

TD

Espaces vectoriels

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

EXERCICE 1 ■ □ □ Sous-espaces vectoriels ? ou pas ? _____

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

- | | |
|---|--|
| ① $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ | ④ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ |
| ② $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ | ⑤ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$ |
| ③ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ | ⑥ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ |

▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 2 ■ □ □ Complexifié _____

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition usuelle

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

et de la multiplication externe par les complexes définie par

$$(a + i \cdot b) \cdot (x, y) = (a \cdot x - b \cdot y, a \cdot y + b \cdot x)$$

Montrer que $E \times E$ est alors un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Celui-ci est appelé **complexifié de E** .

▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 3 ■ □ □ _____

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

- ① Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
- ② Déterminer $F \cap G$. Est-ce un sous-espace vectoriel de E ?

▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 4 ■ □ □ _____

Les parties suivantes sont-elles des espaces vectoriels ?

- | | |
|---|---|
| ① $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ bornée}\}$ | ⑦ $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est monotone}\}$ |
| ② $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ monotone}\}$ | ⑧ $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ s'annule en } 0\}$ |
| ③ $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ convergente}\}$ | ⑨ $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ s'annule}\}$ |
| ④ $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ arithmétique}\}$ | ⑩ $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est impaire}\}$ |
| ⑤ $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ périodique}\}$ | ⑪ $\{f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R}) \mid f'(a) = f'(b)\}$ |
| ⑥ $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$ | ⑫ $\{f \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R}) \mid \int_a^b f(t)dt = 0\}$ |

▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 5 ■ ■ □ _____

À quelle condition la réunion de deux sous-espaces vectoriels est-elle un sous-espace vectoriel?

▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 6 ■ □ □ _____

Comparer en tant qu'ensembles, $\text{Vect}(A \cap B)$ et $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$.

▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 7 ■ □ □ _____

Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres? Si ce n'est pas le cas, former une relation linéaire liant ces vecteurs :

- ① (x_1, x_2) avec $x_1 = (1, 0, 1)$ et $x_2 = (1, 2, 2)$
- ② (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, 0, 0)$, $x_2 = (1, 1, 0)$ et $x_3 = (1, 1, 1)$
- ③ (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, 2, 1)$, $x_2 = (2, 1, -1)$ et $x_3 = (1, -1, -2)$
- ④ (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, -1, 1)$, $x_2 = (2, -1, 3)$ et $x_3 = (-1, 1, -1)$.
- ⑤ (x_1, x_2) avec $x_1 = (1, 2, 3)$ et $x_2 = (-1, 4, 6)$;

⑥ (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, 2, -1)$, $x_2 = (1, 0, 1)$ et $x_3 = (0, 0, 1)$;

⑦ (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, 2, -1)$, $x_2 = (1, 0, 1)$ et $x_3 = (-1, 2, -3)$;

► Indication

► Correction

EXERCICE 8 ■ ■ □

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Étudier l'indépendance linéaire des familles suivantes:

① $(\sin x, \cos x)$;

③ $(\cos 2x, \sin^2 x, \cos^2 x)$;

② $(\sin 2x, \sin x, \cos x)$;

④ $(x, e^x, \sin(x))$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 9 ■ □ □

Soient $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = X^2 + X - 1$ et $P_3 = X^2 + X$.
Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

► Indication

► Correction

EXERCICES TECHNIQUES

EXERCICE 10 ■ □ □

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E . Montrer que $F \cap G = F + G \iff F = G$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 11 ■ □ □

Soient F, G et H des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .
Comparer $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$ au sens de l'inclusion.

► Indication

► Correction

EXERCICE 12 ■ ■ □

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Montrer que

$$F \subset G \implies F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 13 ■ ■ □

Soient $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 14 ■ ■ □

Dans l'espace $E = \mathcal{C}([0; \pi], \mathbb{R})$ on considère les parties

$$F = \{f \in E \mid f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\} \text{ et } G = \text{Vect}(\sin, \cos)$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

► Indication

► Correction

EXERCICES "COMME EN COLLE"

EXERCICE 15 ■ ■ □

Démontrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

① $(x \mapsto e^{ax})_{a \in \mathbb{R}}$ ② $(x \mapsto |x-a|)_{a \in \mathbb{R}}$ ③ $(x \mapsto \cos(ax))_{a > 0}$ ④ $(x \mapsto (\sin x)^n)_{n \geq 1}$

► Indication ► Correction

EXERCICE 16 ■ □ □

Soit $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) + f(1) = 0\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel, puis déterminer un supplémentaire de F dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 17 ■ □ □

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Les fonctions $x \mapsto \sin(x + a)$, $x \mapsto \sin(x + b)$ et $x \mapsto \sin(x + c)$ sont-elles linéairement indépendantes?

► Indication ► Correction

EXERCICE 18 ■ ■ □

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{K}_n[X]$ un polynôme non nul.

Montrer que $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid A|P\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$ et en déterminer la dimension et un supplémentaire.

► Indication ► Correction

EXERCICE 19 ■ □ □

Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose $P_k = (X + 1)^{k+1} - X^{k+1}$.

Montrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 20 ■ ■ □

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}^3$, on considère l'ensemble

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 2xz = 0\}$$

Est-ce un sous-espace vectoriel ...

