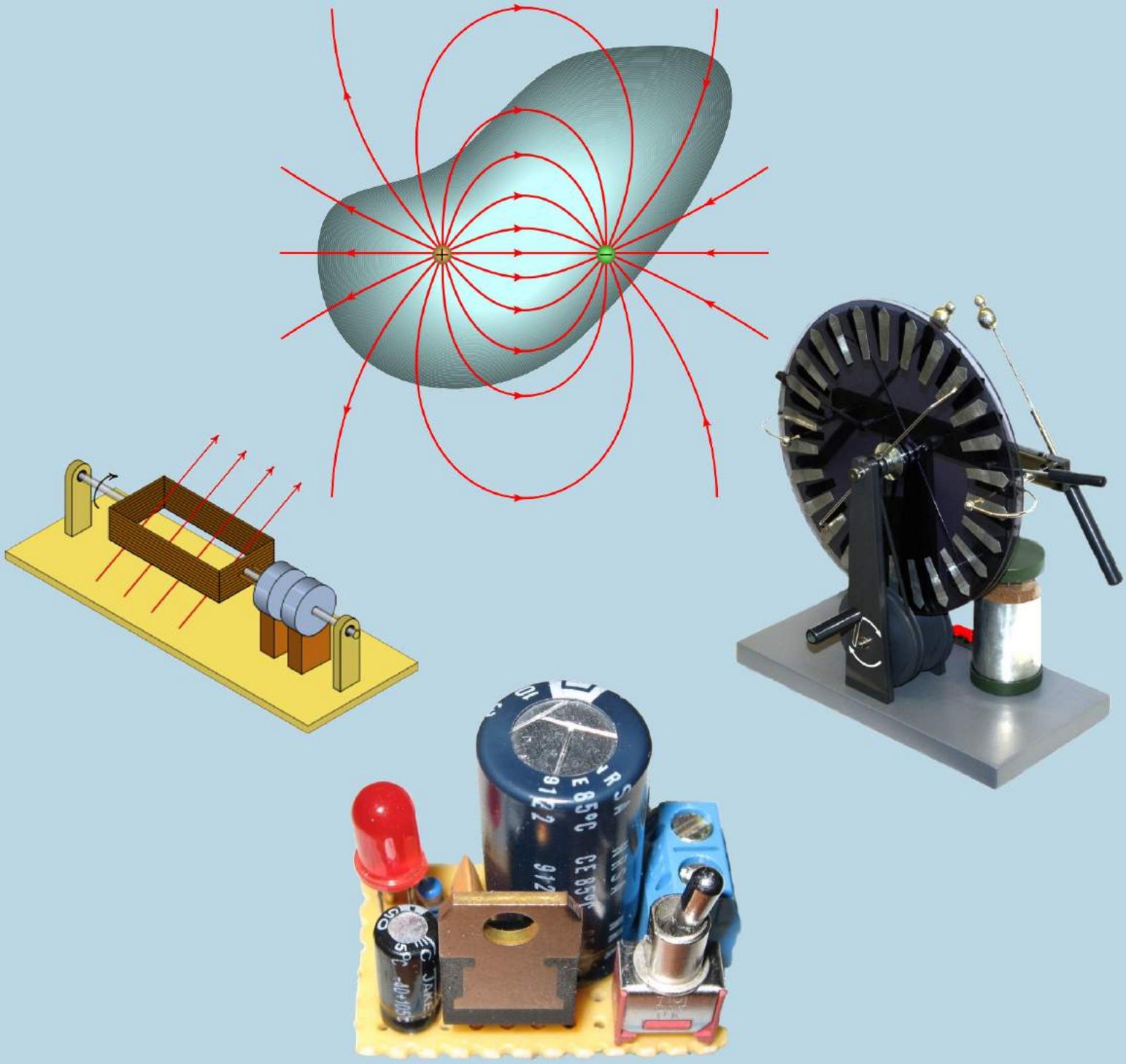
# Física 2

## ELETRICIDADE E MAGNETISMO



**Jaime E. Villate**

# Física 2. Eletricidade e Magnetismo

**Jaime E. Villate**
Faculdade de Engenharia
Universidade do Porto

http://www.villate.org/livros

**Física 2. Eletricidade e Magnetismo**

Copyright © 2009, 2010 Jaime E. Villate
E-mail: villate@fe.up.pt

Versão: 9 de Maio de 2011

ISBN: 978-972-99396-2-4

Este livro pode ser copiado e reproduzido livremente, respeitando os termos da *Licença Creative Commons Atribuição-Partilha* (versão 2.5 Portugal). Para obter uma cópia desta licença, visite `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/pt/` ou envie uma carta para Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

# Conteúdo

**Prefácio** vii

**1. Carga e força elétrica** 1
Atividade prática . . . 2
1.1. Estrutura atómica . . . 2
1.2. Eletrização . . . 4
1.3. Propriedades da carga . . . 5
1.4. Força entre cargas pontuais . . . 6
1.5. Campo elétrico . . . 8
1.6. Condutores e Isoladores . . . 10
1.7. Carga por indução . . . 11
Perguntas . . . 12
Problemas . . . 13

**2. Potencial, corrente e força eletromotriz** 15
Atividade prática . . . 16
2.1. Potencial eletrostático . . . 17
2.2. Pilhas químicas . . . 19
2.3. Força eletromotriz . . . 20
2.4. Condutores e semicondutores . . . 23
2.5. Corrente elétrica . . . 26
2.6. Potencial e campo nos condutores . . . 27
2.7. Potência elétrica . . . 29
Perguntas . . . 30
Problemas . . . 31

**3. Resistência elétrica** 33
Atividade prática . . . 34
3.1. Caraterísticas tensão-corrente . . . 34
3.2. Lei de Ohm . . . 35
3.3. Caraterística de uma bateria . . . 36
3.4. Código de cores . . . 38
3.5. Resistividade . . . 39
3.6. Supercondutividade . . . 42
3.7. Associações de resistências . . . 43

Perguntas . . . 47
Problemas . . . 48

**4. Condensadores** **51**
Atividade prática . . . 52
4.1. Capacidade de um condutor isolado . . . 52
4.2. Esfera condutora isolada . . . 53
4.3. Condensadores . . . 54
4.3.1. Condensador plano . . . 57
4.3.2. Ultracondensadores . . . 58
4.4. Energia elétrica armazenada num condensador . . . 60
4.5. Associações de condensadores . . . 61
Perguntas . . . 64
Problemas . . . 64

**5. Circuitos de corrente contínua** **67**
Atividade prática . . . 68
5.1. Diagramas de circuito . . . 68
5.2. Leis dos circuitos . . . 69
5.3. Díodos . . . 72
5.4. Circuitos RC . . . 74
5.4.1. Descarga de um condensador . . . 75
5.4.2. Acumulação de carga . . . 76
Perguntas . . . 79
Problemas . . . 80

**6. O campo elétrico** **83**
Atividade prática . . . 84
6.1. Campo elétrico produzido por cargas pontuais . . . 84
6.2. Propriedades das linhas de campo elétrico . . . 85
6.3. Fluxo elétrico . . . 88
6.4. Lei de Gauss . . . 90
6.4.1. Campo de um plano . . . 92
6.4.2. Campo de um fio retilíneo . . . 93
6.4.3. Campo de uma esfera condutora . . . 93
Perguntas . . . 94
Problemas . . . 95

**7. Potencial eletrostático** **97**
Atividade prática . . . 98
7.1. Potencial e campo elétrico . . . 98
7.2. Potencial de cargas pontuais . . . 100
7.3. Superfícies equipotenciais . . . 101
7.4. Pontos críticos do potencial . . . 103

7.5. Potencial e energia eletrostática . . . 104
7.6. Potencial nos condutores . . . 104
7.6.1. Potencial de uma esfera condutora . . . 107
Perguntas . . . 107
Problemas . . . 108

**8. O campo magnético** **111**
Atividade prática . . . 112
8.1. Força magnética . . . 112
8.2. Força magnética sobre condutores com corrente . . . 115
8.3. Momento magnético . . . 115
8.4. Força magnética sobre partículas com carga . . . 118
8.5. Campo magnético de um fio com corrente . . . 121
8.6. Força entre condutores com corrente . . . 125
Perguntas . . . 126
Problemas . . . 127

**9. Indução eletromagnética** **129**
Atividade prática . . . 130
9.1. Campo elétrico induzido . . . 130
9.2. Gerador de Faraday . . . 133
9.3. Lei de Faraday . . . 133
9.4. Gerador de corrente alternada . . . 136
9.5. Indutância . . . 137
9.6. Auto-indutância . . . 138
9.7. Circuito LR . . . 139
9.8. Motores de corrente contínua . . . 140
Perguntas . . . 141
Problemas . . . 142

**10. Circuitos de corrente alternada** **145**
Atividade prática . . . 146
10.1. Tensão alternada . . . 146
10.2. Tensão eficaz . . . 148
10.3. Reatância e impedância . . . 149
10.4. Associação de impedâncias . . . 153
10.5. Ressonância . . . 155
10.6. Conversão de tensão alternada em tensão contínua . . . 156
Perguntas . . . 157
Problemas . . . 158

**11. Transístores e amplificadores** **161**
11.1. Transístores bipolares . . . 162
11.2. Amplificadores . . . 164

11.3. Amplificador operacional . . . 165
11.4. Realimentação negativa . . . 166
11.5. Seguidor . . . 167
11.6. Amplificador não inversor . . . 168
11.7. Amplificador inversor . . . 169
11.8. Derivador e integrador . . . 170
Atividade prática . . . 172
Perguntas . . . 173
Problemas . . . 174

**12. Ondas eletromagnéticas e luz** **177**
12.1. Equações de Maxwell . . . 178
12.2. Campos induzidos . . . 180
12.3. Campo eletromagnético no vácuo . . . 181
12.4. Ondas planas polarizadas . . . 183
12.5. Ondas harmónicas . . . 186
12.6. Espetro eletromagnético . . . 187
12.7. Teoria ondulatória da luz . . . 189
12.8. Teoria corpuscular da luz . . . 190
12.9. Díodos emissores de luz (LED) . . . 192
Atividade prática . . . 194
Perguntas . . . 195
Problemas . . . 195

**A. Constantes e dados numéricos** **197**

**B. Formulário** **199**

**C. Créditos fotográficos** **201**

**Soluções das perguntas e problemas** **203**

**Bibliografia** **215**

**Índice** **217**

# Prefácio

O objetivo deste manual é preparar os estudantes para que possam compreender o funcionamento dos dispositivos elétricos e eletrónicos com que são confrontados na sua experiência quotidiana e os que venham a aparecer no futuro.

Este livro foi escrito como texto de apoio para a disciplina de Física 2, do segundo ano do Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação, na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Durante vários anos tenho lecionado um semestre de Eletromagnetismo, para alunos do segundo ano de Engenharia. Nos últimos anos temos introduzido algumas alterações no programa, para se enquadrar melhor com os novos programas do Ensino Secundário e os novos planos de estudo do Mestrados Integrados em Engenharia. Uma abordagem abstrata, baseada no estudo das equações de Maxwell, já não se enquadra dentro desses novos planos de estudo.

Por outra parte, a mudança rápida na tecnologia implica que alguns tópicos perdem interesse e outros tornam-se mais importantes. Por exemplo, os livro tradicionais de Física Universitária costumam abordar o funcionamento de um tubo de raios catódicos, mas não falam dos cristais líquidos nem dos LED. Na época em que foram escritos, os cristais líquidos e os LED provavelmente já tinham sido inventados mas não estavam a ser usados comercialmente, enquanto que qualquer aluno estaria familiarizado com o tubo de raios catódicos do televisor. Hoje em dia a situação é diferente; é cada vez mais difícil encontrar monitores ou televisores com tubos de raios catódicos, mas estamos rodeados de ecrãs de cristais líquidos (LCD) e díodos emissores de luz (LED). Tornou-se muito mais importante falar de cristais líquidos e díodos emissores de luz do que o tubo de raios catódicos.

Pareceu-me necessário também estender o programa tradicional da disciplina de Eletromagnetismo, para incluir alguns temas de Eletrónica. Para conseguir cobrir todo o programa num semestre, foi preciso prescindir de alguns temas. Assim, é dada uma menor ênfase à teoria do campo elétrico; o cálculo do campo e o potencial eletrostático produzidos por uma distribuição contínua só é considerado nos poucos casos em que existe alguma simetria.

Na sequência da disciplina de Física 1, em que são usadas de forma intensiva as ferramentas de software, aqui também é feito algum uso moderado do Sistema de Álgebra Computacional *Maxima* e são usados alguns conceitos simples de sistemas dinâmicos.

Nos quatro primeiros capítulos é feita uma introdução à eletrostática e à eletricidade de forma prática. O capítulo 5 é sobre teoria de circuitos de corrente contínua. Nos capítulos 6 e 7 são estudados o campo e o potencial elétrico de forma mais geral. Os capítulos

8 e 9 estão dedicados ao campo magnético e a indução eletromagnética. O capítulo 10 é também sobre teoria de circuitos, mas de corrente alternada. O tema do capítulo 11 são os amplificadores operacionais, começando por uma introdução muito breve aos transístores. Finalmente, no capítulo 12 são estudadas as ondas eletromagnéticas e a dualidade onda-partícula da luz.

Devo agradecer os meus alunos pela sua valiosa ajuda na correção de muitos erros e gralhas e pelo seu entusiasmo e interesse que têm sido fonte de inspiração para escrever este livro. São muitos alunos para indicar todos os seus nomes aqui. Agradeço também aos meus colegas com quem temos leccionado as disciplinas de Física 1 e 2, João Carvalho e Francisco Salzedas.

Jaime E. Villate
Porto, Setembro de 2009

# 1. Carga e força elétrica

A fotografia mostra a **máquina de Wimshurst**, inventada na década de 1880. Já no século XVIII existiam outras máquinas eletrostáticas usadas para gerar cargas eletrostáticas, usando o atrito; a inovação introduzida pela máquina de Wimshurst foi a separação de cargas usando **indução eletrostática**, em vez de atrito, conseguindo assim produzir cargas muito mais elevadas por meios mecânicos. Há muitos mecanismos envolvidos no funcionamento da máquina de Wimshurst, que serão estudados nos próximos capítulos: garrafa de Leiden, rigidez dielétrica, etc.

# Atividade prática

Cole aproximadamente 15 cm de fita-cola num lápis ou caneta, de forma a que, segurando no lápis, possa aproximar a fita-cola de outros objetos para observar a força entre a fita-cola e os objetos. Aproxime a fita-cola sempre pelo lado que não tem cola, para evitar que fique colada, e tente evitar que toque outros objetos, para não perder a carga acumulada nela.

**Figura 1.1.:** Força repulsiva entre pedaços de fita cola com cargas do mesmo sinal, e força atrativa entre pedaços com cargas de sinais opostos.

Comece por observar a força entre a fita-cola e outros objetos. O acetato do qual é feito a fita-cola adquire cargas elétricas facilmente. O simples fato de descolar um pedaço do rolo, faz com que fique com alguma carga; outros objetos, como a mesa, um caderno, etc., geralmente não têm qualquer carga elétrica.

Para observar a força entre diferentes cargas elétricas, cole dois pedaços de fita cola à mesa, cada um colado a um lápis que permita puxar a fita-cola, descolando-la da mesa e a seguir colocar o lápis por baixo dum livro na borda da mesa, ficando a fita-cola pendurada livremente para poder aproximar outros objetos dela. Observe a força entre os dois pedaços.

Repita a experiência com quatro pedaços de fita-cola, dois deles colados à mesa, e outros dois colados por cima dos primeiros. Para cada par de pedaços, descole o conjunto da mesa, enquanto descola os dois pedaços entre si. Em cada par de pedaços, o que estava por cima e o que estava por baixo ficam com cargas opostas (positiva ou negativa). Observe as forças entre as pedaços com cargas do mesmo sinal ou de sinais opostos. Observe também a força entre os pedaços de fita-cola com carga positiva ou negativa, e outros objetos sem carga.

## 1.1. Estrutura atómica

Toda a matéria é formada por átomos. Cada átomo tem um núcleo com dois tipos de partículas, **protões** e **neutrões**, muito perto uns dos outros. Entre os protões existe uma

força repulsiva designada de **força elétrica**. Entre neutrões não existe esse tipo de força, e entre um neutrão e um protão também não.

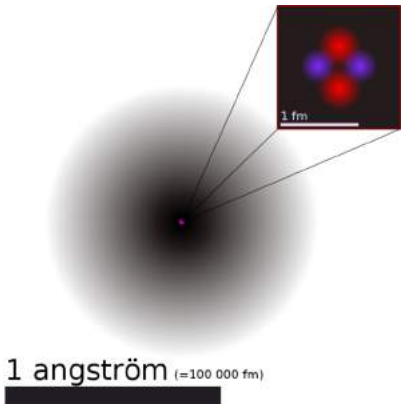



**Figura 1.2.:** Átomo de Hélio com dois eletrões e dois protões mais dois neutrões no núcleo.

À volta do núcleo existem partículas muito mais pequenas, os eletrões, com massa 2 000 vezes menor que a do protão ou neutrão, a uma distância aproximadamente 100 000 maior que o tamanho do núcleo. Entre dois eletrões observa-se uma força elétrica repulsiva da mesma natureza e grandeza que a força entre dois protões. Entre um protão e um eletrão existe também uma força semelhante, da mesma grandeza, contudo, atrativa em vez de repulsiva. Por tanto, existem dois tipos diferentes de carga elétrica, a dos protões e a dos eletrões; a força entre cargas semelhantes é repulsiva, enquanto que a força entre cargas diferentes é atrativa.

Um átomo com igual número de protões e de eletrões (átomo neutro) não produz forças elétricas sobre outras partículas. Consequentemente, as duas cargas têm sido designadas de **positiva** e **negativa**; o fato de que as forças entre eletrões ou protões tenham a mesma intensidade, é devido a que a carga de um eletrão, é exatamente igual à do protão, em valor absoluto, mas com sinal oposto. A carga total nula de um átomo neutro é, por tanto, consequência de que a soma das cargas dos eletrões e protões seja nula. A convenção que foi adoptada historicamente é que os eletrões têm carga negativa e os protões carga positiva.

A unidade usada para medir a carga é o **coulomb**, indicado com a letra C. A carga de qualquer protão é sempre igual e designada de **carga elementar**:

$$e = 1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} \tag{1.1}$$

os eletrões têm também todos a mesma carga, exatamente igual a $-e$.

## 1.2. Eletrização

É preciso uma energia muito elevada para conseguir remover um protão, ou neutrão, do núcleo. Isso só acontece no interior das estrelas, na camada mais externa da atmosfera, onde chocam partículas cósmicas com muita energia, ou nos aceleradores de partículas, onde os físicos conseguem reproduzir as energias no interior de uma estrela. No entanto, é mais fácil extrair eletrões de um átomo, ficando um **ião** positivo, com excesso de protões, ou transferir mais eletrões para um átomo neutro, ficando um ião negativo, com excesso de eletrões.

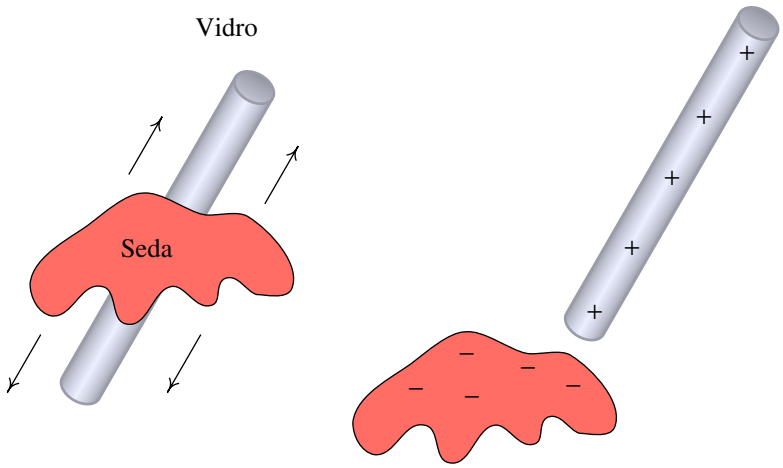



**Figura 1.3.:** Barra de vidro carregada esfregando-a com um pano de seda.

De fato, sempre que dois objetos diferentes entram em contato muito próximo, passam eletrões dos átomos de um dos objetos para o outro. O objeto que for mais susceptível a perder eletrões ficará **eletrizado** com carga positiva ($n$ protões a mais) e o objeto que for menos susceptível a perder os seus eletrões ficará com a mesma carga, mas negativa ($n$ eletrões a mais).

No caso da fita-cola, o contato próximo com outros objetos, devido à cola, faz passar eletrões de um para o outro. A frição entre dois objetos faz também aumentar a passagem de eletrões de um objeto para o outro, sendo usada como método para eletrizar objetos. Os diferentes materiais podem ser ordenados numa **série triboelétrica** (tabela 1.1), em que os materiais no topo da série são mais susceptíveis a ficar com carga positiva e os materiais no fim da lista têm uma maior tendência a ficar com carga negativa.

Por exemplo, se uma barra de vidro for esfregada com um pano de seda, a barra fica carregada com carga positiva e a seda com carga negativa, porque o vidro está por cima da seda na série triboelétrica. Mas se a mesma barra de vidro for esfregada com uma pele de coelho, a barra fica com carga negativa, e a pele com carga positiva, porque a pele de coelho está por cima do vidro na série triboelétrica.

**Tabela 1.1.:** Série triboelétrica.

| |
|---|
| Pele de coelho |
| Vidro |
| Cabelo humano |
| Lã |
| Chumbo |
| Seda |
| Alumínio |
| Papel |
| Madeira |
| Cobre |
| Prata |
| Borracha |
| Acetato |
| Esferovite |
| Vinil (PVC) |

## 1.3. Propriedades da carga

A carga elétrica é uma propriedade intrínseca da matéria, assim como a massa. A diferença da massa, existem dois tipos de cargas diferentes e existem partículas sem nenhuma carga. Duas propriedades muito importantes da carga elétrica são a sua quantização e a sua conservação.

**Quantização da carga**. Nas colisões entre partículas a altas energias são produzidas muitas outras novas partículas, diferentes dos eletrões, protões e neutrões. Todas as partículas observadas têm sempre uma carga que é um múltiplo inteiro da carga elementar $e$ (equação 1.1). Assim, a carga de qualquer objeto é sempre um múltiplo inteiro da carga elementar.

Nas experiências de eletrostática, as cargas produzidas são normalmente equivalentes a um número muito elevado de cargas elementares. Por tanto, nesse caso é uma boa aproximação admitir que a carga varia continuamente e não de forma discreta.

**Conservação da carga**. Em qualquer processo, a carga total inicial é igual à carga final. No caso dos fenómenos em que existe transferência de eletrões entre os átomos, isso é claro que tenha que ser assim. No caso da criação de novas partículas não teria que ser assim, mas de fato em todos os processos observados nos raios cósmicos, e nos aceleradores de partículas, existe sempre conservação da carga; se uma nova partícula for criada, com carga negativa, será criada uma outra partícula com carga positiva.

## 1.4. Força entre cargas pontuais

No século XVIII Benjamin Franklin descobriu que as cargas elétricas colocadas na superfície de um objeto metálico podem produzir forças elétricas elevadas nos corpos no exterior do objeto, mas não produzem nenhuma força nos corpos colocados no interior.

No século anterior Isaac Newton já tinha demonstrado de forma analítica que a força gravítica produzida por uma casca oca é nula no seu interior. Esse resultado é consequência da forma como a força gravítica entre partículas diminui em função do quadrado da distância.

Concluiu então Franklin que a força elétrica entre partículas com carga deveria ser também proporcional ao inverso do quadrado da distância entre as partículas. No entanto, uma diferença importante entre as forças elétrica e gravítica é que a força gravítica é sempre atrativa, enquanto que a força elétrica pode ser atrativa ou repulsiva:

- A força elétrica entre duas cargas com o mesmo sinal é repulsiva.
- A força elétrica entre duas cargas com sinais opostos é atrativa.

Vários anos após o trabalho de Franklin, Charles Coulomb fez experiências para estudar com precisão o módulo da força eletrostática entre duas cargas pontuais[1]

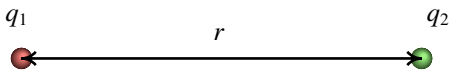



**Figura 1.4.:** Duas cargas pontuais, separadas por uma distância $r$.

A **lei de Coulomb** estabelece que o módulo da força elétrica entre duas cargas pontuais é diretamente proporcional ao valor absoluto de cada uma das cargas, e inversamente proporcional à distância ao quadrado

$$\boxed{F = \frac{k|q_1||q_2|}{K\,r^2}} \tag{1.2}$$

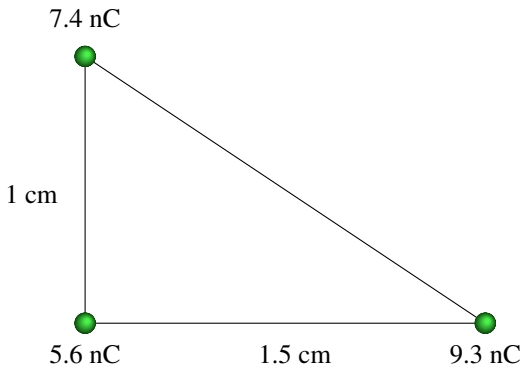
onde $r$ é a distância entre as cargas (figura 1.4), $q_1$ e $q_2$ são as cargas das duas partículas, $k$ é uma constante de proporcionalidade designada de **constante de Coulomb**, e $K$ é a **constante dielétrica** do meio que existir entre as duas cargas. A constante dielétrica do vácuo é exatamente igual a 1, e a constante do ar é muito próxima desse valor; assim, se entre as cargas existir ar, $K$ pode ser eliminada na equação 1.2. No sistema internacional de unidades, o valor da constante de Coulomb é:

$$k = 9 \times 10^9 \ \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{C^2}} \tag{1.3}$$

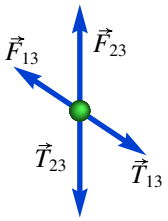
Outros meios diferentes do ar têm constantes dielétricas $K$ sempre maiores que o ar; consequentemente, a força elétrica será mais fraca se as cargas pontuais forem colocadas dentro de um meio diferente do ar.

[1] Uma carga pontual é uma distribuição de cargas numa pequena região do espaço.

**Exemplo 1.1**
*Três cargas pontuais estão ligadas por fios que formam um triângulo retângulo, como mostra a figura. (a) Calcule a tensão no fio que liga as cargas de* 7.4 nC *e* 9.3 nC. *(b) Se a carga de* 5.6 nC *fosse retirada, a tensão calculada na alínea a aumentava ou diminuía?*




**Resolução:** (*a*) O diagrama de forças sobre a partícula de carga 7.4 nC (designada de partícula número 3) é




onde $\vec{F}_{13}$ e $\vec{F}_{23}$ são as forças eletrostáticas produzidas pelas partículas 1 e 2, de cargas 9.3 nC e 5.6 nC, respetivamente, e $\vec{T}_{13}$, $\vec{T}_{23}$ são as tensões nos fios que ligam a partícula 3 a essas duas cargas. Para que a partícula permaneça em equilíbrio é necessário que:

$$F_{13} = T_{13} \qquad\qquad F_{23} = T_{23}$$

Antes de fazer as contas, é conveniente escrever o valor da constante $k$ nas unidades usadas no problema (nC e cm):

$$k = 9\times10^9\,\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}} = 9\times10^9\,\frac{10^6\mu\mathrm{N}\times10^4\mathrm{cm^2}}{10^{18}\mathrm{nC^2}} = 90\,\frac{\mu\mathrm{N\cdot cm^2}}{\mathrm{nC^2}}$$

Assim, admitindo ar à volta das cargas, a tensão no fio que liga as cargas 1 e 3 é:

$$T_{13} = F_{13} = \frac{k\,|q_1|\,|q_3|}{r^2} = \frac{90\times7.4\times9.3}{1^2+1.5^2}\,\mu\mathrm{N} = 1.9\ \mathrm{mN}$$

(*b*) O valor da tensão permanece igual, pois como mostramos na alínea anterior, $T_{13}$ não depende da força $F_{23}$ produzida pela partícula de 5.6 nC.

## 1.5. Campo elétrico

Uma forma diferente de explicar a força eletrostática entre duas partículas com carga consiste em admitir que cada carga elétrica cria à sua volta um campo de forças que atua sobre outras partículas com carga. Se colocarmos uma partícula com carga $q_0$ num ponto onde existe um **campo elétrico**, o resultado será uma força elétrica $\vec{F}$; o campo elétrico $\vec{E}$ define-se como a força por unidade de carga:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}} \tag{1.4}$$

Consequentemente, o campo elétrico num ponto é um vetor que indica a direção e o sentido da força elétrica que sentiria uma carga unitária positiva colocada nesse ponto.

De forma inversa, se soubermos que num ponto existe um campo elétrico $\vec{E}$, podemos calcular facilmente a força elétrica que atua sobre uma partícula com carga $q$, colocada nesse sítio: a força será $\vec{F} = q\vec{E}$. Precisamos apenas de conhecer o campo para calcular a força; não temos de saber quais são as cargas que deram origem a esse campo. No sistema SI, o campo elétrico tem unidades de newton sobre coulomb (N/C).

Como vimos, a força elétrica produzida por uma carga pontual positiva $Q$ sobre uma segunda carga de prova $q_0$ positiva é sempre uma força repulsiva, com módulo que diminui proporcionalmente ao quadrado da distância.

Assim, O campo elétrico produzido por uma carga pontual positiva $Q$ são vetores com direção e sentido a afastar-se da carga, como se mostra no lado esquerdo da figura 1.5.

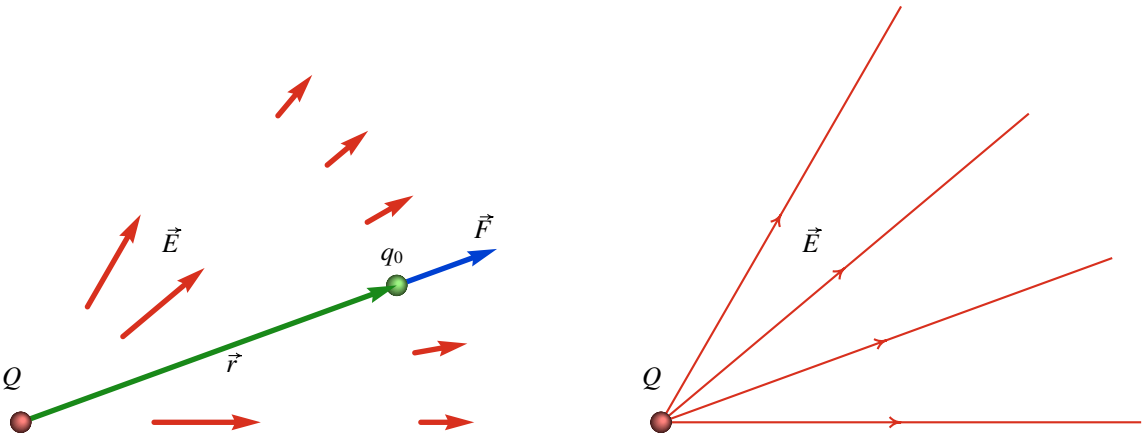



**Figura 1.5.:** Campo elétrico produzido por uma carga pontual positiva $Q$ e representação do campo usando linhas de campo.

Uma forma mais conveniente de representar esse campo vetorial consiste em desenhar alguma **linhas de campo**, como foi feito no lado direito da figura 1.5. Em cada ponto, a linha de campo que passa por esse ponto aponta na direção do campo. O módulo do campo é maior nas regiões onde as linhas de campo estão mais perto umas das outras.

Para calcular o valor do campo elétrico produzido pela carga pontual $Q$ num ponto, coloca-se uma carga de prova $q_0$ nesse ponto e divide-se a força elétrica pela carga $q_0$. Usando a lei de Coulomb, equação 1.2, obtemos o módulo do campo elétrico produzido pela carga $Q$:

$$E = \frac{k|Q|}{r^2} \tag{1.5}$$

onde $r$ é a distância desde a carga $Q$, que produz o campo, até o ponto onde se calcula o campo. O sinal da carga $Q$ indicará si o campo é repulsivo ($Q > 0$) ou atrativo ($Q < 0$).

O campo elétrico criado por uma única carga pontual é muito fraco para ser observado. Os campos que observamos mais facilmente são criados por muitas cargas; seria preciso somar vetorialmente todos os campos de cada carga para obter o campo total. No capítulo 6 retomaremos esse assunto; por enquanto, estaremos mais preocupados em estudar os efeitos produzidos pelo campo elétrico.

As linhas de campo elétrico produzidas por um sistema de muitas cargas já não serão retas, como na figura 1.5, mas poderão ser curvas, como no exemplo da figura 1.6.

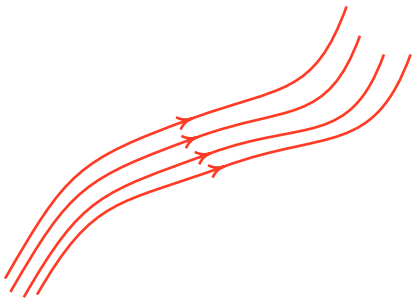


**Figura 1.6.:** Exemplo de um campo elétrico representado pelas linhas de campo.

**Exemplo 1.2**
*A força sobre uma carga de prova de* 5 nC*, num determinado ponto é igual a* $2 \times 10^{-4}$ N *e tem a direção do eixo dos x. Calcule o campo elétrico nesse ponto. Qual seria a força sobre um eletrão no mesmo ponto?*

**Resolução:** A partir da força calcula-se o campo:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{2 \times 10^{-4}\,\text{N}}{5\,\text{nC}}\vec{e}_x = 4 \times 10^4\,\vec{e}_x \left(\frac{\text{N}}{\text{C}}\right)$$

A força sobre um eletrão no mesmo ponto seria:

$$\vec{F} = -e\vec{E} = -1.60 \times 10^{-19}\,\text{C} \times 4 \times 10^4\,\vec{e}_x\,(\frac{\text{N}}{\text{C}}) = -6.4 \times 10^{-15}\,\vec{e}_x\,(\text{N})$$

## 1.6. Condutores e Isoladores

Em alguns materiais, como nos metais, o eletrão mais externo em cada átomo é livre de se movimentar pelo material; existe assim uma "nuvem" muito densa de eletrões (eletrões de condução), com densidade constante se o material for homogéneo. Esse tipo de material é designado de **condutor**.

Se o condutor for colocado numa região onde existe campo elétrico, como a nuvem eletrónica tem carga negativa, desloca-se em sentido oposto às linhas de campo. Assim, acumulam-se eletrões num extremo, ficando com excesso de carga negativa, e no extremo oposto aparece uma carga do mesmo valor mas com sinal positivo (falta de eletrões). Essa acumulação de cargas no condutor cria um campo interno oposto ao campo externo; quando os dois campos se anularem, o movimento da nuvem eletrónica cessará.

No lado esquerdo da figura 1.7 mostra-se o que acontece quando aproximamos uma barra, com carga positiva, a uma esfera condutora isolada. A nuvem eletrónica aproxima-se da barra. Se a barra tivesse carga negativa, a nuvem eletrónica afastava-se dela. Nos dois casos, o resultado é a indução de carga de sinal oposto perto da barra, e carga do mesmo sinal na região mais afastada da barra. A carga total da esfera continua a ser nula. Se a esfera não estivesse sobre um suporte isolador, as cargas do mesmo sinal da barra abandonavam a esfera, passando através do suporte para a terra.

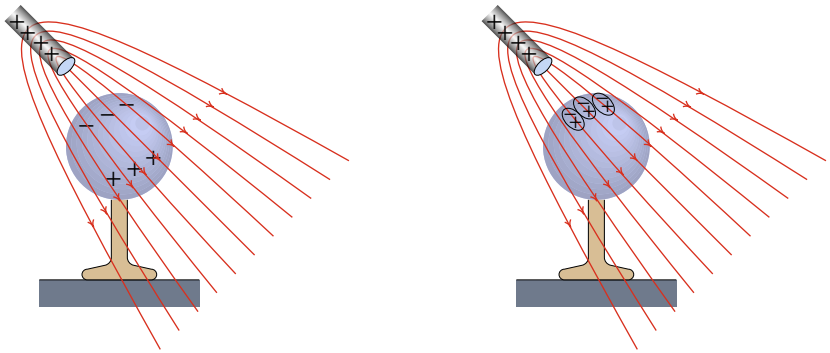


**Figura 1.7.:** Efeito de uma barra com carga sobre uma esfera condutora (esquerda) e uma esfera isoladora (direita).

Nos materiais **isoladores**, os eletrões estão ligados a cada átomo. Quando uma carga externa é colocada perto do material, os eletrões e protões de cada átomo deslocam-se na direção das linhas de campo mas em sentidos opostos, sem sair do átomo. Assim cada átomo deforma-se criando um pequeno **dipolo elétrico**; nomeadamente, um sistema com carga total nula, mas com as cargas positivas e negativas separadas por uma pequena distância.

O lado direito da figura 1.7 mostra a deformação de alguns dos átomos de uma esfera isoladora, quando é aproximada uma barra com carga positiva. Independentemente do sinal da carga da barra, em cada átomo as cargas de sinal oposto às carga da barra estarão mais perto da barra e a as cargas do mesmo sinal estarão mais afastadas; portanto, a força

resultante da carga externa sobre cada átomo neutro será sempre atrativa, independentemente do sinal da carga externa. Assim, um material isolador é sempre atraído por um objeto externo com carga, independentemente do sinal dessa carga.

## 1.7. Carga por indução

Um método usado para carregar dois condutores isolados, ficando com cargas idênticas mas de sinais opostos, é o método de carga por indução ilustrado na figura 1.8.

Os dois condutores isolados são colocados em contato. A seguir aproxima-se um objeto carregado, como se mostra na figura 1.8. O campo elétrico produzido pelo objeto carregado induz uma carga de sinal oposto no condutor que estiver mais próximo, e uma carga do mesmo sinal no condutor que estiver mais afastado. A seguir, separam-se os dois condutores mantendo o objeto carregado na mesma posição. Finalmente, retira-se o objeto carregado, ficando os dois condutores carregados com cargas opostas; em cada condutor as cargas distribuem-se pela superfície, devido à repulsão entre elas, mas as cargas dos dois condutores já não podem recombinar-se por não existir contato entre eles.

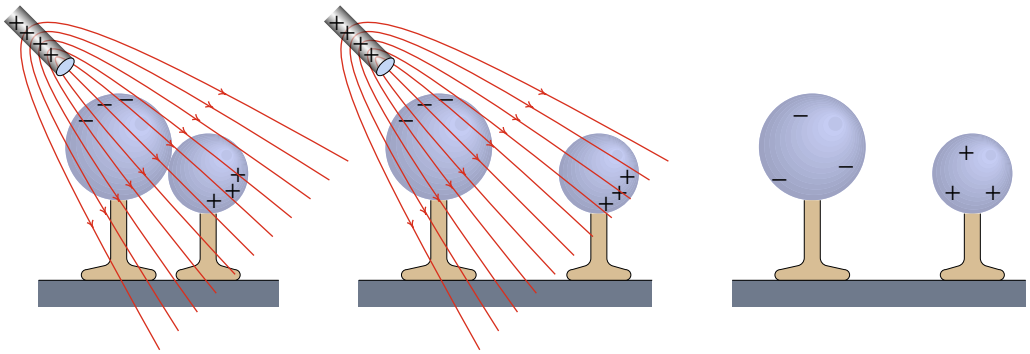


**Figura 1.8.:** Procedimento usado para carregar dois condutores com cargas iguais mas de sinais opostos.

Na máquina de Wimshurst, usa-se esse método para separar cargas de sinais opostos. Os condutores que entram em contato são duas pequenas lâminas metálicas diametralmente opostas sobre um disco isolador, quando passam por duas escovas metálicas ligadas a uma barra metálica (figura 1.9). As duas lâminas permanecem em contato apenas por alguns instantes, devido a que o disco roda.

Se no momento em que duas das lâminas de um disco entram em contato uma lâmina do disco oposto estiver carregada, essa carga induzirá cargas de sinais opostos nas duas lâminas que entraram em contato. Essas cargas opostas induzidas em duas regiões do disco induzem também cargas no disco oposto, porque nesse disco também há uma barra que liga temporariamente as lâminas diametralmente opostas.

Em cada disco, após induzirem cargas no disco oposto, as cargas saltam para dois coletores ligados a duas garrafas metálicas; uma das garrafas armazena carga positiva e a outra

**Figura 1.9.:** Máquina de Wimshurst.

carga negativa. Quando as cargas acumuladas nas garrafas forem elevadas produz-se uma descarga elétrica entre as pontas de duas barras ligadas às garrafas, ficando descarregadas. Essa descarga elétrica é um pequeno trovão com uma faísca bastante luminosa.

Os dois discos rodam em sentidos opostos e as duas barras que estabelecem o contato em cada disco e os dois coletores estão colocados de forma a que na rotação de cada lâmina no disco, primeiro seja induzida uma carga que a seguir induz carga oposta no disco oposto e logo passe para o coletor, ficando descarregada e pronta para iniciar outro ciclo.

A cada ciclo as cargas induzidas aumentam, porque cada lâmina é induzida pelas cargas de várias lâminas no disco oposto. Para iniciar o processo basta com que uma das lâminas tenha acumulado alguma pequena carga por contato com outro corpo como, por exemplo, o ar à volta. A localização inicial dessa lâmina com carga determinará qual das garrafas acumula carga positiva e qual negativa.

## Perguntas

**1.** Uma barra com carga positiva é colocada perto de uma folha de papel com carga nula. A força sobre o papel será:

A. Atrativa.

B. Repulsiva.

C. Nula.

D. Dependerá da barra ser condutora ou isoladora.

E. Atrativa se o papel estiver seco ou nula se estiver húmido.

**2.** O que faz com que um condutor elétrico seja diferente de um isolador é:

A. Ter mais eletrões do que protões.

B. Ter mais protões do que eletrões.

C. Ter mais eletrões do que o isolador.

D. Ter moléculas que se deformam mais facilmente.

E. Ter alguns eletrões livres.

**3.** Três cargas são colocadas sobre o eixo $x$: uma carga $q_1 = -6.0\,\mu$C em $x = -2,0$ m, uma carga $q_2 = +4.0\,\mu$C em $x = 0$ m e uma carga $q_3 = -6.0\,\mu$C em $x = +2.0$ m. Calcule o módulo da força sobre a carga $q_3$.

A. $2.4 \times 10^{-2}$ N.

B. $1.7 \times 10^{-2}$ N.

C. 0.

D. $2.7 \times 10^{-2}$ N.

E. $3.4 \times 10^{-2}$ N.

**4.** Temos três esferas condutoras, isoladas, idênticas, uma delas com carga $Q$ e as outras duas sem carga. Se as 3 esferas forem colocadas em contato, cada uma delas tocando as outras duas, e a seguir forem separadas:

A. Todas ficam sem carga.

B. Cada uma delas fica com carga $Q$.

C. Duas delas ficam com carga $Q/2$ e outra com carga $-Q/2$.

D. Cada uma delas fica com carga $Q/3$.

E. Uma delas fica com carga $Q$ e outra com carga $-Q$.

**5.** Uma esfera metálica montada num suporte isolador liga-se à terra com um fio condutor e a seguir aproxima-se da esfera uma barra de plástico com carga positiva. A ligação da esfera a terra é retirada e a seguir afasta-se a barra de plástico. Com que carga fica a esfera metálica?

A. Nula.

B. Positiva.

C. Negativa.

D. Diferente de zero, mas não é possível saber o sinal.

E. Positiva num extremo e negativa no extremo oposto.

# Problemas

**1.** Quando uma lâmina de acetato, eletrizada por frição, se aproxima a 1 cm de pequenos pedaços de papel sobre uma mesa, estes ascendem colando-se ao acetato. Cada pedaço de papel é aproximadamente um quadrado com 0.5 cm de lado, cortados de uma folha de papel de 80 g/m$^2$. Faça uma estimativa da ordem de grandeza da carga do acetato, admitindo que uma carga idêntica e de sinal oposto é induzida em cada pedaço de papel.

**2.** Duas cargas $q_1$ e $q_2$ têm a carga total $q_1 + q_2 = 10\,\mu$C. Quando estão a uma distância de 3 m, o módulo da força exercida por uma das cargas sobre a outra é igual a 24 mN. Calcule $q_1$ e $q_2$, se: ($a$) Ambas forem positivas. ($b$) Uma for positiva e a outra for negativa.

**3.** Admita que, num átomo de hidrogénio, a distância entre o protão no núcleo e o eletrão é de $5.3 \times 10^{-11}$ m. Calcule o campo elétrico devido ao núcleo, no ponto onde está o eletrão.

**4.** O campo elétrico na atmosfera terrestre é da ordem dos 150 N/C e é dirigido para o centro da Terra. Calcule a relação entre o peso de um eletrão e o módulo da força elétrica oposta exercida pelo campo elétrico da atmosfera (a massa do eletrão encontra-se no Apêndice A e admita que a aceleração da gravidade é 9.8 m/s$^2$).

**5.** Três cargas pontuais estão ligadas por dois fios isoladores de 2.65 cm cada um (ver figura). Calcule a tensão em cada fio.

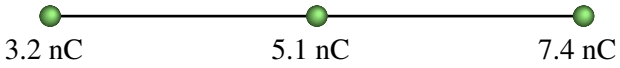



**Figura 1.10.:** Problema 5.

**6.** Entre duas placas paralelas de cargas opostas existe um campo elétrico uniforme. Um eletrão libertado na superfície da placa carregada negativamente será acelerado uniformemente, a partir do repouso, em direção da placa carregada positivamente (o peso do eletrão pode ser desprezado em comparação com a força elétrica e admitimos que as placas encontram-se dentro de um tubo com vácuo). Sabendo que a distância entre as placas é de 2.0 cm e que cada eletrão libertado demora 15 $\mu$s até atingir a placa positiva, calcule: (*a*) o módulo do campo elétrico (a massa do eletrão encontra-se no apêndice A) e (*b*) a velocidade com que os eletrões batem na placa positiva.

**7.** Um sistema de três cargas pontuais está em equilíbrio (a força eletrostática sobre cada carga é zero). Sabendo que duas das cargas são $q$ e $2q$, separadas por uma distância $d$, calcule o valor e a posição da terceira carga.

**8.** Calcule a força elétrica resultante que atua sobre cada uma das cargas representadas na figura, e o campo elétrico produzido pelas 3 cargas no ponto P.

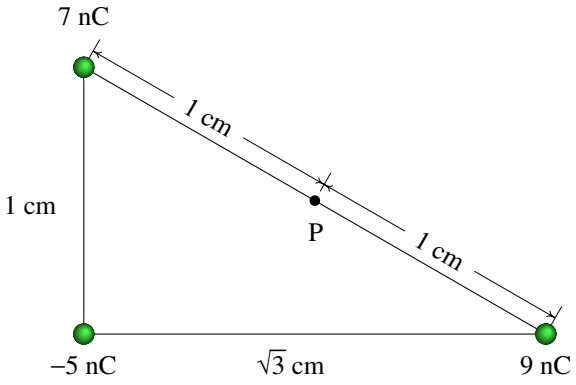



**Figura 1.11.:** Problema 8

# 2. Potencial, corrente e força eletromotriz

Uma forma simples de sentir o efeito da corrente elétrica consiste em colocar uma colher por baixo da língua e um pedaço de folha de alumínio por cima. Quando se junta a folha de alumínio à colher, sente-se um sabor amargo na língua, produzido pela passagem de cargas elétricas através da língua. Esse fenómeno foi descoberto por Alessandro Volta, no fim do século XVIII. É importante que o metal da folha seja diferente do metal da colher; as colheres são geralmente feitas de aço ou de prata. Na nossa língua existem iões positivos e negativos; um dos metais terá uma maior tendência a atrair os iões negativos e no outro metal os iões positivos serão atraídos, criando um fluxo de cargas através dos dois metais.

Volta reparou que o mesmo efeito podia ser obtido colocando dois metais diferentes, dentro de um líquido com uma solução química. Algumas combinações de metais produziam melhores resultados. Conseguiu intensificar mais o efeito colocando alternadamente vários discos de cobre e de zinco, separados por discos de papel humedecidos com água salgada; assim construiu a primeira pilha apresentada na foto acima.

# Atividade prática

Para montar circuitos elétricos de forma rápida pode ser usada uma placa de teste, também designada de *breadboard* (figura 2.1). Cada furo da placa tem o tamanho padrão usado nos terminais dos elementos de circuitos eletrónicos. Os furos estão agrupados em vários grupos de 5 furos vizinhos. Os 5 furos em cada um desses grupos estão interligados entre si e isolados dos outros grupos; na figura 2.1 mostra-se um grupo de furos interligados. Para estabelecer a conexão entre dois terminais de dois dispositivos diferentes, basta ligar os dois terminais em dois furos que esteja interligados.

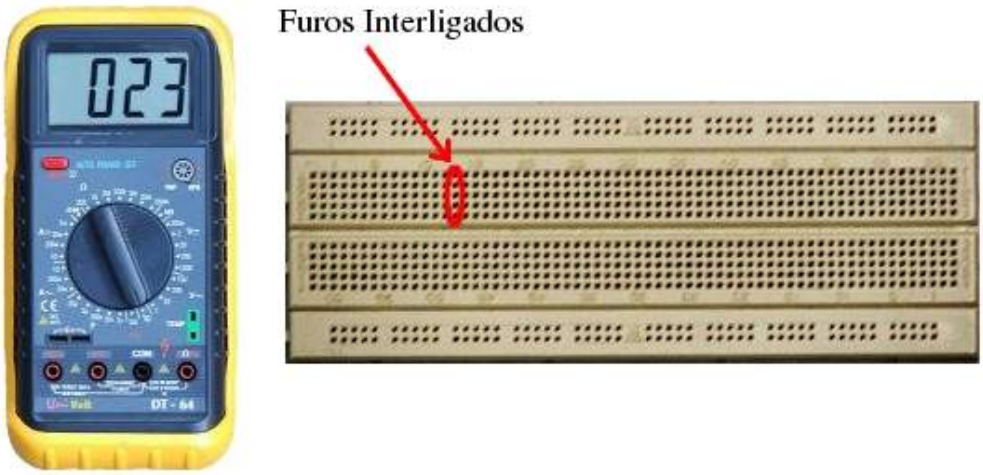



**Figura 2.1.:** Multímetro e placa de teste.

Ligue os terminais de um porta-lâmpada à placa de teste e ligue uma pilha de forma que a lâmpada acenda. A seguir use um multímetro para medir a diferença de potencial e a corrente na lâmpada.

Observe que o multímetro (figura 2.1) tem uma entrada identificada por COM que deverá ser usada para qualquer medição. A segunda entrada a ser usada poderá ser a que está identificada por V, se for medir diferenças de potencial, ou a que está identificada por A, caso pretenda medir a intensidade da corrente. O comutador do multímetro deverá ser deslocado para uma das escalas identificas com o símbolo V — se estiver a medir diferenças de potencial — ou para uma das escalas identificadas com o símbolo A — para medir correntes.

Quando estiver a medir uma corrente, poderá obter maior precisão se usar a entrada mA, em vez de A, mas antes de o fazer deverá conferir que a corrente não ultrapassa 200 mA, para não queimar o fusível do multímetro.

Para medir a diferença de potencial na lâmpada, ligam-se as duas entradas do multímetro aos terminais do porta-lâmpadas. Para medir a intensidade da corrente na lâmpada, deverá quebrar a ligação da pilha a um dos terminais da lâmpada, e ligar os dois cabos do multímetro de forma a fechar novamente o circuito.

## 2.1. Potencial eletrostático

As variáveis (vetoriais) de estado de uma partícula, são a sua posição $\vec{r}$ e a velocidade $\vec{v}$. Assim, o espaço de fase tem seis dimensões: ($x$, $y$, $z$, $v_x$, $v_y$, $v_z$). Se a partícula tem massa $m$ e carga $q$, e a única força que atua sobre a partícula é a força elétrica, as equações de movimento são:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{m}\vec{E} \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \tag{2.1}$$

em que $\vec{E}$ é o campo elétrico na posição $\vec{r}$.

Essas duas equações vetoriais podem ser combinadas para eliminar o tempo $t$, e obter uma terceira equação de movimento, que relaciona a posição com a velocidade:

$$\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \tag{2.2}$$

As soluções da equação 2.2 são as trajetórias no espaço de fase, ($\vec{r}$, $\vec{v}$). Integrando os dois lados da equação, desde um ponto inicial ($\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$) até um ponto final ($\vec{r}$, $\vec{v}$) no espaço de fase, obtém-se:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = q\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \tag{2.3}$$

A expressão no lado esquerdo é o aumento da energia cinética, e a expressão no lado direito é o trabalho realizado pela força elétrica.

A força eletrostática é sempre uma força conservativa. Isso implica que existe uma função $V(x,y,z)$, que permite escrever o integral no lado direito da equação 2.2 assim:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = V_0 - V(x,y,z) \tag{2.4}$$

onde $V_0 = V(x_0,y_0,z_0)$. A função $V$ é o **potencial eletrostático**. Assim, em função do potencial, a equação de movimento 2.2 assume uma forma mais simples:

$$\frac{1}{2}mv^2 + qV = \frac{1}{2}mv_0^2 + qV_0 \tag{2.5}$$

O termo:

$$\boxed{U = qV} \tag{2.6}$$

é a **energia potencial elétrica** da partícula. No sistema internacional de unidades, a unidade do potencial elétrico $V$ é o joule sobre coulomb, unidade essa que é designada de **volt** e denota-se com a letra V:

$$1\,\mathrm{V} = 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} \tag{2.7}$$

A equação 2.5 é a lei de conservação da energia mecânica, que neste caso estabelece que a soma da energia cinética mais a energia elétrica de uma partícula permanece constante. Essa equação também mostra que a unidade SI do campo elétrico que, como vimos no capítulo anterior, é N/C, também pode ser escrita como V/m.

É de salientar que, devido a que a carga $q$ pode ser positiva ou negativa, a energia elétrica $U$ de uma partícula com carga negativa será maior nos pontos onde o potencial for menor, enquanto que as partículas com carga positiva terão maior energia nos pontos onde o potencial for maior. Consequentemente, a equação 2.5 implica que, dentro de um campo elétrico, as partículas com carga positiva são aceleradas para a região com menor potencial e as partículas com carga negativa são aceleradas para a região com maior potencial.

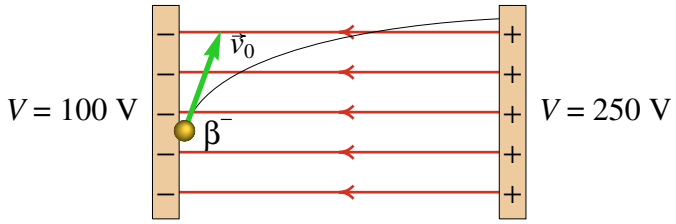
A lei da conservação da energia mecânica (equação 2.5) só é válida para cargas que se deslocam no vácuo. As cargas que se deslocam dentro de um material condutor, como um metal, ou dentro de um isolador, como o ar, estão sujeitas a forças dissipativas que fazem diminuir rápidamente a energia mecânica, até a carga ficar em repouso.

---

**Exemplo 2.1**

*Duas lâminas condutoras paralelas, dentro de um tubo com vácuo, têm cargas iguais mas de sinais opostos. O potencial na lâmina com carga negativa é constante, igual a* 100 V, *e o potencial na lâmina com carga positiva tem o valor constante de* 250 V. *A lâmina com carga negativa é feita dum material radioativo que emite radiação beta (eletrões que saem dos núcleos). Num instante é emitida uma partícula de radiação beta com velocidade inicial de módulo* 300 m/s *que é atraída pela outra lâmina. (a) Calcule o modulo da velocidade com que a partícula beta bate na lâmina com carga positiva. (b) Se a distância entre as duas lâminas for* 5 cm, *calcule o módulo do campo elétrico médio entre as lâminas.*

**Resoluçao:** (*a*) Como o campo segue o sentido da força elétrica sobre uma carga de prova positiva, as linhas de campo elétrico apontarão desde a lâmina positiva até a negativa. Podemos admitir que as linhas de campo são paralelas às lâminas:




Como a partícula beta se desloca no vácuo, existirá conservação da energia mecânica:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + qV_0 = \frac{1}{2}mv_f^2 + qV_f$$

onde, em unidades SI, $v_0 = 300$, $V_0 = 100$ e $V_f = 250$. A massa $m$ e a carga $q$ da partícula de radiação beta são os valores para o eletrão: $m = 9.11 \times 10^{-31}$ e $q = -1.60 \times 10^{-19}$. Assim, a lei da conservação da energia dá:

$$4.10 \times 10^{-26} - 1.60 \times 10^{-17} = 4.55 \times 10^{-31}\, v_f^2 - 4.00 \times 10^{-17}$$

e, resolvendo para $v_f$, obtemos a velocidade com que a partícula bate na lâmina positiva:

$$v_f = 7.26 \times 10^6 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

repare no valor elevado, aproximadamente 2.4% da velocidade da luz e no fato de que não é preciso saber em que direção foi disparada a partícula.

(*b*) O campo elétrico médio calcula-se admitindo que seja constante. Seguindo um percurso paralelo às linhas de campo, desde a lâmina positiva até a negativa, o integral de linha na equação 2.4 é calculado assim:

$$\int_0^{0.05} E\,\mathrm{d}s = 250 - 100 \qquad \Rightarrow \qquad 0.05\,E = 150$$

e, portanto, $E = 3000$ V/m.

## 2.2. Pilhas químicas

Um dos avanços mais importantes na história da eletricidade foi a invenção das pilhas químicas, que permitem fornecer a energia necessária para manter um fluxo constante de cargas num condutor, contrariando as forças dissipativas.

O biólogo italiano Luigi Galvani (1737-1798) fez várias experiências com cargas eletrostáticas e órgãos de animais. A figura 2.2 mostra o laboratório de Galvani, com um gerador eletrostático usado para produzir descargas elétricas nas pernas de uma rã. Enquanto fazia as experiências, descobriu que quando tocava com uma faca na perna de uma rã, no instante em que era produzida uma descarga elétrica num gerador eletrostático próximo dele, a perna da rã morta encolhia-se bruscamente, como se a rã estivesse viva.

Mais tarde conseguiu o mesmo efeito, sem precisar do gerador eletrostático, espetando dois fios de metais diferentes na perna da rã; quando juntava os dois fios, a perna da rã encolhia-se. Galvani atribuiu o efeito a uma eletricidade de origem animal.

O físico italiano Alessandro Volta (1745-1827) demonstrou que a origem da eletricidade observada por Galvani não eram os organismos vivos, mas que o contato entre dois metais diferentes dentro de qualquer solução química produz um fluxo de cargas elétricas (corrente), que nos seres vivos causa alguns efeitos: a contração dos músculos ou um sabor amargo quando colocamos dois fios de metais diferentes na nossa língua.

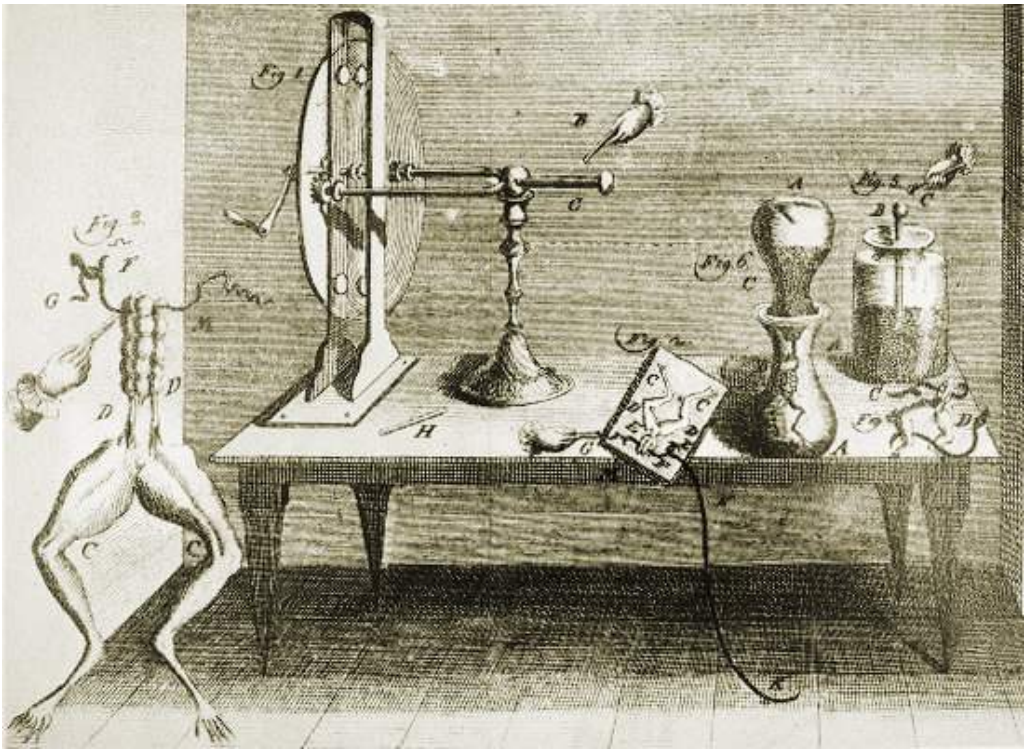


**Figura 2.2.:** Laboratório de Luigi Galvani.

Em 1800 Volta construiu a primeira pilha, colocando alternadamente discos de zinco e de cobre, separados entre si por discos de cartão molhado numa solução ácida. Repetindo a mesma sequência de discos várias vezes, conseguia produzir fluxos de carga mais elevados e sentir os seus efeitos, por exemplo, colocando as suas mãos dentro de dois recipientes com água salgada, ligados aos dois terminais da pilha; quando a pilha era formada por mais de 20 grupos de discos de cobre e zinco, o choque elétrico nas suas mãos tornava-se doloroso.

## 2.3. Força eletromotriz

Uma pilha química está composta por duas barras condutoras, designadas de **elétrodos**, embebidas dentro de uma solução química ( **eletrólito**). O eletrólito pode ser líquido ou sólido; o importante é que tenha iões positivos e negativos; por exemplo, um sal numa solução química é dissociado em iões positivos e negativos.

É necessário também que os condutores dos dois elétrodos sejam diferentes, para que um deles seja mais ativo do que o outro. Se dois metais são colocados, em contato, dentro de um eletrólito, um deles sofre corrosão esse metal que sofre corrosão diz-se que é o mais ativo dos dois. Diferentes materiais condutores podem ser ordenados numa **série galvánica**, em que os metais mais ativos aparecem no topo da lista. Por exemplo, a

**Figura 2.3.:** Volta apresenta a sua invenção, a pilha química, a Napoleão.

tabela 2.1 mostra a série galvánica quando o eletrólito usado for água do mar. A ordem na tabela galvánica pode ser diferente para diferentes eletrólitos.

A corrosão do metal mais ativo (o que aparecer primeiro na tabela 2.1) resulta da combinação dos iões negativos do eletrólito com os átomos desse metal, ficando o metal com excesso de carga negativa. Os eletrões circulam pela ligação entre os dois condutores, fora do eletrólito, passando para o elétrodo menos ativo (figura 2.4). Esses eletrões atraem os iões positivos para o metal menos ativo; a reação dos iões positivos do eletrólito com o material do elétrodo menos ativo introduz carga positiva nesse elétrodo.

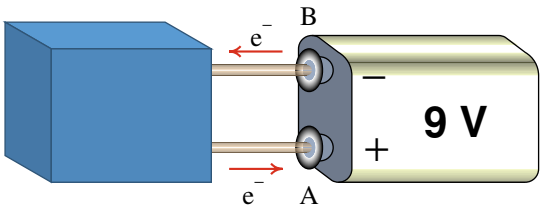



**Figura 2.4.:** Numa pilha química ligada a um condutor externo, saem eletrões do elétrodo negativo e entram no elétrodo positivo.

Assim, o elétrodo que corresponder ao condutor mais ativo será o elétrodo negativo da pilha, e o condutor menos ativo será o elétrodo positivo. Por exemplo, na pilha de Volta, o elétrodo positivo é o disco de cobre e o elétrodo negativo é o disco de zinco.

O potencial elétrico é maior no elétrodo positivo do que no negativo. Se ligarmos um condutor entre os dois elétrodos da pilha, os eletrões de condução seram deslocados para

**Tabela 2.1.:** Série galvánica (em relação à água do mar). Os condutores mais ativos estão colocados no início da tabela e os menos ativos no fim.

| |
|---|
| Magnésio |
| Zinco |
| Alumínio |
| Chumbo |
| Ferro |
| Cobre |
| Tungsténio |
| Prata |
| Ouro |
| Platina |
| Grafite |

o terminal positivo (maior potencial). Nesse percurso, a energia mecânica desse eletrões diminui, já que parte dessa energia é dissipada em calor, devido às colisões com os átomos do material.

Consequentemente, os eletrões que entram do elétrodo negativo para o condutor, têm maior energia mecânica do que os eletrões que saem do condutor e entram no elétrodo positivo. Essa diferença de energias, deverá ser igual à diferença entre as energias químicas das reações nos dois elétrodos, que é a causa para a passagem de cargas entre e condutor e os elétrodos.

A energia necessária para a reação química de corrosão do metal no elétrodo negativo é menor que a energia necessária para a reação entre o eletrólito e o metal do elétrodo positivo. Assim, os eletrões livres do elétrodo negativo têm maior energia mecânica do que os eletrões livres do elétrodo positivo.

Designa-se por **força eletromotriz** da pilha (ou de forma abreviada, *fem*), à diferença entre a energia de um eletrão no elétrodo negativo, menos a energia de um eletrão no elétrodo positivo, dividida pelo valor absoluto da carga do eletrão. Representaremos a fem com a letra $\varepsilon$. Esse valor está determinado pelas energias associadas às reações químicas entre o eletrólito e os elétrodos; quanto mais afastados estiverem na série galvánica os dois condutores usados para os elétrodos, maior será essa fem. A fem tem as mesmas unidades do potencial.

A tabela 2.2 mostra os materiais usados para os elétrodos e o eletrólito em vários tipos de pilhas produzidas industrialmente. O elétrodo da pilha onde há acumulação de cargas positivas do eletrólito é indicado com um sinal positivo (maior potencial) e o elétrodo onde há acumulação de cargas negativas (menor potencial) é indicado com um sinal negativo. O elétrodo negativo, ou **ânodo**, será o metal que tiver uma maior tendência a ser corroído pelo eletrólito, atraindo iões negativos (oxidação) e o elétrodo positivo, ou **cátodo** será o

metal que atrai os iões positivos do eletrólito (redução).

**Tabela 2.2.:** Alguns tipos de pilhas usados frequentemente.

| **Tipo** | **cátodo** | **ânodo** | **eletrólito** | **fem** |
|---|---|---|---|---|
| seca | carbono | zinco | dióxido de manganês/ cloreto de amonio | 1.5 V |
| alcalina | carbono | dióxido de manganês | hidróxido de potássio | 1.5 V |
| de mercúrio | óxido de mercúrio | zinco | hidróxido de sódio | 1.35 V |
| de óxido de prata | óxido de prata | zinco | hidróxido de sódio | 1.35 V |
| NiCd | óxido de níquel | cádmio | hidróxido de potássio | 1.2 V |
| NiMH | óxido de níquel | liga metálica | hidróxido de potássio | 1.2 V |
| de iões de lítio | óxido de lítio e cobalto | carbono | lítio | 3.7 V |

As pilhas nas três últimas linhas da tabela 2.2 são recarregáveis; isto é, as reações químicas nos elétrodos são reversíveis e se usarmos uma fonte externa para contrariar o sentido normal do fluxo das cargas, a carga total do eletrólito aumenta e os sais acumulados nos elétrodos diminui, ficando a pilha num estado semelhante ao inicial. Numa pilha que não seja recarregável, a inversão da corrente aquece a pilha com o perigo de poder explodir e sem ser recarregada.

