Números de Catalan y Aplicaciones

Javier González Castillo
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Pedro J. Miana Sanz
16 de noviembre de 2020

Abstract

This proyect tries to synthesize the most relevant information about Catalan‘s numbers. It has been structured in three chapters.
Firstly, a breif historical review about Catalan’s numbers discovery by Leonard Euler will be given, to understand why Eugène Catalan gave his own name to these combinatorics numbers. After that, it is shown the original problem posed by Euler and the recurrence that solved it.

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \ldots + C_{n-1} C_1 + C_n C_0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Before giving the formal definition, it is preferable to calculate his generating function.

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}, \quad \text{for} \quad 1/4 \leq x \leq 1/4.$$

Then, the usual definition is shown,

$$C_n := \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

and also equivalent expressions and some interesting properties about that. To finish the fisrt chapter, some populars Catalan problems with a brief explanation about the relations between them will be shown.

The second chapter is about the Shapiro‘s Catalan Triangle whose (n, p) entry is defined by

$$B_{n,p} := \frac{p}{n}\binom{2n}{n-p}, \quad n, p \in \mathbb{N}, \ p \leq n.$$

Vandermonde’s identity will be used in order to prove a useful proposition that is necessary to check various idetities that relates the Catalan’s numbers with his triangle.

$$\sum_{p=1}^{n} (B_{n,p})^2 = C_{2n-1}, \quad \sum_{p=1}^{n} (pB_{n,p})^2 = (3n-2)C_{2(n-1)}.$$

These identities opens an interesting question at the end of the chapter, which will be treated in the next one.

The last chapter begins the exating WZ theory’s introduction. This theory is able to prove, evaluate and discover identities, just making use of a computer algothrim. This allows us to prove more identites that in the previous chapter and have a better understanding of the open question and others that may arise.

Finally, the proyect ends up with some comments and conclusions.

Índice general

Capítulo 1

Introducción a los números de Catalan

La ley de la eponimia de Stigler (1980) afirma que «ningún descubrimiento científico recibe el nombre de quien lo descubrió en primer lugar» y como vamos a ver, los números de Catalan no son una excepción en este caso. La información de esta sección es obtenida del artículo de Igor Pak [7] para el libro de Richard P. Stanley [12], para una explicación más extensa y detallada recomendamos su lectura.

1.1. Historia de la eponimia

La primera aparición histórica de los números de Catalan se debe al matemático chino Ming Antu en su libro *«Quick Methods for Accurate Values of Circle Segments»* escrito en la década de 1730 pero publicado de forma póstuma en 1839. En este libro los números de Catalan no tienen relevancia pues solo se mencionan en una serie de potencias trigonométrica.

Posteriormente en el año 1751, fueron descritos por Leonhard Euler (1707-1783) en una carta dirigida a Christian Goldbach (1690-1764) en la cual planteaba un problema y en su empeño en la resolución los introducía y daba una fórmula cerrada para ellos. La prueba del resultado de Euler se obtuvo con la colaboración por correspondencia con Goldbach, pero sobretodo, por las aportación de Johann Andreas von Segner (1704-1777) en 1759 con una recurriencia que ayudó a concluir la demostración. Es por todo ello que inicialmente los números de Catalan eran denominados números de Segner o de Euler-Segner.

Eugène Charles Catalan (1814-1894) es el hombre que a día de hoy da nombre a esta secuencia de números. En 1838 siendo estudiante en la École Polytechnique (escuela politécnica) de Liouville, se interesó en trabajos posteriores acerca de lo que hicieron Segner y Euler. Sobretodo por el trabajo de Gabriel Lamé (1795-1870) que encontró una solución al problema de encontrar una manera sencilla de derivar la formula de Euler a partir de la recurriencia obtenida por Segner. Catalan obtuvo algunos resultados y en 1839 definió por primera vez *ballot numbers*, disfrazados como los numeros de unas ciertas triangulaciones. Catalan dió una fórmula en términos de los números de Catalan, pero no dió una tabla de los primeros valores ni una fórmula cerrada.

Finalmente, no fue hasta 1901 cuando el matemático Eugen Netto (1848-1919) los renombró como números de Catalan en un capitulo de su libro *«Lehrbuk der Combinatorik»* y más tarde en 1938, el matemático historiador Eric Temple Bell (1883-1960) mencionó en un articulo los números de Catalan, pero solo en el contexto del trabajo de Catalan sobre estos números. Y ya en 1968 cobró popularidad este nuevo nombre gracias al libro de John Riordan (1903-1988) *«Combinational Identities»*. A los siguientes años se continuó llamando de esta nueva forma con autores como Henry Gould en *«A Research Bibliography of Two Special Number Sequences»* y Neil Sloane en *«A Handbook of Integer Sequences»*. Es por todo ello que en nuestros días se le conocen como números de Catalan.

El problema inicial

Aunque hay muchas maneras de definir los números de Catalan, vamos a definirlos mediante su primera interpretación combinatoria, la cual como ya mencioné, debemos a Euler y Segner.

Supongamos que tenemos un polígono regular de n lados, de cuantas formas se puede triangular? Si el polígono es un triangulo, es obvio, no hay que hacer nada pues ya está triangulado. Si es un cuadrado, hay dos formas de hacerlo, con un pentágono tenemos cinco formas, y con un hexágono hay catorce triangulaciones posibles.

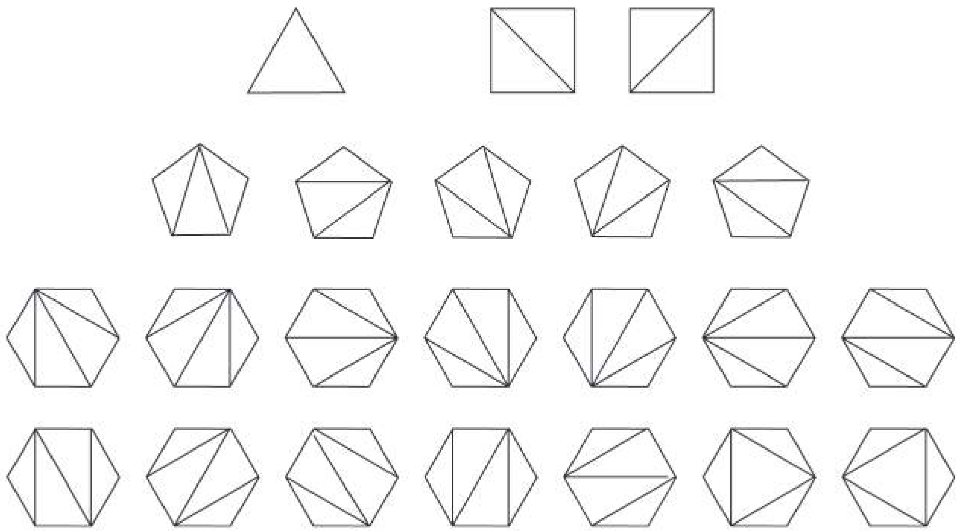

Figura 1.1: Polígonos triangulados

Generalizando el problema, sea P_{n+2} un polígono convexo en el plano de $n+2$ vértices, y una triangulación de P_{n+2} es un conjunto de diagonales que no se cruzan en el interior del polígono formando triángulos. Se ve fácilmente que el número de triángulos que se forman en cada triangulación de un polígono de $n+2$ vértices es n, pues para el triangulo inicial necesitamos 3 vértices, quedando con $n-1$ en el polígono, y luego al añadir los demás triángulos solo necesitamos un vértice más, pues los otros dos lo comparten con el anterior, obteniendo $n-1$ triángulos más el inicial.

Mediante esta cuestión de contar el número de maneras de triangular P_{n+2}, se define el *n-ésimo* número de Catalan, denotado por C_n. Tomando por convenio $C_0 = 1$, se tiene por tanto, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$ y $C_4 = 14$.