① si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

② si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

► Indication ► Correction

EXERCICE 21 ■ □ □

Dans le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n , on considère la famille

$$\mathcal{F} := \left(1, (X - a), \frac{(X - a)^2}{2}, \frac{(X - a)^3}{3!}, \dots, \frac{(X - a)^n}{n!}\right)$$

Etudier l'indépendance et l'ensemble engendré par la famille $\mathcal{F}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 22 ■ ■ ■

Montrer que les familles des fonctions $x \mapsto \cos(nx)$ et $x \mapsto \cos^n x$ pour n parcourant $\mathbb{N}$ engendrent le même sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 23 ■ ■ □

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G de E ont un supplémentaire commun si, et seulement si, ils ont la même dimension.

► Indication ► Correction

EXERCICE 24 ■ ■ □ Polynômes de Newton

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $P_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$.

① Montrer que la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

② Vérifier que $P_k(m)$ est entier pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

③ Trouver tous les polynômes P prenant des valeurs entières sur chaque entier.

► Indication ► Correction

EXERCICE 25 ■ □ □

Soit P un polynôme à coefficients réels, de degré n .

Montrer que P et ses n dérivées forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 26 ■ ■ □

On appelle trace d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la somme des termes de la diagonale principale, notée $\text{Tr } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.

① Montrer que l'ensemble $\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{Tr}(A) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En donner une base pour $n = 2$.

② Soit $\mathcal{E}_2$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à trace nulle et telles que la somme des éléments de chaque ligne est nulle. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En donner une base pour $n = 3$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 27 ■ □ □ Espace vectoriel des suites récurrentes

- ① Soit E l'espace vectoriel des suites de nombres réels et $\mathcal{E} \subset E$ l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \quad (n \geq 0)$$

- 1.a Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de E .
- 1.b Montrer que les suites de terme général $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$ forment une famille libre de $\mathcal{E}$.
- 1.c Tenant compte du fait que les suites de $\mathcal{E}$ sont univoquement déterminées si on connaît u_0 et u_1 , montrer que (a_n) et (b_n) forment une base de $\mathcal{E}$.
- 1.d Déterminer les suites de $\mathcal{E}$ telles que $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

- ② **Généralisation.** Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites de nombres réels vérifiant

$$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

On suppose que α et β ne sont pas tous deux nuls.

- 2.a Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.
- 2.b Chercher une suite de $\mathcal{E}$ du type $a_n = r^n$. Montrer que r doit vérifier une équation de 2^e degré. Lorsque cette équation admet deux racines réelles et distinctes r_1 et r_2 , en déduire l'expression de u_n en fonction de u_0 et de u_1 .
- 2.c Montrer que lorsque l'équation de 2^e degré admet une racine double r , les suites $a_n = r^n$ et $b_n = nr^n$ forment une base de $\mathcal{E}$.
- 2.d Montrer que si λ_1 et λ_2 sont deux racines complexes conjuguées de l'équation de 2^e degré et $\lambda_1 = \rho e^{i\theta}$, alors les suites $a_n = \rho^n \cos n\theta$ et $b_n = \rho^n \sin n\theta$ forment une base de $\mathcal{E}$.
- ③ **Application.** Déterminer le terme général des suites définies par la relation de récurrence

a) $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ b) $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ c) $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 28 ■ □ □ Équations différentielles linéaires à coefficients constants

- ① Soit l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{E}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $y = y(x)$ la fonction inconnue (réelle de variable réelle.)

- 1.a Montrer que les solutions forment un espace vectoriel $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{R}$.
- 1.b A l'aide du théorème d'existence et unicité, montrer que $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{S} = 2$.
- ② Soit l'équation $r^2 + ar + b = 0$.
- 2.a Montrer que si elle admet deux racines réelles r_1, r_2 , alors la solution générale est
- 2.b Montrer que si l'équation caractéristique admet une racine double r , la solution générale est
- 2.c Montrer que si l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$, la solution générale est

$$y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) .$$

► Indication ► Correction

Indications

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 **Sous-espaces vectoriels ? ou pas ?** _____

On n'oublie pas de faire parler son intuition avant de se lancer dans la démonstration.

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 **Complexifié** _____

Long mais il suffit de vérifier les axiomes de définition d'un espace vectoriel.

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 _____

Voir le dernier exemple du cours (Structures algébriques) pour la méthode.

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 _____

On a pas peur des espaces de suites ou de fonctions. Les méthodes sont les mêmes.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 _____

On se rappellera du résultat sur les groupes.

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 _____

Une seule inclusion est vraie (par définition).

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 _____

Pour trouver la combinaison linéaire, vous pouvez juste résoudre l'équation de liberté.

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8 _____

Même méthode qu'avec des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On oublie pas d'évaluer en certains points pour obtenir des équations.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9 _____

On vérifie la liberté et la génération de la famille.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

EXERCICES TECHNIQUES

INDICATION POUR L'EXERCICE 10 _____

Un implication immédiate, l'autre se prouve par double inclusion.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11 _____

Pensez à un exemple avec des espaces de dimension 1 (des droites) pour le contre-exemple.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12

Par double inclusion.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13

Faire un raisonnement par analyse et synthèse pour l'existence de la décomposition.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 14

Faire un raisonnement par analyse et synthèse pour l'existence de la décomposition.

