

# TD

## Analyse asymptotique

### EXERCICES TECHNIQUES D'APPLICATION DU COURS

#### EXERCICE 1 ■ ■ □ Sommes et produits \_\_\_\_\_

Donner les développements limités des fonctions suivantes au point donné et à l'ordre demandé. (On notera l'expression en  $x$  à la place de la fonction)

- |                                                        |                                                                  |
|--------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| ① $\frac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0               | ⑧ $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$ à l'ordre 3 en 0                        |
| ② $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0           | ⑨ $\frac{x^2+1}{x^2-4x+3}$ à l'ordre 3 en 0                      |
| ③ $\sin x \cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0                   | ⑩ $e^x(1+x)^{1/3}$ à l'ordre 2 en 0                              |
| ④ $\cos(x) \ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0                  | ⑪ $(\cosh(x) - \cos(x))(\sinh(x) - \sin(x))$ à l'ordre 8 en 0    |
| ⑤ $(x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 en 0                 | ⑫ $(\cosh(x) - \cos(x))(\sinh(x) - \sin(x))^2$ à l'ordre 11 en 0 |
| ⑥ $(\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4 en 0                      |                                                                  |
| ⑦ $(1 - \cos x)(e^x - 1)(x - \sin x)$ à l'ordre 7 en 0 |                                                                  |

► Indication      ► Correction

#### EXERCICE 2 ■ □ □ Compositions \_\_\_\_\_

Donner les développements limités des fonctions suivantes au point donné et à l'ordre demandé. (On notera l'expression en  $x$  à la place de la fonction)

- |                                                       |                                               |
|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| ① $\ln(\cos(x))$ à l'ordre 4 en 0                     | ⑤ $\exp(\cos x)$ à l'ordre 4 en 0             |
| ② $\cos(\sin(x))$ à l'ordre 4 en 0                    | ⑥ $\arctan(e^x)$ à l'ordre 4 en 0             |
| ③ $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0 | ⑦ $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 en 0        |
| ④ $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4 en 0                     | ⑧ $x(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 4 en 0 |
|                                                       | ⑨ $\ln(2+x+\sqrt{1+x})$ à l'ordre 3 en 0      |

⑩  $\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{3/x^2}$  à l'ordre 3 en 0

► Indication      ► Correction

#### EXERCICE 3 ■ ■ □ Quotient ? Vraiment ? Ou compositions ? \_\_\_\_\_

Donner les développements limités des fonctions suivantes au point donné et à l'ordre demandé. (On notera l'expression en  $x$  à la place de la fonction)

- |                                                    |                                                                                                  |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ① $\frac{1}{\cos(x)}$ à l'ordre 4 en 0             | ⑦ $\frac{1}{2+x^2}$ à l'ordre $2n$ en 0                                                          |
| ② $\frac{1}{1-\sin(x)}$ à l'ordre 4 en 0           | ⑧ $\frac{x}{(1-2x)(1-4x)}$ à l'ordre $n$ en 0                                                    |
| ③ $\frac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0             | ⑨ $\frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$ à l'ordre 3 en 0                                               |
| ④ $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0                       | ⑩ $\frac{\sin(x)}{\exp(x) - 1}$ à l'ordre 2 en 0                                                 |
| ⑤ $\frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2 en 0 | ⑪ $\frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$ à l'ordre 3 en 0 |
| ⑥ $\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0       |                                                                                                  |

► Indication      ► Correction

#### EXERCICE 4 ■ ■ □ Primitivation \_\_\_\_\_

Donner les développements limités des fonctions suivantes au point donné et à l'ordre demandé. (On notera l'expression en  $x$  à la place de la fonction)

- |                                                   |                                                                                      |
|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| ① $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ à l'ordre 5 en 0 | ⑤ $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ à l'ordre 10 en 0                           |
| ② $\arccos x$ à l'ordre 5 en 0                    |                                                                                      |
| ③ $\arcsin x$ à l'ordre 5 en 0                    | ⑥ $\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{1+t^2}$ en $+\infty$ à la précision $o(\frac{1}{x^2})$ |
| ④ $\int_0^x e^{t^2} dt$ à l'ordre 5 en 0          |                                                                                      |

► Indication      ► Correction

**EXERCICE 5 ■ □ □ Et si on ne fait pas en 0 ?**

Donner les développements limités des fonctions suivantes au point donné et à l'ordre demandé. (On notera l'expression en  $x$  à la place de la fonction)