1.2. Recurrencia de los números Catalan

Para determinar una fórmula explícita que resuelva el problema anterior, y por tanto defina los números de Catalan, necesitamos entender la recurrencia que se esconde detrás de estas triangulaciones, la recurrencia que Segner encontró.

Procedemos por inducción sobre n para calcular C_n. Supongamos que sabemos triangular P_{n+2}, ahora con esta hipótesis triangulemos P_{n+3}. Fijamos l, un lado de nuestro polígono de $n+3$ vértices y llamamos a los vértices que lo unen 1 y $n+3$ de manera que el tercer vértice que forma el triangulo pertenece al conjunto de vértices $\{2,3,\ldots,n+2\}$, a este vértice lo llamaremos i.

Eliminando el triangulo de vértices i, 1 y $n+3$ obtenemos dos nuevos polígonos convexos triangulados. Uno con vértices $1,3,\ldots,i$ con lo que hay C_{n-2} maneras de triangularlo, y el otro con vértices $i,i+1,\ldots,n+3$ con C_{n-i+2} formas de ser triangulado. Luego el número de combinaciones al triangular

P_{n+3} con el triangulo escogido inicialmente, es de $C_{n-2}C_{n-i+2}$. Finalmente al variar el vértice i entre todos los posibles vértices restantes, que son $2,3,\ldots,n+2$ obtenemos C_{n+1} y la recurrencia buscada.

$$C_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}C_kC_{n-k}=C_0C_n+C_1C_{n-1}+\ldots+C_{n-1}C_1+C_nC_0. \tag{1.1}$$

Esta recurrencia es fundamental para explicar muchas de las interpretaciones combinatorias de los números de Catalan, ya que muchos elementos contados tienen una descomposición en dos partes, tal y como sucede con las triangulaciones de polígonos regulares.

1.3. Función generatriz

Definición. La función generatriz (o generadora)[1] de una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 0}$ se define como la serie de potencias de coeficientes los términos de la sucesión, es decir

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

A veces suele llamarse transformada Z.

Antes de continuar con nuestro empeño de obtener una fórmula explícita para los números de Catalan, vamos a calcular su función generadora. Para ello recordamos al lector el teorema generalizado del binomio.

Sea a un número real cualesquiera y $n\in\mathbb{N}$, entonces se tiene

$$(1+x)^a=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n, \tag{1.2}$$

y los coeficientes del binomio vienen dados por

$$\binom{a}{n}=\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}.$$

La siguiente proposición nos proporciona la función generatriz de los números de Catalan, puede verse en [12]

Proposición 1.1. *Sea*

$$C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n$$

entonces $C(x)$ *converge para* $|x|\leq 1/4$ *y además* $C(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x},\ |x|\leq 1/4.$

Demostración. Multiplicamos por x^n la recurrencia (1.1) y sumamos los resultados obtenidos para todos los valores de n obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_0C_n+C_1C_{n-1}+\ldots+C_{n-1}C_1+C_nC_0\right)x^n.$$

Por un lado, haciendo el cambio $n+1=j$, tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+1}x^n=\sum_{n=-1}^{\infty}C_{n+1}x^n-\frac{1}{x}=\sum_{j=0}^{\infty}C_jx^{j-1}-\frac{1}{x}=\frac{C(x)-1}{x}.$$

[1] Herbert S. Wilf (1931-2012) definió coloquialmente en su recomendable libro *Generatingfunctionology* (1990) función generatriz como, una cuerda de la ropa en la que tendemos una sucesión de números para exhibirla.

Y por el otro lado vemos que los coeficientes de x^n en $C(x)^2$ son $\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$, luego tenemos la siguiente ecuación cuadrática

$$\frac{C(x)-1}{x} = C(x)^2 \quad \text{o equivalentemente} \quad xC(x)^2 - C(x) + 1 = 0.$$

Resolvemos la ecuación y obtenemos

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Ahora tenemos que discernir cual es el signo correcto, para ello usaremos (1.2) para desarrollar en serie de potencias el binomio $(1-4x)^{1/2}$

$$(1-4x)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n = 1 - 2x - 2x^2 - 4x^3 - 10x^4 - \dots \quad .$$

Como todos los sumandos de $C(x)$ son positivos, es claro que nos tenemos que quedar con la solución con el discriminante negativo. Luego acabamos de probar la igualdad deseada y por tanto su convergencia, ahora solo faltaría ver para que valores de x la serie converge.

Como

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n\right)$$

estudiar la convergencia de $C(x)$ es equivalente a hacerlo en el desarrollo en serie de potencias de $\sqrt{1-4x}$. Notar que en $x=0$ no hay ningún problema ya que

$$\begin{aligned} C(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \cdot \frac{1+\sqrt{1-4x}}{1+\sqrt{1-4x}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-4x)}{2x(1+\sqrt{1-4x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{1+\sqrt{1-4x}} = 1 \end{aligned}$$

.

Recordamos rápidamente al lector que una serie de potencias centrada en 0 convergirá si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} < 1.$$

luego por propiedades de los límites se obtiene el radio de convergencia $r \in \mathbb{R}^+$

$$|z| < \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} := r.$$

Procedemos para nuestro caso,

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{|\binom{1/2}{n}(-4)^n|}{|\binom{1/2}{n+1}(-4)^{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|1/2\cdot(1/2-1)\cdot\ldots\cdot(1/2-n+1)|(n+1)!}{|1/2\cdot(1/2-1)\cdot\ldots\cdot(1/2-(n+1)+1)|4n!} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\lim_{n\to\infty} \frac{1/2(1-1/2)\cdot\ldots\cdot(n-1/2-1)(n+1)}{1/2(1-1/2)\cdot\ldots\cdot(n-1/2)} = \frac{1}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n-1/2)} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Por tanto, nuestra serie converge para $|x| < 1/4$. Miremos que sucede en los extremos,

$$C(1/4) = 2 \quad \text{y} \quad C(-1/4) = 2\sqrt{2} - 2.$$

No presentan ningún problema, con lo que los valores de x por los cuales $C(x)$ está definida y por tanto la serie converge son $x \in$ [-1/4, 1/4].

□

1.4. Definición de los números de Catalan

Finalmente, utilizando la función generatriz calculada podemos deducir una fórmula para los números de Catalan. Otros procedimientos para hallar la fórmula de los números de Catalan vienen explicados en [10] y [4] capitulo 5.

Definición. Sea $n \in \mathbb{N}$, se define el *n-ésimo* número de Catalan mediante la siguiente fórmula

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \tag{1.3}$$

Veamos que esta definición es equivalente a la introducida en (1.1).

Por la proposición anterior se tiene

$$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^n\right) = -\frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^n =$$

$$= -\frac{1}{2x}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{1/2}{j+1}(-4x)^{j+1} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n+1}(-4x)^n.$$

Si recordamos la definición de $C(x)$ en la proposición (1.1), igualamos los coeficientes de x^n de las dos series, se tiene

$$C_n = 2\binom{1/2}{n+1}(-4)^n.$$

Ahora solo falta operar un poco y verificar (1.3)

$$2\binom{1/2}{n+1}(-4)^n = 2\frac{1/2(1/2-1)(1/2-2)\cdot\ldots\cdot(1/2-(n+1)+1)}{(n+1)!}(-4)^n =$$

$$= \frac{(1/2)(3/2)\cdot\ldots\cdot(n-1/2)}{(n+1)!}4^n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(n+1)!}2^n =$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2^n\cdot n!}{(n+1)!n!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Esta es la manera habitual de presentar los números de Catalan, pero existen otras fórmulas equivalentes.

Lema 1.2. *Las siguientes igualdades son equivalentes:*

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1}.$$

Demostración. Para la primera igualdad,

$$\binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n},$$

luego,

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \left(1-\frac{n}{n+1}\right)\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n.$$

Para la segunda igualdad,

$$\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} = \frac{2n+1}{(2n+1)(n+1)}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n.$$

Finalmente se tiene,

$$\frac{1}{n}\binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!\,n!} = C_n.$$

□

La siguiente proposición muestra una nueva recurrencia.