## 2.4. Condutores e semicondutores

Vimos no capítulo anterior que num condutor sólido existe uma nuvem muito densa de eletrões de condução, que não estão ligados a nenhum átomo em particular. Por exemplo, os átomos de cobre no seu estado neutro têm 29 eletrões à volta do núcleo; 28 desses eletrões estão fortemente ligados ao átomo, enquanto que o último eletrão encontra-se numa órbita mais distante do núcleo e sai com maior facilidade para a nuvem de eletrões de condução.

Um pequeno deslocamento da nuvem de eletrões de condução faz acumular um excesso de cargas negativas num extremo e cargas positivas no extremo oposto. As cargas positivas são átomos com um eletrão a menos em relação ao número de protões. Quando se liga um fio condutor aos elétrodos de uma pilha, a nuvem eletrónica é atraída pelo elétrodo positivo e repelida pelo elétrodo negativo; estabelece-se no condutor um fluxo contínuo de eletrões desde o elétrodo nega tivo para o positivo.

Os semicondutores são materiais semelhantes aos isoladores, sem cargas de condução, mas que podem adquirir cargas de condução passando a ser condutores, através de diversos mecanismos: aumento da temperatura, incidência de luz, presença de cargas elétricas

externas ou existência de impurezas dentro do próprio material.

Atualmente os semicondutores são construídos a partir de silício ou germânio. Os átomos de silício e de germânio têm 4 eletrões de valência. Num cristal de silício ou germânio, os átomos estão colocados numa rede uniforme, como a que aparece na figura 2.5: os 4 eletrões de valência ligam cada átomo aos átomos na sua vizinhança.

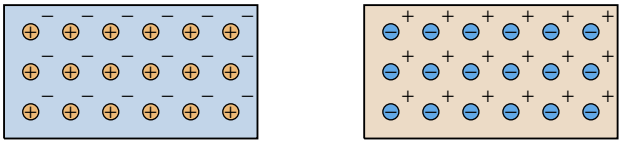
**Figura 2.5.:** Rede cristalina num cristal de silício ou de germânio.

Os átomos de arsénio têm 5 eletrões de valência. Se forem introduzidos alguns átomos de arsénio num cristal de silício, cada um desses átomos estará ligado aos átomos de silício na rede por meio de 4 dos seus eletrões de valência; o quinto eletrão de valência ficará livre contribuindo para uma nuvem de eletrões de condução. Obtém-se assim um **semicondutor tipo N**, capaz de conduzir cargas de um lado para outro, através do mesmo mecanismo que nos condutores (nuvem de eletrões de condução).

Os átomos de gálio têm três eletrões de valência. Nos **semicondutores tipo P** existem alguns átomos de gálio dentro de um cristal de silício (ou germânio); os 3 eletrões de valência de cada átomo de gálio ligam-no à rede, ficando um **buraco** onde um átomo de silício tem um eletrão de valência que não está ligado a outro eletrão de um átomo vizinho. Esses buracos também podem ser usados para transportar corrente; os eletrões podem deslocar-se para um átomo de gálio na vizinhança, onde exista um desses buracos.

Na figura 2.6 representam-se dois blocos semicondutores dos dois tipos, N e P. Cada bloco é um cristal de silício ou de germânio; os círculos representam os átomos de arsénio e de gálio introduzidos no cristal. Esses átomos encontram-se fixos na rede, em quanto que os eletrões de condução, no semicondutor N, e os buracos no semicondutor P, podem deslocar-se entre os sítios onde existam outros átomos de arsénio ou de gálio.

Se os extremos do um fio semicondutor do tipo P forem ligados aos elétrodos de uma pilha. Os buracos perto do elétrodo negativo serão preenchidos com eletrões fornecidos por esse elétrodo; esses eletrões poderão saltar para outros buracos vizinhos e assim sucessivamente. Os eletrões deslocam-se no sentido do elétrodo negativo para o positivo, mas saltam apenas de um buraco para o vizinho. No entanto, os buracos deslocam-se todo o percurso desde o elétrodo positivo até o negativo. É semelhante à circulação de automóveis à hora de ponta,



Semicondutor tipo N Semicondutor tipo P

**Figura 2.6.:** Os dois tipos de semicondutores.

quando há filas compatas; os automóveis conseguem apenas deslocar-se uma pequena distância no sentido da estrada, mas aparecem buracos na fila, que se deslocam rapidamente no sentido oposto.

Assim, quando ligamos um fio semicondutor entre os elétrodos da pilha, o resultado é o mesmo, independentemente do tipo de semicondutor: passagem de cargas positivas do elétrodo positivo para o negativo, e passagem de carga negativa do elétrodo negativo para o positivo.

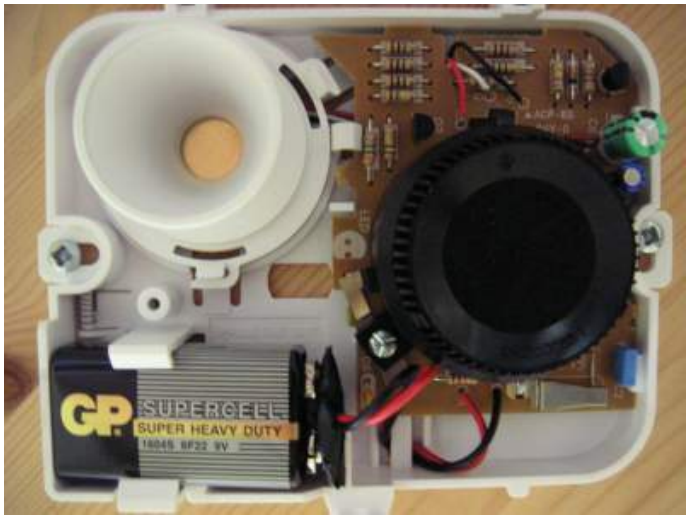



**Figura 2.7.:** Um detetor de fumo tem uma câmara de ionização (cilindro preto) onde a passagem de cargas é devida à produção de partículas alfa, com carga positiva, de uma amostra radioativa. A presença de fumo reduz o fluxo dessas cargas.

Nos condutores líquidos, gasosos ou em pó existem cargas de condução tanto negativas como positivas. Já vimos por exemplo o caso do eletrólito de uma pilha, onde existem iões positivos e negativos. Num gás ionizado também existem iões positivos e negativos que se podem deslocar dentro do gás. Quando existir uma fem entre dois pontos desse tipo de condutores, os iões positivos e negativos deslocam-se em sentidos opostos. O efeito resultante, em termos de condução de cargas, produzido pelo movimento dos dois tipos de iões é o mesmo: entram cargas negativas no elétrodo positivo e entram cargas positivas no elétrodo negativo.

Numa lâmpada fluorescente, uma força eletromotriz é usada para ionizar o gás. A ionização

do gás produz iões positivos e eletrões livres (ver figura 2.8). Se num determinado instante o elétrodo A estiver a maior potencial que o elétrodo B, os iões positivos deslocar-se-ão de A para B, e os eletrões de B para A. A passagem dessas partículas produz colisões com moléculas do gás que produzem mais iões e luz. Assim, uma vez aquecida, é precisa uma diferença de potencial menor para manter o fluxo de cargas na lâmpada.

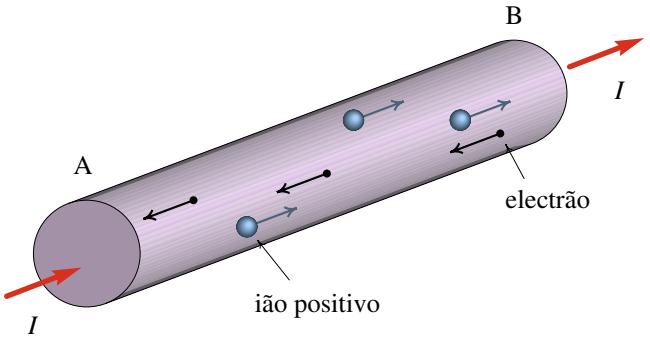



**Figura 2.8.:** Iões positivos e eletrões livres dentro de uma lâmpada fluorescente. No ponto o elétrodo A está a maior potencial que o elétrodo B.

## 2.5. Corrente elétrica

A **corrente elétrica**, designada por $I$, é o fluxo das cargas de condução dentro de um material. A intensidade da corrente é a taxa de transferência da carga, igual à carga $\mathrm{d}Q$ transferida durante um intervalo infinitesimal $\mathrm{d}t$ dividida pelo tempo:

$$\boxed{I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}} \tag{2.8}$$

Por convenção, usa-se o sentido da transferência de cargas positivas para definir o sentido da corrente elétrica. Assim, se as cargas de condução forem eletrões, como acontece num metal, o sentido da corrente será oposto ao sentido do movimento dos eletrões. Por exemplo, o fio metálico na figura 2.9 transporta corrente elétrica de B para A. Num determinado intervalo de tempo, a carga dos eletrões transportados de A para B é $-\Delta Q$; isso implica que a carga dos protões que se combinaram com os eletrões em B foi $\Delta Q$, e essa é também a carga dos protões que ficaram em A após a partida dos eletrões. Consequentemente, é equivalente considerar que houve transporte de carga $-\Delta Q$ de A para B, ou transporte de carga $\Delta Q$ de B para A. A corrente $I$ é definida no sentido do transporte da carga positiva.

Na lâmpada fluorescente da figura 2.8, o movimento dos dois tipos de partículas faz com que a carga positiva aumente em B e diminua em A, isto é, há corrente de $I$ A para B, no sentido indicado pelas setas na figura.

A carga total transferida durante um intervalo de tempo é o integral da corrente $I$, nesse intervalo:

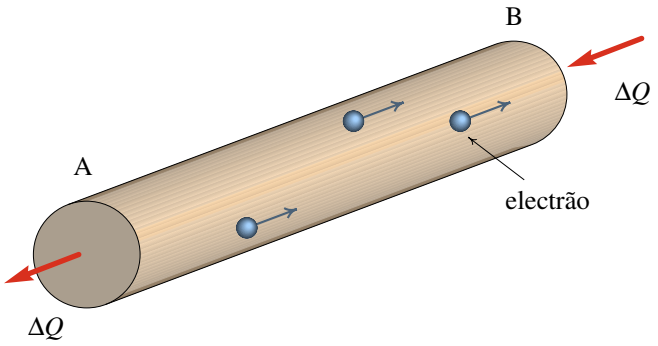



**Figura 2.9.:** Fio metálico a conduzir uma corrente $I$ de B para A.

$$\boxed{Q = \int_{t_1}^{t_2} I \, \mathrm{d}t} \tag{2.9}$$

No sistema internacional de unidades a unidade usada para medir a corrente elétrica é o ampere, designado pela letra A, que equivale à transferência de uma carga de um coulomb cada segundo:

$$1\ \mathrm{A} = 1\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} \tag{2.10}$$

## 2.6. Potencial e campo nos condutores

Consideremos um condutor cilíndrico e retilíneo com os dois extremos ligados aos terminais de uma bateria. Entre os extremos do condutor existirá uma diferença de potencial. Se A for o extremo que está ligado ao terminal negativo e B o extremo ligado ao terminal positivo, o potencial será maior em B do que em A: $V_\mathrm{B} > V_\mathrm{A}$.

As cargas de condução no condutor deslocam-se na direção do campo elétrico; no mesmo sentido do campo, se forem cargas positivas, ou no sentido oposto se forem negativas. Assim, as linhas de campo elétrico deverão ser retas paralelas ao eixo do cilindro, como se mostra no lado esquerdo da figura 2.10. Portanto, o campo tem módulo $E$ constante e segue a direção do deslocamento $\mathrm{d}s$ ao longo do condutor; o integral de linha que define a diferença de potencial, na equação 2.4, pode ser calculado facilmente:

$$\int_\mathrm{B}^\mathrm{A} E \, \mathrm{d}s = V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A} \qquad \Rightarrow \qquad V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A} = E\,\Delta s \tag{2.11}$$

onde $\Delta s$ é o comprimento do condutor. Assim, o módulo do campo no condutor é igual à

diferença de potencial entre os seus extremos, dividida pelo seu comprimento:

$$\boxed{E = \frac{\Delta V}{\Delta s}} \tag{2.12}$$

O resultado anterior também mostra que o campo aponta sempre desde o ponto com maior potencial até o ponto com menor potencial, já que para obtermos um resultado positivo, tivemos que integrar desde B até A.

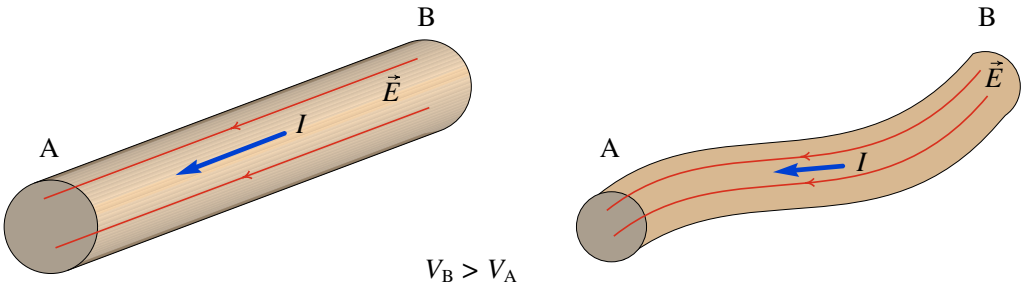



**Figura 2.10.:** Corrente e campo elétrico em dois condutores diferentes, ligados à mesma diferença de potencial.

Se o condutor na figura 2.10 for um semicondutor tipo N, as cargas de condução negativas deslocam-se no sentido oposto ao campo e, portanto, a corrente é no sentido do campo. Se o semicondutor for do tipo P, as cargas de condução positivas deslocam-se no sentido do campo e a corrente também é no sentido do campo. Consequentemente, independentemente do tipo de condutor ou semicondutor, a corrente será sempre na direção e sentido do campo elétrico, nomeadamente, desde o extremo com maior potencial para o extremo com menor potencial.

Se o condutor não for retilíneo, como no lado direito da figura 2.10, as linhas de campo já não são retas mas seguirão a direção do condutor. Isso implica que o campo vetorial $\vec{E}$ não é constante, mas se o condutor for homogéneo, as separação entre as linhas será sempre igual, indicando que o módulo $E$ do campo é constante. Nessas condições, o integral de linha do campo pode ainda ser calculado como foi feito na equação 2.11 e o resultado 2.12 também é válido.

Assim, quanto mais comprido for o fio condutor que liga os pontos A e B, com potenciais fixos $V_A$ e $V_B$, menor será o campo elétrico. A intensidade da corrente depende do módulo do campo elétrico e da área da seção transversal do fio; quanto maior for o módulo do campo, mais rápido será o movimento da nuvem de cargas de condução e maior será a corrente; quanto maior for a área da seção transversal, mais grosso será o fio e o movimento da nuvem de cargas de condução produzirá uma corrente maior. Na figura 2.10, a corrente é maior no condutor do lado esquerdo porque o comprimento é menor e a área da seção transversal é maior. No próximo capítulo estudaremos com mais pormenor essa relação.

## 2.7. Potência elétrica

O transporte de cargas de condução num condutor implica dissipação, geralmente na forma de calor, fenómeno esse designado de **efeito Joule**. Mas existem outros mecanismos de dissipação de energia mecânica em que essa energia é transformada em outros tipos de energia. Por exemplo, no caso de uma lâmpada parte da energia mecânica é dissipada em calor e outra parte é transformada em luz.

Consequentemente, se num condutor circula uma corrente desde um extremo A até outro extremo B, a energia mecânica das cargas de condução deverá ser menor em B do que em A e a diferença de potencial no condutor será $\Delta V = V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A}$ (o potencial deverá ser maior em B do que em A).

Se a corrente for **estacionária** (igual em todas as partes do condutor), a energia cinética das cargas de condução, por unidade de volume, permanece constante ao longo do condutor, e a diminuição da energia mecânica é devida unicamente à diminuição da energia potencial elétrica $U$. De acordo com a equação 2.6, por cada quantidade infinitesimal de carga $\mathrm{d}Q$ que for transferida no condutor, a energia elétrica dissipada será:

$$\mathrm{d}U = \Delta V \, \mathrm{d}Q \tag{2.13}$$

A potência dissipada em cada instante obtém-se dividindo $\mathrm{d}U$ pelo intervalo de tempo $\mathrm{d}t$ que demorou o transporte da carga $\mathrm{d}Q$; portanto, obtemos o seguinte resultado para a potência instantânea dissipada:

$$\boxed{P = \Delta V \, I} \tag{2.14}$$

Usando as definições do volt e do ampere, podemos conferir que o produto dessas duas unidades é de fato o watt (W), que é a unidade SI de potência.

Para manter a corrente no condutor, será preciso que a mesma potência $P$ dissipada no condutor seja fornecida pela bateria que está a estabelecer a diferença de potencial $\Delta V$. Assim, a potência fornecida pela bateria é também $\Delta V \, I$, em que $\Delta V$ é a diferença de potencial entre os terminais da bateria. Numa bateria "ideal" essa diferença de potencial é constante e igual ao valor da fem, $\varepsilon$; a potência fornecida por uma bateria ideal é:

$$\boxed{P = \varepsilon \, I} \tag{2.15}$$

Como veremos no próximo capítulo, numa bateria real $\Delta V$ diminui em função da corrente.

---

**Exemplo 2.2**

*Num condutor ligado a uma pilha ideal com fem de* 1.5 V, *circulam* $10^{16}$ *eletrões de condução durante* 2 *segundos. Calcule: (a) A corrente média. (b) A energia fornecida pela pilha durante esse intervalo. (c) A potência média fornecida pela pilha. (d) Se a carga inicial da pilha for* $3\ \mathrm{A}\cdot\mathrm{h}$ *e se fosse possível manter a mesma corrente média até a pilha descarregar totalmente, quanto tempo demorava a pilha a descarregar?*

**Resolução:** (*a*) A carga transferida é o valor absoluto da carga dos $10^{16}$ eletrões:

$$\Delta Q = 10^{16} \times 1.60 \times 10^{-19} = 1.60 \times 10^{-3}\ \text{C}$$

e a corrente média é:

$$I_\text{m} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{1.60 \times 10^{-3}}{2} = 0.8\ \text{mA}$$

(*b*) A energia fornecida pela pilha é igual à energia elétrica dissipada no condutor:

$$\Delta U = \Delta V\, \Delta Q = 1.5 \times 1.60 \times 10^{-3} = 2.4\ \text{mJ}$$

(*c*) A potência média fornecida é igual a essa energia, dividida pelo intervalo de tempo:

$$P_\text{m} = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{2.4 \times 10^{-3}}{2} = 1.2\ \text{mW}$$

(*d*) A carga que a pilha perde cada segundo é metade da carga calculada na alínea *a*: $\Delta Q = 0.8 \times 10^{-3}$ C. Como um coulomb é igual a 1 A·s, passando para unidades de ampere-hora (A·h) é:

$$\Delta Q = \frac{0.8 \times 10^{-3}}{3600}\ \text{A} \cdot \text{h} = 2.22 \times 10^{-7}\ \text{A} \cdot \text{h}$$

e o tempo total que era possível manter a mesma corrente média era:

$$\Delta t = \frac{3}{2.22 \times 10^{-7}} = 1.35 \times 10^{7}\ \text{s} \approx 156\ \text{dias}$$

# Perguntas

**1.** A força eletromotriz de uma pilha química:

A. É independente das reações químicas no seu interior.

B. Depende do tamanho da pilha.

C. Depende da sua carga máxima.

D. É independente do tamanho dos elétrodos.

E. Nenhuma das outras respostas.

**2.** Se o custo da energia elétrica fosse de 10 cêntimos por kilowatt-hora, quanto custaria manter uma torradeira de 660 W a funcionar durante meia hora?

A. 15 cêntimos.

B. 12 cêntimos.

C. 6.9 cêntimos.

D. 3.3 cêntimos.

E. 1.7 cêntimos.

**3.** A corrente num condutor aumenta linearmente desde um valor inicial de 3 A, em $t = 0$, até o valor final 6 A, em $t = 3$ h. A carga total transportada pelo condutor durante esse período é:

A. 48.6 kC
B. 32.4 kC
C. 64.8 kC
D. 97.2 kC
E. 16.2 kC

**4.** Uma pilha AA tem uma carga total de 8 A·h. Se for ligada a uma resistência produzindo uma corrente média de 50 mA durante 50 horas, com que percentagem da sua carga ficará após as 50 horas?

A. 31 %
B. 50 %
C. 21 %
D. 69 %
E. 131 %

**5.** Se cada segundo $4.0 \times 10^{18}$ eletrões e $1.5 \times 10^{18}$ protões atravessam a seção transversal de um tubo de descarga de hidrogénio, a corrente média no tubo é:

A. 0.40 A
B. 0.56 A
C. 0.88 A
D. 1.5 A
E. 4.0 A

# Problemas

**1.** Um eletrão é acelerado no vácuo, a partir do repouso, através de uma diferença de potencial de 220 V. Calcule a velocidade final do eletrão (a massa do eletrão encontra-se no apêndice A).

**2.** Num tubo de raios X os eletrões são acelerados por meio de um campo elétrico. Os eletrões são libertados do repouso, deslocam-se no vácuo através de uma região onde existe uma diferença de potencial de 4 kV, e chocam com um alvo emitindo radiação X. (*a*) Calcule a energia e a velocidade com que chocam os eletrões no alvo. (*b*) Se a variação de potencial se estender por uma distância de 8 dm, calcule o campo elétrico médio.

**3.** Uma bateria de automóvel tem uma carga máxima de 250 Ah, que corresponde à carga disponível quando a bateria está carregada a 100%. (*a*) Depois de algum uso, a bateria descarrega-se até 60%. Qual é a carga, em coulombs, com que fica a bateria? (*b*) Para recarregá-la, a bateria foi ligada a um carregador de 12 V. Inicialmente a corrente no carregador foi 7 A, e ao fim de 6 horas diminuiu até 3 A. Admitindo que a corrente diminuiu linearmente, com que percentagem da sua carga máxima fica a bateria no fim das 6 horas?

**4.** Uma calculadora pode funcionar com um adaptador que fornece 40 mA, a 3 V, ou com duas pilhas AA cada uma com 1.5 V e carga máxima de 8 Ah. Admitindo que a calculadora utiliza a mesma potência quando funciona a pilhas ou com o adaptador, por quanto tempo poderá funcionar antes de ser preciso mudar as pilhas?

**5.** Numa casa, o fusível do fogão elétrico na caixa de fusíveis é de 30 A. Qual é a potência máxima que pode ter o fogão? (admita diferença de potencial de 230 V).

**6.** Uma pilha recarregável, de Ni-MH, tem uma diferença de potencial de 1.2 V, e uma carga máxima de 2300 mAh. Calcule a energia máxima que pode armazenar a pilha.

**Figura 2.11.:** Problema 6

**7.** A corrente num cabo varia de acordo com a função $I = 20 + 3t^2$, onde $I$ mede-se em amperes e $t$ em segundos. (*a*) Que carga transporta o cabo desde $t = 0$ até $t = 10$ s? (*b*) Qual é o valor da corrente constante que transporta a mesma quantidade de carga no mesmo intervalo de tempo?

**8.** Num condutor ligado a uma pilha com fem de 1.5 V, circulam $10^{16}$ eletrões de condução durante 2 segundos. Calcule:

(*a*) A intensidade da corrente média.

(*b*) A energia fornecida pela fem durante esse intervalo.

(*c*) A potência média fornecida pela fem.

(*d*) Se a carga inical da pilha era de 3 A·h, com que carga fica após os 2 segundos?

**9.** Para manter uma temperatura de 20 graus num quarto, durante um dia de inverno, foi estimado que será precisa uma energia de 132 kJ cada minuto. Para fornecer essa energia será usado um aquecedor elétrico, ligado à tensão de 220 V disponível na casa.

(*a*) Calcule a intensidade da corrente que deverá circular pelo aquecedor.

(*b*) Se o custo da energia elétrica for de 12 cêntimos por kw·h, calcule o custo de manter ligado o aquecedor durante 10 minutos.

# 3. Resistência elétrica

"Falando de uma maneira geral, os efeitos da corrente no corpo humano são os seguintes:

- com menos do que 0.01 A: sensação de formigueiro ou nada se sente;
- 0.02 A: sensação de dor e fica-se agarrado;
- 0.03 A: perturbações respiratórias;
- 0.07 A: grandes dificuldades respiratórias;
- 0.1 A: morte devido a fibrilação;
- mais do que 0.2 A; não existe fibrilação mas verificam-se queimaduras muito graves e cessa a respiração.

A gama intermédia que vai de 0.1 a 0.2 A é, por estranho que pareça, a que origina a maior parte das mortes nas situações comuns, porque a este nível de intensidade inicia-se a fibrilação do coração, que consiste numa contração muscular espasmódica e incontrolada do coração. A quebra da corrente sanguínea daí resultante origina rapidamente a morte. Acima de 0.2 A o coração simplesmente pára, e as medidas normais de primeiros socorros podem restabelecer o seu funcionamento. Mas o único processo para deter a fibrilação é um outro choque elétrico controlado. Por isso, correntes entre 0.1 e 0.2 A são mais mortais do que correntes mais intensas. A intensidade que passa por uma vítima é geralmente determinada pela resistência da pele que vai de cerca de 1000 Ω para peles molhadas até 500 000 Ω para peles secas. A resistência interna é menor do que a da pele, estando compreendida entre 100 e 500 Ω. Para voltagens superiores a cerca de 240 V, geralmente resulta a perfuração da pele pela corrente."

Jearl Walker, *O Grande Circo da Física* Walker (1975).

# Atividade prática

Um potenciómetro (figura 3.1) é uma resistência variável com três terminais. Entre os dois terminais nos extremos existe uma resistência fixa. O terminal do meio está ligado a um contato móvel; quando se roda a barra do potenciómetro, a resistência entre o terminal do meio e um dos terminais nos extremos, varia desde zero até o valor da resistência fixa.

**Figura 3.1.:** Potenciómetro.

Com o ohmímetro confira o valor da resistência entre os dois extremos e entre o terminal central e um dos extremos, enquanto roda a barra do potenciómetro.

Ligue uma pilha entre os dois extremos do potenciómetro; obtém-se assim um **divisor de voltagem** pois a diferença de potencial entre um dos extremos do potenciómetro e o terminal no meio varia entre zero e a voltagem máxima da pilha, quando se faz rodar a barra. Confira com o voltímetro a variação da diferença de potencial no divisor de voltagem, entre 0 e um valor perto de 9 V.

Ligue uma resistência ao divisor de voltagem. Variando a diferença de potencial no divisor, entre 0 e o valor máximo, encontre os valores da corrente na resistência, para vários valores da diferença de potencial. Faça um gráfico com a corrente no eixo dos $x$ e a diferença de potencial no eixo dos $y$; esse gráfico designa-se por **caraterística tensão-corrente**. O declíve da reta obtida deverá ser igual ao valor da resistência.

## 3.1. Caraterísticas tensão-corrente

A potência elétrica que dissipa um elemento de um circuito, por exemplo, uma lâmpada, é igual ao produto da diferença de potencial e a corrente no elemento: $P = I\Delta V$. Duas lâmpadas diferentes podem ter diferentes valores da potência, com o mesmo valor da voltagem. Por exemplo, existem lâmpadas pequenas de 12 V com potências de 1 W e de 2 W; isso indica que para o mesmo valor da diferença de potencial, a corrente na lâmpada de 2 W é o dobro do que a corrente na lâmpada de 1 W.

Cada elemento de circuito tem uma curva caraterística que mostra os valores resultantes da corrente, $I$, para diferentes valores da diferença de potencial, $\Delta V$. A figura 3.2 mostra

algumas dessas curvas caraterísticas, para três elementos de circuito diferentes.

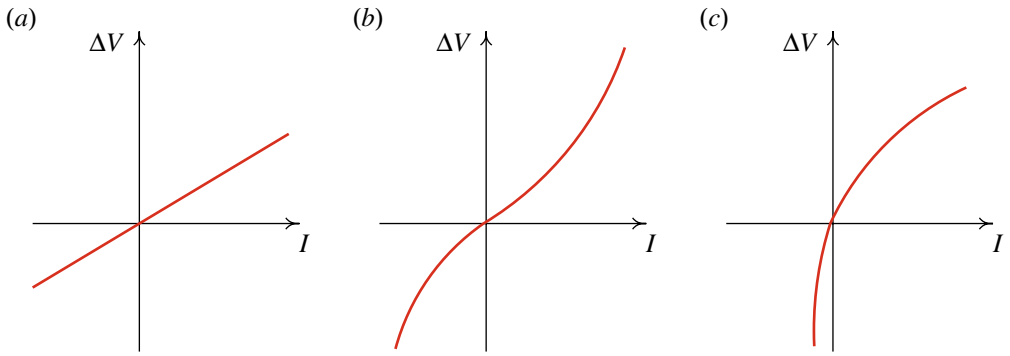



**Figura 3.2.:** Caraterísticas tensão-corrente de três dispositivos diferentes.

## 3.2. Lei de Ohm

Em alguns condutores (o caso *a* na figura 3.2), designados de **ohmicos**, a curva caraterística é uma reta que passa pela origem. Essa relação linear entre $I$ e $\Delta V$ expressa-se matemáticamente com a **Lei de Ohm**:

$$\boxed{\Delta V = RI} \tag{3.1}$$

Onde $R$ é uma constante chamada **resistência**, que corresponde ao declíve da caraterística tensão-corrente. Um condutor ohmico designa-se simplesmente de **resistência**. A figura 3.3 mostra o diagrama usado para representar nos circuitos uma resistência.

**Figura 3.3.:** Diagrama de circuito para uma resistência.

Nos materiais não ohmicos (*b* e *c* na figura 3.2) o declíve não é constante, o que indica que a resistência é diferente para diferentes valores da diferença de potencial.

No sistema internacional de unidades, a unidade usada para medir a resistência é o ohm, designado pela letra grega omega maiúscula, Ω,. Uma resistência de 1 ohm é uma resistência em que uma voltagem de 1 volt produz uma corrente de 1 ampere:

$$1\ \Omega = 1\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} \tag{3.2}$$

Usando a lei de Ohm, a potência dissipada por efeito Joule numa resistência ($P = I\,|Delta V$) pode ser escrita em função do valor da resistência:

$$P = RI^2 = \frac{\Delta V^2}{R} \tag{3.3}$$

assim, a especificação da potência de um dispositivo elétrico tem implícito um valor da diferença de potencial (tensão) que deverá ser usado para o seu correto funcionamento. Quanto maior for essa potencia nominal, menor será a resistência do dispositivo.

**Figura 3.4.:** A resistência de cada eletrodoméstico é igual ao quadrado da diferença de potencial à qual deverá ser ligado, dividido pela sua potência nominal.

## 3.3. Caraterística de uma bateria

Uma pilha ou bateria fornece energia eletrostática, devido às reações químicas entre os elétrodos e o eletrólito, mas também dissipa alguma energia em calor, devido à passagem de cargas pelos elétrodos e pelo eletrólito. Assim, a caraterística da bateria é a soma da função constante $\Delta V = \varepsilon$ mais a caraterística de uma resistência $r$ (figura 3.5).

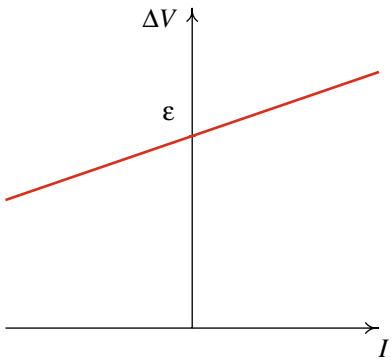



**Figura 3.5.:** Caraterística tensão-corrente de uma bateria.

A ordenada na origem é o valor da fem, e o declive é a **resistência interna** da pilha. Assim, o diagrama de circuito correspondente deverá incluir uma fem ligada em série com uma

resistência (ver figura 3.6). A barra mais fina e mais comprida, na representação gráfica da fem, representa o elétrodo positivo, e a barra mais curta e grossa o elétrodo negativo.

**Figura 3.6.:** Circuito equivalente para uma bateria.

No lado em que $I$ é negativa no gráfico 3.5, quer dizer que a corrente entra na bateria pelo elétrodo negativo e sai pelo elétrodo positivo. Esse é o modo normal de funcionamento das baterias; nessas condições a bateria funciona como **gerador**, as cargas de condução ganham energia potencial na passagem pela bateria. A bateria fornece potência elétrica; parte dessa potência fornecida pelas reações químicas é dissipada em calor dentro da própria bateria.

No lado em que $I$ é positiva no gráfico 3.5, a corrente entra na bateria pelo elétrodo positivo e sai pelo elétrodo negativo. As cargas perdem energia potencial durante a sua passagem pela bateria. Assim, deverá existir outra bateria externa que fornece energia às cargas de condução e que mantem a diferença de potencial entre os elétrodos por cima do valor da fem. Diz-se que a bateria está a funcionar como **receptor**.

É costume representar a corrente na bateria em valor absoluto. Assim, os dois modos de funcionamento da bateria aparecerão no mesmo quadrante da caraterística tensão-corrente (figura 3.7). Nos dois ramos, o valor absoluto do declive é igual à resistência interna $r$.

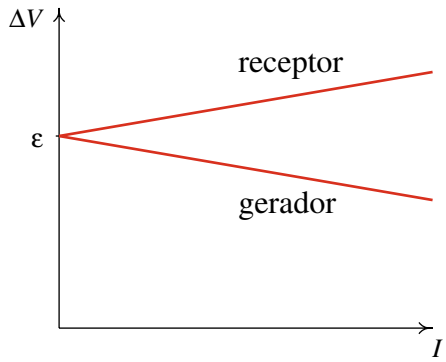



**Figura 3.7.:** Os dois ramos da caraterística tensão-corrente de uma bateria.

Na figura 3.8 mostram-se os dois modos de funcionamento usando o diagrama de circuito da bateria. No modo de gerador, a diferença de potencial entre os elétrodos é:

$$\boxed{\Delta V_{\text{gerador}} = \varepsilon - rI} \tag{3.4}$$

o sentido da corrente implica que as cargas de condução ganham energia na passagem pela fem, mas dissipam alguma dessa energia na resistência interna. A potência total fornecida pela bateria é a potencia fornecida pela fem ($I\varepsilon$), menos a potência dissipada na resistência interna ($I^2 r$).

gerador receptor

**Figura 3.8.:** Sentido da corrente numa bateria, nos dois modos de operação.

No modo de receptor, a diferença de potencial entre os elétrodos é:

$$\boxed{\Delta V_{\text{receptor}} = \varepsilon + rI} \tag{3.5}$$

neste caso, as cargas de condução perdem energia na fem e na resistência interna. A potência total dissipada na bateria será a soma da potência dissipada na fem ($I\varepsilon$), mais a potência dissipada na resistência interna ($I^2 r$). A parte da potência dissipada devida à fem, poderá ser usada para inverter as reações químicas entre os elétrodos e o eletrólito, se a bateria for recarregável; caso contrário, essa potência também é dissipada em calor.

## 3.4. Código de cores

As resistências usadas com frequência nos circuitos eletrónicos são pequenos cilindros de carbono, com um isolamento cerâmico.

Usam-se 4 riscas de cores para indicar o valor da resistência (figura 3.9). Três das riscas estão mais juntas; as duas primeiras dessas riscas (a primeira é a que estiver mais perto de um extremo) combinam-se para produzir um número com dois algarismos; cada cor corresponde a um algarismo (ver tabela 3.1). A terceira risca indica a ordem de grandeza desse número, em ohms, usando a mesma relação entre cores e algarismos usada nas duas primeiras riscas. A quarta risca diz qual é a tolerância (erro relativo) desse valor; os valores correspondentes a cada cor aparecem na tabela 3.1.

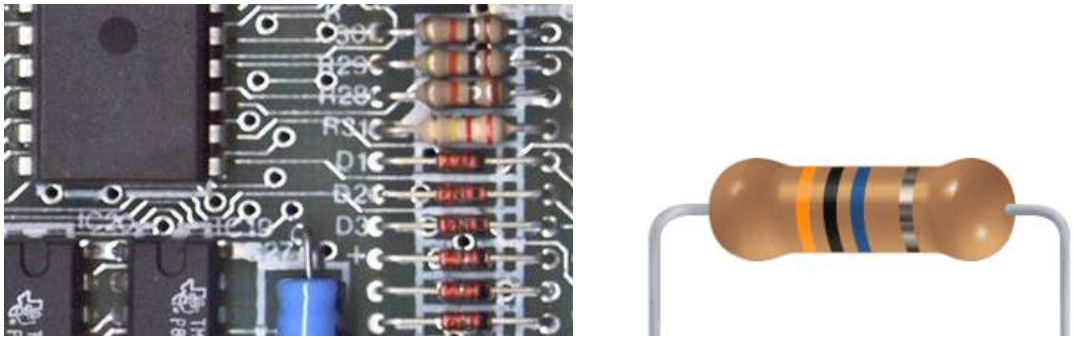


**Figura 3.9.:** Circuito impresso (PCB) incluindo algumas resistências e imagem amplificada de uma resistência.

Por exemplo, no caso apresentado na figura 3.9, as riscas são laranja, preta, azul e prateada, que conduzem ao valor: $30 \times 10^6\,\Omega(\pm 10\%)$.

**Tabela 3.1.:** Código de cores usado para as resistências.

| Cor | Algarismo | Tolerância |
|---|---|---|
| Preto | 0 | |
| Castanho | 1 | 1% |
| Vermelho | 2 | 2% |
| Laranja | 3 | |
| Amarelo | 4 | |
| Verde | 5 | 0.5% |
| Azul | 6 | 0.25% |
| Roxo | 7 | 0.1% |
| Cinza | 8 | 0.05% |
| Branco | 9 | |
| Dourado | | 5% |
| Prateado | | 10% |
| Nenhum | | 20% |

## 3.5. Resistividade

A resistência de um condutor ohmico é devida às colisões entre as cargas de condução e os átomos ou iões. As cargas de condução são aceleradas pela força eletrostática, mas devido às colisões acabam por atingir uma velocidade média constante. A resistência é determinada pela relação que existir entre a velocidade média atingida e a diferença de potencial (por unidade de comprimento) que produz o movimento. Os fatores que determinam o valor da resistência são: a natureza do material, o tamanho do condutor e a temperatura.

Para estudar a influência do tamanho do condutor, consideremos dois cilindros idênticos, de comprimento $L$ e área transversal $A$, cada um com resistência $R$, ligados em série ou em paralelo (figura 3.10).

No primeiro caso, é como se tivessemos um único cilindro de comprimento $2L$, se a corrente for $I$, a diferença de potencial será $RI + RI$, nomeadamente, a resistência do sistema é $2R$. Assim, duplicando o comprimento duplica-se a resistência: a resistência é diretamente proporcional ao comprimento do condutor.

No segundo caso, é como se tivessemos um único condutor de comprimento $L$ e área transversal $2A$. Nesse caso, se a diferença de potencial em cada um dos cilindros for $\Delta V$, a corrente em cada cilindro será $\Delta V/R$ e a corrente total será $2\Delta V/R$, que corresponde à corrente num sistema com resistência $R/2$. Assim, duplicando a área transversal, a resistência diminui a metade: a resistência é inversamente proporcional à área da seção transversal.

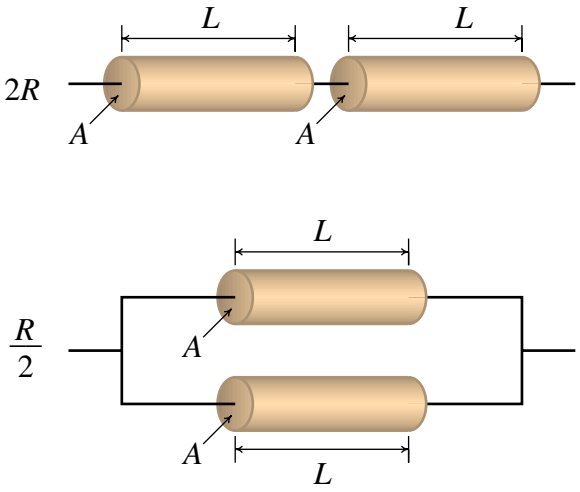



**Figura 3.10.:** Dois cilindros metálicos ligados em série e em paralelo.

Assim, a resistência de um condutor com comprimento $L$ e área transversal $A$ é:

$$\boxed{R = \rho \frac{L}{A}} \tag{3.6}$$

onde a constante de proporcionalidade, $\rho$, é a **resistividade** do material, que dependerá da temperatura, e da natureza do material.

Nos condutores ohmicos, a resistividade aumenta com a temperatura, em forma quase linear (figura 3.11), quando a temperatura não estiver perto do zero absoluto ($-273°$C)

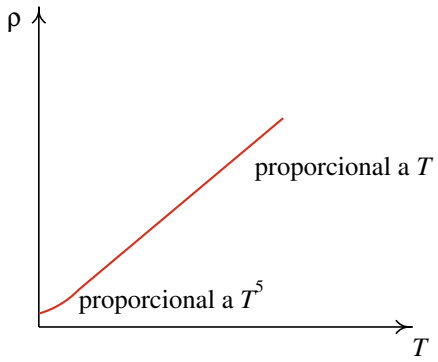



**Figura 3.11.:** Variação da resistividade em função da temperatura.

Define-se o **coeficiente de temperatura**:

$$\boxed{\alpha = \frac{(\rho - \rho_{20})/\rho_{20}}{T - 20}} \tag{3.7}$$

onde $\rho_{20}$ é o valor da resistividade a 20°C, e $T$ é a temperatura, medida em graus centígrados. Cada material tem um coeficiente de temperatura diferente; se soubermos o

coeficiente de temperatura e a resistividade a 20°C, poderemos calcular a resistividade a outras temperaturas. A tabela 3.2 mostra os valores medidos da resistividade a 20°C e do coeficiente de temperatura de vários metais.

**Tabela 3.2.:** Resistividade e coeficiente de temperatura de alguns metais.

| **Metal** | $\rho_{20}(\text{n}\Omega\cdot\text{m})$ | **Coeficiente de temperatura** ($^\circ\text{C}^{-1}$) |
|---|---|---|
| Alumínio | 28 | 0.0039 |
| Cobre | 17 | 0.0039 |
| Chumbo | 220 | 0.0043 |
| Ferro | 100 | 0.0050 |
| Níquel-crómio | 1000 | 0.0004 |
| Prata | 16 | 0.0038 |
| Tungsténio | 55 | 0.0045 |

**Exemplo 3.1**
*Um fio de cobre de raio* 0.0815 cm *e comprimento de* 40 cm *transporta uma corrente de* 1 A. *Calcule o campo elétrico dentro do fio e a diferença de potencial nos extremos, quando a temperatura for de* 30°C.

**Resolução**: A resistividade do fio calcula-se usando os valores para o cobre na tabela 3.2:

$$\rho(30^\circ\text{C}) = 1.7\times10^{-8}(1+0.0039\times10) = 1.766\times10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m}$$

A resistência do fio é:

$$R(30^\circ\text{C}) = \frac{\rho(30^\circ\text{C})\,L}{A} = \frac{1.766\times10^{-8}\times0.4}{\pi(0.000815)^2} = 3.39\ \text{m}\Omega$$

A diferença de potencial obtém-se a partir da lei de Ohm:

$$\Delta V = IR = 3.39\ \text{mV}$$

Como a seção transvesal do fio é constante, o módulo do campo elétrico também deve ser constante e, portanto, pode ser calculado como:

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta s} = \frac{3.39}{0.4} = 8.475\ \frac{\text{mV}}{\text{m}}$$

## 3.6. Supercondutividade

Em 1911, o físico holandês Heike Kamerlingh Onnes (1853-1926) descobriu que a resistividade de alguns condutores diminui drasticamente quando a temperatura se aproxima do zero absoluto ($-273°C$). O gráfico da figura 3.12 mostra os valores medidos por Onnes para a resistividade do mercúrio, perto dos 4 graus Kelvin ($-269°C$)

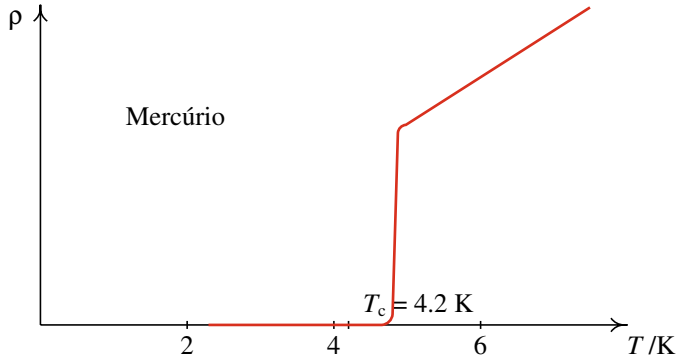



**Figura 3.12.:** Resistividade do mercúrio, a baixas temperaturas.

Por baixo da **temperatura crítica** (4.2 K no caso do mercúrio) a resistividade nos supercondutores diminui num fator de aproximadamente $10^{12}$, tornando-se praticamente nula. Isso implica a possibilidade de manter uma corrente a circular no supercondutor, durante alguns anos, sem existirem fontes de força eletromotriz!

Nas experiências de **levitação magnética** coloca-se um íman sobre um material supercondutor (figura 3.13). O íman induz no supercondutor correntes elétricas que produzem um campo magnético oposto ao campo do íman; em condições normais, essas correntes desaparecem rapidamente devido a efeitos dissipativos no supercondutor. No entanto, se o

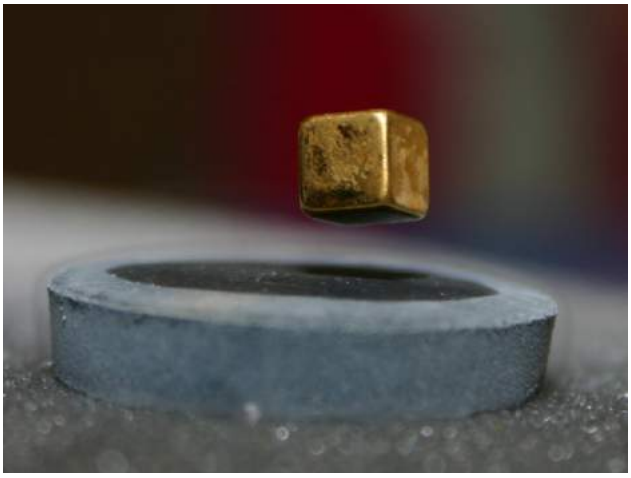


**Figura 3.13.:** Levitação magnética de um íman cúbico sobre um disco de material supercondutor.

sistema é arrefecido até a temperatura ser menor que a temperatura crítica do supercondutor, as correntes persistem e o disco eleva-se no ar devido à repulsão magnética (efeito Meissner).

Essas experiências têm a dificuldade de não ser fácil atingir temperaturas tão baixas e manté-las durante algum tempo. Mas hoje em dia já foram descobertos materiais com temperaturas críticas muito mais elevadas, embora ainda na ordem dos $-150^{\circ}$ C..

O princípio da levitação magnética já está a ser aplicado comercialmente nos comboios **maglev** em Xangai e Japão (figura 3.14). O comboio possui barras supercondutoras em vez de rodas, e os carris são substituídos por uma calha onde vários eletro-ímanes produzem campos magnéticos no momento em que o comboio passa perto deles. A levitação magnética reduz drasticamente o atrito entre o comboio e a calha, sendo preciso uma força propulsora muito menor; esse tipo de comboios podem alcançar velocidades superiores a 500 km/h. A força propulsora é produzida alternando os campos magnéticos dos eletro-ímanes na calha, o qual produz, para além da força vertical que contraria o peso, uma força que faz acelerar ou travar o comboio.

**Figura 3.14.:** O comboio Maglev de Xangai.

## 3.7. Associações de resistências

A caraterística tensão-corrente de um sistema de várias resistência tem sempre o mesmo aspeto que a caraterística de uma única resistência; nomeadamente, é uma reta que passa pela origem. O declive dessa reta é a resistência equivalente. Podemos usar algumas regras simples para calcular a resistência equivalente, quando as resistências estiverem ligadas em série ou em paralelo.

Duas resistências estarão ligadas em série, , quando uma estiver a seguir à outra, sem nenhum outro elemento de circuito no meio, como se mostra na figura 3.15.

**Figura 3.15.:** Duas resistências ligadas em série.

Num sistema de duas resistências ligadas em série, a corrente é a mesma nas duas resistências. A diferença de potencial no sistema é a soma das diferenças de potencial em cada resistência:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = (R_1 + R_2)\, I \tag{3.8}$$

Assim, o sistema é equivalente a uma única resistência $R_\mathrm{s}$ com valor igual à soma das duas resistências.

$$\boxed{R_\mathrm{s} = R_1 + R_2} \tag{3.9}$$

Diz-se que duas resistências estão ligadas em paralelo , se os dois terminais de cada uma das resistências estiverem ligados entre os mesmos pontos, como mostra a figura 3.16.

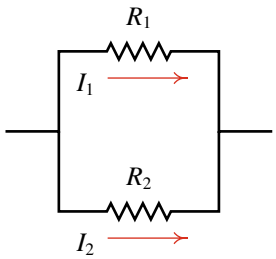



**Figura 3.16.:** Duas resistências em paralelo.

Num sistema de duas resistências ligadas em paralelo, a diferença de potencial é a mesma nas duas resistências. A corrente no sistema é a soma das correntes em cada resistência:

$$I = I_1 + I_2 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \Delta V \tag{3.10}$$

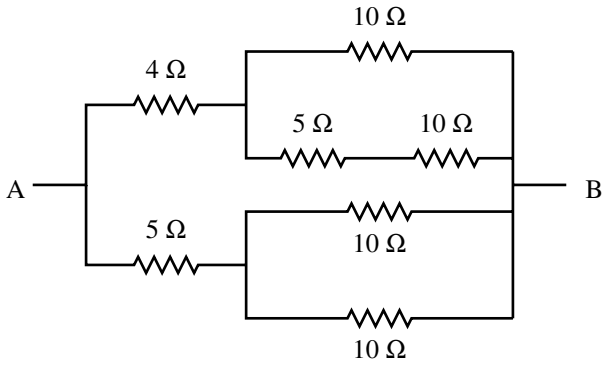
Assim, o sistema é equivalente a uma única resistência $R_\mathrm{p}$ que verifica a equação

$$\boxed{\frac{1}{R_\mathrm{p}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \tag{3.11}$$

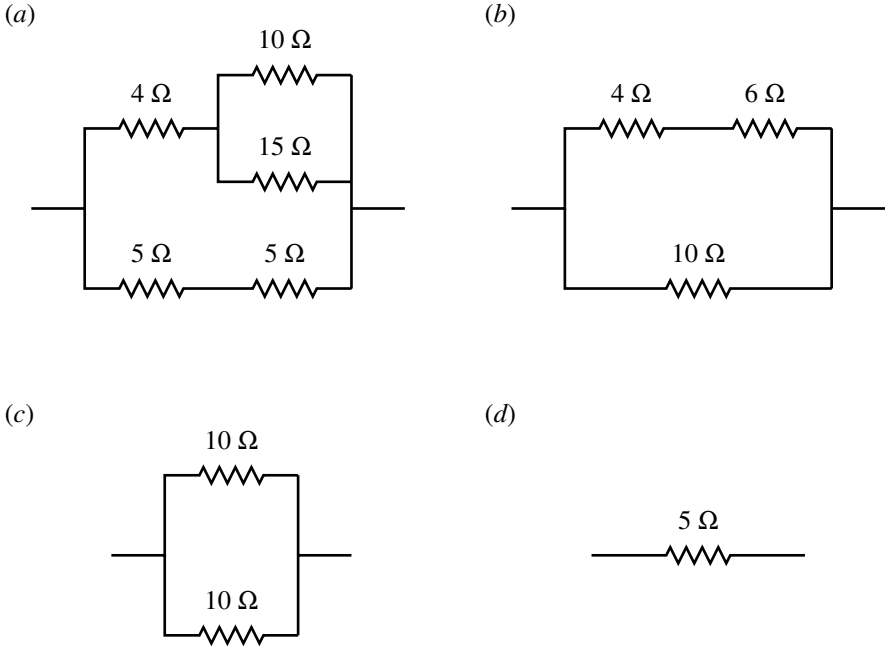
Em alguns sistemas com várias resistências é possível simplificar o sistema substituindo sucessivamente as resistências que se encontrarem em série ou em paralelo por uma resistência equivalente, até obter uma única resistência equivalente.

**Exemplo 3.2**

*Considere o circuito da figura e calcule a resistência equivalente entre os pontos* A e B, *e a corrente que circula por cada uma das resistências quando a diferença de potencial* $V_{AB}$ *é igual a* 12 V.




Se substituirmos sucessivamente as resistências ligadas em série e em paralelo, o circuito entre A e B pode ser simplificado da seguinte forma:




Conhecida a resistência equivalente, $R_{eq} = 5\ \Omega$, a corrente entre os pontos A e B pode ser facilmente calculada:

$$I = \frac{12}{5} = 2.4\ \text{A}\ .$$

No circuito da figura (*c*), a corrente de 2.4 A distribuir-se-á uniformemente pelas duas resistências de 10 Ω, e a corrente em cada uma delas será 1.2 A. No circuito da figura (*b*),

a corrente em cada uma das 3 resistências será a mesma e igual a 1.2 A. No circuito (*a*) esta corrente repartir-se-á pelas resistências em paralelo (10 Ω e 5 Ω); como a diferença de potencial nessas duas resistências é $1.2 \times 6 = 7.2$, as correntes nessas duas resistências são:

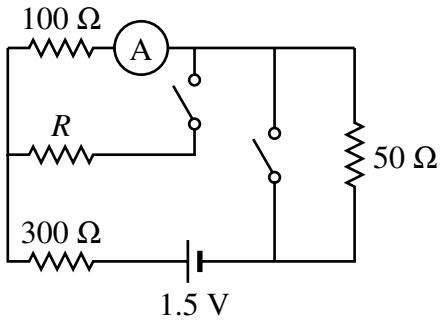
$$I_{10} = \frac{7.2}{10} = 0.72 \text{ A}$$
$$I_{15} = \frac{7.2}{15} = 0.48 \text{ A}$$

Assim, do ponto A saem duas correntes de 1.2 A das resistências de 4 Ω e 5 Ω. Em B entram quatro correntes: uma corrente de 0.72 A na resistência de 10 Ω na parte superior, uma corrente de 0.48 A que percorre as resistências de 10 Ω e 5 Ω em série, e duas correntes de 0.6 A que passam por cada uma das resistências de 10 Ω em paralelo. A corrente total que entra por B e sai por A é 2.4 A.

---

**Exemplo 3.3**

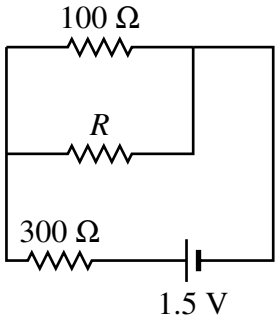
*No circuito representado pelo diagrama da figura, a leitura do amperímetro é a mesma quando os dois interruptores estão abertos e quando os dois estão fechados. Calcule a resistência R.*




**Resolução**: Quando os dois interruptores estão abertos, não passa nenhuma corrente pela resistência *R*, e as 3 resistências de 300 Ω, 100 Ω e 50 Ω estão em série, porque por elas passa a mesma corrente. Assim, a resistência equivalente é 450 Ω e a corrente medida no amperímetro é:

$$I_1 = \frac{1.5}{450} = \frac{1}{300} \text{ A}$$

Quando os dois interruptores estão fechados, não passa nenhuma corrente pela resistência de 50 Ω e o circuito equivalente é:




Como a leitura do amperímetro é a mesma do que no caso anterior, a corrente que passa pela resistência de 100 Ω é também $I_1$ e, portanto, a diferença de potencial nas resistências de 100 Ω e $R$ é:

$$\Delta V_1 = 100\, I_1 = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}\ \text{V}$$

A diferença de potencial na resistência de 300 Ω é:

$$\Delta V_2 = 1.5 - \Delta V_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}\ \text{V}$$

e a corrente nessa resistência é:

$$I_2 = \frac{\Delta V_2}{300} = \frac{7}{1800}\ \text{A}$$

Assim, a corrente que passa por $R$ é:

$$I_3 = I_2 - I_1 = \frac{7}{1800} - \frac{1}{300} = \frac{1}{1800}\ \text{A}$$

finalmente, o valor de $R$ é:

$$R = \frac{\Delta V_1}{I_3} = \frac{1800}{3} = 600\ \Omega$$

# Perguntas

**1.** A resistência de um condutor metálico é igual a 6.5 kΩ, a 20°C. Quando a temperatura aumenta para 60°C, a resistência aumenta para 8 kΩ. Calcule o valor do coeficiente de temperatura, $\alpha$, a 20°C (todas as respostas têm unidades de $^\circ\text{C}^{-1}$)

A. 0.0049
B. 0.0058
C. 0.0250
D. 0.0115
E. 0.0038

**2.** Aplica-se a mesma diferença de potencial a dois cabos diferentes. O cabo A transporta duas vezes mais corrente do que o cabo B. Se a resistência do cabo B for $R$, qual será a resistência do cabo A?

A. $R$ C. $R/2$ E. $R/4$
B. $2R$ D. $4R$

**3.** Dois fios de cobre têm o mesmo volume, mas o fio 2 é 20% mais comprido que o fio 1. A relação entre as resistências dos dois fios, $R_2/R_1$, é igual a:

A. 1.20 C. 1.11 E. 1.44
B. 0.83 D. 0.91

**4.** Duas lâmpadas importadas da América do Sul têm as especificações 110 V, 75 W. As duas lâmpadas foram ligadas em série na rede elétrica portuguesa com 220 V. Qual das seguintes lâmpadas produz a mesma intensidade luminosa, quando forem ligadas a 220 V?

A. 220 V, 75 W D. 110 V, 75 W
B. 110 V, 150 W E. 55 V, 150 W
C. 220 V, 150 W

**5.** Três aquecedores elétricos idênticos de 1000 W a 100 V (nomeadamente, se um deles for ligado a uma tensão de 100 V, dissipa 1000 W) são ligados em série a uma tensão de 120 V; qual será a potência dissipada pelo sistema?

A. 0.48 kW D. 3.0 kW
B. 1.0 kW E. 3.6 kW
C. 1.2 kW

# Problemas

**1.** A temperatura num dado momento é 12°C. Quanto deve aumentar a temperatura para que a resistência de um fio de cobre aumente 10 %?

**2.** Um fio condutor de 1 m de comprimento tem uma resistência de 0.3 Ω. O fio é esticado até o seu comprimento aumentar para 2 m. Qual será o novo valor da resistência?

**3.** A diferença de potencial entre os elétrodos de uma bateria é 3 V quando a bateria é percorrida por uma corrente de 4 A, no sentido do elétrodo negativo para o positivo. Quando a corrente é de 2 A, no sentido oposto, a diferença de potencial aumenta até 12 V. (*a*) Calcule a resistência interna da bateria. (*b*) Qual é a fem da bateria?

**4.** Uma bateria encontra-se em curto-circuito, quando os dois elétrodos são ligados um ao outro por meio de um condutor com resistência praticamente nula. Calcule a corrente de curto circuito em função da fem $\varepsilon$ e da resistência interna $r$ da bateria.

**5.** A resistência de uma lâmpada incandescente de 60 W e 230 V, à temperatura ambiente de 20°C, é $R = 65\ \Omega$. No entanto, as especificações do fabricante (60 W e 230 V) conduzem a um valor muito mais elevado da resistência. Justifique, calculando a temperatura do filamento de tungsténio quando a lâmpada se encontra acesa.

**6.** Uma bateria tem fem $\varepsilon$ e resistência interna $r$.

a) Calcule o valor da resistência $R$ de um circuito que, quando for ligado a essa bateria, consiga absorver a máxima potência possível.

b) Calcule o valor da potência máxima que a bateria pode fornecer a um circuito, em função de $\varepsilon$ e $r$.

c) Numa fonte de alimentação de um PC, entre os cabos vermelho e preto há uma fem de 5 V; numa fonte de 400 W, a potência máxima entre esses cabos é de 125 W. Calcule a resistência interna entre esses cabos.

d) Na alínea anterior, qual seria a vantagem de usar uma fonte com uma potência máxima maior?

**7.** No circuito representado na figura, foi medida a corrente na resistência de 8 kΩ e obteve-se o valor de 2 mA. Com base nessa informação, calcule o valor da fem e a diferença de potencial em cada resistência.

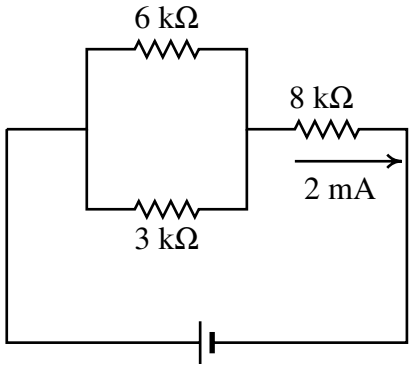



**Figura 3.17.:** Problema 7.

**8.** O circuito do lado esquerdo na figura, com quatro terminais, vai ser substituído pelo circuito equivalente do lado direito. Calcule os valores que deverão ter $R_1$, $R_2$, e $R_3$ (sugestão: C e D são o mesmo ponto; a resistência equivalente entre os pontos AB, AC e BC deverá ser a mesma nos dois circuitos).

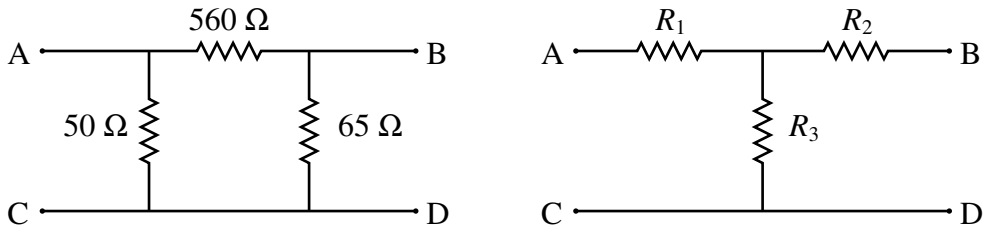



**Figura 3.18.:** Problema 8.

**9.** Um fio condutor de cobre de 1.29 mm de diâmetro e isolamento de borracha pode suportar, com segurança, uma corrente máxima de 6 A. (*a*) Qual é a diferença de

potencial que pode ser aplicada a 40 m deste fio? (*c*) Calcule a potência dissipada no fio quando a corrente for 6 A.

**10.** Um fio de níquel-crómio de 1.8 mm de diâmetro vai ser usado para construir uma caldeira de água que produza 8 g de vapor de água por segundo. A fonte de alimentação a ser usada fornece tensão contínua de 220 V. Calcule o comprimento que deve ter o fio. (O calor de evaporação da água é de 2257.2 J/g.)

**11.** Dois fios de cobre e de tungsténio, têm o mesmo diâmetro de 0.1 mm. O fio de cobre tem 32 cm de comprimento e o de tungsténio 10 cm. Calcule a temperatura em que a resistência dos dois fios será igual.

**12.** Calcule a potência dissipada em cada resistência no circuito e a potência fornecida pela fem. Confira que a potência fornecida pela fem é igual à soma das potências dissipadas em todas as resistências.

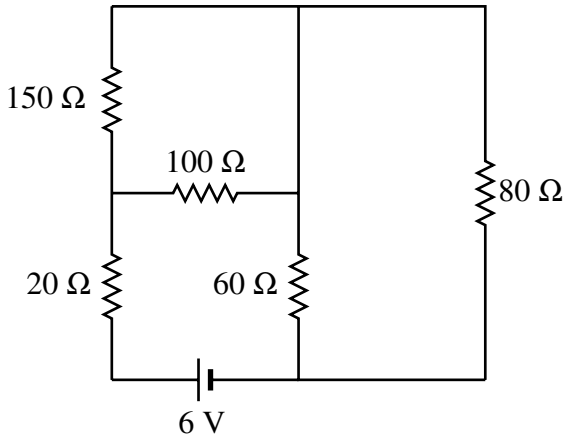



**Figura 3.19.:** Problema 12.

# 4. Condensadores

Em 1745, o holandês Pieter van Musschenbroek inventou o primeiro **condensador**. Enquanto usava uma garrafa de vidro para isolar uma lâmina metálica no seu interior, descobriu que quando segurava a garrafa na mão, a carga elétrica que conseguia armazenar era muito maior do que quando a garrafa estava sobre a mesa. A razão para esse aumento é que na mão, que é um condutor, são induzidas cargas de sinal contrário que atraem as cargas no metal, permitindo que seja mais fácil introduzir mais cargas do mesmo sinal. Colocando uma segunda lâmina metálica por fora da garrafa, facilita-se a entrada de cargas na garrafa, podendo ser armazenadas cargas muito elevadas.

A invenção de van Musschenbroek é atualmente designada de **garrafa de Leiden**, provavelmente devido à complexidade do seu apelido e porque Leiden é a cidade onde viveu. Trata-se de uma das invenções mais importantes na história da eletricidade, pois permitia que fossem armazenadas cargas maiores, facilitando a realização de experiências de eletrostática. Hoje em dia outros condensadores semelhantes à garrafa de Leiden, mas muito mais pequenos, são usados frequentemente nos circuitos elétricos. Em qualquer circuito onde for preciso que a corrente varie rapidamente, por exemplo num amplificador de áudio, é preciso utilizar condensadores; os condensadores acumulam cargas em alguns intervalos, que são logo libertadas em outros instantes.

# Atividade prática

Ligue um condensador, uma pilha e um voltímetro em paralelo. Isto é, junte um dos terminais da pilha, do condensador e do voltímetro, e por separado junte os outros terminais dos três dispositivos. Quanto maior for o tamanho do condensador, mais fácil será a realização desta atividade; mas evite usar condensadores eletrolíticos, que se caraterizam por ter uma indicação de um terminal positivo e outro negativo.

Aguarde alguns instantes até que o condensador fique completamente carregado. Isso deverá acontecer muito rapidamente e a indicação de que o condensador já está completamente carregado é o fato de obter uma leitura constante no voltímetro. A seguir, desligue a pilha, mantendo o condensador e o voltímetro ligados; a diferença de potencial deverá diminuir lentamente, indicando que o condensador descarrega lentamente.

Volte a carregar o condensador e prepare um cronómetro (pode usar o relógio no ambiente de trabalho do seu PC) para medir os valores da diferença de potencial cada 30 segundos enquanto o condensador estiver a descarregar. Desenhe o gráfico dos valores obtidos da diferença de potencial, em função do tempo, para a descarga do condensador. Que tipo de curva obteve?

## 4.1. Capacidade de um condutor isolado

O potencial num condutor isolado é uniforme em todo o condutor e proporcional à carga total no condutor. Define-se a **capacidade** do condutor, igual à relação entre a carga e o potencial na superfície do condutor (arbitrando que o potencial é nulo no infinito)

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_{\text{sup}}}} \tag{4.1}$$

A capacidade não dependerá nem da carga nem do potencial, pois os dois aumentam na mesma proporção; a capacidade depende unicamente da forma e tamanho do condutor. O potencial V é medido em relação a um ponto no infinito.

