

TECHNIQUES DE CALCULS D'INTÉGRALES

1 RECONNAISSANCE D'UNE PRIMITIVE

La première méthode (et la plus rapide) est de reconnaître directement une primitive. Par exemple, calculer les primitives de

① $x \mapsto (1 - \cos(3x))$

⑤ $x \mapsto \frac{e^{3x}}{1 + e^{3x}}$

⑨ $x \mapsto 3x\sqrt{1 + x^2}$

⑬ $x \mapsto \tan(x)$

② $x \mapsto \sin(x)^2$

⑥ $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

⑩ $x \mapsto xe^{x^2}$

⑭ $x \mapsto \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

③ $x \mapsto \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$

⑦ $x \mapsto \cos(x)\sin^2(x)$

⑪ $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

⑮ $x \mapsto (\cos x)(\sin x)$

④ $x \mapsto \frac{x}{1 + x^2}$

⑧ $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$

⑫ $x \mapsto \frac{2x - 2}{x^2 - 2x}$

⑯ $x \mapsto e^x (e^x + 1)$

Polynômes en sin et cos

Si on veut intégrer $\sin^m(x)\cos^n(x)$.

- Si m ou n est impair, disons $n = 2p + 1$, on peut retrouver deux primitives directes, par exemple

$$\int \sin^5(x) \cos^3(x) dx = \int \sin^5(x) (1 - \sin^2(x)) \cos(x) dx = \int \sin^5(x) \cos(x) dx - \int \sin^7(x) \cos(x) dx.$$

D'où $\int \sin^5(x) \cos^3(x) dx = \frac{1}{6} \sin^6(x) - \frac{1}{8} \sin^8(x).$

- Sinon, en général, on linéarise $\sin^m$ et $\cos^n$ grâce à l'exponentielle complexe. Par exemple,

$$\int \cos^4(x) = \int \left(\frac{\cos(4x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{8} \right) = \frac{\sin(4x)}{32} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{3}{8}x$$

Polynôme et exponentielles

Si on cherche à intégrer $P(x)e^{rx}$, on pose une primitive sous la forme Qe^{rx} et on identifie les coefficients dans l'expression $rQ + Q' = P$.

Si on veut intégrer $P(x)e^{rx} \cos(mx)$, on passe par l'exponentielle complexe et on fait le même travail.

Par exemple, essayons d'intégrer $\int (2x + 3)e^{5x} dx$.

On cherche une primitive sous la forme $Q(x)e^{5x}$. Posons $Q(x) = ax + b$. L'identification donne

$$rQ + Q' = 5(ax + b) + a = (5a)x + (5b + a) \stackrel{!}{=} 2x + 3.$$

On obtient $\begin{cases} 5a = 2, \\ 5b + a = 3. \end{cases}$ Donc $a = \frac{2}{5}$. Puis $5b + \frac{2}{5} = 3$ d'où $5b = \frac{13}{5}$ et $b = \frac{13}{25}$.

Ainsi $Q(x) = \frac{2}{5}x + \frac{13}{25}$ et une primitive est $\int (2x + 3)e^{5x} dx = \left(\frac{2}{5}x + \frac{13}{25} \right) e^{5x} + C$.

Mais parfois ce n'est pas possible...

2 INTÉGRATIONS PAR PARTIES

On utilise cette technique quand on veut primitiver un produit de fonction qui à première vue est impossible. On l'utilise souvent quand on est confronté à un produit de la forme "*Polynôme* $\times$ *Fonction que l'on sait primitiver*". Une fiche est disponible sur ce lien. Le théorème sur lequel se base la technique est le suivant.

Théorème 1 : Formule d'intégration par parties (IPP)

Soit u et v deux fonctions de classe C^1 . Alors,

$$\int uv = Uv - \int Uv'$$

où U est une primitive de u .

Preuve. Soit U une primitive de u . On a $(Uv)' = U'v + Uv' = uv + Uv'$, d'où en primitivant,

$$Uv = \int uv + \int Uv'.$$

□

Exemple 1

Calculer $\int x \ln(x) dx$.