Proposición 1.3. *Los números de Catalan verifican la siguiente recurrencia,*

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1}\,, \quad n \geq 1.$$

Demostración. Sea $n \geq 1$, entonces

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{2n(2n-1)}{(n+1)n^2} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!} = \frac{4n-2}{(n+1)n}\binom{2n-2}{n-1}$$

$$= \frac{4n-2}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}\right) = \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1}.$$

□

Lema 1.4. *Cuando n es suficientemente grande, se tienen las siguientes equivalencias:*

(i) $C_n \approx \dfrac{2^{2n}}{n\sqrt{\pi n}}$.

(ii) $C_{n+1} \approx 4C_n$.

Demostración. (i) Utilizando la equivalencia del factorial de Stirling, $n! \approx \dfrac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}$ cuando $n \to \infty$ se tiene

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \approx \frac{(2n/e)^{2n}\sqrt{2\pi 2n}}{((n/e)^n\sqrt{2\pi n})^2} = \frac{(2n/e)^{2n} \cdot 2\sqrt{\pi n}}{(n/e)^{2n} \cdot 2\pi n} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Luego cuando n es suficientemente grande

$$C_n \approx \frac{2^{2n}}{(n+1)\sqrt{\pi n}} \approx \frac{2^{2n}}{n\sqrt{\pi n}}.$$

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1))!(n+1)!n!}{(2n)!(n+2)!(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+2)} \approx \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{n^2} = 4.$$

□

Notar que el límite de (ii) es análogo al limite calculado en la proposición (1.1) para calcular el radio de convergencia de la función generatriz de C_n.

1.5. Aplicaciones en combinatoria

Al inicio del capítulo hemos visto que los números de Catalan resuelven el problema de contar cuantas maneras de triangular un polígono convexo de $n+2$ vértices, pero también son intrínsecos en muchos otros.

Esta sección la dedicaremos a ver algunos de los problemas más populares en los que los números de Catalan nos dan su solución. Pueden encontrarse estas aplicaciones y muchas más en [12] sección 1,5 y en [4] en los capítulos 6 y 7 con demostraciones más detallas.

El problema del paréntesis

Este problema consiste en contar las diferentes maneras de colocar $2n$ paréntesis, n paréntesis abiertos y n cerrados, de forma correcta[2]. Es decir, encontrar el número P_n de secuencias correctas de paréntesis abiertos y cerrados que se pueden formar con n parejas.

Solución. El siguiente cuadro muestra la solución para $n = 0,1,2,3$. Se denota $P_0 = 1$ pues solo hay un forma de no colocar paréntesis (obviamente no poniendo).

n	Paréntesis correctos	P_n
0	$*$	1
1	()	1
2	()() (())	2
3	()()() (())() ()(()) ((())) (()())	5

Vamos a desarrollar una fórmula recursiva que resuelva el problema para P_n. Notar primeramente que $P_0 = P_1 = 1$. Suponemos $n \geq 2$ y que sabemos calcular P_{n-1}, veamos si podemos calcular P_n a partir de los resultados anteriores. Tomamos $0 \leq i \leq n-1$, sabemos que con los primeros i pares de paréntesis hay P_i maneras de colocarlos y los restantes $n-1-i$ tienen P_{n-i-1} formas de hacerlo. Luego para esta elección en particular para colocar n parejas de paréntesis hay $P_i \cdot P_{n-i-1}$ maneras proceder. Ahora variando todas las posibles elecciones de i obtenemos,

$$P_n = \sum_{i=0}^{n-1} P_i \cdot P_{n-i-1}$$

Ahora es claro que esta es la misma recurrencia que verifican los números de Catalan, luego $P_n = C_n$.

Caminos de Dyck

Un camino de Dyck es un recorrido de $2n$ pasos, los cuales n son en dirección noreste y otros n en dirección sureste, de tal forma que nunca podemos estar a una altura inferior a la comenzada y termina siempre en dicha altura al completar los $2n$ pasos. Un ejemplo de caminos de Dyck es el siguiente,

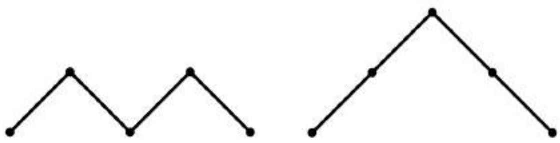

Figura 1.2: Caminos posibles con $n = 2$.

Como se puede observar, para $n = 2$ solo hay dos posibles caminos de Dyck. Esto nos hace plantearnos la cuestión de cuantos posibles caminos se pueden formar para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Pero si paramos y pensamos detenidamente, nos daremos cuenta de que este problema es esencialmente el mismo que el anterior. Podemos reemplazar cada paso en dirección noreste por un paréntesis abierto y cada paso sureste por un paréntesis cerrado, tal como muestra la Figura 1.3. Luego es claro que existe una biyección entre estos dos problemas por lo que con el mismo argumento se puede resolver. Se concluye así que la solución al problema de los caminos de Dyck son los números de Catalan.

[2]Aclaramos al lector que consideramos una forma correcta de poner paréntesis a todas aquellas en las que si se abre paréntesis, debe haber otro cerrando. Por ejemplo, esta es una forma correcta ()()(()) pero sin embargo esta)((()) y esta (()(() no lo son.

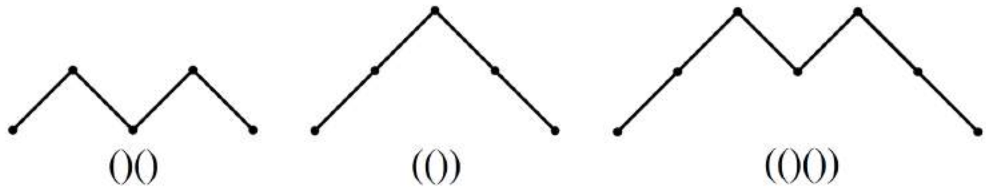

Figura 1.3: Biyección entre los caminos de Dyck y los paréntesis.

El problema de dar la mano

Suponemos que en una mesa redonda se sientan $2n$ personas. De cuantas formas se pueden dar la mano en parejas, sin que no se crucen los brazos los unos con los otros? Este problema se puede reescribir de la siguiente manera. Para $n \geq 0$, distribuimos $2n$ puntos en una circunferencia. De cuantas maneras podemos emparejar los puntos con arcos, de tal forma que estos no se crucen?

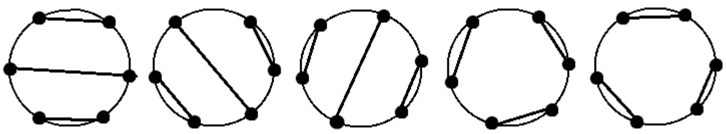

Figura 1.4: Solución para $n = 3$.

Vamos a conectar esta cuestión con el problema del paréntesis otra vez. Para ello numeramos los $2n$ puntos de la circunferencia y tomamos una secuencia correcta de $2n$ paréntesis. Ahora procedemos de la siguiente manera, para todo paréntesis i, cerrado por el paréntesis j, con $0 \leq i < j \leq 2n$, entonces trazamos un arco del punto i al j. De este modo podemos encontrar todas las combinaciones, pues son las mismas posibles que para los paréntesis. Este procedimiento también se puede realizar a la inversa para encontrar las distintas secuencias correctas de paréntesis, luego es claro que también existe una biyección entre los dos problemas.

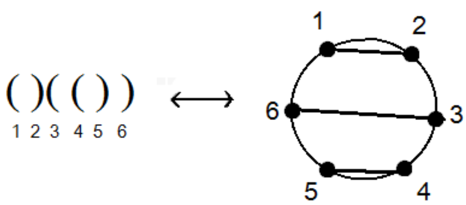

Figura 1.5: Ejemplo de la biyección.

