

Primitives et équations différentielles linéaires

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 PRIMITIVES ET INTÉGRALES

1.1 DÉFINITION D'UNE INTÉGRALE

Nous n'allons pas faire la preuve qui permet de définir l'intégrale dans ce chapitre, mais dans un autre, plus tard dans l'année. L'idée de définir l'intégrale d'une fonction par **l'aire sous la courbe de f** n'est pas mauvaise, mais on se mort un peu la queue... Comment peut-on définir une aire, si ce n'est pas à partir de l'intégrale...

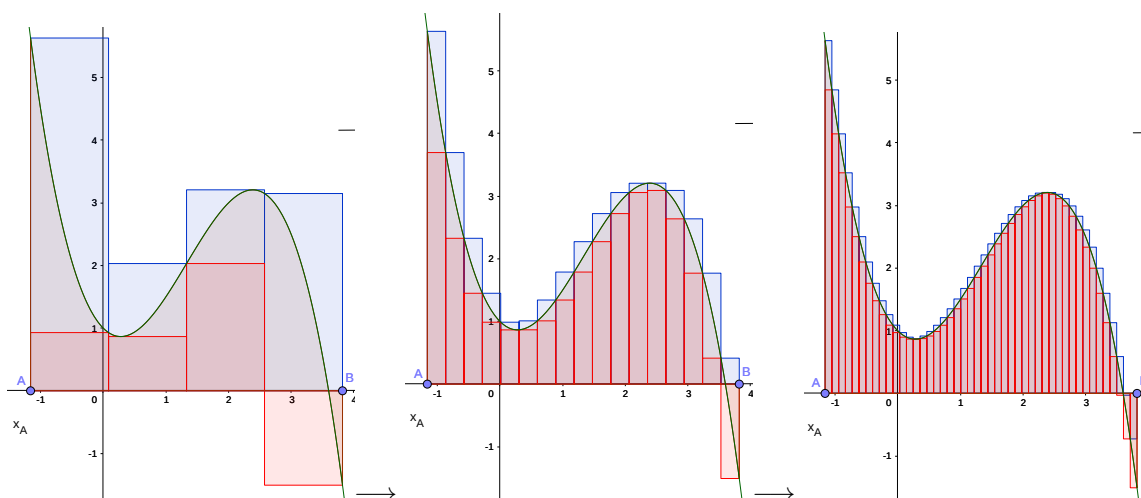
L'idée est simple. Pour définir l'intégrale, entre deux réels $a < b$, d'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, il suffit de délimiter notre intervalle $[a, b]$ en subdivision $X_i := [x_i, x_{i+1}]$ de plus en plus petites. Notons par exemple n le nombre de subdivisions. On définit deux suites :

- Une suite S_n^- qui est la somme des aires des rectangles formés par les points $(x_i, 0)$, $(x_i, \inf_{X_i} f)$, $(x_{i+1}, 0)$, $(x_{i+1}, \inf_{X_i} f)$.
- Une suite S_n^+ qui est la somme des aires des rectangles formés par les points $(x_i, 0)$, $(x_i, \sup_{X_i} f)$, $(x_{i+1}, 0)$, $(x_{i+1}, \sup_{X_i} f)$.

Plus la subdivision est fine, plus S_n^- croît et S_n^+ décroît. Et la différence entre les deux suites tend vers 0. Regardez les graphes ci-dessous.

Ce sont des suites adjacentes ! On note leur limite commune

$$\int_a^b f(t) dt .$$



C'est d'ailleurs pour cela que le signe intégrale est un "S" ! Parce qu'en fait, c'est une somme !
Ce n'est bien sûr qu'une idée ! Pour la preuve rigoureuse, il faudra attendre un peu...

1.2 DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable telle que $F' = f$ sur I .

Une primitive est donc toujours continue (puisque dérivable) !