- |                                                            |                                                          |
|------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| ① $\frac{1}{x}$ à l'ordre 3 en 2                           | ④ $\cos(x)$ à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$               |
| ② $\ln(x)$ à l'ordre 3 en 2                                | ⑤ $\sqrt{x}$ à l'ordre 3 en 2                            |
| ③ $e^x$ à l'ordre 3 en 1                                   | ⑥ $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 3 en $+\infty$ |
| ⑦ $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \ln x$ à l'ordre 4 en $+\infty$ |                                                          |
| ⑧ $\sqrt{x^2+x+1} - x$ à l'ordre 4 en $+\infty$            |                                                          |

► Indication      ► Correction

**EXERCICE 6 ■ □ □ Avec les suites**

Trouver un équivalent simple aux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suivantes et donner leur limite.

- |                                                    |                                                          |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| ① $u_n = (n + 3 \ln n)e^{-(n+1)}$                  | ⑧ $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$                        |
| ② $u_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n+1}$                   | ⑨ $u_n = \sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)}$                       |
| ③ $u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$ | ⑩ $u_n = \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}}$                      |
| ④ $u_n = \frac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{\ln n - 2n^2}$  | ⑪ $u_n = \ln \left( \sin \frac{1}{n} \right)$            |
| ⑤ $u_n = \frac{2n^3 - \ln n + 1}{n^2 + 1}$         | ⑫ $u_n = 1 - \cos \frac{1}{n}$                           |
| ⑥ $u_n = \frac{n! + e^n}{2^n + 3^n}$               | ⑬ $u_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$            |
| ⑦ $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$            | ⑭ $u_n = \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ |
|                                                    | ⑮ $u_n = \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$                  |

► Indication      ► Correction

**EXERCICE 7 ■ ■ □ Applications aux limites**

Soient  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ . Calculer les limites des expressions suivantes en 0.

- |                                                                   |                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| ① $\frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$                                 | ② $\frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$                                              |
| ③ $\frac{e^x - \cos(x) - x}{x^2}$                                 | ⑫ $\frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{\arctan(1+x) - \arctan(1-x)}$                          |
| ④ $\frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2}$                                | ⑬ $\frac{2 \tan(x) - \sinh(2x)}{(1 - \cos(3x)) \arctan(x)}$                          |
| ⑤ $\frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$                            | ⑭ $\frac{(1+3x)^{1/3} - 1 - \sin(x) - x}{1 - \cos(x)}$                               |
| ⑥ $\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$                           | ⑮ $\frac{\sinh(x) - 2 \sinh(2x) + \sinh(3x)}{\ln(1+x+2x^2) + \sqrt{1-2x} - 1 - x^2}$ |
| ⑦ $\frac{1 - \cos(x)}{\tan^2(x)}$                                 | ⑯ $\frac{\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))}{\sinh(\tanh(x)) - \tanh(\sinh(x))}$          |
| ⑧ $\frac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1+x^3} - 1}$                    | ⑰ $\frac{\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))}{\arcsin(\arctan(x)) - \arctan(\arcsin(x))}$  |
| ⑨ $\frac{\sin(3x) + 4 \sin^3(x) - 3 \ln(1+x)}{(e^x - 1) \sin(x)}$ | ⑱ $\frac{a^x - b^x}{x}$                                                              |
| ⑩ $\frac{x \arctan(x) - x^2}{\cos(x^2) - 1}$                      | ⑲ $\left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$                                 |
| ⑪ $\frac{\arctan(x) - \sin(x)}{\tan(x) - \arcsin(x)}$             | ⑳ $\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$                                                |

► Indication      ► Correction

**EXERCICE 8 ■ ■ □ Développements asymptotiques**

Déterminer un développement asymptotique de

- |                                                                                                    |                                                                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| ① $\frac{1}{e^x - 1}$ en 0 à la précision $o(x)$                                                   | ③ $\frac{x \cosh(x) - \sinh(x)}{\cosh x - 1}$ en $+\infty$ à la précision $o(1)$ |
| ② $\arctan x$ en $+\infty$ à la précision $o\left(\frac{1}{x^4}\right)$                            |                                                                                  |
| ④ $x^2 \ln \left( \frac{x+1}{x} \right)$ en $+\infty$ à la précision $o\left(\frac{1}{x^4}\right)$ |                                                                                  |

⑤  $\frac{x+1}{1+\exp(1/x)}$  en  $+\infty$  à la précision  $o\left(\frac{1}{x}\right)$

⑥  $x \exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)$  en  $+\infty$  à la précision  $o\left(\frac{1}{x}\right)$

⑦  $\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$  en 0 à la précision  $x^{5/2}$

⑧  $x^x$  en 0 à la précision  $(x \ln x)^2$

► Indication

► Correction

## EXERCICES "COMME EN COLLE"

### EXERCICE 9 ■ □ □

① Déterminer un développement limité en 0 à l'ordre 7 de  $x \mapsto \frac{x^3+1}{x^2+1}$ .