Como es obvio, este problema también puede interpretarse como el problema de los caminos de Dyck, véase en más detalle [2].

«The ballot problem»

En unas elecciones con dos candidatos A y B, reciben un total de n votos cada uno, los cuales son contados de uno en uno. De cuantas formas pueden ser contadas las $2n$ papeletas de manera que el candidato A siempre va por delante o empatado con el candidato B?
Este problema puede verse como los caminos de Dyck si asociamos cada voto al candidato A como un paso en dirección noreste y cada voto a B como otro en dirección sureste. De la misma manera que en los caminos de Dyck, nunca podemos estar por debajo del punto de partida, análogamente tampoco el candidato B puede estar por delante y en las dos cuestiones, acaban en el mismo lugar, es decir, acaban empatados. Luego en esencia es el mismo problema y por lo tanto su solución también.

La escalera al cielo

En una cuadricula $n \times n$, de cuantas maneras podemos llegar desde la esquina inferior izquierda a la esquina superior derecha con pasos horizontales y verticales sin superar nunca la diagonal?

Para $n = 0, 1$ la solución es obvia, solo hay una manera. Para $n = 2$ hay dos maneras, para una cuadricula 3×3 hay 5 y para $n = 4$ son 14. La prueba gráfica para los primeros 6 casos se puede consultar en [1].

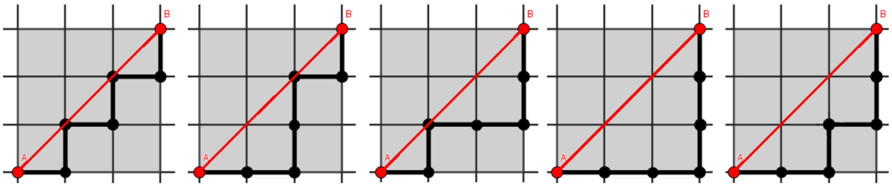

Figura 1.6: Solución para $n = 3$.

Este problema también se puede ver como los caminos de Dyck, pues cada paso horizontal corresponde a un paso noreste y cada paso vertical a uno sureste. Además, como en ningún momento puede haber más pasos verticales que horizontales, ya que sino nos podríamos encontrar por encima de la diagonal, cumplimos el requisito de los caminos de Dyck de no estar por debajo del punto inicial. Luego tenemos la solución con los números de Catalan.

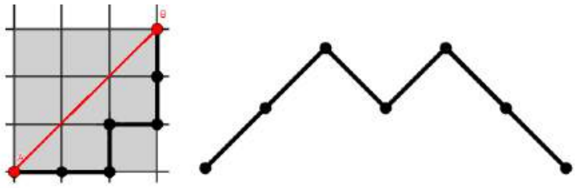

Figura 1.7: Ejemplo de la biyección entre los dos problemas.

Capítulo 2

Triangulo de Catalan e identidades combinatorias

2.1. El triangulo de Catalan

Existen muchos triángulos conocidos como triangulo de Catalan, pero el siguiente es uno de los más relevantes,

k/m	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	1								
1	1	1							
2	1	2	2						
3	1	3	5	5					
4	1	4	9	14	14				
5	1	5	14	28	42	42			
6	1	6	20	48	90	132	132		
7	1	7	27	75	165	297	429	429	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	

Cada entrada viene dada por la fórmula

$$C_{k,m} := \frac{(k+m)!(k-m+1)}{m!(k+1)!} \quad \text{con} \quad 0 \leq m \leq k.$$

Notar que $C_{k,k}$ es el k-ésimo numero de Catalan. Para nuestro estudio vamos a considerar otro triangulo, el introducido por Shapiro en [11], definiendo el par (n,p) como $k+m=2n-1$ y $p=n-m$. Por lo que ahora la fórmula queda

$$B_{n,p} := \frac{p}{n}\binom{2n}{n-p} \quad \text{con} \quad n,p \in \mathbb{N}, p \leq n.$$

y el nuevo triangulo queda,

n/p	1	2	3	4	5	6	7	…
1	1							
2	2	1						
3	5	4	1					
4	14	14	6	1				
5	42	48	27	8	1			
6	132	165	110	44	10	1		
7	429	572	429	208	65	12	1	
…	…	…	…	…	…	…	…	…

A partir de ahora cuando se haga una referencia al triangulo de Catalan, nos referiremos a este último triangulo. La nueva fórmula obtenida se puede expresar mediante la recurrencia (véase [11])

$$B_{n,p} = B_{n-1,p-1} + 2B_{n-1,p} + B_{n-1,p+1} \quad \text{para} \quad p \geq 2.$$

Como era de esperar, en este triangulo también aparecen los números de Catalan, vemos como la primera columna corresponde a dichos números ($B_{n,1} = C_n$).

2.2. Identidades combinatorias I

En esta sección probaremos identidades entre $B_{n,p}$ y C_n contenidas en [3]. Para alguna demostración, la siguiente identidad será de gran ayuda. Sean $n, m, p \in \mathbb{N}$ tales que $0 \leq p \leq n, m$. La identidad de Vandermonde afirma:

$$\binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}. \tag{2.1}$$

Pueden encontrarla en [13]. Notar que en el caso $m = n = p$, la igualdad nos recuerda a los números de Catalan,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2. \tag{2.2}$$

Proposición 2.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$, se cumplen las siguientes identidades*

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k}^2 = \frac{1}{2}\left(\binom{4n}{2n} - \binom{2n}{n}^2\right).$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \binom{2n-1}{k}^2 = \frac{1}{2}\binom{2(2n-1)}{2n-1} - \binom{2n-1}{n-1}^2$ con $n \geq 2$.

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2\binom{2n}{k}^2 = 2n^2\left(\binom{2(2n-1)}{2n-1} - 2\binom{2n-1}{n}^2\right)$ con $n \geq 2$.

(iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} k\binom{2n}{k}^2 = n\binom{4n-1}{2n-1} - 3n\binom{2n-1}{n}^2$ con $n \geq 2$.

(v) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} k\binom{2n-1}{k}^2 = \frac{2n-1}{2}\left(\binom{4n-3}{2(n-1)} - 2\binom{2n-1}{n-1}\binom{2(n-1)}{n-2} - \binom{2(n-1)}{n-1}^2\right)$ con $n \geq 3$.

Demostración. (i) Aplicando (2.2) se tiene

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}^2 = \binom{4n}{2n}, \quad n \geq 0.$$

Pero por otro lado,

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k}^2 + \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k}^2 + \binom{2n}{n}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n}{2n-j}^2,$$

por lo tanto,

$$2\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k}^2 = \binom{4n}{2n} - \binom{2n}{n}^2.$$

Para probar (ii) se procede de manera similar.

(iii) Tenemos en cuenta,

$$k\binom{2n}{k} = k \cdot \frac{(2n)!}{k!\,(2n-k)!} = 2n \cdot \frac{(2n-1)!}{(k-1)!\,(2n-k)!} = 2n\binom{2n-1}{k-1}.$$

Luego

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \binom{2n}{k}^2 = \sum_{k=1}^{n-1} (2n)^2 \binom{2n-1}{k-1}^2 = 4n^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{2n-1}{j}^2.$$

Ahora usamos (ii) y obtenemos el resultado. Los apartados (iv) y (v) se demuestran de forma análoga. □

Los siguientes teoremas muestran más relaciones entre C_n y $B_{n,p}$.