No sistema internacional de unidades, a capacidade é medida em farads. Um farad, designado pela letra F, é a capacidade de um condutor que, quando nele for colocada uma carga de 1 C, o potencial resultante será de 1 V:

$$1\ \text{F} = 1\ \frac{\text{C}}{\text{V}} \tag{4.2}$$

Uma capacidade de 1 F é muito elevada, na prática é comum encontrar-mos capacidades de $\mu$F, nF ou pF.

## 4.2. Esfera condutora isolada

Numa esfera condutora isolada, a carga acumula-se toda na superfície, e de forma uniforme, devido à simetria da esfera. Se a carga total na esfera for $Q$, a força sobre uma carga pontual $q$, a uma distância $r$ do centro da esfera, será igual à força que produziria uma carga pontual $Q$ no centro da esfera. Assim, o campo elétrico produzido pela esfera é igual ao campo produzido por uma carga pontual $Q$ com componente radial dada pela equação 1.5:

$$E = \frac{kQ}{r^2} \tag{4.3}$$

onde $k$ é a constante de Coulomb ($9 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$).

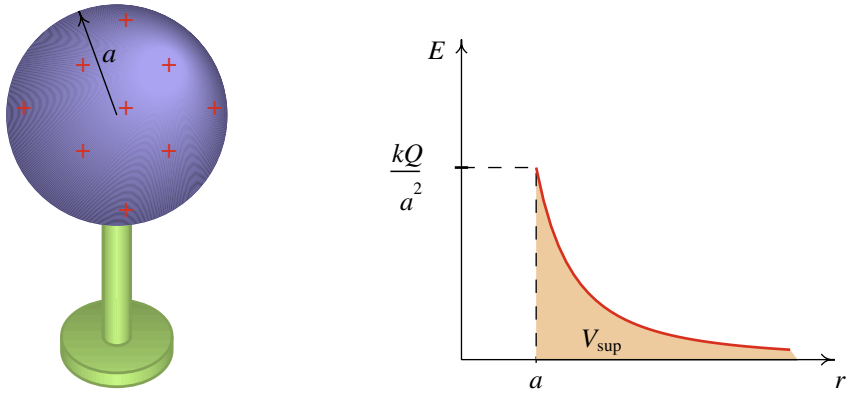



**Figura 4.1.:** Esfera condutora de raio $a$, isolada, com carga $Q$, e gráfico do módulo do campo elétrico produzido por essa esfera.

A energia potencial elétrica que terá uma carga pontual $q$ quando for colocada na superfície da esfera, é dada pela equação 2.6: $U = qV_{\mathrm{sup}}$, onde $V_{\mathrm{sup}}$ é a diferença de potencial entre um ponto na superfície da esfera e um ponto no infinito, onde a esfera já não produz nenhuma energia potencial na carga $q$.

Para calcular $V_{\mathrm{sup}}$ aplica-se a definição da diferença de potencial (equação 2.4), usando um percurso de integração que segue a direção radial das linhas de campo:

$$V_{\mathrm{sup}} = -\int_{\infty}^{a} E\,\mathrm{d}r = -kQ\int_{\infty}^{a} \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{kQ}{a} \tag{4.4}$$

o valor desse integral é também igual à área sombreada na figura 4.1.

Portanto, a capacidade da esfera de raio $a$ é:

$$C = \frac{Q}{V_{\mathrm{sup}}} = \frac{a}{k} \tag{4.5}$$

quanto maior for a esfera, maior será a sua capacidade. Como já dizemos anteriormente, a capacidade não depende nem da carga armazenada na esfera, nem do potencial produzido

por essa carga. A capacidade depende apenas do tamanho e da forma geométrica do condutor; neste caso apenas podia depender do raio da esfera.

## 4.3. Condensadores

Na abertura do capítulo falámos da garrafa de Leiden, que foi o primeiro condensador construído na história. Os dois condutores separados por um isolador (neste caso vidro), designam-se de **armaduras**. Quando existirem cargas numa das armaduras serão induzidas cargas de sinal contrário na outra armadura, o que faz diminuir o potencial de cada armadura em relação ao potencial de referência (a **terra**). A diminuição do potencial do sistema de duas armaduras, comparado com o potencial que teria uma única armadura com a mesma carga, implica uma capacidade muito maior para o condensador em comparação com um único condutor isolado.

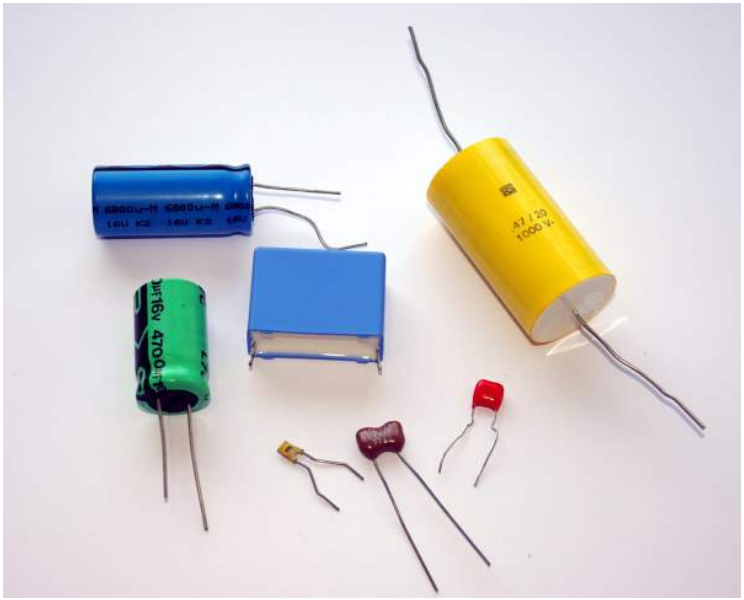


**Figura 4.2.:** Vários tipos diferentes de condensadores.

Se uma das armaduras tiver carga $Q$ a outra terá carga $-Q$. Se $\Delta V$ for a diferença de potencial entre as armaduras, define-se a capacidade do condensador assim:

$$\boxed{C = \frac{Q}{\Delta V}} \tag{4.6}$$

Se entre as duas armaduras existir um isolador, a constante de coulomb, $k$, que entra no cálculo da diferença de potencial $\Delta V$, a partir da força, deverá ser substituída por $k/K$, onde $K$ é a constante dielétrica do isolador. Consequentemente, com isolador a capacidade do condensador aumenta num fator $K$. Assim, na garrafa de Leiden a garrafa

de vidro serve de isolador, mas também ajuda a aumentar a capacidade. Como vidro tem uma constante dielétrica aproximadamente igual a 6; a capacidade com a garrafa de vidro é aproximadamente 6 vezes maior da que se obtinha se não houvesse vidro entre as armaduras.

Quanto maior for a capacidade de um condensador, mais fácil será armazenar cargas nele. Existem vários modelos diferentes de condensadores, com diferentes formas e tamanhos (figura 4.2).

O isolador entre as armaduras de um condensador também é designado de dielétrico. O dielétrico também ajuda a aumentar a diferença de potencial máxima que pode existir entre as armaduras. Cada material isolador tem um valor da **rigidez dielétrica**, que é o valor máximo que pode ter a diferença de potencial, por unidade de comprimento, sem que as moléculas ou átomos do dielétrico sejam ionizados, formando-se fendas onde o material foi queimado (figura 4.3).

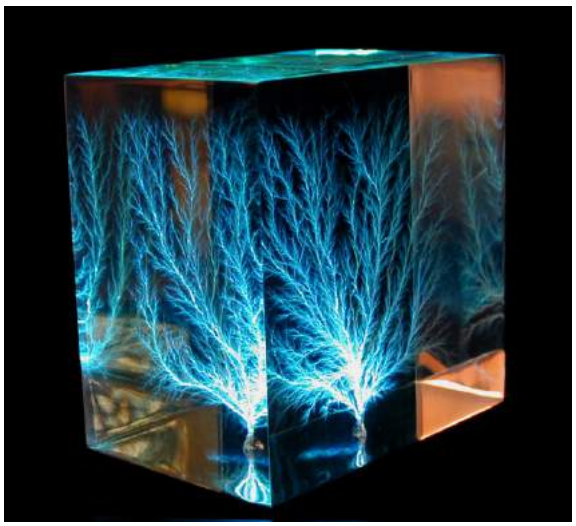


**Figura 4.3.:** Figura de Lichtenberg num bloco de acrílico que foi colocado dentro de um condensador ligado a uma tensão muito elevada que descarregou através do acrílico.

Em função da diferença de potencial no condensador, $\Delta V$, e da distância entre as armaduras, $d$, a rigidez do dielétrico é igual a:

$$E_{\text{máx}} = \left(\frac{\Delta V}{d}\right)_{\text{máx}} \tag{4.7}$$

Consequentemente, o valor máximo da diferença de potencial no condensador é igual à rigidez do dielétrico, vezes a distância entre as armaduras. Os diferentes modelos de condensadores (figura 4.2) têm diferentes capacidades e potenciais máximos segundo o dielétrico que for usado. Em algumas aplicações também é necessário que o tempo de resposta do dielétrico seja rápido, já que as cargas induzidas nas moléculas do dielétrico

não são induzidas de forma instantânea. A tabela 4.1 mostra a constante dielétrica e a rigidez dielétrica de vários materiais isoladores.

**Tabela 4.1.:** Constante dielétrica e rigidez dielétrica de alguns materiais.

| **Material** | **Constante dielétrica**, $K$ | **Rigidez**, $E_{\text{máx}}$ (kV/mm) |
|---|---|---|
| Água (20°C) | 80 | — |
| Ar seco | 1.00059 | 3 |
| Óleo | 2.24 | 12 |
| Papel | 3.7 | 16 |
| Acrílico | 3.4 | 40 |
| Vidro pirex | 5.6 | 14 |
| Porcelana | 7 | 5.7 |
| Poliéster | 2.55 | 24 |
| Parafina | 2.1 - 2.5 | 10 |

A rigidez dielétrica do ar seco é 3 kV/mm. Quando a diferença de potencial entre dois objetos no ar ultrapasse 3000 V por cada milímetro de afastamento, produz-se uma descarga elétrica que descarrega os objetos de forma abrupta. As forças elétricas elevadas rompem as moléculas do ar, e a descarga é a passagem de iões positivos e negativos do ar entre os dois objetos.

**Figura 4.4.:** Durante uma trovoada, a humidade no ar facilita as descargas elétricas.

As nuvens e a terra, que são condutores, atuam como as armaduras de um condensador; o ar é o dielétrico. Durante uma trovoada, a humidade do ar faz diminuir a rigidez dielétrica do ar, a diferença de potencial máxima entre as nuvens e a terra diminui, existindo a possibilidade de surgirem descargas elétricas (figura 4.4). Quanto mais perto das nuvens estiverem os objetos no chão, maior será a probabilidade de serem atingidos por um raio, porque $\Delta V_{\text{máx}} = E_{\text{máx}} d$ será menor.

### 4.3.1. Condensador plano

Um condensador plano (figura 4.5) é formado por duas armaduras planas, de área $A$, paralelas e separadas por uma distância constante $d$.

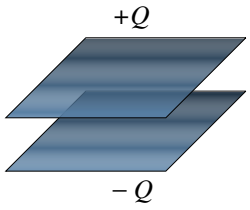



**Figura 4.5.:** Condensador plano.

Se a carga nas armaduras for $Q$ e $-Q$, o campo elétrico entre as armaduras é aproximadamente constante e com módulo $(4\pi kQ)/(KA)$. [1].

A diferença de potencial entre as armaduras é igual ao módulo do campo elétrico, multiplicado pela distância entre as armaduras:

$$\Delta V = \frac{4\pi kQd}{KA} \tag{4.8}$$

Por tanto, a partir da equação 4.6 obtem-se a expressão para a capacidade desse tipo de condensador:

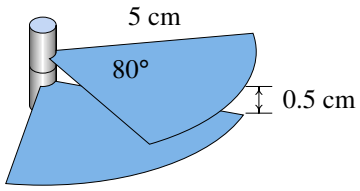
$$\boxed{C_{\text{plano}} = \frac{KA}{4\pi kd}} \tag{4.9}$$

onde $K$ é a constante dielétrica do isolador entre as duas armaduras, e $k$ é a constante de Coulomb. A capacidade de um condensador plano é diretamente proporcional à área das armaduras, e inversamente proporcional à distância entre elas:

---

**Exemplo 4.1**
*Um condensador variável é formado por duas placas planas paralelas com forma de setor circular de ângulo* $80^\circ$ *e raio* 5 cm, *que podem rodar à volta de um eixo comum, como mostra a figura. Se a distância entre as placas é* 0.5 cm, *calcule a capacidade máxima e a capacidade quando uma das placas roda* $30^\circ$ *a partir da posição onde a capacidade é máxima.*

[1] Este resultado será demonstrado no capítulo 6, usando a lei de Gauss.




**Resolução**: A capacidade máxima obtém-se quando as duas placas estão uma em frente da outra, de forma que a carga se distribui ao longo de toda a superfície das placas. O ângulo de 80° equivale a uma fração 80/360 do círculo completo; portanto, a área das armaduras é:

$$A = \frac{80\,\pi\,5^2}{360} = \frac{50\pi}{9}\ \text{cm}^2$$

A capacidade é dada pela expressão 4.9, com a constante dielétrica do ar, $K = 1$:

$$C_{\text{máx}} = \frac{0.005\,\pi}{4\,\pi \times 9 \times 10^9 \times 9 \times 0.005} = 3.1\ \text{pF}$$

Quando uma das placas roda 30°, a área na qual a carga se distribui, corresponde apenas à área da parte das placas que se encontra em frente uma da outra, ou seja, um setor circular de ângulo 50°. Portanto a área é 5/8 da área total das armaduras e a capacidade, sendo diretamente proporcional à área, será 5/8 da capacidade máxima:

$$C = \frac{5}{8} C_{\text{máx}} = 1.9\ \text{pF}$$

## 4.3.2. Ultracondensadores

Um condensador pode cumprir uma função semelhante à de uma bateria, já que pode ser usado para armazenar cargas que são fornecidas a um circuito. A grande vantagem é que, como não há reações químicas envolvidas, a carga e descarga podem ser feitas muito rapidamente e um condensador não fica inutilizado após várias cargas e descargas, que é o que acontece a uma bateria recarregável. Imagine por exemplo que em vez de ter que esperar algumas horas para recarregar a bateria do telemóvel, esta ficasse imediatamente recarregada quando fosse ligada à tomada, e que nunca tivesse que trocá-la por uma nova. Isso está cada vez mais perto de ser uma realidade, com o desenvolvimento dos ultracondensadores.

A dificuldade em usar um condensador normal como fonte é que à medida que o condensador descarrega, a diferença de potencial entre as suas armaduras decresce rapidamente. Outra desvantagem ainda maior é que a capacidade de armazenar carga não é tão elevada como nas baterias. Consideremos por exemplo a pilha recarregável da figura 2.11 na página 32. O valor da fem é 1.2 V, e a carga máxima armazenada é de $2300\ \text{mA}\cdot\text{h} = 8.28\ \text{kC}$. De

**Figura 4.6.:** Alguns ultracondensadores.

acordo com a equação 4.6, seria necessário um condensador de 6.9 kF para armazenar essa carga, com essa diferença de potencial.

Uma capacidade tão elevada era algo impensável, até finais do século passado. Um condensador tradicional, do tamanho da pilha na figura 2.11, teria uma capacidade na ordem dos $\mu$F. Os condensadores eletrolíticos atinge capacidades superiores, mas ainda aquém dos quilo-farad. Recentemente têm sido produzidos **ultracondensadores**, com capacidades muito mais elevadas, na ordem dos quilo-farad.

Por exemplo, o ultracondensador cilíndrico na frente, na figura 4.6 tem uma capacidade de 3000 farads, a 2.7 volts. Com esses valores, a carga que se consegue armazenar é de 8.1 kC já muito perto da carga numa pilha recarregável. A capacidade elevada também implica que demora muito mais tempo a descarregar quando for ligado a um circuito. Ainda falta reduzir um pouco o tamanho para que seja competitivo com as atuais baterias de iões de lítio.

Nos ultracondensadores usa-se um meio poroso. A área de contato entre elétrodos e eletrólito é muito elevada. Uma das aplicações atuais dos ultracondensadores é em combinação com os motores elétricos dos automóveis que funcionam a hidrogénio com células de combustível (figura 4.7), que já estão a ser comercializados em alguns países.

O ultracondensador permite acumular rapidamente as cargas produzidas pelas células de combustível ou pelos travões eletromagnéticos, e essa carga pode ser fornecida rapidamente, nos momentos em que for preciso acelerar. As únicas reações químicas produzidas nesse tipo de veículo é a combinação do hidrogénio com oxigénio nas células de combustível, que produz vapor de água. Não são libertados gases nocivos para a atmosfera, nem existem baterias a produzir produtos químicos corrosivos.

Os ultracondensadores podem fornecer carga e serem recarregados muito mais rapidamente do que uma bateria e sem sofrer o desgaste que faz com que a bateria tenha um número limitado de ciclos de carga e descarga.

**Figura 4.7.:** Autocarro experimental a hidrogénio da STCP no Porto.

## 4.4. Energia elétrica armazenada num condensador

Para carregar um condensador, é preciso carregar uma das armaduras com carga $Q$ e a outra com carga $-Q$. O processo implica uma transferência de carga $Q$ de uma armadura para a outra. Essa passagem pode ser devida à ligação de dois cabos nas armaduras e nos terminais de uma bateria (figura 4.8).

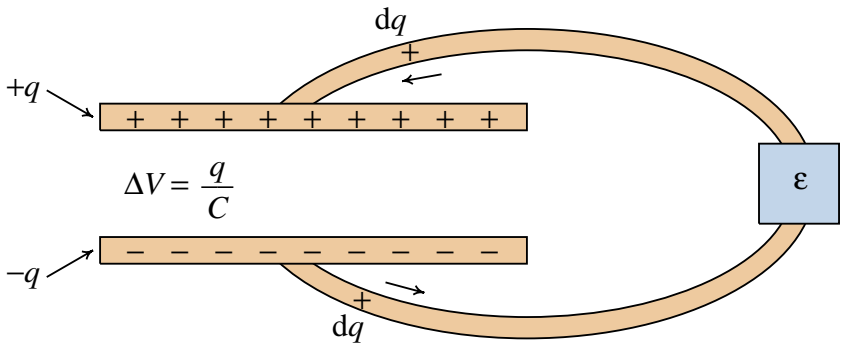



**Figura 4.8.:** Passagem da carga de uma armadura para a outra num condensador.

Para calcular a energia dispensada nesse processo, imaginemos que a carga total $Q$ foi transferida em pequenas cargas infinitesimais $\mathrm{d}q$ desde uma das armaduras até a outra, como se mostra na figura 4.8. Cada vez que uma carga $\mathrm{d}q$ passa da armadura negativa para a positiva, ganha uma energia potencial elétrica

$$\mathrm{d}U = \Delta V \, \mathrm{d}q = \frac{q}{C} \mathrm{d}q \tag{4.10}$$

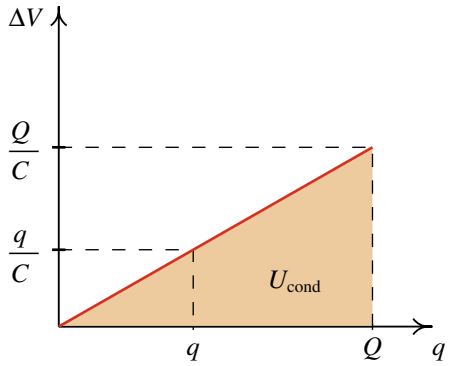



**Figura 4.9.:** Aumento da diferença de potencial no condensador, em função da carga nas armaduras.

A energia total armazenada no condensador obtem-se por integração, desde $q = 0$, até $q = Q$ (área sob a reta no gráfico de $\Delta V$ em função de $q$, na figura 4.9). O resultado é:

$$U_{\text{cond}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{4.11}$$

Usando a equação 4.6, que relaciona a carga e a diferença de potencial em qualquer condensador, a equação 4.11 pode ser escrita em outras duas formas alternativas:

$$\boxed{U_{\text{cond}} = \frac{1}{2}Q\Delta V = \frac{1}{2}C\Delta V^2} \tag{4.12}$$

A carga não será transferida de uma armadura para a outra de forma instantânea, mas demorará algum tempo. No próximo capítulo veremos como calcular esse tempo. Por enquanto, neste capítulo quando dizermos que é ligada uma diferença de potencial entre as armaduras de um condensador, admitiremos que isso já terá passado há algum tempo que seja suficiente para o condensador estar no seu estado estacionário; nomeadamente, o estado em que o carga armazenada no condensador é igual a $C\Delta V$ e já não existe nenhuma transferência de cargas para as armaduras do condensador.

## 4.5. Associações de condensadores

Um sistema de condensadores pode ser substituido por um único condensador equivalente. Nos casos em que os condensadores estejam ligados em série ou em paralelo, é fácil calcular a capacidade que deverá ter o condensador equivalente.

A figura 4.10 mostra dois condensadores ligados em série, entre os pontos A e B. Se os condensadores estiverem inicialmente descarregados, no momento em que for introduzida uma diferença de potencial entre os pontos A e B, circulará uma carga $Q$ que entra pelo ponto a maior potencial (A na figura) e sae pelo ponto a menor potencial. Na região

central, que liga as duas armaduras comuns dos dois condensadores, são induzidas cargas $Q$ e $-Q$ (a carga total nessa região é nula). Assim, a carga armazenada em cada um dos condensadores é a mesma.

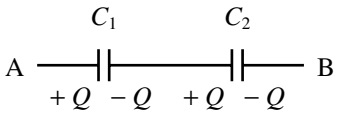



**Figura 4.10.:** Condensadores ligados em série.

A diferença de potencial entre os pontos A e B será a soma das diferenças de potencial em cada um dos condensadores:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) Q \tag{4.13}$$

Assim, o sistema é equivalente a um único condensador com capacidade que verifica a equação:

$$\boxed{\frac{1}{C_s} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)} \tag{4.14}$$

A carga armazenada no condensador equivalente é a mesma que em cada um dos condensadores em série.

A figura 4.11 mostra um sistema de dois condensadores ligados em paralelo entre dois pontos A e B. A diferença de potencial será sempre igual nos dois condensadores, e igual à diferença de potencial entre os pontos A e B.

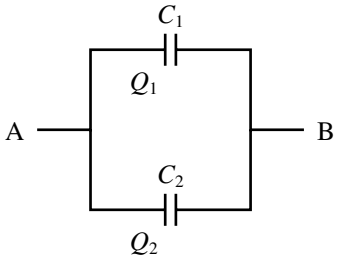



**Figura 4.11.:** Condensadores ligados em paralelo.

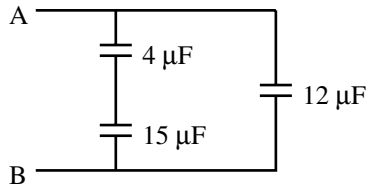
Se os condensadores estiverem inicialmente descarregados, no momento em que for introduzida uma diferença de potencial entre os pontos A e B, entrará carga positiva nas armaduras que estiverem ligadas ao ponto com maior potencial, e saira a mesma quantidade de carga das armaduras ligadas ao ponto com menor potencial. Mas a quantidade de carga que entra em cada condensador não tem que ser a mesma; a carga total que entra e sai entre os pontos A e B é:

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)\,\Delta V \tag{4.15}$$

Assim, o sistema é equivalente a um único condensador com capacidade igual à soma das duas capacidades dos condensadores em paralelo.

**Exemplo 4.2**

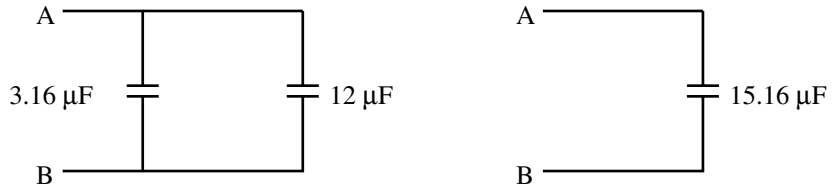
*Considere o circuito representado na figura e calcule: (a) A capacidade equivalente entre* A *e* B. *(b) A carga armazenada em cada condensador quando a diferença de potencial é* $V_{\mathrm{BA}} = 200$ V. *(c) A energia total armazenada no circuito.*




Os condensadores de 4 $\mu$F e 15 $\mu$F encontram-se em série e, portanto, podem ser substituídos por um só condensador de capacidade:

$$C_{\mathrm{eq}} = \frac{4 \times 15}{4+15}\ \mu\mathrm{F} = 3.16\ \mu\mathrm{F}$$

este condensador está ligado em paralelo com o condensador de 12 $\mu$F, de maneira que a capacidade total é 15.16 $\mu$F.




Como tanto no condensador de 12 $\mu$F como no de 3.16 $\mu$F a diferença de potencial é igual a $V_{\mathrm{BA}}$, as cargas armazenadas nestes condensadores são:

$$Q_{12} = 200 \times 12 \times 10^{-6} = 2.4\ \mathrm{mC}$$
$$Q_{3.16} = 200 \times 3.16 \times 10^{-6} = 632\ \mu\mathrm{C}$$

As cargas nos condensadores de 4 $\mu$F e 15 $\mu$F devem ser iguais por estes estarem ligados em série:

$$Q_4 = Q_{15} = 632\ \mu\mathrm{C}$$

A energia total pode ser calculada somando as energias armazenadas em cada um dos condensadores; a resposta deve ser a mesma em qualquer dos circuitos equivalentes. Usando o circuito mais simples, com um só condensador de 15.16 $\mu$F, obtemos:

$$U_{\mathrm{t}} = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} 15.16 \times 10^{-6} \times 200^2 = 0.303\ \mathrm{J}$$

# Perguntas

**1.** Se aumentarmos a carga de um condensador de placas paralelas de 3 $\mu$C para 9 $\mu$C e aumentarmos a separação entre as placas de 1 mm para 3 mm, a energia armazenada no condensador varia de um fator

A. 9 C. 8 E. 1/3
B. 3 D. 27

**2.** Qual deve ser a capacidade de um condensador se quisermos, a uma diferença de potencial de 9.0 V, armazenar um excesso de $10^{10}$ eletrões na placa negativa?

A. 0.014 $\mu$F D. 14 pF
B. 0.18 $\mu$F E. 5.6 pF
C. 0.18 nF

**3.** Qual é a capacidade de um condensador de placas paralelas circulares, com 5 cm de raio, separadas de 1 cm?

A. 7.0 pF D. 0.22 nF
B. 22.0 pF E. 0.7 nF
C. 2.2 pF

**4.** A capacidade elétrica de um condutor isolado:

A. Diminui se o condutor tiver um dielétrico à sua volta.
B. É independente do tamanho do condutor.
C. Mede-se em unidades de J/C.
D. É igual ao trabalho necessário para deslocar uma carga desde o infinito até o condutor.
E. É independente da carga acumulada no condutor.

**5.** Num sistema de dois condensadores ligados em paralelo, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A. A capacidade equivalente é menor que as capacidades dos dois condensadores.
B. A carga armazenada nos dois condensadores é a mesma.
C. A carga armazenada será maior no condensador com maior capacidade.
D. A diferença de potencial será maior no condensador com maior capacidade.
E. A diferença de potencial será maior no condensador com menor capacidade.

# Problemas

**1.** Um flash fotográfico típico fornece 2 kW durante aproximadamente 2 ms. Essa energia é obtida descarregando um condensador de 50 $\mu$F. (*a*) Até que diferença de potencial deverá ser carregado o condensador? (*b*) Se o condensador fosse substituído por outro de 250 $\mu$F, até que diferença de potencial deveria ser carregado? (*c*) Qual seria a desvantagem em usar o condensador com maior capacidade?

**2.** Na seção 4.2 foi calculada a capacidade de uma esfera condutora isolada de raio $a$. Para construir um condensador esférico, coloca-se sobre a esfera condutora uma esfera de

vidro, com raio interno $a$ e raio externo $b$, e sobre a esfera de vidro coloca-se outra esfera condutora de raio $b$. A esfera externa e a esfera de vidro terão um pequeno orifício que permitirá ligar um cabo à esfera condutora interna. ($a$) Calcule a capacidade do condensador esférico em função de $a$, $b$ e da constante dielétrica $K$ do vidro. Sugestão: repita os cálculos da seção 4.2, tendo em conta que a força é mais fraca, devido à constante dielétrica, e a integração só deverá ser feita desde $a$ até $b$. ($b$) Se os raios das esferas fossem 4.0 cm e 4.3 cm, e a constante dielétrica do vidro for 6.2, calcule a capacidade do condensador. ($c$) Qual é o aumento obtido na capacidade do condensador na alínea anterior, comparada com a capacidade que teria a esfera interior sem o vidro e sem a esfera exterior?

**3.** No sistema de três condensadores apresentado na figura, $C_1 = 1.2\ \mu$F, $C_2 = 4.3\ \mu$F e $C_3 = 2.5\ \mu$F. Entre os pontos A e B liga-se uma bateria de 9.0 V. ($a$) Calcule a carga acumulada em cada condensador. ($b$) Calcule a energia total armazenada no sistema.

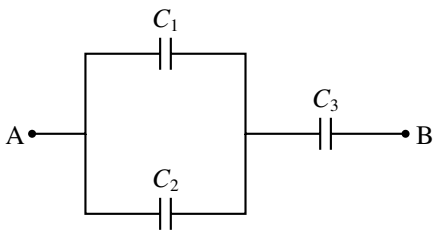



**Figura 4.12.:** Problema 3.

**4.** Um condensador de placas planas e paralelas distanciadas 1 cm e de 12 cm$^2$ de área, está totalmente preenchido por dois dielétricos, cada um com espessura igual a 0.5 cm e a mesma área das placas. Calcule a capacidade do condensador sabendo que as constantes dos dielétricos são 4.9 e 5.6 (sugestão: admita que o condensador é equivalente a dois condensadores em série, cada um com um dielétrico diferente).

**5.** Considere um condensador de placas planas e paralelas, de área 0.3 m$^2$ e distanciadas 0.5 cm. Entre as placas encontra-se uma chapa de acrílico com a mesma área e espessura igual a 0.5 cm. O condensador é carregado até a diferença de potencial ser igual a 12 V e, de seguida, é desligado da fonte usada para o carregar. ($a$) Qual é o trabalho necessário para retirar a chapa de acrílico de entre as placas do condensador? ($b$) Calcule o potencial de ruptura com dielétrico e depois de este ser removido.

**6.** Dois condensadores de 10 $\mu$F e 20 $\mu$F ligam-se em série a uma fonte de 1200 V. ($a$) Calcule a carga em cada condensador. ($b$) A fonte é logo desligada, ligando-se entre si os dois condensadores (armadura positiva com positiva e negativa com negativa). Calcule a diferença de potencial e carga final em cada condensador.

**7.** No circuito seguinte calcule a capacidade equivalente: ($a$) Entre os pontos B e D. ($b$) Entre os pontos A e B.

**8.** Os condensadores no circuito da figura encontram-se inicialmente descarregados. Calcule a carga que ficará armazenada no condensador de 2.4 pF quando os terminais de

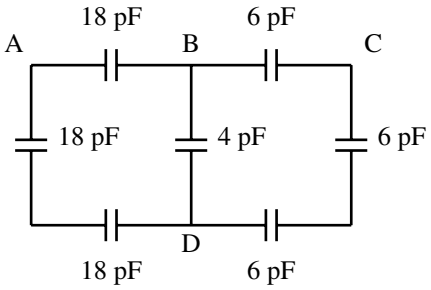



**Figura 4.13.:** Problema 7.

uma fonte, com força eletromotriz de 5 V, forem ligados nos pontos A e B.

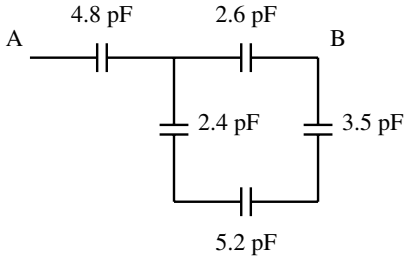
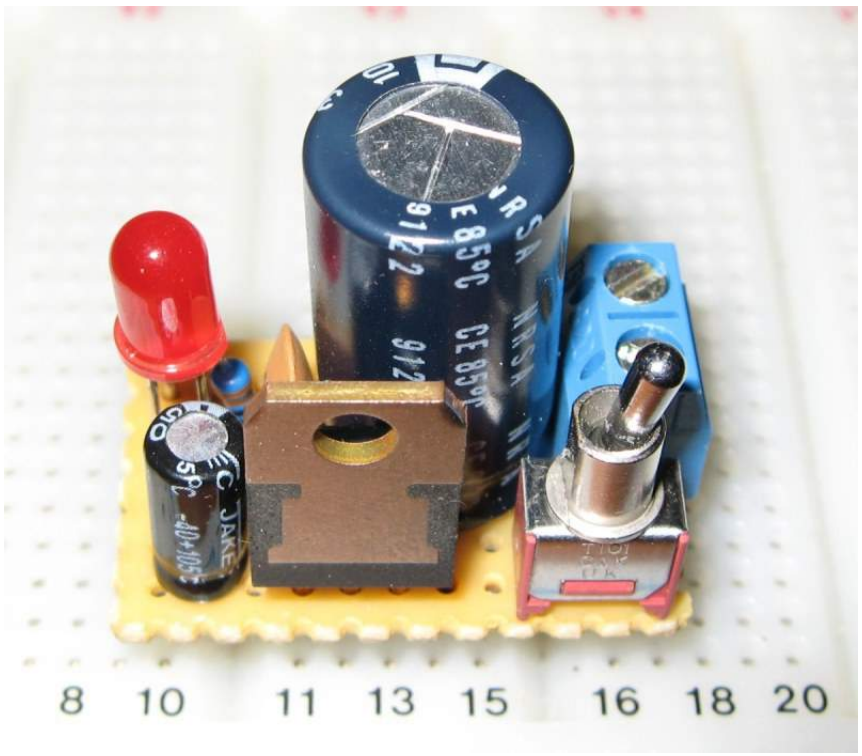



**Figura 4.14.:** Problema 8.

# 5. Circuitos de corrente contínua




Os elementos de circuitos são produzidos com terminais de tamanho padrão para facilitar a montagem dos circuitos. Uma forma rápida de montar circuitos é usar uma placa de teste, como temos sugerido em capítulos anteriores. Para construir circuitos mais duradouros, pode ser usada uma placa de circuito (também conhecida como *stripboard*), que é uma placa de um material isolador com furos e com pistas paralelas de cobre num lado dos lados; o contato entre diferentes componentes é feito inserindo os terminais em furos que estejam na mesma pista, tal como na placa de teste, mas é preciso soldar os terminais sobre o cobre. Outro método que permite construir circuitos mais compatos, são as placas de circuito impresso (PCB). Um PCB é semelhante a uma placa de circuito, mas as pistas de cobre e os furos são desenhados sob medida para cada circuito específico.

## Atividade prática

Ligue duas resistências diferentes em série a uma pilha de 9 V. Meça a diferença de potencial em cada uma das resistências e no sistema; meça a corrente nas resistências. Com esses valores, confira o valor de cada resistência e o valor da resistência total.

Ligue as duas resistências em paralelo à pilha de 9 V. Meça a corrente em cada resistência e a corrente total no sistema; meça também a diferença de potencial nas resistências. Com esses valores, confira o valor de cada resistência e o valor da resistência total.

# 5.1. Diagramas de circuito

Nas atividades práticas dos capítulos anteriores foram construídos alguns circuitos de corrente contínua. Para poder estudar um circuito mais facilmente, convém representá-lo por um diagrama de circuito. Por exemplo, o **divisor de voltagem**, usado no capítulo 3 para obter a caraterística de uma resistência, pode ser representado pelo diagrama de circuito da figura 5.1

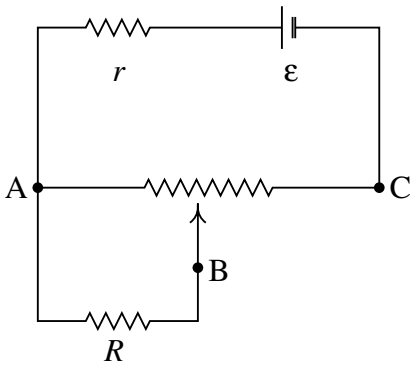



**Figura 5.1.:** Divisor de voltagem.

Os pontos A, B e C são os 3 terminais do potenciómetro. Uma pilha, com fem $\varepsilon$ e resistência interna $r$, liga-se entre os terminais A e C. As saídas do divisor de voltagem são os pontos A e B, onde pode ser ligado algum dispositivo, por exemplo uma resistência $R$, como mostra a figura 5.1. Quando o contato móvel, B, do potenciómetro é deslocado para o ponto C, a diferença de potencial é bastante semelhante à que seria obtida diretamente com a bateria, se a resistência total do potenciómetro for suficientemente elevada. Quando o contato móvel B é deslocado para o ponto A, a diferença de potencial à saída do divisor é nula. Consegue-se assim à saída do divisor uma diferença de potencial que pode ser ajustada entre 0 e um valor máximo.

Outro exemplo de diagrama de circuito é o que foi usado no capítulo 4 para carregar e descarregar um condensador. O circuito do diagrama é apresentado na figura 5.2. Como a pilha é ligada por alguns instantes, para carregar o condensador, e é logo desligada, foi

desenhado um interruptor que no estado fechado corresponde ao caso em que a pilha está ligada, e no estado aberto representa o caso em que a pilha está desligada.

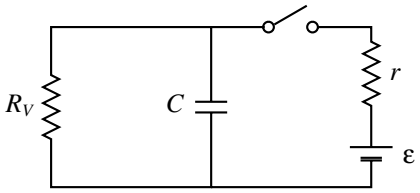



**Figura 5.2.:** Carga e descarga de um condensador.

O voltímetro foi representado no diagrama por meio da sua resistência interna $R_V$. Geralmente, admite-se que o voltímetro não interfere com o circuito, sendo representado apenas como um círculo com um V no centro, que não altera nada no circuito. Neste caso a resistência do voltímetro sim é importante e, por isso, foi desenhada. Um voltímetro ideal teria uma resistência infinita, que não permitiria que o condensador descarrega-se, permanecendo a sua diferença de potencial constante. Num voltímetro real, a carga no condensador produz uma corrente através do voltímetro, que faz com que a carga diminuia e, consequentemente, a diferença de potencial decresce.

## 5.2. Leis dos circuitos

Para analisar circuitos simples e calcular o valor da corrente ou diferença de potencial, será preciso usar duas leis simples, designadas de **leis de Kirchhoff**.

A primeira lei, a **lei dos nós**, ou lei das correntes, diz que em qualquer ponto de um circuito onde exista separação da corrente (nó), a diferença entre a soma das correntes que entram no ponto e a soma das correntes que saem é igual a zero. Por exemplo, no nó representado na figura 5.3, há uma corrente $I_1$ a entrar no nó, e duas correntes $I_2$ e $I_3$ a sair. A lei das correntes implica:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \tag{5.1}$$

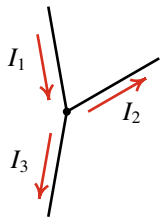



**Figura 5.3.:** Lei das correntes.

Essa lei será válida sempre que as correntes sejam estacionárias; nomeadamente, quando a densidade da nuvem de cargas de condução permaneça constante dentro do condutor, sem

existir acumulação de cargas em nenhum ponto; nesse caso, toda a carga que entra por um condutor, por unidade de tempo, deverá sair por outros condutores.

A segunda lei, designada de **lei das malhas**, ou lei das tensões, diz que a soma das diferenças de potencial, em qualquer caminho fechado (malha) num circuito, é sempre nula.

Por exemplo, no circuito da figura 5.4, podemos identificar 3 caminhos fechados (malhas): ABCDA, BEFCB e ABEFCDA. Por cada uma dessas malhas existe uma equação associada, obtida pela lei das malhas, mas unicamente duas dessas equações serão independentes. No caso da malha ABCDA, a lei das malhas é:

$$\Delta V_{AB} + \Delta V_{BC} + \Delta V_{CD} + \Delta V_{DA} = 0 \tag{5.2}$$

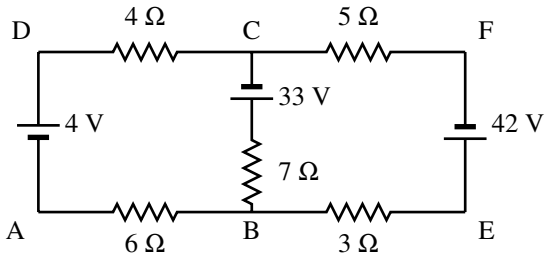
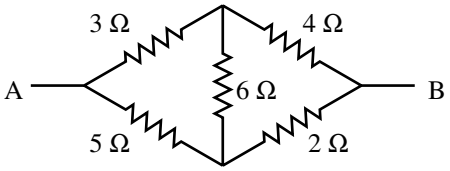



**Figura 5.4.:** Circuito com duas malhas.

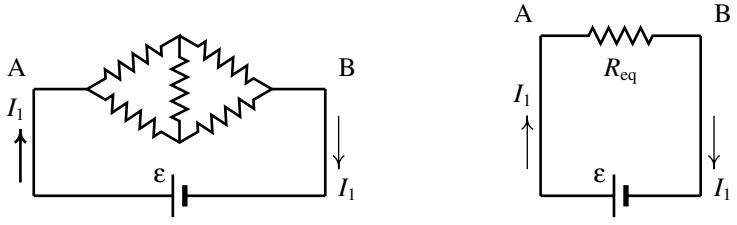
É fácil conferir que o resultado é nulo, tendo em conta que, por exemplo, $\Delta V_{BC} = V_C - V_B$.

---

**Exemplo 5.1**
*Calcule a resistência equivalente entre os pontos* A *e* B *no circuito seguinte:*

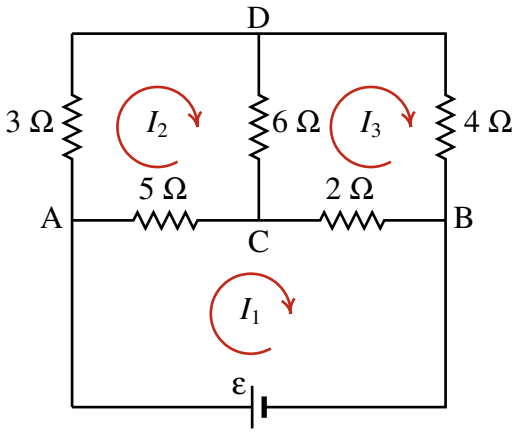



**Resolução**: Nenhum par de resistências entre A e B se encontra em série ou em paralelo e, portanto, não podemos usar o método usado no capítulo 3. Por definição, o circuito original e o circuito equivalente deverão produzir a mesma corrente entre A e B, quando estiverem ligados a uma mesma diferença de potencial arbitrária $\varepsilon$:



Teremos de determinar o valor dessa corrente $I_1$, em função da fem arbitrária usada, e a seguir calcular $R_{\text{eq}} = \varepsilon / I_1$.

Uma forma fácil de encontrar as correntes neste circuito é usando o **método das malhas**, que consiste em admitir que dentro de cada malha circula uma corrente independente das correntes nas outras malhas: $I_1$, $I_2$ e $I_3$ na figura seguinte:




Nas resistências que se encontram entre duas malhas vizinhas, a corrente será a soma algébrica das correntes nas duas malhas. Por exemplo, no diagrama anterior a corrente através da resistência entre A e C será $I_1 - I_2$, no sentido de A para C (ou $I_2 - I_1$ no sentido oposto).

Com este método a regra dos nós é garantida em cada nó e basta aplicar a regra das malhas a cada uma das três malhas para calcular as três correntes. No circuito temos as seguintes diferenças de potencial:

$$\begin{aligned} \Delta V_{\text{AC}} &= -5(I_1 - I_2) & \Delta V_{\text{CB}} &= -2(I_1 - I_3) & \Delta V_{\text{BA}} &= \varepsilon \\ \Delta V_{\text{AD}} &= -3I_2 & \Delta V_{\text{DC}} &= -6(I_2 - I_3) & \Delta V_{\text{DB}} &= -4I_3 \end{aligned}$$

substituindo esses valores, as três equações das malhas serão:

$$\begin{aligned} \Delta V_{\text{AC}} + \Delta V_{\text{CB}} + \Delta V_{\text{BA}} &= -5I_1 + 5I_2 - 2I_1 + 2I_3 + \varepsilon = 0 \\ \Delta V_{\text{AD}} + \Delta V_{\text{DC}} + \Delta V_{\text{CA}} &= -3I_2 - 6I_2 + 6I_3 + 5I_1 - 5I_2 = 0 \\ \Delta V_{\text{DB}} + \Delta V_{\text{BC}} + \Delta V_{\text{CD}} &= -4I_3 + 2I_1 - 2I_3 + 6I_2 - 6I_3 = 0 \end{aligned}$$

Agrupando os termos que dependem de cada uma das correntes, podemos escrever o sistema de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -5 & 14 & -6 \\ -2 & -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obtivemos as equações seguindo todos os passos para maior claridade, mas é possível escrever o sistema matricial imediatamente por observação do circuito: os termos na

diagonal são a soma das resistências nas respetivas malhas e os termos fora da diagonal são negativos e correspondem às resistências entre malhas vizinhas; os termos do lado direito das equações são as fem totais em cada malha, no sentido da corrente da malha. Neste caso só estamos interessados na solução para $I_1$, que pode ser obtida usando a regra de Cramer:

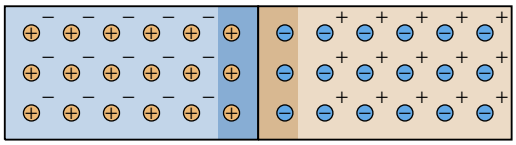
$$I_1 = \begin{vmatrix} \varepsilon & -5 & -2 \\ 0 & 14 & -6 \\ 0 & -6 & 12 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -5 & 14 & -6 \\ -2 & -6 & 12 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{132}{448}\varepsilon \, .$$

Finalmente, a resistência equivalente é

$$R_{\text{eq}} = \frac{\varepsilon}{I_1} = 3.39\ \Omega$$

## 5.3. Díodos

Um díodo é um dispositivo obtido pela junção de um semicondutor de tipo N com um semicondutor de tipo P. Na fronteira entre os dois semicondutores produz-se uma migração de eletrões do semicondutor N para o semicondutor P, ficando duas camadas, onde existem iões positivos e negativos e nenhuma carga de condução. Essas duas camadas produzem uma diferença de potencial que impede a passagem de mais cargas de condução:



Díodo

**Figura 5.5.:** Díodo.

Quando o díodo é polarizado em **modo direto**, ligando uma fonte de forma a contrariar a diferença de potencial das duas camadas na fronteira, será produzida uma corrente que vai no sentido do semicondutor P para o N. Quando o díodo é polarizado em **modo inverso**, ligando o elétrodo positivo da fonte ao semicondutor N, e o elétrodo negativo ao semicondutor P, o tamanho das duas camadas de cargas fixas na fronteira aumenta, e não há passagem de corrente (figura 5.6).

O lado direito na figura 5.6 mostra o diagrama do circuito. O díodo representa-se com uma seta que aponta do **ânodo** (semicondutor P), para o **cátodo** (semicondutor N); a seta indica o sentido em que pode passar corrente. Não pode existir corrente no modo inverso, a passar do cátodo para o ânodo.

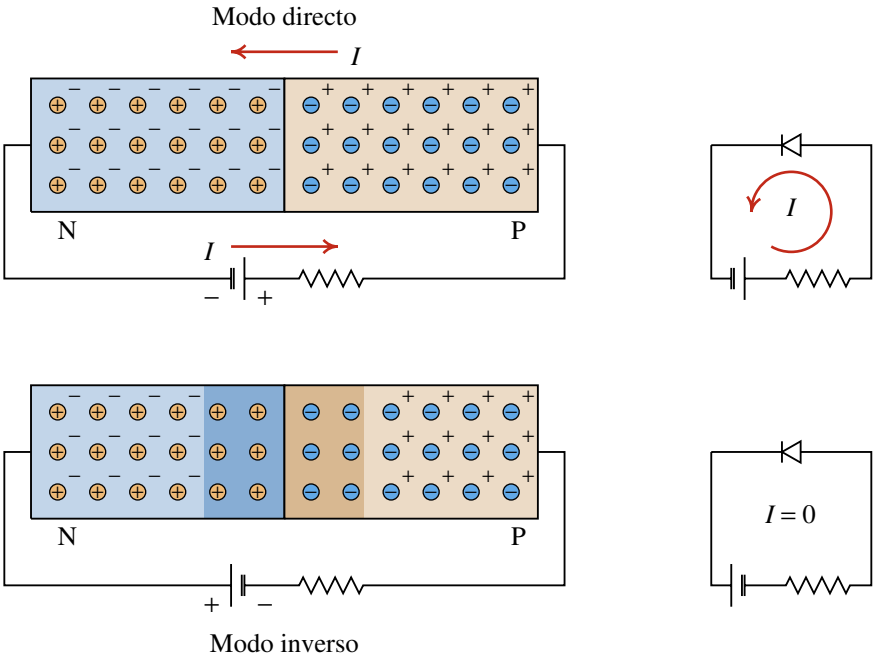



**Figura 5.6.:** Diagrama de circuito para um díodo ligado a uma fem mostrando os dois modos de operação do díodo.

A figura 5.7 mostra a curva caraterística do díodo. Trata-se de uma função logarítmica, que depende da temperatura; para tensões negativas existe uma pequena corrente residual muito pequena, menor que 1 nA.

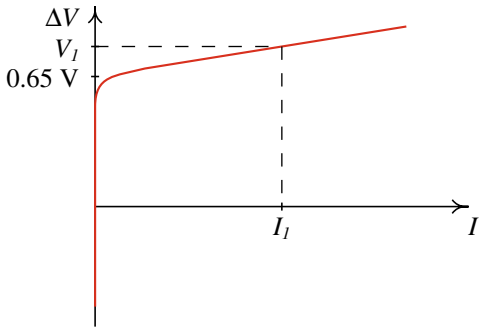



**Figura 5.7.:** Caraterística tensão corrente de um díodo de silício.

Nos díodos usados habitualmente, a corrente no díodo não poderá ultrapassar uns poucos mA para evitar queimar o díodo. Para correntes nessa ordem de grandeza, a curva logarítmica pode ser aproximada por uma reta:

$$\Delta V = V_d + r_d I \tag{5.3}$$

onde $V_d$, designada de **tensão direta**, é a diferença de potencial mínima que tem que ser fornecida para ultrapassar a barreira de potencial na junção PN; costuma ter um valor entre

0.6 V e 0.7 V, para díodos de silício, e perto de 0.2 V, para díodos de germânio. O declive da caraterística, $r_d$, costuma ser muito pequeno; por tanto, no modo direto a diferença de potencial no díodo é aproximadamente constante, igual à tensão direta do díodo.

No modo inverso, a corrente residual nos díodos ordinários é muito pequena e, portanto, costuma ser ignorada. A diferença de potencial no díodo, no modo inverso, pode ter qualquer valor menor que o valor máximo que suporta o díodo sem se queimar.

Os díodos são muito úteis para controlar o sentido da corrente num circuito. Por exemplo, a figura 5.8 mostra o diagrama do circuito de uma calculadora alimentada por luz. Uma célula solar é usada para produzir a corrente que alimenta a calculadora. O condensador acumula carga quando houver luz a incidir sobre a célula fotoelétrica, e liberta essa carga quando não houver luz suficiente, mantendo a calculadora em funcionamento por alguns minutos mais. O díodo serve para garantir que, nos instantes em que não exista suficiente luz, a carga acumulada no condensador seja transferida para a calculadora e não para a própria célula solar, onde seria dissipada em calor.

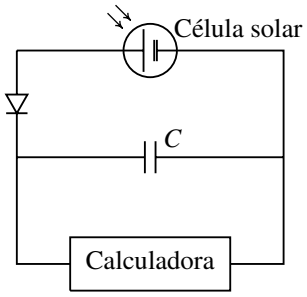



**Figura 5.8.:** Uso de um díodo numa calculadora alimentada por uma célula solar.

## 5.4. Circuitos RC

Um circuito com resistências e condensadores é designado de circuito RC. Quando um condensador está descarregado, a diferença de potencial entre as suas armaduras é nula; o condensador atua como um interruptor fechado, com resistência nula.

Enquanto circula corrente para uma das armaduras e fora da outra, a carga do condensador aumenta e, consequentemente, a diferença de potencial também aumenta; o aumento na diferença de potencial no condensador faz diminuir a corrente, até alcançar um estado estacionário em que a corrente é nula e a carga no condensador permanece constante. Nesse estado estacionário, o condensador atua como interruptor aberto, impedindo a passagem da corrente.

### 5.4.1. Descarga de um condensador

Consideremos um condensador que, após ter sido carregado de alguma forma com carga inicial $Q_0$, é ligado em série a uma resistência (figura 5.9).

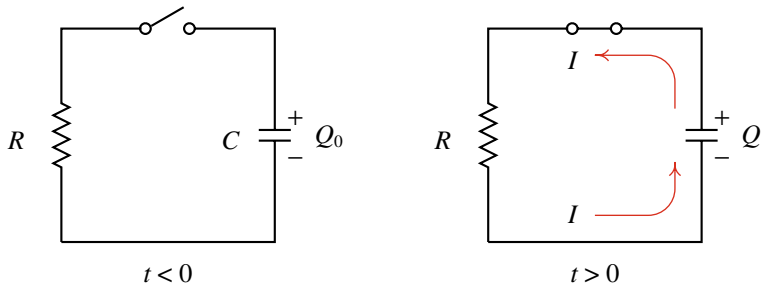



**Figura 5.9.:** Descarga de um condensador.

A partir do instante $t = 0$ em que se fecha o interruptor, circulará uma corrente $I$ pela resistência e a diferença de potencial no condensador será igual à diferença de potencial na resistência:

$$IR = \frac{Q}{C} \tag{5.4}$$

No instante inicial, a carga é $Q = Q_0$ e, portanto, $I_0 = Q_0/(RC)$. No estado estacionário, a carga e a corrente aproximam-se de zero: $Q \to 0$, $I \to 0$. No estado transitório, a carga terá um valor entre 0 e $Q_0$ e a corrente terá um valor entre 0 e $I_0$.

Toda a carga transferida pela corrente sai do condensador; assim, a corrente será igual à taxa de diminuição da carga no condensador:

$$I = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{5.5}$$

Combinando as duas equações anteriores obtemos uma equação diferencial para a carga em função do tempo:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{Q}{RC} \tag{5.6}$$

Esta equação pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis, e a solução é:

$$\boxed{Q = Q_0\,\mathrm{e}^{-t/(RC)}} \tag{5.7}$$

Assim, a carga no condensador decresce de forma exponencial. A corrente obtém-se dividindo a carga por $RC$ e, portanto, também decresce de forma exponencial. Os gráficos da carga e da corrente, em função do tempo, são apresentados na figura 5.10.

A constante $RC$, com unidades de tempo, designa-se de **constante de tempo**. É o tempo que demoraria a descarregar o condensador se a corrente mantivesse o seu valor inicial $Q_0/(RC)$. A constante de tempo $RC$ é também igual ao intervalo de tempo em que a carga,

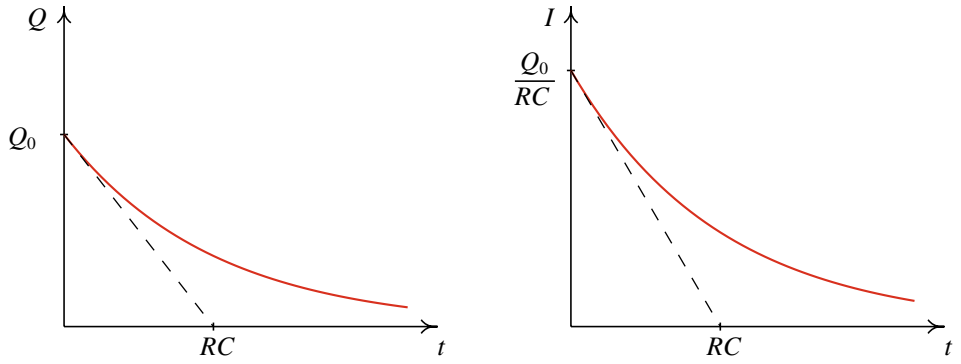



**Figura 5.10.:** Carga e corrente num condensador a descarregar.

e a corrente, diminuem até $1/e$ vezes os seus valores iniciais; nomeadamente, o tempo que demoram em diminuir até 37% dos valores iniciais. Quanto maior for a constante de tempo, mais lentamente decrescerão a carga e a corrente no condensador.

No circuito da atividade prática do capítulo 4, a constante de tempo é igual ao produto da capacidade do condensador, vezes a resistência do voltímetro. A diferença de potencial no condensador é também uma função exponencial decrescente, já que é igual à carga dividida pela capacidade. Um gráfico do logaritmo da diferença de potencial, em função do tempo, deverá ser uma reta, com declive igual a $-RC$.

## 5.4.2. Acumulação de carga

No circuito representado na figura 5.11, um condensador sem nenhuma carga inicial é ligado a uma fem para carregá-lo. $R$ representa a resistência interna da fonte, mais a resistência das armaduras do condensador, mais qualquer outra resistência que estiver ligada entre a fonte e o condensador.

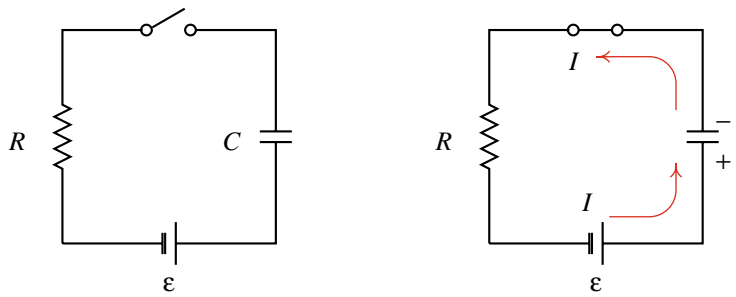



**Figura 5.11.:** Condensador a ser carregado com uma fem.

Fecha-se o interruptor em $t = 0$ para carregar o condensador; nesse instante, a carga no condensador é nula. Para encontrarmos a expressão geral para a carga em função do tempo, aplica-se a lei das malhas:

$$IR + \frac{Q}{C} = \varepsilon \tag{5.8}$$

Como a carga inicial é nula, $Q_0 = 0$, substituindo na equação anterior obtemos o valor inicial da corrente:

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R} \tag{5.9}$$

nomeadamente, no instante inicial o condensador atua como um interruptor fechado.

No estado estacionário, após um tempo $t$ muito elevado, o condensador estará completamente carregado impedindo a transferência de mais cargas (equivalente a um interruptor aberto); nesse estado estacionário, a corrente será nula, $I = 0$, e, substituindo na equação 5.8 a carga $Q$ será constante e igual a:

$$Q = \varepsilon C \tag{5.10}$$

Neste circuito a corrente faz aumentar a carga no condensador e, portanto, a relação entre a carga e a corrente é:

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{5.11}$$

Combinando esta equação com a equação 5.8 obtemos a equação diferencial do circuito:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{RC} = \frac{\varepsilon}{R} \tag{5.12}$$

Esta equação diferencial também pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis, e a solução é:

$$\boxed{Q = \varepsilon C \left[1 - \mathrm{e}^{-t/(RC)}\right]} \tag{5.13}$$

A figura 5.12 mostra os gráficos da carga e da corrente (derivada da carga) em função do tempo. A carga aumenta em forma exponencial, desde zero até o valor máxima $\varepsilon C$. No estado estacionário, a carga no condensador é $\varepsilon C$.

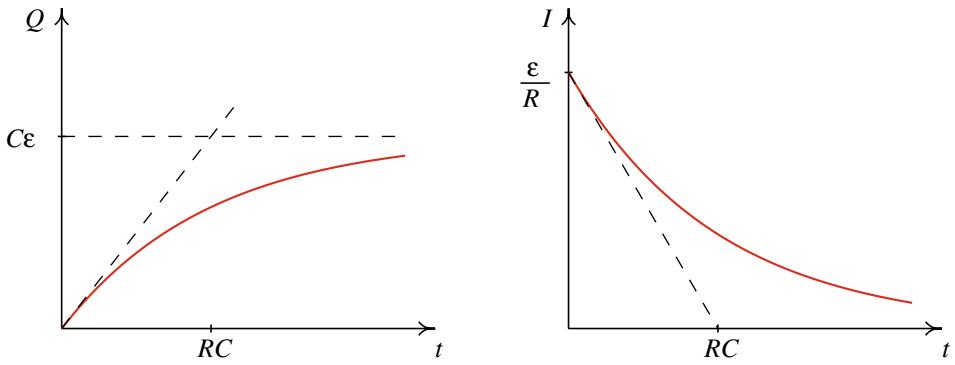



**Figura 5.12.:** Gráficos da carga e a corrente num condensador a ser carregado.

É interessante calcular a energia que é fornecida ou absorvida nos diferentes elementos do circuito, desde o instante inicial $t = 0$, até o limite quando o tempo é infinito. A carga

total, $\varepsilon C$, que fica armazenada no condensador é fornecida pela fem; consequentemente, a energia total fornecida pela fem é:

$$E_f = C\varepsilon^2 \tag{5.14}$$

A energia armazenada no condensador calcula-se com a equação 4.11:

$$E_C = \frac{1}{2} C\varepsilon^2 \tag{5.15}$$

que é apenas metade da energia que foi fornecida pela fem. O que aconteceu à outra metade da energia dissipada? A resposta é que foi dissipada em calor na resistência; isso pode ser conferido tendo em conta que a potência instantânea na resistência é $P = RI^2$ e a energia total dissipada é igual ao integral da potência, desde $t = 0$ até $t \to \infty$. A corrente é igual à derivada da expressão 5.13. Assim,

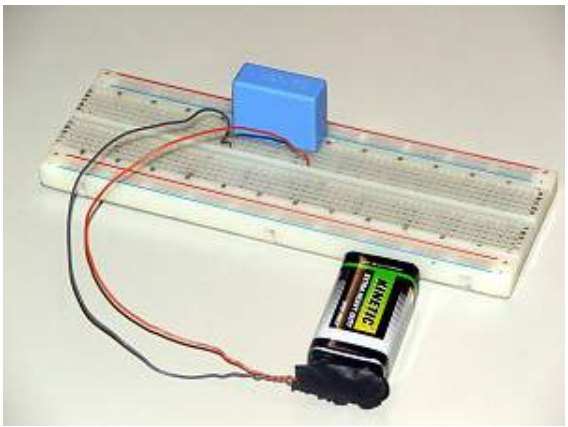
$$E_R = R \int_0^\infty \left[\frac{\varepsilon}{R} \mathrm{e}^{-t/RC}\right]^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2} C\varepsilon^2 \tag{5.16}$$

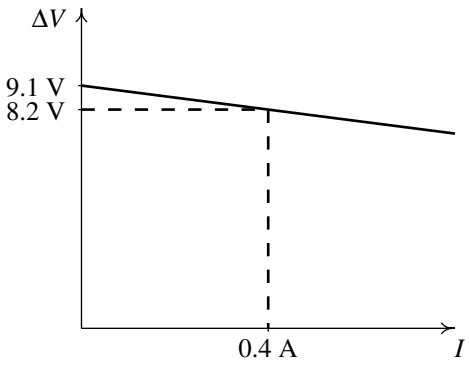
Independentemente dos valores da resistência e da capacidade, unicamente metade da energia fornecida pela fem é armazenada no condensador; a outra metade é dissipada em calor.

---

**Exemplo 5.2**

*Um condensador de* 11 $\mu$F *está a ser carregado com uma pilha; o gráfico mostra a caraterística tensão-corrente da pilha. Para ligar a pilha usaram-se dois fios de cobre com* 0.5 mm *de diâmetro, cada um com* 21 cm *de comprimento. Se no instante em que se liga a pilha o condensador estiver completamente descarregado, quanto tempo demorará (a partir desse instante) até a diferença de potencial no condensador ser igual a* 8.4 V*? Admita que a temperatura é de* 20°C *e que a resistência das armaduras do condensador é nula.*





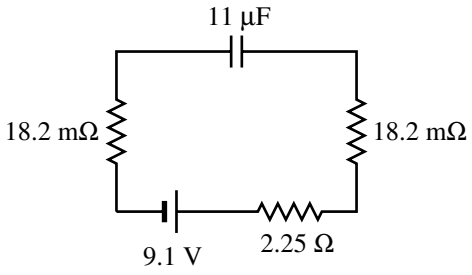

**Resolução**: Caraterística da pilha:

$$\varepsilon = 9.1 \text{ V} \qquad\qquad r = \frac{9.1 - 8.2}{0.4 - 0} = 2.25\ \Omega$$

Resistência de cada fio de cobre:

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{17 \times 10^{-9} \times 0.21}{\pi (2.5 \times 10^{-4})^2} = 18.2 \text{ m}\Omega$$

Diagrama do circuito:




$$R_{\text{eq}} = 18.2 \times 10^{-3} + 18.2 \times 10^{-3} + 2.25 = 2.29 \ \Omega$$

Equação do circuito:

$$Q = \varepsilon C \left[1 - \text{e}^{-t/(RC)}\right] \qquad \Rightarrow \qquad \Delta V_{\text{cond}} = \varepsilon \left[1 - \text{e}^{-t/(RC)}\right]$$

$$t = -RC \ln\left(1 - \frac{\Delta V_{\text{cond}}}{\varepsilon}\right) = -2.29 \times 11 \times 10^{-6} \ln\left(1 - \frac{8.4}{9.1}\right) = 6.46 \times 10^{-5} \text{ s}$$

# Perguntas

**1.** Qual dos seguintes princípios físicos está relacionado com a lei dos nós?

A. Conservação da energia.

B. Quantização da carga.

C. Conservação da carga.

D. Conservação da quantidade de movimento.

E. Ação e reação.

**2.** Um condensador está a descarregar através de uma resistência. Com que fração da diferença de potencial inicial ficará o condensador após um tempo igual a 2 constantes de tempo?

A. 0.368

B. 0.135

C. 0.0498

D. 0.0183

E. 0.00674

**3.** Uma bateria, um condensador, uma resistência e um interruptor encontram-se ligados em série. Inicialmente, o condensador está descarregado e o interruptor aberto. No instante $t = 0$ fecha-se o interruptor. Enquanto a carga no condensador

aumenta, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

A. A corrente no circuito aumenta.

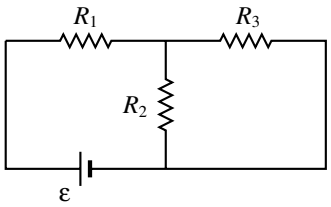
B. A diferença de potencial na resistência aumenta.

C. A corrente no circuito permanece constante.

D. A diferença de potencial no condensador diminui.

E. A corrente no circuito diminui.

**4.** Se $I_1$, $I_2$ e $I_3$ são os valores absolutos das correntes que circulam pelas resistências $R_1$, $R_2$ e $R_3$ no circuito da figura, qual das equações é correta?