Exemple 1

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est une primitive de arctan sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2

La fonction $x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Unicité des primitives à une constante près

Si f possède une primitive $F : I \rightarrow \mathbb{K}$, les primitives de f sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ sont alors toutes les fonctions $F + \lambda$, λ décrivant $\mathbb{K}$. Il suffit de remarquer que pour tout autre primitive G de f , On a $\tilde{F}' = f \iff \tilde{F}' = F'$

$$G' = F' \iff (G - F)' = 0 \iff G - F \text{ est constante}$$

⚠ ATTENTION Trouver *Primitive* n'est pas trivial, même pour des fonctions très simples. Pour primitiver son inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$, il a fallu introduire une nouvelle fonction usuelle, la fonction logarithme. Il y a encore une semaine, vous ne saviez pas primitiver la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Pourtant, ces deux fonctions ne sont pas compliquées... En général, même si on sait trouver une primitive de deux fonctions f et g , on ne sait pas en faire autant pour

$$fg, \quad \frac{f}{g}, \quad \text{ou} \quad f \circ g.$$

Exemple 3

On sait tout de même primitiver certaines expressions. Par exemple,

- ① La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{9 - 5 \cos x}$ admet $x \mapsto \frac{1}{5} \ln(9 - 5 \cos x)$ pour primitive sur $\mathbb{R}$,
- ② La fonction $x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ admet $x \mapsto 2e^{\sqrt{x}}$ pour primitive sur $\mathbb{R}_+^*$,
- ③ La fonction $x \mapsto \frac{1}{4x^2 + 1}$ admet $x \mapsto \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(2x)$ pour primitive sur $\mathbb{R}$.

Tableau des primitives usuelles

Le tableau des primitives usuelles est à la fin du chapitre.

Définition 2 : Intégrale sur un segment d'une fonction complexe continue

Soient $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ et $a, b \in I$. On appelle intégrale de f de a à b le nombre complexe

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f)(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)(t) dt.$$

Proposition 1 : Intégrale d'une fonction continue

Soient $f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ et $a, b, c \in I$.

- ① **Linéarité** Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$.
- ② **Relation de Chasles** $\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt$.
- ③ **Inégalité triangulaire** si $a \leq b$, $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$.

Proposition 2 : Intégrale d'une fonction réelle continue

Soient $f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$.

- ① **Positivité** Si $f \geq 0$ et $a \leq b$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.
- ② **Positivité stricte** Si f est strictement positive sauf éventuellement en un nombre fini de points et si $a < b$, alors $\int_a^b f(t) dt > 0$.
- ③ **Croissance** Si $f \leq g$ et $a \leq b$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Théorème 1 : Théorème fondamental de l'analyse

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur cet intervalle. En particulier, si $x_0 \in I$, il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = 0$, donnée par

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Preuve. Montrons que la fonction $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$ est dérivable en tout point $c \in \mathbb{R}$ où f est continue. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en c ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, |x - c| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

On a alors, pour $|x - c| < \alpha$,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(c) - (x - c)f(c)| &= \left| \int_c^x f(t) dt - (x - c)f(c) \right| \\ &= \left| \int_c^x (f(t) - f(c)) dt \right| \\ &\leq \int_c^x |f(t) - f(c)| dt \\ &\leq \varepsilon (x - c) \end{aligned}$$

car $|t - c| < |x - c| < \alpha$ donc

$$\left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| \leq \varepsilon.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c)$, par définition de la limite. $\square$

Corollaire 1.1

Si une fonction f admet une primitive F_0 sur I , alors toutes ses primitives s'écrivent sous la forme $F(x) = F_0(x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

Méthode de calculs d'intégrale

On obtient directement que, pour toute primitive F de f :,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

C'est la manière principale de calculer des intégrales. On verra plusieurs méthodes, dans la fiche

TECHNIQUES DE CALCULS D'INTÉGRALES

Exemple 4

Calculons une primitive de $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$. Une primitive est $F(x) = e^x$, et donc l'ensemble des primitives est donné par $F(x) = e^x + C$, $C \in \mathbb{R}$. Donc

$$\int_1^2 e^t dt = e^2 - e^1.$$

2 INTRODUCTION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ et qui porte sur les dérivées de y . On appelle **ordre** de l'équation différentielle, la plus haute dérivée en y intervenant dans l'équation.

On appelle **solution** d'une équation différentielle d'ordre n sur un intervalle I toute fonction n fois dérivable sur I et qui vérifie l'équation sur I .

Une équation différentielle a rarement des solutions que l'on sait expliciter à l'aide des fonctions usuelles. Certains cas particuliers se résolvent bien, c'est ce que nous allons étudier cette année.

Exemple 5

$(E) : y'' + 4y = 1$ est une équation différentielle d'ordre 2. La fonction $y(x) = \cos(2x)$ est solution de cette équation sur $\mathbb{R}$.