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

INDICATION POUR L'EXERCICE 15

Montrer pour $a_1, \dots, a_n$ est suffisant, avec n quelconque. Pourquoi ?
Il faut trouver des évaluations qui permettent de rendre, un à un, tous les λ_i nuls.
Pensez à classer les a_i pour vous faciliter la vie.

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 16

Le supplémentaire est de dimension 1.
Faire un raisonnement par analyse et synthèse pour l'existence de la décomposition.

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 17

Trouver deux fonctions qui engendrent ces trois fonctions et conclure.

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 18

Caractérisation d'une sous-espace vectoriel. Pour la dimension, on peut réécrire la relation de divisibilité avec sa définition, puis conclure par passage au degré.

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 19

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 20

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 21

Pour la liberté, il suffit de regarder les degrés.
Cela ne fait pas penser tout de suite à la formule de Taylor ?

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 22

Il faut montrer que l'espace engendré par une famille contient tous les éléments de l'autre famille. On utilise les formules de Moivre et Euler, pour cela.

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 23

Un sens est presque immédiat. Pour l'autre on peut faire une récurrence décroissante sur la dimension.

[↩ retour à l'EXERCICE 23](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 24 Polynômes de Newton

- ① Argument sur les degrés
- ② Relation avec les coefficients binomiaux

③ On peut écrire le polynôme recherché dans la nouvelle base juste trouvée.

[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 25

Il suffit de montrer que la famille est libre. Regardez les degrés !

[↩ retour à l'EXERCICE 25](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 26

Il suffit d'écrire proprement les conditions sur ces matrices et de les décomposer comme on fait pour trouver une famille génératrice sur des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

[↩ retour à l'EXERCICE 26](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 27 Espace vectoriel des suites récurrentes

[↩ retour à l'EXERCICE 27](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 28 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

[↩ retour à l'EXERCICE 28](#)

Corrections

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

Correction de l'EXERCICE 1 Sous-espaces vectoriels ? ou pas ? _____

- ① non : pas stable par multiplication scalaire : $(0, 1)$ appartient mais pas $-(0, 1)$
- ② non : pas stable par addition : $(1, 0) + (0, 1)$
- ③ oui
- ④ non : ne passe pas par $(0, 0)$.
- ⑤ non : pas stable par addition : $(1, 1) + (1, -1)$
- ⑥ oui, c'est l'espace nul!

↩ retour à l'EXERCICE 1

Correction de l'EXERCICE 2 Complexifié _____

Il est aisé de constater que l'addition sur $E \times E$ est commutative, associative, possède un neutre $(0_E, 0_E)$ et que tout élément est symétrisable dans $(E \times E, +)$, le symétrique de (x, y) étant $(-x, -y)$. Ainsi $(E \times E, +)$ est un groupe abélien. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $u, v \in E \times E$. On peut écrire $\lambda = a + ib, \mu = a' + ib'$ avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ et $u = (x, y), v = (x', y')$ avec $x, y, x', y' \in E$. On a

$$\begin{aligned}\lambda \cdot (u + v) &= (a + ib) \cdot (x + x', y + y') \\ &= (ax + ax' - by - by', ay + ay' + bx + bx') = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \cdot u &= ((a + a') + i(b + b')) \cdot (x, y) \\ &= (ax + a'x - by - b'y, ay + a'y + bx + b'x) = \lambda \cdot u + \mu \cdot u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda \cdot (\mu \cdot u) &= (a + ib)(a'x - b'y, a'y + b'x) \\ &= ((aa' - bb')x - (ab' + a'b)y, (aa' - bb')y + (ab' + a'b)x) \\ &= (\lambda\mu) \cdot u\end{aligned}$$

et

$$1 \cdot u = u$$

↩ retour à l'EXERCICE 2

Correction de l'EXERCICE 3 _____

- ① $F \subset \mathbb{R}^3, \vec{o} = (0, 0, 0) \in F$ car $0 + 0 - 0 = 0$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{u}, \vec{v} \in F$, on peut écrire $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$ avec $x + y - z = 0$ et $x' + y' - z' = 0$. On a alors $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$ avec

$$(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z') = \lambda(x + y - z) + \mu(x' + y' - z') = 0,$$

donc $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in F$.

De plus, $G \subset \mathbb{R}^3, \vec{o} = (0, 0, 0) \in G$ car $(0, 0, 0) = (a - b, a + b, a - 3b)$ pour $a = b = 0$.

Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{u}, \vec{v} \in G$, on peut écrire $\vec{u} = (a - b, a + b, a - 3b)$ et $\vec{v} = (a' - b', a' + b', a' - 3b')$ avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$.

On a alors $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \dots = (a'' - b'', a'' + b'', a'' - 3b'')$ avec $a'' = \lambda a + \mu a'$ et $b'' = \lambda b + \mu b'$ donc $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in G$.