A. $I_1 + I_2 = I_3$

B. $I_1 + I_3 = I_2$

C. $I_2 + I_3 = I_1$

D. $I_1 = I_2$

E. $I_2 = I_3$

**5.** A tensão direta de um díodo de germânio é 0.3 V. Se $V_a$ representa o potencial do ânodo, e $V_c$ o potencial do cátodo nesse díodo, qual é a condição para que o díodo esteja no modo direto?

A. $V_a > V_c$

B. $V_c > V_a$

C. $V_a > V_c + 0.3$ V

D. $V_c > V_a + 0.3$ V

E. $V_a > V_c - 0.3$ V

# Problemas

**1.** No circuito da figura, determine quais das fontes de força eletromotriz fornecem ou absorvem energia, e calcule a potência fornecida, ou absorvida, por cada uma.

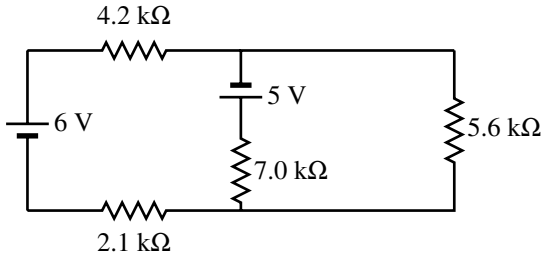



**Figura 5.13.:** Problema 1

**2.** Duas pilhas de 1.5 V ligam-se em paralelo a um dispositivo com resistência de 860 Ω. Considerando que as resistências internas das pilhas são 25 Ω e 30 Ω, calcule a corrente no dispositivo.

**3.** Um condensador de 50 $\mu$F é carregado usando uma fonte com fem de 6 V e resistência interna de 350 Ω, através de uma resistência de 100 kΩ. (*a*) Calcule a corrente inicial

no instante $t = 0$ em que é ligada a fonte. (*b*) Num instante $t_1 > 0$, a corrente é de 20 $\mu$A; calcule as diferenças de potencial no condensador e na resistência nesse instante. (*c*) Calcule a carga armazenada no condensador em $t_1$. (*d*) Calcule o valor de $t_1$.

**4.** Um díodo emissor de luz (LED) vermelho vai ser instalado no tablier de um automóvel para servir de indicador do alarme. A bateria do carro fornece 12 V e o LED precisa de uma corrente de 10 mA para funcionar corretamente. Calcule o valor da resistência que deverá ser ligada em série com o LED (admita $V_d = 1.70$ V e $r_d = 30\ \Omega$ para o LED).

**5.** A memoria RAM de um computador funciona com uma fonte de alimentação de 5 V, extraindo uma corrente de 80 mA. O conteúdo da memoria será apagado se a tensão de alimentação diminuir por baixo de 3 V. Para proteger os dados na memória em caso de cortes na fonte de alimentação, liga-se um condensador de 1 F aos terminais da fonte de alimentação. Faça uma estimativa do tempo que o condensador poderá manter os dados na memoria. Deverá admitir que a única resistência no circuito é a da memoria RAM.

**6.** No circuito representado no diagrama, calcule a corrente em cada resistência, sabendo que os dois díodos são idênticos e com valores $V_d = 0.6$ V, e $r_d = 2.8\ \Omega$.

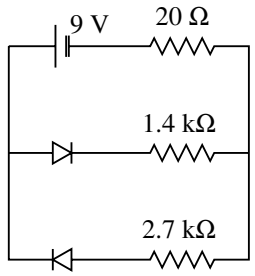



**Figura 5.14.:** Problema 6

**7.** Um condensador de 0.5 $\mu$F descarrega-se através de uma resistência $R$. Qual é o valor que $R$ deve ter para que 0.1 segundo depois de se iniciar a descarga, a potência dissipada na resistência tenha o valor máximo possível?

**8.** A relação entre a diferença de potencial e a corrente num díodo, polarizado em modo direito, é:

$$\Delta V = \frac{k_b T}{e} \log\left(1 + \frac{I}{I_o}\right) \tag{5.17}$$

sendo $k_b = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K a constante de Boltzmann, $e$ a carga elementar, $T$ a temperatura medida em graus Kelvin, K, e $I_o$ a corrente de saturação , que depende do tipo de díodo. Considerando uma corrente de saturação de 2 pA e a temperatura ambiente de 293 K, (*a*) calcule a diferença de potencial correspondente a correntes de 0.2 mA e 1 A, e encontre a equação da reta que passa por esses dois pontos, no plano $I\Delta V$; (*b*) desenhe a caraterística tensão-corrente, para valores de corrente entre 0 e 1 A juntamente com o gráfico da reta obtida na alínea anterior.

**9.** No circuito da figura, liga-se uma diferença de potencial $\Delta V = V_1 - V_2$ entre os dois terminais de entrada. Calcule o valor da diferença de potencial entre os pontos A e

B, em função da tensão de entrada $\Delta V$ (considere $V_d = 0.7$ V). Este tipo de circuito é designado de limitador; qual será a razão para essa designação?

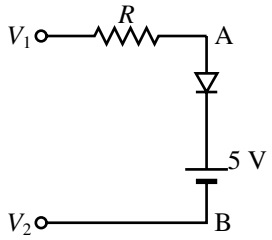



**Figura 5.15.:** Problema 9.

**10.** Calcule a potência dissipada em cada resistência no circuito e a potência fornecida pela fem. Confira que a potência fornecida pela fem é igual à soma das potências dissipadas em todas as resistências.

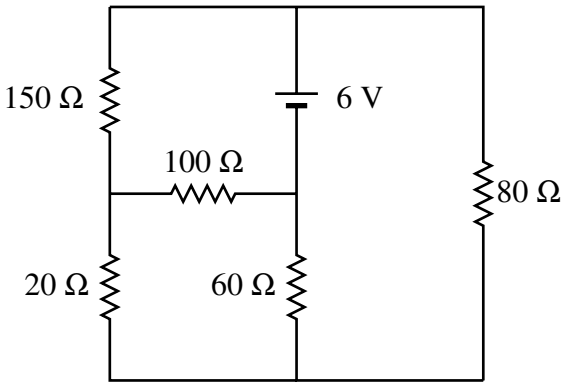
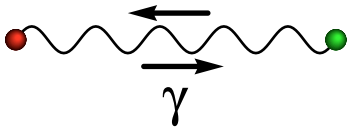



**Figura 5.16.:** Problema 10.

# 6. O campo elétrico




A explicação da força entre partículas através da existência de um campo vem desde a época em que foi desenvolvida a teoria da gravitação universal. A dificuldade em aceitar que uma partícula possa afetar outra partícula distante, sem existir nenhum contato entre elas, foi ultrapassada na física clássica com o conceito do campo de força. No caso da força eletrostática, o campo mediador que transmite a força eletrostática foi designado por éter; a luz seria uma onda que se propaga nesse éter lumínico. No século XIX foram realizadas inúmeras experiências para detetar a presença do éter, sem nenhum sucesso. No fim do século chegou-se à conclusão de que não existe tal éter. No entanto, o campo elétrico tem existência física, no sentido de que transporta energia e que pode subsistir até após desaparecerem as cargas que o produzem. Na física quântica a interação elétrica é explicada como uma troca de partículas mediadoras da força, que são as mesmas partículas da luz, os fotões. Cada carga lança alguns fotões que são absorvidos pela outra carga; no entanto, neste capítulo falaremos sobre a teoria clássica do campo, onde o campo é como um fluido invisível que arrasta as cargas elétricas.

## Atividade prática

No plano $xy$, as componentes do campo elétrico produzido por duas cargas pontuais, de 9 nC e $-4$ nC, são dadas pelas funções:

$$E_x = \frac{810\,x}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{360\,(x-2)}{[(x-2)^2+y^2]^{3/2}} \qquad E_y = \frac{810\,y}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{360\,y}{[(x-2)^2+y^2]^{3/2}}$$

a carga 9 nC encontra-se na origem e a carga $-4$ nC no ponto (2, 0). As distâncias estão a ser medidas em cm, e as unidades do campo são $\mu$N/nC.

Use o programa `plotdf` do *Maxima* para desenhar o campo elétrico, para valores de $x$ entre $-2$ e 10, e valores de $y$ entre $-6$ e 6. Desenhe as linhas de campo; observe as linhas de campo perto do ponto (6, 0), que é um ponto de sela.

## 6.1. Campo elétrico produzido por cargas pontuais

O campo elétrico produzido por uma carga pontual já foi estudado no capítulo 1. A figura 1.5 mostra o campo repulsivo produzido por uma carga positiva.

A equação 1.5 para o módulo do campo produzido por uma carga pontual pode ser escrita de forma vetorial. Se a carga $Q$ estiver na origem, o resultado obtido é:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\,\vec{e}_r} \tag{6.1}$$

sendo $r$ a distância até a origem, e $\vec{e}_r$ o vetor unitário que aponta na direção radial, afastando-se da carga. Se a carga for negativa, a equação anterior continúa válida, dando um vetor que aponta no sentido oposto de $\vec{e}_r$ (campo atrativo). O vetor unitário $\vec{e}_r$ calcula-se dividindo o vetor posição $\vec{r}$ pelo seu módulo, $r$. Se a carga não estiver na origem mas numa posição $\vec{r}_1$, a equação 6.1 pode ser generalizada facilmente, dando o resultado:

$$\vec{E} = \frac{kQ(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} \tag{6.2}$$

O campo produzido por um sistema de cargas pontuais obtém-se somando vetorialmente os campos produzidos por cada uma das cargas. Por exemplo o lado esquerdo na figura 6.1 mostra os campos produzidos por duas cargas pontuais de 4 nC e 9 nC em alguns pontos. O lado direito mostra o campo resultante, obtido somando vetorialmente os dois campos.

A equação 6.2 pode ser generalizada para um sistema de $n$ cargas pontuais. Vamos escrever a equação explicitamente, em função das coordenadas cartesianas no plano $xy$ (a generalização para o espaço $xyz$ será evidente). Se as cargas $q_1$, $q_2$, ..., $q_n$ estiverem nos pontos $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, ..., $(x_n, y_n)$, o resultado é:

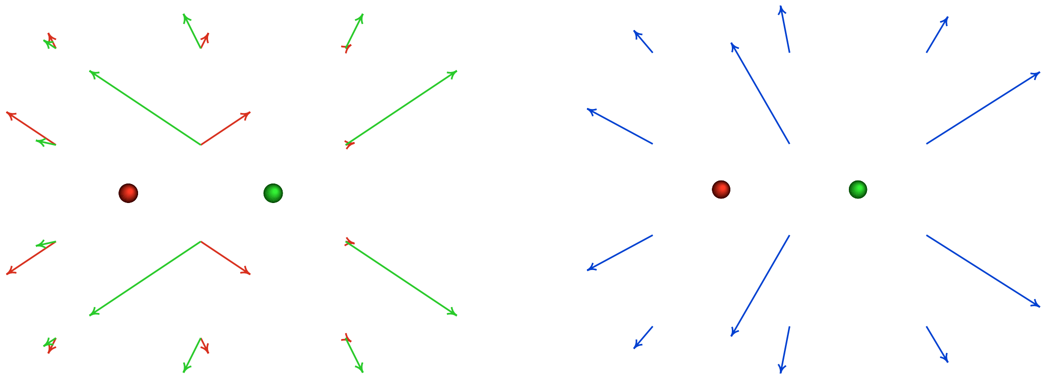


**Figura 6.1.:** Campo produzido por duas cargas de 4 nC e 9 nC. no lado esquerdo, e no lado direito, a soma dos dois campos.

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \left[ \frac{k\, q_i\,(x - x_i)}{[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2]^{3/2}} \right] \vec{e}_x + \sum_{i=1}^{n} \left[ \frac{k\, q_i\,(y - y_i)}{[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2]^{3/2}} \right] \vec{e}_y \tag{6.3}$$

O campo elétrico pode ser desenhado usando a equação 6.3 no programa *Maxima*. O campo do exemplo representado na figura 6.1 pode ser obtido com os seguintes comandos:

```
(%i1) Ex: 90*4*x/(x^2+y^2)^(3/2)+90*9*(x-1)/((x-1)^2+y^2)^(3/2);

                 360 x            810 (x - 1)
(%o1)         ------------ + ------------------
                2     2 3/2     2              2 3/2
              (y  + x )       (y  + (x - 1) )

(%i2) Ey: 90*4*y/(x^2+y^2)^(3/2)+90*9*y/((x-1)^2+y^2)^(3/2);

                 360 y               810 y
(%o2)         ------------ + ------------------
                2     2 3/2     2              2 3/2
              (y  + x )       (y  + (x - 1) )

(%i3) plotdf([Ex,Ey],[x,-1,3],[y,-2,2]);
```

O resultado obtido, após desenhar algumas linhas de campo, aparece na figura 6.2

## 6.2. Propriedades das linhas de campo elétrico

O campo elétrico pode ser representado por vetores que indicam o valor do campo em vários pontos do espaço, como foi feito na figura 6.1. O problema com essa representação é que o campo varia rapidamente com a distância, o que faz com que o vetor seja muito grande em alguns pontos e muito pequeno em outros pontos.

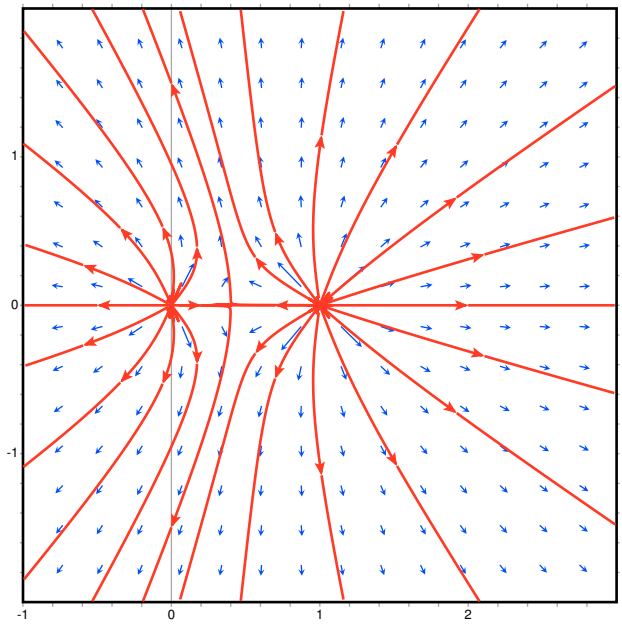



**Figura 6.2.:** Campo elétrico de duas cargas pontuais de 4 nC e 9 nC colocadas na origem, e no ponto (1, 0).

A representação usando linhas de campo é mais conveniente. As linhas de campo seguem a direção do campo. Em cada ponto numa dessas curvas, o campo é tangente à curva e no sentido indicado pelas setas.

As linhas de campo elétrico têm várias propriedades

- Perto de uma carga pontual positiva há linhas a sair em todas as direções e perto de uma carga negativa há linhas a entrarem em todas as direções (ver figura 6.3).

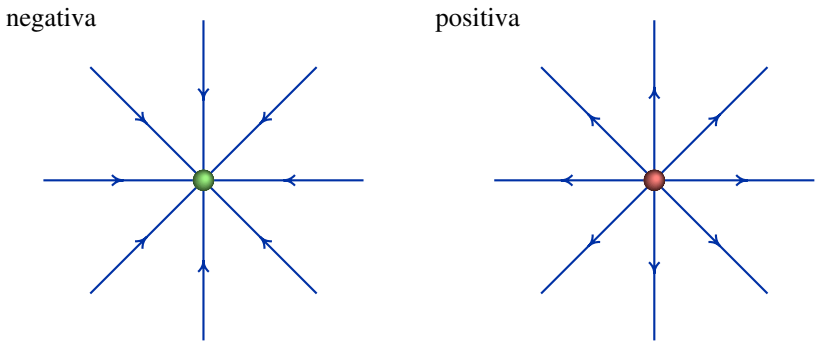



**Figura 6.3.:** Linhas de campo elétrico perto de uma carga negativa (esquerda) e de uma carga positiva (direita).

- Duas linhas de campo nunca se podem cruzar; no ponto de cruzamento o campo teria duas direções diferentes, que não é possível.
- No próximo capítulo demonstraremos que a matriz jacobiana correspondente ao

campo elétrico é sempre simétrica. Isso implica que os valores próprios dessa matriz serão sempre reais e nunca complexos. Assim, os únicos pontos de equilíbrio que podem existir num campo elétrico são nós e pontos de sela. Um nó pode ser atrativo ou repulsivo. Se for atrativo, será um ponto onde existe uma carga pontual negativa; se for repulsivo, será um ponto onde existe uma carga pontual positiva. Os pontos de sela são pontos onde o campo é nulo, mas não existe nenhuma carga nesse ponto.

No exemplo apresentado na figura 6.2, existe um ponto de sela em (0.4, 0), onde o campo é nulo. Existem duas linhas de campo que terminam nesse ponto de sela, e duas linhas de campo que começam nesse ponto.

Outro exemplo são as linhas de campo de um **dipolo elétrico**, formado por duas cargas iguais mas de sinais opostos. Se admitirmos que as duas cargas estão localizadas nos pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, o campo desenha-se com os seguintes comandos:

```
(%i5) Ex: (x+1)/((x+1)^2+y^2)^(3/2)-(x-1)/((x-1)^2+y^2)^(3/2)$
(%i6) Ey: y/((x+1)^2+y^2)^(3/2)-y/((x-1)^2+y^2)^(3/2)$
(%i7) plotdf([Ex, Ey], [x, -3, 3], [y, -3, 3]);
```

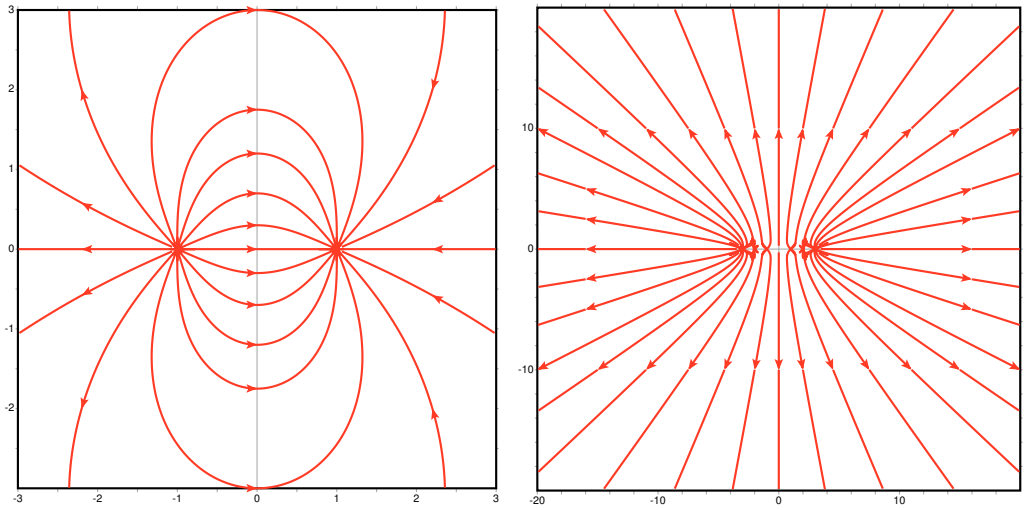



**Figura 6.4.:** Campo elétrico criado por um dipolo (esquerda) e por um sistema de 7 cargas no segmento de reta entre $x = -3$ e $x = 3$.

O resultado aparece no lado esquerdo da figura 6.4.

Uma distribuição contínua de cargas pode ser aproximada por uma série de cargas pontuais. Por exemplo, se existirem cargas distribuidas uniformemente no segmento do eixo dos $x$ entre $x = -3$ e $x = 3$, podemos admitir um sistema de cargas pontuais, equidistantes, sobre o segmento entre $x = -3$ e $x = 3$. Com 7 cargas pontuais, os comandos de Maxima para desenhar o campo são:

```
(%i8) Ex: sum((x-i)/((x-i)^2+y^2)^(3/2),i,-3,3)$
(%i9) Ey: sum(y/((x-i)^2+y^2)^(3/2),i,-3,3)$
(%i10) plotdf([Ex,Ey],[x,-20,20],[y,-20,20]);
```

O gráfico obtido é apresentado no lado direito da figura 6.4.

## 6.3. Fluxo elétrico

Para calcular o campo elétrico produzido por um objeto com carga, teriamos que somar os campos produzidos por todas as partículas com carga no objeto. Esse cálculo pode ser bastante complexo, inclusivamente se dividirmos o objeto em alguns pedaços que são considerados como cargas pontuais. Nos sistemas em que existe alguma simetria, é mais fácil calcular o campo usando a **lei de Gauss**. Para enunciar a lei de Gauss, precisamos primeiro definir o conceito de fluxo elétrico.

O **fluxo** $\Phi_e$ de um campo elétrico uniforme, através de um plano com área $A$, define-se como o produto da componente perpendicular do campo, vezes a área da superfície:

$$\boxed{\Phi_e = A\,E\cos\theta} \tag{6.4}$$

onde $\theta$ é ângulo entre o campo e a perpendicular ao plano (ver figura 6.5).

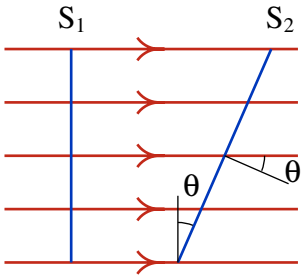



**Figura 6.5.:** Fluxo elétrico através de dois planos $S_1$ e $S_2$ (vistos de lado).

O fluxo através de dois planos atravessados pelas mesmas linhas de campo elétrico é o mesmo. Por exemplo, na figura 6.5 o fluxo através dos planos $S_1$ e $S_2$ é o mesmo. No plano $S_1$, como o campo é perpendicular, o fluxo é igual a $A_1\,E$; no plano $S_2$ o fluxo é $A_2\,E\cos\theta$; os dois fluxo são iguais, já que $A_2\cos\theta = A_1$.

No caso de campos não uniformes e superfícies curvas, a superfície é aproximada por pequenos planos e em cada plano admite-se que o campo é uniforme; o fluxo na superfície completa é igual á soma dos fluxos em todos os pequenos planos. A aproximação será exata no limite em que a superfície for aproximada por um número infinito de planos; nesse limite a soma dos fluxos constitui um integral de superfície.

Em geral, inclusivamente para campos não uniformes, nas superfícies onde passem o mesmo número de linhas de campo o fluxo elétrico será o mesmo. As linhas de campo que passam pela fronteira de uma superfície formam um **tubo de fluxo**. A figura 6.6 mostra um desses tubos de fluxo.

Em qualquer superfície delimitada pelo tubo de fluxo, o fluxo terá o mesmo valor. Por exemplo, na figura 6.6 o fluxo através das superfícies $S_1$, $S_2$ e $S_3$ tem o mesmo valor.

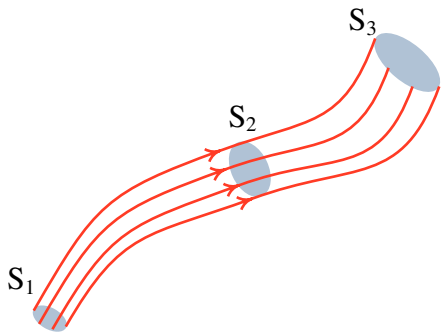



**Figura 6.6.:** Tubo de fluxo.

Nenhuma linha de campo pode atravessar para dentro ou para fora do tubo, porque as linhas não se podem cruzar; assim, o numero de linhas que atravessa qualquer das superfícies delimitadas pelo tubo de fluxo é o mesmo. O fluxo elétrico através de uma superfície é proporcional ao número de linhas de campo que atravessam a superfície.

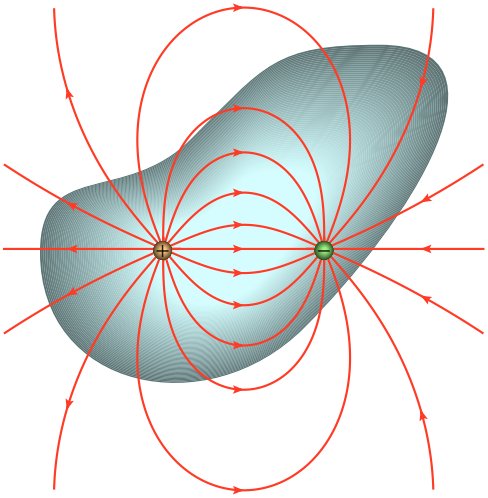


**Figura 6.7.:** Num dipolo elétrico, o fluxo através de uma superfície fechada, com o dipolo no seu interior, é nulo.

Se houver linhas de campo a atravessar nos dois sentidos da superfície, as linhas que atravessam num sentido produzem fluxo positivo e as opostas produzem fluxo negativo. O sentido positivo é escolhido de forma arbitrária. No caso de uma superfície fechada, admite-se que o campo que aponta para fora da superfície produz fluxo positivo, e o campo que aponta para dentro da superfície produz fluxo negativo.

Por exemplo, o fluxo produzido por um dipolo elétrico, através de uma superfície fechada que envolva as duas cargas, é nulo porque o número de linhas de campo que entram e saem é o mesmo (figura 6.7).

O fluxo através de uma superfície fechada à volta de uma carga pontual $Q$, é igual ao fluxo

numa esfera com centro na carga, já que todas as linhas de campo que passam através da superfície passam também através da esfera. Nessa esfera, com raio $R$, o campo é perpendicular e com módulo constante, $E_n = kQ/R^2$, em toda a superfície (figura 6.8).

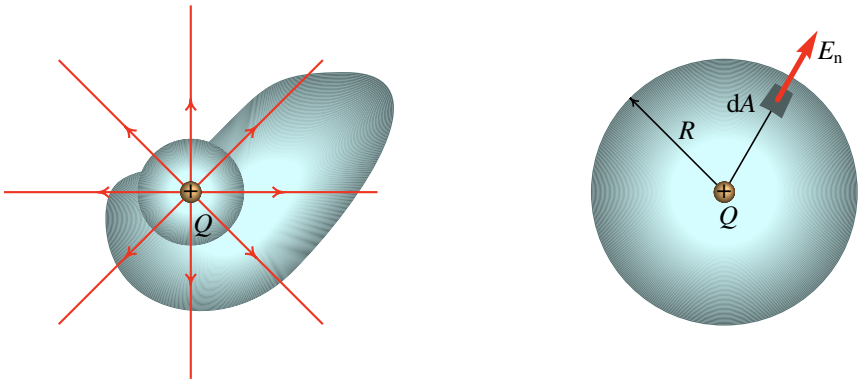



**Figura 6.8.:** Fluxo produzido por uma carga pontual através de uma superfície fechada.

Assim, o fluxo será igual ao produto da área da esfera vezes o módulo do campo:

$$\Phi_e = 4\pi R^2 \left(\frac{kQ}{R^2}\right) = 4\pi kQ \tag{6.5}$$

Se $Q$ estiver fora da superfície fechada, o fluxo será nulo, pois qualquer linha de campo que entra por uma parte da superfície, sai por outra parte. O número total de linhas que entram é igual a o número total de linhas que saem.

## 6.4. Lei de Gauss

O fluxo elétrico produzido por várias cargas pontuais, através de uma superfície fechada, é igual à soma dos fluxos produzidos por cada uma das cargas. Como vimos na seção anterior, o fluxo das cargas pontuais que estejam fora da superfície fechada será nulo, e o fluxo das cargas que estejam dentro da superfície será $4\pi k$ vezes o valor da carga. Por exemplo, no caso da figura 6.9, unicamente as duas cargas $q_1$ e $q_2$ produzem fluxo, porque a carga $q_3$ encontra-se fora da superfície. O fluxo total é:

$$\Phi_e = 4\pi k(q_1 + q_2) \tag{6.6}$$

O resultado do exemplo da figura 6.9 pode ser generalizado para qualquer sistema de cargas e qualquer superfície fechada, e é designado de **Lei de Gauss**:

*O fluxo através de qualquer superfície fechada é igual à carga total no interior da superfície, multiplicada por* $4\pi k$.

Em termos matemáticos, a lei de Gauss determina que o fluxo elétrico através de qualquer superfície fechada é:

$$\boxed{\Phi_e = 4\pi k q_{int}} \tag{6.7}$$

Se a carga total no interior for positiva, o fluxo será positivo, indicando que há linhas de campo a sairem da superfície. Se a carga interna total for negativa, o fluxo é negativo porque há linhas de campo a entrar na superfície.

O fluxo elétrico total à volta de uma carga pontual é diretamente proporcional à carga. Em alguns casos é possível desenhar um número de linhas de campo proporcional à carga, para dar uma ideia mais aproximada do valor do fluxo em diferentes regiões; por exemplo, na figura 6.2 foram desenhadas 8 linhas de campo a sairem da carga de 4 nC, e 18 linhas a sairem da carga de 9 nC.

A lei de Gauss é muito útil para calcular campos elétricos de sistemas com simetria, como veremos nas seções seguintes.

---

**Exemplo 6.1**
*Um eletrão encontra-se no centro de um cubo cuja aresta mede* 20 nm. *Calcule o fluxo elétrico através de uma das faces do cubo.*

**Resolução:** O cubo é uma superfície fechada (embora não seja superfície gaussiana neste caso) e portanto o fluxo através do cubo pode ser calculado facilmente usando a lei de Gauss:

$$\Phi_e = 4\pi k q_{int}$$

A carga interna $q_{int}$ é a carga do eletrão ($-1.602 \times 10^{-19}$ C). Assim, o fluxo através do cubo é:

$$\Phi_e = \pi \times 4 \times 9 \times 10^9 \times (-1.602 \times 10^{-19}) = -18.09 \times 10^{-9} \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{C}}$$

Por simetria, o fluxo em cada face deve ser o mesmo de maneira que o fluxo numa face é a sexta parte do fluxo no cubo: $-3.02$ nN $\cdot$ m$^2$/C (o sinal negativo indica que é para dentro do cubo).

---

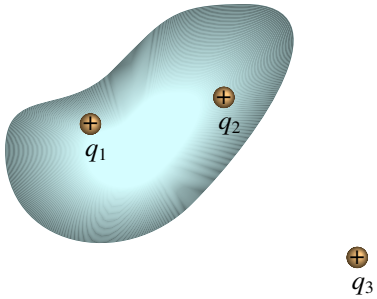



**Figura 6.9.:** O fluxo elétrico através da superfície fechada depende unicamente da carga interna, neste caso $q_1 + q_2$.

### 6.4.1. Campo de um plano

Consideremos um plano, com carga distribuída uniformemente. Visto de lado, o plano aparece como um segmento de reta, e as linhas de campo serão semelhantes às linhas representadas no lado direito da figura 6.4.

Nas regiões perto do centro do plano, as linhas de campo são aproximadamente paralelas entre si. Quanto maior for o plano, maior será a região onde as linhas são aproximadamente paralelas. No caso idealizado de um plano infinito, as linhas serão completamente paralelas e equidistantes, já que a aparência do plano seria a mesma em qualquer ponto.

Para calcular o campo elétrico usando a lei de Gauss, imaginamos um cilindro com as tampas paralelas ao plano, como se mostra na figura 6.10.

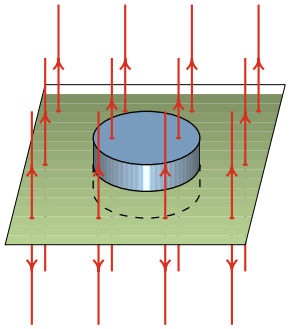


**Figura 6.10.:** Cilindro imaginário usado para calcular o campo do plano.

Nas paredes laterais do cilindro não existe fluxo elétrico, porque o campo é paralelo à superfície. Em cada uma das tampas circulares do cilindro, o campo é perpendicular e, com módulo constante, devido a que todos os pontos na tampa estão à mesma distância do plano. Assim, o fluxo em cada uma das tampas do cilindro é $AE$, em que $A$ é a área da tampa, e o fluxo total através do cilindro é:

$$\Phi_e = 2AE \tag{6.8}$$

De acordo com a lei de Gauss, esse fluxo também deverá ser igual a:

$$\Phi_e = 4\pi kQ \tag{6.9}$$

onde $Q$ é a carga na parte do plano que está dentro do cilindro. Igualando as duas últimas equações obtemos o módulo do campo:

$$\boxed{E_{\text{plano}} = 2\pi k\sigma} \tag{6.10}$$

em que $\sigma$ é a **carga superficial**; nomeadamente, carga por unidade de área:

$$\sigma = \frac{Q}{A} \tag{6.11}$$

### 6.4.2. Campo de um fio retilíneo

Consideremos um fio retilíneo, muito comprido, com carga distribuida uniformemente. As linhas de campo deverão ser nas direções radiais. Imaginemos uma superfície fechada que é um cilindro de raio $R$ e altura $L$, com eixo sobre o fio, como mostra a figura 6.11.

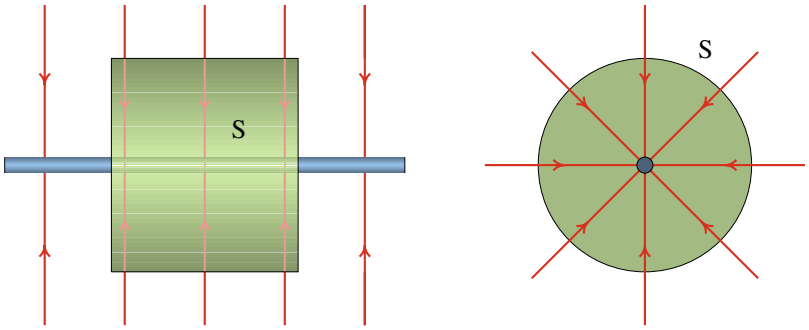



**Figura 6.11.:** Linhas de campo de um cilindro com carga distribuida uniformemente, e superfície usada para calcular o campo.

Nas tampas circulares do cilindro o fluxo é nulo, porque o campo é paralelo à superfície; na parede lateral do cilindro, o campo é perpendicular e com módulo constante. Assim, o fluxo total será:

$$\Phi_e = 2\pi RLE \tag{6.12}$$

onde $E$ é o módulo do campo à distância $R$ do fio. De acordo com a lei de Gauss, esse fluxo deverá ser também igual a

$$\Phi_e = 4\pi kQ \tag{6.13}$$

onde $Q$ é a carga do fio que está dentro do cilindro S. Igualando as duas equações anteriores, obtemos o módulo do campo:

$$\boxed{E_{\text{fio}} = \frac{2k\lambda}{R}} \tag{6.14}$$

em que $\lambda$ é a **carga linear** (carga por unidade de comprimento): $\lambda = Q/L$.

### 6.4.3. Campo de uma esfera condutora

Numa esfera condutora, com carga $Q$ e raio $a$, a força repulsiva entre as cargas do mesmo sinal, faz com que as cargas se distribuam em forma uniforme, na superfície da esfera. Existe assim simetria esférica, e as linhas de campo deverão apontar na direção radial.

Para calcular o campo, imaginamos uma esfera de raio $r$, concêntrica com a esfera condutora. Na superfície dessa esfera, o campo será perpendicular, e com módulo constante $E$; consequentemente o fluxo será:

$$\Phi_e = 4\pi r^2 E \tag{6.15}$$

Segundo a lei de Gauss, o fluxo através da esfera de raio $r$ será nulo, se $r < a$, ou igual a $4\pi kQ$ se $r > a$. Portanto, o campo elétrico é nulo, no interior da esfera. Fora da esfera o campo é:

$$E = \frac{kQ}{r^2} \tag{6.16}$$

Que é idêntico ao campo produzido por uma carga $Q$ concentrada no centro da esfera.

# Perguntas

**1.** Um plano com 2500 $cm^2$ de área tem uma carga total de 20 nC, distribuida uniformemente. O módulo do campo elétrico perto do plano é, aproximadamente:

A. 18.1 mN/C
B. 4.52 kN/C
C. 1.81 N/C
D. 45.2 N/C
E. 0.452 N/C

**2.** Uma esfera condutora de 3 cm de raio, isolada e com carga positiva, produz um campo de módulo 36 $\mu$N/nC, num ponto que se encontra a 1 cm da superfície da esfera. Calcule a carga total da esfera.

A. 3.6 nC
B. 0.4 nC
C. 1.6 nC
D. 6.4 nC
E. 1.2 nC

**3.** Num sistema de coordenadas cartesianas ($x$, $y$, $z$) (em metros), existe uma carga pontual de 2 nC em (1,0,0), uma carga pontual de -4 nC em (0,2,0) e uma carga pontual de 3 nC em (0,0,4). Calcule o fluxo elétrico (em unidades SI) através de uma esfera de raio 3 m, com centro na origem.

A. $36\pi$
B. $72\pi$
C. $-72\pi$
D. $108\pi$
E. $-144\pi$

**4.** A carga existente numa esfera de raio 1 m está distribuída nesta de uma forma desconhecida. O fluxo do campo elétrico criado pela distribuição através de uma superfície esférica de raio 4 m, concêntrica com a esfera carregada, é de $11.3 \times 10^4$ N·$m^2$/C. Qual é o fluxo do campo elétrico através de uma superfície esférica de raio 2 m?

A. $45.2 \times 10^4$ N·$m^2$/C
B. $22.6 \times 10^4$ N·$m^2$/C
C. $11.3 \times 10^4$ N·$m^2$/C
D. $56.5 \times 10^3$ N·$m^2$/C
E. $28.2 \times 10^3$ N·$m^2$/C

**5.** Se numa superfície fechada o campo elétrico aponta para dentro da superfície em todos os pontos, o que é que podemos concluir?

A. Existe carga positiva dentro da superfície.
B. Existe carga negativa dentro da super-

fície.

C. Não existe nenhuma carga dentro da superfície.

D. O campo é necessariamente perpendicular à superfície.

E. O campo é necessariamente paralelo à superfície.

# Problemas

**1.** Uma carga pontual $q = 2\ \mu$C encontra-se na origem. Uma superfície esférica de 3 m de raio tem centro no eixo dos $x$, em $x = 5$ m. ($a$) Desenhe a esfera e algumas linhas do campo da carga $q$. Alguma linha atravessa a esfera? ($b$) Contando as linhas que entram como negativas e as linhas que saem positivas, qual é o numero total de linhas que atravessam a esfera? ($c$) Calcule o fluxo elétrico através da esfera.

**2.** Uma carga pontual de 5 nC encontra-se a 6 cm de um fio retilíneo muito comprido, com carga linear constante e igual a 7 nC/cm. Calcule a força elétrica sobre o fio (sugestão: calcule melhor a força do fio sobre a carga pontual, que é mais fácil de calcular, e pela lei de ação e reação deverá ter o mesmo módulo).

**3.** Duas cascas esféricas concêntricas, com raios $a$ e $b$, encontram-se uma dentro da outra ($a < b$). A casca esférica interna, de raio $a$, tem uma carga total $Q$ distribuída uniformemente na sua superfície, e a casca externa tem uma carga $-Q$, distribuída uniformemente na sua superfície. Usando a lei de Gauss, calcule o campo elétrico nos pontos dentro da casca interna, entre as duas cascas e por fora da casca externa.

**4.** Uma esfera de raio $R$ tem uma carga elétrica $Q$ distribuida uniformemente dentro do seu volume. Usando a lei de Gauss, calcule o módulo do campo elétrico num ponto a uma distância $r$ do centro da esfera. Considere os dois casos, $r \geq R$ e $r < R$.

**5.** A figura mostra as linhas de campo elétrico de duas partículas carregadas, uma delas na origem, e a outra no ponto (1, 0). No ponto (3, 0) existe um ponto de sela. Sabendo que a carga da partícula na origem é 18 nC, calcule a carga da outra partícula.

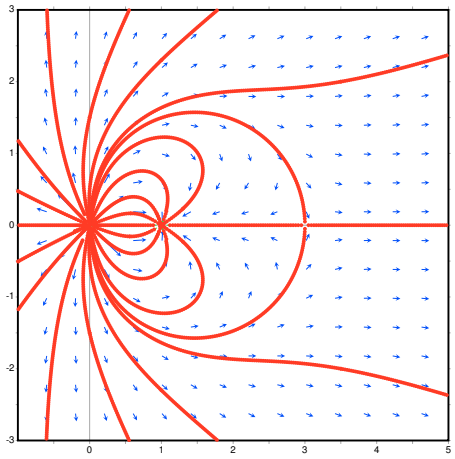



**Figura 6.12.:** Problema 5.

**6.** Uma partícula pontual com massa igual a 25 g e carga de 50 nC encontra-se pendurada de um fio de 7 cm que está colado a um plano vertical. O plano vertical tem uma carga superficial constante $\sigma = 17$ nC/cm$^2$ e pode ser considerado infinito. Calcule o ângulo $\theta$ que o fio faz com o plano vertical.

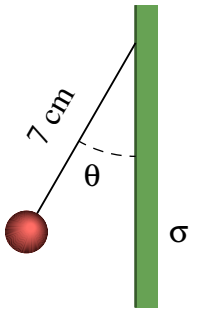
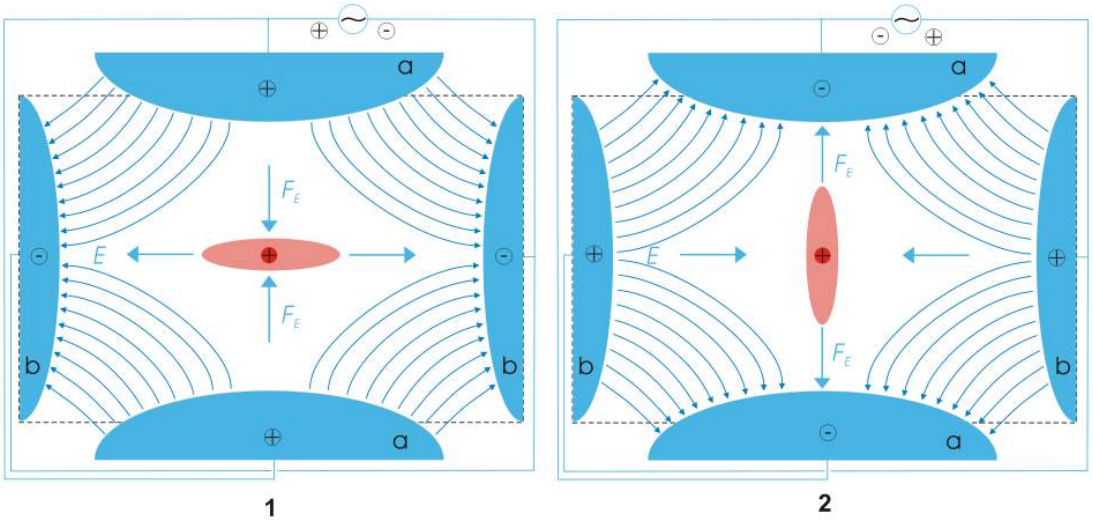



**Figura 6.13.:** Problema 6.

**7.** Para simular as cargas num condensador de placas planas paralelas, considere um sistema de 13 cargas de valor $+1$ nos pontos (-6,5), (-5,5), ..., (5,5) e (6,5), e 13 cargas de valor $-1$ nos pontos (-6,-5), (-5,-5), ..., (5,-5) e (6,-5). Usando Maxima, desenhe o campo elétrico e as linhas de campo (o desenho é independente das unidades que sejam usadas).

# 7. Potencial eletrostático




Em 1989 Wolfgang Paul recebeu o prémio Nobel da física pela sua invenção da **armadilha de iões** que permite isolar um único ião. Com essa invenção tornou-se possível estudar um átomo isolado, e pôr a prova a física quântica, já que nas experiências anteriores estavam sempre presentes muitos átomos. O princípio de funcionamento da armadilha de iões é muito simples. Usa-se um potencial de quadrupólo, nomeadamente, um sistema em que em dois lados opostos de um quadrado há dois condutores com potenciais positivos e nos outros dois lados há condutores com potenciais negativos, criando-se assim um ponto de sela no centro do quadrado.

Os iões, com carga positiva, são empurrados para o centro pelos condutores com potencial positivo, e para fora do centro pelos condutores com potencial negativo. O potencial dos condutores inverte-se sucessivamente, o que faz com que após algum tempo unicamente o ião que se encontra no centro permaneça nesse ponto de equilíbrio.

## Atividade prática

Uma carga pontual de +1 nC encontra-se na origem, e uma segunda carga de +4 nC encontra-se no ponto $x = 30$ cm, $y = 0$. A função que define o potencial produzido por esse sistema:

$$V(x,y,z) = \frac{900}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{3600}{\sqrt{(x-30)^2+y^2+z^2}}$$

em volts, com $x$, $y$ e $z$ em centímetros. Usando *Maxima*, calcule as 3 componentes cartesianas do campo elétrico. Com o programa **ploteq** (incluido no pacote **plotdf**), desenhe as superfícies equipotenciais nos planos $z = 0$ e $z = 10$ e desenhe algumas linhas de campo; quantos pontos críticos (nós ou pontos de sela) existem em cada um dos dois gráficos?

# 7.1. Potencial e campo elétrico

A diferença de potencial entre dois pontos separados por um pequeno percurso $\mathrm{d}\vec{r}$ é:

$$\boxed{\mathrm{d}V = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}} \tag{7.1}$$

esta equação mostra que o potencial decresce mais rapidamente na direção do campo elétrico e mantém-se constante na direção perpendicular ao campo. Em cada ponto onde o campo não for nulo, existe uma única direção em que o potencial permanece constante; o campo elétrico é perpendicular a essa direção, e aponta no sentido em que $V$ diminui (figura 7.1). As cargas positivas deslocam-se no sentido em que o potencial decresce, e a as cargas negativas deslocam-se no sentido em que o potencial aumenta.

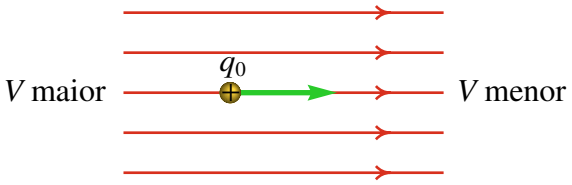



**Figura 7.1.:** O campo elétrico aponta na direção e sentido em que o potencial diminui mais rapidamente.

Se $E_s$ for a componente do campo na direção do deslocamento vetorial $\mathrm{d}\vec{r}$, e $\mathrm{d}s$ for o módulo desse vetor, a equação 7.1 pode ser escrita

$$\mathrm{d}V = -E_s\,\mathrm{d}s \tag{7.2}$$

Assim, a componente do campo na direção e sentido de um vetor qualquer $\mathrm{d}\vec{r}$ é:

$$\boxed{E_s = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s}} \tag{7.3}$$

onde $\mathrm{d}V$ é calculado na direção do vetor $\mathrm{d}\vec{r}$. A derivada na expressão anterior é designada **derivada direccional** da função $V$, na direção definida por $\mathrm{d}\vec{r}$.

Em particular, se a direção escolhida for no sentido dum dos 3 eixos cartesianos, $E_s$ será a componente do campo na direção desse eixo, e a derivada direccional será a derivada parcial em função da variável associada ao eixo:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{7.4}$$

Para calcular o potencial num ponto, é costume arbitrar que o potencial seja nulo no infinito. Assim, o potencial no ponto P obtém-se a partir do integral

$$\boxed{V = -\int_{\infty}^{\mathrm{P}} \vec{E} \cdot d\vec{r}} \tag{7.5}$$

As 3 componentes cartesianas do campo não podem ser quaisquer 3 funções da posição, já que, a partir das equações 7.4 conclui-se que

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y} \tag{7.6}$$

essas são as condições necessárias e suficientes para garantir que o campo seja conservativo. A matriz jacobiana do campo, em função da posição, é:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial x} & \frac{\partial E_x}{\partial y} & \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} & \frac{\partial E_y}{\partial y} & \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} & \frac{\partial E_z}{\partial y} & \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

devido às condições 7.6, essa matriz é simétrica e, portanto, deverá ter unicamente valores próprios reais. Consequentemente, no espaço da posição, os pontos de equilíbrio do campo elétrico podem ser ou pontos de sela ou nós, mas nunca centros ou focos. No espaço de fase, como o sistema é conservativo, os pontos de equilíbrio podem ser pontos de sela ou centros.

---

**Exemplo 7.1**

*O campo elétrico numa região do espaço é dado pela expressão (unidades SI)*

$$\vec{E} = 4xy\,\vec{e}_x + (2x^2 + 8yz^3)\,\vec{e}_y + 12y^2z^2\,\vec{e}_z$$

*(a) Demonstre que o campo $\vec{E}$ é conservativo. (b) Calcule o potencial eletrostático (defina $V = 0$ na origem).*

**Resolução:** (*a*) Para demonstrar que o campo é conservativo, basta calcular as derivadas parciais cruzadas das três componentes do campo e conferir que são iguais:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = 4x = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = 0 = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = 24yz^2 = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

(*b*) O potencial no ponto (*x*,*y*,*z*) é igual a menos o integral de linha do campo, desde a origem (onde arbitramos $V = 0$) até esse ponto. Como o campo é conservativo, o integral pode ser calculado ao longo de qualquer percurso e o resultado será o mesmo. Escolhemos um percurso formado pelos três segmentos de reta que unem os pontos (0,0,0), (*x*,0,0), (*x*,*y*,0) e (*x*,*y*,*z*):

$$\begin{aligned} V(x,y,z) &= -\int_0^x E_x(x,0,0)\,\mathrm{d}x - \int_0^y E_y(x,y,0)\,\mathrm{d}y - \int_0^z E_z(x,y,z)\,\mathrm{d}z \\ &= -\int_0^x 0\,\mathrm{d}x - 2x^2\int_0^y \mathrm{d}y - 12y^2\int_0^z z^2\,\mathrm{d}z \\ &= -2yx^2 - 4y^2z^3 \end{aligned}$$

## 7.2. Potencial de cargas pontuais

Em duas dimensões, o campo elétrico produzido por um sistema de *n* cargas pontuais $q_1$, $q-2$, ..., $q_n$, é dado pela equação 6.3 do capítulo anterior. O potencial é a função de *x* e *y* com derivadas parciais iguais às duas componentes do campo. Assim, o potencial é:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{k\,q_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} \tag{7.8}$$

Onde $x_i$ e $y_i$ são as coordenadas da posição da partícula *i*.

Este resultado pode ser generalizado para o caso de 3 dimensões. O resultado é:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{k\,q_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}} \tag{7.9}$$

as coordenadas ($x_i$, $y_i$, $z_i$) correspondem à posição $\vec{r}_i$ da partícula número *i* com carga $q_i$. O denominador na equação 7.9 é a distância $|\vec{r} - \vec{r}_i|$ entre o ponto onde está a ser calculado o potencial e o ponto onde está a carga $q_i$.

Um exemplo é o sistema de duas cargas de $+1$ nC e $+4$ nC referido na atividade prática do início do capítulo.

Se nos limitarmos ao potencial no plano $xy$, pode ser representado em função das variáveis $x$ e $y$ como a terceira coordenada num gráfico em três dimensões, no espaço $xyV$. Por exemplo, para desenhar o potencial do exemplo da atividade prática, no plano $xy$ (figura 7.2), usaremos os seguintes comandos no Maxima:

```
(%i1) V: 900/(x^2+y^2)^(1/2) + 3600/((x-30)^2+y^2)^(1/2)$
(%i2) plot3d(V,[x,-10,40],[y,-25,25],[z,0,2000],[legend,false])$
```

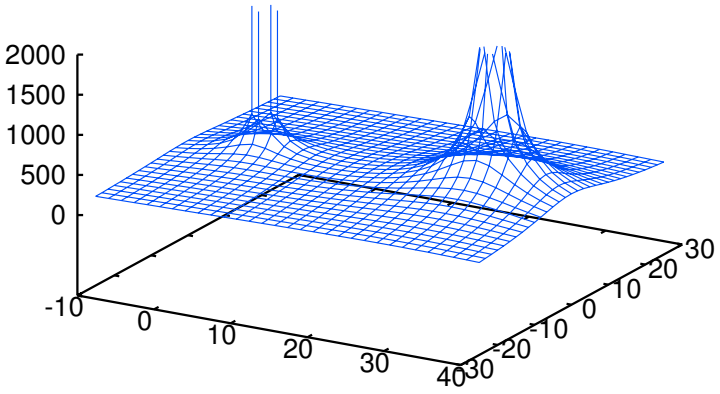



**Figura 7.2.:** Potencial de duas cargas de $+1$ nC e $+4$ nC, no plano $xy$.

A opção `[z,0,2000]` foi usada para limitar o valor máximo de $V$ a ser apresentado, já que nos pontos onde se encontram as cargas pontuais positivas o potencial cresce até infinito (figura 7.2).

## 7.3. Superfícies equipotenciais

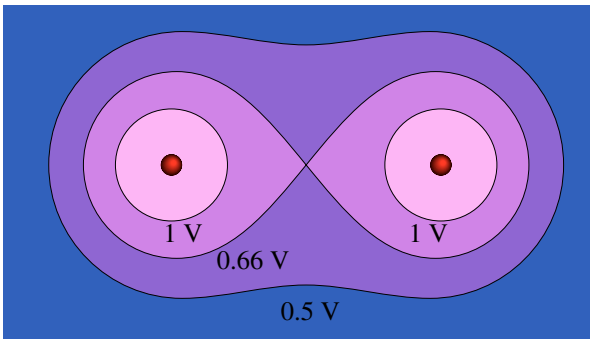



**Figura 7.3.:** Superfícies equipotenciais de um sistema de duas cargas positivas iguais.

Os pontos do espaço onde o potencial tem um valor determinado formam superfícies contínuas designadas de superfícies **equipotenciais**. Por exemplo, a figura 7.3 mostra a interseção do plano $xy$ com as superfícies equipotenciais de 0.5 V, 0.66 V e 1 V.

Em qualquer direção ao longo duma superfície equipotencial, o produto escalar $\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ deverá ser nulo, já que $\mathrm{d}V = 0$. Isso implica que o campo elétrico será perpendicular às superfícies equipotenciais (figura 7.4).

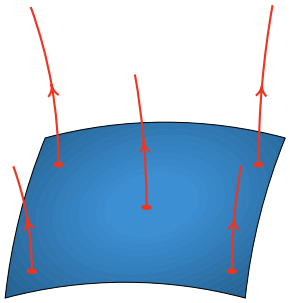


**Figura 7.4.:** Superfície equipotencial, e linhas de campo, perpendiculares à superfície.

Em duas dimensões, as superfícies equipotenciais aparecem como uma família de curvas perpendiculares às linhas de campo elétrico. Por exemplo, a figura 7.5, apresenta as superfícies equipotenciais e as linhas de campo elétrico de um dipolo elétrico, com uma carga positiva de 1 nC no lado esquerdo e uma carga negativa de $-1$ nC no lado direito, e foi obtida com os seguintes comandos no Maxima:

```
(%i3) V: 900/((x+1)^2+y^2)^(1/2)-900/((x-1)^2+y^2)^(1/2)$
(%i4) ploteq(V,[x,-2,2],[y,-2,2])$
```

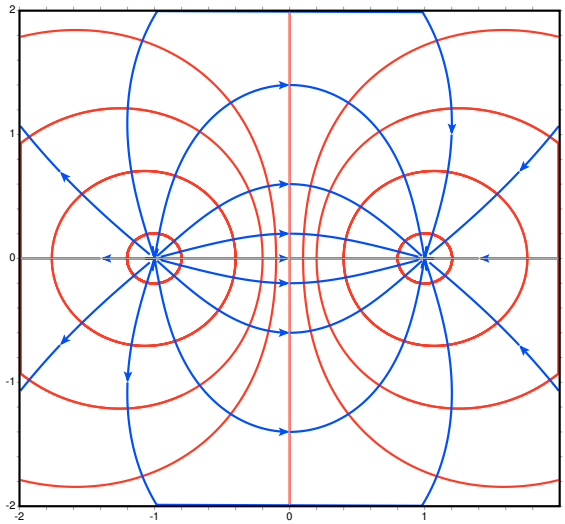



**Figura 7.5.:** Superfícies equipotenciais e linhas de campo de um dipólo elétrico.

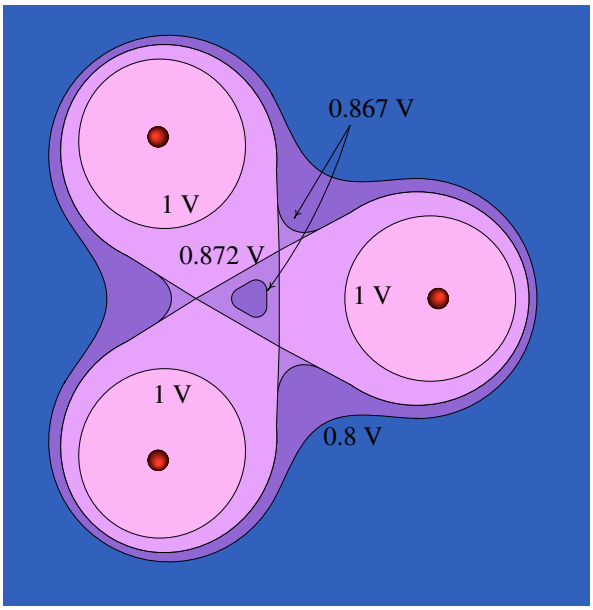



**Figura 7.6.:** Superfícies equipotenciais de um sistema de 3 cargas positivas.

## 7.4. Pontos críticos do potencial

As linhas de campo elétrico apontam na direção em que o potencial decresce. Consequentemente, num ponto onde o potencial tiver um valor máximo local, existirão linhas a apontar para fora desse ponto (nó repulsivo); o fluxo numa superfície fechada à volta desse ponto será positivo. Isso implica que na região onde o potencial é máximo deverá existir carga positiva.

Num ponto onde o potencial tiver um valor mínimo local, as linhas de campo apontarão na direção desse ponto (nó atrativo). O fluxo numa superfície fechada à volta do ponto será negativo. Assim, deverá existir carga negativa nesse ponto.

Os pontos máximos e mínimos do potencial podem ser pontos onde o potencial aproxima-se de $+\infty$ ou $-\infty$, no caso de cargas pontuais, ou pontos de equilíbrio, onde as derivadas do potencial são todas nulas. Existe um terceiro tipo de ponto crítico, **ponto de sela**, em que o potencial é máximo em algumas direções e mínimo em outras. Portanto, em algumas direções entram linhas de campo e em outras direções saem; o fluxo numa superfície fechada à volta do ponto deverá ser nulo e, assim, nesse ponto o campo será nulo. Os pontos de sela são pontos de equilíbrio instável.

Como nos pontos máximos e mínimos do potencial há linhas de campo a sair ou entrar em todas as direções, esses pontos encontram-se dentro de superfícies equipotenciais fechadas, umas dentro das outras, aproximando-se do ponto mínimo ou máximo. Nos pontos de sela há sempre um cruzamento das superfícies equipotenciais.

A figura 7.6 mostra um exemplo: as superfícies equipotenciais de um sistema de três cargas positivas. Nesse desenho existem três famílias de esferas fechadas que se aproximam das

três cargas positivas, onde o potencial tem um valor máximo local. Existem também quatro pontos de sela, onde o campo elétrico é nulo e as superfícies equipotenciais cruzam-se: três deles são evidentes no desenho, formando um pequeno triângulo perto do centro. O quarto ponto de sela está no centro do desenho; no plano *xy* esse ponto aparece como se fosse um mínimo do potencial, mas no espaço *xyz* é um ponto de sela; há linhas de campo a afastarem-se desse ponto no sentido do eixo dos *z*, e o fluxo à volta desse ponto é nulo.

## 7.5. Potencial e energia eletrostática

Se uma partícula com carga $q$ se deslocar entre dois pontos onde existe uma diferença de potencial $\Delta V$ a variação da sua energia potencial eletrostática será:

$$\Delta U = q\,\Delta V \tag{7.10}$$

Devido a que o campo elétrico é um campo conservativo, a energia mecânica conserva-se e a variação da energia potencial implica uma variação da energia cinética.

Quando se trata de partículas elementares com cargas da ordem de grandeza da carga elementar, costuma usar-se uma unidade de energia designada de **eletrão-volt** (eV), que corresponde à energia adquirida por um eletrão quando se deslocar para uma região onde o potencial aumenta em 1 V. Assim, passando para o sistema internacional:

$$1\,\mathrm{eV} = 1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}\times1\,\mathrm{V} = 1.6\times10^{-19}\,\mathrm{J} \tag{7.11}$$

## 7.6. Potencial nos condutores

Dentro de um condutor isolado, o campo elétrico é nulo. Se assim não fosse, existiria movimento das cargas livres, criando um campo interno que contraria o campo externo; o movimento das cargas livres só pára quando o campo total for nulo. O tempo que demoram as cargas livres a redistribuírem-se para que o campo no condutor seja nulo é bastante pequeno e pode ser considerado nulo.

Como o campo elétrico é nulo dentro do condutor isolado, não existem linhas de campo elétrico, e o potencial em todos os pontos dentro do condutor é o mesmo. O fluxo em qualquer parte dentro do condutor também é nulo e, assim, de acordo com a lei de Gauss, não pode existir carga em nenhuma parte dentro do condutor. Toda a carga elétrica acumula-se na superfície do condutor.

A própria superfície do condutor é uma superfície equipotencial, já que todos os pontos do condutor têm o mesmo potencial; assim, as linhas de campo elétrico fora do condutor são perpendiculares à sua superfície.

Um exemplo é um automóvel, que é um condutor, isolado pelos pneus que são isoladores. A terra é um condutor; assim, se o automóvel tiver carga positiva, as linhas de campo saem

**Figura 7.7.:** Um carro é um condutor isolado. As linhas de campo são perpendiculares à superfície da carroçaria e ao chão.

perpendiculares ao automóvel e entram de forma perpendicular no chão (figura 7.7).

Se o condutor tiver uma carga total não nula, por exemplo, negativa como no lado esquerdo da figura 7.8, nesse caso o potencial nele tem um valor mínimo local e há superfícies equipotenciais à volta do condutor. Se o condutor não tiver carga total, como no lado direito da figura 7.8 o campo na sua superfície é devido a algum campo externo, que separa cargas positivas e negativas na superfície do condutor; a superfície equipotencial do condutor estende-se por fora do condutor de forma perpendicular ao campo externo.

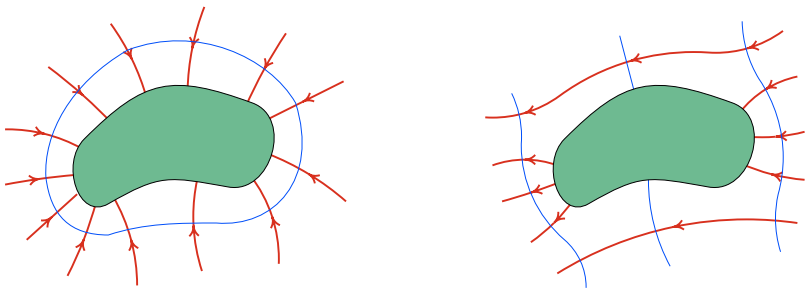


**Figura 7.8.:** Superfícies equipotenciais e linhas de campo de um condutor com carga negativa (à esquerda), e de um condutor sem carga, dentro de um campo externo (à direita).

A distribuição de cargas na superfície dum condutor isolado não pode ser uniforme. Consideremos três condutores diferentes com a mesma carga superficial $\sigma$, um deles plano, o outro convexo e o último côncavo (figura 7.9). Nos três casos a separação das linhas de campo sobre a superfície deve ser a mesma e o campo é igual nos três casos quando a distância $d$ a partir da superfície for igual a zero. À medida que $d$ aumenta, como as linhas de campo são perpendiculares à superfície do condutor, a separação das linhas vai ser maior no caso do condutor convexo e menor no caso do condutor côncavo; no caso do condutor côncavo, as linhas de campo acabam por se afastar à medida que $d$ aumenta.

Como o campo elétrico é inversamente proporcional à distância entre as linhas de campo, o campo produzido pelos três condutores é como mostra a figura 7.9.

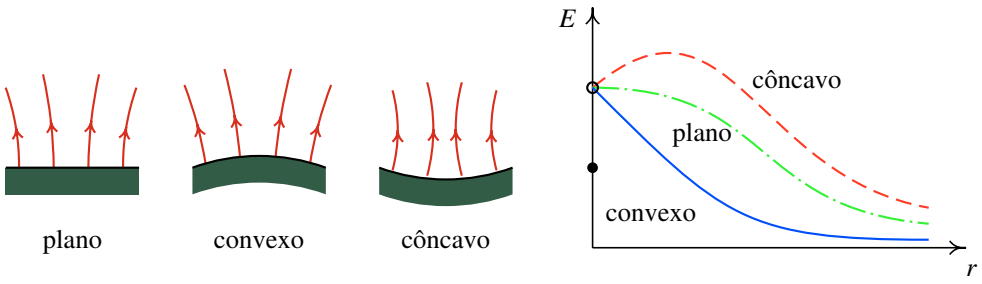



**Figura 7.9.:** Três condutores com a mesma carga superficial e o campo produzido em função da distância $d$ a partir da superfície.

O potencial de cada um dos condutores na figura 7.9 obtém-se integrando o campo elétrico desde a superfície ($d = 0$) até o infinito (onde $V = 0$). No gráfico da direita, os valores dos três potenciais são as áreas sob as três curvas dos módulos dos campos elétricos. Assim, o condutor côncavo encontra-se a um potencial maior que o condutor plano e estes dois condutores estão a um potencial maior que o condutor convexo.

Em pontos diferentes da superfície de um condutor, o potencial é sempre o mesmo. Portanto, a carga superficial não pode ser a mesma nos pontos onde o condutor é côncavo, convexo ou plano. A carga superficial tem que ser maior nas regiões convexas, menor nas regiões planas e ainda menor nas regiões côncavas. Desta forma obtém-se o mesmo valor para o integral do campo elétrico, como se mostra na figura 7.10.

Nas regiões convexas, quanto menor for o raio da curvatura, maior será a carga superficial, e nas regiões côncavas quanto maior for o raio da curvatura, maior será a carga superficial. A carga acumula-se mais nas pontas da superfície dum condutor Este efeito é aproveitado nos pára-raios; os raios são atraídos para a ponta do pára-raios, onde há uma maior acumulação de cargas e, portanto, o campo elétrico é mais intenso.

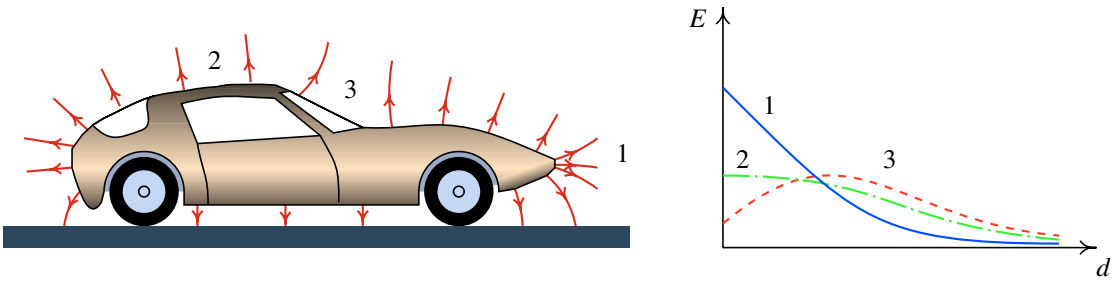



**Figura 7.10.:** Num automóvel carregado, a carga superficial é maior nos pontos mais pontiagudos. O gráfico mostra o campo elétrico em três pontos, em função da distância desde a superfície. A área sob as três curvas deve ser igual.