② En déduire la décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  la fraction rationnelle  $\frac{X^3+1}{X^8(X^2+1)}$ .

► Indication

► Correction

### EXERCICE 10 ■ □ □

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \sum_{k=0}^n k!$ . Montrer que  $u_n \sim n!$ . ► Indication ► Correction

### EXERCICE 11 ■ □ □

Montrer que, au voisinage de  $+\infty$ ,  $u_n = \int_{n^2}^{n^3} \frac{dt}{1+t^2} \sim \frac{1}{n^2}$ . ► Indication ► Correction

### EXERCICE 12 ■ □ □

Donner le développement asymptotique, en  $+\infty$ , à la précision  $1/n^2$  de  $u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!$ .

► Indication

► Correction

### EXERCICE 13 ■ ■ □

Développement asymptotique, à la précision  $1/n^2$ , de  $u_n = \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2}$ . ► Indication

► Correction

### EXERCICE 14 ■ ■ ■

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et l'équation  $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$ .

① Montrer qu'il existe une unique solution positive  $x_n$  de  $(E_n)$  et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$

② On pose  $y_n = 1 - x_n$ . Montrer que, pour  $n$  assez grand,

$$\frac{\ln n}{2n} \leq y_n \leq 2 \frac{\ln n}{n}$$

On peut poser  $f_n(y) = n \ln(1-y) - \ln(y)$ .

③ Montrer que  $\ln(y_n) \sim -\ln n$  puis que  $x_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ .

► Indication

► Correction

### EXERCICE 15 ■ ■ ■

①  $\forall n \in \mathbb{N}$ , justifier que l'équation  $x + e^x = n$  possède une unique solution  $x_n \in \mathbb{R}$ .

② Déterminer la limite de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  puis un équivalent de  $x_n$ .

③ Former un développement asymptotique, à la précision  $1/n^2$ , de  $x_n$  en  $+\infty$ .

► Indication

► Correction

### EXERCICE 16 ■ ■ ■

Pour  $n \geq 2$ , on considère le polynôme  $P_n = X^n - nX + 1$ .

① Montrer que  $P_n$  admet exactement une racine réelle entre 0 et 1, notée  $x_n$ .

② Déterminer la limite de  $x_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

③ Donner un équivalent de  $(x_n)$  puis le deuxième terme du développement asymptotique  $x_n$ .

► Indication

► Correction

## EXERCICE 17 ■■■

Soit  $f(x) = (\cos x)^{1/x}$  et  $\mathcal{C}_f$  le graphe de  $f$ .

- ① Montrer l'existence d'une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant
  - i)  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante positive.
  - ii) La tangente à  $\mathcal{C}_f$  en  $(x_n, f(x_n))$  passe par  $O$ .
- ② Déterminer un développement asymptotique, à la précision  $1/n$ , de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

► Indication    ► Correction

## EXERCICE 18 ■■■ Quand l'intervalle bouge

On étudie l'équation  $\tan x = x$  d'inconnue  $x$  réelle.

- ① Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que cette équation possède une unique solution  $x_n$  dans l'intervalle  $I_n = ]-\pi/2; \pi/2[ + n\pi$ .
- ② Déterminer un équivalent de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ainsi définie.
- ③ Réaliser un développement asymptotique à trois termes de  $x_n$ .

► Indication    ► Correction

## EXERCICE 19 ■■□

Montrer que l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = xe^{x^2}$  admet une application réciproque définie sur  $\mathbb{R}$  et former le  $DL_5(0)$  de  $f^{-1}$ .

► Indication    ► Correction

## EXERCICE 20 ■■□

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 2x + \sin x$ .

- ① Montrer que  $f$  est une bijection de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .
- ② Calculer un DL à l'ordre 3 en 0 de  $f^{-1}$ .

► Indication    ► Correction

## EXERCICE 21 ■ (A) ■

Déterminer le DL en 0 à l'ordre 1000 de  $x \mapsto \ln \left( \sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!} \right)$ .