Posons $u(x) := \ln(x)$ et $v(x) = x$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $V(x) = \frac{x^2}{2}$ est l'expression d'une primitive de v . Alors :

$$\int x \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + C.$$

Calculer les intégrales ou les primitives

① $\int_0^1 x e^x dx$

④ $\int (\ln x)^2 dx$

⑦ $\int_0^\pi e^x \sin(x) dx$

⑩ $\int_0^1 \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2} dx$

② $\int_1^e x^2 \ln x dx$

⑤ $\int \sin(\ln x) dx$

⑧ $\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$

⑪ $\int_\alpha^\beta (t - \alpha)^n (t - \beta)^n dt$,
 $(\alpha, \beta, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$

③ $\int \arctan(x) dx$

⑥ $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} dx$

⑨ $\int_0^1 x(\arctan x)^2 dx$

⑫ $I_{n,p} = \int_0^1 x^n (\ln x)^p dx$,
 $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$

3 DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

L'idée est de décomposer toute fraction rationnelle de la forme

$$\text{Polynôme} + \sum_{i,k} \frac{\lambda_i}{(x - \alpha_i)^k} + \sum_{i,k} \frac{\mu_i x + \nu_i}{(x^2 + a_i x + b_i)^k}.$$

Il y a beaucoup de variables, mais pas de stress. On comprendra mieux dans les exemples

On va suivre plusieurs décompositions, étapes par étapes.

Étape 1 On fait en sorte de sortir le **Polynôme**. Cette étape est à réaliser tant que le degré du numérateur est supérieur ou égal au degré du dénominateur. Pour ce faire, on utilise la méthode "du bourrin" en forçant l'apparition du Polynôme du dénominateur.

Plus tard, on verra la division euclidienne des polynômes, qui revient un peu au même.

① $\frac{x^3 - 2x + 4}{x^2 - 1} = \frac{x(x^2 - 1) + x - 2x + 4}{x^2 - 1} = x + \frac{-x + 4}{x^2 - 1}.$

② $\frac{x^3 - 1}{x^3 + x} = \frac{x^3 + x - x - 1}{x^3 + x} = 1 + \frac{-x - 1}{x^3 + x}$

③ $\frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} \rightarrow$ Pas de polynôme à sortir, car degré 2 au numérateur et 3 au dénominateur

④ $\frac{1}{x^2(x^2 + x + 1)} \rightarrow$ Pas de polynôme à sortir, car degré 0 au numérateur.

Etape 2 On factorise le polynôme au dénominateur.

- ① $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.
 ② $x^3 + x = (x^2 + 1)x$.
 ③ $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 2)^2(x - 1)$.
 ④ $x^2(x^2 + x + 1) \rightarrow$ Déjà factorisé, car $x^2 + x + 1$ n'admet pas de factorisation sur $\mathbb{R}$.

Etape 3 On fait le gros du travail.**En théorie : 2 cas**

Un facteur $(x - \alpha)^k$ du dénominateur devient $\frac{\lambda_k}{(x - \alpha)^k} + \frac{\lambda_{k-1}}{(x - \alpha)^{k-1}} + \dots + \frac{\lambda_1}{x - \alpha}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

Un facteur $(x^2 + ax + b)^k$ du dénominateur, où $x^2 + ax + b$ est à discriminant négatif, devient

$$\frac{\mu_k x + \nu_k}{(x^2 + ax + b)^k} + \frac{\mu_{k-1}x + \nu_{k-1}}{(x^2 + ax + b)^{k-1}} + \dots + \frac{\mu_1 x + \nu_1}{x^2 + ax + b} \quad \text{avec } \mu_1, \dots, \mu_k, \nu_1, \dots, \nu_k \in \mathbb{R}.$$

En pratique : Comment trouver les λ_i, μ_i, ν_i ?

- multiplier par $(x - \alpha)^k$ puis évaluer en α ,
- multiplier par x puis passer à la limite en $+\infty$,
- évaluer en un point,
- mettre au même dénominateur et identifier (en cas d'extrême urgence).

Il y a 4 techniques :

① $\frac{-x + 4}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{\lambda_1}{x - 1} + \frac{\lambda_2}{x + 1}$

Pour trouver λ_1 , On multiplie par $(x - 1)$ et on évalue en 1, donc $\lambda_1 = \frac{-1 + 4}{1 + 1} = \frac{3}{2}$. Super rapide !

Pour trouver λ_2 , On multiplie par x et on fait tendre vers l'infini, donc $\lambda_1 + \lambda_2 = -1$, d'où $\lambda_2 = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$.
 Déjà fini !

② $\frac{-x - 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{\lambda}{x} + \frac{\mu x + \nu}{x^2 + 1}$

Pour trouver λ , On multiplie par x et on évalue en 0, donc $\lambda = \frac{-1}{1} = -1$.