Nous verrons, dans ce cours, seulement les équations différentielles linéaires (EDL). Pour résoudre n'importe quelle équation linéaire, on peut utiliser la méthode suivante.

Pour trouver toutes les solutions d'une équation linéaire $\mathcal{L}(y) = b$, il suffit d'en connaître une solution particulière et toutes les solutions de l'équation homogène $\mathcal{L}(y) = 0$.

Pour résoudre une équation différentielle linéaire $(E) : \mathcal{L}(y) = f$,

- ① On résout l'équation différentielle homogène $\mathcal{L}(y) = 0$, et on explicite toutes les solutions y_H ,
- ② On trouve **une** solution particulière y_0 de (E) .
- ③ Toutes les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y_H + y_0$.

Exemple 6

On veut résoudre $y' = \cos$.

- ① Les solutions de $y' = 0$ sont les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$,
- ② La fonction sinus convient car $\sin' = \cos$.
- ③ Toutes les solutions sont donc de la forme $x \mapsto \sin x + \lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Définition 3

Soient $\mathcal{E}(y) = f$ une équation différentielle, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. On appelle **problème de Cauchy** le système

$$\begin{cases} \mathcal{E}(y) = f \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

La deuxième ligne s'appelle une **condition initiale**.

Équation différentielle complexe

On peut bien sûr passer aux parties réelles et imaginaires dans une équation différentielle complexe !

3 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE**Définition 4**

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation de la forme :

$$y' + a(x)y = b(x),$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I .

3.1 DÉFINITION ET RÉOLUTION DE L'ÉQUATION HOMOGÈNE

Dans le cas particulier où $b(x) = 0$, l'équation est dite **homogène** et prend la forme :

$$y' + a(x)y = 0. \quad (1)$$

Théorème 2

Soient $a \in C(I, \mathbb{R})$ et A une primitive de a . Alors, les solutions de (1) sont toutes les fonctions de la forme

$$y(x) = Ce^{-A(x)},$$

où C est une constante.

Preuve. Comme pour tout $x \in I$, $e^{A(x)} \neq 0$, l'équation est équivalente à

$$y'(x)e^{A(x)} + a(x)e^{A(x)}y(x) = 0$$

et on reconnaît une dérivée produit : cette équation est équivalente à

$$\frac{d}{dx}y(x)e^{A(x)} = 0$$

ce qui est équivalent à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in I$, $y(x)e^{A(x)} = \lambda$, ce qui conclut. $\square$

Exemple 7

Résolvons l'équation homogène $y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Ici, $a(x) = 2$, donc une primitive de a est $A(x) = 2x$. Les solutions sont donc de la forme $y(x) = Ce^{-2x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 8

Les solutions réelles de $y' = \frac{y}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$, équation équivalente à $y' - \frac{1}{1+x^2}y = 0$ sont les $x \mapsto \lambda e^{\arctan(x)}$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$.

3.2 MÉTHODE DE VARIATION DE LA CONSTANTE POUR L'ÉQUATION AVEC SECOND MEMBRE

Comme on a vu avec le principe de superposition, on a

Proposition 3

Soit $(a, b) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})^2$. Soit A une primitive de a . Soit y_p une solution de $y' + a(x)y = b(x)$. Alors l'ensemble des solutions de $y' + a(x)y = b(x)$ est

$$\left\{ x \mapsto y_p(x) + \lambda e^{-A(x)}, \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

Comment trouve-t-on une solution particulière ?

On utilise la **méthode de variation de la constante** en posant $y(x) = u(x)e^{-A(x)}$, où u est une fonction inconnue. Philosophiquement, on fait "varier" la constante λ des solutions de l'équation homogène.

En dérivant et substituant, on trouve

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int b(x)e^{A(x)} dx \right).$$

Exemple 9

Essayons de résoudre $y' + 2y = 7$.

① On a vu que les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_H(x) = Ce^{-2x}$, avec $C \in \mathbb{K}$.

② Il faut trouver une solution particulière. On a

$$y_p(x) = e^{-2x} \left(\int 7e^{2x} dx \right) = \frac{7}{2}.$$

③ Les solutions de l'équation sont donc les fonctions

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) = Ce^{-2x} + \frac{7}{2},$$

avec $C \in \mathbb{K}$.

Exemple 10

Soit $(E) : y' + ay = b$ où ici $a \neq 0, b$ sont des constantes.