► Indication    ► Correction

## EXERCICE 22 ■■□

Soit  $f : ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

- ① Montrer que  $f$  est convexe sur  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$ .
- ② Montrer que, pour tout  $x > 1$  on a

$$\int_x^{x^2} \frac{x \, dt}{t \ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2 \, dt}{t \ln t}.$$

En déduire que  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \ln 2$ .

De même, établir  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \ln 2$ .

- ③ On prolonge  $f$  par continuité en 1, en posant  $f(1) = \ln 2$ . Montrer que  $f$  ainsi prolongée est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$ . Établir la convexité de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .

► Indication    ► Correction

## Indications

### EXERCICES TECHNIQUES D'APPLICATION DU COURS

#### INDICATION POUR L'EXERCICE 1 **Sommes et produits** \_\_\_\_\_

Certains sont corsés, mais les calculs ne font jamais de mal ! ;)

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

#### INDICATION POUR L'EXERCICE 2 **Compositions** \_\_\_\_\_

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

#### INDICATION POUR L'EXERCICE 3 **Quotient ? Vraiment ? Ou compositions ?** \_\_\_\_\_

On ne divise jamais les DL ! Soit on factorise par  $x^k$  quand on peut, sinon, on a  $1 + o(x^l)$  qui apparaît au dénominateur et on utilise le DL de  $(1 + x)^{-1}$ .

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

#### INDICATION POUR L'EXERCICE 4 **Primitivation** \_\_\_\_\_

Voir le lemme de primitivation des DL dans le cours.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

#### INDICATION POUR L'EXERCICE 5 **Et si on ne fait pas en 0 ?** \_\_\_\_\_

On décale la fonction en posant  $t = x - a$ . Donc quand  $x \rightarrow a$ ,  $t \rightarrow 0$ , et on peut faire un DL en 0.

On oublie pas de revenir à la variable  $x$  en fin de calculs.

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

#### INDICATION POUR L'EXERCICE 6 **Avec les suites** \_\_\_\_\_

Certaines peuvent être calculées sans  $DL$ .

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

#### INDICATION POUR L'EXERCICE 7 **Applications aux limites** \_\_\_\_\_

Ici, on ne vous donne plus l'ordre... Si on ne va pas assez loin dans notre DL, on recommence !

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

#### INDICATION POUR L'EXERCICE 8 **Développements asymptotiques** \_\_\_\_\_

Dans les développements asymptotiques, vous devez sortir le (ou les) terme(s), qui explose au voisinage demandé. Le reste est un DL classique.

Pensez à poser  $t = 1/x$ , si  $x \rightarrow +\infty$ , pour ne pas augmenter la gymnastique intellectuelle.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

## EXERCICES "COMME EN COLLE"

#### INDICATION POUR L'EXERCICE 9 \_\_\_\_\_

Pour la décomposition, l'écrire en toute généralité (avec les constantes), puis justifier l'identification avec le DL.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

#### INDICATION POUR L'EXERCICE 10 \_\_\_\_\_

Diviser la somme par  $n!$ , et décomposer la somme pour tout faire tendre vers 0.

Quand la majoration grossière ne fonctionne pas, on peut sortir un terme supplémentaire.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

#### INDICATION POUR L'EXERCICE 11 \_\_\_\_\_

On pensera à une formule bien connue de arctan qui permet de passer de  $n$  à  $1/n$ .

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12

Sortir les termes "les plus forts", et majorer grossièrement le reste de la somme. C'est comme un DL : Si on ne va pas assez loin, on recommence !

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 13

On peut majorer cette fonction à l'intérieur de la somme à l'aide d'un DL.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 14

Exercice difficile. On passe toujours tous les termes du développement connu à gauche pour aller un cran plus loin !

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 15

Exercice difficile. On passe toujours tous les termes du développement connu à gauche pour aller un cran plus loin !

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 16

Exercice difficile. On passe toujours tous les termes du développement connu à gauche pour aller un cran plus loin !

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 17

Exercice difficile. On passe toujours tous les termes du développement connu à gauche pour aller un cran plus loin !

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 18 Quand l'intervalle bouge

Exercice difficile. On passe toujours tous les termes du développement connu à gauche pour aller un cran plus loin !

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 19

On écrit le DL possible de  $f^{-1}$  (n'oubliez pas de supprimer les termes pairs si elle est impaire), puis on remplace celui de  $f$  dans  $f^{-1}(f(x)) = x$ , en justifiant que l'on peut faire ce DL.

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 20

On écrit le DL possible de  $f^{-1}$  (n'oubliez pas de supprimer les termes pairs si elle est impaire), puis on remplace celui de  $f$  dans  $f^{-1}(f(x)) = x$ , en justifiant que l'on peut faire ce DL.