Pour trouver μ , On multiplie par x et on fait tendre vers l'infini, donc $\lambda + \mu = 0$, d'où $\mu = 1$.

Pour trouver ν , On évalue en 1, donc $\lambda + \frac{\mu + \nu}{2} = \frac{-2}{2} = -1$, d'où $\nu = -1$.

③ $\frac{x^2 - x + 1}{(x - 2)^2(x - 1)} = \frac{\lambda_1}{(x - 2)^2} + \frac{\lambda_2}{(x - 2)} + \frac{\lambda_3}{(x - 1)}$

Pour trouver λ_1 , On multiplie par $(x - 2)^2$ et on évalue en 2, donc $\lambda_1 = \frac{2^2 - 2 + 1}{2 - 1} = 3$.

Pour trouver λ_3 , On multiplie par $(x - 1)$ et on évalue en 1, donc $\lambda_3 = \frac{1^2 - 1 + 1}{(1 - 2)^2} = 1$.

Pour trouver λ_2 , On multiplie par x et on fait tendre vers l'infini, donc $\lambda_2 + \lambda_3 = 1$, d'où $\lambda_2 = 0$.

④ $\frac{1}{x^2(x^2 + x + 1)} = \frac{\lambda_1}{x^2} + \frac{\lambda_2}{x} + \frac{\mu x + \nu}{x^2 + x + 1}$

Pour trouver λ_1 , On multiplie par x^2 et on évalue en 0, donc $\lambda_1 = \frac{1}{1^2} = 1$.

Pour trouver λ_2 , On multiplie par x et on fait tendre vers l'infini, donc $\lambda_2 + \mu = 0$, d'où $\lambda_2 = -\mu$.

Pour trouver ν , On évalue en -1, donc $\lambda_1 - \lambda_2 - \mu + \nu = \frac{1}{1} = 1$, d'où $\nu = 0$.

Pour trouver μ , On évalue en 1, donc $\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu}{3} = \frac{1}{3}$, d'où $\mu = 1$ et donc $\lambda_2 = -1$.

Pour trouver λ_3 , On multiplie par $(x^2 + x + 1)$ et on évalue en 1, donc $\lambda_3 = \frac{1^2 - 1 + 1}{(1 - 2)^2} = 1$.

Pour trouver ν , On évalue en -1, donc $\lambda_1 - \lambda_2 - \mu + \nu = \frac{1}{1} = 1$, d'où $\nu = 0$.

Etape 4 On primitive

Nous avons donc les types suivant :

- $\int \frac{\lambda}{(x-\alpha)^k} = \begin{cases} (1-k)\lambda(x-\alpha)^{-k+1} & , \text{ si } k \neq 1 \\ \lambda \ln(x-\alpha) & , \text{ si } k = 1 \end{cases}$
- $\int \frac{\mu x + \nu}{(x^2 + ax + b)^k} = \begin{cases} \frac{\mu}{2}(1-k)(x^2 + ax + b)^{-k+1} + \int \frac{\nu - a\mu/2}{(x^2 + ax + b)^k} & , \text{ si } k \neq 1 \\ \frac{\mu}{2} \ln(x^2 + ax + b) + \int \frac{\nu - a\mu/2}{x^2 + ax + b} & , \text{ si } k = 1 \end{cases}$
- $\int \frac{\nu}{x^2 + ax + b} = \int \frac{\nu}{(x + a/2)^2 + b - a^2/4} = \nu \int \left(\left(\frac{x + a/2}{\sqrt{b - a^2/4}} \right)^2 + 1 \right)^{-k} \dots \text{intéressant, mais Hors programme.}$
- $\int \frac{\nu}{(x^2 + ax + b)^k} = \int \frac{\nu}{\left((x + a/2)^2 + b - a^2/4 \right)^k} = \nu \int \left(\left(\frac{x + a/2}{\sqrt{b - a^2/4}} \right)^2 + 1 \right)^{-1}$
 $= \nu \sqrt{b - a^2/4} \arctan \left(\frac{x + a/2}{\sqrt{b - a^2/4}} \right)$

① $\int \frac{x^3 - 2x + 4}{x^2 - 1} dx = \int x + \frac{3/2}{x-1} + \frac{-5/2}{x+1} dx = x^2 + \frac{3}{2} \ln(x-1) - \frac{5}{2} \ln(x+1) + C$, où $C \in \mathbb{R}$.