### 7.6.1. Potencial de uma esfera condutora

Numa esfera condutora, as cargas distribuem-se uniformemente na superfície. No capítulo anterior vimos que esse tipo de distribuição de carga produz um campo nulo no interior da esfera, e no exterior o campo é idêntico a que existiria se toda a carga estivesse concentrada no centro da esfera. Assim, o potencial fora da esfera deverá ser idêntico ao potencial de uma carga pontual $Q$:

$$V = \frac{kQ}{r} \qquad (\text{se } r > a) \tag{7.12}$$

em que $Q$ é a carga total da esfera, e $a$ o seu raio.

Para que o campo seja nulo no interior da esfera, o potencial deverá ser constante nessa região. Como o potencial deve ser uma função contínua, o valor constante do potencial, dentro da esfera, deverá ser o mesmo que na superfície; nomeadamente

$$V = \frac{kQ}{a} \qquad (\text{se } r < a) \tag{7.13}$$

Dentro da esfera ($r < a$) o campo é nulo e o potencial é constante. Fora da esfera, o potencial decresce inversamente proporcional à distância (ver figura 7.11).

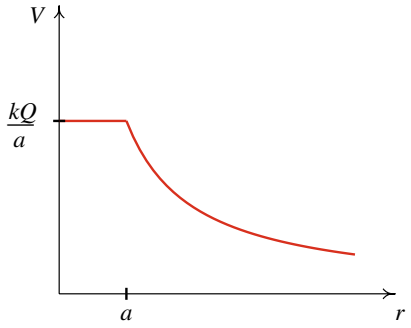



**Figura 7.11.:** Potencial produzido por uma esfera condutora isolada.

## Perguntas

**1.** O potencial produzido por um sistema de duas cargas pontuais, $Q$ e $q$, é nulo num ponto P. Isso implica que:

A. A força sobre uma carga de prova no ponto P seria nula.

B. $Q$ e $q$ deverão ter o mesmo sinal.

C. O campo elétrico será nulo no ponto P.

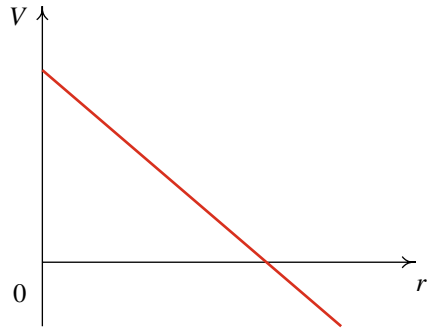
D. O trabalho total necessário para trazer as cargas $Q$ e $q$ até às suas posições foi nulo.

E. O trabalho necessário para trazer uma carga desde o infinito até o ponto P é nulo.

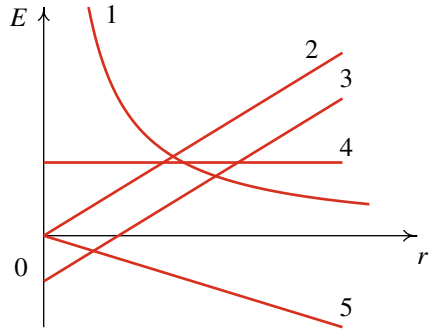
**2.** Uma carga de 4 $\mu$C encontra-se dentro de um campo elétrico com módulo igual a $4 \times 10^5$ N/C. Qual é o trabalho necessário para deslocar essa carga uma distância de 20 cm numa direção a 60° com o campo elétrico?

A. 0.28 J
B. 160 mJ
C. 0.68 J
D. 28 J
E. 16 J

**3.** O potencial elétrico de um sistema, em função da distância ao longo de uma direção dada é representado pelo gráfico:

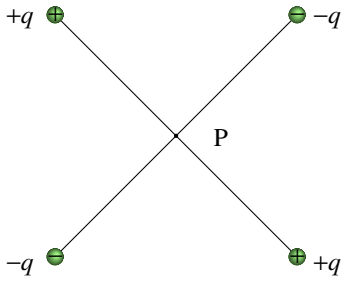



Qual das cinco funções no gráfico a seguir representa melhor o módulo do campo ao longo da mesma direção?




A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. 5

**4.** Quatro cargas pontuais, com valores $+q$ e $-q$, encontram-se nos vértices de um quadrado, como mostra a figura. O que é que podemos afirmar acerca do potencial ($V$) e do módulo do campo ($E$) no centro do quadrado (P)?




A. $E \neq 0, V > 0$
B. $E = 0, V = 0$
C. $E = 0, V > 0$
D. $E \neq 0, V < 0$

**5.** Perto de uma carga pontual existe um ponto onde o potencial elétrico produzido pela carga é 3 V (arbitrando potencial nulo no infinito) e o módulo do campo elétrico da carga é 200 N/C. Calcule a distância desde a carga até ao ponto.

A. 3 m
B. 3 cm
C. 1.5 cm
D. 0.67 cm
E. 6.7 cm

# Problemas

**1.** O potencial no plano $xy$ é

$$V(x,y) = \frac{1250}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} + 50x$$

Calcule o campo elétrico, em função de $x$ e $y$. Usando Maxima, desenhe as superfícies equipotenciais e as linhas de campo. Existe algum ponto onde o campo seja nulo? A que tipo de sistema corresponde esse potencial?

**2.** Existe um campo elétrico uniforme entre duas placas paralelas separadas por 2.0 cm. O módulo do campo é 15 kN/C. Calcule a diferença de potencial entre as placas.

**3.** O potencial elétrico a uma certa distância de uma carga pontual é 600 V (arbitrando potencial nulo no infinito) e o campo elétrico é 200 N/C. Calcule a distância e o valor da carga.

**4.** Duas superfícies condutoras esféricas e concêntricas têm raios de 5 cm e 7 cm. A superfície menor tem uma carga total de 3 nC e a carga total na superfície maior é de $-2$ nC. Calcule a diferença de potencial entre as duas superfícies.

**5.** A figura representa as linhas de campo eletrostático de duas partículas carregadas e separadas por uma distância de 7 cm. A relação entre os valores das duas cargas é 4/9. (*a*) Calcule a distância do ponto P às partículas. (*b*) Sabendo que a carga da partícula no lado direito é de $-8$ nC, calcule o potencial no ponto P (arbitre $V = 0$ no infinito).

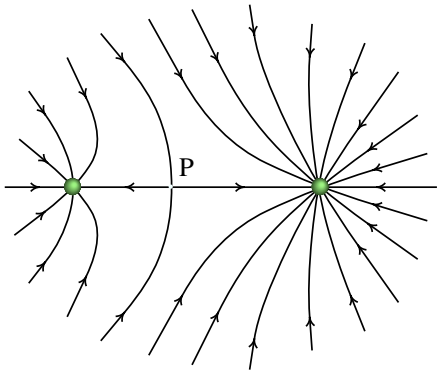



**Figura 7.12.:** Problema 5.

**6.** O potencial sobre o plano $xy$ é (unidades SI):

$$V = \frac{2x}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{3}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

Calcule o campo elétrico em qualquer ponto no plano $xy$. Usando o Maxima, desenhe as superfícies equipotenciais e as linhas de campo. Existe algum ponto onde o campo seja nulo?

**7.** Nos três desenhos a seguir representam-se as superfícies equipotenciais de três sistemas de duas cargas pontuais $q_1$ e $q_2$. Em todos os casos $q_1 = 3$ nC, e a distância entre as duas cargas é 6 cm. Nos desenhos (*a*) e (*b*) a distância entre o ponto P e a carga $q_1$ é igual a 2 cm. Calcule $q_2$ nos três casos.

**8.** A figura mostra as superfícies equipotenciais de uma carga pontual no interior de um campo elétrico uniforme $\vec{E}_{\text{ext}}$. A grandes distâncias da carga pontual as superfícies são

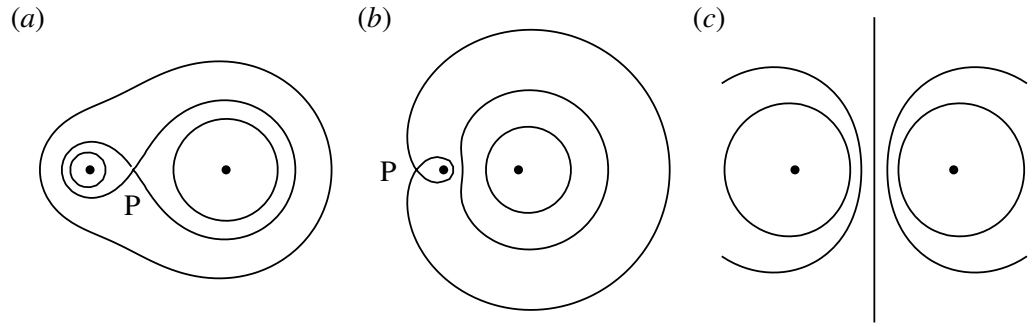



**Figura 7.13.:** Problema 7.

planos paralelos distanciados 8 cm. (*a*) Calcule o módulo e a direção do campo externo $\vec{E}_{\text{ext}}$. (*b*) Diga se a carga pontual é positiva ou negativa. Justifique. (*c*) Qual é a direção da força sobre a carga pontual? (*d*) Sabendo que a distância entre a carga pontual e o ponto P é 9 cm, calcule o valor da carga pontual.

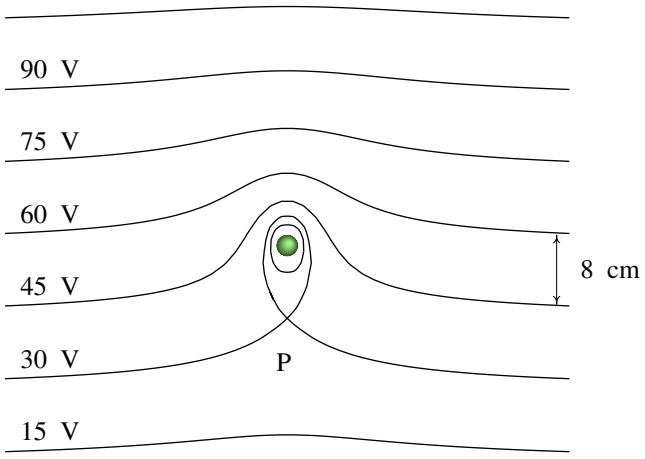
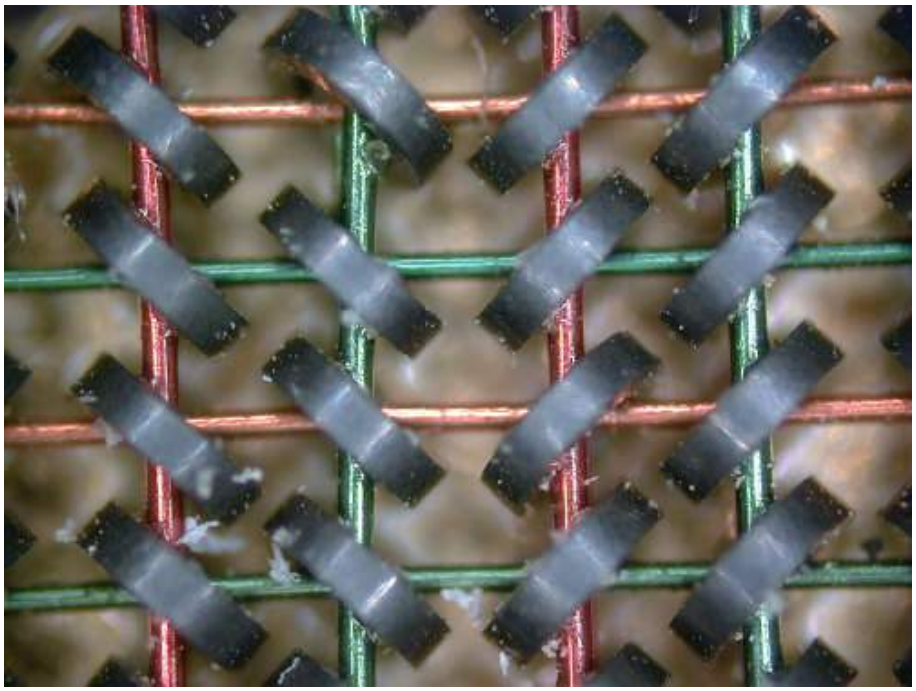



**Figura 7.14.:** Problema 8.

# 8. O campo magnético



As primeiras memórias de computador que foram construídas, consistiam numa quadricula de fios de cobre, com pequenos anéis de material ferromagnético em cada interseção entre dois fios. Fazendo passar uma corrente por dois fios perpendiculares, consegue-se magnetizar o anel que está na interseção entre os dois fios; nos outros anéis, a corrente de um único fio não é suficiente para magnetizar. O estado de magnetização de um anel pode ser detetado porque produz interferências na corrente nos fios que passam pelo anel. Para apagar uma posição na memória (desmagnetizar um dos anéis), faz-se passar corrente nos dois fios correspondentes, em sentido oposto ao sentido usado para magnetizar o anel. O sistema na fotografia está ampliado; os 16 anéis que se mostram permitem armazenar apenas 2 bytes, e fazem parte de uma memoria com capacidade total de 4 quilobytes. Hoje em dia usam-se outras técnicas que permitem obter capacidades um milhão de vezes superior (gigabytes), num espaço muito menor.

## Atividade prática

Dois cabos de cobre, paralelos ao eixo dos $z$, transportam correntes de 5 A, em sentidos opostos. O cabo que transporta corrente no sentido positivo do eixo dos $z$ passa pelo ponto (-1,0) no plano $xy$, e o outro cabo passa pelo ponto (1,0) (as unidades de distância são centímetros). Esse sistema produz um campo magnético com componentes:

$$B_x = -\frac{y}{(x+1)^2+y^2} + \frac{y}{(x-1)^2+y^2} \qquad B_y = \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} - \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}$$

(medido numa unidade designada de gauss).

Desenhe as linhas de campo desse sistema; observe a relação entre o sentido das linhas, perto de cada cabo, e o sentido da corrente. Calcule a **divergência** do campo:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y}$$

e mostre que o resultado é nulo. Mostre que esse campo não é conservativo; nomeadamente, não verifica as condições 7.6 apresentadas no capítulo anterior para o campo elétrico.

## 8.1. Força magnética

A força magnética é outro tipo de força entre objetos, que atua a distância sem existir contato entre os objetos, tal como a força gravítica e a força elétrica. Pode ser atrativa ou repulsiva, o que fez com que antigamente (antes de 1600) fosse confundida com a força elétrica.

Existem ímanes naturais que se encontram na natureza; na Grécia antiga, as rochas extraídas nas minas da região da Magnesia eram ímanes naturais que deram origem ao termo magnetismo. Um íman tem sempre um pólo norte e um pólo sul. Aproximando dois pólos opostos de dois ímanes, surge uma força atrativa entre os ímanes; e entre pólos semelhantes a força é repulsiva.

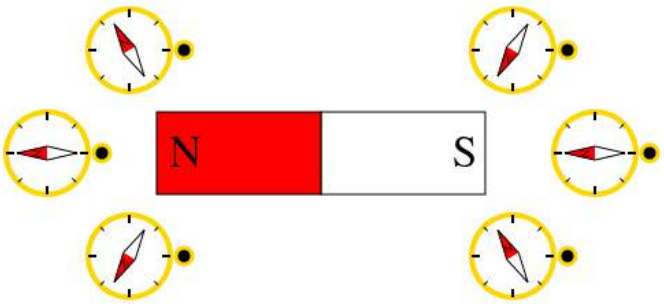



**Figura 8.1.:** A bússola aponta no sentido das linhas de campo magnético.

Um íman cria um campo magnético à sua volta. O campo pode ser detetado com uma bússola, que é também um pequeno íman. A figura 8.1 mostra um íman de forma de barra retangular; o pólo norte costuma estar pintado de vermelho. Aproximando uma bússola dos pólos, consegue ver-se a direção das linhas de campo magnético; por convenção, as linhas de campo são no sentido em que aponta o pólo norte da bússola; em cada ponto define-se um vetor de campo magnético, $\vec{B}$, com o sentido e direção da orientação da bússola.

As linhas de campo saem do pólo norte e entram no pólo sul; são semelhantes às linhas de campo elétrico de um dipolo elétrico, mas a diferença é que as linhas de campo magnético não terminam no pólo sul, nem começam no pólo norte, mas são linhas fechadas que passam pelos dois pólos (figura 8.2).

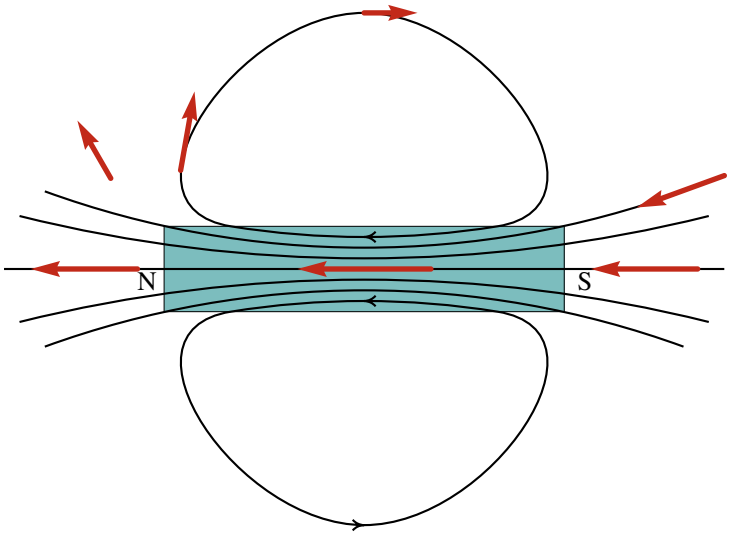



**Figura 8.2.:** Linhas de campo de um íman retangular.

Se partirmos um íman em vários pedaços menores, em cada pedaço aparecem um pólo norte e um pólo sul. É impossível obter um pólo norte ou um pólo sul isolado. Essa é a maior diferença em relação ao campo elétrico, onde podem existir cargas positivas ou negativas isoladas.

A inexistência de mono-pólos magnéticos implica que não podem existir pontos para onde muitas linhas de campo convergem, nem pontos de onde muitas linhas de campo divergem. Em relação à matriz jacobiana do campo magnético num ponto do espaço:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

um valor próprio real, diferente de zero, implica infinitas linhas de campo a sair ou entrar

no ponto, excepto no caso em que exista outro valor próprio com o mesmo valor absoluto e sinal oposto (nesse caso existem apenas duas linhas que entram no ponto e duas que saem). Consequentemente, a soma de todos os valores próprios deverá ser nula; lembrando que a soma dos valores próprios de uma matriz é igual ao seu traço, vem:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0 \tag{8.2}$$

essa soma é designada de **divergência** do campo. A condição de que a divergência do campo seja nula equivale a dizer que não podem existir nem focos nem nós porque nesse caso a soma dos valores próprios não seria nula. Os pontos de equilíbrio do campo magnético podem ser apenas centros ou pontos de sela.

Por exemplo, num íman retangular como o da figura 8.2 as linhas de campo abrem-se fora de cada pólo, curvando-se para passar pelo outro pólo; isso implica que o campo decresce rapidamente perto dos pólos. Uma forma de conseguir que as linhas de campo não se abram tanto, para obter um campo mais forte, consiste em dobrar a barra de forma de ferradura, para que os dois pólos fiquem mais perto um do outro (ver figura 8.3).

**Figura 8.3.:** Imán de forma de ferradura. O pólo norte está pintado de vermelho, e o pólo sul de verde.

A própria Terra é também um íman natural e, por isso, a bússola aponta na direção do pólo norte geográfico. As linhas do campo magnético terrestre têm o sentido do pólo sul geográfico para o pólo norte geográfico. Assim, o pólo norte geográfico é, de fato, o pólo sul magnético da Terra, e o pólo sul geográfico é o pólo norte magnético.

Os materiais que podem ser magnetizados, formando um íman, são chamados **ferromagnéticos**; a maior parte das substâncias são **diamagnéticas**, nomeadamente, não podem ser magnetizadas e não interagem com o campo magnético de forma apreciável, excepto num campo magnético muito forte, onde sentem uma força repulsiva. Finalmente, existem também substâncias **paramagnéticas** que são atraídas ligeiramente pelos ímanes (os materiais ferromagnéticos são atraídos com maior força).

## 8.2. Força magnética sobre condutores com corrente

Um campo magnético também pode ser detetado com um fio com corrente. O campo magnético produz uma força sobre o fio, diretamente proporcional à corrente. A força magnética sobre um pequeno segmento de fio depende também da orientação do fio em relação ao campo magnético; se o fio for paralelo ao campo magnético, a força é nula, e se o fio for perpendicular ao campo, a força é máxima. O módulo da força também é diretamente proporcional ao comprimento do pedaço de fio. A constante de proporcionalidade define o módulo do campo magnético, $B$.

A direção da força é sempre perpendicular ao campo magnético e perpendicular ao fio; o sentido da força segue a regra da mão direita entre o sentido da corrente e o sentido do campo magnético. Usando vetores, a força pode ser escrita assim:

$$\Delta\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B}\, \Delta s \tag{8.3}$$

Em que $\vec{I}$ é um vetor na direção do fio, no sentido da corrente e com módulo igual à intensidade da corrente. $\Delta s$ é o comprimento do segmento de fio.

No caso geral, será preciso integrar a equação 8.3 para obter a força total sobre um fio. No caso particular em que o fio for retilíneo, com comprimento $L$, e o campo magnético for uniforme, a força resultante é:

$$\boxed{\vec{F} = L\vec{I} \times \vec{B}} \tag{8.4}$$

A equação 8.3 permitem-nos concluir que, no sistema internacional de unidades, as unidades do campo magnético são

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m} \cdot \mathrm{A}} \tag{8.5}$$

essa unidade é o tesla, identificado pela letra T. Um campo magnético de um tesla é um campo bastante elevado. Uma unidade menor, usada com frequência, é o gauss, identificado com a letra G:

$$1\,\mathrm{G} = 10^{-4}\,\mathrm{T} \tag{8.6}$$

o módulo do campo magnético terrestre, na superfície da Terra, encontra-se entre 0.3 G e 0.6 G em diferentes locais.

## 8.3. Momento magnético

A força resultante sobre uma bússola produzida pelo campo magnético da Terra, é quase nula, devido a que sobre os dois pólos magnéticos atuam forças iguais e opostas. No entanto, essas forças produzem um torque suficientemente forte para poder ser observado facilmente. Qualquer íman, em particular a bússola, tem um **momento magnético**, $\vec{m}$ que

é um vetor orientado desde o seu pólo sul até o seu pólo norte; um campo magnético $\vec{B}$ produz um torque, $\vec{T}$, igual ao produto vetorial entre o momento magnético e o campo:

$$\boxed{\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}} \tag{8.7}$$

o torque será sempre no sentido que faz rodar o momento magnético $\vec{m}$ até apontar no sentido do campo $\vec{B}$.

O torque produzido pelo campo magnético é o princípio usado nos motores elétricos. O motor tem uma bobina, que pode rodar à volta de um eixo, dentro de um campo magnético produzido por ímanes fixos (figura 8.4). A bobina é um fio condutor enrolado várias vezes. Cada volta completa do fio na bobina designa-se de **espira**.

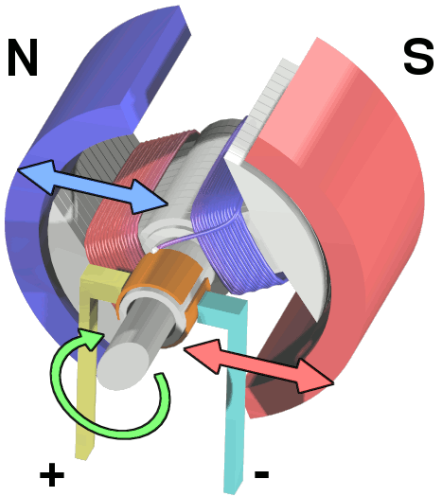



**Figura 8.4.:** Motor elétrico de corrente contínua.

Quando o fio é percorrido por uma corrente $I$, as forças magnéticas sobre os diferentes segmentos de cada espira anulam-se, mas há um torque resultante; pode mostrar-se que se o campo for uniforme, o torque resultante verificará a equação 8.7, sendo o momento magnético da espira igual a:

$$\boxed{\vec{m} = A\,I\,\vec{e}_{\mathrm{n}}} \tag{8.8}$$

onde $A$ é a área da espira e $\vec{e}_n$ o versor perpendicular à espira, no sentido definido pela regra da mão direita, como mostra a figura 8.5: o polegar da mão direita define o sentido de $\vec{m}$, quando os outros quatro dedos apontarem no sentido da corrente na espira.

O momento magnético de uma bobina é a soma dos momentos das espiras que formam essa bobina. Se a bobina tiver $N$ espiras, comporta-se como um íman com momento magnético $\vec{m} = N\,I\,A\,\vec{e}_{\mathrm{n}}$. Se o campo não for uniforme, a área da bobina deverá ser dividida em pequenos pedaços para calcular o torque total por meio de um integral de superfície.

Num motor, os dois terminais da bobina ligam-se a um comutador que roda juntamente com a bobina. Na figura 8.4 pode ver-se o comutador (cilindro com dois setores metálicos

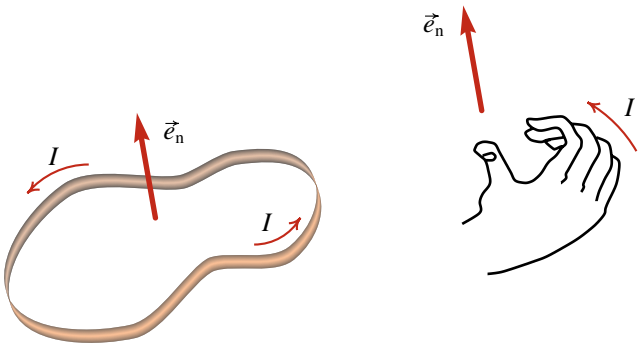


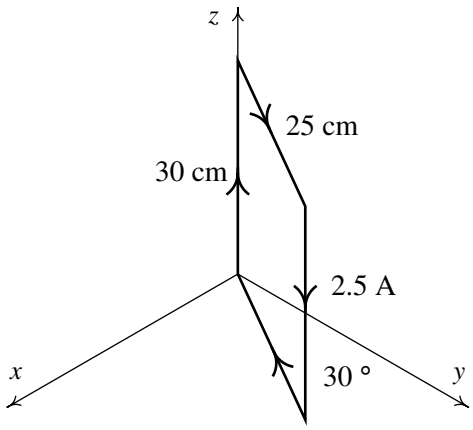

**Figura 8.5.:** Definição do momento magnético de uma espira.

independentes) a fazer contato com os dois terminais + e − ligados a uma *fem* externa. Quando a bobina roda, chega até uma posição em que o segmento do comutador que estava em contato com o terminal positivo passa a estar em contato com o terminal negativo e vice-versa, invertendo-se o sentido da corrente na bobina.

O comutador é colocado de forma a que, quando o momento magnético da bobina estiver na direção e sentido do campo magnético do íman (de esquerda para direita, na figura 8.4), o sentido da corrente seja invertido, fazendo com que o ângulo entre o momento magnético e o campo passe de 0° para 180°. Assim, a bobina roda constantemente, porque o torque magnético tende sempre a diminuir esse ângulo até 0°.

---

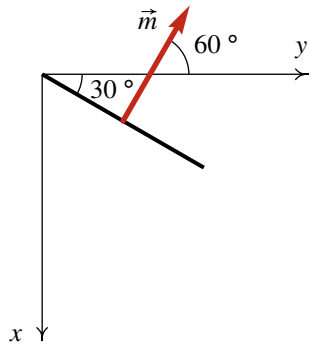
**Exemplo 8.1**
*Uma espira retangular com arestas de* 25 cm *e* 30 cm, *transporta uma corrente de* 2.5 A, *no sentido indicado na figura. A espira encontra-se num plano vertical que faz um ângulo de* 30° *com o plano yz. Existe um campo magnético uniforme* $\vec{B} = 0.2\,\vec{e}_y$ *(SI). Calcule o torque produzido pelo campo magnético sobre a espira e diga em que sentido rodará a espira.*



**Resolução**: A área da espira é:

$$A = 0.25 \times 0.30 = 0.075 \text{ m}^2$$

Usando a regra da mão direita, vemos que o momento magnético $\vec{m}$ da espira é paralelo ao plano $xy$ e tem o sentido indicado na figura seguinte:




portanto, o versor normal é:

$$\vec{e}_\text{n} = -\sin 60^\circ \vec{e}_x + \cos 60^\circ \vec{e}_y = -0.866\vec{e}_x + 0.5\vec{e}_y$$

e o momento magnético da espira é:

$$\vec{m} = 0.075 \times 2.5\,(-0.866\vec{e}_x + 0.5\vec{e}_y) = (-0.162\vec{e}_x + 0.0938\vec{e}_y)\ \text{A}\cdot\text{m}^2$$

O torque é igual ao produto vetorial entre o momento magnético e o campo magnético:

$$\vec{T} = (-0.162\vec{e}_x + 0.0938\vec{e}_y) \times (0.2\vec{e}_y) = -32.4\vec{e}_z\ (\text{mN}\cdot\text{m})$$

A bobina roda até o seu momento magnético apontar na direção e sentido do campo magnético. Consequentemente, a bobina roda à volta dum eixo paralelo ao eixo dos $z$, que passa pelo seu centro de massa, de forma a que o ângulo inicial de 30° aumente até 90°.

## 8.4. Força magnética sobre partículas com carga

A força produzida pelo campo magnético sobre um fio com corrente é o resultado das forças que atuam sobre cada uma das cargas de condução, devido ao seu movimento.

Quando não há corrente, a velocidade média das cargas de condução é nula e a força magnética resultante também é nula. Quando a corrente aumenta no condutor, a velocidade média das cargas de condução aumenta em proporção direta à corrente, e a força sobre cada carga de condução também aumenta em proporção direta. A força magnética sobre cada carga de condução e, de forma geral, a força magnética sobre qualquer partícula com carga $q$ é dada pela equação:

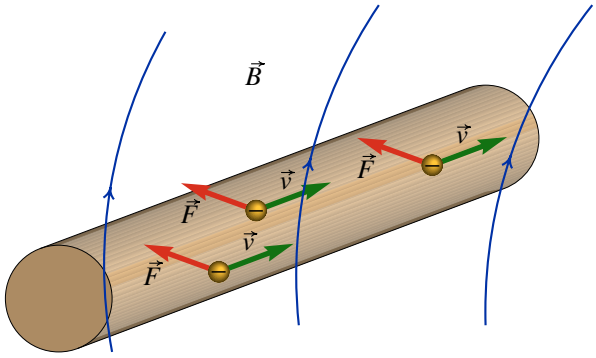



**Figura 8.6.:** Força magnética sobre as cargas de condução, num condutor com corrente.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{8.9}$$

em que $\vec{v}$ é a velocidade da partícula e $\vec{B}$ é o campo magnético no ponto onde se encontra a partícula. Assim, a força magnética é diretamente proporcional ao módulo da velocidade da partícula e à sua carga. Se a velocidade for paralela ao campo, a força será nula, e se a velocidade for perpendicular ao campo, a força será máxima. A força magnética é perpendicular à velocidade da partícula e perpendicular ao campo. Se a carga da partícula for positiva, o sentido da força é dado pela regra da mão direita, desde $\vec{v}$ até $\vec{B}$ (ver figura 8.7), ou no sentido oposto, se a carga da partícula for negativa.

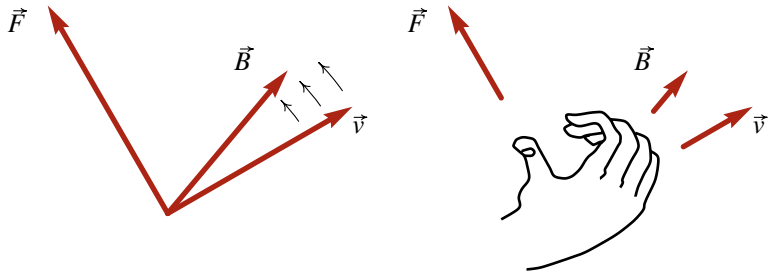



**Figura 8.7.:** A força magnética sobre uma partícula é perpendicular à sua velocidade e a campo magnético, no sentido da regra da mão direita.

Numa região onde existem campos elétrico, $\vec{E}$, e magnético, $\vec{B}$, a força sobre uma partícula com carga $q$ e velocidade $\vec{v}$ é

$$\boxed{\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)} \tag{8.10}$$

Em geral, a força resultante tem componentes tangencial e normal. A força magnética é sempre no plano perpendicular ao versor tangencial. Qualquer mudança de energia cinética é devida ao campo elétrico já que o campo magnético não realiza nenhum trabalho, por produzir força sempre perpendicular ao deslocamento.

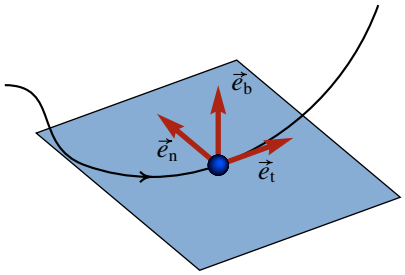



**Figura 8.8.:** Versores tangencial, $\vec{e}_t$, normal, $\vec{e}_n$ e bi-normal $\vec{e}_b$. A força magnética é sempre paralela a $\vec{e}_n$.

As linhas de campo magnético de um campo magnético uniforme são retas paralelas e costumam desenhar-se equidistantes entre sim, para indicar a uniformidade do campo. Num plano perpendicular ao campo uniforme, as linhas são desenhadas como pontos, se o campo apontar para fora do desenho, ou por meio de x, se o campo apontar para dentro do desenho, como no caso seguinte; por exemplo, na figura 8.9 está representado um campo magnético uniforme, que aponta para dentro da folha.

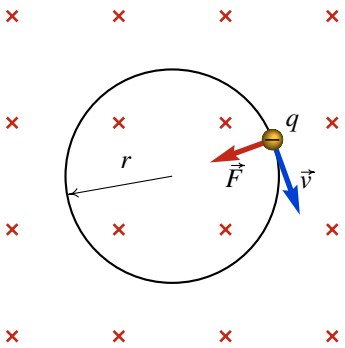



**Figura 8.9.:** Movimento de uma partícula com carga negativa dentro de um campo magnético uniforme, apontando para dentro da folha.

Consideremos uma partícula, com carga $q$, que se desloca dentro de um campo magnético uniforme, sem existirem outras forças para além da força magnética. Se a velocidade inicial da partícula for perpendicular ao campo, o módulo da força magnética será $qvB$. Como em cada instante a força é perpendicular à velocidade, e o modulo da velocidade permanece constante (a força magnética não altera a energia cinética), o resultado será um movimento circular uniforme em que a força centrípeta, $mv^2/r$ é a força magnética $qvB$; consequentemente, o raio da trajetória será:

$$\boxed{r = \frac{mv}{qB}} \tag{8.11}$$

e a velocidade angular:

$$\boxed{\omega = \frac{qB}{m}} \tag{8.12}$$

as partículas com cargas negativas rodarão em sentido oposto às partículas com carga positiva. No caso da figura 8.9, a carga da partícula é negativa.

Se a velocidade inicial não for perpendicular ao campo, a componente da velocidade no sentido do campo permanece constante, enquanto que a velocidade perpendicular roda, com a velocidade angular dada pela equação 8.12. A sobreposição do deslocamento uniforme, na direção do campo, e o movimento circular uniforme no plano perpendicular, produz um movimento **helicoidal** que segue as linhas de campo magnético. O raio da hélice será menor nas regiões onde o campo for mais forte, e as linhas de campo estiverem mais perto umas das outras.

Um par de campos elétrico e magnético, uniformes e perpendiculares entre si podem ser usados para "filtrar" partículas com uma determinada velocidade. A figura 8.10 mostra um **filtro de velocidades**, formado por um campo elétrico uniforme que aponta para cima, e um campo magnético uniforme que aponta para fora do papel.

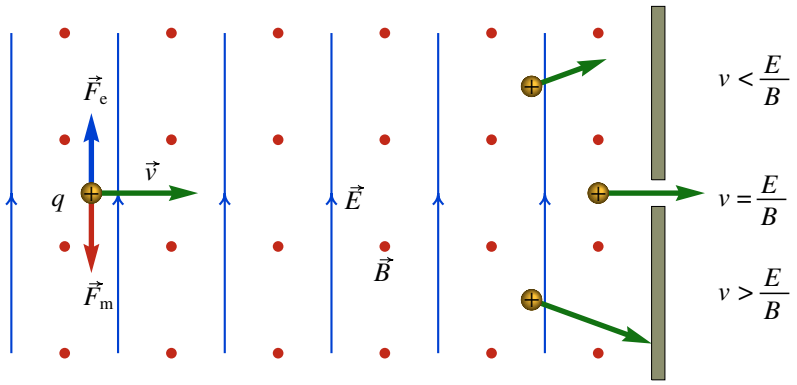



**Figura 8.10.:** Filtro de velocidades

Uma partícula com carga positiva $q$ e velocidade para a direita sentirá uma força elétrica $q\vec{E}$ para cima, e uma força magnética de módulo $qvB$, para baixo. Consequentemente, a força resultante será nula se o módulo da velocidade for exatamente igual a

$$v = \frac{E}{B} \tag{8.13}$$

Coloca-se uma barreira no filtro, de maneira que unicamente as partículas que se deslocam em linha reta (com velocidade $E/B$) logrem ultrapassar a barreira.

## 8.5. Campo magnético de um fio com corrente

O campo magnético produz forças sobre os condutores com corrente e os condutores com corrente também produzem campos magnéticos. Um cabo que transporta corrente produz linhas de campo magnético à sua volta.

O campo produzido por um condutor com corrente pode ser calculado por meio da lei de Biot-Savart, que não vamos estudar aqui. No caso do campo elétrico, vimos que em alguns casos simples podia ser usada a lei de Gauss para calcular o campo. A lei análoga à lei de Gauss, para o campo magnético, é a **lei de Ampère**, que estabelece que *em qualquer curva fechada, o integral de linha do campo magnético é proporcional à corrente elétrica que passa através da curva*:

$$\boxed{\oint_{\mathrm{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 4\pi k_m I_{\mathrm{int}}} \tag{8.14}$$

onde C é uma curva fechada, $k_{\mathrm{m}}$ é uma **constante magnética**, , e $I_{\mathrm{int}}$ é a corrente total que passa por dentro da curva C. Para calcular a corrente $I_{\mathrm{int}}$ somam-se as correntes dos fios que passem pelo interior de C, dando sinal positivo às correntes que passem no sentido da regra da mão direita, em relação à direção em que é percorrida a curva C no integral, e dando sinal negativo às correntes no sentido oposto.

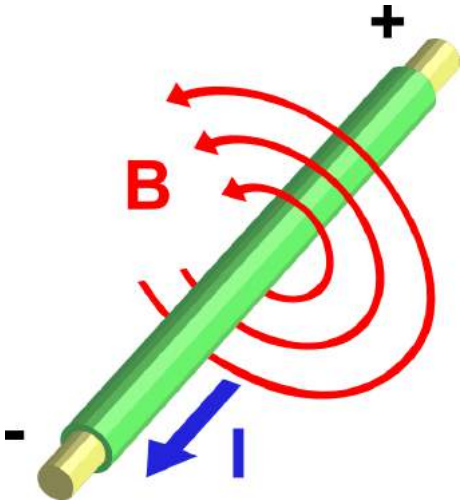



**Figura 8.11.:** Campo magnético produzido por um cabo com corrente.

No vácuo, o valor da constante magnética é

$$k_{\mathrm{m}} = 10^{-7}\ \frac{\mathrm{T}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{A}} \tag{8.15}$$

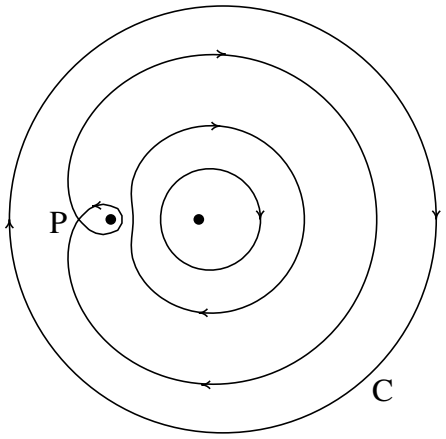
em unidades de G·cm/A, o valor da constante é 0.1. Num meio diamagnético, $k_{\mathrm{m}}$ deverá ser substituída por $\mu/(4\pi)$, onde $\mu$ é a **permeabilidade magnética** do meio.

---

**Exemplo 8.2**

*A figura representa as linhas de campo magnético de dois fios retilíneos (perpendiculares à folha) com correntes $I_1$ e $I_2$. A corrente no fio do lado esquerdo é $I_1 = 3$ A. Sabendo que a*

*distância entre os dois fios é* 6 cm*, e a distância entre o fio do lado esquerdo e o ponto* P *é de* 2 cm*, calcule* $\oint_{\mathrm{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ *ao longo do círculo* C *indicado no desenho.*




**Resolução:** O integral do campo magnético, em qualquer percurso fechado, pode ser calculado usando a lei de Ampère:

$$\oint_{\mathrm{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 4\,\pi\,k_{\mathrm{m}}\,I_{\mathrm{C}}$$

A corrente $I_{\mathrm{C}}$ através do círculo C é igual a $I_2 - I_1$, já que o desenho das linhas de indução mostra que $I_2$ é no sentido positivo de C (para dentro da folha) e $I_1$ é no sentido oposto. Para calcular $I_1$ usamos o fato de o campo total ser nulo no ponto P; isso implica que no ponto P os campos produzidos pelos dois fios têm o mesmo módulo. Como o módulo do campo de cada fio é diretamente proporcional à corrente e inversamente proporcional à distância, e como as distâncias dos fios até P são 2 cm e 8 cm, temos a seguinte relação:

$$\frac{I_1}{2} = \frac{I_2}{8}$$

e, portanto, $I_2$ é igual a 12 A e $I_{\mathrm{C}} = 9$ A. Se admitirmos que não existe nenhum meio à volta dos fios, $k_{\mathrm{m}}$ será a constante magnética do vácuo e obtemos:

$$\oint_{\mathrm{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 4\,\pi \times 10^{-7} \times 9 = 11.3\ \frac{\mu\mathrm{N}}{\mathrm{A}}$$

Um caso em que a lei de Ampère é útil para calcular o campo, é no caso de um fio retilíneo, muito comprido. Consideremos uma curva C que é uma circunferência de raio $r$, perpendicular ao fio, e com centro no eixo do fio. Devido à simetria do sistema, as linhas de campo deveriam ser, ou na direção radial, ou tangentes à circunferência C; se fossem na direção radial, o integral de linha do campo ao longo de C seria nulo, que não é

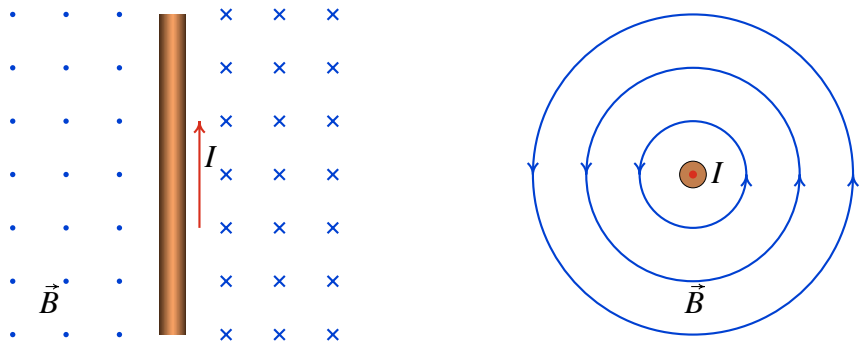



**Figura 8.12.:** Linhas de campo magnético de um fio retilíneo com corrente.

possível, devido à lei de Ampère. A figura 8.12 mostra as linhas de campo magnético do fio retilíneo, vistas de lado (parte esquerda da figura) e vistas de cima (na parte direita da figura):

Como o campo magnético é tangente ao à curva C, e com módulo constante, o integral de linha do campo será igual a:

$$\oint_{\mathrm{C}} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = B \oint_{\mathrm{C}} \mathrm{d}s = 2\pi r B \tag{8.16}$$

De acordo com a lei de Ampère, o integral também deverá ser igual a $4\pi k_m I$. Assim, o campo magnético ao longo da curva C deverá ter módulo

$$\boxed{B_{\text{fio reto}} = \frac{2k_{\mathrm{m}} I}{r}} \tag{8.17}$$

onde $r$ é a distância desde o eixo do fio, até o ponto onde se calcula o campo. A direção do campo é a direção das circunferências perpendiculares ao fio, com centro no seu eixo, e o sentido das linhas de campo obtém-se usando a regra da mão direita, em relação ao sentido da corrente.

O campo de um sistema com várias correntes obtém-se somando vetorialmente os campos produzidos por cada corrente. Para um sistema de $n$ fios paralelos, a equação 8.17 conduz à seguinte expressão para as componentes do campo, no plano perpendicular aos fios:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{-2k_{\mathrm{m}} I_i\,(y-y_i)}{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}\right]\vec{e}_x + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2k_{\mathrm{m}} I_i\,(x-x_i)}{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}\right]\vec{e}_y \tag{8.18}$$

onde $I_i$ é a corrente no fio número $i$, com sinal positivo se for no sentido positivo do eixo dos $z$, ou sinal negativo no caso contrário, e $(x_i, y_i)$ são as coordenadas do ponto onde o fio corta o plano $xy$.

Quando o fio não for retilíneo, já não existirá simetria numa circunferência perpendicular ao fio, e a lei de Ampère não permite calcular o campo; no entanto, as linhas de campo são parecidas com as linhas do fio retilíneo. Por exemplo, a figura 8.13 mostra as linhas

de campo de uma espira circular com corrente, no plano perpendicular que corta a espira ao meio. As linhas são parecidas com as linhas de campo de dois fios perpendiculares ao plano, com correntes opostas.

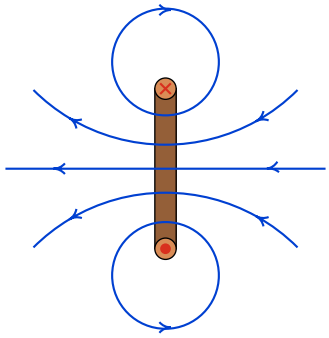


**Figura 8.13.:** Campo magnético produzido por uma espira com corrente.

## 8.6. Força entre condutores com corrente

Cada condutor com corrente cria um campo magnético que produz forças magnéticas sobre outros condutores com corrente. Assim, entre dois condutores com corrente existem forças magnéticas. Calculando o sentido do campo produzido por cada condutor, e o sentido da força que esse campo exerce sobre o segundo condutor, conclui-se que a força entre dois fios com correntes no mesmo sentido é atrativa, e a força entre dois fios com correntes em sentidos opostos é repulsiva.

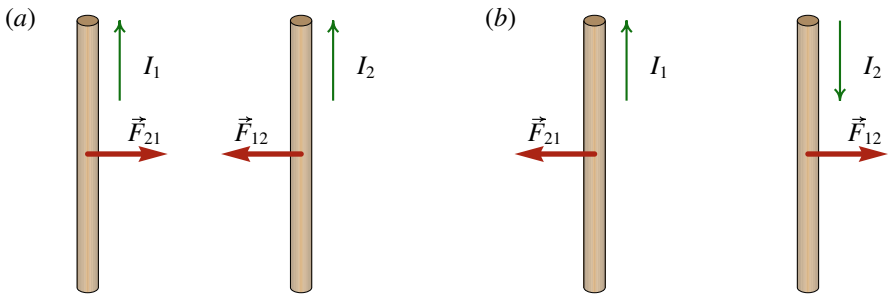



**Figura 8.14.:** Forças magnéticas entre dois fios com corrente.

Se os dois fios condutores forem retilíneos e paralelos, com comprimento $L$ muito maior que a distância $r$ entre eles, o campo de cada um pode ser calculado pela equação obtida no fim da seção anterior; por exemplo, o campo do fio 1 nos pontos onde se encontra o fio 2 tem módulo:

$$B_1 = \frac{2\,k_\mathrm{m}\,I_1}{r} \tag{8.19}$$

e a força que esse campo exerce sobre o fio 2 obtém-se a partir do produto vetorial $\vec{I}_2 \times \vec{B}_1 L$. Assim, o módulo da força que o fio 1 exerce sobre o fio 2 é:

$$\boxed{F_{12} = \frac{2 k_{\mathrm{m}} L I_1 I_2}{r}} \tag{8.20}$$

# Perguntas

**1.** Dois fios retilíneos e paralelos, separados por uma distância de 6 cm, transportam correntes de 190 mA, em sentidos opostos. Calcule o módulo do campo magnético no ponto P, no meio entre os dois fios.

A. 1.25 $\mu$T
B. 0
C. 3 $\mu$T
D. 2.5 $\mu$T
E. 1.5 $\mu$T

**2.** Se o campo magnético aponta para o norte, em que direção será a força magnética sobre uma partícula com carga positiva que se desloca para o este?

A. Para cima.
B. Para o oeste.
C. Para o sul.
D. Para baixo.
E. Para o este.

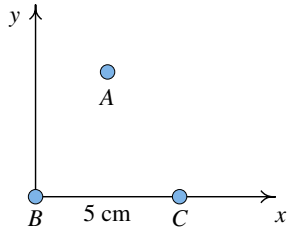
**3.** Uma partícula alfa é formada por dois protões mais dois neutrões. Se uma partícula alfa se deslocar com velocidade igual a $6.15 \times 10^5$ m/s, numa direção perpendicular a um campo magnético com módulo $B = 0.27$ T, qual será o valor da força magnética sobre a partícula?

A. $5.3 \times 10^{-14}$ N
B. $3.3 \times 10^5$ N
C. $2.7 \times 10^{-14}$ N
D. zero
E. $4.8 \times 10^5$ N

**4.** Um segmento de fio condutor retilíneo, que transporta uma corrente $I$, encontra-se numa região onde existe um campo magnético uniforme, não nulo. Se a força magnética sobre o fio for nula, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A. O campo é paralelo ao fio.
B. O campo é perpendicular ao fio.
C. O campo é variável.
D. É uma situação impossível.
E. O campo é conservativo.

**5.** Três fios retilíneos, compridos e paralelos, transportam todos uma corrente de 2 mA no mesmo sentido (perpendicular à folha). A distância entre quaisquer dois fios vizinhos é 5 cm. Calcule o ângulo que a força magnética sobre o fio B faz com o semi-eixo positivo dos $x$.




A. 27°
B. 60°
C. 90°
D. 45°
E. 30°

# Problemas

**1.** Um protão "navega"na atmosfera solar, a uma velocidade de $0.15c$, onde $c$ é a velocidade da luz no vazio ($2.998 \times 10^8$ m/s). O protão atravessa um campo magnético uniforme de 0,12 T, formando um ângulo de 25°. Calcule o raio do cilindro que envolve a órbita helicoidal do protão (a massa do protão encontra-se no apêndice A).

**2.** Considere dois fios de cobre, retilíneos e paralelos, de 60 cm de comprimento, distanciados de 9 cm e com raios de 2 mm e 3 mm. Calcule o valor da força magnética entre os fios quando cada um deles for ligado a uma *fem* de 1.5 V. (Use o valor da resistividade do cobre à temperatura ambiente: 17 nΩ·m.)

**3.** Um feixe de protões desloca-se com velocidade constante $\vec{v}$, segundo o eixo dos $x$, atravessando duas regiões, I e II, caraterizadas do seguinte modo: em I, existe um campo magnético, $\vec{B}_1$ e em II, coexistem um campo magnético, $\vec{B}_2$, e um campo elétrico, $\vec{E} = E\vec{e}_y$. Todos os campos são uniformes nas regiões em que foram definidos e anulam-se fora delas. O peso dos protões não é significativo. Quais as condições a que devem obedecer os campos $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$ para que o feixe não sofra qualquer perturbação no seu movimento, enquanto atravessa duas regiões? Se em vez de protões, fosse um feixe de eletrões, as condições estabelecidas manter-se-iam?

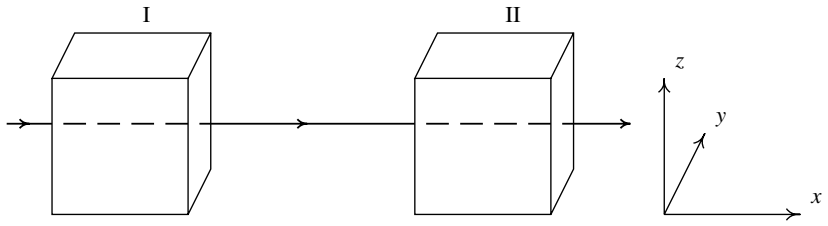



**Figura 8.15.:** Problema 3.

**4.** Na figura está representado esquematicamente um corte transversal de dois fios compridos e paralelos, perpendiculares ao plano $xy$, cada um com uma corrente $I$, em sentidos opostos. ($a$) Represente os vetores do campo magnético de cada fio e o campo resultante no ponto P. ($b$) Deduza a expressão para o módulo do campo de magnético em qualquer ponto sobre o eixo $x$, em função de $x$.

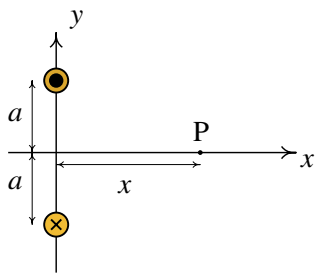



**Figura 8.16.:** Problema 4.

**5.** Num filtro de velocidades os módulos dos campos magnético e elétrico são 0.1 T e 0.2 MV/m, respetivamente. (*a*) Qual deve ser a velocidade de uma partícula para que não seja desviada ao passar pelos campos? (*b*) Qual é a energia que deve ter um protão para passar através do filtro? (*c*) E qual a energia de um eletrão que sai do filtro? (os valores das massas do eletrão e do protão encontram-se no apêndice A).

**6.** Considere uma bobina circular de 400 espiras e raio 0.1 cm, num campo magnético uniforme de 0.3 T. Calcule o torque máximo na bobina quando a corrente for 92 mA.

**7.** A figura mostra as linhas de campo magnético de um fio com corrente, dentro de um campo magnético uniforme $\vec{B}_{\text{ext}}$; o fio é perpendicular à folha e os eixos $y$ e $z$ foram escolhidos sobre o plano da folha. (*a*) Escreva o versor na direção do campo externo, usando o sistema de eixos dado. (*b*) Escreva o vetor unitário na direção da corrente no fio. (*c*) Calcule e represente o vetor unitário na direção da força sobre o fio. (*d*) Considerando que $I = 0.5$ A e se a força sobre o fio, por unidade de comprimento, for de $2 \times 10^{-5}$ N/m, calcule a distância até ao ponto P.

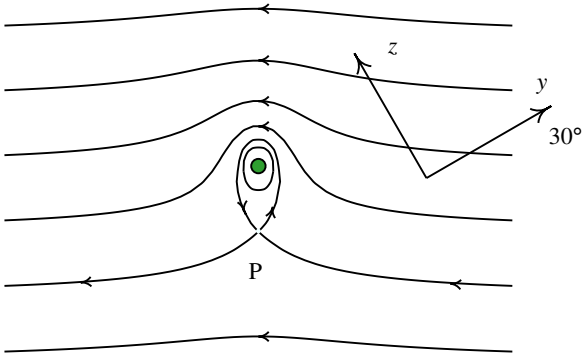



**Figura 8.17.:** Problema 7.

**8.** Os dois fios representados na figura são muito compridos e cada um transporta uma corrente de 3 A. Um dos fios encontra-se sobre o plano $xy$ e o outro se encontra num plano paralelo a $xy$ mas 5 cm acima deste ($z = 5$). Calcule o valor do campo vetorial $\vec{B}$ no ponto P com coordenadas $x = -1$ m, $y = z = 0$.

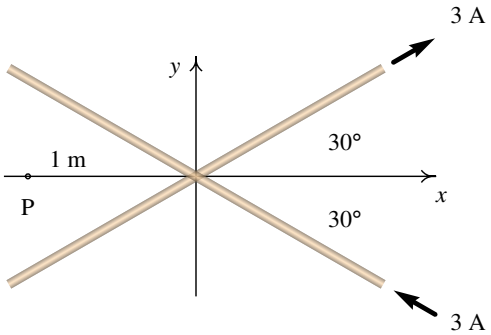



**Figura 8.18.:** Problema 8.

# 9. Indução eletromagnética

A energia eólica é uma das fontes de energia renováveis que estão a ser utilizadas para reduzir a contaminação produzida pelos combustíveis fósseis. Portugal é um dos países em que a energia eólica corresponde a uma percentagem mais elevada da energia elétrica total, com aproximadamente 9%. Independentemente do tipo de combustível ou fonte de energia usada para gerar energia elétrica, em quase todos os casos é gerada energia mecânica de rotação que é logo usada para gerar eletricidade. O princípio que permite transformar a energia mecânica de rotação em eletricidade é a indução eletromagnética. Vimos no capítulo anterior que um campo magnético faz rodar uma bobina com corrente; a indução eletromagnética é o efeito oposto: numa bobina que se faz rodar dentro de um campo magnético é induzida uma corrente elétrica.

# Atividade prática

Ligue uma bobina a um voltímetro, na escala que permita medir as diferenças de potencial mais baixas. Desloque um íman rapidamente, perto da bobina, e meça no voltímetro a força eletromotriz induzida. Observe também no voltímetro o sinal da diferença de potencial (positiva ou negativa). Qual é a relação que existe entre o movimento do íman e a intensidade e sinal da força eletromotriz induzida?

## 9.1. Campo elétrico induzido

Consideremos uma barra condutora em movimento dentro de um campo magnético uniforme, $\vec{B}$, como se mostra na figura 9.1. Sobre cada partícula com carga $q$ dentro do condutor atua uma força magnética:

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\,\vec{v} \times \vec{B} \tag{9.1}$$

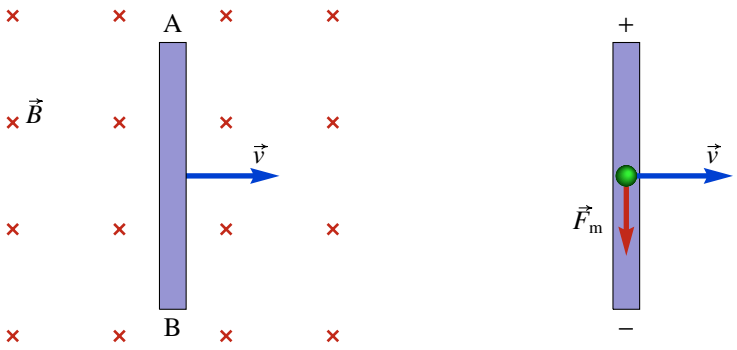



**Figura 9.1.:** Barra condutora em movimento, dentro de um campo magnético. A força magnética faz acumular cargas opostas nos extremos da barra.

Essa força magnética faz deslocar as cargas de condução no condutor; na situação da figura 9.1, ficará um excesso de cargas negativas no extremo inferior da barra, e um excesso de cargas positivas no extremo superior, independentemente do sinal das cargas de condução.

Mas se analisarmos o problema do ponto de vista do referencial S', que se desloca com o condutor, nesse referencial o condutor está em repouso e, portanto, não existe nenhuma força magnética sobre as cargas. Como se explica acumulação de cargas nos dois extremos da barra?

O problema está em que a velocidade é uma grandeza relativa, diferente em diferentes referenciais; isso implica que, para que a equação 9.1 seja correta, é preciso alguma condição adicional que defina exclua todos os referenciais, excepto um onde a equação é válida. A segunda lei de Newton implica que as força deve ser invariante, devido a que a aceleração e a massa são invariantes.

O problema resolve-se admitindo que os campos elétrico e magnético não são invariantes. Dois observadores em dois referenciais diferentes observam diferentes valores para os campos elétrico e magnético, mas observam a mesma força eletromagnética:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{9.2}$$

A força eletromagnética é invariante. A equação 9.1 é válida unicamente num referencial em que o campo elétrico seja nulo. No referencial que se desloca com a barra na figura 9.1, deverá aparecer um campo elétrico **induzido**:

$$\boxed{\vec{E}_{\mathrm{i}} = \vec{v} \times \vec{B}} \tag{9.3}$$

que produz uma força elétrica igual à força magnética observada no referencial em que a barra se desloca com velocidade relativa $\vec{v}$ (figura 9.2).

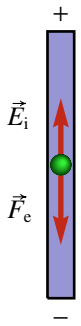



**Figura 9.2.:** Campo elétrico induzido pelo movimento dentro do campo magnético.

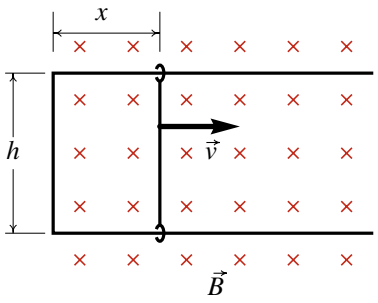
É como se existisse uma *fem* induzida, no condutor, igual a diferença de potencial entre os extremos. Se o comprimento da barra for $L$, a fem induzida será:

$$\varepsilon_i = L\,|\vec{v} \times \vec{B}| \tag{9.4}$$

---

**Exemplo 9.1**

*Uma barra condutora desliza sobre dois trilhos metálicos horizontais, unidos numa extremidade como se mostra na figura. A distância $h$ é igual a* 3.3 cm *e no instante $t = 0$ a barra encontra-se a uma distância $x = 2.2$* cm *da extremidade dos trilhos. Em $t > 0$ a velocidade da barra é uniforme com módulo $v = 3.5$* cm/s*, no sentido indicado na figura e mantendo o contato elétrico com os trilhos. (a) Sabendo que os trilhos e a barra são fios cilíndricos de cobre com diâmetro de* 1.2 mm*, calcule a resistência total do circuito em função de $t$, para $t > 0$ (admita que a temperatura é de* 20°C*).* (b) *Se existir um campo magnético externo, constante e uniforme, com módulo $B = 36$* G*, no sentido indicado na figura, calcule a corrente no circuito em função do tempo, para $t > 0$.*




**Resolução:** (*a*) O circuito neste caso é um retângulo com arestas $x$ e $h$. O comprimento total do fio que constitui o circuito é

$$L = 2x + 2h$$

A distância $x$ aumenta com o tempo $t$ segundo a equação:

$$x = x_0 + vt$$

onde $x_0 = 2.2$ cm e $v = 3.5$ cm/s. A área da seção transversal do fio é $A = \pi r^2$, onde $r = 0.06$ cm é o raio do fio. A resistividade do cobre a 20°C é $\rho = 17 \times 10^{-7}\ \Omega \cdot$cm e a resistência do fio que forma o circuito é

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{2\rho(h + x_0 + vt)}{\pi r^2} = \frac{34 \times 10^{-7}(5.5 + 3.5t)}{\pi \times 0.06^2} = 1.65 + 1.05t$$

em mΩ, se $t$ for medido em segundos.

(*b*) Na barra em movimento existe uma *fem* induzida:

$$\varepsilon_i = h\,|\vec{v} \times \vec{B}| = Bvh$$

a intensidade da corrente no circuito será

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{Bvh}{R}$$

passando para unidades SI, temos:

$$I = \frac{36 \times 10^{-4} \times 3.5 \times 10^{-2} \times 3.3 \times 10^{-2}}{(1.65 + 1.05t) \times 10^{-3}} = \frac{4.16}{1.65 + 1.05t}$$

em mA, se $t$ for medido em segundos.

## 9.2. Gerador de Faraday

Um tipo de gerador de tensão contínua, inventado por Faraday, consiste num disco condutor, de raio $R$, que roda com velocidade angular $\omega$ dentro de um campo magnético perpendicular a ele (figura 9.3).

No referencial que roda com o disco, existe um campo elétrico induzido na direção radial, com módulo igual a:

$$E_{\mathrm{i}} = B\,\omega\,r \tag{9.5}$$

A diferença de potencial entre os pontos P e Q na figura 9.3 é:

$$V_{\mathrm{Q}} - V_{\mathrm{P}} = \int_0^R E_{\mathrm{i}}\,dr = \frac{1}{2} B\,\omega\,R^2 \tag{9.6}$$

Colocando duas escovar em contato com os pontos P e Q obtem-se uma fonte de força eletromotriz.

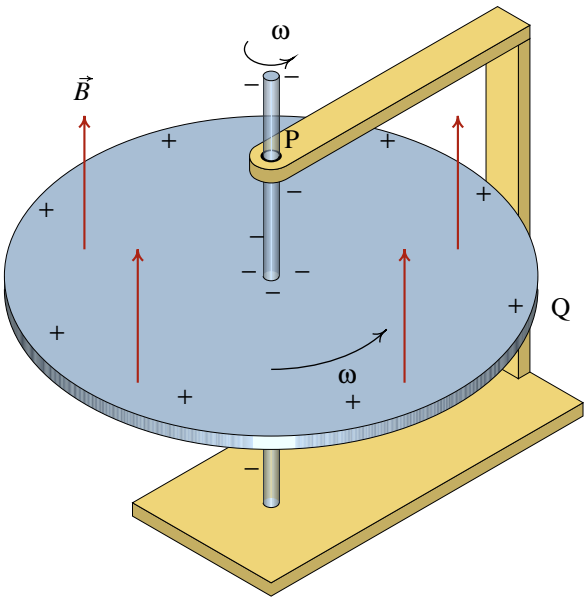



**Figura 9.3.:** Gerador de Faraday.

## 9.3. Lei de Faraday

A equação 9.3 para o campo elétrico induzido não é apenas para condutores em movimento, mas também para qualquer referencial que se desloque com velocidade $\vec{v}$ em relação a um sistema onde as linhas de campo aparecem fixas no espaço. Desde o ponto de vista

desse referencial, as linhas de campo deslocam-se com velocidade $-\vec{v}$. Portanto, sempre que houver uma alteração das linhas de campo magnético, aparecerá um campo elétrico induzido.

Outra situação que existe alteração das linhas de campo magnético é quando o campo magnético é variável; nesse caso também deverá ser induzido um campo elétrico.

Uma expressão geral que inclui as situações em que o referencial se desloca em relação ao campo, e o campo magnético variável, é a **lei de Faraday**:

Numa espira condutora C, quando o fluxo magnético $\Phi_\mathrm{m}$ através da superfície delimitada por C muda, aparece uma força eletromotriz induzida ao longo da espira, igual a:

$$\boxed{\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\,\Phi_\mathrm{m}}{\mathrm{d}\,t}} \tag{9.7}$$

O **fluxo magnético** $\Phi_\mathrm{m}$ através da superfície S delimitada pela espira, define-se de forma análoga ao fluxo do campo elétrico. Se o campo for uniforme sobre o plano da espira, com módulo constante $B$ e formando um ângulo $\theta$ com o versor perpendicular à espira, o fluxo magnético é:

$$\boxed{\Phi_\mathrm{m} = A\,B\cos\theta} \tag{9.8}$$

onde $A$ é a área da espira. Se o campo não for uniforme, é preciso dividir a espira em pequenos elementos diferenciais e somar todos os fluxos infinitesimais, obtendo-se um integral de superfície.

O versor perpendicular à espira, $\vec{e}_n$, pode ser escolhido num lado da superfície ou no outro; o versor que for escolhido, definirá o sentido positivo da corrente na espira, usando a lei da mão direita. O sinal obtido no lado direito da equação 9.7 indica o sentido do campo induzido na espira, tendo em conta que o sentido positivo é o que segue a regra da mão direita em relação ao versor $\vec{e}_n$.

O sentido do campo induzido pode também ser determinado usando a **lei de Lenz**: A força eletromotriz e o campo induzido são sempre no sentido que produz um campo magnético induzido que contraria a variação do fluxo magnético externo.

