 0 \times 0 - (-2)(-11) - (3) \times (-8) = 0$$

$$-2y + 3z - 22 + 24 = 0$$

$$-2y + 3z + 2 = 0 \quad (\text{multiplicamos por } -(1) \text{ para simplificar!})$$

$$2y - 3z - 2 = 0$$

E esta é a equação do plano paralelo ao eixo  $x$ , e que contém a reta  $r$ !



Um esboço ilustrando o enunciado.

**Livro: Pg.139, exercício 35.**

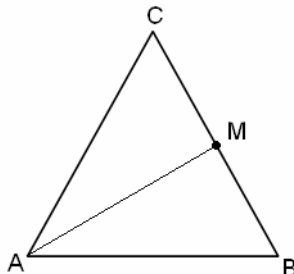
Seja o triângulo de vértices  $A(1,0,-2)$ ,  $B(2,-1,-6)$  e  $C(-4,5,2)$ .

Estabelecer as equações da reta suporte da mediana do triângulo ABC relativa ao lado BC.

Solução:

O exercício não fornece figuras, então você tem que adivinhar.

Desenhando o triângulo, a mediana relativa ao lado BC é a reta MA.



Para encontrar M, basta fazer:  $M = \frac{B + C}{2} = \frac{(-2, 4, -4)}{2} = (-1, 2, -2)$

Agora ele pede a reta suporte relativa ao lado BC, então o vetor tem que ser  $\overrightarrow{MA}$ , e não  $\overrightarrow{AM}$ .

$$\overrightarrow{MA} = A - M = (1, 0, -2) - (-1, 2, -2) = (2, -2, 0)$$

Assim podemos escrever as equações paramétricas, pois encontramos o vetor diretor da reta e temos o ponto A.

$$\overrightarrow{MA} = (a, b, c) = (2, -2, 0) \text{ e } A = (x_1, y_1, z_1) = (1, 0, -2)$$

$$\begin{cases} x = ta + x_1 = 2t + 1 \\ y = tb + y_1 = -2t \\ z = tc + z_1 = -2 \end{cases}$$

**Livro: Pg.182, exercício 26.**

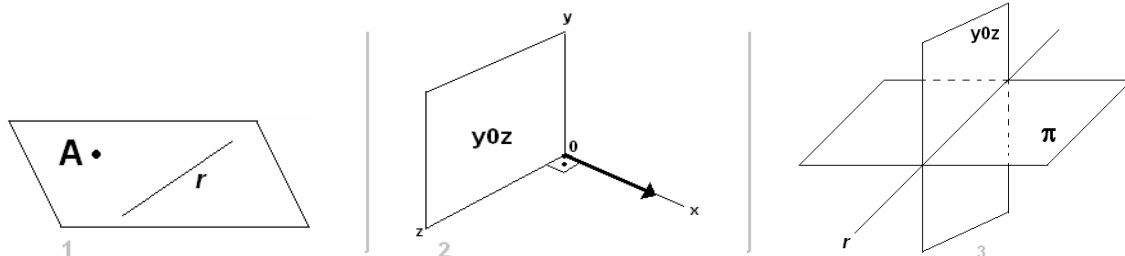
Determinar a equação geral do plano que contém o ponto e a reta, dados:

$A(1,2,1)$  e a reta interseção do plano  $\pi: x - 2y + z - 3 = 0$  com o plano  $yOz$ .

O exercício não traz figuras, e é complicado, mas vou tentar explicar!

Do enunciado, concluímos que existe um plano que contém o ponto A e uma reta (figura 1).

Mas essa reta só existe devido à interseção de dois planos: o plano  $yOz$  (figura 2) e o plano  $\pi$  (figura 3).



Agora identificamos a equação do plano  $yOz$ , que é  $x = 0$ .

