

# Étude des fonctions hyperboliques

Les fonctions inverses des fonctions hyperboliques sont hors programmes, et doivent être redéfinies si vous voulez les utiliser dans un devoir ou à l'oral.

## PARTIE A - RAPPELS

- ① Rappelez les définitions, les dérivées, les variations, et les tableaux complets des trois fonctions  $\text{ch}$ ,  $\text{sh}$ ,  $\text{th}$ .
- ② Montrer que, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $\text{sh}(x+y) = \text{sh}(x)\text{ch}(y) + \text{ch}(x)\text{sh}(y)$  et  $\text{ch}(x+y) = \text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y)$ .
- ③ En déduire que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,
  - (a)  $\text{sh}(2x) = 2\text{sh}(x)\text{ch}(x)$
  - (b)  $\text{ch}(2x) = \text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x) = 1 + 2\text{sh}^2(x) = 2\text{ch}^2(x) - 1$
  - (c)  $\text{th}(2x) = \frac{2\text{th}(x)}{\text{th}^2(x) + 1}$

## PARTIE B - LES FONCTIONS RÉCIPROQUES

- ④ Rappeler la formule qui donne la dérivée de la fonction réciproque  $f^{-1}$  d'une fonction  $f$ , en fonction de la dérivée de  $f$ . Quelles sont les conditions à vérifier ?
- ⑤ **La fonction argument sinus hyperbolique.**
  - (a) Dire pourquoi la fonction  $\text{sh}$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .  
En déduire l'ensemble où est définie sa fonction réciproque, que l'on notera  $\text{argsh}$ .
  - (b) Donner l'image, la monotonie, la régularité (continuité, dérivabilité) de cette fonction.
  - (c) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ .
  - (d) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ .
- ⑥ **La fonction argument cosinus hyperbolique.**
  - (a) Dire pourquoi la fonction  $\text{ch}$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}^+$  sur  $[1, +\infty[$ .  
En déduire l'ensemble où est définie sa fonction réciproque, que l'on notera  $\text{argch}$ .
  - (b) Donner l'image, la monotonie, la régularité (continuité, dérivabilité) de cette fonction.
  - (c) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ .
  - (d) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ .
- ⑦ **La fonction argument tangente hyperbolique.**
  - (a) Dire pourquoi la fonction  $\text{th}$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $] -1, 1[$ .  
En déduire l'ensemble où est définie sa fonction réciproque, que l'on notera  $\text{argth}$ .
  - (b) Donner l'image, la monotonie, la régularité (continuité, dérivabilité) de cette fonction.
  - (c) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ .
  - (d) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$ .