Igual que no caso do campo elétrico ou qualquer fluido incompressível, o fluxo será o mesmo através de todas as superfícies por onde passem as mesmas linhas de campo. As linhas que passam pela fronteira da superfície delimitam um tubo de fluxo constante.

Um exemplo de aplicação da lei de Faraday é o caso de um íman que se aproxima de um anel condutor, com velocidade $v$. O movimento do íman implica variação do fluxo magnético através do anel.

No instante que se mostra na figura 9.4, o fluxo magnético no anel, é no sentido de esquerda para direita, e está a aumentar. Aparecerá uma corrente induzida no anel, que produza fluxo magnético de direita para esquerda, para contrariar o aumento do fluxo. Assim, o campo magnético induzido aponta para a esquerda, o que implica que a corrente e a fem induzidas no anel são no sentido que se mostra na figura. É como se tivesse sido ligada uma pilha no anel.

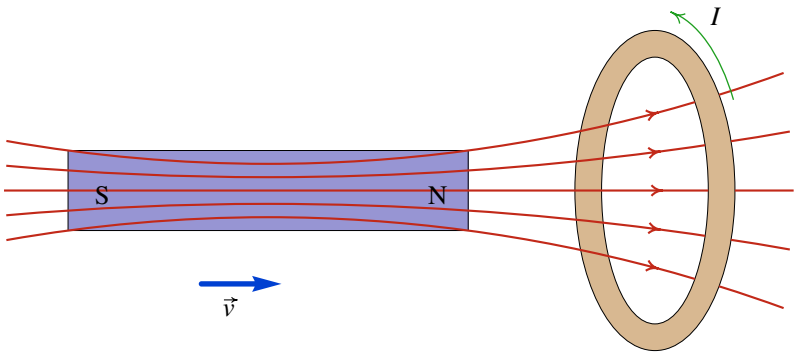


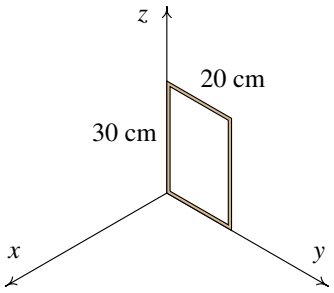

**Figura 9.4.:** Um íman em movimento junto de uma espira condutora,

**Exemplo 9.2**

*Uma espira condutora retangular com arestas de 20 cm e 30 cm encontra-se sobre o plano yz, com um vértice na origem, como se mostra na figura. A partir do instante $t = 0$ aparece na região onde se encontra a espira um campo magnético variável com componentes (unidades SI):*

$$B_x = 6t^2 - 4 \qquad B_y = 5t^3 \qquad B_z = 0$$

(a) *Calcule a* fem *induzida na espira, em função do tempo t, a partir do instante $t = 0$.* (b) *Diga (justificando) qual é o sentido da corrente induzida na espira.*




**Resolução:** (*a*) Como o campo é uniforme podemos usar a equação 9.8. A espira é perpendicular ao eixo dos *x*; podemos escolher e o versor normal à espira igual a $\vec{e}_x$; assim, o produto $B\cos\theta$ será a componente *x* do campo $\vec{B}$ e o fluxo magnético através da espira será:

$$\Phi_m = \Delta y \Delta z B_x = 0.06\left(6t^2 - 4\right)$$

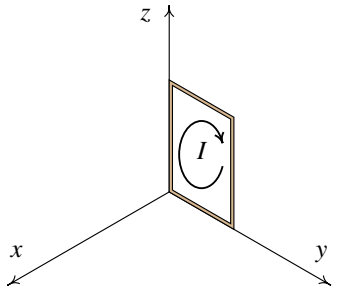
A *fem* induzida calcula-se usando a lei de Faraday:

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\,\Phi_m}{\mathrm{d}\,t} = -0.72t$$

(em volts, se *t* for dado em segundos).

(*a*) Como *t* é positivo, o valor de $\varepsilon_i$ calculado na alínea anterior será sempre negativo. Isso quer dizer que a corrente induzida será no sentido oposto do sentido usado para definir o

versor normal à espira. A escolha de $\vec{e}_n = \vec{e}_x$ implica que estávamos a percorrer a espira em sentido anti-horário, vista desde o semieixo positivo dos $x$. Consequentemente, a corrente induzida é no sentido dos ponteiros do relógio:




Outra forma de obter o sentido da corrente consiste em observar que o campo $B_x$ inicialmente aponta no sentido negativo do eixo dos $x$, mas está sempre a aumentar no sentido positivo do eixo dos $x$. O campo induzido deverá contrariar esse aumento, apontando no sentido negativo do eixo dos $x$. Pela regra da mão direita, um campo magnético induzido no sentido negativo do eixo dos $x$ implica corrente induzida em sentido dos ponteiros do relógio.

## 9.4. Gerador de corrente alternada

Um gerador de corrente alternada (figura 9.5), consiste numa bobina que se faz rodar dentro de um campo magnético; o fio onde começa a bobina está soldado a um anél condutor e o fim do fio, depois de ser enrolado na bobina, solda-se a outro anel condutor; esses dois anéis mantêm o contato com duas escovas, enquanto a bobina roda, de forma que a diferença de potencial entre as escovas é igual à diferença de potencial na bobina toda.

O fluxo através da bobina é:

$$\Phi_{\mathrm{m}} = BA\cos\theta \tag{9.9}$$

onde $A$ é a área da bobina, $B$ o campo médio, e $\theta$ o ângulo entre o campo e a normal à bobina.

Se a bobina roda com velocidade angular constante, $\omega$, o ângulo $\theta$, em função do tempo, é dado por $\omega t + \theta_0$. Assim, a derivada do fluxo magnético, em função do tempo, será igual a:

$$\Delta V = NBA\,\omega\,\sin(\omega t + \theta_0) \tag{9.10}$$

essa será a diferença de potencial obtida entre as duas escovas condutoras.

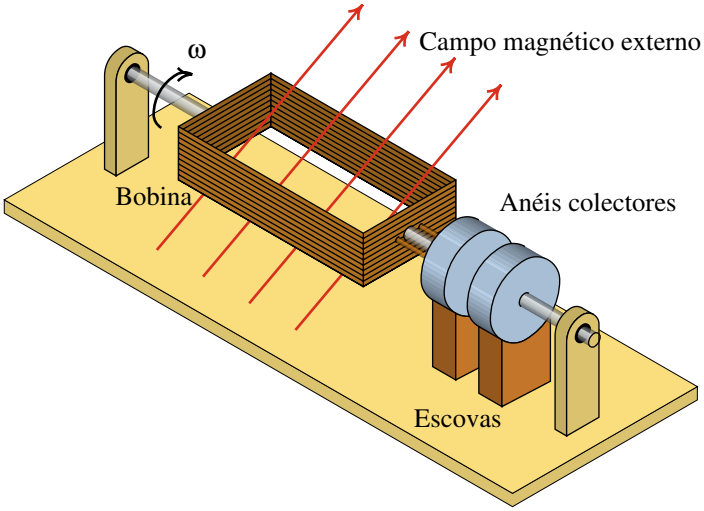



**Figura 9.5.:** Gerador de corrente alternada.

O gerador de corrente alternada, ou simplesmente **alternador** usa-se para transformar energia mecânica em energia elétrica. A fonte da energia mecânica, que faz rodar a bobina, pode ser o vento, nas centrais de energia eólica, a corrente de água, nas centrais hidroelétricas, o fluxo de vapor de água evaporada por combustão de carvão, o movimento do motor, no alternador usado para recarregar a bateria num automóvel, etc.

É importante regular a velocidade da bobina, de forma a manter uma velocidade angular constante, para que a tensão elétrica produzida tenha uma frequência constante. É por isso que as aspas num moinho de vento de uma estação eólica rodam lentamente e com velocidade angular constante. Existe um mecanismo mecânico usado para regular essa velocidade.

## 9.5. Indutância

A corrente num circuito produz campo magnético e, portanto, fluxo magnético. Assim, qualquer variação da corrente conduzirá a forças eletromotrizes induzidas no circuito.

Se, por exemplo, fecharmos um interruptor num circuito de corrente contínua, a corrente não aumenta instantaneamente desde zero até um valor estacionário, devido à indutância do circuito. A tendência da corrente a aumentar bruscamente será contrariada por uma corrente induzida oposta, que regula o aumento da corrente de forma gradual. Igualmente, quando se abrir o interruptor a corrente não passará a ser nula de forma instantânea mais de forma gradual.

Imaginemos dois circuitos, um ao lado do outro (figura 9.6). No primeiro circuito está ligada uma pilha que produz uma corrente, existindo uma resistência variável que permite alterar a intensidade dessa corrente. No segundo circuito não está ligada nenhuma fonte.

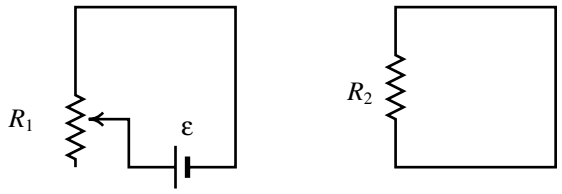



**Figura 9.6.:** Indutância mútua entre dois circuitos.

A corrente no circuito 1 (lado esquerdo) produz fluxo magnético dentro do circuito 2, que deverá ser diretamente proporcional à corrente $I_1$, que produz esse campo magnético:

$$\Phi_2 = -M I_1 \tag{9.11}$$

onde $M$ é uma constante chamada **indutância mútua**, que depende da forma dos circuitos e da distância entre eles.

A variação da corrente no circuito 1 induz uma força eletromotriz no circuito 2:

$$\varepsilon_2 = M \frac{d I_1}{d t} \tag{9.12}$$

No sistema internacional, a unidade da indutância (volt vezes segundo, sobre ampere) é o **henry**, representada pela letra H.

## 9.6. Auto-indutância

A corrente num circuito produz um campo magnético com linhas de campo que produzem fluxos de sentido contrário na área delimitada pelo circuito e no exterior do circuito (figura 9.7).

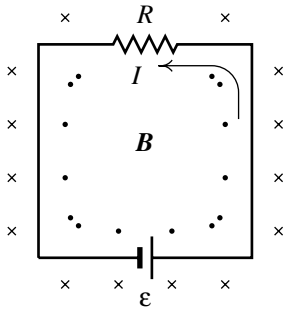



**Figura 9.7.:** Linhas do campo magnético produzido pela corrente num circuito.

De acordo com a lei de Biot-Savart, o campo magnético produzido pelo circuito é diretamente proporcional à corrente. Portanto, o fluxo magnético produzido por um circuito sobre si próprio, e proporcional à corrente:

$$\Phi = L I \tag{9.13}$$

a constante $L$ é a auto-indutância do circuito. A fem auto-induzida no próprio circuito é:

$$\boxed{\varepsilon_i = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}} \tag{9.14}$$

Quanto maior for a área do circuito, maior será a sua auto-indutância. Para evitar uma auto-indutância elevada, que pode ser indesejada no caso de correntes variáveis, a fonte num circuito não se liga como na figura acima, mas com dois fios colados uma ao lado do outro que ligam o dispositivo à fonte. Assim, reduz-se a área interna do circuito.

Nas partes do circuito onde se deseja que a indutância seja elevada, ligam-se bobinas com várias voltas e, portanto, com área interna elevada. Esses **indutores** representam-se nos diagramas de circuito com o símbolo da figura 9.8.

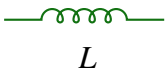



**Figura 9.8.:** Símbolo usado nos diagramas de circuito para representar a auto-indução.

$L$ representa o valor da indutância, medida em henrys no sistema internacional. O símbolo da auto-indução total do circuito coloca-se em alguma parte do circuito. Na análise do circuito, esse símbolo é interpretado como a existência de uma fonte, com tensão igual a $-LdI/dt$, oposta às mudanças na corrente.

## 9.7. Circuito LR

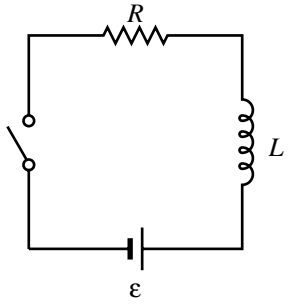



**Figura 9.9.:** Circuito LR.

No circuito da figura 9.9, $L$ representa a indutância total do circuito, e $R$ a resistência total. Quando o interruptor for fechado, circulará uma corrente $I$ em sentido anti-horário, e a equação da malha será:

$$IR = \varepsilon - L\frac{dI}{dt} \tag{9.15}$$

o sinal negativo é importante e garante sempre o sentido correto da fem induzida.

O indutor produz uma **força contraeletromotriz**. Se a indutância for elevada, a corrente aumenta lentamente para o seu valor estacionário. Se $t = 0$ representar o instante em que se fecha o interruptor, a condição inicial que permite resolver a equação diferencial acima é $I(t = 0) = 0$.

A equação 9.15 tem a mesma estrutura da equação 5.12 obtida quando estudamos a acumulação de carga num condensador. Nesse caso a carga não podia aumentar instantaneamente para o seu valor estacionário, devido à força repulsiva das cargas já existentes no condensador. Comparando as duas equações, podemos escrever a solução neste caso, substituindo a carga pela corrente, $\varepsilon/R$ por $\varepsilon/L$, e a constante de tempo $RC$ por $L/R$. Assim, a corrente em função do tempo é:

$$I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-Rt/L}\right) \tag{9.16}$$

O gráfico dessa função é apresentado na figura 9.10.

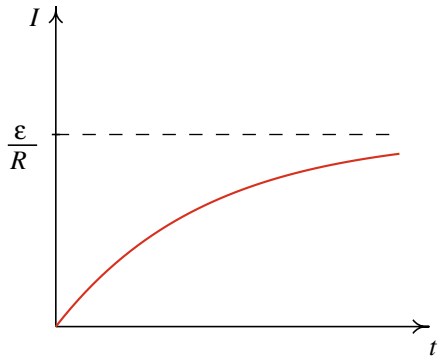



**Figura 9.10.:** Corrente em função do tempo, no circuito $LR$.

De salientar que $L/R$ tem unidades de tempo, e dá uma ideia da rapidez com que a corrente atinge o seu valor estacionário, ou decresce quando o interruptor for aberto. Neste caso, o indutor atua como uma resistência variável, muito elevada no instante inicial e aproximando-se para zero, quando $t$ for muito maior que a constante de tempo $L/R$.

## 9.8. Motores de corrente contínua

Quando um motor é submetido a uma carga, este roda mais lentamente. Por exemplo, um berbequim roda mais rapidamente quando a broca roda livremente, do que quando a broca está a furar um material; no entanto, a corrente no berbequim é maior quando se está a furar o material. A primeira vista parece um paradoxo que quando o motor recebe uma corrente maior roda mais lentamente!

A explicação desse fenómeno é que um motor, por ter uma bobina, dentro de um campo externo forte, tem uma indutância muito elevada. Devido à inversão do sentido da corrente

em cada rotação, no motor existe sempre uma força contraeletromotriz, $\varepsilon_i$, que é maior quanto mais rápido rodar o motor. A figura 9.11 o diagrama equivalente do circuito ligado a uma fonte.

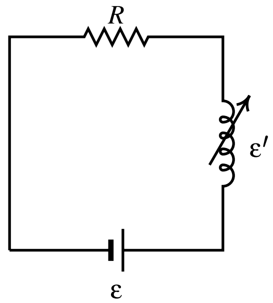



**Figura 9.11.:** Diagrama equivalente de um motor ligado a uma fonte.

A indutância neste caso é principalmente devida ao campo magnético externo e não apenas à auto-indutância. Se a fem externa que mantém o motor em movimento for $\varepsilon$, a equação do sistema será:

$$I R + \varepsilon_i = \varepsilon \tag{9.17}$$

Quanto mais rapidamente roda o motor, maior é $\varepsilon_i$ e menor é a corrente. Claro está que a velocidade angular não pode aumentar indefinidamente porque o seu aumento também faz aumentar a força contraeletromotriz; a velocidade angular atinge um valor de equilíbrio.

Multiplicando os dois lados da equação anterior por $I$ obtemos uma relação para a potência:

$$I^2 R + I \varepsilon_i = I \varepsilon \tag{9.18}$$

O primeiro termo é a potência dissipada em calor, o segundo termo é a potência convertida em trabalho mecânico e o termo à direita é a potência fornecida pela fonte.

# Perguntas

**1.** Quando um comboio com motor elétrico está a subir um declive, está a consumir potência elétrica proveniente de uma central elétrica. No seu modo mais eficiente de operação, quando o comboio estiver a descer:

A. Deverá consumir ainda maior potência.

B. Poderá gerar potência elétrica que pode ser alimentada de volta para a central elétrica.

C. Não vai nem consumir nem gerar potência elétrica.

D. Consome a mesma quantidade de potência.

E. Nenhuma das anteriores.

**2.** Uma barra condutora, com 25 cm de comprimento, desloca-se com velocidade uniforme de 12 m/s, num plano perpendicular a um campo magnético uniforme de 80 G. Calcule a diferença de potencial

induzida entre os extremos da barra.

A. 240 V C. 0.024 V E. 3.84 kV
B. 0.24 V D. 0.384 V

**3.** Uma espira de fio condutor desloca-se, com velocidade constante, dentro de uma região onde existe um campo magnético uniforme, perpendicular ao plano da espira. A fem induzida nos terminais da espira será:

A. Variável com o tempo.
B. Constante.
C. Negativa.
D. Positiva.
E. Nula.

**4.** Se o número de espiras numa bobina for reduzido para metade, e a corrente através da bobina triplicada, mantendo outras propriedades constantes (área das espiras, forma, etc.), a sua auto-indutância:

A. Aumenta num fator de 4.
B. Aumenta num fator de 6.
C. Aumenta num fator de 9.
D. Diminui num fator de 6.
E. Diminui num fator de 4.

**5.** Uma bobina retangular de 3 cm por 5 cm tem 100 espiras e o seu versor perpendicular faz um ângulo de 55° com um campo magnético uniforme de 0.35 T. A bobina roda, durante 0.33 s, até o ângulo entre o campo e o versor perpendicular aumentar para 90°. Calcule a força eletromotriz induzida média.

A. 160 mV D. 68 mV
B. 130 mV E. 29 mV
C. 91 mV

# Problemas

**1.** Um íman desloca-se a velocidade constante sobre o eixo de uma espira, como mostra a figura.

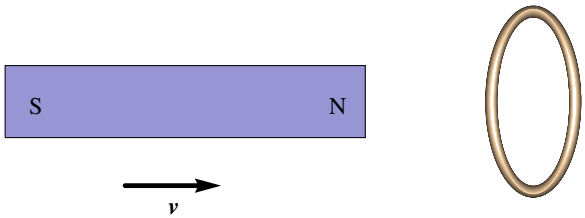



**Figura 9.12.:** Problema 1.

(*a*) Faça um esquema qualitativo do fluxo magnético $\Phi$ através da espira em função do tempo $t$. Indique o instante $t_1$ em que o íman está a meio da travessia da espira. (*b*) Desenhe o gráfico da corrente $I$ na espira em função do tempo.

**2.** Uma barra metálica de comprimento $l = 9$ cm desloca-se com velocidade constante $v = 18$ cm/s, dentro de um campo magnético uniforme $B = 3.5$ G, perpendicular à barra (ver figura). Calcule a diferença de potencial $V_a - V_b$.

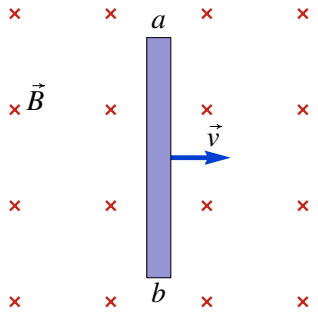



**Figura 9.13.:** Problema 2.

**3.** Na figura, uma barra condutora de comprimento $d$ e massa $m$, desliza sobre dois trilhos metálicos verticais, dentro de um campo magnético $\vec{B}$, uniforme. A resistência dos trilhos e da barra são desprezáveis em relação a $R$. A barra mantém sempre o contato com os trilhos mas o atrito com eles, assim como o atrito com o ar, são também desprezíveis. Quando a barra começa a cair livremente, o seu movimento é inicialmente acelerado, mas atinge logo uma velocidade constante $v$. Calcule a velocidade limite $v$.

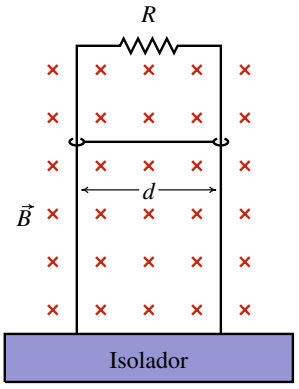



**Figura 9.14.:** Problema 3

**4.** Um avião Boeing 747 tem um comprimento total de 60 m entre as pontas das asas. O avião voa a 800 km/h e a uma altitude constante, em direção sul-norte, numa região onde o campo magnético da Terra é 0.5 G, formando um ângulo de 60° com a vertical. Calcule a diferença de potencial induzida entre as pontas da asas.

**5.** Uma espira quadrada de cobre, com 4 cm de lado, encontra-se sobre a superfície horizontal de uma mesa. Um eletro-íman está colocado em cima da mesa, com o seu pólo norte um pouco acima e à esquerda da espira, de maneira que o campo magnético é aproximadamente uniforme e aponta para baixo através da espira, formando um ângulo de 30° com a vertical. Calcule a fem média induzida na espira enquanto o campo magnético varia desde zero até ao seu valor final de 0.5 T, num intervalo de tempo igual a 200 ms. Em que sentido será a corrente induzida?

**6.** No interior do círculo a tracejado na figura, existe um campo magnético que aponta

para dentro do papel e com módulo igual a $0.6\,e^{-t/15}$ (unidades SI, $t$ = tempo). Calcule o módulo, direção e sentido do campo elétrico induzido dentro do anel condutor de raio $r = 9$ cm.

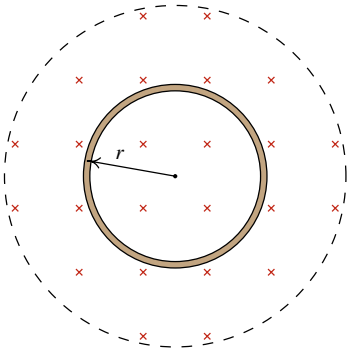



**Figura 9.15.:** Problema 6

**7.** Uma espira condutora retangular, paralela ao plano $yz$, desloca-se com velocidade constante $\vec{v} = 3\,\vec{e}_y$ (m/s) dentro de uma região onde existe um campo magnético com componentes: $B_x = (6 - y)$ (SI) e $B_y = B_z = 0$. Calcule a *fem* induzida na espira, em função do tempo $t$, a partir do instante $t = 0$ em que a espira se encontra na posição da figura.

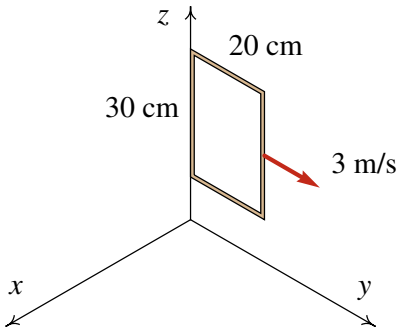
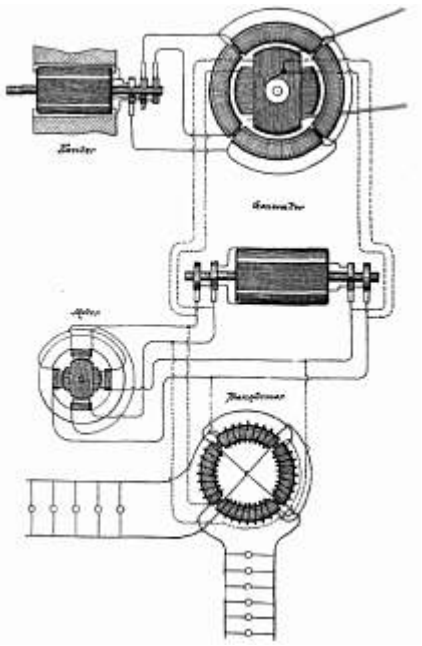



**Figura 9.16.:** Problema 7

# 10. Circuitos de corrente alternada



No fim da década de 1880 viveu-se nos Estados Unidos da América um período conhecido como a **Guerra das Correntes**. Nessa época já existia uma rede elétrica pública, usada principalmente para acender lâmpadas incandescentes e alimentar motores elétricos. A exploração dessa rede elétrica revertia grandes benefícios a Thomas A. Edison que tinha obtido várias patentes pela invenção da lâmpada e outros dispositivos para gerar corrente contínua. Outras pessoas tentaram entrar nesse novo negocio milionário com as suas inovações; George Westinghouse, quem já tinha tido sucesso comercializando as suas próprias patentes, contratou Nicola Tesla, um cientista brilhante, imigrante da Croácia. Tesla obteve uma patente pelo dispositivo na figura acima, para produzir e distribuir corrente alternada. A guerra das correntes acabaria por ser ganha pelo sistema de corrente alternada de Tesla e Westinghouse; uma das principais vantagens sobre o sistema de corrente contínua de Edison é a facilidade de poder aumentar ou diminuir a tensão por meio de transformadores.

As perdas de energia na transmissão de corrente em grandes distâncias são menores quanto maior for a tensão usada. Usa-se alta tensão para transferir a corrente desde as centrais elétricas até as localidades; a tensão deve ser reduzida antes de ser disponibilizada para o consumo doméstico, para reduzir os riscos de segurança.

# Atividade prática

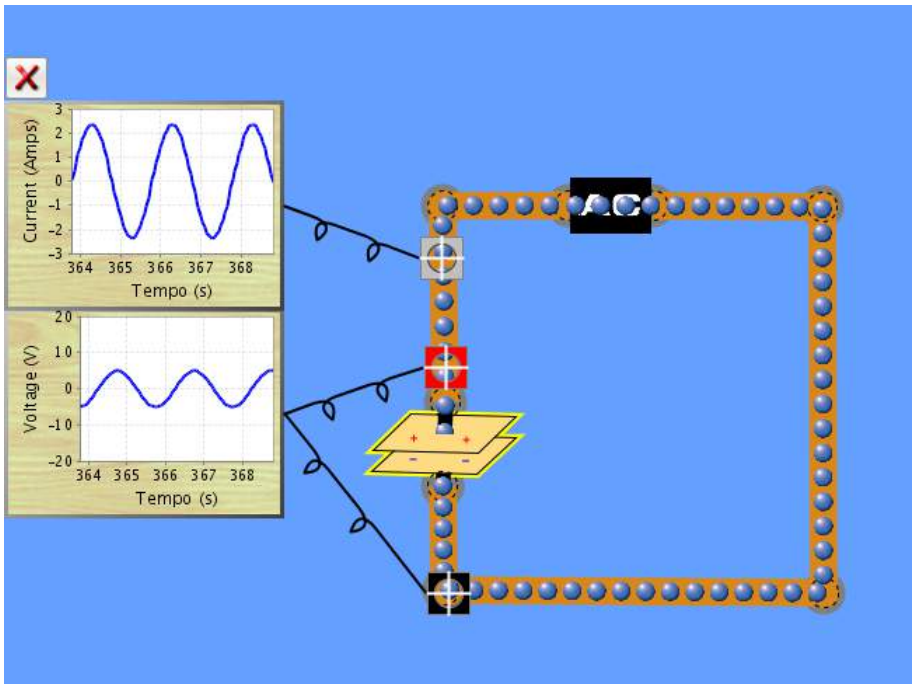



**Figura 10.1.:** Applet de simulação de circuitos de corrente alternada.

Usando o *applet* de simulação de circuitos de corrente alternada em
http://phet.colorado.edu/simulations/
(figura 10.1), seleccione uma fonte de tensão alternada com tensão máxima de 5 V e frequência de 0.5 Hz. Ligue um condensador de 0.01 F à fonte, e observe os gráficos da tensão e da corrente no condensador.

Meça o desfasamento entre a tensão e a corrente. Pode, por exemplo, considerar $\theta = 0$ num ponto onde a tensão seja máxima, e $\theta = 360^\circ$ no máximo seguinte; entre esses dois pontos, determine a localização do máximo da corrente, que corresponderá ao ângulo de desfasamento.

Ligue a fonte de corrente alternada, com 0.5 Hz e 20 V de tensão máxima, a um indutor de 1 H, e meça o desfasamento entre a tensão e a corrente no indutor.

## 10.1. Tensão alternada

Uma função **alternada** é uma função periódica com valor médio igual a zero. Qualquer função alternada pode ser escrita como uma soma de **funções harmónicas** (série de Fourier).

Uma função harmónica é uma função seno ou cosseno. Neste capítulo estudaremos fontes

de tensão alternada que varia na forma de uma função harmónica, com frequência $f$ e amplitude $V_0$. Em função do tempo, a força eletromotriz da fonte é:

$$\boxed{\Delta V = V_0 \sin(\omega t)} \tag{10.1}$$

Em que $\omega$ é a frequência angular:

$$\boxed{\omega = 2\pi f} \tag{10.2}$$

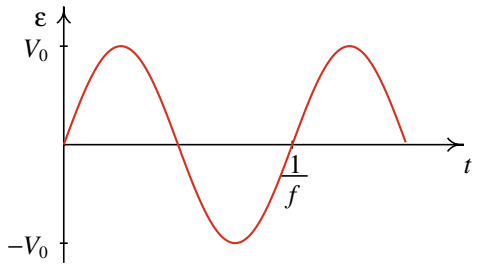



**Figura 10.2.:** Tensão alternada harmónica.

Se uma resistência $R$ for ligada a uma fonte de tensão alternada, segundo a lei de Ohm a corrente será igual ao valor da tensão alternada, dividido por $R$; assim, a corrente na resistência também será uma função harmónica com a mesma frequência $f$:

$$I = I_0 \sin(\omega t) \tag{10.3}$$

A amplitude da corrente, $I_0$, está relacionada com a tensão máxima $V_0$ a traveś da lei de Ohm:

$$V_0 = R I_0 \tag{10.4}$$

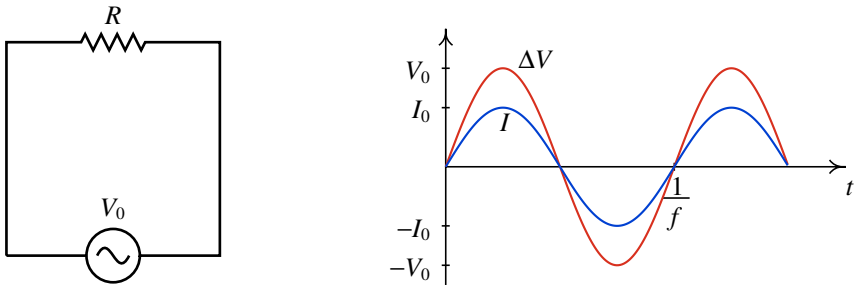



**Figura 10.3.:** Relação entre a tensão e a corrente numa resistência.

Diz-se que a corrente oscila em fase com a tensão (figura 10.3) porque as duas funções atingem os seus valores máximos e mínimos nos mesmos instantes.

Uma forma conveniente de representar uma função harmónica em função do tempo, consiste em representá-la por um vetor que roda no plano complexo, com movimento circular uniforme de frequência $f$. O valor da função em cada instante é igual à parte real do vetor complexo: projeção do vetor no eixo horizontal.

A figura 10.4 mostra os vetores complexos correspondentes à tensão e a corrente da figura 10.3. Nesse caso os dois vetores que representam a tensão e a corrente na resistência permanecem juntos enquanto rodam.

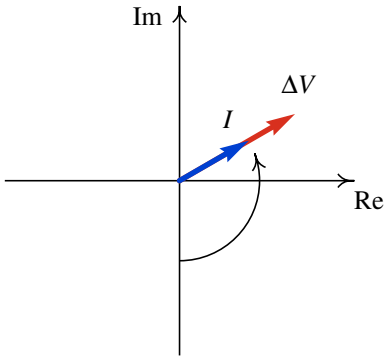



**Figura 10.4.:** Fasores da tensão e da corrente numa resistência.

O valor complexo que tiver o vetor no instante $t = 0$ designa-se de **fasor**. Por exemplo, o fasor correspondente à tensão na figura 10.3 é:

$$\tilde{V} = V_0 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} \tag{10.5}$$

com módulo igual a $V_0$ e fase igual a $-\pi/2$.

A rotação dos fasores no plano complexo, com velocidade angular $\omega$, consegue-se multiplicando o fasor por $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$.

O fasor da corrente na resistência é $\tilde{I} = I_0 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}$, que verifica a lei de Ohm em relação ao fasor da tensão:

$$\tilde{V} = R\tilde{I} \tag{10.6}$$

## 10.2. Tensão eficaz

Numa resistência ligada a uma tensão alternada $\Delta V$, a potência dissipada em cada instante é $P = I\,\Delta V$; no caso da resistência ligada a uma fonte de tensão alternada, as equações 10.1 e 10.3 conduzem a:

$$P = I_0 V_0 \sin^2(\omega t) \tag{10.7}$$

Repare que $P$ é nula em alguns instantes, mas nunca é negativa; um sinal negativo implicaria potência fornecida pela resistência, em vez de potência dissipada. A potência dissipada varia entre 0 e um valor máximo $I_0 V_0$.

O valor médio da potência dissipada obtém-se integrando a função durante um período e dividindo pelo período. O valor médio de uma função seno é nulo, já que a área entre a função e o eixo dos $x$, tem zonas positivas e negativas que se anulam durante cada período (lado esquerdo na figura 10.5.

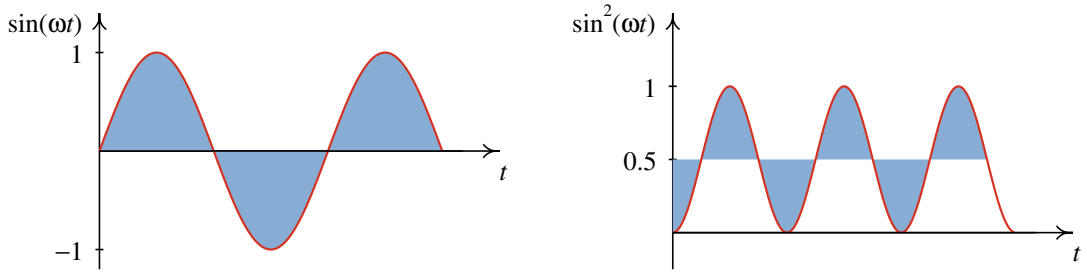



**Figura 10.5.:** Cálculo dos valores médios de uma função harmónica e o seu quadrado.

A função $\sin^2(\omega t)$ oscila com uma frequência duas vezes maior que $\sin(\omega t)$, já que os pontos onde o seno é nulo passam a ser os pontos mínimos da função, e não é uma função alternada. O valor médio de $\sin^2(\omega t)$ não é nulo como pode ver-se no lado direito da figura 10.5: as zonas em azul, por cima de 0.5, podem ser transportas para as zonas em azul debaixo de 0.5, completando um retângulo de altura 0.5. Assim, o valor médio é 1/2, e a potência média dissipada é:

$$\langle P \rangle = \frac{I_0 V_0}{2} \tag{10.8}$$

Essa é a potência que a mesma resistência $R$ dissiparia se fosse ligada a uma tensão contínua $V_0/\sqrt{2}$, que produz uma corrente $I_0/\sqrt{2}$. Esses valores equivalentes no caso de corrente contínua designam-se **tensão eficaz** e **corrente eficaz**:

$$\boxed{V_{\text{ef}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}} \qquad \boxed{I_{\text{ef}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}} \tag{10.9}$$

Atualmente, a tensão eficaz na rede elétrica em Portugal é igual a 230 V. Um decreto de 1984 estabeleceu uma mudança do valor de 220 V, usado anteriormente, para o valor de 230 V, usado na maior parte da Europa. Esse valor eficaz corresponde a uma tensão máxima $V_0 = 325$ V; a frequência usada é de 50 Hz.

## 10.3. Reatância e impedância

Quando um condensador é ligado a uma tensão alternada, após atingir o estado estacionário, a carga no condensador será igual ao produto da capacidade vezes a tensão:

$$Q = C V_0 \sin(\omega t) \tag{10.10}$$

a corrente instantânea no circuito é igual à derivada da carga no condensador:

$$I = \omega C V_0 \cos(\omega t) \tag{10.11}$$

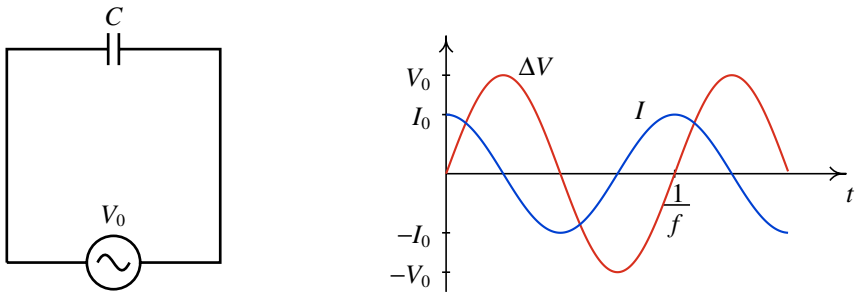



**Figura 10.6.:** Tensão e corrente alternadas num condensador.

A figura 10.6 mostra os gráficos da diferença de potencial e a corrente no condensador. A corrente encontra-se adiantada 90° em relação à tensão; nomeadamente, nos instantes em que a corrente atinge o seu valor máximo, a tensão é nula e aumenta atingindo o seu valor máximo um quarto de período mais tarde. Diz-se que o circuito é **reativo**, devido à diferença de fase entre a tensão e a corrente.

A **reatância capacitiva** é definida por

$$X_C = \frac{V_0}{I_0} = \frac{1}{\omega C} \tag{10.12}$$

Em termos de fasores, o fasor da corrente no condensador é perpendicular ao fasor da tensão e está adiantado no sentido positivo (ver figura 10.7). O fasor da corrente no condensador é:

$$\tilde{I}_C = I_0 = \frac{V_0}{X_C} \tag{10.13}$$

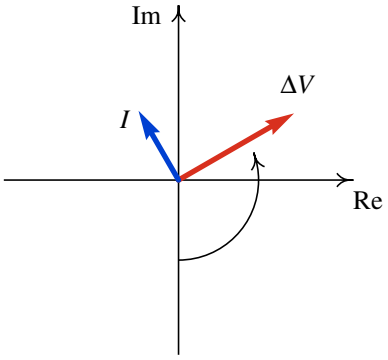



**Figura 10.7.:** Fasores da tensão e da corrente num condensador.

Os fasores da tensão e da corrente no condensador verificam uma relação semelhante à lei de Ohm 10.6:

$$\boxed{\tilde{V} = Z\tilde{I}} \tag{10.14}$$

Em que o número complexo $Z$ é igual a:

$$\boxed{Z_C = \frac{1}{\mathrm{i}\,\omega C} = -\mathrm{i}X_C} \tag{10.15}$$

e é designado de **impedância**.

A reatância joga um papel análogo a $R$ no caso de uma resistência. No entanto, não é constante mas depende da frequência; quanto maior for a frequência, menor será a reatância capacitiva e maior será a corrente máxima. No caso de tensão contínua, $f = 0$, a reatância capacitiva é infinita e a corrente é nula.

A potência instantânea no condensador é:

$$P = I_0 V_0 \cos(\omega t)\,\sin(\omega t) = \frac{I_0 V_0}{2}\,\sin(2\,\omega t) \tag{10.16}$$

que é uma função alternada, com frequência igual a $2f$. Assim, a potência média é nula.

Em média, o condensador não dissipa nem fornece nenhuma energia; em alguns intervalos (quando $P$ é positiva) o condensador absorve energia da fonte, ficando armazenada no campo elétrico do condensador, e em outros intervalos ($P < 0$) essa energia é fornecida ao circuito.

Se um indutor for ligado a uma fonte de tensão alternada, a derivada da corrente no circuito será igual à tensão da fonte dividida pela indutância $L$. Assim, a corrente é igual à primitiva da função $V_0 \sin(\omega t)$, dividida por $L$:

$$I = -\frac{V_0}{\omega L}\cos(\omega t) \tag{10.17}$$

Neste caso, a corrente está atrasada 90° em relação à tensão, como se mostra na figura 10.8.

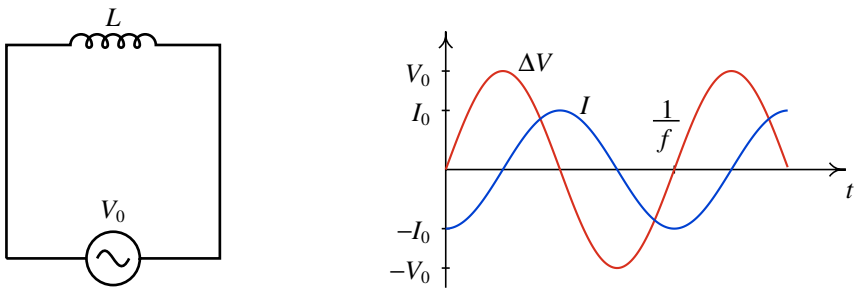



**Figura 10.8.:** Tensão e corrente alternada num indutor.

O fasor da corrente no indutor é perpendicular ao fasor da tensão e está atrasado no sentido positivo (ver figura 10.9). No plano complexo, o fasor é:

$$\tilde{I}_L = -I_0 \tag{10.18}$$

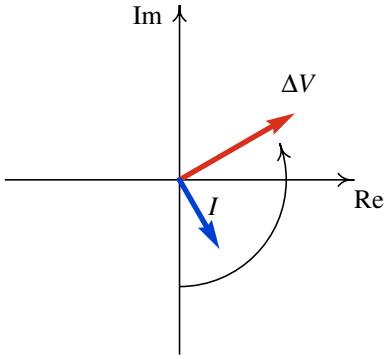



**Figura 10.9.:** Fasores da tensão e da corrente num indutor.

A **reatância indutiva** é definida por

$$X_L = \frac{V_0}{I_0} = \omega L \tag{10.19}$$

Os fasores da tensão e da corrente também verificam a equação 10.14, com a impedância igual a:

$$\boxed{Z_L = \mathrm{i}\,\omega L = \mathrm{i}\,X_L} \tag{10.20}$$

Quanto menor for a frequência, menor será a reatância indutiva e maior será a corrente máxima. No caso da corrente contínua, $f = 0$, a corrente seria infinita, para um indutor ideal com resistência nula, mas um indutor real tem sempre uma resistência para além da sua indutância.

A potência instantânea no indutor é:

$$P = -I_0 V_0 \cos(\omega t)\,\sin(\omega t) = -\frac{I_0 V_0}{2}\,\sin(2\,\omega t) \tag{10.21}$$

que é uma função alternada, com frequência igual a $2f$. A potência média é nula. Em média, o indutor não dissipa nem fornece nenhuma energia; em alguns intervalos (quando $P$ é positiva) o indutor absorve energia da fonte, ficando armazenada no campo magnético do indutor, e em outros intervalos ($P < 0$) essa energia é fornecida ao circuito.

Uma aplicação da reatância indutiva é nas lâmpadas fluorescentes. Os gás dentro de uma lâmpada fluorescente inicialmente opõe uma grande resistência à corrente, devido a existirem poucas cargas livres dentro do gás. Quando o gás começa a iluminar, o fluxo de cargas faz com que o número de iões aumente e a resistência diminui drasticamente.

Se a lâmpada fosse alimentada com uma corrente contínua, essa redução da resistência produzia aumento brusco da corrente podendo chegar a queimá-lo. Para que isso não aconteça, usa-se um **balastro** em série, que é uma bobina com indutância elevada. Os balastros usam-se em conjunto com os arrancadores, que durante alguns instantes iniciais colocam o balastro em curto circuito, para reduzir a impedância enquanto a lâmpada está a aquecer. Nas lâmpadas economizadora de energia, o balastro e o arrancador foram substituídos por um pequeno circuito que realiza a mesma função (figura 10.10).

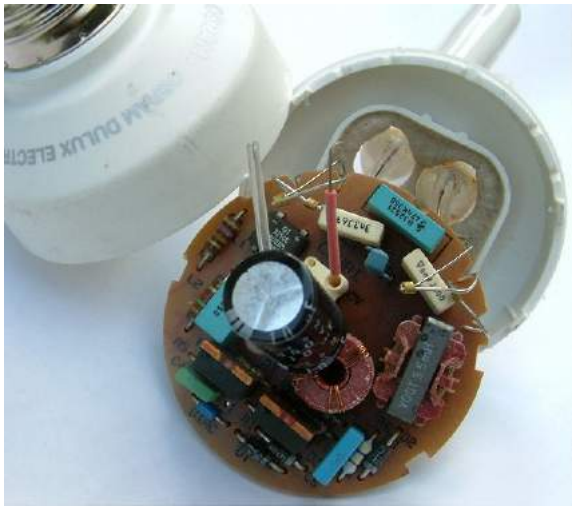


**Figura 10.10.:** As lâmpadas economizadoras de energia são tubos de luz fluorescente, com um pequeno circuito que funciona como balastro e circuito de arranque.

## 10.4. Associação de impedâncias

A equação 10.14 é válida em resistências, condensadores e indutores, admitindo que a impedância de uma resistência é real, igual à resistência: $Z_R = R$. Nos condensadores e indutores a impedância é imaginária, dada pelas equações 10.15 e 10.20.

As regras para calcular a resistência equivalente quando várias resistências são associadas em série ou em paralelo, foram obtidas usando apenas a lei de Ohm e a adição de correntes e diferenças de potencial. Assim, a equação 10.14 conduz às mesmas regras para a combinação de impedâncias em qualquer circuito com resistências, condensadores e indutores.

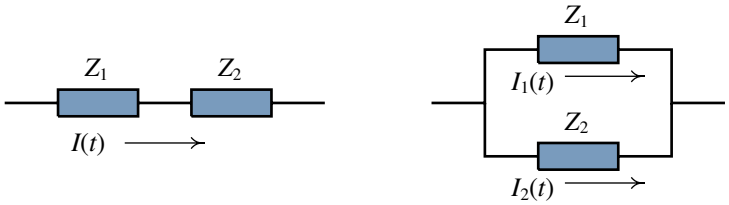



**Figura 10.11.:** Associação de impedâncias em série e em paralelo.

A impedância equivalente de um sistema de dois dispositivos ligados em série é:

$$\boxed{Z_{\text{série}} = Z_1 + Z_2} \tag{10.22}$$

onde $Z_1$ e $Z_2$ são as impedâncias dos dois dispositivos.

Se os dois dispositivos forem ligados em paralelo, a impedância equivalente será:

$$\boxed{Z_{\text{paralelo}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}} \tag{10.23}$$

A impedância equivalente de um circuito mais complicado será sempre um número complexo $Z$, com parte real positiva. A parte real é a resistência equivalente, $R$, e a parte imaginária a reatância equivalente, $X$. A resistência e reatância equivalentes formam um triângulo retângulo, designado **triângulo de impedância**, em que a hipotenusa é o módulo da impedância, $|Z|$ (figura 10.12).

O **ângulo de desfasamento**, $\varphi$, é o ângulo que a impedância equivalente faz com o eixo real.

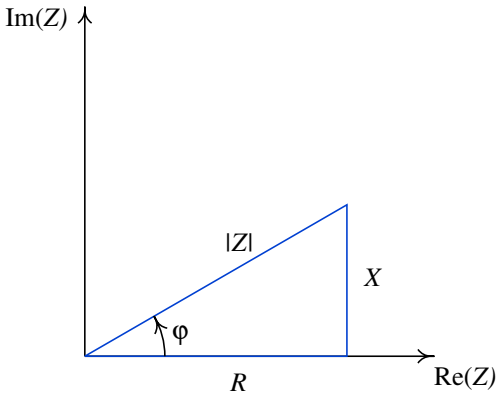



**Figura 10.12.:** Triângulo de impedância.

Uma forma conveniente de escrever a impedância é:

$$Z = |Z|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \tag{10.24}$$

Dado o fasor da tensão, $\tilde{V}$, o fasor da corrente no circuito obtém-se a partir da equação 10.14:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{|Z|} \tag{10.25}$$

Assim, a corrente máxima é igual à tensão máxima dividida pelo módulo da impedância. O ângulo de desfasamento $\varphi$ é o atraso do fasor da corrente em relação ao fasor da tensão.

O ângulo de desfasamento $\varphi$ estará sempre compreendido entre $-\pi/2$ e $\pi/2$. Será zero quando a reatância equivalente for nula, e diferente de zero nos circuitos reativos. Se a reatância equivalente for negativa (reatância capacitiva), $\varphi$ será negativo, o que indica que a corrente está realmente adiantada em relação à tensão.

A potência instantânea no circuito equivalente é

$$P = I_0 V_0 \sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi) = I_0 V_0 \left[\cos\varphi \sin^2(\omega t) - \sin\varphi \sin(\omega t)\cos(\omega t)\right] \tag{10.26}$$

O segundo termo, designado de potência reativa, tem valor médio nulo. O primeiro termo, designado de potência ativa, tem valor médio:

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{I_0 V_0 \cos\varphi}{2} = I_{\mathrm{ef}} V_{\mathrm{ef}} \cos\varphi} \tag{10.27}$$

O produto $I_{\text{ef}}V_{\text{ef}}$, que é a expressão da potência média para uma resistência, é a **potência aparente**; em geral, a potência média (potência real consumida) é menor que a potência aparente, e o fator de diminuição da potência, $\cos\varphi$, designa-se de **fator de potência**.

**Exemplo 10.1**
*Uma bobina tem indutância de* 36 mH *e resistência de* 40 Ω*. A bobina liga-se em paralelo com um condensador de* 32 nF *e com uma fonte alternada de tensão* $V(t) = 345\cos(150\pi t)$ *(em volts, e o tempo* $t$ *em segundos). Calcule: (a) A corrente máxima na bobina. (b) A corrente eficaz no condensador. (c) A potência média dissipada na bobina.*

**Resolução**: A impedância da bobina é:

$$|Z_{\text{b}}| = \sqrt{(150\,\pi \times 0.036)^2 + 40^2} = 43.449\ \Omega$$

$$\varphi_{\text{b}} = \text{atan}\left(\frac{150\,\pi \times 0.036}{40}\right) = 22.98^\circ$$

E a impedância do condensador é:

$$|Z_{\text{c}}| = X_{\text{c}} = \frac{1}{150\,\pi \times 32 \times 10^{-9}} = 66.315\ \text{k}\Omega$$

$$\varphi_{\text{c}} = -90^\circ$$

A tensão máxima é a mesma na bobina, no condensador e na fonte: $V_0 = 345$ V

(*a*) A corrente máxima na bobina é:

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z_{\text{b}}|} = \frac{345}{43.449} = 7.94\ \text{A}$$

(*b*) No condensador:

$$I_{ef} = \frac{V_{ef}}{|Z_{\text{c}}|} = \frac{345/\sqrt{2}}{66315} = 3.68\ \text{mA}$$

(*c*) A potência média na bobina será:

$$\langle P\rangle = \frac{I_0 V_0}{2}\cos\varphi_{\text{b}} = 0.5 \times 7.94 \times 345\cos(22.98) = 1261\ \text{W}$$

## 10.5. Ressonância

A reatância equivalente num circuito varia com a frequência. Se o circuito inclui condensadores e indutores, quando a frequência for muito elevada a reatância será elevada e positiva.

Se a frequência for muito baixa, a reatância será também elevada, mas negativa. Nesses dois limites a impedância terá um módulo muito elevado e o fator de potência será bastante pequeno. Isso implica corrente máxima e potência média muito baixas.

Existirá uma frequência intermédia, para a qual a reatância equivalente é nula. Nesse caso o módulo da impedância será mínimo, o fator de potência será máximo ($\cos\varphi = 1$) e não existirá desfasamento entre a tensão e a corrente. Diz-se que a tensão está em ressonância com o circuito; a frequência para a qual a reatância é nula é um valor caraterístico do circuito, designado de **frequência de ressonância**.

Um exemplo é um circuito *RLC* em série, em que uma resistência, um indutor e um condensador são ligados em série com uma fonte de corrente alternada. A figura 10.13 mostra o diagrama de circuito.

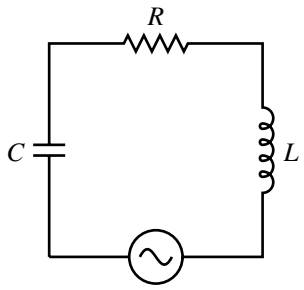



**Figura 10.13.:** Circuito *RLC* em série.

A impedância equivalente é igual à soma das impedâncias da resistência, o indutor e o condensador:

$$Z = R + \mathrm{i}\,\omega L - \frac{\mathrm{i}}{\omega C} \tag{10.28}$$

O valor de $\omega$ que faz com que a parte imaginária seja nula, existindo ressonância, é:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{10.29}$$

e, portanto, a frequência de ressonância é:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{10.30}$$

Se $L$ for dada em henrys e $C$ em farads, o produto $LC$ terá unidades de segundos, e a frequência estará em hertz.

## 10.6. Conversão de tensão alternada em tensão contínua

Para converter corrente alternada em corrente contínua usa-se um sistema de quatro díodos, ligados como se mostra na figura 10.14.

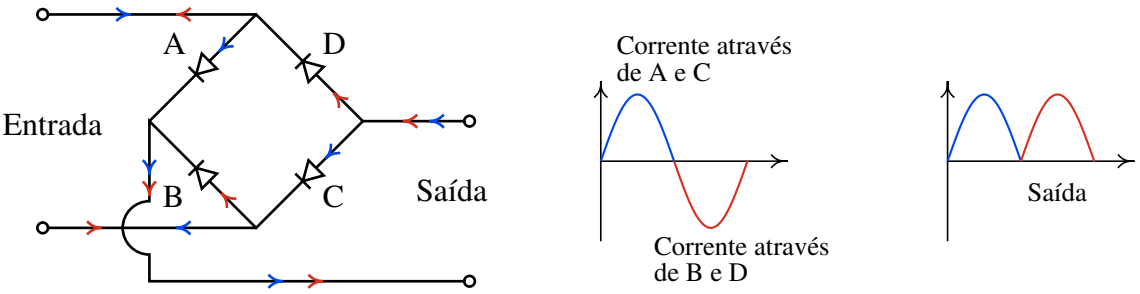



**Figura 10.14.:** Ponte com 4 díodos, usada para converter corrente alternada em contínua e tensões de entrada e de saída.

Nos condutores à entrada, a corrente muda de sentido cada vez que a tensão alternada muda de sinal. Quando entra no sentido indicado pelas setas em azul, a corrente passará para o circuito de saída através dos díodos A e C. Quando o sentido da corrente de entrada muda, a corrente circula para a saída através dos díodos B e D. O resultado é uma corrente de saída que mantém um sentido único e uma tensão de saída que varia como o valor absoluto da função seno.

O valor máximo da tensão de saída pode ser modificado por meio de um transformador à entrada. Para obter uma corrente de saída mais contínua, liga-se à saída um condensador, em paralelo, como se mostra na figura 10.15.

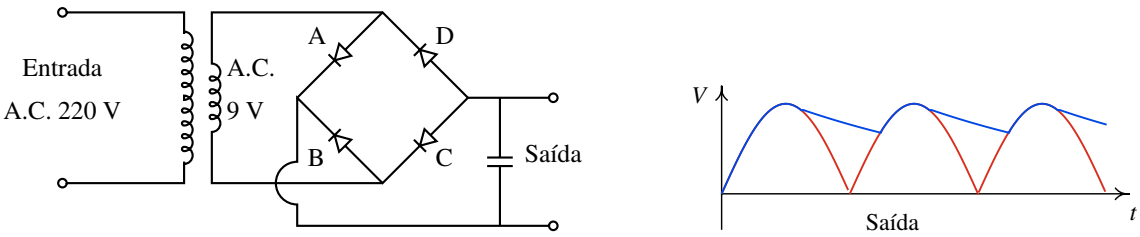



**Figura 10.15.:** Conversor de corrente alternada em contínua e gráfico da tensão de saída.

Nos intervalos em que a tensão de saída aumenta, o condensador é carregado; quando a tensão começa a diminuir, o condensador descarrega fazendo com que a tensão diminua exponencialmente. Se a capacidade do condensador for suficientemente elevada, a constante de tempo poderá ser muito maior que o período de oscilação da tensão de entrada, produzindo tensão de saída mais uniforme. A figura 10.15 mostra o gráfico da tensão de saída. A constante de tempo do circuito à saída dependerá da impedância do circuito que for ligado à saída.

# Perguntas

**1.** Um condensador de 2.73 $\mu$F e uma resistência de 1166 Ω estão ligados em série a uma fonte de tensão alternada com frequência de 50 Hz e tensão máxima de 230 V. Calcule a corrente máxima na resistência.

A. 197 mA
B. 139 mA
C. 99 mA
D. 36 mA
E. 23 mA

**2.** Um condensador de 2.73 $\mu$F e uma resistência de 1166 Ω estão ligados em série a uma fonte de tensão alternada de 50 Hz. Podemos concluir que a tensão da fonte estará:

A. Adiantada 90° em relação à corrente.
B. Adiantada 45° em relação à corrente.
C. Atrasada 90° em relação à corrente.
D. Atrasada 45° em relação à corrente.
E. Em fase com a corrente.

**3.** Qual das afirmações seguintes é verdadeira, em relação a uma bobina de 2 mH e um condensador de 5 pF?

A. A reatância da bobina é menor.
B. A reatância do condensador é menor.
C. Se a corrente for contínua, a reatância da bobina é menor.
D. Se a corrente for contínua, a reatância do condensador é menor.
E. Se a corrente for contínua, a reatância dos dois dispositivos é nula.

**4.** Em que casos a potência média (potência eficaz), é igual ao produto da corrente eficaz vezes a tensão eficaz?

A. Quando a tensão for igual à corrente.
B. Quando a tensão estiver em fase com a corrente.
C. Quando o fator de potência for igual a $\sqrt{2}/2$.
D. Quando a corrente for muito elevada.
E. Sempre.

**5.** Num circuito *RLC* de corrente alternada, em série, quando a reatância equivalente for nula, qual das seguintes afirmações é verdadeira:

A. A impedância é nula.
B. O fator de potência é nulo.
C. O ângulo de desfasamento é nulo.
D. A corrente é nula.
E. A tensão é nula.

# Problemas

**1.** A resistência de uma bobina é 150 Ω e a sua indutância é 1.4 H. A bobina é ligada à rede elétrica com tensão máxima 325 V e frequência de 50 Hz. Encontre a expressão para a corrente na bobina em função do tempo $t$.

**2.** Usando a definição do farad e do henry no sistema internacional de unidades, demonstre que as reatâncias capacitiva e indutiva têm as mesmas unidades da resistência.

**3.** Para cada um dos três circuitos representados na figura, calcule a impedância equivalente entre os pontos indicados com um pequeno círculo, para uma tensão de entrada com frequência de 2 kHz.

**4.** Uma bobina, com indutância de 36 mH e resistência de 40 Ω, liga-se em paralelo com

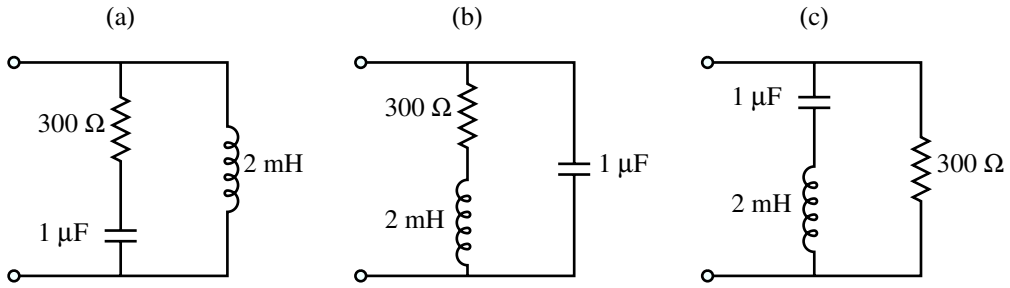



**Figura 10.16.:** Problema 3.

um condensador de 32 nF e com uma fonte alternada de tensão $V(t) = 345\cos(150\pi t)$ (em volts, e o tempo $t$ em segundos). Calcule: (*a*) A corrente máxima na bobina. (*b*) A corrente eficaz no condensador. (*c*) A potência média dissipada na bobina.

**5.** Num circuito há cinco dispositivos ligados em série a uma fonte de tensão alternada: uma resistência de 300 Ω, duas reatâncias capacitivas de 500 Ω e 300 Ω, e duas reatâncias indutivas de 800 Ω e 400 Ω. (*a*) Desenhe o diagrama do circuito. (*b*) Desenhe o diagrama do circuito equivalente com uma única resistência e uma única reatância. (*c*) Se a tensão máxima da fonte for 400 V, calcule o módulo da impedância equivalente, a corrente máxima no circuito e o ângulo de desfasamento. (*d*) A frequência da fonte é maior ou menor que a frequência de ressonância do circuito?

**6.** Uma fonte de tensão alternada $V = 45\ \sin(628.32t)$, onde $t$ é o tempo em segundos e $V$ é medida em volts, é ligada a um circuito como se mostra na figura. (*a*) Calcule a impedância total do circuito. (*b*) Calcule a corrente total a sair da fonte, em função do tempo.

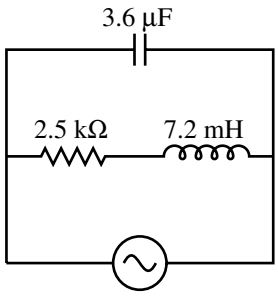



**Figura 10.17.:** Problema 6.

**7.** A tensão e a corrente num circuito são $V(t) = 170\sin(377t+3)$ e $I(t) = 10\sin(377t+3.2)$, medidas em volts e amperes, se o tempo $t$ for dado em segundos. Desenhe os fasores correspondentes no plano complexo e calcule a impedância do circuito.

**8.** Os dois circuitos da figura, alimentados por uma tensão de entrada com valor máximo $V_e$ e frequência $f$, são designados de **filtro passa-baixo** (*a*) e **filtro passa-alto** (*b*). Determine a relação entre a tensão de saída e a tensão de entrada $V_s/\ V_e$ nos dois casos. Explique porque é que os circuitos são chamados filtro passa-baixo e filtro passa-alto.

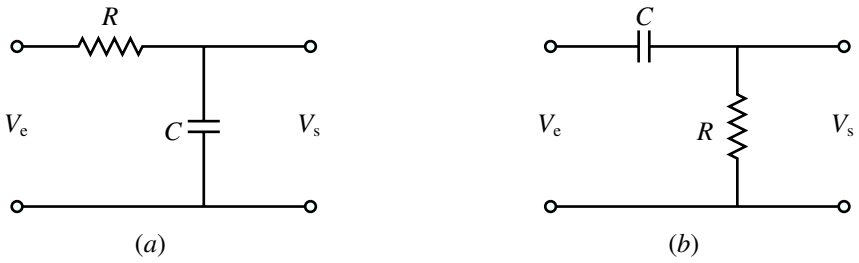



**Figura 10.18.:** Problema 8.

**9.** A figura mostra a tensão e a corrente num condensador. A corrente é causada pela tensão: se não houvesse tensão elétrica, não existia corrente. Como se explica então que no instante $t = 0$ a corrente seja diferente de zero se a tensão é nula?

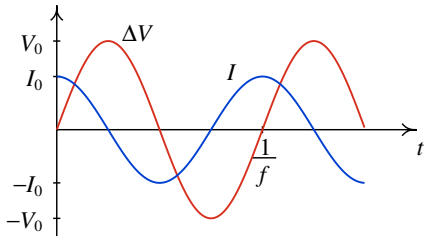



**Figura 10.19.:** Problema 9.

**10.** A resistência de uma bobina é 150 ohms e a sua indutância é 1.4 H. O gráfico mostra o diagrama de circuito quando a bobina é ligada a uma fonte de tensão alternada e os gráficos da corrente, $I$, a tensão da fonte $\Delta V$, a tensão na resistência, $\Delta V_R$, e a tensão no indutor, $\Delta V_L$, quando a frequência da fonte é de 50 Hz. O que é que mudava nos gráficos se a frequência fosse 5 Hz ou 500 Hz?

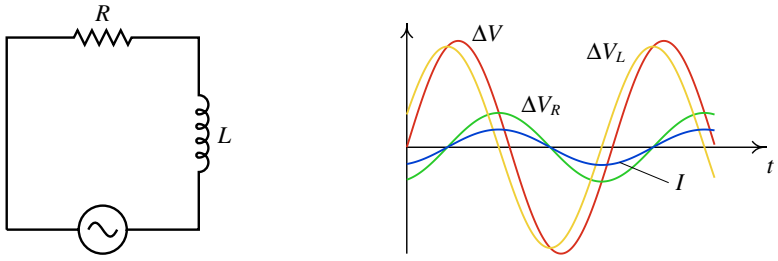
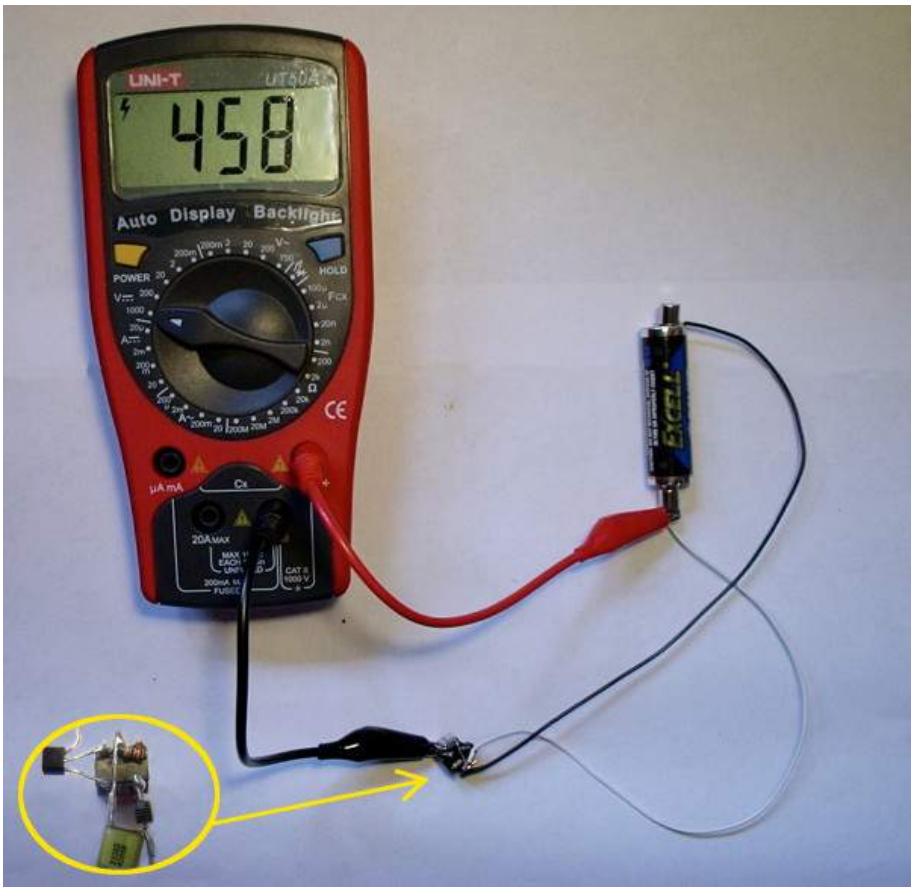



**Figura 10.20.:** Problema 10.

# 11. Transístores e amplificadores




O circuito diminuto na fotografia (amplificado na elipse ao lado) foi extraído de uma câmara fotográfica descartável onde é usado para acender o flash. O circuito é formado por um pequeno transformador, um díodo, uma resistência, um condensador e um transístor. A força eletromotriz da pilha de 1.5 V é amplificada até 458 V, como mostra o voltímetro, fornecendo a tensão necessária para acender uma lâmpada de xénon no flash fotográfico.