Finalement F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

- ② $\vec{u} = (x, y, z) \in F \cap G$ si, et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} x = a - b \\ y = a + b \\ z = a - 3b \\ x + y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = a - b \\ y = a + b \\ z = a - 3b \\ a + 3b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -4b \\ y = -2b \\ z = -6b \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } F \cap G = \{(-4b, -2b, -6b) \mid b \in \mathbb{R}\} = \{(2c, c, 3c) \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

↩ retour à l'EXERCICE 3

Correction de l'EXERCICE 4 _____

- ① oui
- ② non
- ③ oui
- ④ oui

- (5) oui
- (6) $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, 0 = (0)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ car $\forall n \in \mathbb{N}, 0 = n \cdot 0 + 0$ Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $(u_n), (v_n) \in F$.
On a

$$\lambda(u_n) + \mu(v_n) = (\lambda u_n + \mu v_n)$$

avec pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = \lambda(nu_{n+1} + u_n) + \mu(nv_{n+1} + v_n) = n(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + \lambda u_n + \mu v_n$$

donc $\lambda(u_n) + \mu(v_n) \in F$. Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- (7) non

- (8) oui

- (9) non

- (10) oui

- (11) $F \subset \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ et $\tilde{0} \in F$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in F$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$ et

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(b) = \lambda f'(b) + \mu g'(b) = (\lambda f + \mu g)'(b)$$

donc $\lambda f + \mu g \in F$.

- (12) $G \subset \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ et $\tilde{0} \in G$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in G$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur $[a; b]$ et

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt = 0$$

donc $\lambda f + \mu g \in G$.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

Correction de l'EXERCICE 5

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Si $F \subset G$ ou $G \subset F$ alors $F \cup G$ vaut F ou G et est évidemment un sous-espace vectoriel de E .

Inversement, supposons que $F \cup G$ soit un sous-espace vectoriel de E et $F \not\subset G$. Il existe $x \in F$ tel que $x \notin G$. Pour tout $y \in G, x + y \in F \cup G$ par stabilité du sous-espace

vectoriel $F \cup G$. Si $x + y \in G$ alors $x = (x + y) - y \in G$ ce qui est exclu. Il reste $x + y \in F$ et alors $y = (x + y) - x \in F$. Ainsi $G \subset F$.

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

Correction de l'EXERCICE 6

$A \cap B \subset \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$ et $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel donc

$$\text{Vect}(A \cap B) \subset \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$$

L'inclusion réciproque n'est pas vraie. On peut prendre par exemple $A = \{u\}$ et $B = \{2u\}$ avec $u \neq 0_E$.

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

Correction de l'EXERCICE 7

- (1) Oui. Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
- (2) Oui. $a_1(1, 0, 0) + a_2(1, 1, 0) + a_3(1, 1, 1) = (a_1 + a_2 + a_3, a_2 + a_3, a_3)$. Cette CL est nulle si et seulement si les 3 sont nuls.
- (3) Non, $x_3 = x_2 - x_1$.
- (4) Non, $x_3 = -x_1$.
- (5) Oui. Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
- (6) Écrivons $au + bv + cw = 0$. Si on traduit cette égalité coordonnée par coordonnée, on obtient le système

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a = 0 \\ -a + b + c = 0 \end{cases}$$

On en déduit, par la deuxième ligne, $a = 0$, puis $b = 0$ et $c = 0$. La famille (u, v, w) est une famille libre.

- (7) Écrivons $au + bv + cw = 0$. Ceci se traduit en le système

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ 2a + 2c = 0 \\ -a + b - 3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b - c = 0 \\ -2b + 4c = 0L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ 2b - 4c = 0L_3 + L_1 \rightarrow L_3 \end{cases}$$

Pour $c = 1, b = 2$ et $a = -1$, on obtient une solution non-nulle du système. Autrement dit, $-u + 2v + w = 0$ et donc la famille (u, v, w) est liée.

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

Correction de l'EXERCICE 8

- ① Si on a une relation de liaison de la forme $a \cos x + b \sin x = 0$, alors on l'évalue en $x = 0$ et on trouve $a = 0$. Puis en évaluant en $x = \pi/2$, on trouve $b = 0$. La famille est libre.
- ② Si on a une relation de liaison de la forme $a \cos x + b \sin x + c \sin(2x) = 0$, alors on l'évalue en $x = 0$ pour trouver $a = 0$, puis en $x = \pi/2$ pour trouver $b = 0$. On en déduit que $c = 0$. La famille est donc libre. Il faut prendre garde ici à ce que la formule de trigonométrie

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

n'entraîne pas que $\sin(2x)$ est une combinaison linéaire de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

- ③ On a

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

qui prouve que $\cos(2x)$ est une combinaison linéaire de $\cos^2 x$ et de $\sin^2 x$. La famille est donc liée.

- ④ Si on a une relation de liaison du type

$$ax + be^x + c \sin(x) = 0$$

alors on met e^x en facteur et on trouve :

$$axe^{-x} + b + c \sin(x)e^{-x} = 0$$

On fait tendre x vers $+\infty$ et le membre de gauche tend vers b qui doit donc être nul. On a alors

$$ax + c \sin x = 0$$

Si $a \neq 0$, le membre de gauche tend vers $\pm\infty$ quand x tend vers $+\infty$. C'est donc que $a = 0$. On en déduit $c = 0$ et la famille est libre.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

Correction de l'EXERCICE 9

Supposons $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$. Par égalité de coefficients de polynômes

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Après résolution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille (P_1, P_2, P_3) est une famille libre formée de $3 = \dim \mathbb{K}_2[X]$ polynômes de $\mathbb{K}_2[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

EXERCICES TECHNIQUES

Correction de l'EXERCICE 10

($\Leftarrow$) Immédiat.