Para acharmos a equação da reta interseção dos planos basta resolvermos o sistema somando as equações dos planos:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{resolvendo o sistema temos:}$$

$$-2y + z - 3 = 0$$

e a equação da reta é:

$$z = 2y + 3$$

Agora da equação simétrica da reta temos:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \quad \text{e se } x = 0, \quad z = \frac{cy}{b} - \frac{cy_1}{b} + z_1$$

De onde tiramos o vetor e o ponto:

$$\vec{v}(a,b,c) \quad \text{logo} \quad \vec{v}_1(0,1,2) \quad \text{a componente } a \text{ do vetor é nula quando } x = 0.$$

E para o ponto  $P(x_1, y_1, z_1)$  sabemos que  $z_1 = 3$  (pela equação simétrica), então para encontrar as outras coordenadas basta substituírmos na equação da reta:

$$z = 2y + 3$$

$$3 = 2y + 3 \Rightarrow y = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \text{pois não há como calcular, então } P(0,0,3).$$

Como encontramos um ponto da reta, podemos fazer o vetor  $\overrightarrow{AP}$  e assim encontrar um segundo vetor pertencente ao plano procurado. Tendo dois vetores encontramos o vetor normal ao plano com o produto vetorial, com isso podemos escrever a equação do plano.

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (0,0,3) - (1,2,1) = \vec{v}_2(-1, -2, 2)$$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (1 \times 2 - (-2) \times 2, -(0 \times 2 - (-1) \times 2), 0 \times (-2) - (-1) \times 1) = \vec{v}_3(6, -2, 1) \quad \text{e esse é finalmente o vetor normal do plano!}$$

Substituindo  $\vec{v}_3$  na equação do plano junto com o ponto A(1,2,1):

$$ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0$$

$$6x - 2y + z - 6 \times 1 - (-2) \times 2 - 1 \times 1 = 0 \quad \text{simplificando temos:}$$

$$6x - 2y + z - 6 + 4 - 1 = 0$$

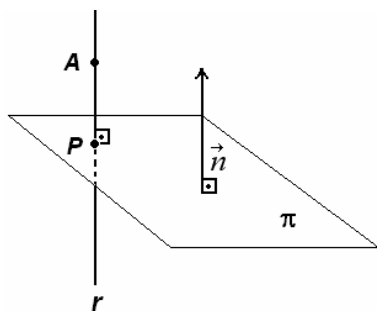
$$6x - 2y + z - 3 = 0$$

E esta é a equação do plano que contém o ponto A e a reta interseção dos planos  $yOz$  e  $\pi$ .

**Livro: Pg.184, exercício 39.**

Determinar as equações reduzidas, em termos de  $x$ , da reta  $r$  que passa pelo ponto  $A(2,-1,4)$  e é perpendicular ao plano  $\pi: x - 3y + 2z - 1 = 0$ .

Sem figuras! Com isso a interpretação geométrica deve se parecer com isso:



Uma reta  $r$  que passa por um ponto  $A$ . E essa reta é ortogonal ao plano, ou seja é paralela ao vetor  $\vec{n}$  (normal) do plano.

Com isso só nos resta achar um ponto  $P$  tal que ao fazer o vetor  $\overrightarrow{PA}$ , este seja paralelo ao vetor normal do plano.

Utilizando a linguagem matemática, o que procuramos é:

$P(x,y,z) \mid \overrightarrow{PA} \parallel \vec{n}$ , então pela condição de paralelismo de vetores:  $\frac{\overrightarrow{PA}}{\vec{n}} = k$

Identificando o normal do plano na equação dada:  $\vec{n}(1, -3, 2)$

Assim abrimos a equação do ponto  $P$ :

$$k = \frac{\overrightarrow{PA}}{\vec{n}} = \frac{A - P}{\vec{n}} = \frac{(2, -1, 4) - (x, y, z)}{(1, -3, 2)}$$

$$\frac{2-x}{1} = \frac{-1-y}{-3} = \frac{4-z}{2} = k$$

A partir daqui temos duas maneiras para resolver (A) e (B):

$$(A) \frac{2-x}{1} = \frac{-1-y}{-3} = \frac{4-z}{2} = k$$

Agora se multiplicarmos o numerador e o denominador por menos um, não alteramos a igualdade e chegamos à forma simétrica da reta:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{-2}$$

Logo a equação reduzida (escrevendo  $y$  e  $z$  em função de  $x$ ) é:

$$y = \frac{3x}{-1} - \frac{6}{-1} - 1 = -3x + 5 \quad \text{e} \quad z = \frac{-2x}{-1} + \frac{4}{-1} + 4 = 2x$$