② $\int \frac{x^3 - 1}{x^3 + x} dx = \int 1 - \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+1} dx = x - \ln(x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \arctan(x) + C$, où $C \in \mathbb{R}$.

③ $\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx = \int \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-1)} dx = -3(x-2)^{-1} + \ln(x-1) + C$, où $C \in \mathbb{R}$.

④ $\int \frac{1}{x^2(x^2+x+1)} dx = \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+x+1} dx = -x^{-1} - \ln(x) + \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx$,
avec $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{1}{(x+1/2)^2 + 3/4} dx = \frac{4}{3} \int \left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right)^{-1} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)$

Calculer les primitives des expressions suivantes

① $\frac{1}{x^3 - x}$	⑤ $\frac{x}{x^3 - 1}$	⑨ $\frac{\arctan(x)}{(x+1)^2}$
② $\frac{x-2}{x(x+1)^2}$	⑥ $\frac{x}{x^4 + 1}$	⑩ $\frac{1}{x^2 + 2ax + b}, \quad a, b \in \mathbb{R}$
③ $\frac{x+1}{x^3 + x}$	⑦ $\frac{1}{x^2 + x + 1}$	⑪ $\frac{1}{(1+x^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}$
④ $\frac{x-1}{x^2 + 2x + 2}$	⑧ $\frac{x}{x^3 + 1}$	

4 CHANGEMENTS DE VARIABLE

Théorème 2 : Changement de variable

Soient $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}(J, \mathbb{C})$ et $a, b \in I$. On suppose φ à valeurs dans J .

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

Exemple 2

Calculons $\int x e^{x^2} dx$.

Posons $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$, donc :

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{e^{x^2}}{2} + C.$$

Preuve. La fonction f , comme fonction continue, possède une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ et comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $(F \circ \varphi)' = f \circ \varphi \times \varphi'$ est continue. Du coup, d'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = [F \circ \varphi]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = [F]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

□

⚠ ATTENTION Sur votre brouillon, vous avez le droit de faire vos calculs à deux variables x et t , mais au coeur d'un symbole " $\int$ ", sur votre copie, je ne veux voir qu'une seule variable, x ou t (ou une autre), mais pas les deux.

Exemple 3

Calculons $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$. On va effectuer le changement de variable $x = \sin \theta$. La fonction $\theta \mapsto \sin \theta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ d'image $[-1, 1]$.

On « dérive » $\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$, donc $dx = \cos \theta d\theta$. Quand $x = 1$, $\theta = \pi/2$ et quand $x = -1$, $\theta = -\pi/2$. On a donc

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right) d\theta = \frac{\pi}{2} + \left[\frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

Calcul de primitive par changement de variables

On peut aussi pratiquer des changements de variable pour calculer des primitives. Pour cela, on pourra utiliser la notation suivante pour ne pas oublier de remplacer par $\varphi(x)$ dans la primitive finale.

$$\int^x f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int^{\varphi(x)} f(u)du.$$

Exemple 4

Calculons $\int \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}}$. Par le changement de variable $u = \sqrt{t}$,

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} = \int^{\sqrt{t}} \frac{2u du}{u + u^3} = \int^{\sqrt{t}} \frac{2 du}{1 + u^2} = 2 \arctan(u) + C = 2 \arctan(\sqrt{t}) + C$$

où $C \in \mathbb{R}$.

Calculer les intégrales ou les primitives des fonctions suivantes, en s'aidant du changement de variable proposé

① $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$ en posant $x = \sqrt{t}$,

⑦ $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x}}$, en posant $u = \sqrt{1+x}$,

② $\int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt$ en posant $x = \cos t$,

⑧ $x \mapsto \frac{1}{e^x + 1}$, en posant $u = e^x$,

③ $\int_1^e \frac{dt}{2t \ln(t) + t}$ en posant $x = \ln t$,

⑨ $x \mapsto \frac{1}{x + x(\ln x)^2}$, en posant $u = \ln x$,

④ $\int_0^1 \frac{dt}{1 + e^t}$ en posant $x = e^t$,

⑩ $x \mapsto \cos(2 \ln x)$, en posant $u = \ln x$,

⑤ $\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{t+1} dt$ en posant $x = \sqrt{t}$,

⑪ $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$, en posant $u = \sqrt{x}$,

⑥ $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$ en posant $t = \sin \theta$,

⑫ $x \mapsto \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}$, en posant $u = \sqrt{e^x-1}$.