($\Rightarrow$) On a $F \subset F + G = F \cap G \subset G$
et de même $G \subset F + G = F \cap G \subset F$ et donc $F = G$ par double inclusion.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

Correction de l'EXERCICE 11

Soit $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$, on peut écrire $x = u + v$ avec $u \in F \cap G$ et $v \in F \cap H$.
Comme $u, v \in F$ on a $x \in F$ et comme $u \in G$ et $v \in H$ on a $u + v \in G + H$.
On obtient donc $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$.
L'égalité n'est pas possible, prendre F, G, H trois droites distinctes d'un même plan.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

Correction de l'EXERCICE 12

$$F + (G \cap H) \subset F + G \text{ et } F + (G \cap H) \subset F + H \text{ donc} \\ F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H).$$

Supposons de plus $F \subset G$. Soit $\vec{x} \in (F + G) \cap (F + H)$. On a $\vec{x} \in F + G = G$ et $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in H$. $\vec{v} = \vec{x} - \vec{u} \in G$ donc $\vec{v} \in G \cap H$ puis $x \in F + (G \cap H)$.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

Correction de l'EXERCICE 13

$F \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\tilde{o} \in F$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in F$,

$$(\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = 0$$

et

$$(\lambda f + \mu g)'(0) = \lambda f'(0) + \mu g'(0) = 0$$

donc $\lambda f + \mu g \in F$. $G \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\tilde{o} \in G$ (en prenant $a = b = 0$). Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in G$, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b \text{ et } g(x) = cx + d$$

et on a alors

$$(\lambda f + \mu g)(x) = ex + f$$

avec

$$e = \lambda a + \mu c \in \mathbb{R} \text{ et } f = \lambda b + \mu d \in \mathbb{R}$$

donc $\lambda f + \mu g \in G$. Soit $h \in F \cap G$. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = ax + b$$

car $h \in G$. Or $h \in F$ donc $h(0) = b = 0$ et $h'(0) = a = 0$ puis $h(x) = 0$ i.e. $h = \tilde{o}$. Ainsi

$$F \cap G = \{\tilde{o}\}$$

Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Posons $a = h'(0) \in \mathbb{R}, b = h(0), g : x \mapsto ax + b$ et $f = h - g$. Clairement $g \in G$ et $h = f + g$. De plus $f(0) = h(0) - b = 0$ et $f'(0) = h'(0) - a = 0$ donc $f \in F$. Ainsi

$$F + G = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Finalement, F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

Correction de l'EXERCICE 14

F et G sont clairement des sous-espaces vectoriels de E . Soit $f \in F \cap G$. On peut écrire $f = \lambda \cdot \sin + \mu \cdot \cos$. De plus $f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)$ donne : $\mu = \lambda = -\mu$ d'où $\lambda = \mu = 0$ puis $f = 0$.

Soit $f \in E$. Posons $\lambda = \frac{2f(\pi/2) - f(0) - f(\pi)}{2}, \mu = \frac{f(0) - f(\pi)}{2}, h = \lambda \sin + \mu \cos$ et $g = f - h$. On a $f = g + h$ avec $g \in F$ et $h \in G$.

Ainsi F et G sont supplémentaires dans E .

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

Correction de l'EXERCICE 15

- ① Soient $a_1 < a_2 < \dots < a_p$, où p est arbitraire. Il suffit de montrer que $(e^{a_1 x}, \dots, e^{a_p x})$ est une famille libre. Considérons une relation de liaison $\lambda_1 e^{a_1 x} + \dots + \lambda_p e^{a_p x}$. On factorise par le terme dominant, c'est-à-dire $e^{a_p x}$. On obtient

$$e^{a_p x} (\lambda_p + \lambda_{p-1} e^{(a_{p-1} - a_p)x} + \dots + \lambda_1 e^{(a_1 - a_p)x}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

On simplifie par $e^{a_p x}$, qui ne s'annule jamais, et on fait tendre x vers $+\infty$. Puisque $e^{(a_j - a_p)x}$ tend vers 0 pour $j < p$, le membre de gauche converge vers λ_p qui vaut donc 0. On répète le procédé en factorisant ensuite par $e^{a_{p-1}x}$ pour prouver que $\lambda_{p-1} = 0$, et on obtient successivement que $\lambda_p, \lambda_{p-1}, \dots$ et finalement λ_1 sont nuls (on peut aussi effectuer une récurrence). La famille est donc effectivement libre. Avec le même type de raisonnement (mais c'est plus dur d'ordonner les couples), on pourra prouver que la famille $(x^a (\ln x)^b)_{a,b \in \mathbb{R}}$ est libre.

- ② Soient $a_1 < a_2 < \dots < a_p$, où p est arbitraire. Il suffit de montrer que

$$(x \mapsto |x - a_1|, \dots, x \mapsto |x - a_p|)$$

est une famille libre. Considérons une relation de liaison, c'est-à-dire supposons que $\lambda_1 |x - a_1| + \dots + \lambda_p |x - a_p| = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit k dans $\{1, \dots, p\}$ et réécrivons la relation sous la forme

$$\lambda_k |x - a_k| = - \sum_{j \neq k} \lambda_j |x - a_j| := g_k(x)$$

Alors, la fonction g_k est dérivable en a_k , car chaque fonction $x \mapsto |x - a_j|, j \neq k$ est dérivable en a_k (au voisinage de a_k , elle est égale à une fonction affine). Il en est donc de même de $x \mapsto \lambda_k |x - a_k|$. Ceci n'est possible que si $\lambda_k = 0$.