(B) Por outro lado, podemos pegar a igualdade  $\frac{2-x}{1} = \frac{-1-y}{-3} = \frac{4-z}{2} = k$  e atribuir um valor para  $x$ . Então, fazendo  $x = 1$  achamos  $y$  e  $z$ :

$$\frac{2-1}{1} = \frac{-1-y}{-3} \Rightarrow -3 = -1-y \Rightarrow y = 2$$

$$\text{Logo, se } y = 2 \text{ temos que: } \frac{-1-2}{-3} = \frac{4-z}{2} \Rightarrow 1 = \frac{4-z}{2} \Rightarrow z = 2$$

Encontramos o ponto  $P = (1, 2, 2)$ ! Veja que se jogarmos esses valores na equação, encontramos  $k = 1$ , e isso verifica o paralelismo entre vetores  $\overrightarrow{PA}$  e  $\vec{n}$ , então estamos no caminho certo! Agora achamos o vetor  $\overrightarrow{PA}$ :

$$\overrightarrow{PA} = A - P = (2, -1, 4) - (1, 2, 2) = (1, -3, 2) \quad \text{e esse é o vetor diretor da reta } \mathbf{r}!$$

Temos o ponto  $A(2, -1, 4)$  e o vetor  $(1, -3, 2)$ , mas o exercício quer a equação reduzida da reta em termos de  $x$ , então da equação simétrica encontramos isso (ou seja escrevemos  $y$  e  $z$  em função de  $x$ ):

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{bx}{a} - \frac{bx_1}{a} + y_1 \quad e \quad z = \frac{cx}{a} - \frac{cx_1}{a} + z_1$$

Portanto substituindo nas equações:

$$y = \frac{-3x}{1} - \frac{(-3)2}{1} - 1 \quad e \quad z = \frac{2x}{1} - \frac{(2)(2)}{1} + 4$$

Logo:

$$y = -3x + 5 \quad e \quad z = 2x$$

**Livro: Pg.201, exercício 2.**

Determinar, no eixo das ordenadas, um ponto eqüidistante de A(1,1,4) e B(-6,6,4).

**Solução:**

O exercício pede um ponto no eixo das ordenadas, então ele quer **P(0,y,0)**.

Que seja eqüidistante, isto é a distancia de P até A é igual a distância de P até B, em matemática:

A distancia **d** entre dois pontos é dada pelo modulo, isto é:

$$d_{\overrightarrow{PA}} = |\overrightarrow{PA}| = |A - P| = |(1,1,4) - (0,y,0)| = \sqrt{(1-0)^2 + (1-y)^2 + (4-0)^2}$$

$$d_{\overrightarrow{PA}} = \sqrt{(1+1-2y+y^2+16)}$$

$$d_{\overrightarrow{PB}} = |\overrightarrow{PB}| = |B - P| = |(-6,6,4) - (0,y,0)| = \sqrt{(-6-0)^2 + (6-y)^2 + (4-0)^2}$$

$$d_{\overrightarrow{PB}} = \sqrt{(36+36-12y+y^2+16)}$$

Como ele disse que é eqüidistante, isto é a mesma distância, então comparamos:

$$d_{\overrightarrow{PA}} = d_{\overrightarrow{PB}}$$

$$\sqrt{(18-2y+y^2)} = \sqrt{(88-12y+y^2)} \quad \text{Elevando ao quadrado dos dois lados temos:}$$

$$18-2y+y^2=88-12y+y^2 \quad \text{Cancelando } y^2 :$$

$$10y=88-18$$

$$y=\frac{70}{10}=7$$

Portanto  $y = 7$  e o ponto é P(0, 7, 0).

**Prova: exercício 1. (Udesc 2009/2)**

Sejam as retas:  $r_1: \frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{-z+1}{1}$  e  $r_2: \begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$ .

Determine, se possível, as equações simétricas da reta  $r_3$ , passando pelo ponto de interseção de  $r_1$  e  $r_2$ , e sendo paralela a reta definida pelos pontos: A(0, 1, 2) e B(1, 4, 5).

**Solução:**

De acordo com o enunciado, ele quer:  $r_3: \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$  que é a equação simétrica de  $r_3$ .