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 21

on pensera à faire apparaître  $e^x$ , puis de forcer pour utiliser le DL de  $\ln$ .

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 22

On n'oublie pas de montrer que  $f$  est dérivable avant de dériver.

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)

## Corrections

### EXERCICES TECHNIQUES D'APPLICATION DU COURS

#### Correction de l'EXERCICE 1 Sommes et produits

Les égalités sont données, quand  $x$  tend vers 0.

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{1-x} - e^x = \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\textcircled{2} \quad \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{5x^4}{64} + o(x^4)$$

$$\textcircled{3} \quad \sin(x) \cos(2x) = x - \frac{13x^3}{6} + \frac{121x^5}{120} + o(x^6)$$

$$\textcircled{4} \quad (\cos x) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\textcircled{5} \quad (1+x^3) \sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{15x^3}{16} + o(x^3)$$

$$\textcircled{6} \quad (\ln(1+x))^2 = x^2 - x^3 + \frac{11x^4}{12} + o(x^4)$$

$$\textcircled{7} \quad (1 - \cos x)(e^x - 1)(x - \sin x) = x^6 \left( \frac{1}{12} + \frac{x}{24} + o(x) \right) = \frac{x^6}{12} + \frac{x^7}{24} + o(x^7)$$

$$\textcircled{8} \quad \frac{1}{(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\textcircled{9} \quad \frac{x^2+1}{x^2-4x+3} = \frac{1}{3} + \frac{4}{9}x + \frac{21}{27}x^2 + \frac{76}{81}x^3 + o(x^3)$$

$$\textcircled{10} \quad e^x(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{4}{3}x + \frac{13}{18}x^2 + o(x^2)$$

$$\textcircled{11} \quad (\cosh(x) - \cos(x))(\sinh(x) - \sin(x)) = \frac{x^5}{3} + o(x^8)$$

$$\textcircled{12} \quad (\cosh(x) - \cos(x))(\sinh(x) - \sin(x))^2 = \frac{x^8}{9} + o(x^{11})$$

↩ retour à l'EXERCICE 1

#### Correction de l'EXERCICE 2 Compositions

Les égalités sont données, quand  $x$  tend vers 0.

$$\textcircled{1} \quad \ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$\textcircled{2} \quad \cos(\sin(x)) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\textcircled{3} \quad \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4)$$

$$\textcircled{4} \quad \exp(\sin(x)) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

$$\textcircled{5} \quad \exp(\cos(x)) = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4)$$

$$\textcircled{6} \quad \arctan(e^x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^4)$$

$$\textcircled{7} \quad (\cos x)^{\sin x} = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5)$$

$$\textcircled{8} \quad x(\cosh x)^{\frac{1}{x}} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{16} + o(x^4)$$

$$\textcircled{9} \quad \ln(2+x+\sqrt{1+x}) = \ln(3) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

$$\textcircled{10} \quad \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{3/x^2} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{x^2}{60\sqrt{e}} + o(x^3)$$

↩ retour à l'EXERCICE 2

#### Correction de l'EXERCICE 3 Quotient ? Vraiment ? Ou compositions ?

Les égalités sont données, quand  $x$  tend vers 0.

$$\textcircled{1} \quad \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = 0 + x - \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{600}x^5 + o(x^5)$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4).$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{1}{1 - \sin(x)} = 1 + x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4)$$

$$\textcircled{5} \quad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{\sin x - 1}{1 + \cos x} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

$$\textcircled{7} \quad \frac{\ln(1+x)}{\sin x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\textcircled{8} \quad \frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{8} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{n+1}} + o(x^{2n})$$

$$(9) \frac{x}{(1-2x)(1-4x)} = 1 + 6x + 28x^2 + \dots + 2^n (2^{n+1} - 1) x^n + o(x^n)$$

$$(10) \frac{x - \sin x}{1 - \cos x} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{90}x^3 + o(x^3)$$

$$(11) \frac{\sin x}{\exp(x) - 1} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$$

$$(12) \frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{2}{3}x + \frac{1}{90}x^3 + o(x^3)$$

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

### Correction de l'EXERCICE 4 Primitivation

Les égalités sont données, quand  $x$  tend vers 0.

$$(1) \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$

$$(2) \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$

$$(3) \int_0^x e^{t^2} dt = 0 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5)$$

$$(4) \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = -x + x^2 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{24}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + o(x^{10})$$

(5) On peut calculer l'intégrale

$$I = \arctan x^3 - \arctan x^2$$

Or pour  $x > 0$ ,

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$\arctan \frac{1}{x^2} - \arctan \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x^2}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