Teorema 2.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\sum_{p=1}^{n} (B_{n,p})^2 = C_{2n-1}.$$

Demostración.

$$\sum_{p=1}^{n} (B_{n,p})^2 = \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{p}{n} \binom{2n}{n-p} \right)^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} \left((n-j) \binom{2n}{j} \right)^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{p=0}^{n-1} (n^2 - 2np + p^2) \binom{2n}{p}^2.$$

Ahora usando (i), (iii) y (iv) de la proposición (2.1) se tiene

$$\sum_{p=1}^{n} (B_{n,p})^2 = \frac{1}{2}\binom{4n}{2n} + 2\binom{4n-2}{2n-1} - 2\binom{4n-1}{2n-1} - \left(\frac{1}{2}\binom{2n}{n}^2 + 4\binom{2n-1}{n}^2 - 6\binom{2n-1}{n}^2 \right)$$

es sencillo comprobar que

$$\frac{1}{2}\binom{2n}{n}^2 + 4\binom{2n-1}{n}^2 - 6\binom{2n-1}{n}^2 = 0,$$

con lo que finalmente

$$\sum_{p=1}^{n} (B_{n,p})^2 = \frac{1}{2}\binom{4n}{2n} + 2\binom{4n-2}{2n-1} - 2\binom{4n-1}{2n-1} =$$

$$= \frac{(4n)(4n-1)}{2(2n)^2}\binom{4n-2}{2n-1} + 2\binom{4n-2}{2n-1} - 2\frac{4n-1}{2n}\binom{4n-2}{2n-1} = \frac{1}{2n}\binom{4n-2}{2n-1} = C_{2n-1}.$$

□

Teorema 2.3. *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\sum_{p=1}^{n} (pB_{n,p})^2 = (3n-2)C_{2(n-1)}.$$

Demostración. Procedemos inicialmente como en la anterior demostración,

$$\sum_{p=1}^{n} (pB_{n,p})^2 = \sum_{p=1}^{n} \frac{p^4}{n^2} \binom{2n}{n-p}^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)^4 \binom{2n}{j}^2.$$

Desarrollamos el binomio,

$$(n-p)^4 = n^4 - 4n^3p + 6n^2p^2 - 4np^3 + p^4 =$$
$$= n^4 - 4n^3p + p^2(p-1)^2 + (2-4n)p^2(p-1) + p^2(6n^2 - 4n + 1).$$

Tenemos ahora,

$$\frac{1}{n^2}\sum_{p=0}^{n-1}(n-p)^4\binom{2n}{p}^2 = n^2\sum_{p=0}^{n-1}\binom{2n}{p}^2 - 4n\sum_{p=0}^{n-1}p\binom{2n}{p}^2 + \frac{(6n^2-4n+1)}{n^2}\sum_{p=0}^{n-1}p^2\binom{2n}{p}^2$$
$$+\frac{(2-4n)}{n^2}\sum_{p=0}^{n-1}p^2(p-1)\binom{2n}{p}^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{p=0}^{n-1}p^2(p-1)^2\binom{2n}{p}^2 = I+II+III+IV+V.$$

Aplicando los resultados de la proposición (2.1),

$$I = \frac{n^2}{2}\left(\binom{4n}{2n} - \binom{2n}{n}^2\right); \quad II = -4n^2\left(\binom{4n-1}{2n-1} - 3\binom{2n-1}{n}^2\right);$$
$$III = 2(6n^2-4n+1)\left(\binom{2(2n-1)}{2n-1} - 2\binom{2n-1}{n}^2\right).$$

Haciendo el cambio $j = p-1$

$$IV = \frac{(2-4n)}{n^2}\sum_{j=0}^{n-2}(j+1)^2 j\binom{2n}{j+1}^2 = \frac{(2-4n)}{n^2}\sum_{j=0}^{n-2}(j+1)^2 j\left(\frac{2n(2n-1)!}{(j+1)!\,(2n-j-1)}\right)^2 =$$
$$= 4(2-4n)\sum_{j=0}^{n-2} j\left(\frac{(2n-1)!}{j!\,(2n-j-1)}\right)^2 = 4(2-4n)\sum_{j=0}^{n-2} j\binom{2n-1}{j}^2 = -8(2n-1)\sum_{p=0}^{n-2}p\binom{2n-1}{p}^2.$$

ahora por la proposición (2.1) (v),

$$IV = -8\frac{(2n-1)^2}{2}\left(\binom{4n-3}{2(n-1)} - 2\binom{2n-1}{n-1}\binom{2(n-1)}{n-2} - \binom{2(n-1)}{n-1}^2\right).$$

Análogamente como en IV,

$$V = 4(2n-1)^2\sum_{j=1}^{n-2}\binom{2n-2}{j-1}^2 = 4(2n-1)^2\sum_{p=0}^{n-3}\binom{2n-2}{p}^2$$
$$= 4(2n-1)^2\left(\frac{1}{2}\left[\binom{4n-4}{2n-2} - \binom{2n-2}{n-1}\right] - \binom{2n-2}{n-1}\right).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^2}\sum_{p=0}^{n-1}(n-p)^4\binom{2n}{p}^2 &= \frac{n^2}{2}\left(\binom{4n}{2n} - \binom{2n}{n}^2\right) \\
&- 4n^2\left(\binom{4n-1}{2n-1} - 3\binom{2n-1}{n}^2\right) \\
&+ 2(6n^2-4n+1)\left(\binom{2(2n-1)}{2n-1} - 2\binom{2n-1}{n}^2\right) \\
&- 4(2n-1)^2\left(\binom{4n-3}{2(n-1)} - 2\binom{2n-1}{n-1}\binom{2(n-1)}{n-2} - \binom{2(n-1)}{n-1}^2\right) \\
&+ 4(2n-1)^2\left(\frac{1}{2}\left[\binom{4n-4}{2n-2} - \binom{2n-2}{n-1}\right] - \binom{2n-2}{n-1}\right).
\end{aligned}$$

Viendo que los siguientes términos se anulan,

$$-\frac{n^2}{2}\binom{2n}{n}^2+12n^2\binom{2n-1}{n}^2-4(6n^2-4n+1)\binom{2n-1}{n}^2$$
$$+4(2n-1)^2\left(2\binom{2n-1}{n-1}\binom{2(n-1)}{n-2}+\binom{2(n-1)}{n-1}^2\right)-4(2n-1)^2\left(\frac{1}{2}\binom{2n-2}{n-1}+\binom{2n-2}{n-1}\right)=0,$$

y operando con los restantes obtenemos el resultado

$$\frac{n^2}{2}\binom{4n}{2n}-4n^2\binom{4n-1}{2n-1}+2(6n^2-4n+1)\binom{2(2n-1)}{2n-1}$$
$$-4(2n-1)^2\binom{4n-3}{2(n-1)}+4(2n-1)^2\frac{1}{2}\binom{4n-4}{2n-2}=(3n-2)C_{2(n-1)}.$$

□

Por la proposición (1.3),

$$(3n-2)C_{2(n-1)}=\frac{(3n-2)n}{4n-3}C_{2n-1}.$$

Luego estos dos teoremas nos hacen plantearnos si para todo $k\in\mathbb{N}$, se tiene

$$\sum_{p=1}^{n}(p^k B_{n,p})^2=P_k(n)C_{2n-1}, \tag{2.3}$$

es decir, si el sumatorio se puede expresar como el producto de un polinomio por dicho número de Catalan.

Para los casos $k=0$ y $k=1$ hemos visto que sí sucede, en el siguiente capítulo abordaremos esta cuestión.

Capítulo 3

Conjeturas en el triangulo de Catalan

Para poder plantearnos la cuestión final del anterior capítulo, necesitamos introducir previamente el método WZ de Herb S. Wilf y Doron Zeilberger [9].

3.1. El método WZ

Definición. Una función discreta $F(n,k)$ se dice hipergeométrica en sus dos variables si,

$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)}, \quad \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} \quad n,k \in \mathbb{N}$$

ambas son funciones racionales.

Un ejemplo de función hipergeométrica son los números combinatorios.
Supongamos que tenemos una identidad $A = B$ donde A es una serie de términos de una función hipergeométrica y B es el supuesto resultado de la serie. Por ejemplo la identidad (2.2). El método WZ es un algoritmo que nos permite verificar la igualdad con ayuda del ordenador. Esto es posible ya que es un método simbólico y no numérico, por lo que las demostraciones generadas son totalmente rigurosas y pueden ser corroboradas por nosotros. Además de proporcionar demostraciones es un algoritmo muy útil para evaluar y descubrir identidades.