Então só precisamos achar o vetor (a, b, c) e o ponto  $(x_1, y_1, z_1)$  de interseção.

Para achar o ponto de interseção de  $r_1$  e  $r_2$ , passamos tudo para a equação reduzida da reta e igualamos y à y e z à z.

Equação reduzida da reta:  $y = \frac{bx}{a} - \frac{bx_1}{a} + y_1$  e  $z = \frac{cx}{a} - \frac{cx_1}{a} + z_1$

Da reta  $r_1$  primeiro arrumamos a equação, passando para a forma correta (multiplicando a última igualdade por -1):

$$r_1: \frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

Calculando, chegamos à:  $y_{r_1} = \frac{2x}{3} - \frac{13}{3}$  e  $z_{r_1} = -\frac{x}{3} + \frac{8}{3}$ .

$r_2$  está na forma paramétrica:  $r_2: \begin{cases} x = ta + x_1 \\ y = tb + y_1 \\ z = tc + z_1 \end{cases}$

Colocando na forma reduzida temos:

$$y_{r_2} = \frac{-2x}{3} + 5 \text{ e } z_{r_2} = \frac{x}{3} - 2$$

Igualando  $y_{r_1}$  à  $y_{r_2}$  e  $z_{r_1}$  à  $z_{r_2}$ , para obter o ponto de interseção:

$$y_{r_1} \text{ à } y_{r_2}: \frac{2x}{3} - \frac{13}{3} = \frac{-2x}{3} + 5 \text{ e } z_{r_1} \text{ à } z_{r_2}: -\frac{x}{3} + \frac{8}{3} = \frac{x}{3} - 2$$

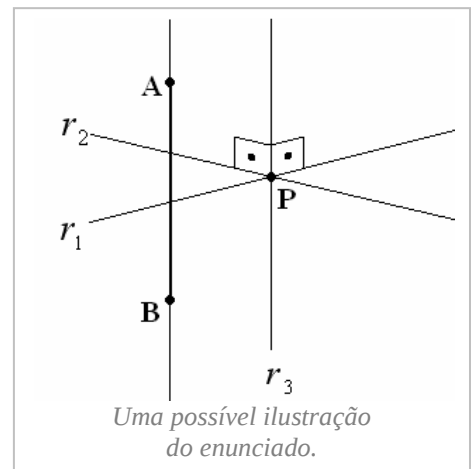
Ambas as equações resultam em  $x = 7$ , o que prova a existência de um ponto de interseção. Para encontrar y e z, substituímos ( $x = 7$ ) nas equações:

$$y = \frac{-2x}{3} + 5 \text{ e } z = \frac{x}{3} - 2$$

Calculando chegamos à:  $y = z = \frac{1}{3}$

Então o ponto de interseção é  $P(7, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ .

Como ele disse que é paralela à reta definida pelos pontos A(0, 1, 2) e B(1, 4, 5).



Então:  $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 3, 3)$

Logo o vetor  $(a, b, c)$  para a equação simétrica que procuramos, pela condição de paralelismo de vetores tem de ser:

$$\frac{\vec{v}(a, b, c)}{\overrightarrow{AB}} = k \quad \text{e assim} \quad \vec{v}(a, b, c) = k(\overrightarrow{AB})$$

Substituindo temos:  $\vec{v}(a, b, c) = k(1, 3, 3)$  ou  $\vec{v}(a, b, c) = (k, 3k, 3k)$

Logo a equação simétrica da reta  $r_3: \frac{x-7}{k} = \frac{y-\frac{1}{3}}{3k} = \frac{z-\frac{1}{3}}{3k}$

Ou podemos multiplicar os dois últimos membros por três para melhorar a aparência:

$$r_3: \frac{x-7}{k} = \frac{3y-1}{9k} = \frac{z-1}{9k} \quad k \in \mathbb{R} \mid k \neq 0 \neq 1$$

Pois quando  $k = 0$  há o problema de estar como denominador (tornando a divisão inexistente), e quando  $k = 1$  as retas coincidem, então para qualquer outro número real cumprirá as exigências.