Changement de variable "inversé"

On utilise le théorème pour écrire l'intégrale de f sur $I = \varphi([a, b])$ dans le cas où φ est une fonction monotone.

- Si φ est croissante, alors $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ et I est égal à l'intervalle $[\varphi(a), \varphi(b)]$; l'intégrale de f sur I est alors immédiatement donnée par le théorème. On peut remarquer aussi que dans ce cas, $\varphi' \geq 0$.
- Si φ est décroissante, alors $\varphi(a) \geq \varphi(b)$ et I devient $[\varphi(b), \varphi(a)]$. L'intégrale de f sur I est donc l'opposée de l'intégrale du membre de gauche du théorème. Comme $\varphi' \leq 0$, changer le signe revient dans ce cas à remplacer φ' (dans l'intégrale du membre de gauche du théorème) par sa valeur absolue.

On voit ainsi que dans les deux cas on a

$$\int_{\varphi([a, b])} f(x) dx = \int_{[a, b]} f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt.$$

5 HORS PROGRAMME : RÈGLES DE BIOCHE

On s'intéresse au cas où on essaie d'intégrer une fractions rationnelles en sin et cos, que l'on note $R(\sin x, \cos x)$.

Le changement de variables $u = \tan \frac{x}{2}$ nous ramène toujours à une fraction rationnelle.

En effet, si on pose $u = \tan \left(\frac{x}{2} \right)$ (soit $x = 2 \arctan(u)$), on a alors

$$\cos(x) = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \quad \sin(x) = \frac{2u}{1 + u^2} \quad \tan(x) = \frac{2u}{1 - u^2} \quad dx = \frac{2du}{1 + u^2}$$

Exemple 5

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos(x) + 3}{4 \sin(x) + 3 \cos(x)} dx &= \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3}{4 \frac{2t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{4t^2 + 8}{(-3t^2 + 8t + 3)(1+t^2)} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln |t - 3| - \frac{1}{2} \ln |t + 1/3| - \frac{2}{3} \ln(1+t^2) + \frac{8}{3} \arctan t + C. \end{aligned}$$

⚠ ATTENTION Pour faire ce changement de variable, x doit être dans l'intervalle $] -\pi, \pi[$.

Il y a parfois plus simple. Les règles suivantes ont été formulées par Charles Bioche.

- ① Si $R(\sin x, \cos x) dx$ est invariant par $x \leftrightarrow \pi - x$, on fait $t = \sin(x)$.
- ② Si $R(\sin x, \cos x) dx$ est invariant par $x \leftrightarrow -x$, on fait $t = \cos(x)$.
- ③ Si $R(\sin x, \cos x) dx$ est invariant par $x \leftrightarrow \pi + x$, on fait $t = \tan(x)$.

Exemple 6

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin(x)} dx &\stackrel{x \leftrightarrow -x}{=} \int \frac{1}{\sin^2(x)} \sin(x) dx = \int \frac{1}{1 - \cos^2(x)} \sin(x) dx = \int \frac{1}{1 - t^2} (-dt) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} dt = \frac{1}{2} (\ln(|t-1|) - \ln(|t+1|)) . \end{aligned}$$

Exemple 7

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(x)}{1 + \cos^2 x} dx \stackrel{x \leftrightarrow -x}{=} \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{1-t^2}{1+t^2} dt = - \int_{\sqrt{2}/2}^1 dt + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{2}{1+t^2} dt = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} - 2 \arctan(\sqrt{2}/2).$$

Exemple 8

$$\int \frac{5 + 3 \sin(x)}{24 \tan(x) + 5 \cos(x)} dx \stackrel{x \leftrightarrow \pi - x}{=} \int \frac{5 + 3 \sin(x)}{24 \sin(x) + 5 - 5 \sin^2(x)} \cos(x) dx = \int^{\sin(x)} \frac{5 + 3t}{24t + 5 - 5t^2} dt$$

$$= -\frac{10}{13} \ln(5 - \sin(x)) + \frac{11}{65} \ln |5 \sin(x) + 1| + C.$$

Exemple 9

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2(x) \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx \stackrel{x \leftrightarrow \pi + x}{=} \int_0^1 \frac{t^2}{(1 + t^2)^2 (t + 1)} dt = \left[\frac{1}{8} \left(-\frac{2(t+1)}{t^2+1} - \ln(t^2+1) + 2 \ln(t+1) \right) \right]_0^1 = \frac{1}{8} \ln 2.$$

Exemple 10

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x) \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx = \dots$$