(Os pormenores deste amplificador encontram-se em: http://www.instructables.com/id/How-to-build-the-Worlds-Smallest-Electronic-Shock/)

O primeiro transístor foi construído nos laboratórios Bell em 1947, e os primeiros circuitos integrados em 1959. A primeira geração de circuitos integrados, com tecnologia SSI (*Small-Scale Integration*), continham dezenas de transístores. Esse tipo de circuitos foram essenciais no início da era aeroespacial; as sondas espaciais e os mísseis precisavam de computadores digitais leves para os seus sistemas de controlo.

No fim da década de 1960 foram construídos circuitos integrados MSI (*Medium-Scale Integration*), com centenas de transístores. Por volta de 1974 foram produzidos circuitos LSI (*Large-Scale Integration*), com dezenas de milhares de transístores.

A partir da década de 1980 começou a era dos circuitos VLSI (*Very-Large-Scale-Integration*), inicialmente com centenas de milhares de transístores, até centenas de milhões na época atual (2008). Em 1971 foi lançado o primeiro microprocessador, um circuito integrado digital programável que incorpora todas as funções da unidade central de processamento de um computador. O futuro já aponta para a criação de circuitos integrados com vários microprocessadores num único microchip; já é comum encontrar no mercado computadores com 4 CPU dentro de um único processador, e existe um protótipo da Intel com 80 microprocessadores dentro de um único chip.

## 11.1. Transístores bipolares

Existem hoje em dia vários tipos de transístores. Os primeiros transístores construidos, do tipo **bipolar**, são formados por três materiais semicondutores, dois deles do mesmo tipo (P ou N), e o terceiro, entre os dois anteriores, de tipo oposto.

A figura 11.1 mostra os dois tipos de transístores, PNP e NPN; nos dois casos, o semicondutor que se mostra no lado esquerdo, designado de **emissor** (e), tem uma dopagem maior; nomeadamente, tem uma densidade de cargas livres maior do que os outros dois semicondutores. O semicondutor no meio, de tipo diferente aos outros dois, designa-se de **base** (b), e o outro semicondutor é o **coletor** (c). No lado direito da figura 11.1 mostram-se os diagramas de circuito usados para os dois casos.

Tal como nos díodos, na fronteira entre cada par de semicondutores diferentes criam-se duas camadas onde existem iões positivos ou negativos fixos, sem cargas de condução. Essas camadas produzem barreiras de potencial que impedem a passagem de eletrões de condução, ou buracos, dum lado para o outro.

O **modo normal** de funcionamento, do transístor PNP será quando circula corrente do emissor para o coletor e do emissor para a base. No transístor NPN, no modo normal circulará corrente do coletor para o emissor e da base para o emissor. Nos dois casos, para que o transístor funcione no modo normal, será necessário que a junção emissor-base esteja polarizada em modo direto e a junção coletor-base em modo inverso.

Para que uma junção esteja polarizada em modo direto, nos dois lados deverá ser ligada uma diferença de potencial que contrarie a barreira de potencial, que é aproximadamente 0.7 V em transístores de silício e 0.3 V em transístores de germânio. Nomeadamente, o

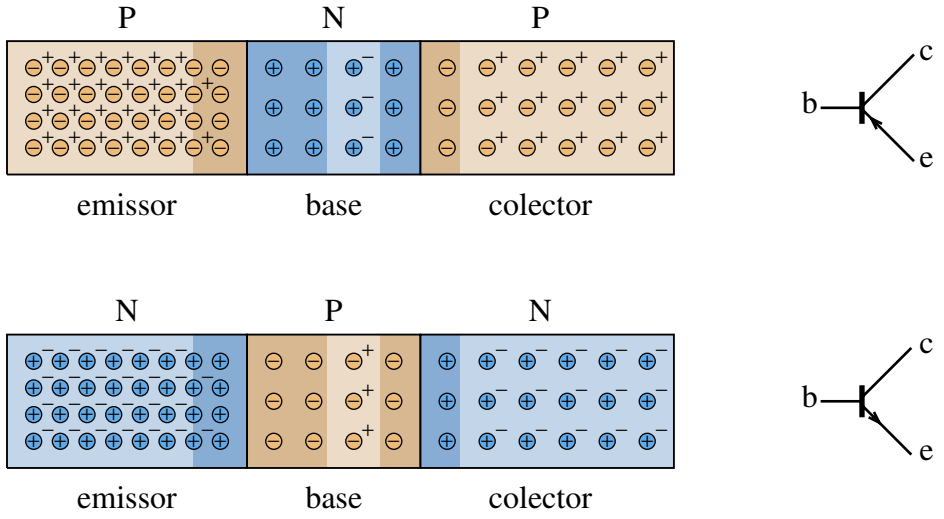



**Figura 11.1.:** Transístores PNP e NPN, e os correspondentes diagramas de circuito.

semicondutor P deverá ser ligado a um potencial superior que o potencial do semicondutor N, e a diferença entre esses dois potenciais deverá ser superior a 0.3, nos transístores de germânio, e superior a 0.7 nos transístores de silício.

**Figura 11.2.:** Modo normal de operação de um transístor PNP ou NPN.

A base do transístor costuma ser mais pequena que o coletor e o emissor, garantindo que a maior parte das cargas de condução que passam pelo emissor passam também pelo coletor; apenas uma pequena fração das cargas que circulam pelo transístor entram ou saem pela base.

No modo normal de funcionamento verifica-se sempre a relação:

$$I_\mathrm{e} = I_\mathrm{c} + I_\mathrm{b} \tag{11.1}$$

independentemente do tipo de transístor, como se mostra na figura 11.2.

A corrente do coletor é diretamente proporcional à corrente da base:

$$I_\mathrm{c} = \beta\, I_\mathrm{b} \tag{11.2}$$

onde $\beta$ é o **ganho de corrente** do transístor, que costuma ser aproximadamente 100.

## 11.2. Amplificadores

O transístor é um elemento muito importante na eletrónica; uma das principais aplicações é na construção de amplificadores. A figura 11.3 mostra o diagrama de circuito de um amplificador de tensão baseado num transístor.

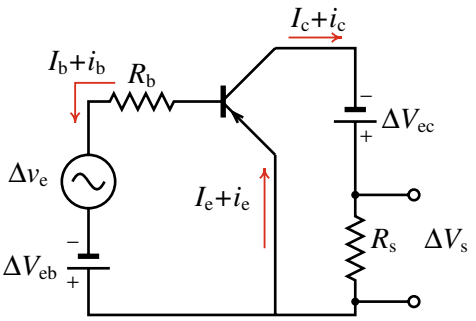



**Figura 11.3.:** Amplificador de tensão, com emissor comum.

As duas fontes de tensão contínua, $\Delta V_{eb}$ e $\Delta V_{ec}$, são usadas para manter o transístor no modo normal de operação. Será necessário que $\Delta V_{eb} < \Delta V_{ec}$ e que $\Delta V_{ec}$ seja maior que a soma das barreiras de potencial nas duas junções.

O sinal a ser amplificado, $\Delta v_e$, pode ser contínuo, alternado, ou com qualquer variação arbitrária, sempre que não chegue a ser menor que $-\Delta V_{eb}$ para que o transístor permaneça sempre no modo normal de operação.

Quando o sinal de entrada, $\Delta v_e$, for nulo, as correntes nos 3 terminais do transístor serão $I_b$, $I_e$ e $I_c$, que verificam as equações 11.1 e 11.2. A tensão de saída é a tensão que é medida na resistência $R_s$, que será $\Delta V_s = R_s I_c$.

Quando o sinal de entrada não for nulo, a corrente que sai da base será a soma de uma parte contínua, $I_b$ mais uma parte variável, $i_b$, produzida pela tensão de entrada:

$$i_b = \frac{\Delta v_e}{R_b + r_b} \tag{11.3}$$

onde $R_b$ é uma resistência que foi ligada à base e $r_b$ é a resistência entre a base e o emissor, que costuma ser pequena.

A corrente que sai pelo coletor será a soma da parte contínua, $I_c$, mais uma parte variável $i_c$, que é igual ao ganho de corrente, vezes a corrente $i_b$. A tensão de saída será igual à soma da parte contínua, $R_s I_c$, mais uma parte variável

$$\Delta v_s = R_s i_c = \beta R_s i_b \tag{11.4}$$

Assim, podemos calcular o ganho de tensão combinando as equações 11.3 e 11.4:

$$\frac{\Delta v_s}{\Delta v_e} = \frac{\beta R_s}{R_b + r_b} \tag{11.5}$$

No circuito da figura 11.3 as duas fontes foram ligadas no esquema de emissor comum. Também é possível ligar as fontes em outras formas, por exemplo, com base comum.

## 11.3. Amplificador operacional

Combinando vários amplificadores em série, onde a entrada de cada um é a saída do anterior, podem obter-se valores mais elevados do ganho de tensão e da impedância de entrada. Os **amplificadores operacionais** são construídos combinando todos os transístores e resistências num único circuito integrado. A figura 11.4 mostra o símbolo usado para representar o amplificador operacional nos circuitos.

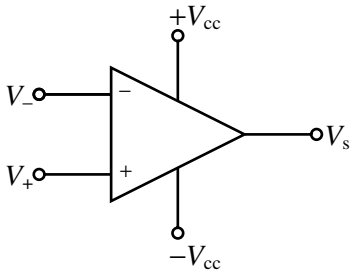



**Figura 11.4.:** Diagrama de circuito do amplificador operacional.

O amplificador deve ser alimentado por duas tensões de sinais opostos, $+V_{cc}$ e $-V_{cc}$ ambas em relação a um ponto comum onde arbitramos $V = 0$ (a **terra** do circuito). Por simplicidade, nas seções seguintes não serão mostradas as ligações das tensões $+V_{cc}$ e $-V_{cc}$, mas apenas os terminais de entrada e o terminal de saída.

A tensão de saída $V_s$, medida em relação à terra comum, é diretamente proporcional à diferença de potencial entre as entradas positiva e negativa:

$$V_s = \alpha\,(V_+ - V_-) \tag{11.6}$$

A constante $\alpha$ é o ganho de tensão do amplificador, que costuma ser bastante elevado; por exemplo, nos amplificadores operacionais da série 741, o ganho é de $10^5$ e a impedância de entrada é 2 MΩ.

Devido ao valor elevado de $\alpha$, bastará uma pequena diferença entre os potenciais $V_+$ e $V_-$ para produzir uma tensão de saída $V_s$ elevada. No entanto, o valor máximo que poderá ter a tensão de saída está limitado pela tensão de alimentação $+V_{cc}$ e o valor mínimo da tensão de saída está limitado por $-V_{cc}$.

Assim, a equação 11.6 é válida unicamente se a diferença entre $V_+$ e $V_-$ for muito pequena, menor que $+V_{cc}/\alpha$ e maior que $-V_{cc}/\alpha$. Fora desse intervalo, o amplificador fica **saturado** e a tensão de saída permanecerá constante, aproximadamente igual a $+V_{cc}$ ou $-+V_{cc}$, independentemente do valor das tensões de entrada.

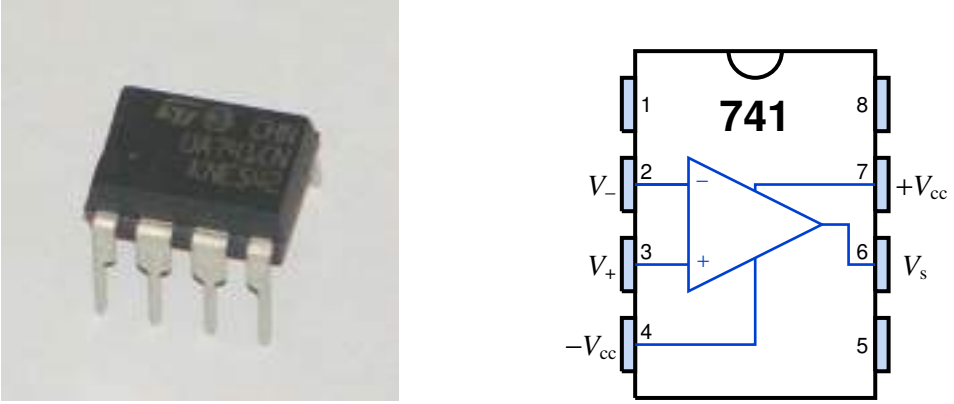



**Figura 11.5.:** O circuito integrado 741 e diagrama da distribuição das entradas.

O amplificador funciona assim como **comparador**, com dois estados discretos à saída. Na próxima seção veremos como é possível manter o amplificador dentro do **regime linear**, em que a equação 11.6 é válida.

O lado direito na figura 11.5 mostra como estão distribuídas as entradas e saídas no circuito integrado 741. Os oito terminais são enumerados em sentido anti-horário, visto de cima, e a começar no extremo mais próximo do lado do circuito que tem um semicírculo cortado na superfície (também é costume aparecer um ponto preto perto do terminal número 1). O amplificador 741, lançado na década de 1960, usa tecnologia SSI, com 24 transístores, 14 resistências e um condensador.

As tensões de alimentação no circuito integrado 741 podem estar compreendidas entre $\pm 5$ V e $\pm 18$ V. O valor que se utilizar determinará o valor máximo que poderá ter a tensão de saída $V_s$.

## 11.4. Realimentação negativa

O que acontece com a tensão de saída num amplificador operacional pode ser comparado com o que acontece a uma régua colocada em equilíbrio numa posição vertical. Dificilmente estará perfeitamente vertical, assim que cairá rapidamente para algum dos dois lados, pois a posição de equilíbrio vertical é bastante instável.

No amplificador operacional, se a diferença de potencial entre as duas entradas fosse exatamente igual a zero, a saída permaneceria no valor de "equilíbrio", igual a zero. No entanto qualquer pequena diferença de tensão faz com que a saída salte para mais ou menos a tensão de saturação.

Realimentando a tensão de saída na entrada negativa, como se indica na figura 11.6, consegue-se fazer com que o amplificador tenha um estado de equilíbrio estável.

Se a diferença entre as tensões de entrada, $(V_+ - V_-)$ aumentasse por cima de zero, a tensão de saída sería positiva e a realimentação na entrada negativa fazia diminuir novamente a

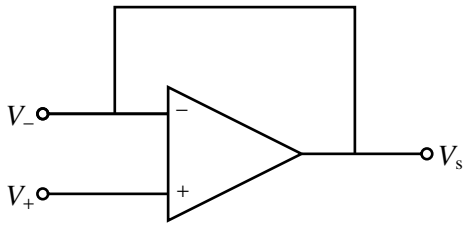



**Figura 11.6.:** Realimentação negativa.

diferença entre as tensões de entrada. Se a diferença entre as tensões de entrada diminuir por baixo de zero, a tensão de saída será negativa, e a realimentação na entrada negativa fará aumentar novamente a diferença entre as tensões de entrada. A diferença entre as tensões de entrada estabiliza em zero.

A realimentação negativa, garante que o amplificador se mantenha no regime linear, em que a equação 11.6 é válida. Devido aos valores elevados de $\alpha$ e da impedância de entrada, podemos admitir que, quando existe realimentação negativa, verificam-se as seguintes aproximações:

$$\boxed{V_+ \approx V_- \qquad I_+ \approx 0 \qquad I_- \approx 0} \tag{11.7}$$

É importante ter em conta que se a realimentação fosse feita na entrada positiva em vez da negativa, o ponto de equilíbrio passava a ser ainda mais instável, em vez de se tornar estável.

## 11.5. Seguidor

No circuito da figura 11.6, a aproximação $V_+ \approx V_-$ implica que a tensão de saída é igual à tensão na entrada positiva:

$$V_\mathrm{s} = V_+ \tag{11.8}$$

Assim, se ligarmos um sinal de entrada $V_\mathrm{e}$ à entrada positiva, o sinal de saída $V_\mathrm{s}$ será igual ao sinal de entrada e, portanto, o circuito designa-se de **seguidor**.

A vantagem do seguidor é que, embora as tensões de entrada e saída sejam iguais, como a resistência de entrada do amplificador é elevada, a corrente de entrada pode ser muito pequena, enquanto a corrente de saída pode ser muito mais elevada.

Essa propriedade é útil, por exemplo, para medir a tensão num elemento de um circuito sem ter que retirar muita carga desse elemento, para não alterar a tensão que se pretende medir.

Se, por exemplo, quisermos medir a tensão num condensador, vimos na atividade prática do capítulo 4 que a tensão medida decresce exponencialmente, enquanto o condensador descarrega através da resistência do voltímetro. Ligando o condensador e o voltímetro na entrada e saída de um seguidor, como se mostra na figura 11.7, consegue-se obter um valor mais estável no voltímetro, evitando a descarga do condensador.

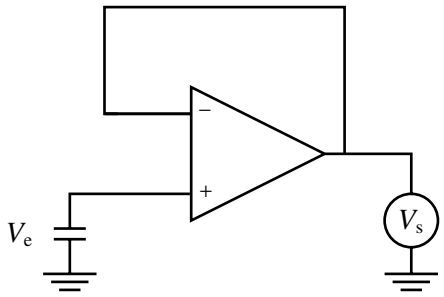



**Figura 11.7.:** Circuito seguidor usado para medir a tensão num condensador.

## 11.6. Amplificador não inversor

No circuito da figura 11.8, uma tensão de entrada, $V_e$, é alimentada à entrada positiva do amplificador operacional, e é usado um divisor de voltagem à saída, com duas resistências $R_1$ e $R_2$, para realimentar apenas uma parte da tensão de saída.

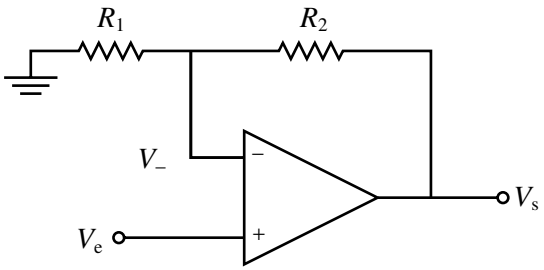



**Figura 11.8.:** Amplificador não inversor.

Devido a que o circuito tem realimentação negativa, podemos admitir as condições 11.7, que implicam que o circuito da figura 11.8 é equivalente ao circuito da figura 11.9.

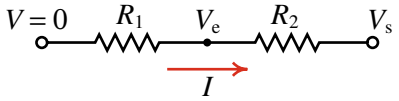



**Figura 11.9.:** Circuito equivalente do amplificador não inversor.

Nesse circuito equivalente (figura 11.9), vemos que circula pela duas resistências é a mesma, $I$. A tensão de entrada é igual à tensão na resistência $R_1$ e a tensão de saída é a tensão nas resistências $R_1$ e $R_2$. Usando a lei de Ohm obtemos:

$$V_e = R_1 I \qquad V_s = (R_1 + R_2) I \tag{11.9}$$

Consequentemente, o ganho de tensão no amplificador é:

$$\frac{V_s}{V_e} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \tag{11.10}$$

O resultado obtido é surpreendente: o ganho deste tipo de circuito é independente de $\alpha$, sempre e quando $\alpha$ seja elevado, e pode ser ajustado à vontade, bastando escolher resistências $R_1$ e $R_2$ apropriadas.

Por outro lado, a tensão de saída é bastante estável devido à realimentação negativa, e resolve-se um problema presente em outro tipo de amplificadores: por exemplo, num amplificador construído a partir de um transístor bipolar, o ganho $\beta$ é bastante sensível às variações da temperatura e a outros fatores como a frequência da tensão.

Este tipo de amplificador é designado de **amplificador não inversor** porque a tensão de saída tem o mesmo sinal da tensão de entrada. A figura 11.10 mostra um sinal de entrada, $V_e$, em função do tempo $t$, num amplificador não inversor com ganho igual a 2 e tensão de saturação de 8 V. Nos intervalos em que a tensão de entrada é maior que 2 V, ou menor que $-2$ V, a saída $V_s$ é fixa e igual a $+8$ V ou $-8$ V.

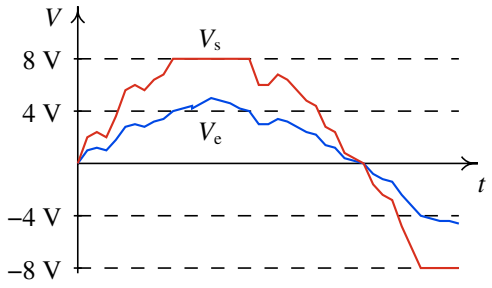



**Figura 11.10.:** Tensões de entrada e saída num amplificador não inversor.

## 11.7. Amplificador inversor

O circuito na figura 11.11 é um **amplificador inversor**. O ganho desse amplificador é igual à relação entre as duas resistências $R_2$ e $R_1$, como mostraremos a seguir.

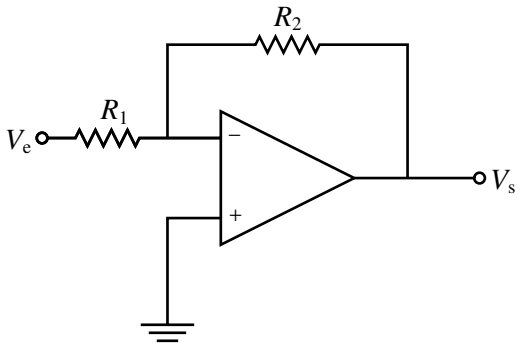



**Figura 11.11.:** Amplificador inversor.

Devido a que o circuito tem realimentação negativa, podemos admitir as condições 11.7, que implicam que o circuito da figura 11.11 é equivalente ao circuito da figura 11.12.

Nesse circuito equivalente, o ponto entre as duas resistências está a potencial nulo; repare que não foi desenhada uma ligação à terra nesse ponto, porque isso implicaria que poderia sair corrente para a terra nesse ponto, mas isso não é possível devido a que $I_+$ e $I_-$ são nulas.

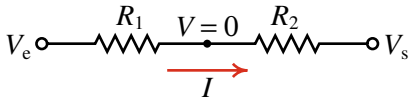



**Figura 11.12.:** Circuito equivalente do amplificador inversor.

No circuito equivalente da figura 11.12, ve-se que a corrente nas duas resistências é a mesma, $I$, e as tensões de entrada e de saída são:

$$V_e = R_1 I \qquad\qquad V_s = -R_2 I \tag{11.11}$$

Assim, o ganho do amplificador inversor é:

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{R_2}{R_1} \tag{11.12}$$

o sinal negativo implica tensões de entrada e saída com sinais opostos. A tensão de entrada é invertida e amplificada, dentro dos limites da tensão de saturação. A figura 11.13 mostra um exemplo para um amplificador com ganho de 2 e com tensão de saturação de 8 V.

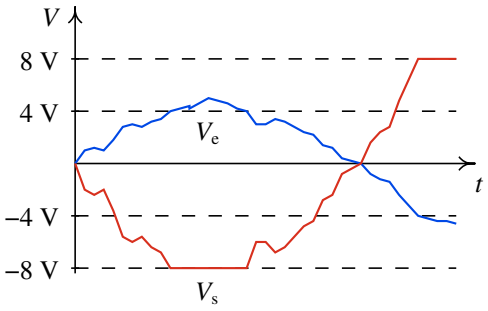



**Figura 11.13.:** Tensões de entrada e saída num amplificador inversor.

As aproximações feitas para obter o circuito equivalente foram feitas admitindo que o circuito é estável e o amplificador operacional não está saturado. Se a realimentação for positiva o circuito equivalente já não seria o mesmo, e se o amplificador operacional estivesse saturado, a diferença entre as duas entradas poderia ter um valor elevado, diferente de zero.

## 11.8. Derivador e integrador

Se no amplificador inversor da figura 11.11 substituirmos a resistência $R_1$ por um condensador, obtém-se o circuito **derivador**, apresentado na figura 11.14

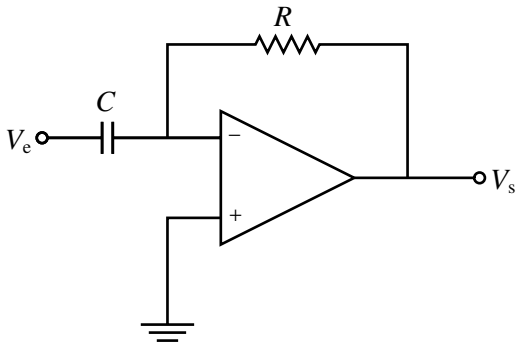



**Figura 11.14.:** Circuito derivador.

No circuito equivalente, apresentado na figura 11.15, as tensões de entrada e saída verificam as equações:

$$V_e = \frac{Q}{C} \qquad V_s = -RI \tag{11.13}$$

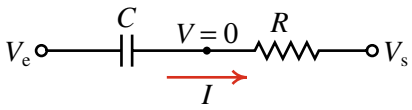



**Figura 11.15.:** Circuito equivalente do derivador.

Como a derivada da carga $Q$ no condensador é igual à corrente $I$ na resistência, obtem-se a seguinte relação entre o sinal de entrada e o sinal de saída:

$$V_s = -RC\frac{\mathrm{d}V_e}{\mathrm{d}t} \tag{11.14}$$

Se no amplificador inversor da figura 11.11 substituirmos a resistência $R_2$ por um condensador, obtém-se o circuito **integrador**, apresentado na figura 11.16

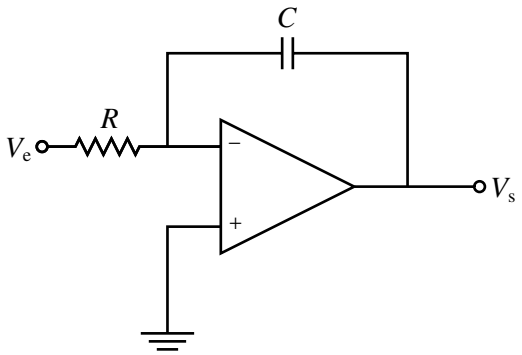



**Figura 11.16.:** Circuito integrador.

No circuito equivalente, apresentado na figura 11.17, as tensões de entrada e saída verificam as equações:

$$V_\mathrm{e} = RI \qquad V_\mathrm{s} = -\frac{Q}{C} \tag{11.15}$$

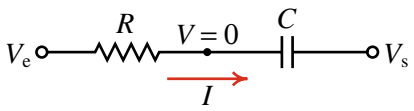



**Figura 11.17.:** Circuito equivalente do integrador.

Como a derivada da carga $Q$ no condensador é igual à corrente $I$ na resistência, a relação obtida entre o sinal de entrada e o sinal de saída é:

$$V_\mathrm{s} = -\frac{1}{RC}\int_0^t V_\mathrm{e}\,\mathrm{d}t \tag{11.16}$$

onde admitimos que o sinal de entrada é nulo antes do instante $t = 0$.

# Atividade prática

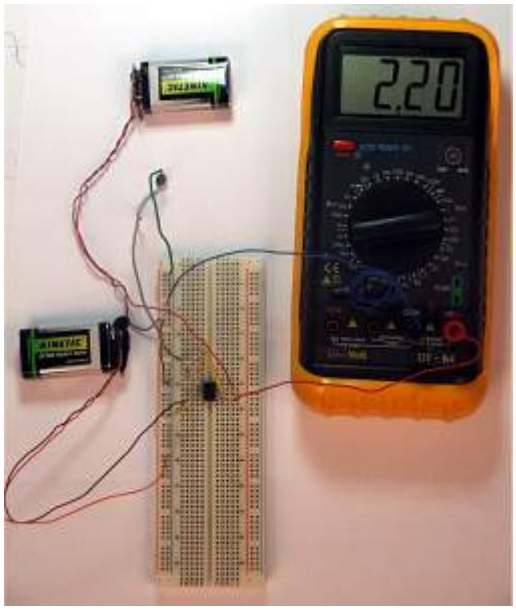



**Figura 11.18.:** Amplificador inversor montado numa placa de teste.

Monte o circuito amplificador inversor representado na figura 11.19, usando um amplificador operacional 741. Os números à volta do amplificador são os números das entradas no circuito integrado.

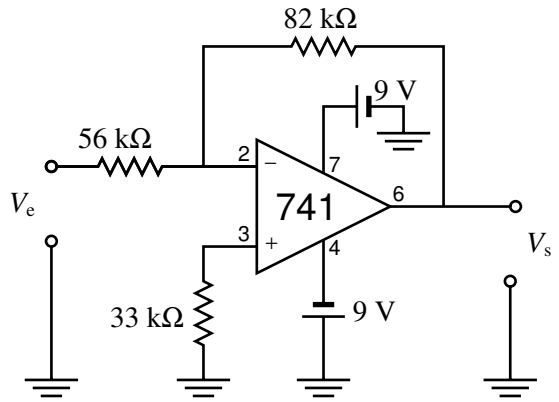



**Figura 11.19.:** Diagrama do circuito da figura 11.18.

Para fornecer as tensões $+V_{cc}$ e $-V_{cc}$, use duas pilhas de 9 V, tendo atenção às polaridades corretas. A resistência ligada entre a entrada positiva e a terra é usada para compensar o fato de que a corrente nas entradas não é exatamente zero, e deverá ser igual ao valor das outras duas resistências em paralelo, mas neste caso não é muito importante e poderá ter outro valor.

Como tensão de entrada use uma pilha de relógio, com força eletromotriz de aproximadamente 1.5 V. Para conferir que o circuito foi ligado corretamente, verifique que a saída seja igual a 0 quando não há nada ligado à entrada, e que a saída dá um valor diferente de zero quando liga a pilha de relógio à entrada; se trocar a polaridade da pilha, a saída deverá mudar de sinal, mantendo o mesmo valor absoluto.

A tensão de entrada estará perto da força eletromotriz da pilha, inclusivamente se a pilha estiver gasta, porque a corrente que se extrai da pilha é baixa. Calcule o ganho de tensão do amplificador, e a partir do valor da tensão de saída, lido no voltímetro, calcule a força eletromotriz da pilha de relógio; compare com o valor que obtém ligando a pilha de relógio diretamente ao voltímetro.

# Perguntas

**1.** A seta no diagrama de circuito de um transístor PNP ou NPN indica o sentido do movimento de:

A. Os eletrões, no transístor PNP, e os buracos no transístor NPN.

B. Os eletrões, no transístor NPN, e os buracos no transístor PNP.

C. Os eletrões, nos dois casos.

D. Os buracos, nos dois casos.

E. As cargas livres, sejam eletrões ou buracos.

**2.** Num transístor bipolar, qual é o componente que tem uma maior densidade de cargas de condução?

A. A base.

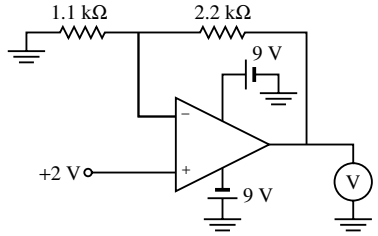
B. O emissor.

C. O coletor.

D. O emissor, se o transístor for PNP, ou o coletor se for NPN.

E. O emissor, se o transístor for NPN, ou o coletor se for PNP.

**3.** No amplificador da figura, os valores das tensões são referidas ao potencial igual a 0 na terra. Qual será o valor da tensão medida no voltímetro?




A. 4 V C. 9 V E. 27 V

B. 6 V D. 18 V

**4.** Num transístor PNP, de silício, a base está ligada à terra (potencial igual a 0), e o potencial no emissor é 1 V. Qual deverá ser o potencial no coletor para que o transístor esteja polarizado no modo normal?

A. Maior que 1 V.

B. Menor que -1 V.

C. Menor que 0.

D. Maior que 0.7 V.

E. Menor que -0.7 V.

**5.** Qual das seguintes afirmações é falsa?

A. A realimentação negativa permite manter a tensão de saída estável num amplificador operacional.

B. A realimentação negativa permite manter o ganho de corrente estável num amplificador operacional.

C. A realimentação negativa permite manter o ganho de corrente mais independente da temperatura num amplificador operacional.

D. A realimentação negativa permite aumentar o ganho de corrente num amplificador operacional.

E. A realimentação negativa permite ajustar o ganho de corrente num amplificador operacional.

# Problemas

**1.** Num transístor NPN, no modo normal de operação, a corrente na base é de 5 mA e a corrente no emissor é de 0.62 A. Calcule o ganho de corrente desse transístor.

**2.** Nos quatro transístores seguintes, diga quais deles estão polarizados em modo normal:

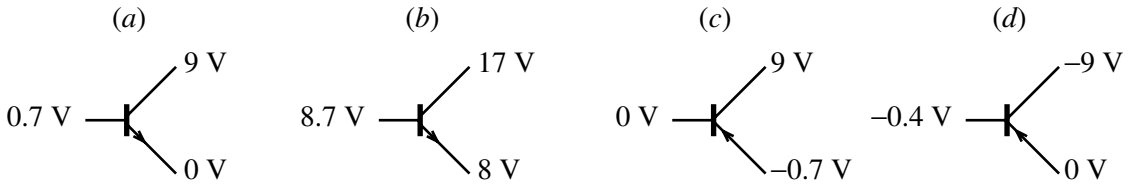



**Figura 11.20.:** Problema 2.

**3.** (*a*) Calcule a corrente que circula em cada uma das resistências de 20 kΩ. (*b*) Calcule como seriam as correntes nas duas resistências de 20 kΩ, se o amplificador fosse retirado, ligando o ponto A ao ponto B.

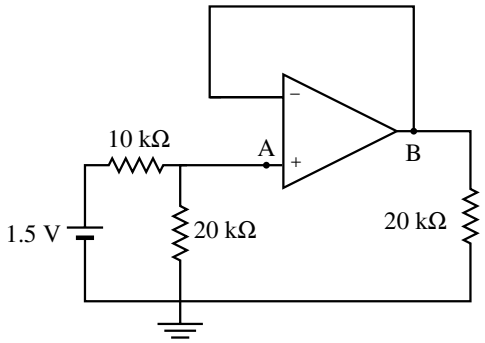



**Figura 11.21.:** Problema 3.

**4.** Calcule a corrente que circula em cada uma das resistências de 20 kΩ.

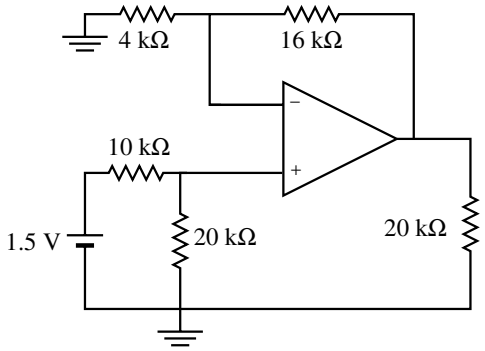



**Figura 11.22.:** Problema 4.

**5.** No circuito representado no diagrama, entre que pontos deverá ligar a tensão de entrada e medir a tensão de saída, se quiser: (*a*) amplificar o sinal, sem o inverter; (*b*) amplificar e inverter o sinal.

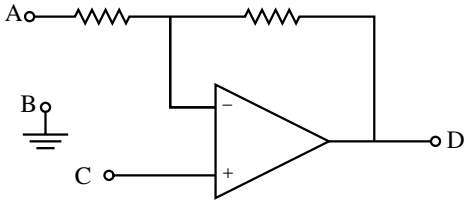



**Figura 11.23.:** Problema 5.

**6.** Explique o comportamento do circuito na figura 11.24.

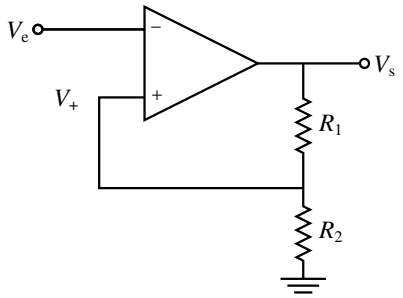



**Figura 11.24.:** Problema 6.

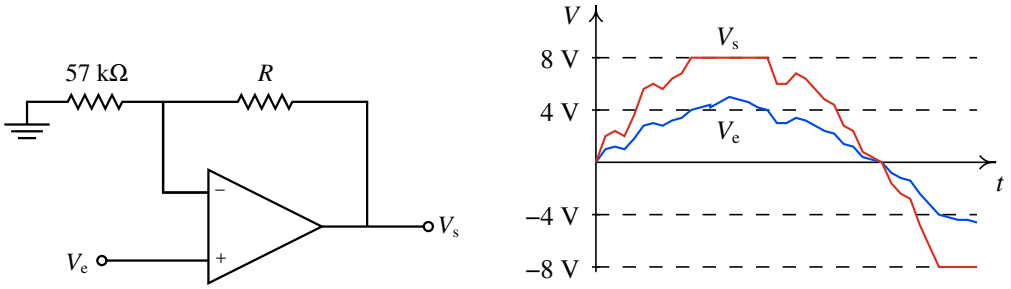



**Figura 11.25.:** Problema 7.

**7.** Os gráficos mostram o sinal de entrada e o sinal de saída no amplificador do diagrama. Calcule o valor da resistência $R$.

**8.** O diagrama corresponde a um circuito **somador**. Demonstre que a tensão de saída, $V_s$, é igual à soma das duas tensões de entrada, $V_1$ e $V_2$.

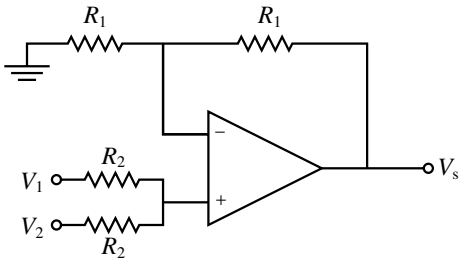
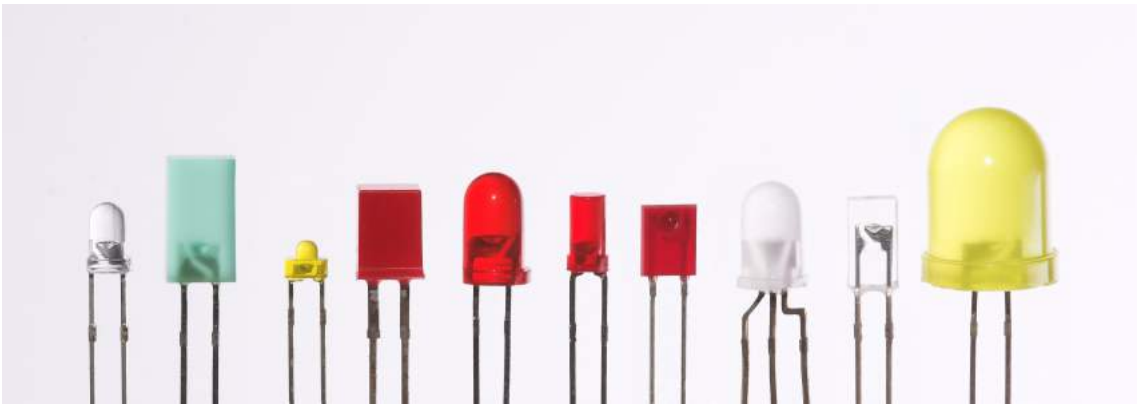



**Figura 11.26.:** Problema 8.

# 12. Ondas eletromagnéticas e luz



Os díodos emissores de luz (LED) são muito usados atualmente em aparelhos eletrónicos. Um LED produz luz de forma muito eficiente, com um consumo elétrico de apenas uns poucos miliwatt. São construídos em diferentes formas, tamanhos e cores. Cada algarismo num écran numérico é obtido com um conjunto de 8 LED; para obter cada um dos números acendem-se as combinações de LED necessárias.

Um LED é construído com cristais semicondutores e tem um tempo de duração muito elevado. A luz que produz tem uma cor própria que não muda com a corrente ou as condições de operação.

## 12.1. Equações de Maxwell

As equações básicas que permitem calcular o campo eletromagnético são conhecidas como equações de Maxwell. Uma forma suficiente de definir os dois campos, em qualquer ponto do espaço, consiste em descrever o fluxo dos campos em qualquer superfície fechada, e o integral de linha em qualquer curva fechada. Assim, precisamos de quatro equações, duas que digam como é o fluxo dos campos elétrico, $\Phi_e$, e magnético, $\Phi_m$, em superfícies fechadas, e duas equações para os integrais de linha dos dois campos.

Essas quatro equações já foram estudadas nos capítulos anteriores e vamos rescrevê-las aqui. A primeira equação é a lei de Gauss, que relaciona o fluxo do campo elétrico numa superfície fechada com as cargas no seu interior:

$$\boxed{\Phi_e(\text{Sup. fechada}) = 4\pi k q_{\text{int}}} \tag{12.1}$$

No caso do campo magnético, como não existem monopólos magnéticos, o fluxo através de qualquer superfície fechada é nulo.

$$\boxed{\Phi_m(\text{Sup. fechada}) = 0} \tag{12.2}$$

Essa é a segunda equação de Maxwell.

A terceira equação de Maxwell é a equação que define o integral de linha do campo elétrico em qualquer curva fechada C. Essa equação é a lei de Faraday, estudada no capítulo sobre indução eletromagnética:

$$\boxed{\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}} \tag{12.3}$$

o integral no lado esquerdo corresponde à *fem* induzida no percurso C. O fluxo magnético no lado direito da equação é o fluxo através da superfície delimitada pela curva C.

A quarta equação, que define o integral de linha do campo magnético em qualquer curva fechada C, é a lei de Ampère, já estudada no capítulo sobre o campo magnético:

$$\oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 4\pi k_m I_{\text{int}} \tag{12.4}$$

mas Maxwell reparou que esta equação só poderia ser válida no caso em que não existam campos elétricos variáveis.

Vimos no capítulo sobre indução eletromagnética que os campos elétrico e magnético são diferentes em diferentes referenciais inerciais, e usámos a invariância da força eletromagnética para calcular o campo elétrico induzido num referencial em que o campo magnético não é estático. De forma semelhante, num referencial em que o campo elétrico não seja estático, deverá aparecer um campo magnético induzido.

Na equação 12.4 falta um termo que dependa da variação do campo elétrico e que corresponda ao integral de linha do campo magnético induzido.

Consideremos um exemplo: um fio retilíneo sobre o semieixo negativo dos $x$, que vem desde $-\infty$ e termina na origem (figura 12.1). Se durante alguns instantes existe no fio uma corrente $I$, no sentido positivo do eixo dos $x$, existirá uma acumulação de cargas positivas na origem; se $q = f(t)$ representa a carga acumulada na origem no instante $t$, a derivada dessa função é igual à corrente:

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{12.5}$$

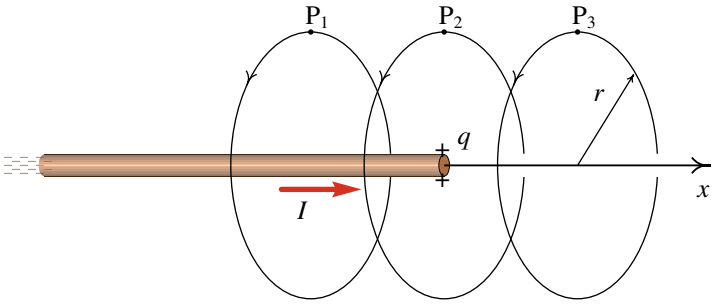



**Figura 12.1.:** Fio retilíneo, no eixo dos $x$, desde $-\infty$ até a origem.

Para calcular o módulo do campo magnético em três pontos $P_1$, $P_2$ e $P_3$, que se encontram a uma distância $r$ do eixo dos $x$, consideramos 3 circumferências de raio $r$, perpendiculares ao eixo dos $x$ e com centro no eixo. Aplicando a lei de Ampére nessas 3 circumferências, obtém-se que o módulo no campo magnético no ponto $P_1$ é $2k_m I/r$ e nos pontos $P_2$ e $P_3$ é nulo.

A linha contínua no gráfico 12.2 mostra o módulo do campo magnético obtido usando a lei de Ampére para todos os pontos a uma distância $r$ do eixo dos $x$. Em $P_2$ ($x = 0$) existe uma descontinuidade; o campo passa de $2k_m I/r$ para zero. A curva a tracejado mostra o resultado mais realista esperado: o campo decresce gradualmente até zero.

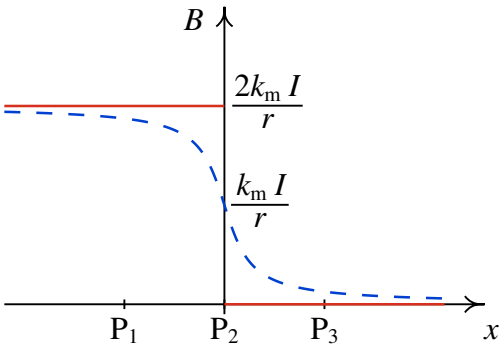



**Figura 12.2.:** Módulo do campo magnético do sistema na figura 12.1, em vários pontos a uma distância $r$ do eixo dos $x$.

Para obter a curva em tracejado na figura 12.2 será preciso incluir no lado direito da equação 12.4 um termo adicional que se aproxime de $-2\pi k_m I$ quando $x$ for negativo perto da origem, e que se aproxime de $2\pi k_m I$ quando $x$ for positivo e perto da origem.

A carga $q$ na origem produz um fluxo elétrico $\Phi_e$ negativo no círculo que passa por $P_1$ e positivo no círculo que passa por $P_3$. No ponto $P_2$ o fluxo elétrico muda de $-2\pi kq$ para $2\pi kq$. Consequentemente, a derivada do fluxo em função do tempo passa de $-2\pi kI$ para $2\pi kI$, e o termo que falta no lado direito da equação 12.4 é:

$$\frac{k_m}{k}\frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}t} \tag{12.6}$$

Incluindo esse termo na equação 12.4, obtem-se a quarta equação de Maxwell:

$$\boxed{\oint_C \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 4\pi k_m I_{int} + \frac{k_m}{k}\frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}t}} \tag{12.7}$$

## 12.2. Campos induzidos

Um campo magnético variável no tempo induz um campo elétrico, e um campo elétrico variável induz um campo magnético. Um exemplo é o campo magnético uniforme do problema 6 no capítulo 9; a variação do campo em função do tempo induz um campo elétrico com linhas de campo circulares.

O campo elétrico induzido é proporcional à derivada do fluxo magnético, e o campo magnético induzido é proporcional à derivada do fluxo elétrico. Quando um campo é uniforme, o fluxo através de uma superfície é maior se a superfície for perpendicular ao campo; isso implica que o campo induzido é perpendicular ao campo variável.

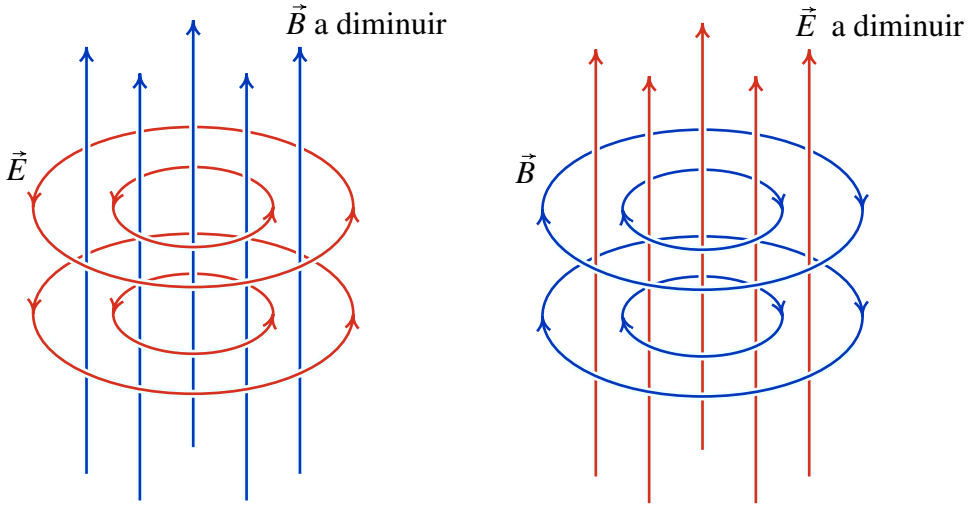



**Figura 12.3.:** Campo elétrico induzido por um campo magnético uniforme mas variável (esquerda) e campo magnético induzido por um campo elétrico uniforme mas variável (direita).

A figura 12.3 mostra o campo elétrico induzido por um campo magnético uniforme mas variável, e o campo magnético induzido por um campo elétrico uniforme e variável. No

primeiro caso, devido ao sinal negativo no lado direito da equação 12.3, o campo elétrico induzido é no sentido oposto ao obtido com a regra da mão direita em relação à derivada do campo magnético; como o campo magnético está a diminuir, a derivada do campo aponta para baixo e a regra da mão direita indica rotação no sentido horário; portanto, as linhas do campo induzido estão orientadas no sentido antihorário.

O sinal positivo do último termo na equação 12.7 implica que as linhas do campo magnético induzido seguem a regra da mão direita em relação ao aumento do campo elétrico. No caso do campo elétrico variável no lado direito da figura 12.3, como o campo está a diminuir, a derivada do campo elétrico aponta para baixo, e a regra da mão direita indica que o campo magnético induzido é no sentido horário.

## 12.3. Campo eletromagnético no vácuo

No vácuo onde não existem cargas nem correntes, podem ainda existir campos elétrico e magnético. Nesse caso, as quatro equações de Maxwell são:

$$\Phi_{\mathrm{e}}(\text{Sup. fechada}) = 0 \tag{12.8}$$

$$\Phi_{\mathrm{m}}(\text{Sup. fechada}) = 0 \tag{12.9}$$

$$\oint_{\mathrm{C}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\frac{\mathrm{d}\,\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} \tag{12.10}$$

$$\oint_{\mathrm{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{k_{\mathrm{m}}}{k}\frac{\mathrm{d}\,\Phi_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t} \tag{12.11}$$

O único parâmetro nessas equações é a constante $k_{\mathrm{m}}/k$. No sistema internacional de unidades, o valor dessa constante é:

$$\frac{k_{\mathrm{m}}}{k} = \frac{10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}}}{9\times 10^{9}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}} = \frac{1}{9\times 10^{16}}\ \frac{\mathrm{s^2}}{\mathrm{m^2}} \tag{12.12}$$

que é exatamente igual ao inverso do quadrado da velocidade da luz $c = 3\times 10^{8}\ \mathrm{m/s}$

$$\boxed{\frac{k_{\mathrm{m}}}{k} = \frac{1}{c^2}} \tag{12.13}$$

Na época de Maxwell, meados do século XIX, a velocidade da luz já tinha sido medida com precisão dando exatamente o mesmo valor que acabamos de calcular a partir da constante de Coulomb e da constante magnética. Assim, Maxwell concluiu que a luz deveria ser uma onda eletromagnética, composta por campos elétrico e magnético que se propagam no espaço.

Para investigar as soluções das equações 12.8, 12.9, 12.10 e 12.11, vamos admitir que numa região existem campos elétrico e magnético que são soluções dessas equações; cada

um dos campos é induzido pela variação do outro. Se os campos forem uniformes nessa região, vimos que deveriam ser perpendiculares entre si. Podemos escolher o eixo dos $x$ a apontar na direção e sentido do campo $\vec{B}$, o eixo dos $z$ na direção e sentido do campo $\vec{E}$ e a origem num ponto na região onde os campos existem.

Apliquemos a equação 12.11 num pequeno retângulo $C_1$ perpendicular ao eixo dos $z$, com arestas $\Delta x$ e $\Delta y$ e um vértice na origem, como na figura 12.4. O fluxo elétrico através de $C_1$ é:

$$\Phi_e = E\,\Delta x \Delta y \tag{12.14}$$

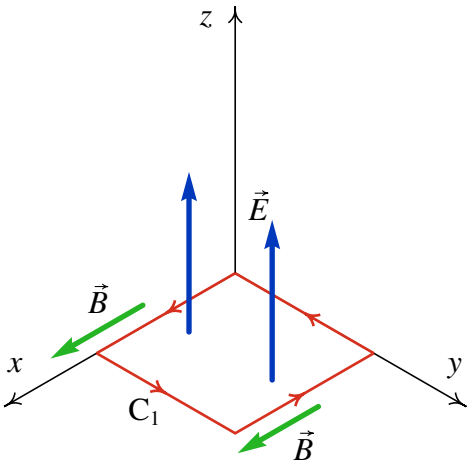



**Figura 12.4.:** Fluxo elétrico e integral de linha do campo magnético num retângulo no plano $xy$.

como o campo magnético é no sentido do eixo dos $x$, o integral de linha do campo magnético no percurso $C_1$ é igual a:

$$\int_{C_1} B_t \,\mathrm{d}s = B(y)\,\Delta x - B(y+\Delta y)\,\Delta x \tag{12.15}$$

substituindo 12.14 e 12.15 na equação 12.11, obtemos:

$$B(y)\,\Delta x - B(y+\Delta y)\,\Delta x = \frac{1}{c^2}\,\Delta x \Delta y \frac{\partial E}{\partial t} \tag{12.16}$$

dividindo os dois lados por $\Delta x \Delta y$ e calculando o limite $\Delta y \to 0$, o lado esquerdo fica igual a menos a derivada parcial de $B$ em função de $y$:

$$-\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} \tag{12.17}$$

A seguir, apliquemos a equação 12.10 num pequeno retângulo $C_2$ perpendicular ao eixo dos $x$, com arestas $\Delta y$ e $\Delta z$ e um vértice na origem (figura ).

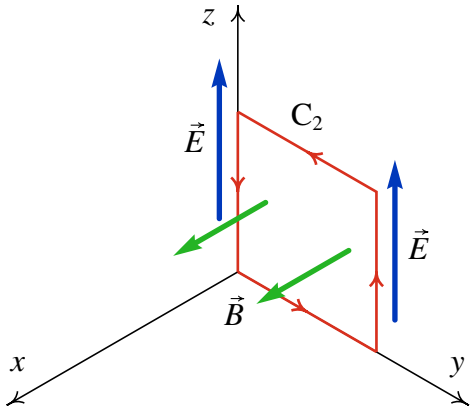



**Figura 12.5.:** Fluxo magnético e integral de linha do campo elétrico num retângulo no plano $yz$.

O fluxo magnético em $C_2$ é $B\Delta y\Delta z$, e o integral de linha do campo elétrico é $E(y+\Delta y)\Delta z - E(y)\Delta z$. Substituindo na equação 12.9 temos:

$$E(y+\Delta y)\Delta z - E(y)\Delta z = -\Delta y\Delta z\frac{\partial B}{\partial t} \tag{12.18}$$

dividindo os dois lados por $\Delta y\Delta z$ e calculando o limite $\Delta y \to 0$, o lado esquerdo fica igual à derivada parcial de $E$ em função de $y$:

$$\frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{12.19}$$

Derivando a equação 12.17 em ordem a $t$ e a equação 12.19 em ordem a $y$, e combinando as duas equações, podemos obter uma equação em que aparece unicamente o campo elétrico:

$$\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}} \tag{12.20}$$

Também podemos obter uma equação apenas para o campo magnético, se derivarmos a equação 12.17 em ordem a $y$ e a equação 12.19 em ordem a $t$, e combinarmos os resultados:

$$\boxed{\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}} \tag{12.21}$$

As equações 12.20 e 12.21 são a mesma equação, designada de **equação de onda**.

## 12.4. Ondas planas polarizadas

As possíveis soluções da equação 12.20 ou 12.21 podem ser obtidas usando um sistema de coordenadas diferentes em que a equação toma uma forma mais simples. O campo $E$ na

equação 12.20 é uma função que depende de $y$ e de $t$. Fazemos uma mudança para duas **variáveis caraterísticas** $r$ e $s$ definidas assim:

$$r = y + ct \qquad s = y - ct \tag{12.22}$$

usando a regra da cadeia, podemos calcular as derivadas de $E$ que aparecem na equação 12.20, em função de $r$ e $s$, e substituindo nessa equação obtemos:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r \partial s} = 0 \tag{12.23}$$

É fácil ver que para verificar essa equação, uma das duas derivadas parciais de $E$, em ordem a $r$ ou em ordem a $s$, deverá ser nula. Isto é, o campo $E$ deverá ser uma função $f(r)$ que depende apenas de $r$, ou uma função $g(s)$ que depende apenas de $s$. Em função das variáveis $y$ e $t$, temos que $E$ pode ter uma das duas formas seguintes:

$$E = f(y + ct) \qquad E = g(y - ct) \tag{12.24}$$

ou qualquer combinação linear das duas soluções acima. Quaisquer funções $f$ ou $g$ conduzem a soluções da equação de onda.

Para diferentes valores de $t$, $f(y+ct)$ tem a mesma forma em função de $y$, mas em relação a $f(y)$, em $t = 0$, encontra-se deslocada para o lado negativo de $y$ uma distância igual a $ct$. Assim, o campo $E = f(y+ct)$ corresponde a uma onda que se propaga no sentido negativo do eixo dos $y$. Uma análise semelhante mostra que $E = g(y-ct)$ corresponde a uma onda que se propaga no sentido positivo do eixo dos $y$.

O campo magnético $B$, que também verifica a equação de onda, também devera ter uma forma semelhante à equação 12.24, mas não pode ser independente da solução obtida para $E$, devido às relações 12.17 e 12.19. Substituindo as soluções 12.24 na equação 12.17, obtemos as respetivas soluções para o campo magnético:

$$B = -\frac{1}{c} f(y + ct) \qquad B = \frac{1}{c} g(y - ct) \tag{12.25}$$

O fator $c$ no denominador indica que o módulo do campo magnético numa onda eletromagnética é muito menor que o módulo do campo elétrico. O sinal negativo na primeira expressão acima, indica que se a onda se deslocar no sentido negativo do eixo dos $y$, o campo magnético terá o sentido oposto ao que foi indicado nas figuras 12.4 e 12.5.

Resumindo, obtivemos duas famílias de soluções. A primeira consiste em ondas eletromagnéticas que se propagam no sentido positivo do eixo dos $y$ com campos elétrico e magnético dados pelas seguintes expressões:

$$\vec{E} = g(y - ct)\,\vec{e}_z \tag{12.26}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} g(y - ct)\,\vec{e}_x \tag{12.27}$$

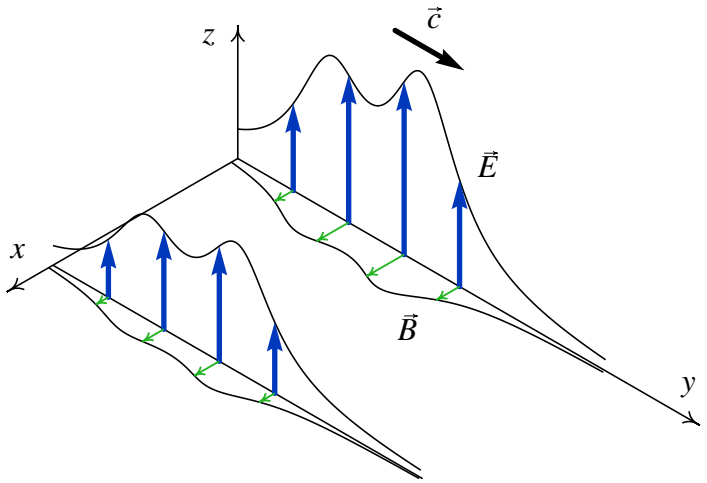



**Figura 12.6.:** Onda eletromagnética plana polarizada, com velocidade no sentido positivo do eixo dos $y$.

em que $g$ pode ser qualquer função de uma variável, $g(s)$. A figura 12.6 mostra uma dessas soluções.

A segunda família de soluções são ondas eletromagnéticas que se propagam no sentido negativo do eixo dos $y$, e com campos que verificam as expressões:

$$\vec{E} = f(y+ct)\,\vec{e}_z \tag{12.28}$$

$$\vec{B} = -\frac{1}{c} f(y+ct)\,\vec{e}_x \tag{12.29}$$

onde $f$ é qualquer função de uma variável, $f(r)$.

O tipo de ondas eletromagnéticas que temos estudado nas duas últimas seções são designadas de **onda plana polarizada**; são caraterizadas por uma direção constante para os campos elétrico e magnético. É importante lembrar que essas direções dos dois campos têm de ser perpendiculares. A direção de propagação é perpendicular às direções dos dois campos, e será sempre no sentido do produto $(\vec{E} \times \vec{B})$; nomeadamente, seguindo a regra da mão direita desde $\vec{E}$ até $\vec{B}$.

A direção de polarização é, por definição, a direção do campo elétrico. O campo magnético da onda é muito mais fraco do que o campo elétrico. O módulo da velocidade de todas as ondas eletromagnéticas no vácuo é sempre igual a $c$.

As ondas planas polarizadas que se propagam na direção do eixo dos $x$ ou dos $z$, terão formas semelhantes às equações 12.26 e 12.27, ou 12.28 e 12.29, substituindo $y$ pela variável correspondente à direção de propagação, e substituindo os versores $\vec{e}_x$ e $\vec{e}_z$ por dois versores perpendiculares entre si e perpendiculares à direção de propagação.

## 12.5. Ondas harmónicas

Uma onda harmónica é uma onda com a forma de uma função seno ou cosseno, como na figura 12.7, no caso de uma onda que se desloca no sentido positivo do eixo dos $x$.

A distância $\lambda$ entre dois pontos consecutivos onde o campo e a sua derivada têm o mesmo valor, é designada por **comprimento de onda** (por exemplo, a distância entre dois máximos ou mínimos consecutivos). O valor máximo do módulo do campo, $E_0$, é a sua **amplitude**.

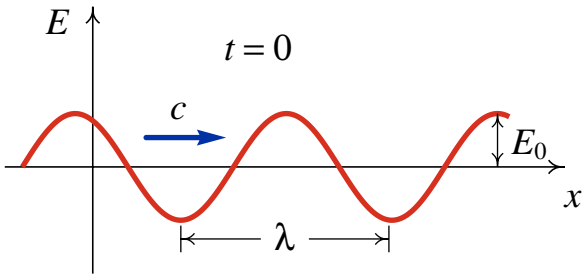



**Figura 12.7.:** Onda harmónica.

O tempo que a onda demora a percorrer um comprimento de onda designa-se por **período**, $P$. O inverso do período é a frequência $f = 1/P$, que indica o número de comprimentos de onda que passam por um ponto, por unidade de tempo. No sistema SI a unidade da frequência é o hertz, representado pelo símbolo Hz, equivalente a $\mathrm{s}^{-1}$.

No caso de uma onda eletromagnética no vácuo, a velocidade de propagação é $c$ que deverá verificar a relação:

$$\boxed{c = \frac{\lambda}{P} = \lambda f} \tag{12.30}$$

A equação da função representada na figura 12.7 é:

$$E(x) = E_0 \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda} + \varphi\right) \tag{12.31}$$

onde a constante $\varphi$ é a **fase inicial**. Essa função representa a forma da onda num instante inicial, que podemos admitir $t = 0$. Para obter a função de onda num instante diferente, teremos que substituir $x$ por $x - ct$, já que a onda se propaga no sentido positivo do eixo dos $x$, com velocidade $c$

$$E(x,t) = E_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) + \varphi\right] \tag{12.32}$$

usando a relação entre a velocidade e o período, podemos escrever

$$\boxed{E(x,t) = E_0 \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{P}\right) + \varphi\right]} \tag{12.33}$$

Se substituirmos $x = 0$, obteremos a equação que descreve o campo elétrico na origem, em função do tempo:

$$E(x) = -E_0 \sin\left(2\pi \frac{t}{P} + \varphi\right) \tag{12.34}$$

assim, o campo na origem é uma função alternada com período $P$ e amplitude $E_0$. O campo em outros pontos tem exatamente a mesma forma alternada, mas com diferentes constantes de fase.

**Exemplo 12.1**
*Uma onda eletromagnética plana propaga-se no sentido negativo do eixo dos z. Num dado instante $t = 0$ o campo elétrico é $\vec{E} = 34\sin(3,25 \times 10^8 z)\vec{e}_x$, onde z é medida em metros, e o campo é medido em N/C. Escreva a função que define o campo de indução magnética em qualquer ponto e em qualquer instante de tempo.*

**Resolução**: a função que define o campo elétrico em $t = 0$ indica que se trata de uma onda harmónica polarizada na direção do versor $\vec{e}_x$. O campo elétrico de uma onda harmónica plana, polarizada segundo $\vec{e}_x$, que se propaga no sentido negativo do eixo $z$, é:

$$\vec{E} = E_0 \sin(kz + \omega t + \delta)\vec{e}_x \tag{12.35}$$

substituindo $t = 0$ e comparando com o campo dado no enunciado, concluímos que:

$$\delta = 0 \qquad k = 3.25 \times 10^8 \qquad E_0 = 34 \tag{12.36}$$

$\omega/k$ deve ser igual à velocidade da luz (admitimos que a onda se propaga no vácuo) que em unidades SI é $3 \times 10^8$. Assim, $\omega = 9.75 \times 10^{16}$ e o campo elétrico em qualquer ponto e em qualquer instante de tempo é:

$$\vec{E} = 34\sin(3.25 \times 10^8 z + 9.75 \times 10^{16} t)\vec{e}_x \tag{12.37}$$

o módulo do campo $\vec{B}$ é igual ao módulo do campo elétrico, dividido pela velocidade da luz. O sentido de $\vec{B}$ deve garantir que o produto vetorial $\vec{E} \times \vec{B}$ seja na direção de propagação $(-\vec{e}_z)$; assim:

$$\vec{B} = -1.13 \times 10^{-7} \sin(3.25 \times 10^8 z + 9.75 \times 10^{16} t)\vec{e}_y \tag{12.38}$$

## 12.6. Espetro eletromagnético

Numa onda harmónica o comprimento de onda, $\lambda$, e a frequência, $f$, não podem variar independentemente, mas estão relacionadas por $\lambda f = c$. Dada a frequência ou o comprimento de onda, é possível classificar a onda dentro do **espetro eletromagnético** e determinar

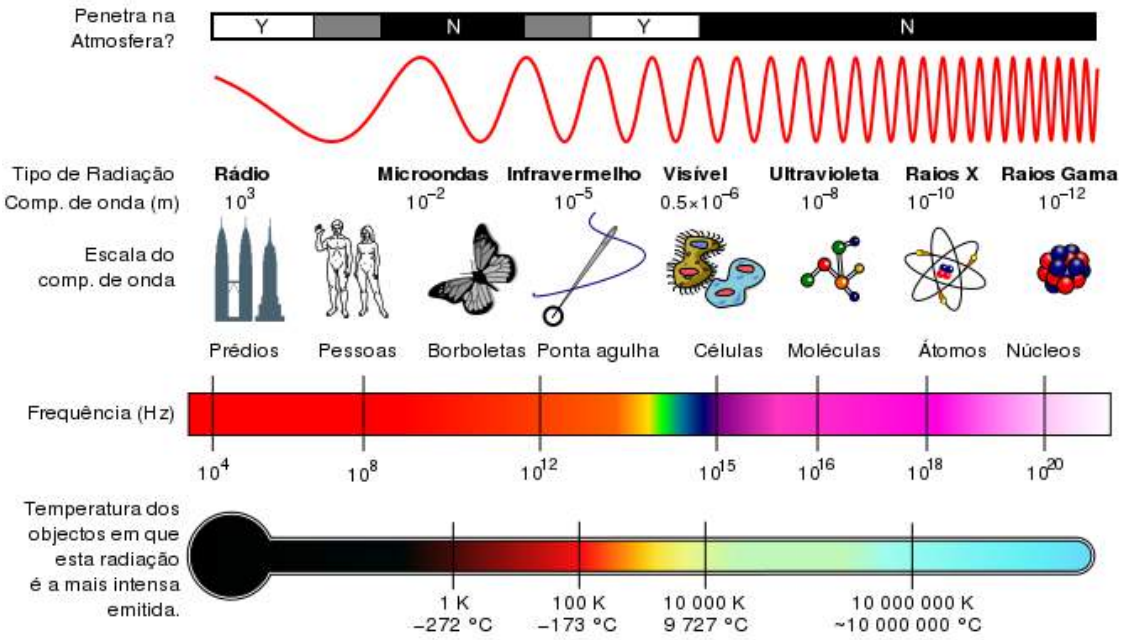



**Figura 12.8.:** Espetro eletromagnético.

as suas propriedades. O valor máximo dos campos determina a intensidade mas não a classificação no espetro.