**Prova: exercício 2. (Udesc 2009/2)**

Determine, se possível, a equação da reta  $r$ , que passa por  $A(2, -1, 4)$ , sendo paralela ao plano

$$\pi: 2x + y - z + 2 = 0 \text{ e perpendicular a reta } s: \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{3z-9}{4}.$$

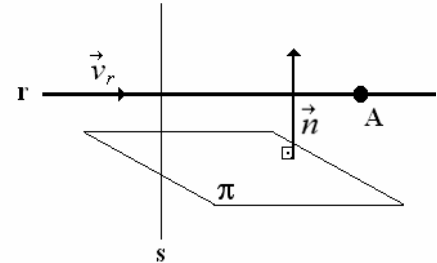
**Solução:**

Um pouco complicada, mas com uma interpretação do enunciado chegamos a um possível desenho do que se pede.

Colocando a equação da reta  $s$  na forma padrão:

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{\frac{4}{3}}.$$

Logo temos o vetor:  $\vec{v}_s \left( 3, -2, \frac{4}{3} \right)$



E a partir da equação do plano obtemos o vetor normal:  $\vec{n}(2, 1, -1)$ .

Olhando a figura e se baseando no enunciado, concluímos que:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (a, b, c) \cdot \left( 3, -2, \frac{4}{3} \right) = 0$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (a, b, c) \cdot (2, 1, -1) = 0$$

Logo se fizermos o **produto vetorial**  $\vec{v}_s \times \vec{n}$  ou  $\vec{n} \times \vec{v}_s$  chegamos a um vetor simultaneamente ortogonal aos dois vetores, calculando temos:

$$\vec{v}_s \times \vec{n} = \left( \frac{2}{3}, \frac{17}{3}, 7 \right)$$

$$\vec{n} \times \vec{v}_s = \left( -\frac{2}{3}, -\frac{17}{3}, -7 \right)$$

Então o vetor da reta  $r$  será:  $\vec{v}_r \left( \frac{2}{3}, \frac{17}{3}, 7 \right)$  ou  $\vec{v}_r \left( -\frac{2}{3}, -\frac{17}{3}, -7 \right)$  pois cumpre com as exigências!

*E as exigências são: o vetor da reta  $r$  tem de ser ortogonal ao vetor da reta  $s$  e também ao vetor normal do plano (pois quando isso ocorre, então o vetor da reta  $r$  é paralelo ao plano).*

Temos o ponto  $A(2, -1, 4)$  e os dois vetores, logo a equação simétrica é:

$$\frac{x-2}{\frac{2}{3}} = \frac{y+1}{\frac{17}{3}} = \frac{z-4}{7} \quad \text{ou} \quad \frac{x-2}{-\frac{2}{3}} = \frac{y+1}{-\frac{17}{3}} = \frac{z-4}{-7}$$

**Prova: exercício 3. (Udesc 2009/2)**

Estudar a posição relativa das retas  $r$  e  $s$ .  $r$  é a reta interseção dos planos  $\pi_1: 3x - 2y - z = 1$  e

$$\pi_2: x + 2y - z = 7 \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = y + 5 \\ z = 4 \end{cases}.$$

Fazendo a interseção dos planos (no primeiro exercício dessa lista explicamos como se faz), calculando e tudo mais, chega-se à equação reduzida da reta interseção dos planos:

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \\ z = 2x - 4 \end{cases}$$

Da definição da equação reduzida da reta, obtemos o vetor e o ponto (da reta interseção dos planos):

$$y = \frac{bx}{a} - \frac{bx_1}{a} + y_1 \quad \text{e} \quad z = \frac{cx}{a} - \frac{cx_1}{a} + z_1$$

$$\vec{v}(2, 1, 2) \text{ e } P\left(0, \frac{3}{2}, -4\right)$$

E também da reta  $s$ :

$$\vec{v}_s = (1, 1, 0) \text{ e } P_s(0, -5, 4)$$

O estudo da posição relativa é feita através do produto misto, e da análise dos vetores envolvidos.

Logo os vetores não são paralelos (são concorrentes), e o produto misto é diferente de zero, isso define que as retas são reversas (ou não coplanares).

$$\overrightarrow{PP_s} = P_s - P = \left(0, -\frac{13}{2}, 8\right)$$

$$(\vec{v}, \vec{v}_s, \overrightarrow{PP_s}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{13}{2} & 8 \end{vmatrix} = -5$$