① On a vu que les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_H(x) = Ce^{-ax}$, avec $C \in \mathbb{K}$.

② Il faut trouver une solution particulière. On a

$$y_p(x) = e^{-ax} \left(\int be^{ax} dx \right) = \frac{b}{a}.$$

③ Les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}, \quad \text{avec } C \in \mathbb{K}.$$

Exemple 11

Essayons de résoudre $y' + ay = be^{rx}$, avec $a, b, r \in \mathbb{K}, a \neq 0$.

- ① On a vu que les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_H(x) = Ce^{-ax}$, avec $C \in \mathbb{K}$.
- ② Il faut trouver une solution particulière. On a

$$y_p(x) = e^{-ax} \left(\int b e^{rx} e^{ax} dx \right) = e^{-ax} \left(\int e^{(r+a)x} dx \right) = \begin{cases} bxe^{-ax} & , \text{ si } r = -a , \\ \frac{b}{r+a} e^{rx} & , \text{ si } r \neq -a . \end{cases}$$

- ③ Les solutions de l'équation sont donc les fonctions

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) = \begin{cases} (bx + C)e^{rx} & , \text{ si } r = -a , \\ Ce^{-ax} + \frac{b}{r+a} e^{rx} & , \text{ si } r \neq -a , \end{cases} \quad \text{avec } C \in \mathbb{K}.$$

Méthode rapide

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, y'(x) + xy(x) = x \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{x^2/2} y'(x) + x e^{x^2/2} y(x) = x e^{x^2/2} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{d}{dx} \left(e^{x^2/2} y(x) \right) = x e^{x^2/2} \\ \Leftrightarrow & \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{x^2/2} y(x) = \int^x t e^{t^2/2} dt + K \\ \Leftrightarrow & \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, y(x) = \underbrace{K e^{-x^2/2}}_{\text{sol. hom.}} + \underbrace{e^{-x^2/2} \int^x t e^{t^2/2} dt}_{\text{sol. v.d.c.}} \\ \Leftrightarrow & \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, y(x) = K e^{-x^2/2} + 1 \\ \text{Donc l'ensemble des solutions est} & \quad \left\{ x \mapsto K e^{-x^2/2} + 1, K \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Proposition 4 : Problème de Cauchy

Soit a, b deux fonctions continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Alors il existe une unique solution sur I au problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) & \text{sur } I \\ y(x_0) = y_0 . \end{cases}$$

Exemple 12

Résolvons l'équation $y' + 2y = 5$ avec $y(0) = 1$.

Ici, $a(x) = 2$ donc $A(x) = 2x$. En utilisant la formule, on obtient une solution particulière

$$y(x) = e^{-2x} \left(\int 5e^{2x} dx \right) = e^{-2x} \cdot \frac{5}{2} e^{2x} = \frac{5}{2}.$$

La solution générale est donc $y(x) = Ce^{-2x} + \frac{5}{2}$, et en imposant $y(0) = 1$, on trouve $C = -\frac{3}{2}$, donc

$$y(x) = -\frac{3}{2} e^{-2x} + \frac{5}{2}.$$

Problème de raccord

Que se passe-t-il pour une équation différentielle sur $]a, b[$ du type

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x) .$$

Le principe de résolution est le suivant

- ① Dans les intervalles où α ne s'annule pas, on divise par $\alpha(x)$ et on résout l'équation différentielle

$$y' + \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}y = \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} .$$

comme précédemment.

- ② On examine les raccords possibles. Existe-t-il une solution sur tout $]a, b[$?
Si on note x_0 tel que $\alpha(x_0) = 0$, on aimerait donc une fonction qui est solution sur $]a, x_0[$, puis sur $]x_0, b[$ et qui est prolongeable par continuité en x_0 et dérivable en x_0 et solution de l'équation en x_0 .
On peut souvent procéder par analyse et synthèse.