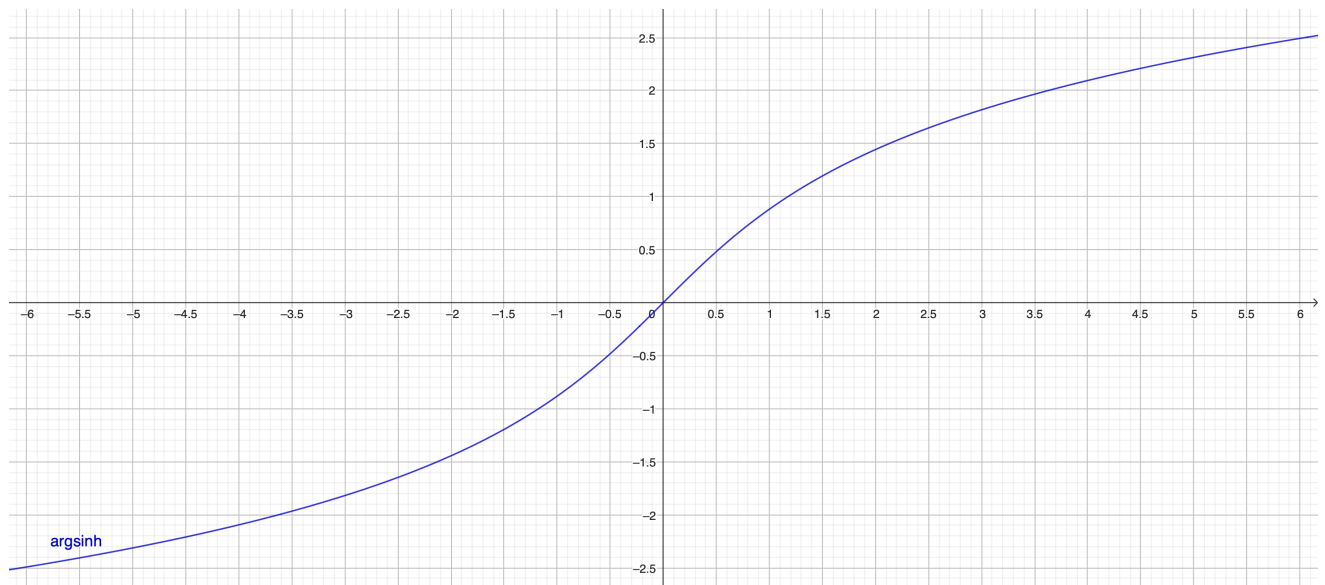


Figure 1: Graphe de la fonction argument sinus hyperbolique

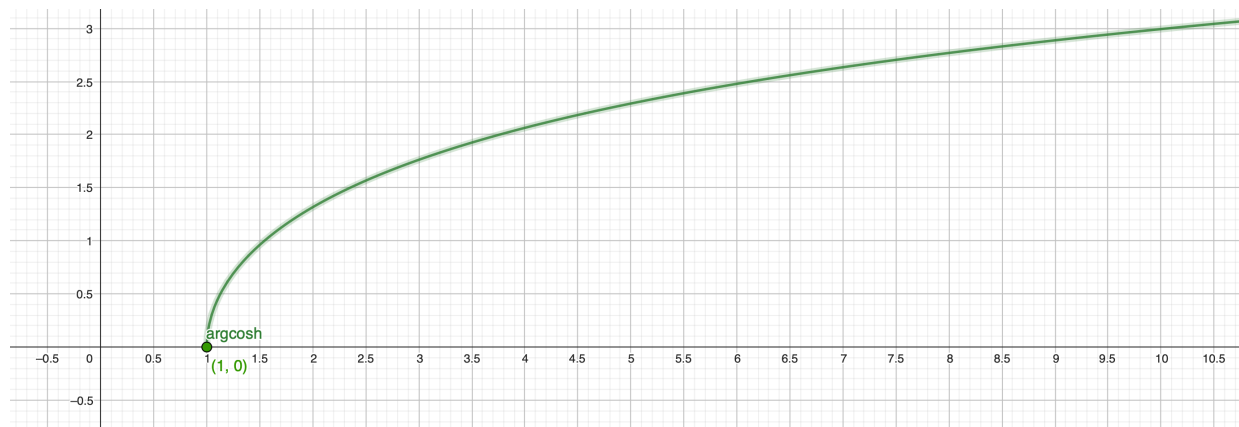


Figure 2: Graphe de la fonction argument cosinus hyperbolique

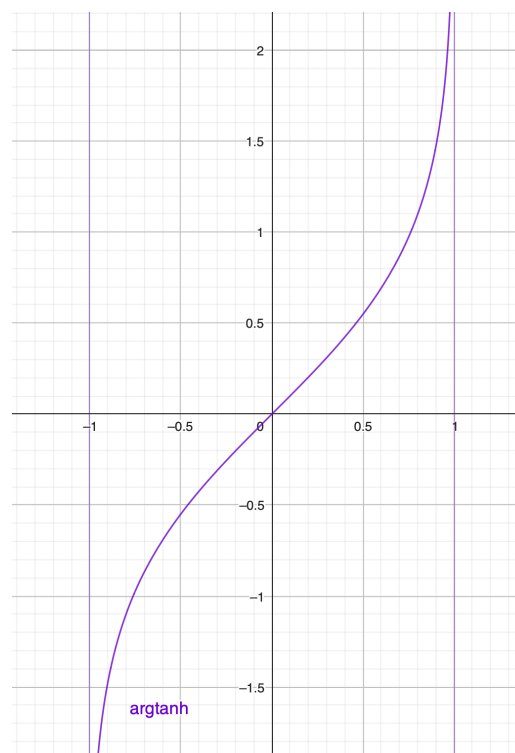


Figure 3: Graphe de la fonction argument tangente hyperbolique