### Correction de l'EXERCICE 5 Et si on ne fait pas en 0 ?

Les égalités sont données, quand  $x$  tend vers 0.

$$(1) \frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{x-2}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + o((x-2)^3).$$

$$(2) \ln(x) = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} + o((x-2)^3)$$

$$(3) e^x = e^1 + e^1(x-1) + \frac{e^1}{2}(x-1)^2 + \frac{e^1}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

$$(4) \cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right).$$

$$(5) \sqrt{x} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-2) - \frac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2 + \frac{\sqrt{2}}{128}(x-2)^3 + o((x-2)^3)$$

$$(6) \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$(8) \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \ln x = \ln 2 + \frac{1}{4x^2} - \frac{3}{32x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

### Correction de l'EXERCICE 6 Avec les suites

$$(1) u_n = \frac{ne^{-n}}{e} \rightarrow 0$$

$$(2) u_n \sim \frac{2 \ln n}{n} \rightarrow 0$$

$$(3) u_n \sim n^{1/3} \rightarrow +\infty$$

$$(4) u_n \sim -\frac{1}{2}n \rightarrow -\infty$$

$$(5) u_n \sim 2n \rightarrow +\infty$$

$$(6) u_n \sim \frac{n!}{3^n} \rightarrow +\infty$$

$$(7) u_n = \frac{2}{n^2-1} \sim \frac{2}{n^2}$$

$$(8) u_n = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) + \sqrt{n} + o(\sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n} + o(\sqrt{n})} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$(9) u_n = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \sim \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

car  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$  puisque  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$

$$(10) u_n = \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ car } \frac{1}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0.$$



$$(11) \sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \rightarrow 0 \neq 1 \text{ donc } u_n \sim \ln \frac{1}{n} = -\ln n.$$

$$(12) u_n = 2 \sin^2 \frac{1}{2n} \sim \frac{1}{2n^2}.$$

$$(13) 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \sim \frac{1}{4n\sqrt{n}}$$

$$(14) \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{\ln(1+1/n)}{\sqrt{n}(\sqrt{1+1/n} - 1)} \sim \frac{1/n}{1/2n^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$(15)$$

$${}^{n+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} - e^{\frac{\ln n}{n}} \text{ or}$$

$$e^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} = 1 + \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\ln(n+1)}{n+1} \right)^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{\ln(n+1)}{n+1} \right)^3 + o\left(\frac{(\ln n)^3}{n^3}\right)$$

et

$$e^{\frac{\ln n}{n}} = 1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{2} \left( \frac{\ln n}{n} \right)^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{\ln n}{n} \right)^3 + o\left(\frac{(\ln n)^3}{n^3}\right)$$

donc

$${}^{n+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n} = -\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \sim -\frac{\ln n}{n^2}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

### Correction de l'EXERCICE 7 Applications aux limites

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{x^2} = 1.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1}{6}.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\tan^2(x)} = \frac{1}{2}.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1+x^3} - 1} = \frac{1}{3}.$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) + 4\sin^3(x) - 3\ln(1+x)}{(e^x - 1)\sin(x)} = \frac{3}{2}.$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctan(x) - x^2}{\cos(x^2) - 1} = \frac{2}{3}.$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - \sin(x)}{\tan(x) - \arcsin(x)} = -1.$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{\arctan(1+x) - \arctan(1-x)} = 2.$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\tan(x) - \sinh(2x)}{(1 - \cos(3x))\arctan(x)} = -\frac{4}{27}.$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^{1/3} - 1 - \sin(x) - x}{1 - \cos(x)} = \mp\infty.$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x) - 2\sinh(2x) + \sinh(3x)}{\ln(1+x+2x^2) + \sqrt{1-2x} - 1 - x^2} = -\frac{12}{13}.$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))}{\sinh(\tanh(x)) - \tanh(\sinh(x))} = -1.$$

$$(17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))}{\arcsin(\arctan(x)) - \arctan(\arcsin(x))} = 1.$$

$$(18) \text{ On a}$$

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + x \ln(a) + o(x) \quad \text{et} \quad b^x = e^{x \ln b} = 1 + x \ln(b) + o(x)$$

Il en résulte que

$$a^x - b^x = (\ln a - \ln b)x + o(x)$$

ou encore

$$\frac{a^x - b^x}{x} = \ln a - \ln b + o(1)$$

La limite recherchée existe et vaut  $\ln a - \ln b$ .