Exemple 13

On veut résoudre

$$xy' - 2y = 0 . \quad (*)$$

- ① Sur $\mathbb{R}^*$, $(*)$ est équivalente à $y' - \frac{2}{x}y = 0$.. On résout alors sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
- Sur $\mathbb{R}_+^*$, les solutions sont les fonctions $y = \lambda x^2$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Sur $\mathbb{R}_-^*$, les solutions sont les fonctions $y = \mu x^2$, avec $\mu \in \mathbb{R}$.
- ② La fonction $x \mapsto \lambda x^2$ est bien prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ et cette prolongation est dérivable. Donc la fonction $y = \lambda x^2$ est solution de $(*)$ sur $\mathbb{R}$.

$$\text{L'ensemble des solutions est donnée par } y = \begin{cases} \lambda x^2 & x > 0, \\ \mu x^2 & x < 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Si on demande plus de régularité sur la fonction y , il ne reste plus que les fonctions $y = \lambda x^2$, puisque $\lambda = \mu$ à cause du caractère $\mathcal{C}^2$.

Exemple 14

On veut résoudre

$$xy' + y = 0 . \quad (*)$$

- ① Sur $\mathbb{R}^*$, $(*)$ est équivalente à $y' + \frac{1}{x}y = 0$.. On résout alors sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
- Sur $\mathbb{R}_+^*$, les solutions sont les fonctions $y = \lambda x^{-1}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Sur $\mathbb{R}_-^*$, les solutions sont les fonctions $y = \mu x^{-1}$, avec $\mu \in \mathbb{R}$.
- ② La fonction $x \mapsto \lambda x^{-1}$ n'est pas prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $y = \lambda x^{-1}$ est solution de $(*)$ sur $\mathbb{R}^*$.
La seule solution sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle.

4 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE

4.1 FORME GÉNÉRALE ET RÉOLUTION DANS LE CAS HOMOGÈNE

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est de la forme :

$$y'' + ay' + by = f(x) ,$$

où a et b sont des constantes complexes.

Théorème 3

Dans le cas homogène, l'équation

$$y'' + ay' + by = 0. \quad (E_H)$$

Les tableaux ci dessous résument les solutions de cette équation.

$\mathbb{C}$ $\mathbb{R}$	Discriminant Δ de $X^2 + aX + b$	Racines de $X^2 + aX + b$	Solutions y_H
	$\Delta \neq 0$	r_1 et r_2	$\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$.
	$\Delta = 0$	r	$(\lambda x + \mu) e^{rx}$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$	Discriminant Δ de $X^2 + aX + d$	Racines de $X^2 + aX + b$	Solutions y_H
	$\Delta > 0$	r_1 et r_2	$\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$.
	$\Delta = 0$	r	$(\lambda x + \mu) e^{rx}$
	$\Delta < 0$	$\rho \pm i\theta$	$e^{\rho x} (\lambda \cos(\theta x) + \mu \sin(\theta x))$.

où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Preuve. Tout est basé sur l'idée suivante :

La fonction $x \mapsto e^{rx}$ est solution de l'équation $y'' + ay' + by = 0$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, (r^2 + ar + b) e^{rx} = 0 \iff r^2 + ar + b = 0$$

$$\iff r \text{ est une racine du polynôme caractéristique } X^2 + aX + b.$$

Analyse Nous allons chercher les solutions de notre équation sous la forme $y : x \mapsto z(x)e^{rx}$ avec $z \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On a alors

$$y'' + ay' + by = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}, (z''(x) + 2rz'(x) + r^2z(x)) e^{rx} + a(z'(x) + rz(x)) e^{rx} + bz(x)e^{rx} = 0$$

$$\iff z'' + (2r + a)z' + \underbrace{(r^2 + ar + b)}_{=0} z = 0 \iff (z')' + (2r + a)z' = 0$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) = \lambda e^{-(2r+a)x}.$$

- Supposons $\Delta \neq 0$. Donc $r \neq -\frac{a}{2}$. On a alors après primitive,

$$y'' + ay' + by = 0 \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, z(x) = \frac{\lambda e^{-(2r+a)x}}{-(2r+a)} + \mu$$

Si on change notre constante $\lambda \in \mathbb{C}$, c'est équivalent à

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, z(x) = \lambda e^{-(2r+a)x} + \mu.$$

Et on obtient donc $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = z(x)e^{rx} = \lambda e^{-(r+a)x} + \mu e^{rx}$.

Il suffit de remarquer que $-(r+a)$ est en fait l'autre racine !

- Supposons $\Delta = 0$. Donc $r = -\frac{a}{2}$ est l'unique racine de $X^2 + aX + b$ et $2r + \frac{b}{a} = 0$. Alors

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by = 0 &\iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) = \lambda \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, z(x) = \lambda x + \mu \quad \text{après primitivation} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = z(x)e^{rx} = (\lambda x + \mu)e^{rx} \quad \text{comme voulu.} \end{aligned}$$

Synthèse On vérifie que les fonctions trouvées sont bien solutions de l'équation.