- ③ On va démontrer par récurrence sur N que toute famille $(\cos(a_1 x), \dots, \cos(a_N x))$ avec $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_N$ est libre. C'est le cas pour $N = 1$ ($\cos(ax)$ n'est jamais la fonction nulle). Supposons le résultat vrai au rang $N - 1$, et prouvons-le au rang N en écrivant une relation de liaison :

$$\lambda_1 \cos(a_1 x) + \dots + \lambda_N \cos(a_N x) = 0$$

On dérive deux fois et on trouve

$$a_1^2 \lambda_1 \cos(a_1 x) + \dots + a_N^2 \lambda_N \cos(a_N x) = 0$$

En retranchant a_N^2 fois la première équation à la deuxième, on trouve

$$(a_1^2 - a_N^2) \lambda_1 \cos(a_1 x) + \dots + (a_{N-1}^2 - a_N^2) \lambda_{N-1} \cos(a_{N-1} x) = 0$$

Par hypothèse de récurrence, on a $(a_j^2 - a_N^2) \lambda_j = 0$ pour tout $j = 1, \dots, N - 1$, soit finalement $\lambda_j = 0$ puisque $a_j^2 \neq a_N^2$. De retour à l'équation initiale, on retrouve aussi $\lambda_N = 0$, ce qui prouve bien que la famille est libre.

- ④ Soit $N \geq 1$. Il suffit de prouver que la famille $(x \mapsto (\sin x)^n)_{1 \leq n \leq N}$ est libre. Considérons des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ tels que

$$\lambda_1 \sin x + \dots + \lambda_N (\sin x)^N = 0$$

On rappelle que $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ si $x \rightarrow 0$, et par conséquent, si $k \geq 2$, on a $(\sin x)^k / x \rightarrow 0$ si $x \rightarrow 0$. Reprenons l'équation précédente et divisons par x pour $x \neq 0$. On a

$$\lambda_1 \frac{\sin x}{x} + \lambda_2 \frac{\sin^2 x}{x} + \dots + \lambda_N \frac{(\sin x)^N}{x} = 0$$

Faisons tendre x vers 0. Le membre de gauche tend vers λ_1 , celui de droite vers 0 et on obtient donc

$$\lambda_1 = 0$$

Il suffit ensuite d'itérer le raisonnement en divisant successivement par $x^2, x^3, \dots$, ou bien de faire une récurrence en simplifiant par $\sin x$. Une autre méthode, peut-être plus simple, consiste à considérer le polynôme

$$P(X) = \lambda_1 X + \dots + \lambda_N X^N$$

et de remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(\sin x) = 0$. Ainsi, P admet une infinité de racines, et donc P est le polynôme nul.

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

Correction de l'EXERCICE 16

La fonction nulle est bien dans F .

Soient $\lambda \in \mathbb{R}, f, g \in F$. On a

$$(\lambda f + g)(0) + (\lambda f + g)(1) = \lambda f(0) + g(0) + \lambda f(1) + g(1) = \lambda(f(0) + f(1)) + (g(0) + g(1)) = 0.$$

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Soit C l'ensemble des fonctions constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Alors

$$\begin{aligned} F \cap C &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) + f(1) = 0\} \cap \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est constante}\} \\ &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) + f(1) = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c\} \\ &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid 2c = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c\} \\ &= \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}. \end{aligned}$$

De plus, soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Posons $g = f - \frac{f(0) + f(1)}{2}$. Alors

$$g(0) + g(1) = f(0) - \frac{f(0) + f(1)}{2} + f(1) - \frac{f(0) + f(1)}{2} = 0.$$

Donc $g \in F$ et $f = g + \frac{f(0) + f(1)}{2}$, et $E = F \oplus C$.

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

Correction de l'EXERCICE 17

Non car ces trois fonctions sont combinaisons linéaires des deux suivantes

$$x \mapsto \sin x \text{ et } x \mapsto \cos x.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

Correction de l'EXERCICE 18

$F \subset \mathbb{K}_n[X]$, $0 \in F$ car $A \mid 0$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $P, Q \in F$. $A \mid P$ et $A \mid Q$ donc $A \mid \lambda P + \mu Q$ puis $\lambda P + \mu Q \in F$. Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$. Notons $p = \deg(A)$. On a

$$F \oplus \mathbb{K}_{p-1}[X] = \mathbb{K}_n[X]$$

ce qui détermine un supplémentaire de F et donne $\dim F = n + 1 - p$.

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

Correction de l'EXERCICE 19

On remarque que $\deg P_k = k$ donc $P_k \in \mathbb{K}_n[X]$. Supposons $\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_n P_n = 0$. Si $\lambda_n \neq 0$ alors $\deg(\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_n P_n) = n$ car $\deg(\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_{n-1} P_{n-1}) \leq n-1$ et $\deg \lambda_n P_n = n$.