(19) On a

$$\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)\right)$$

Par le même principe qu'à la question précédente, on obtient

$$\frac{a^x + b^x}{2} = \frac{1}{2} \times (2 + x(\ln a + \ln b) + o(x)) = 1 + x \ln \sqrt{ab} + o(x)$$

puis

$$\ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right) = \ln(1 + x \ln \sqrt{ab} + o(x)) = x \ln \sqrt{ab} + o(x)$$

On obtient finalement

$$\frac{1}{x} \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right) = \ln \sqrt{ab} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln \sqrt{ab}$$

Par composition de limites, la limite cherchée existe et vaut  $\sqrt{ab}$ .

(20) Pour tout  $x \in ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[$ , on a

$$\begin{aligned} (1+x)^{\frac{1}{x}} - e &= \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) - e \\ &= e \left( \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right) - 1 \right) \end{aligned}$$

Comme  $\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ , on a, au voisinage de 0

$$\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right) - 1 \sim \frac{\ln(1+x)}{x} - 1$$

Comme  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ , on a  $\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 = -\frac{x}{2} + o(x) \sim -\frac{x}{2}$ . Par transitivité puis produit et quotient d'équivalents, on en déduit que

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} - e \sim -e \frac{x}{2} \quad \text{puis} \quad \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} \sim -\frac{e}{2}$$

Donc la limite recherchée existe et vaut  $-\frac{e}{2}$ .

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

### Correction de l'EXERCICE 8 Développements asymptotiques

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}x + o(x)$$

\textcircled{2} On a, pour tout  $x > 0$ ,  $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}$ . Cette formule permet ainsi de ramener l'étude de  $\arctan x$  quand  $x$  est au voisinage de  $+\infty$  à celle de  $\arctan \frac{1}{x}$  avec  $\frac{1}{x}$  au voisinage de 0.

Or,  $\arctan u \underset{0}{=} u - \frac{1}{3}u^3 + o(u^4)$ . En remplaçant, on obtient donc  $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$ .

$$\textcircled{3} \quad \frac{x \cosh(x) - \sinh(x)}{\cosh x - 1} = x - 1 + o(1)$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{x+1}{1+\exp(1/x)} = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\textcircled{5} \quad x \exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

## EXERCICES "COMME EN COLLE"

### Correction de l'EXERCICE 9

$$\textcircled{1} \quad \text{On a} \quad \frac{x^3+1}{x^2+1} = (1+x^3)(1-x^2+x^4-x^6+o(x^7)) \\ = 1-x^2+x^3+x^4-x^5-x^6+x^7+o(x^7).$$

\textcircled{2} D'après le théorème de décomposition en éléments simples, il existe  $a, b, a_1, \dots, a_8 \in \mathbb{R}$ , tels que

$$\frac{X^3+1}{X^8(X^2+1)} = \frac{aX+b}{X^2+1} + \sum_{k=1}^8 \frac{a_k}{X^k}$$

En multipliant par  $X^2+1$  et en évaluant en  $i$ , on obtient que  $a = -1$  et  $b = 1$ . Ensuite, en multipliant par  $X^8$ , on obtient l'identité entre fonctions

$$\begin{aligned} \frac{x^3+1}{x^2+1} &= \frac{-x+1}{x^2+1}x^8 + \sum_{k=1}^8 a_k x^{8-k} \\ &= o(x^7) + \sum_{k=1}^8 a_k x^{8-k} \end{aligned}$$

On identifie donc pour avoir

$$\frac{X^3 + 1}{X^8(X^2 + 1)} = \frac{-X + 1}{X^2 + 1} + \frac{1}{X^8} - \frac{1}{X^6} + \frac{1}{X^5} + \frac{1}{X^4} - \frac{1}{X^3} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{X}.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

### Correction de l'EXERCICE 10

On a

$$u_n = n! + (n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k!$$

Or

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

et

$$0 \leq \frac{\sum_{k=0}^{n-2} k!}{n!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{n!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

donc

$$u_n = n! + (n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k! = n! + o(n!) \sim n!$$

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

### Correction de l'EXERCICE 11

On peut calculer l'intégrale

$$u_n = \arctan n^3 - \arctan n^2$$

Or pour  $x > 0$ ,

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$u_n = \arctan \frac{1}{n^2} - \arctan \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

### Correction de l'EXERCICE 12

On a

$$u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \sum_{k=0}^{n-4} \frac{k!}{n!}$$

Or

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-4} \frac{k!}{n!} \leq \sum_{k=0}^{n-4} \frac{(n-4)!}{n!} \leq n \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