Il reste le cas $\Delta < 0$ dans le cas réel. Soit y une solution complexe de l'équation (E_H) . Comme $\Delta \neq 0$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \alpha e^{rx+i\omega x} + \beta e^{rx-i\omega x} = e^{rx} (\alpha e^{i\omega x} + \beta e^{-i\omega x})$. Cette solution est réelle, si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, en tout point. Donc, on doit avoir $\text{Im}(y(0)) = \text{Im}(y(\frac{\pi}{2\omega})) = 0$.

Après résolution, on obtient $-\text{Im}(\alpha) = \text{Im}(\beta)$ et $\text{Re}(\beta) = \text{Re}(\alpha)$, d'où $\beta = \bar{\alpha}$. On pose $\lambda := 2 \text{Re}(\alpha)$ et $\mu := -2 \text{Im}(\alpha)$ et on a

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{rx} (\alpha e^{i\omega x} + \bar{\alpha} e^{-i\omega x}) = 2e^{rx} \text{Re}(\alpha e^{i\omega x}) = e^{rx} (2 \text{Re}(\alpha) \cos(\omega x) - 2 \text{Im}(\alpha) \sin(\omega x)) \\ &= e^{rx} (\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)). \end{aligned}$$

La synthèse est immédiate.

□

Exemple 15

Résolvons $y'' - 3y' + 2y = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$, avec racines $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. Les solutions sont donc de la forme

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

4.2 RÉOLUTION AVEC SECOND MEMBRE

Une technique pour trouver une solution particulière $y_p(x)$ est la méthode de **variation de la constante**. Supposons que nous connaissons une solution de l'équation homogène, sous la forme $y_h(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.

On cherche alors une solution particulière sous la forme $y_p(x) = u(x)e^{r_1 x}$ où u est une fonction inconnue, que l'on détermine en résolvant les équations obtenues par substitution dans l'équation initiale.

Exemple 16

Résolvons l'équation différentielle non homogène $y'' - y = e^x$.

Étape 1 : Résolution de l'équation homogène $y'' - y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$ avec solutions $r = \pm 1$. La solution générale de l'équation homogène est donc :

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Étape 2 : Recherche d'une solution particulière de la forme $y_p(x) = A x e^x$, avec A une constante. On substitue y_p dans l'équation :

$$y_p' = A e^x + A x e^x, \quad y_p'' = 2A e^x + A x e^x.$$

En substituant dans l'équation $y'' - y = e^x$, on trouve $A = \frac{1}{2}$. Ainsi, $y_p(x) = \frac{x}{2} e^x$.

Solution générale : La solution générale est donc :

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{x}{2} e^x.$$

Principe de superposition

Soient y_1 et y_2 deux solutions des équations $y'' + ay' + by = f_1(x)$ et $y'' + ay' + by = f_2(x)$ respectivement. Alors, pour tous scalaires $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, la combinaison linéaire :

$$y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$$

est une solution de l'équation $y'' + ay' + by = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$.

C'est particulièrement utile pour résoudre des équations où le second membre peut être décomposé en somme de fonctions plus simples.

Exemple 17

Considérons l'équation $y'' + 4y = \sin(x) + x$.

Étape 1 : Décomposons le second membre $f(x) = \sin(x) + x$ en deux parties $f_1(x) = \sin(x)$ et $f_2(x) = x$.

Étape 2 : Résolvons $y'' + 4y = \sin(x)$ en trouvant une solution particulière de la forme $y_{p_1}(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$.

On obtient finalement $y_{p_1}(x) = \frac{1}{3} \sin(x)$.

Étape 3 : Résolvons $y'' + 4y = x$ en prenant une solution particulière de la forme $y_{p_2}(x) = Ax + B$. On obtient finalement $y_{p_2}(x) = \frac{x}{4}$.