Ceci est exclu, donc $\lambda_n = 0$. Sachant $\lambda_n = 0$, le même raisonnement donne $\lambda_{n-1} = 0$ et ainsi de suite

$$\lambda_{n-2} = \dots = \lambda_0 = 0$$

La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille libre de $n+1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$ éléments de $\mathbb{K}_n[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

Correction de l'EXERCICE 20

① Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On écrit

$$x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 2xz = (x - y + z)^2 + z^2.$$

On a donc, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (x - y + z)^2 + z^2 = 0 &\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble F est donc l'ensemble des vecteurs $(x, x, 0)$, avec $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit, on a $F = \text{Vect}\{(1, 1, 0)\}$. Il s'agit donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

② Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors on a

$$(x - y + z)^2 + z^2 = 0 \iff \begin{cases} x - y + z = iz \\ \text{ou} \\ x - y + z = -iz \end{cases}$$

Ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel, car il contient les deux vecteurs $(1, i, i)$ et $(1, -i, -i)$ mais pas leur somme $(2, 0, 0)$.

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

Correction de l'EXERCICE 21

La famille $\left(1, (X-a), \frac{(X-a)^2}{2}, \frac{(X-a)^3}{3!}, \dots, \frac{(X-a)^n}{n!}\right)$ est libre car elle est échelonnée en degré. La formule de Taylor appliquée au polynôme P donne

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}$$

Or, la famille $\left(1, (X-a), \frac{(X-a)^2}{2!}, \frac{(X-a)^3}{3!}, \dots, \frac{(X-a)^n}{n!}\right)$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}_n[X]$. La formule précédente montre que tout polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ est combinaison linéaire de cette famille; ainsi cette famille est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$. Comme elle est de plus libre, c'est une base de cet espace vectoriel. De plus, la famille des coordonnées de P dans cette base est :

$$(P(a), P'(a), P''(a), \dots, P^n(a))$$

↩ retour à l'EXERCICE 21

Correction de l'EXERCICE 22

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarisation

$$\cos^n x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(n-2k)x}$$

En regroupant entre elles les exponentielles imaginaires d'angles opposés, on découpe la somme en deux ce qui amène à discuter selon la parité du nombre de termes présents. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on obtient.

$$\begin{aligned} \cos^{2p} x &= \frac{1}{2^{2p-1}} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \cos((2p-2k)x) + \frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p} \\ \cos^{2p+1} x &= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{k} \cos((2p-2k+1)x). \end{aligned}$$

Ainsi, les fonctions $x \rightarrow \cos^n x$ sont combinaisons linéaires des fonctions $x \rightarrow \cos(nx)$ avec $n \in \mathbb{N}$. Inversement, on peut écrire par la formule de Moivre

$$\cos(nx) = \operatorname{Re}(e^{inx}) = \operatorname{Re}((\cos(x) + i\sin(x))^n) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x) i^k \sin^k(x)\right)$$

Dans la somme, les termes réels sont uniquement obtenus pour les indices k pairs et donc

$$\cos(nx) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p \cos^{n-2p}(x) \sin^{2p}(x) \quad \text{avec} \quad \sin^{2p} x = (1 - \cos^2 x)^p$$

En poursuivant le développement, on exprime la fonction $x \mapsto \cos(nx)$ comme combinaison linéaire des fonctions $x \mapsto \cos^n x$.

Finalement, les deux familles de fonctions engendrent le même espace.

↩ retour à l'EXERCICE 22

Correction de l'EXERCICE 23

Si les sous-espaces vectoriels F et G ont un supplémentaire commun H , alors

$$\dim F = \dim E - \dim H = \dim G.$$

Inversement, supposons $\dim F = \dim G$.

Posons $n = \dim E$ et raisonnons par récurrence décroissante sur la dimension commune $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ des espaces F et G .

Si $p = n$, les espaces F et G sont égaux à E et $\{0_E\}$ détermine un supplémentaire commun.

Supposons la propriété établie au rang $p+1 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension p .

Si $F = G$, n'importe quel supplémentaire de F convient.

Sinon, F n'est pas inclus dans G ni G dans F . Il existe alors un vecteur $x \in F \cap \bar{G}$ et $y \in G \cap \bar{F}$. Le vecteur somme $a = x + y$ n'appartient pas à F et la droite $D = \operatorname{Vect}(a)$ est en somme directe avec F car l'intersection de ces deux espaces est réduite au vecteur nul. De même, la droite D est en somme directe avec G . On peut alors introduire les espaces de dimension $p+1$

$$F' = F \oplus D \quad \text{et} \quad G' = G \oplus D$$

Par l'hypothèse de récurrence, ces espaces possèdent un supplémentaire commun H' et l'espace $H = D \oplus H'$ détermine alors un supplémentaire commun à F et G .

↩ retour à l'EXERCICE 23

Correction de l'EXERCICE 24 Polynômes de Newton

① On reconnaît une famille de polynômes réels de degrés étagés, c'est donc une base de $\mathbb{R}[X]$.

② Soit $m \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$.

Cas $m \geq k$.

$$P_k(m) = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} = \binom{m}{k} \in \mathbb{N}.$$

Cas: $0 \leq m \leq k-1$.

$$P_k(m) = 0 \in \mathbb{N}$$

Cas $m < 0$. On écrit $m = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned} P_k(m) &= \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{p(p+1)\dots(p+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{p+k-1}{k} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, les valeurs $P_k(m)$ sont entières.

③ Soit P un polynôme solution.