La validez de las demostraciones del método se logra obteniendo lo que se denomina par WZ.

Definición. Un par WZ (o par Wilf-Zeilberger) son un par de funciones discretas $(F(n,k), G(n,k))$ tales que verifican,

$$F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k) \tag{3.1}$$

Supongamos que queremos probar la igualdad $\sum_k f(n,k) = r(n)$. Lo primero que tenemos que hacer es pasar dividiendo $r(n)$ para tener

$$\sum_k F(n,k) = 1, \quad \text{con} \quad F(n,k) = \frac{f(n,k)}{r(n)}$$

Notar que si $r(n) = 0$ no importa, pues ya estaría igualado a una constante que es lo que queremos.

Definimos $f(n) := \sum_k F(n,k)$, veamos que $f(n)$ es constante para todo n. Una forma de probarlo es ver si $f(n+1) - f(n) = 0$ para todo n. Esto sucedería si encontráramos una función $G(n,k)$ que verificara (3.1), porque entonces sumaríamos todos los enteros k y veríamos como en efecto, $f(n+1) - f(n)$ es siempre 0 (ya que la suma es telescópica). Wilf y Zielberger probaron en general que si G existe, entonces $G(n,k) = R(n,k)F(n,k)$ donde R es una función racional. Por suerte, en la gran mayoría de casos se tiene esta existencia y esta es sencilla de encontrar con el algoritmo WZ, que nos proporciona la función R y solo tenemos que multiplicar por la función F.

3.2. Identidades combinatorias II

El siguiente teorema que presentamos esta probado en [3](página 58, teorema 5) con una demostración bastante técnica y con gran habilidad. Pero en nuestro caso haremos uso del programa informático MAPLE con el paquete EKHAD [15] escrito por Zeilberger, el cual contiene el algoritmo WZ para demostrar identidades como las que vamos a ver a continuación del triangulo de Catalan. Un ejemplo de su uso se puede encontrar en [9] (ejemplo 7.5.3).

Teorema 3.1. *Sea $n,k \in \mathbb{N}$ tal que $i \leq n$, entonces*

$$\sum_{p=1}^{k} B_{n,p}B_{n,n+p-k}(n+2p-k) = (n+1)C_n\binom{2(n-1)}{k-1}.$$

Demostración. Definimos en Maple la función

$$F(n,k,p) := \frac{B_{n,p}B_{n,n+p-k}\cdot(n+2p-k)}{(n+1)C_n\binom{2(n-1)}{k-1}}, \quad 1 \leq p \leq i \leq n,$$

y escribimos el comando `ct(F(n,k,p),1,p,n,N)`. El algoritmo nos devuelve por pantalla el par

$$N+1, \quad R(n,k,p),$$

donde $R(n,k,p)$ es la función racional con la que obtenemos el par WZ y $N+1$ hace referencia a que la serie es telescópica. Aplicando la teoría WZ tenemos la demostración concluida. □

Corolario 3.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\sum_{p=1}^{n} p(B_{n,p})^2 = (n+1)(2n-3)C_nC_{n-2}.$$

Demostración. Tomando $k = n$ en el teorema anterior se comprueba directamente,

$$\sum_{p=1}^{n} B_{n,p}B_{n,n+p-n}(n+2p-n) = 2\sum_{p=1}^{n} p(B_{n,p})^2 = n(n+1)C_nC_{n-1},$$

luego aplicando la recurrencia (1.3),

$$\sum_{p=1}^{n} p(B_{n,p})^2 = \frac{n(n+1)}{2}C_nC_{n-1} = (n+1)(2n-3)C_nC_{n-2}.$$

□

Corolario 3.3. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ un polinomio de segundo grado. Entonces*

$$\sum_{p=1}^{n} f(p)(B_{n,p})^2 = a_0C_{2n-1} + a_1\frac{n(n+1)}{2}C_nC_{n-1} + a_2(3n-2)C_{2(n-1)}.$$

Demostración. Por linealidad, se tiene

$$\sum_{p=1}^{n} f(p)(B_{n,p})^2 = a_0\sum_{p=1}^{n}(B_{n,p})^2 + a_1\sum_{p=1}^{n} p(B_{n,p})^2 + a_2\sum_{p=1}^{n} p^2(B_{n,p})^2.$$

Haciendo uso de los teoremas (2.2), (2.3) y del corolario anterior se tiene el resultado. □

Volviendo a aplicar la poderosa herramienta EKHAD, vamos a abordar la identidad planteada (2.3) al final del anterior capítulo para unos cuantos valores de k. Incluiremos en el siguiente teorema los resultados de los teoremas (2.2) y (2.3), ya que con este software informático obtenemos una demostración equivalente y así ilustraremos mejor nuestro problema.

Teorema 3.4. *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces*

(i) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} (B_{n,p})^2 = C_{2n-1}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} (pB_{n,p})^2 = (3n-2)C_{2(n-1)}$.

(iii) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} (p^2 B_{n,k})^2 = \frac{(15n^3-30n^2+16n-2)n}{(4n-3)(4n-5)} C_{2n-1}$.

(iv) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} (p^3 B_{n,k})^2 = \frac{(105n^5-420n^4+588n^3-356n^2+96n-10)n}{(4n-3)(4n-5)(4n-7)} C_{2n-1}$.

Demostración. Como el proceso de demostración es igual para los cuatro casos, vamos a detallar aquí solo el apartado (i). En el apéndice aparecerá la demostración informática de los restantes.
Definimos la función

$$F(n,p) := \frac{(B_{n,p})^2}{C_{2n-1}} = \frac{2p^2\binom{2n}{n-p}^2}{n\binom{4n-2}{2n-1}} = \frac{2p^2 \cdot (2n!)^2 \cdot ((2n-1)!)^2}{n \cdot ((n-p)!)^2 \cdot ((n+p)!)^2 \cdot (4n-2)!},$$

y ejecutamos el comando `ct(F(n,p),1,p,n,N)`. El programa nos devuelve el par, $1-N$ (recurrencia telescópica) y la función racional $R(n,p)$, la cual nos proporciona la función G dada por $G(n,p) = R(n,p)F(n,p)$. De este modo obtenemos el par WZ.

$$R(n,p) = \frac{(p-1)(-8np^3+16n^3p+12np^2-2p^3-8n^3+18n^2p-p+3p^2-9n^2-2n)}{2p(16n^2-1)(n+1-p^2)}.$$

Haciendo uso de la teoria WZ, se demuestra la identidad deseada. □

Como acabamos de ver, se cumple (2.3) para más valores de k. Ahora por el corolario (3.2), nos preguntamos si para p con exponente impar también sucede, en este caso relacionando C_nC_{n-2} por un polinomio. Esto nos lleva al siguiente teorema.

Teorema 3.5. *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces*

(i) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p(B_{n,p})^2 = (n+1)(2n-3)C_nC_{n-2}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^3(B_{n,p})^2 = n(n+1)(2n-3)C_nC_{n-2}$.

(iii) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} p^5(B_{n,k})^2 = n(n+1)(3n^2-5n+1)C_nC_{n-2}$.

(iv) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} p^7(B_{n,k})^2 = n(n+1)(6n(n-1)^2-1)C_nC_{n-2}$.