Solution générale : En appliquant le principe de superposition, la solution générale de l'équation est :

$$y(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(x) + \frac{x}{4}.$$

Au programme

Il y a seulement les seconds membres suivants au programme de MPSI:

$$Ae^{rx} \sin(\omega x) \quad \text{et} \quad Ae^{rx} \cos(\omega x), \text{ avec } A \in \mathbb{C} \text{ et } \omega \in \mathbb{R}.$$

L'équation $ay'' + by' + cy = Ae^{rx}$ admet une solution particulière de la forme suivante, avec $B \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} x \mapsto Be^{rx} & \text{si } r \text{ n'est pas racine du polynôme caractéristique} \\ x \mapsto Bxe^{rx} & \text{si } r \text{ est racine simple du polynôme caractéristique} \\ x \mapsto Bx^2e^{rx} & \text{si } r \text{ est racine double du polynôme caractéristique.} \end{cases}$$

Pour le cas où on a $\sin(\omega x)$ ou $\cos(\omega x)$, il suffit de passer aux complexes, puis de prendre la partie réelle !

Exemple 18

On cherche à résoudre (E) : $y' - y = e^x + 4 \sin x$

Équation homogène Les solutions en sont toutes les fonctions $x \mapsto \lambda e^x$, λ décrivant $\mathbb{R}$.

Solution particulière de l'équation $y' - y = e^x$ Cherchons-en une sous la forme $x \mapsto Bxe^x$ avec $B \in \mathbb{R}$.

$$x \mapsto Bxe^x \text{ est solution de } y' - y = e^x \iff \forall x \in \mathbb{R}, (Be^x + Bxe^x) - Bxe^x = e^x \iff B = 1.$$

La fonction $x \mapsto xe^x$ convient.

Solution particulière de l'équation $y' - y = e^{ix}$ Cherchons-en une sous la forme $x \mapsto Be^{ix}$ avec $B \in \mathbb{C}$.

$$x \mapsto Be^{ix} \text{ est solution de } y' - y = e^{ix} \iff \forall x \in \mathbb{R}, iBe^{ix} - Be^{ix} = e^{ix} \iff B = \frac{1}{i-1} = -\frac{1+i}{2}.$$

La fonction $x \mapsto -\frac{1+i}{2}e^{ix}$ convient.

Solution particulière de l'équation $y' - y = \sin x = \operatorname{Im}(e^{ix})$ D'après le point précédent,

$$\text{la fonction } x \mapsto \operatorname{Im}\left(-\frac{1+i}{2}e^{ix}\right) = -\frac{\sin x + \cos x}{2} \text{ convient.}$$

Solutions de (E) Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions $x \mapsto (x + \lambda)e^x - 4 \frac{\sin x + \cos x}{2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.3 PROBLÈME DE CAUCHY POUR LES ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE**Théorème 4**

Soit $y'' + ay' + by = f(x)$ une équation différentielle avec a, b constantes, f continue, et des conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$. Il existe une unique solution $y(x)$ vérifiant ces conditions initiales, définie sur tout intervalle où f est définie.

Exemple 19

Trouvons la solution du problème de Cauchy suivant :

$$y'' - 2y' + y = e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Étape 1 : Résolvons l'équation homogène $y'' - 2y' + y = 0$. L'équation caractéristique est $(r-1)^2 = 0$, donc la solution de l'équation homogène est $y_h(x) = (C_1 + C_2x)e^x$.

Étape 2 : Cherchons une solution particulière $y_p(x) = Ax^2e^x$. En substituant dans l'équation, on obtient $A = \frac{1}{2}$. Donc, $y_p(x) = \frac{x^2}{2}e^x$.

Solution générale : La solution générale est $y(x) = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{x^2}{2}e^x$.

Étape 3 : En appliquant les conditions initiales, on obtient $C_1 = 1$ et $C_2 = -\frac{1}{2}$. La solution finale est donc

$$y(x) = \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right)e^x.$$

5 TABLEAU DES PRIMITIVES USUELLES

On écrit l'expression dépendant de x à la place et la fonction. u est une fonction quelconque telle que la fonction globale soit bien définie.

Fonction	Primitive
$x^\alpha (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
e^x	e^x
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) $
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x)$
$\operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(x)$
$\operatorname{th}(x)$	$\ln(\operatorname{ch}(x))$

Fonction	Primitive
$u'(x)u(x)^\alpha (\alpha \neq -1)$	$\frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(u(x))$
$u'(ax+b), \text{ pour } a \neq 0$	$\frac{1}{a}u(ax+b)$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(u(x))$
$-u'(x)\sin(u(x))$	$\cos(u(x))$
$\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$	$\arctan(u(x))$