Notons $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la famille des coordonnées de P dans la base $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, on peut écrire

$$P = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n. \quad (*)$$

En évaluant, $(*)$ en 0, on obtient $\lambda_0 P_0(0) = P(0)$ car 0 est racine des polynômes $P_1, \dots, P_n$. Sachant $P_0(0) = 1$, il vient $\lambda_0 \in \mathbb{Z}$. En évaluant $(*)$ en 1, on obtient ensuite $\lambda_0 I_0(1) + \lambda_1 P_1(1) = P(1)$ et l'on en déduit $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$.

Successivement, on obtient $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ pour i allant de 0 à n en évaluant $(*)$ en i et en exploitant $P_i(i) = 1$ et $P_j(i) = 0$ pour tout $j > i$.

Inversement, il est clair que si toutes les coordonnées d'un polynôme dans la base $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des nombres entiers, ce polynôme prend des valeurs entières sur les nombres entiers comme le font les P_n .

[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)

Correction de l'EXERCICE 25

Ecrire $\lambda_0 P + \lambda_1 P' + \lambda_2 P'' + \dots + \lambda_n P^{(n)} = 0$. En égalant à 0 les coefficients, il vient d'abord $\lambda_0 = 0$ car P est le seul polynôme de degré n . Ensuite $\lambda_1 = 0$ (coefficient de X^{n-1}). Il suffit de faire alors une récurrence.

[↩ retour à l'EXERCICE 25](#)

Correction de l'EXERCICE 26

Vérifier la stabilité des lois. Pour $n = 2$, $A \in \mathcal{E}$ si et seulement si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ c'est-à-dire si et seulement si

$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\dim \mathcal{E} = 3$.

La question ③ est redondante.

[↩ retour à l'EXERCICE 26](#)

Correction de l'EXERCICE 27 Espace vectoriel des suites récurrentes

① 1.a Vérifier la stabilité des lois.

1.b Ecrire $\lambda(-1)^n + \mu 2^n = 0$; faire $n = 0, n = 1$.

1.c Pour toute suite $(u_n) \in \mathcal{E}$, montrer qu'il existe λ et μ tels que $u_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$ faire $n = 0$, puis $n = 1$ et montrer que l'on peut résoudre le système en λ et μ .

1.d $u_n = \frac{4}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}2^n$.

② 2.a Soient a_0, a_1, b_0, b_1 des réels tels que $a_0 b_1 \neq a_1 b_0$. On considère les suites (a_n) , (b_n) de $\mathcal{E}$ dont les premiers termes sont respectivement a_0, a_1 et b_0, b_1 . Soit $(u_n) \in \mathcal{E}$. Montrer qu'il existe un et un seul couple λ, μ de réels tels que

$$\begin{cases} u_0 &= \lambda a_0 + \mu b_0 \\ u_1 &= \lambda a_1 + \mu b_1 \end{cases}$$

En déduire que (a_n) et (b_n) forment une base de $\mathcal{E}$.

2.b En excluant la solution triviale $r = 0$, on a : $r^2 - \alpha r - \beta = 0$. Si r_1 et r_2 sont les deux racines réelles distinctes, $a_n = r_1^n$ et $b_n = r_2^n$ forment une base de $\mathcal{E}$ et pour toute suite de $\mathcal{E}$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tels que

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

En faisant $n = 0$, puis $n = 1$, on détermine λ et μ en fonction de u_0 et u_1 .

2.c Même raisonnement.

2.d On considère d'abord l'espace E' des suites complexes et $\mathcal{E}'$ le sous-espace des suites de E' vérifiant la relation de récurrence. On obtient deux suites $\varphi_n = \rho^n e^{in\theta}$ $\psi_n = \rho^n e^{-in\theta}$ qui forment une base de $\mathcal{E}'$. La partie réelle et la partie imaginaire de φ_n sont

$$a_n = \mathcal{R}[\varphi_n] = \frac{\varphi_n + \psi_n}{2}, \quad b_n = \mathcal{I}m \varphi_n = \frac{\varphi_n - \psi_n}{2i}$$

Etant combinaisons linéaires de φ_n et ψ_n , elles appartiennent à $\mathcal{E}'$ et, puisqu'elles sont réelles, elles appartiennent à $\mathcal{E}$. Vérifier qu'elles forment un système libre.

③ $u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n.$

④ $u_n = (\lambda + n\mu)2^n.$

⑤ $u_n = \lambda \cos \frac{2\pi}{3}n + \mu \sin \frac{2\pi}{3}n.$

↩ retour à l'EXERCICE 27

Correction de l'EXERCICE 28 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

① 1.a Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1.b Le théorème d'existence et unicité affirme que $\forall y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ il existe une et une seule solution $y = y(x)$ telle que $y(0) = y_0$ et $y'(0) = z_0$, dite < solution de conditions initiales > (y_0, z_0) . Soient $y_0, z_0, v_0, w_0 \in \mathbb{R}$ tels que $y_0 w_0 \neq z_0 v_0$ et y_1, y_2 les solutions de conditions initiales respectivement $(y_0, z_0), (v_0, w_0)$. Soit y une solution quelconque, de condition initiale (α, β) . Montrer qu'il existe un et un seul couple $A, B \in \mathbb{R}$, tel que

$$\begin{cases} Ay_0 + Bv_0 = \alpha \\ Az_0 + Bw_0 = \beta \end{cases}$$

En déduire que y_1 et y_2 est une base de $\mathcal{S}$.

② 2.a Vérifier que $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}$ est une famille libre de solutions.

2.b Vérifications analogues.

↩ retour à l'EXERCICE 28