Em princípio, podem existir ondas eletromagnéticas com qualquer valor de $\lambda$ entre 0 e $\infty$. Alguns exemplos de ondas eletromagnéticas são as ondas de rádio e de comunicações móveis, as ondas usadas num forno de microondas para aquecer os alimentos, e a própria luz. O que distingue uma dessas ondas da outra é a sua frequência, ou de forma equivalente, o seu comprimento de onda. A Figura 12.8 mostra o espetro eletromagnético identificando algumas das ondas comuns.

Usualmente, a radiação eletromagnética produzida por um sistema não tem uma frequência única $f$, como no caso das ondas harmónicas, mas é uma sobreposição de ondas harmónicas com uma distribuição de frequências particular. Por exemplo, a luz solar tem um espetro contínuo de frequências na banda visível, que pode ser separado por meio de um prisma (figura 12.9).

Dentro de um meio diferente do vácuo, a constante de Coulomb $k$ na equação 12.13 deverá ser dividida pela constante dielétrica $K$ do meio. Isso conduz a uma velocidade da luz menor; por outro lado, no vidro a constante dielétrica diminui com o aumento da frequência e o índice de refração é inversamente proporcional à velocidade da luz. Assim o desvio da luz quando passa por um prisma de vidro é maior para a luz com maior frequência (violeta) e menor para as diferentes cores. A luz branca é separada nas diferentes frequências na passagem pelo prisma.

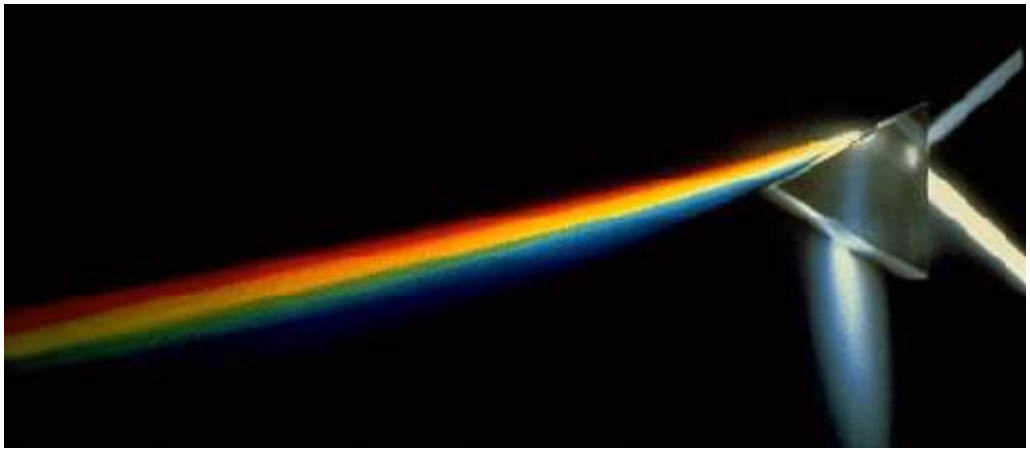


**Figura 12.9.:** Decomposição espetral da luz solar por um prisma.

## 12.7. Teoria ondulatória da luz

Existem vários fenómenos que corroboram que a luz é uma onda; por exemplo, a interferência, difração e polarização. Alguns cristais têm a propriedade de **polarizar** a luz: só deixam passar uma parte da luz incidente. Se colocarmos um segundo filtro polarizador a seguir ao primeiro, rodando um dos filtros existe uma posição em que não passa nenhuma luz.

Se observamos com um filtro polarizador a luz refletida numa superfície, rodando o filtro existe uma posição em que não se consegue ver a luz refletida

A luz normalmente é uma sobreposição de ondas com campos oscilando em diferentes direções. Num filtro polarizador as moléculas estão orientadas numa direção determinada, o eixo do polarizador, e só deixam passar a luz polarizada nessa direção (direção do campo elétrico).

A luz refletida numa superfície é polarizada na direção tangente à superfície. Um filtro polarizador com o seu eixo perpendicular a essa superfície não deixa passar nenhuma luz. Uma forma de saber se as lentes nuns óculos de sol estão polarizadas ou não, consiste em olhar para um reflexo e rodar a lente; se estiver polarizada, deverá existir um ângulo em que os reflexos desaparecem.

Os cristais líquidos têm a propriedade de orientar as suas moléculas numa direção, quando são atravessados pela corrente elétrica, tornando-se polarizadores. Esse é o princípio usado nos ecrãs LCD (*Liquid Crystal Display*) de calculadoras, telemóveis e televisores. A luz que sai do ecrã é polarizada com um filtro polarizador e a seguir, passa por pontos onde existem vários cristais líquidos, com correntes elétricas consegue-se controlar os pontos onde os cristais serão polarizados perpendicularmente ao primeiro polarizador, sem deixar passa luz.

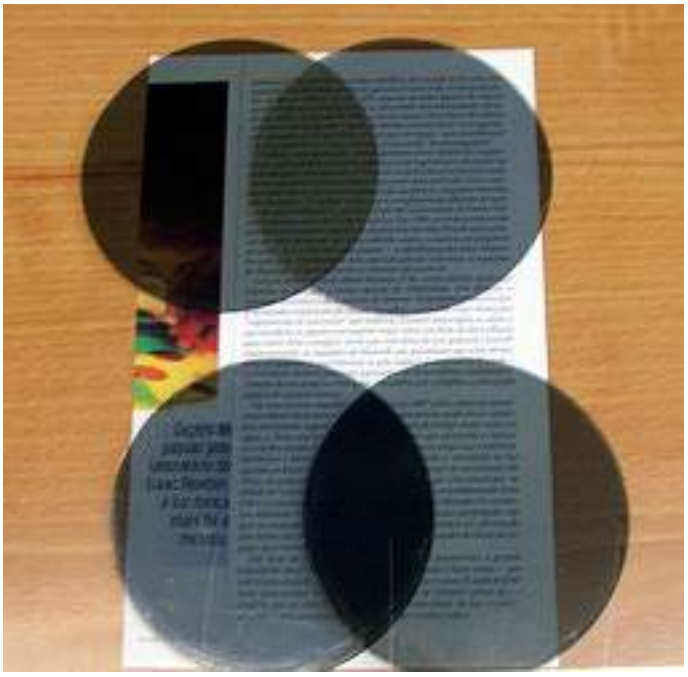


**Figura 12.10.:** Dois filtros polarizadores com os eixos paralelos (acima) e com os eixos perpendiculares (abaixo).

## 12.8. Teoria corpuscular da luz

Antes da descoberta das ondas eletromagnéticas por parte de Maxwell, existia um debate na comunidade científica, que se estendia por anos entre os que defendiam a teoria corpuscular proposta por Newton no século XVII, e os que defendiam a teoria ondulatória proposta por Huygens, um contemporâneo de Newton.

Segundo a teoria corpuscular, a luz é formada por pequenas partículas que saem da fonte e se deslocam em linha reta. Assim explica-se facilmente a existência de raios de luz, que se deslocam em linha reta. A figura 12.11 mostra um raio de luz que entra na esquerda e é refletido e refratado na superfície de uma placa de acrílico.

O ângulo entre o raio refletido e a perpendicular à superfície é igual ao ângulo entre essa perpendicular e o raio incidente. Isso é o mesmo que acontece quando são disparadas partículas contra uma superfície rígida. No raio refratado, a luz passa de um meio para outro diferente; nesse caso os ângulos que os raios incidente e refratado fazem com a perpendicular à fronteira entre os meios já não são iguais (figura 12.12). A relação entre esses ângulos depende dos meios. A teoria corpuscular da luz consegue explicar o fenómeno da refração admitindo que a velocidade da luz nos dois meios é diferente.

A teoria ondulatória da luz também consegue explicar a criação de um feixe de luz, embora o argumento não seja tão intuitivo como no caso da teoria corpuscular. As ondas também verificam as leis da reflexão e da refração.

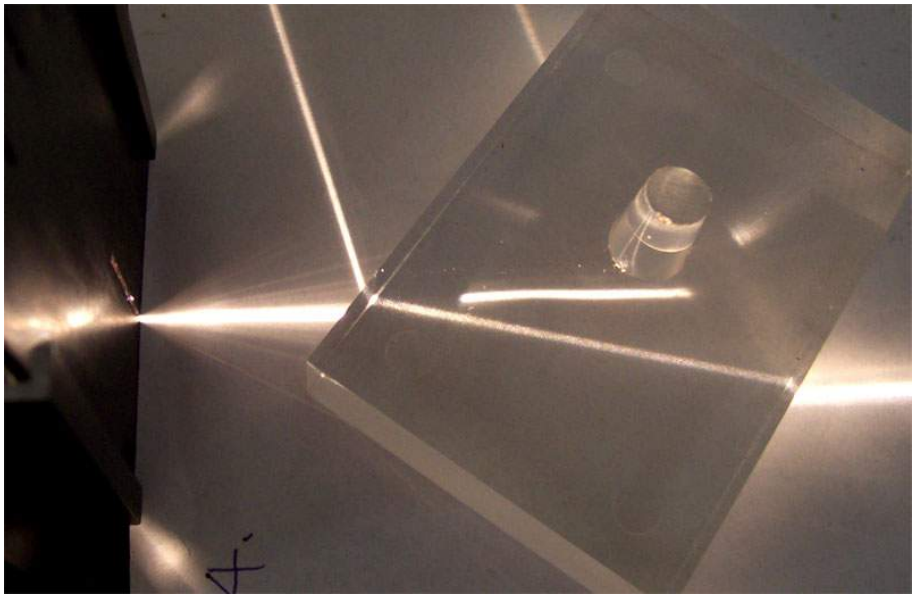


**Figura 12.11.:** Raios refletido e refratado numa superfície.

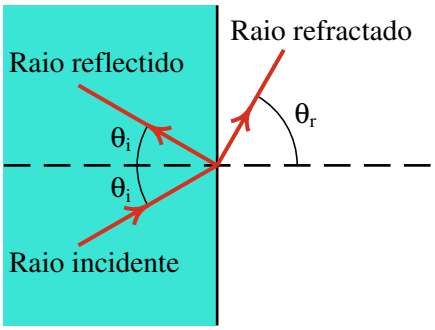



**Figura 12.12.:** Ângulos de incidência e de refração de um raio de luz que é refletido e refratado na interface entre dois meios.

No caso da refração há uma diferença importante entre as previsões das duas teorias. Quando a luz passa do ar para a água, vidro ou acrílico, o ráio refratado aproxima-se da normal à superfície. Segundo a teoria corpuscular, isso implica uma velocidade da luz maior no vidro do que no ar. Na teoria ondulatória, esse fato implica uma velocidade da luz menor no vidro do que no ar.

Na época de Newton não era fácil medir com precisão a diferença da velocidade da luz no vidro e no ar, e o prestígio de Newton fez com que fosse dada maior credibilidade à teoria corpuscular do que à teoria ondulatória. Hoje em dia sabemos que a velocidade da luz no vidro é de fato menor do que no ar, como prevê a teoria ondulatória. A teoria eletromagnética de Maxwell acabou com o debate, ficando estabelecido, sem lugar a dúvida, que a luz é uma onda eletromagnética.

No entanto, no fim do século XIX foi descoberto o **efeito fotoelétrico**, que não pode ser

explicado com a teoria ondulatória. Einstein explicou esse efeito em 1905, através da teoria dos fotões: a luz é formada por partículas designadas de **fotões**. Cada fotão transporta uma energia igual a:

$$\boxed{U = hf} \tag{12.39}$$

em que $f$ é a frequência da onda associada ao fotão e $h$ é a constante de Planck:

$$h = 6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s} \tag{12.40}$$

Assim, a energia de uma onda eletromagnética não pode ter qualquer valor, mas apenas múltiplos inteiros do **quantum** de energia $hf$, já que o número de fotões tem que ser um número inteiro.

Numa onda clássica, a energia pode ser absorvida de forma contínua; nomeadamente, a onda pode transferir qualquer parte da sua energia a um sistema. No caso de uma onda quântica, como as ondas eletromagnéticas, a transferência de energia a um sistema só pode ser feita por absorção de alguns fotões; a energia transferida é a soma das energias desses fotões e, portanto, deverá ser um múltiplo inteiro do quantum de energia $hf$.

Hoje em dia acreditamos que os fotões, e qualquer outra partícula conhecida tem também uma natureza ondulatória. A energia de um fotão ou de outra partícula é produzida ou absorvida em quantidades discretas, mas é transportada de um ponto para outro na forma de uma onda. Todas as formas de matéria e energia apresentam propriedades de onda e de partícula. Esse fenómeno, designado de **dualidade onda-partícula**, é a base da física quântica.

## 12.9. Díodos emissores de luz (LED)

Os **díodos emissores de luz** (LED) são díodos que produzem luz quando são polarizados em modo direto, passando corrente através deles. A imagem de abertura deste capítulo mostra vários tipos de LED.

Para distinguir o cátodo do ânodo, o primeiro costuma ser um fio mais curto e estar perto de uma zona onde a cobertura plástica é plana. A figura 12.13 mostra um LED vermelho e o diagrama de circuito usado para representá-lo:

**Figura 12.13.:** Díodo emissor de luz (LED) e diagrama de circuito.

A energia eletrostática que os portadores de carga perdem na passagem da interface entre os dois semicondutores é transformada em luz. Essa energia corresponde à diferença entre dois níveis de energia no semicondutor, e tem um valor específico determinado, próprio dos semicondutores usados no LED.

Como vimos, a energia que transporta cada fotão é dada pela equação 12.39. Consequentemente, os fotões emitidos no LED terão todos aproximadamente a mesma frequência, igual à diferença entre os níveis de energia dos eletrões nos dois semicondutores, dividida pela constante de Planck; isso implica que o LED emita luz monocromática. A cor da luz emitida pelo LED dependerá do material semicondutor usado. A tabela 12.1 mostra as cores próprias de alguns semicondutores.

**Tabela 12.1.:** Cores associadas a alguns semicondutores usados atualmente.

| **Semicondutor** | **Cor da luz** | **Comprimento de onda** |
|---|---|---|
| Arsenieto de gálio e alumínio | Infravermelha | 880 nm |
| Arsenieto de gálio e alumínio | Vermelha | 645 nm |
| Fosfato de alumínio, índio e gálio | Amarela | 595 nm |
| Fosfato de gálio | Verde | 565 nm |
| Nitreto de gálio | Azul | 430 nm |

Quando circula corrente pelo LED, cada carga de condução que atravessa a interface no LED perde uma energia correspondente à energia de um fotão. Assim, a curva caraterística do LED será semelhante à caraterística de um receptor, com ordenada na origem positiva, e declive constante positivo (figura 12.14).

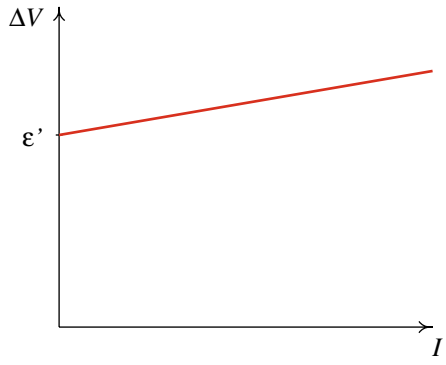



**Figura 12.14.:** Caraterística tensão-corrente de um LED.

A força contra-eletromotriz do LED, $\varepsilon'$ (ordenada na origem da caraterística tensão-corrente), é a energia, por unidade de carga, que as cargas de condução perdem na passagem pelo LED e que é convertida em luz.

Assim, a energia que cada eletrão perde quando atravessa a interface entre os dois semicondutores é igual a: $e\,\varepsilon'$. Essa energia é a energia do fotão que será emitido:

$$e\,\varepsilon' = h\,f = \frac{h\,c}{\lambda} \tag{12.41}$$

onde $c$ é a velocidade da luz e $\lambda$ o comprimento de onda da luz emitida.

# Atividade prática

Resolvendo para $h$ na equação 12.41 temos:

$$h = \frac{e\,\varepsilon'\,\lambda}{c} \tag{12.42}$$

Assim, poderemos medir experimentalmente o valor da constante de Planck, a partir da caraterística tensão-corrente de um LED:

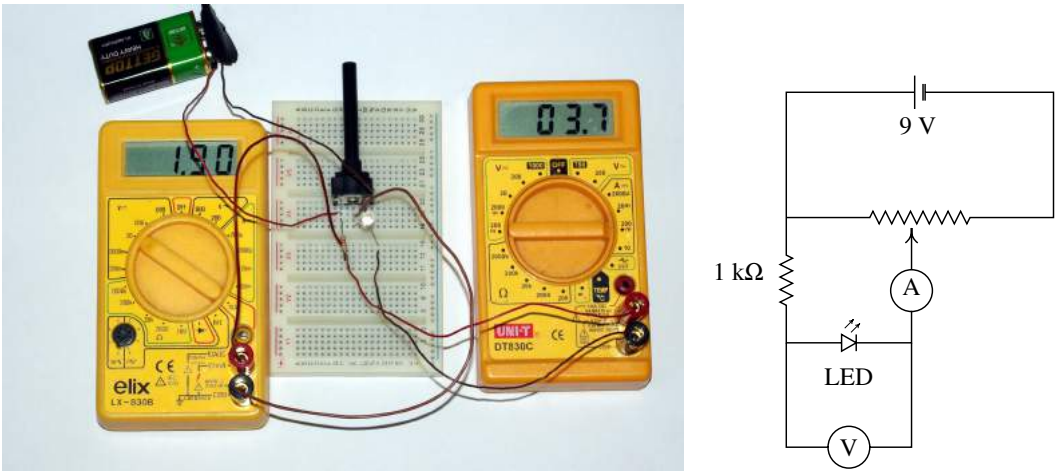



**Figura 12.15.:** Circuito usado para determinar a caraterística de um LED.

Para determinar a curva caraterística do LED, monte o circuito que mostra a figura 12.15. A resistência de aproximadamente 1 kΩ é usada para evitar que a corrente no LED ultrapasse o valor máximo recomendado, que 30 mA. Se o LED estiver ligado no sentido correto, deverá produzir luz.

Meça no voltímetro V e no amperímetro A os valores da diferença de potencial e da corrente no LED, para diferentes valores da tensão obtidos rodando o eixo do potenciómetro. Com os valores medidos, desenhe a curva caraterística do LED. Determine a ordenada na origem da reta que melhor ajuste a caraterística. A partir desse valor e usando o valor do comprimento de onda dado na tabela 12.1, determine o valor da constante de Planck. Compare o seu resultado com o valor teórico.

# Perguntas

**1.** Quanto menor for o período de uma onda eletromagnética:

A. Menor o seu comprimento de onda.

B. Maior a sua velocidade.

C. Menor a sua amplitude.

D. Maior a sua amplitude.

E. Nenhuma das outras respostas.

**2.** Uma onda eletromagnética harmónica tem frequência de 2.0 GHz. Calcule o comprimento de onda.

A. 30 m C. 6.67 m E. 3.0 m

B. 15 cm D. 150 m

**3.** Qual dos seguintes fenómenos é uma prova a favor da teoria ondulatória da luz, contra a teoria corpuscular?

A. Refração. C. Reflexão.

B. Efeito fotoelétrico. D. Polarização.

E. Arco iris.

**4.** Que tipo de radiação é uma onda eletromagnética com comprimento de onda de 1 cm?

A. Luz visível. D. Microonda.

B. Raios gama. E. Raios X.

C. Onda de rádio.

**5.** Uma onda eletromagnética propaga-se no sentido positivo do eixo dos $z$. Num certo ponto e num certo instante, o campo elétrico da onda aponta na direção e sentido positivo do eixo dos $y$. Em que direção e sentido apontará o campo magnético nesse ponto e no mesmo instante?

A. No sentido positivo do eixo dos $y$.

B. No sentido negativo do eixo dos $y$.

C. No sentido positivo do eixo dos $x$.

D. No sentido negativo do eixo dos $x$.

E. No sentido negativo do eixo dos $z$.

# Problemas

**1.** Uma onda eletromagnética propaga-se no vácuo, no sentido positivo do eixo dos $x$. No instante $t = 0$, o campo elétrico em função de $x$ é dado pela função

$$E = \frac{50}{x^2 + 2} \qquad \text{(unidades SI)}$$

Calcule o campo no ponto $x = 50$ m, no instante $t = 0.2\ \mu$s.

**2.** Em 1886 Heinrich Hertz conseguiu produzir e detetar ondas de rádio, pela primeira vez, com o aparelho da figura.

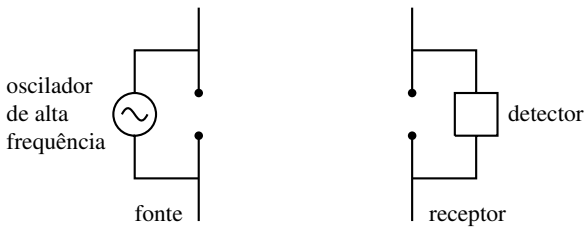



**Figura 12.16.:** Problema 2.

Hertz observou que não se detetava nenhuma onda quando se colocava uma placa metálica entre a fonte e o receptor; explique porque. Também descobriu que não era detetada nenhuma onda se o receptor fosse rodado 90° em relação à linha que une a fonte e o receptor; explique porque.

**3.** Uma onda eletromagnética plana propaga-se no sentido negativo do eixo dos $y$. Num dado instante $t = 0$ o valor do campo elétrico é $E = E_0 \sin(2.25 \times 10^7 y)$, onde $y$ é medido em metros. (*a*) Calcule o comprimento de onda. (*b*) Calcule a frequência.

**4.** Considere uma onda eletromagnética plana, polarizada na direção do eixo dos $x$, que se propaga na direção positiva do eixo dos $y$, com frequência de 12 MHz e amplitude $E_0 = 0.008$ V/m. (*a*) calcule o período e o comprimento de onda (*b*) escreva uma expressão para $\vec{E}(t)$ e para $\vec{B}(t)$.

**5.** Uma onda eletromagnética plana propaga-se no sentido negativo do eixo dos $x$. Num dado instante $t = 0$ o campo elétrico é $\vec{E} = E_0 \sin(2.25 \times 10^7 x)\vec{e}_z$, onde $x$ é medido em metros. (*a*) Calcule o comprimento de onda. (*b*) Calcule a frequência. (*c*) Diga qual é a direção de polarização da onda.

**6.** Uma lâmina metálica muito extensa encontra-se sobre o plano $xy$. A lâmina é ligada a uma fonte variável que produz um campo elétrico uniforme no plano $xy$, mas variável no tempo segundo a equação: $\vec{E} = E_0 \sin(\omega t)\vec{e}_x$, onde $E_0$ e $\omega$ são constantes. O campo elétrico na lâmina origina uma onda eletromagnética plana. Escreva as funções que representam os campos elétrico e magnético dessa onda, em função do tempo e da posição.

**7.** Usando a equação 12.17, demonstre que se o campo elétrico for $E = f(y+ct)$, o campo magnético deverá ser $B = -f(y+ct)/c$, e se o campo elétrico for $E = g(y-ct)$, o campo magnético será $B = g(y-ct)/c$.

**8.** A figura representa o campo eletromagnético de uma onda plana de 420 MHz, no instante $t = 0$. As linhas de campo verticais representam o campo elétrico e as linhas perpendiculares à folha de papel são as linhas do campo magnético. Calcule a distância $d$ e escreva o vetor do campo magnético em função do tempo e da coordenada $x$.

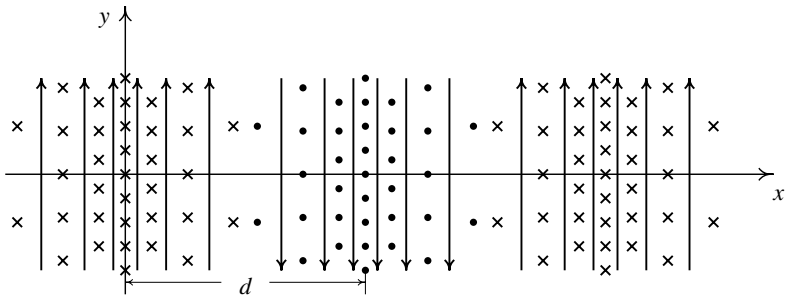



**Figura 12.17.:** Problema 8.

**9.** Calcule a energia, em joules e em eletrão-volts, dos fotões na luz laranja, com comprimento de onda de 616 nm.

**10.** Determine o comprimento de onda de um fotão com energia igual a 2.00 eV. A que tipo de radiação corresponde esse fotão?

# A. Constantes e dados numéricos

**Tabela A.1.:** Prefixos SI

| Fator | Prefixo | Símbolo | Fator | Prefixo | Símbolo |
|---|---|---|---|---|---|
| $10^{18}$ | exa | E | $10^{-1}$ | deci | d |
| $10^{15}$ | peta | P | $10^{-2}$ | centi | c |
| $10^{12}$ | tera | T | $10^{-3}$ | mili | m |
| $10^{9}$ | giga | G | $10^{-6}$ | micro | $\mu$ |
| $10^{6}$ | mega | M | $10^{-9}$ | nano | n |
| $10^{3}$ | quilo | k | $10^{-12}$ | pico | p |
| $10^{2}$ | heto | h | $10^{-15}$ | femto | f |
| $10^{1}$ | deca | da | $10^{-18}$ | ato | a |

**Tabela A.2.:** Valores de algumas constantes fundamentais

| Constante | Símbolo | Valor | Unidades |
|---|---|---|---|
| Constante de Coulomb | $k$ | $9 \times 10^{9}$ | m/F |
| Constante magnetostática | $k_m$ | $10^{-7}$ | $N/A^2$ |
| Velocidade da luz no vazio | $c$ | $2.998 \times 10^{8}$ | m/s |
| Constante de Planck | $h$ | $6.626 \times 10^{-34}$ | J·s |
| Carga elementar | $e$ | $1.602 \times 10^{-19}$ | C |
| Massa do eletrão | $m_{\mathrm{e}}$ | $9.109 \times 10^{-31}$ | kg |
| Massa do protão | $m_{\mathrm{p}}$ | $1.673 \times 10^{-27}$ | kg |

**Tabela A.3.:** Constante dielétrica e rigidez dielétrica de várias substâncias.

| **Substância** | **Constante dielétrica**, $K$ | **Rigidez dielétrica** $E_{\text{máx}}/\text{kV}\cdot\text{mm}^{-1}$ |
|---|---|---|
| Água (20° C) | 80 | — |
| Ar | 1.000 59 | 3 |
| Baquelite | 4.9 | 24 |
| Papel | 3.7 | 16 |
| Acrílico | 3.4 | 40 |
| Vidro pirex | 5.6 | 14 |
| Porcelana | 7 | 5.7 |
| Poliestireno | 2.55 | 24 |
| Parafina | 2.1-2.5 | 10 |

**Tabela A.4.:** Resistividade e coeficiente de temperatura de alguns metais, a 20°C.

| **Metal** | $\rho(20°\text{C})/\text{n}\Omega\cdot\text{m}$ | $\alpha(20°\text{C})/°\text{C}^{-1}$ |
|---|---|---|
| Alumínio | 28 | 0.0039 |
| Cobre | 17 | 0.0039 |
| Chumbo | 220 | 0.0043 |
| Ferro | 100 | 0.0050 |
| Mercúrio | 960 | 0.0009 |
| Níquel-crómio | 1000 | 0.0004 |
| Prata | 16 | 0.0038 |
| Tungsténio | 55 | 0.0045 |

**Tabela A.5.:** Cores associadas a alguns semicondutores usados nos LED.

| **Semicondutor** | **Cor da luz** | **Comprimento de onda** |
|---|---|---|
| Arsenieto de gálio e alumínio | Infravermelha | 880 nm |
| Arsenieto de gálio e alumínio | Vermelha | 645 nm |
| Fosfato de alumínio, índio e gálio | Amarela | 595 nm |
| Fosfato de gálio | Verde | 565 nm |
| Nitreto de gálio | Azul | 430 nm |

# B. Formulário

A maneira de sumário, são apresentadas aqui as equações mais importantes. A agrupação por seções foi feita seguindo cinco grandes temas que não seguem necessariamente a mesma sequência dos capítulos do livro.

## 1. Circuitos de corrente contínua

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \qquad Q = \int_{t_1}^{t_2} I\,\mathrm{d}t \qquad U = qV \qquad \Delta V = RI$$

$$R = \rho\frac{L}{A} \qquad \alpha = \frac{(\rho-\rho_{20})/\rho_{20}}{T-20} \qquad \Delta V_{\text{gerador}} = \varepsilon - rI \qquad \Delta V_{\text{receptor}} = \varepsilon + rI$$

$$P = I\Delta V \qquad C = \frac{Q}{\Delta V} \qquad C_{\text{plano}} = \frac{KA}{4\pi kd} \qquad C = KC_0$$

$$R_{\text{s}} = R_1 + R_2 \qquad \frac{1}{R_{\text{p}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \frac{1}{C_{\text{s}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad C_{\text{p}} = C_1 + C_2$$

$$U_{\text{cond}} = \frac{Q\Delta V}{2} \qquad Q = Q_0\,\mathrm{e}^{-t/(RC)} \qquad Q = \varepsilon C\left[1-\mathrm{e}^{-t/(RC)}\right]$$

## 2. Campo e potencial eletrostático

$$F = \frac{k\,|q_1||q_2|}{Kr^2} \qquad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \qquad \vec{E}_{\text{pontual}} = \frac{kQ}{r^2}\vec{e}_r \qquad \Phi_{\text{e}} = AE\cos\theta$$

$$\Phi_{\text{fechada}} = 4\pi k q_{\text{int}} \qquad E_{\text{plano}} = 2\pi k\sigma \qquad E_{\text{fio}} = \frac{2k\lambda}{R} \qquad \frac{1}{2}mv^2 + qV = \text{constante}$$

$$\mathrm{d}V = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \qquad E_s = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s} \qquad V = -\int_{\infty}^{\text{P}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \qquad V = \sum_{i=1}^{n}\frac{kq_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

# 3. Campo magnético

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} \qquad \vec{m} = AI\,\vec{e}_{\mathrm{n}} \qquad \vec{F}_{\text{fio reto}} = L\,\vec{I} \times \vec{B} \qquad \vec{F}_{\text{pontual}} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

$$r = \frac{mv}{qB} \qquad \omega = \frac{qB}{m} \qquad B_{\text{fio reto}} = \frac{2k_{\mathrm{m}}I}{r} \qquad F = \frac{2k_{\mathrm{m}}LI_1I_2}{r}$$

$$\Phi_{\mathrm{m}} = AB\cos\theta \qquad \varepsilon_{\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{E}_{\mathrm{i}} = \vec{v} \times \vec{B} \qquad \varepsilon_i = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$\oint_{\mathrm{C}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} \qquad \oint_{\mathrm{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 4\pi k_m I_{\mathrm{int}} + \frac{k_{\mathrm{m}}}{k}\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}$$

# 4. Circuitos de corrente alternada

$$\Delta V = V_0\sin(\omega t) \qquad \omega = 2\pi f \qquad V_{\mathrm{ef}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \qquad I_{\mathrm{ef}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$\tilde{V} = Z\tilde{I} \qquad Z_R = R \qquad Z_C = \frac{1}{\mathrm{i}\,\omega C} = -\mathrm{i}X_C \qquad Z_L = \mathrm{i}\,\omega L = \mathrm{i}X_L$$

$$V_0 = |Z|\,I_0 \qquad Z_{\text{série}} = Z_1 + Z_2 \qquad Z_{\text{paralelo}} = \frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2} \qquad \langle P\rangle = I_{\mathrm{ef}}V_{\mathrm{ef}}\cos\varphi$$

# 5. Ondas eletromagnéticas e luz

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \qquad \frac{k_{\mathrm{m}}}{k} = \frac{1}{c^2} \qquad E = f(x \pm ct) \qquad B = \frac{1}{c}f(x \pm ct)$$

Onda harmónica: $E(x,t) = E_0\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{P}\right) + \varphi\right]$ $\qquad c = \frac{\lambda}{P} = \lambda f$

Energia de um fotão: $U = hf$

# C. Créditos fotográficos

A maior parte das fotografias e figuras neste manual são originais e são colocadas aqui no domínio público. As restantes figuras têm todas licenças livres. A principal fonte dessas figuras foi o arquivo da Wikimedia Commons (http://commons.wikimedia.org). A lista de autores e licenças é a seguinte:

- Fotografia do circuito na capa: autor: Autor: chr (http://www.instructables.com). Licença: Creative Commons.
- Fig. 1.1 (pág. 2. Autor: DJIndica (Wikimedia Commons). Domínio público.
- Fig. 1.2 (pág. 3). Autor: Yzmo (Wikimedia Commons). Licença: GFDL.
- Pág. 15. Autor: GuidoB (Wikimedia Commons), GFDL.
- Fig. 2.2 (pág. 20). Gravura antiga. Domínio público.
- Fig. 2.3 (pág. 21). Gravura antiga. Domínio público.
- Fig. 2.7 (pág. 25. Autor: Alby (Wikimedia Commons). Domínio público.
- Pág. 33. Autor: Victor Ward. Domínio público.
- Fig. 3.4 (pág. 36. Autor: Tumi-1983 (Wikimedia Commons). Domínio público.
- Fig. 3.9 (pág. 38). Autor: Bill Bertram. Licença: GFDL.
- Fig. 3.13 (pág. 42). Peter Nussbaumer. Licença: GFDL.
- Fig. 3.14 (pág. 43). Autor: Yosemite (Wikimedia Commons). Licença: GFDL.
- Fig. 4.3 (pág. 55). Autor: Bert Hickman. Licença: Creative Commons Attribution.
- Fig. 4.4 (pág. 56). Autor: Mircea Madau. Domínio público.
- Fig. 4.6 (pág. 59). Maxwell Technologies. Licença: GFDL.
- Fig. 4.7 (pág. 60). Autor: Gil Monteiro. Reproduzida com autorização do autor.
- Pág. 67. Autor: chr (http://www.instructables.com). Licença: Creative Commons.
- Pág. 97. Author: Arian Kriesch Akriesch. Licença: Creative Commons.
- Pág. 111. H.J. Sommer III. Licença: Creative Commons.
- Fig. 8.1 (pág. 112). Autor: TStein (Wikimedia Commons). Licença: Creative Commons.
- Fig. 8.4 (pág. 116). Autor: Wapcaplet (Wikimedia Commons). Licença: GFDL.
- Fig. 8.11 (pág. 122). Autor: Stannered (Wikimedia Commons). Licença: GFDL.

- Pág. 129. Autor: Willtron (Wikimedia Commons). Licença: Creative Commons.
- Pág. 145. Autor: Nikola Tesla. Domínio público.
- Fig. 10.10 (pág. 153). Autor: Anton (Wikimedia Commons). Licença: GFDL.
- Pág. 161. Baseada em fotos do utilizador Plasmana de `http://www.instructables.com`. Licença: Creative Commons.
- Pág. 177. Autor: Afrank99 (Wikimedia Commons). Licença: Creative Commons.
- Fig. 12.8 (pág. 188). Autor: Inductiveload (Wikimedia Commons). Licença: GFDL.
- Fig. 12.9 (pág. 189). Autor: NASA. Domínio público.
- Fig. 12.11 (pág. 191). Autor: fir0002 (Wikimedia Commons). Licença: GFDL.

# Soluções das perguntas e problemas

## 1. Carga e força elétrica

### Perguntas

**1.** A. Atrativa

**2.** E. Ter alguns eletrões livres.

**3.** E. $3.4 \times 10^{-2}$ N.

**4.** D. Cada uma delas fica com $Q/3$.

**5.** C. Negativa.

### Problemas

**1.** Ordem de grandeza de $10^{-10}$ C.

**2.** (*a*) 6 $\mu$C, e 4 $\mu$C (*b*) 12 $\mu$C, e $-2\mu$C

**3.** $5.1 \times 10^{11}$ N/C.

**4.** A força eletrostática é $2.7 \times 10^{12}$ vezes maior que o peso.

**5.** A tensão no fio do lado esquerdo é 285 $\mu$N e no fio do lado direito 560 $\mu$N.

**6.** (*a*) $1.01 \times 10^{-3}$ N/C (*b*) $2.67 \times 10^{3}$ m/s.

**7.** A terceira carga é $-0.343\,q$, e encontra-se entre as outras duas cargas, a uma distância $0.414\,d$ da carga $q$

**8.** Com origem na carga $q_1 = -5$ nC, eixo dos $x$ na direção de $q_2 = 9$ nC, e eixo dos $y$ na direção de $q_3 = 7$ nC, as forças são:

$\vec{F}_1 = (1.35\,\vec{e}_x + 3.15\,\vec{e}_y)$ mN

$\vec{F}_2 = (-0.12\,\vec{e}_x - 0.71\,\vec{e}_y)$ mN

$\vec{F}_3 = (-1.23\,\vec{e}_x - 2.44\,\vec{e}_y)$ mN

O campo em P é: $(-0.545\,\vec{e}_x - 0.135\,\vec{e}_y)$ N/$\mu$C

# 2. Corrente e força eletromotriz

## Perguntas

**1.** D. É independente do tamanho dos elétrodos.

**2.** D. 3.3 cêntimos.

**3.** A. 48.6 kC

**4.** D. 69 %

**5.** C. 0.88 A

## Problemas

**1.** 8.80 Mm/s.

**2.** (*a*) $E = 6.4 \times 10^{-16}$ J, $v = 37.5$ Mm/s (*b*) 5 kV/m

**3.** (*a*) $5.4 \times 10^5$ C (*b*) 72%

**4.** 200 horas

**5.** 6.9 kW

**6.** 9.936 kJ

**7.** (*a*) 1200 C (*b*) 120 A

**8.** (*a*) 0.8 mA. (*b*) 2.4 mJ. (*c*) 1.2 mW. (*c*) 2.999 Ah.

**9.** (*a*) 10 A. (*b*) 4.4 cêntimos.

# 3. Resistência e Lei de Ohm

## Perguntas

**1.** B. 0.0058

**2.** C. $R/2$

**3.** E. 1.44

**4.** C. 220 V, 150 W

**5.** A. 0.48 kW

## Problemas

**1.** 24.8°C

**2.** 1.2 Ω

**3.** (*a*) 1.5 Ω (*b*) 9 V

**4.** $\varepsilon/r$.

**5.** Quando a lâmpada está acesa, a temperatura do filamento de tungstênio é muito mais elevada do que a temperatura ambiente e, portanto, a resistência também é muito mais elevada. A temperatura do filamento é da ordem de 2812°C

**6.** (*a*) $R = r$ (*b*) $\varepsilon^2/(4r)$ (*c*) 0.05 Ω (*d*) uma resistência interna menor, que implica uma menor diminuição da diferença de potencial quando a corrente aumentar.

**7.** A fem é de 20 V. Nas resistências de 3 kΩ e 6 kΩ a diferença de potencial é de 4 V, e na resistência de 8 kΩ é 16 V.

**8.** $R_1 = 41.45\,\Omega$, $R_2 = 53.95\,\Omega$, $R_3 = 4.75\,\Omega$

**9.** (*a*) 3.12 V (*b*) 18.7 W

**10.** 6.6 m

**11.** 3.0°C

**12.** Na resistência de 20 Ω, 55.1 mW. Na resistência de 100 Ω, 99.2 mW. Na resistência de 150 Ω, 66.2 mW. Na resistência de 60 Ω, 54.0 mW. Na resistência de 80 Ω, 40.5 mW. A fem fornece 315 mW.

# 4. Condensadores

## Perguntas

**1.** D. 27

**2.** C. 0.18 nF

**3.** A. 7.0 pF

**4.** E. É independente da carga acumulada no condutor.

**5.** C. A carga armazenada será maior no condensador com maior capacidade.

## Problemas

**1.** (*a*) 400 V. (*b*) 179 V. (*c*) O condensador de maior capacidade ocupa um volume maior.

**2.** (*a*) $C = \dfrac{Kab}{k(b-a)}$ (*b*) 0.395 nF. (*c*) Aumenta num fator de 88.87

**3.** (*a*) $q_1 = 3.38\ \mu$C, $q_2 = 12.1\ \mu$C e $q_3 = 15.5\ \mu$C. (*b*) 69.6 μJ

**4.** 5.55 pF

**5.** (*a*) $3.12 \times 10^{-7}$ J. (*b*) Sem dielétrico, 15 kV; com dielétrico 200 kV

**6.** (*a*) 8 mC (*b*) $V = 1600/3$ V, $Q_1 = 16/3$ mC, $Q_2 = 32/3$ mC

**7.** (*a*) 12 pF. (*b*) 21.6 pF.

**8.** 3.15 pC.

# 5. Circuitos de corrente contínua

## Perguntas

**1.** C. Conservação da carga.

**2.** B. 0.135

**3.** E. A corrente no circuito diminui.

**4.** C. $I_2 + I_3 = I_1$

**5.** C. $V_a > V_c + 0.3$ V

## Problemas

**1.** As duas fontes fornecem potência; a fem de 6 V fornece 5.24 mW, e a fem de 5 V fornece 3.93 mW.

**2.** 1.72 mA.

**3.** (*a*) 60 $\mu$A. (*b*) 4 V no condensador e 2 V na resistência. (*c*) 0.2 mC.

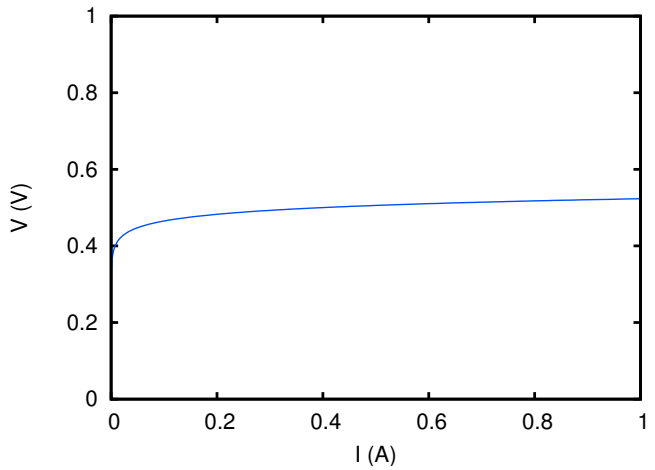
**4.** 1 kΩ.

**5.** 32 s.

**6.** A corrente nas resistências de 20 Ω e 1.4 kΩ é 5.90 mA, e a corrente na resistência de 2.7 kΩ é nula.

**7.** 400 kΩ

**8.** (*a*) Para $I = 0.2$ mA, 0.64 V. Para $I = 1$ A, 0.68 V. A equação da reta é: $\Delta V = 6.30 + 0.051\,I$. (*b*) Gráfico:




**9.** Se $\Delta V < 5.7$ V, $V_A - V_B = \Delta V$. Se $\Delta V \geq 5.7$, $V_A - V_B = 5.7$. É designado de limitador, porque a tensão de saída, entre A e B, não poderá ultrapassar 5.7 V.

**10.** Na resistência de 20 Ω, 45 $\mu$W. Na resistência de 100 Ω, 62.0 mW. Na resistência de 150 Ω, 82.1 mW. Na resistência de 60 Ω, 105.8 mW. Na resistência de 80 Ω, 151.4 mW. A fem fornece 401.4 mW.

# 6. O campo elétrico

## Perguntas

**1.** B. 4.52 kN/C

**2.** D. 6.4 nC

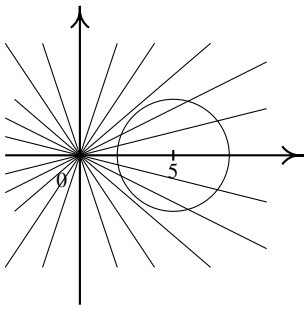
**3.** C. $-72\pi$

**4.** C. $11.3 \times 10^4$ N·m$^2$/C

**5.** B. Existe carga negativa dentro da superfície.

## Problemas

**1.** (*a*) Algumas linhas atravessam a esfera:




(*b*) 0. (*c*) 0

**2.** 1.05 mN

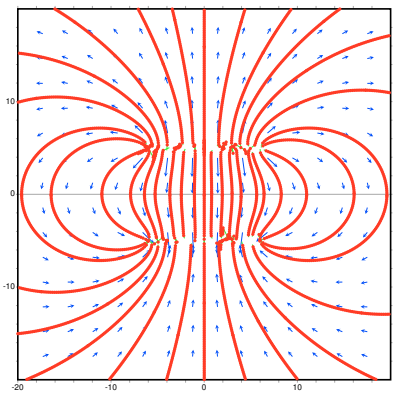
**3.** Dentro da casca interna e fora da casca externa, o campo é nulo. Entre as duas cascas, o campo é na direção radial e com módulo $kQ/r^2$, onde $r$ é a distância desde o centro das esferas.

**4.** Se $r \geq R$, $E = \dfrac{kQ}{r^2}$. Se $r < R$, $E = \dfrac{kQ}{R^3} r$

**5.** $-8$ nC.

**6.** 62.97°

**7.** Gráfico:



# 7. Potencial eletrostático

## Perguntas

**1.** E. O trabalho necessário para trazer uma carga desde o infinito até o ponto P é nulo.

**2.** B. 160 mJ

**3.** D. 4

**4.** B. $E = 0, V = 0$

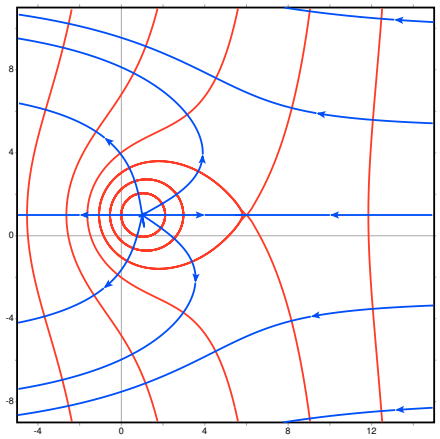
**5.** C. 1.5 cm

## Problemas

**1.** O campo é:

$$E_x = \frac{1250\,(x-1)}{[(x-1)^2+(y-1)^2]^{3/2}} - 50$$

$$E_y = \frac{1250\,(y-1)}{[(x-1)^2+(y-1)^2]^{3/2}}$$




O campo é nulo no ponto (6, 1). Trata-se do potencial de uma carga pontual positiva, no ponto (1, 1), dentro de um campo externo uniforme $\vec{E} = -50\vec{e}_x$.

**2.** 0.3 kV.

**3.** 3 m, 200 nC

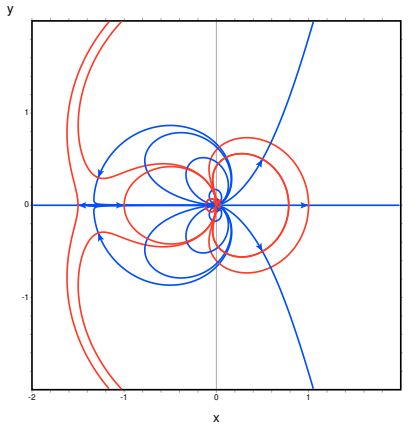
**4.** 154.3 V

**5.** (*a*) 4.2 cm e 2.8 cm. (*b*) -2859 V

**6.** O campo é:

$$E_x = \frac{4x^2 - 2y^2 + 3x^3 + 3xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$E_y = \frac{y(6x + 3x^2 + 3y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$




**7.** (*a*) 12 nC (*b*) −48 nC (*c*) −3 nC

**8.** (*a*) 187.5 V/m, para baixo (*b*) negativa (*c*) para cima (*d*) −0.169 nC

# 8. O campo magnético

## Perguntas

**1.** D. 2.5 $\mu$T

**2.** A. Para cima.

**3.** A. $5.3 \times 10^{-14}$ N

**4.** A. O campo é paralelo ao fio.

**5.** E. 30°

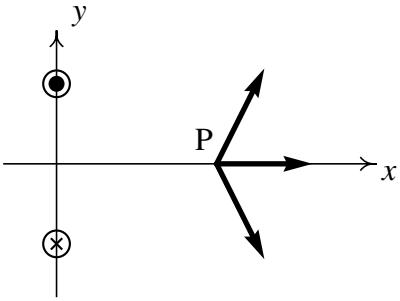
## Problemas

**1.** 1.66 m

**2.** 10,25 N

**3.** $\vec{B}_1 = B_1\vec{e}_x$, $\vec{B}_2 = B_{2x}\vec{e}_x + (E/v)\vec{e}_z$, onde $B_1$, $B_{2x}$ e $E$ podem ser quaisquer funções, não necessariamente constantes. As condições obtidas são válidas para qualquer tipo de partículas

**4.** (*a*)




(*b*) $B = \dfrac{4k_m I a}{x^2 + a^2}$

**5.** (*a*) $2 \times 10^6$ m/s. (*b*) $3.34 \times 10^{-15}$ J. (*c*) $1.82 \times 10^{-18}$ J

**6.** $3.47 \times 10^{-5}$ N·m

**7.** (*a*) $-(\sqrt{3}/2)\,\vec{e}_y + (1/2)\,\vec{e}_z$. (*b*) $\vec{e}_x$. (*c*) $-(1/2)\,\vec{e}_y - (\sqrt{3}/2)\vec{e}_z$. (*d*) 2.5 mm

**8.** $(-59.4\,\vec{e}_x - 102.9\,\vec{e}_y + 2388.1\,\vec{e}_z)$ nT

# 9. Indução eletromagnética

## Perguntas

**1.** B. Poderá gerar potência elétrica que pode ser alimentada de volta para a central.

**2.** C. 0.024 V

**3.** E. Nula.

**4.** E. Diminui num fator de 4.

**5.** C. 91 mV

## Problemas

**1.** O fluxo aumenta até um valor máximo, decresce até um valor mínimo local em $t_1$, volta a aumentar até o valor máximo e a seguir diminui monotonicamente. A corrente troca de sentido 3 vezes, nos 3 pontos onde o fluxo é máximo ou mínimo. Enquanto o anel se aproxima desde longe a corrente aumenta desde zero, e quando o anel já está a afastar-se longe do íman, a corrente decresce até zero.

**2.** $5.67 \times 10^{-6}$ V

**3.** $v = \dfrac{mgR}{B^2 d^2}$

**4.** 0.33 V

**5.** 3.5 mV

**6.** $E_{\mathrm{i}} = 0.0018\,\mathrm{e}^{-t/15}$, na direção tangente ao anel e no sentido horário.

**7.** 0.18 V, no sentido anti-horário visto desde a esquerda.

# 10. Circuitos de corrente alternada

## Perguntas

**1.** B. 139 mA

**2.** D. Atrasada 45° em relação à corrente.

**3.** C. Se a corrente for contínua, a reatância da bobina é menor.

**4.** B. Quando a tensão estiver em fase com a corrente.

**5.** C. O ângulo de desfasamento é nulo.

## Problemas

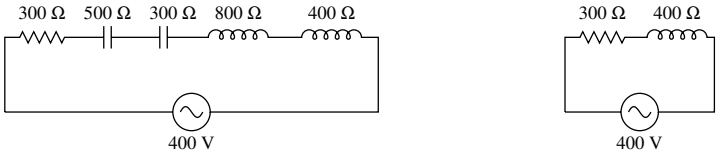
**1.** $I(t) = 0.669\,\sin(314.16t - 1.2421)$ A.

**2.** Um henry é t·V/A, que é o mesmo que Ω/Hz; portanto, $\omega L$ tem unidades Ω. Um farad é C/V, que é equivalente a A·s/V igual a 1/(Hz·Ω); portanto, $1/(\omega C)$ tem unidades Ω.

**3.** (*a*) $(2.04 + \mathrm{i}\,25.5)$ Ω. (*b*) $(20.4 - \mathrm{i}\,75.9)$ Ω. (*c*) $(9.57 - \mathrm{i}\,52.7)$ Ω.

**4.** (*a*) 7.94 A (*b*) 3.68 mA (*c*) 1.261 kW

**5.** (*a*) e (*b*)




(*c*) $|Z| = 500$ Ω, $I_0 = 0.8$ A, $\varphi = 53.13°$. (*d*) Maior.

**6.** (*a*) $(75.86 - \mathrm{i}\,428.82)\ \Omega = 435.48\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,1.396}\ \Omega$ (*b*) $103.3\,\sin(628.32t + 1.396)$ mA

**7.** O fasor da tensão é $170\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,1.43} = 24 + \mathrm{i}\,168$. O fasor da corrente é $10\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,1.63} = -0.58 + \mathrm{i}\,9.98$. A impedância é $Z = (16.66 - \mathrm{i}\,3.38)\ \Omega$ ($|Z| = 17\ \Omega$, $\varphi = -11.46°$).

**8.** (*a*) $\dfrac{V_\mathrm{s}}{V_\mathrm{e}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$ (*b*) $\dfrac{V_\mathrm{s}}{V_\mathrm{e}} = \dfrac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$

O circuito (*a*) filtra as tensões com frequências altas e o circuito (*b*) filtra as tensões com frequências baixas.

**9.** O gráfico mostra o estado estacionário, após várias oscilações. Antes do ciclo representado no gráfico houve muitos ciclos semelhantes e a corrente em $t = 0$ é o resultado da carga já acumulada nesses ciclos anteriores. Se a fonte de tensão fosse ligada apenas no instante $t = 0$, a corrente não atingiria instantaneamente o seu valor estacionário mostrado no gráfico, mas aumentaria exponencialmente desde zero, aproximando-se gradualmente do estado estacionário.

**10.** Com frequência menor, de 5 Hz, o período das funções é maior, o desfasamento entre a tensão da fonte e a tensão na resistência diminui, o desfasamento entre a tensão da fonte e a tensão no indutor aumenta, os valores máximos da tensão na resistência e a corrente aumentam, e o valor máximo da tensão no indutor diminui. Se a frequência aumentar para 500 Hz, acontece tudo o oposto.

# 11. Transístores e amplificadores

## Perguntas

**1.** D. Os buracos, nos dois casos.

**2.** B. O emissor.

**3.** B. 6 V

**4.** C. Menor que 0.

**5.** D. A realimentação negativa permite aumentar o ganho de corrente num amplificador operacional.

## Problemas

**1.** 123.

**2.** *a*, *b*, e provavelmente *d*, se esse transístor for de germânio; se for de silício não.

**3.** (*a*) 50 $\mu$A. (*b*) 35 $\mu$A.

**4.** 50 $\mu$A na resistência da esquerda, e 250 $\mu$A na resistência da direita.

**5.** (*a*) Entrada entre C e B, e saída entre D e B, ligando os pontos A e B com um fío; ou, entrada entre A e B, e saída entre B e D, ligando os pontos B e C com um fío. (*b*) Entrada entre A e B, e saída entre D e B, ligando os pontos C e B com um fío; ou, entrada entre C e B, e saída entre B e D, ligando os pontos A e B com um fío.

**6.** Devido à realimentação positiva, o circuito é instável e a tensão de saída poderá ser $V_{\text{sat}+}$ ou $V_{\text{sat}-}$. Se $V_\text{e}$ for superior a $R_2 V_{\text{sat}+}/(R_1+R_2)$, $V_\text{s}$ será igual $V_{\text{sat}+}$. Se $V_\text{e}$ for inferior a $R_2 V_{\text{sat}-}/(R_1+R_2)$, $V_\text{s}$ será igual $V_{\text{sat}-}$. Para outros valores diferentes da tensão de entrada $V_\text{e}$, a tensão de saída poderá ser $V_{\text{sat}+}$ ou $V_{\text{sat}-}$, dependendo da história prévia do circuito.

**7.** 57 k$\Omega$.

**8.** Admitindo que $V_2 \geq V_1$, circulará uma corrente $I$ da entrada $V_2$ para $V_1$, e $V_+ = V_2 - I R_2 = V_1 + I R_2$. Eliminando $I$ entre as duas equações, $V_+ = (V_2+V_1)/2$. O amplificador é um amplificador não inversor e, portanto, $V_\text{s} = (1+R_2/R_2)\,V_+ = 2V_+$. Substituindo $V_+ = (V_2+V_1)/2$, obtem-se $V_\text{s} = V_2 + V_1$.

# 12. Ondas eletromagnéticas e luz

## Perguntas

**1.** A. Menor será o seu comprimento de onda.

**2.** B. 15 cm

**3.** D. Polarização.

**4.** D. Microonda.

**5.** D. No sentido negativo do eixo dos $x$.

## Problemas

**1.** 490 mV/m.

**2.** O campo elétrico na placa metálica é nulo, o que implica que as ondas não passam de um lado para o outro. O receptor só deteta ondas polarizadas na direção da linha entre as duas esferas no detetor; as ondas produzidas pela fonte estão polarizadas na direção da linha entre as duas esferas na fonte.

**3.** ($a$) 279 nm. ($b$) $1.074 \times 10^{15}$ Hz.

**4.** ($a$) $P = 83.33$ ns, $\lambda = 25$ m. ($b$) $\vec{E} = 0.008\cos(0.2513\,y - 75.40 \times 10^6 t + \varphi)\vec{e}_x$, $\vec{B} = -2.67 \times 10^{-11}\cos(0.2513\,y - 75.40 \times 10^6 t + \varphi)\vec{e}_z$.

**5.** ($a$) 279 nm. ($b$) $1.074 \times 10^{15}$ Hz. ($c$) O eixo dos $z$

**6.** $\vec{E} = \begin{cases} E_0 \sin(\omega t - kz)\vec{e}_x, & z > 0 \\ E_0 \sin(\omega t + kz)\vec{e}_x, & z < 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\vec{B} = \begin{cases} \frac{E_0}{c}\sin(\omega t - kz)\vec{e}_y, & z > 0 \\ -\frac{E_0}{c}\sin(\omega t + kz)\vec{e}_y, & z < 0 \end{cases}$

**7.** A derivada de $f(y+ct)$ em funcão de $t$ é $c\,f'(y+ct)$. Substituindo na equação 12.17 obtem-se que a derivada de $B$ é função de $y$ é igual a $-f'(y+ct)/c$. Como a derivada de $f(y+ct)$ em funcão de $y$ é $f'(y+ct)$, então $B$ é igual a $-f(y+ct)/c$.

A derivada de $g(y-ct)$ em funcão de $t$ é $-c\,g'(y-ct)$. Substituindo na equação 12.17 obtem-se que a derivada de $B$ é função de $y$ é igual a $g'(y-ct)/c$. Como a derivada de $g(y-ct)$ em funcão de $y$ é $g'(y-ct)$, então $B$ é igual a $g(y-ct)/c$.

**8.** $d = 35.7$ cm, $\vec{B} = -B_0\cos\left(2\pi(4.2 \times 10^8\, t + 1.40x)\right)\vec{e}_z$, ($t$ em segundos e $x$ em metros)

**9.** 3.23 J, 2.02 eV.

**10.** 620 nm. Trata-se de luz visível de cor laranja-vermelha.

# Bibliografia

Steve Adams and Jonhathan Allday. *Advanced Physics*. Oxford University Press, Oxford, 2000.

Marcelo Alonso and Edward J. Finn. *Física*. Addison-Wesley, 1999.

Eugene Hecht. *Óptica*. Fundação Caluste Gulbenkian, Lisboa, 1991.

Eugene Hecht. *Physics*. Wadsworth, Inc., California, 1994.

J.-M. Lévy-Leblond and André Butoli. *A Electricidade e o Magnetismo em Perguntas*. Gradiva, Lisboa, 1991.

Noemia Maciel, Jaime E. Villate, Carlos Azevedo, and F. Maciel Barbosa. *Eu e a Física 12*. Porto Editora, Porto, 2009.

Manuel de Medeiros Silva. *Introdução aos Circuitos Eléctricos e Electrónicos*. Fundação Caluste Gulbenkian, Lisboa, 2001.

Paul A. Tipler and Gene Mosca. *Physics for Scientists and Engineers*. W. H. Freeeman and Company, New York, 2004.

Jaime E. Villate. *Electromagnetismo*. Mc Graw-Hill, Lisboa, 1999.

Jean Walker. *O Grande Circo da Física*. Gradiva, Lisboa, 1975.

## Livros de texto

Alguns livros com um nível semelhante a estes apontamentos são so livros de Adams and Allday (2000), Hecht (1994), Tipler and Mosca (2004) e Alonso and Finn (1999). Um livro com um nível mais elementar é o de Maciel et al. (2009), e um livro com um nível mais teórico é: Villate (1999). Uma boa referência sobre circuitos elétricos é o livro de Silva (2001). As ondas eletromagnéticas e a luz fazem parte do livro de Óptica de Hecht (1991).

# Livros de divulgação científica

O livro de Walker (1975) desafia o leitor a responder várias questões sobre fenómenos físicos e as respostas são dadas no fim. O livro de Lévy-Leblond and Butoli (1991) segue um formato similar, mas tentando abrangir o programa completo de uma disciplina de eletricidade e magnetismo.

# Índice


**A**
amplificador inversor, 169
amplificador não inversor, 169
amplificadores operacionais, 165
amplitude, 186
ângulo de desfasamento, 154
ânodo, 22, 72
armadilha de iões, 97
armaduras, 54

**B**
base, 162
bateria, 36
bipolar, 162
Boltzman, Ludwig, 81
breadboard, 16
buraco, 24

**C**
cátodo, 22, 72
código de cores, 39
campo
    elétrico, 8
        na atmosfera, 14
    magnético, 43
capacidade, 52
caraterística tensão-corrente, 34
carga
    elementar, 3
    induzida, 51
    linear, 93
    pontual, 6
    por indução, 11
    por atrito, 4
    superficial, 92
circuito
    limitador, 82
    RC, 74
coeficiente
    de temperatura, 40
coletor, 162
comparador, 166
comprimento de onda, 186
condensador, 51
    plano, 57
    variável, 57
condutor, 10
conservação
    da carga, 5
    da energia mecânica, 18
constante
    de Boltzmann, 81
    de Coulomb, 6
    de tempo, 75
    dielétrica, 6, 54
    magnética, 122
corrente
    alternada, 147
    de saturação, 81
    eficaz, 149
    elétrica, 26
    estacionária, 29, 69
    induzida, 42
coulomb (unidade), 3
Coulomb, Charles, 6
curto-circuito, 48

**D**
díodos emissores de luz, 192

derivada direccional, 99
diamagnéticas, 114
dielétrico, 55
dipolo elétrico, 10, 87
divergência, 112, 114
divisor de voltagem, 34, 68

**E**
efeito
    fotoelétrico, 191
    Joule, 29
    Meissner, 43
elétrodos, 20
eletrólito, 20
eletrão, 3
    de condução, 10
eletrão-volt, 104
eletro-íman, 43
emissor, 162
energia
    potencial elétrica, 17
equação
    de onda, 183
equipotenciais, 102
espetro
    eletromagnético, 187
espira, 116
estado estacionário, 61

**F**
farad (unidade), 52
Faraday, Michael, 134
fase inicial, 186
fasor, 148
fator de potência, 155
fem, 22
    auto-induzida, 139
    induzida, 131
ferromagnéticos, 114
filtro
    de velocidades, 121
    passa-alto, 159
    passa-baixo, 159
fluxo
    elétrico, 88
    magnético, 134
força
    contraeletromotriz, 140
    elétrica, 3, 6
    eletromotriz, *ver* fem
    magnética, 112
fotão, 192
fotões, 192
Franklin, Benjamin, 6
frequência de ressonância, 156
função
    alternada, 146
    harmónica, 146

**G**
Galvani, Luigi, 19
ganho de corrente, 163
garrafa de Leiden, 51
Gauss, Karl F., 88
gerador, 37
Guerra das Correntes, 145

**H**
henry, 138

**I**
ião, 4
íman, 42, 112
impedância, 151
indução
    eletromagnética, 129
    eletrostática, 11
indutância mútua, 138
indutores, 139
isolador, 10

**J**
joule (unidade), 17
Joule, James, *ver* efeito Joule

**K**
Kamerlingh Onnes, Heike, 42

**L**
lâmpada, 16

Large-Scale Integration, 162
lei
    das correntes, *ver* lei dos nós
    das malhas, 70
    das tensões, *ver* lei das malhas
    de Ampère, 122
    de Coulomb, 6
    de Faraday, 134
    de Gauss, 88, 90
    de Kirchhoff, 69
    de Lenz, 134
    de Ohm, 35
    dos nós, 69
levitação magnética, 42
Lichtengerg, 55
linhas de campo, 8
Liquid Crystal Display, 189
luz
    infravermelha, 188
    solar, 188
    visível, 188

**M**
maglev, 43
malhas
    lei das, 70
    método das, 71
Maxima, 84, 85, 98
Medium-Scale Integration, 162
Meissner, Walther, *ver* efeito Meissner
mercúrio
    resistividade, 42
metais
    ativos, 20
microondas, 188
modo direto, 72
modo inverso, 72
momento magnético, 115
movimento
    helicoidal, 121
multímetro, 16

**N**
nós
    lei dos, 69
neutrões, 2
Newton, Isaac, 6

**O**
ohm (unidade), 35
ohmico (material), 35
onda plana polarizada, 185

**P**
pára-raios, 106
paramagnéticas, 114
Paul, Wolfgang, 97
PCB, *ver* circuito impresso, 67
pcb, 67
período, 186
permeabilidade magnética, 122
pilha, 20, 36
placa
    de circuito impresso, *ver* PCB
    de circuito, *ver* stripboard
    de circuito impresso, 38
    de teste, *ver* breadboard
polarizar, 189
ponto de sela, 103
potência aparente, 155
potencial
    eletrostático, 17
prefixos das potências de 10, 197
prisma, 188
protões, 2

**Q**
quantização
    da carga, 5

**R**
raios
    X, 31
reatância
    capacitiva, 150
    indutiva, 152
reativo, 150
receptor, 37

regra
de Cramer, 72
resistência, 35
equivalente, 43, 45
interna, 36
resistências
em série, 43
em paralelo, 44
resistividade, 40, 41
dos metais, 41
rigidez dielétrica, 55

**S**
série
galvánica, 20, 22
triboelétrica, 5
saturado, 165
seguidor, 167
semicondutor, 24
tipo N, 24
tipo P, 24
Small-Scale Integration, 162
somador, 176
stripboard, 67
supercondutividade, 42
a altas temperaturas, 43

**T**
temperatura
crítica, 42
tensão
direta, 73
eficaz, 149
terra, 54, 165
torque, 116
triângulo de impedância, 154
tubo de fluxo, 88

**U**
ultracondensadores, 59

**V**
van Musschenbroek, Pieter, 51
variáveis caraterísticas, 184
Very-Large-Scale-Integration, 162
volt (unidade), 17
Volta, Alessandro, 15

**W**
watt (unidade), 29
Wimshurst
máquina de, 1

Este livro pode ser descarregado livremente, em ficheiro, ou comprado, em versão impressa, no sítio: http://www.villate.org/livros.html

ISBN 978-972-99396-2-4