Demostración. Siguiendo los mismos pasos que la demostración del teorema anterior se comprueban estas identidades. □

3.3. Cuestiones abiertas

Nuestra cuestión (2.3), podemos deducir partiendo del teorema (3.4), que el polinomio buscado tiene la siguiente forma,

$$P_k(n) = q_k(n) \cdot \prod_{j=1}^{k} \big(4n - (2j+1)\big)^{-1}.$$

Sin embargo no podemos dar respuesta a la pregunta, existen polinomios $q_k(n)$ con coeficientes enteros tales que

$$\sum_{p=1}^{n} (p^k B_{n,p})^2 = q_k(n) \cdot \prod_{j=1}^{k} \big(4n - (2j+1)\big)^{-1}, \quad \text{para } k \in \mathbb{N}.$$

Ya que aún nos queda la incógnita de descubrir al misterioso polinomio $q_k(n)$. Lo mismo nos ocurre para el caso de exponentes impares. En esta cuestión nos preguntamos si existen polinomios $P_r(n)$ con coeficientes enteros tales que

$$\sum_{p=1}^{n} p^{2r-1} (B_{n,p})^2 = (n+1) P_r(n) C_n C_{n-2}, \quad \text{para } r \in \mathbb{N}.$$

Apéndice A

Ventana de trabajo de Maple con los comandos para demostrar el teorema (3.4).

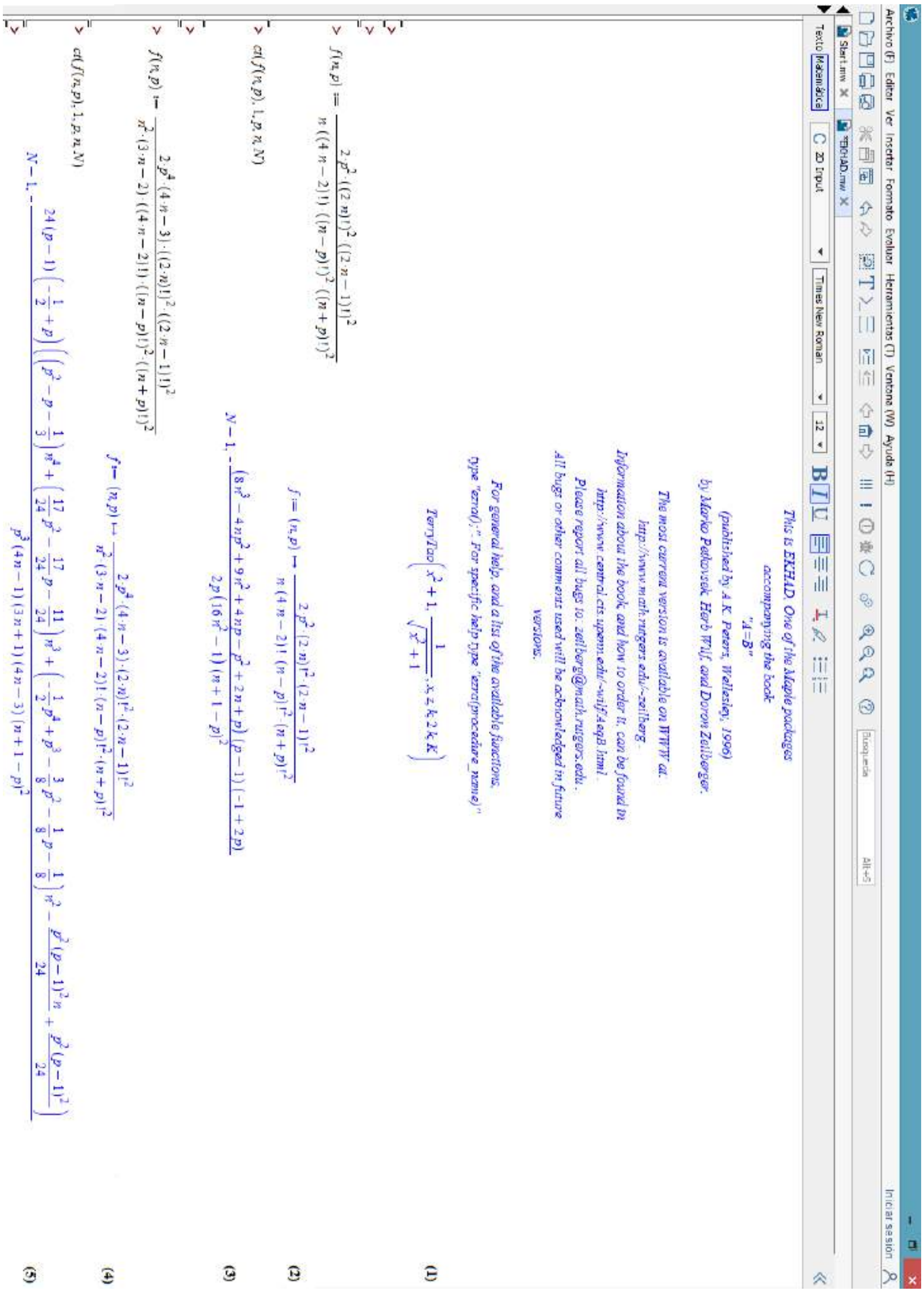

Figura 3.1: Demostración de (i) y (ii) por Maple y EKHAD

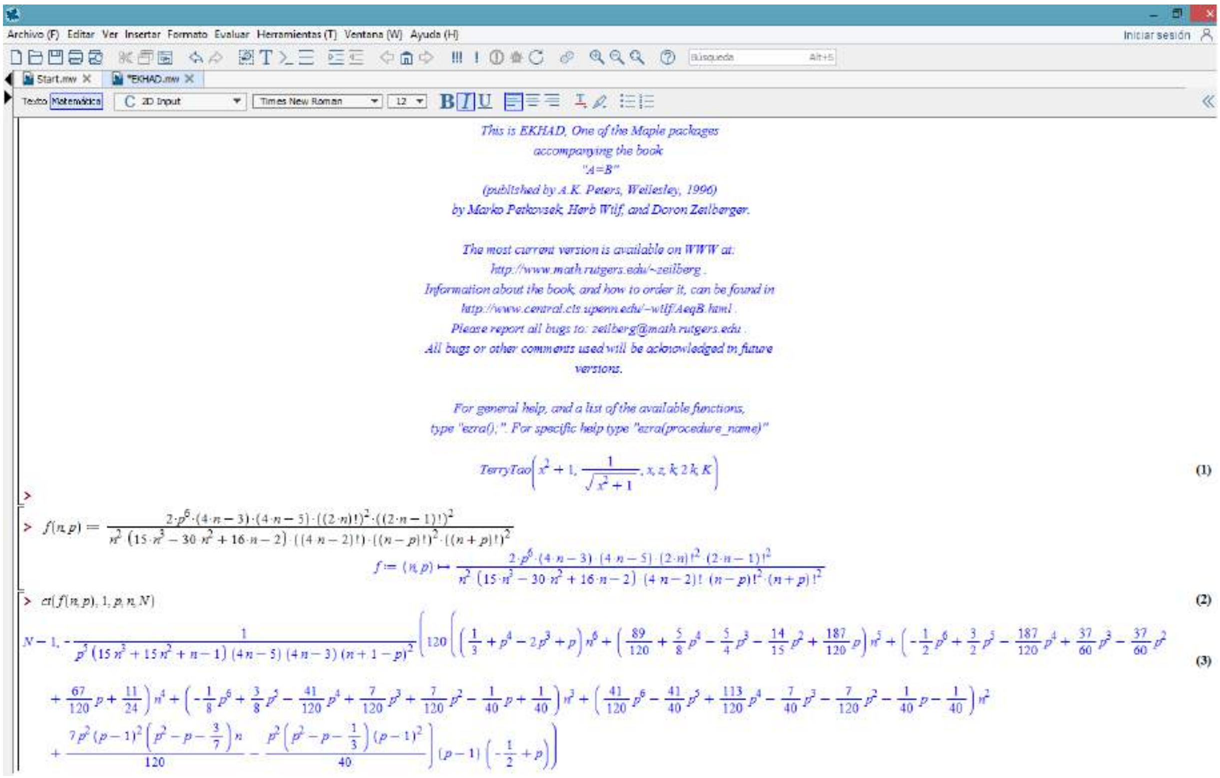

Figura 3.2: Demostración con Maple y EKHAD de (iii)

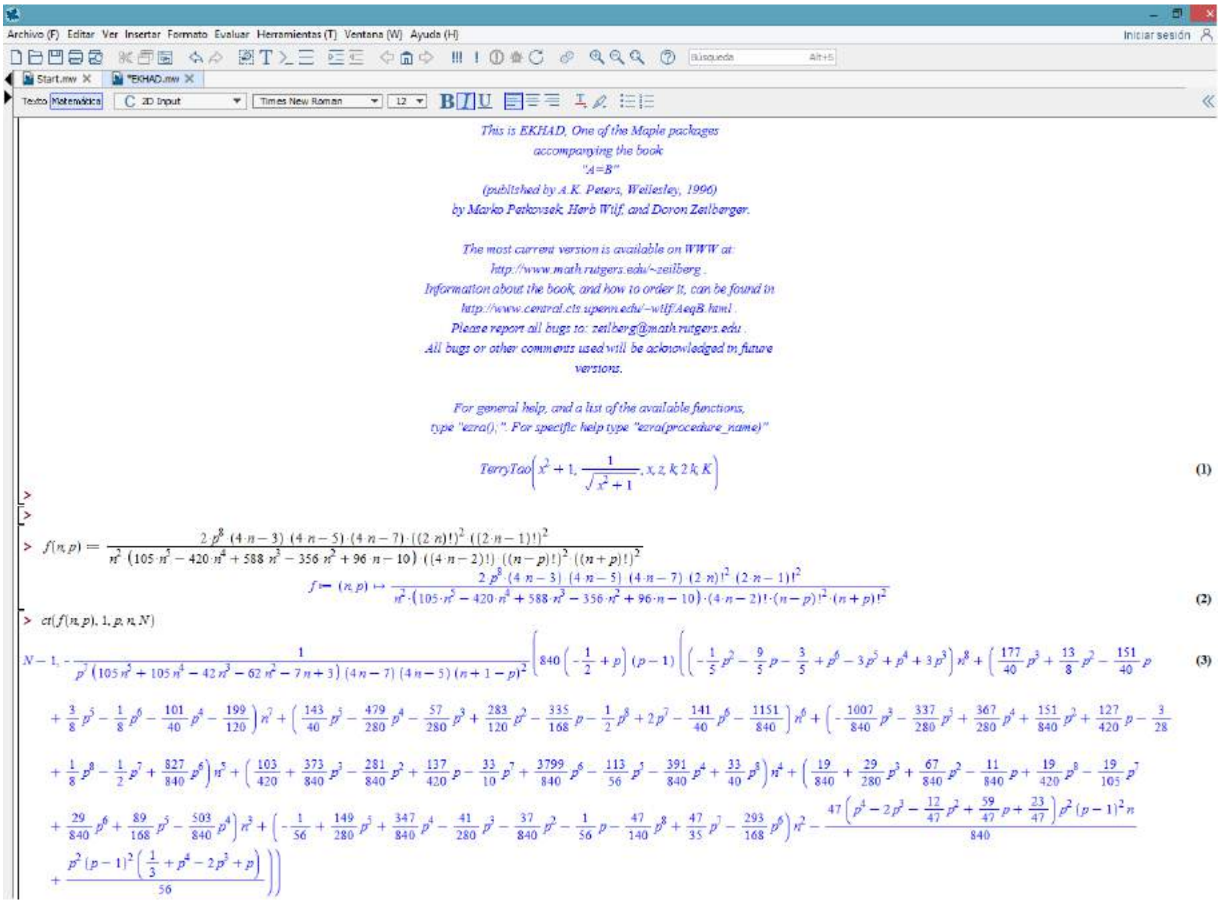

Figura 3.3: Demostración con Maple y EKHAD de (iv)

Apéndice B

Los 50 primeros números de Catalan.

n	C_n	n	C_n
0	1	26	18.367.353.072.152
1	1	27	69.533.550.916.004
2	2	28	263.747.951.750.360
3	5	29	1.002.242.216.651.368
4	14	30	3.814.986.502.092.304
5	42	31	14.544.636.039.226.909
6	132	32	55.534.064.877.048.198
7	429	33	212.336.130.412.243.110
8	1.430	34	812.944.042.149.730.764
9	4.862	35	3.116.285.494.907.301.262
10	16.796	36	11.959.798.385.860.453.492
11	58.786	37	45.950.804.324.621.742.364
12	208.012	38	176.733.862.787.006.701.400
13	742.900	39	680.425.371.729.975.800.390
14	2.674.440	40	2.622.127.042.276.492.108.820
15	9.694.845	41	10.113.918.591.637.898.134.020
16	35.357.670	42	39.044.429.911.904.443.959.240
17	129.644.790	43	150.853.479.205.085.351.660.700
18	477.638.700	44	583.300.119.592.996.693.088.040
19	1.767.263.190	45	2.257.117.854.077.248.073.253.720
20	6.564.120.420	46	8.740.328.711.533.173.390.046.320
21	24.466.267.020	47	33.868.773.757.191.046.886.429.490
22	91.482.563.640	48	131.327.898.242.169.365.477.991.900
23	343.059.613.650	49	509.552.245.179.617.138.054.608.572
24	1.289.904.147.324	50	1.978.261.657.756.160.653.623.774.456
25	4.861.946.401.452		

Bibliografía

[1] R. M. DICKAU, *Mathematical Figures Using Mathematica*, `https://mathforum.org/advanced/robertd/catalan.html`

[2] T. DOŜLIĆ, *Handshakes Across a (Round) Table*, Journal of Integer Sequences **13** Article 10.2.7, University of Zagreb, (2010). disponible en `http://emis.impa.br/EMIS/journals/JIS/VOL13/Doslic/doslic6.pdf`

[3] J. M. GUTIÉRREZ, M. A HERNÁNDEZ, P. J. MIANA Y N. ROMERO, *New identities in the Catalan triangle*, J. Math. Anal. App. **341**, No. 1, (2008), 52-61. disponible en `https://www.sciencedirect.com`

[4] T. KOSHY, *Catalan Numbers with Applications*, Oxford University Press, Oxford (2009), Capítulos 5,6 y 7.

[5] P. J. MIANA Y N. ROMERO, *Moments of combinatorial and Catalan numbers*, Journal of Number Theory **130** (2010), 1876-1887.

[6] P. J. MIANA Y N. ROMERO, *Computer proofs of new identities in the Catalan triangle*, Biblioteca de la Revista Matemática Iberoamericana, Procedente de «Segundas Jornadas de Teoría de Números», Madrid (2007), 203-208.

[7] I. PAK, *History of Catalan Numbers*, disponible en `http://arxiv.org/abs/1408.5711`

[8] I. PAK, Recopilatorio bibliográfico online de los números de Catalan, `https://www.math.ucla.edu/~pak/lectures/Cat/pakcat.htm`

[9] M. PETKOVŜEK, H. S. WILF Y D. ZEILBERGER, *A=B*, A.K. Peters, Wellesley, MA (1996), 121-141 y 199-202.

[10] M. H. ROSAS, *Los Números de (Euler)-Catalan*, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol X No. 1, (2003). disponible en `https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/catalan.pdf`

[11] L.W. SHAPIRO, *A Catalan triangle*, Discrete Mathematics **14** (1976), 83-90.

[12] R. P. STANLEY, *Catalan Numbers*, Cambrige University Press, Cambrige (2015).

[13] R. P. STANLEY, *Enumerative Combinatorics*, vol. **2**,Cambrige University Press, Cambrige (1999).

[14] A. TEFERA, *What is... a Wilf-Zeilberger Pair?*, Notices of the AMS **57** No. 4 (2010), 508-509. disponible en `http://www.ams.org/notices/201004/rtx100400508p.pdf`

[15] D. ZEILBERGER, Paquete EKHAD para Maple. disponible en `https://sites.math.rutgers.edu/~zeilberg/tokhniot/EKHAD`