### Correction de l'EXERCICE 13

Pour  $x \in [0, 1]$ ,

$$\left| \sin x - x + \frac{1}{6}x^3 \right| \leq \frac{1}{120}$$

On a donc

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \frac{1}{6} \frac{k^3}{n^6} + M_n$$

avec

$$|M_n| \leq \frac{1}{120} \sum_{k=1}^n \frac{k^5}{n^{10}} \leq \frac{1}{120} \frac{1}{n^4}$$

donc  $M_n = o(1/n^3)$ . Or

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

et

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^6} = \frac{1}{n^6} \sum_{k=1}^n k^3 \sim \frac{1}{4n^2}$$

donc

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

### Correction de l'EXERCICE 14

- ① On introduit  $\varphi_n(x) = x^n + x - 1$ .  $\varphi'_n(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$ ,  $\varphi_n$  est continue strictement croissante et réalise une bijection et de  $[0; +\infty[$  vers  $[-1; +\infty[$  d'où l'existence et l'unicité de  $x_n$ . On a  $\varphi_n(1) = 1$  donc  $x_n \in ]0; 1[$ . Si  $x_{n+1} < x_n$  alors  $x_{n+1}^{n+1} < x_n^n$  puis

$$x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 < x_n^n + x_n - 1$$

ce qui est absurde. On en déduit que  $(x_n)$  est croissante et étant majorée cette suite converge. Posons  $\ell$  sa limite,  $\ell \in ]0; 1]$ . Si  $\ell < 1$  alors  $x_n^n + x_n - 1 = 0$  donne à la limite  $\ell - 1 = 0$  ce qui est absurde. Il reste  $\ell = 1$ .

- ②  $f_n$  est strictement décroissante sur  $]0; 1[$ ,  $f_n(y_n) = 0$ ,

$$f_n\left(\frac{\ln n}{2n}\right) \sim \frac{\ln n}{2} > 0 \text{ et } f_n\left(\frac{2 \ln n}{n}\right) \sim -\ln n < 0$$

donc à partir d'un certain rang

$$\frac{\ln n}{2n} \leq y_n \leq 2 \frac{\ln n}{n}$$

③

$$\ln\left(\frac{\ln n}{2n}\right) \leq \ln y_n \leq \ln\left(2 \frac{\ln n}{n}\right)$$

donne  $\ln(y_n) \sim -\ln n$  puis  $n \ln(1 - y_n) = \ln y_n$  donne  $-ny_n \sim -\ln n$  puis  $y_n \sim \frac{\ln n}{n}$  et finalement

$$x_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

### Correction de l'EXERCICE 15

- ① Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x + e^x$ . La fonction  $f$  est strictement croissante comme somme de fonctions strictement croissantes. En calculant les limites, on remarque que c'est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .
- ②  $f(x_n) = n \leq n + 1 = f(x_{n+1})$  donc  $x_n \leq x_{n+1}$  car  $f^{-1}$  est croissante. Si  $(x_n)$  est majorée par  $M$  alors  $f(x_n) = n \leq f(M)$  ce qui est absurde. La suite  $(x_n)$  étant croissante et non majorée, elle diverge vers  $+\infty$ .  $x_n = o(e^{x_n})$  donc  $e^{x_n} \sim n \rightarrow +\infty \neq 1$  puis  $x_n \sim \ln n$ .

- ③ Posons  $y_n = x_n - \ln n = o(\ln n)$ . On a  $y_n + \ln n + ne^{y_n} = n$  donc

$$e^{y_n} = 1 - \frac{y_n}{n} - \frac{\ln n}{n} \rightarrow 1$$

d'où  $y_n \rightarrow 0$  et

$$e^{y_n} = 1 + y_n + o(y_n)$$

On a alors  $y_n + \ln n + n(1 + y_n + o(y_n)) = n$  d'où  $ny_n + o(ny_n) = -\ln n$  et

$$y_n \sim -\frac{\ln n}{n}$$

Par suite

$$x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

On écrit  $y_n = -\frac{\ln n}{n} + z_n$  et

$$e^{y_n} = 1 - \frac{\ln n}{n} + z_n + \frac{1}{2} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2$$

donc

$$-\frac{\ln n}{n} + z_n + nz_n + \frac{1}{2} \frac{(\ln n)^2}{n} + o\left(\frac{(\ln n)^2}{n}\right) = 0$$

puis

$$z_n \sim -\frac{(\ln n)^2}{2n^2}$$

Finalement

$$x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} - \frac{(\ln n)^2}{2n^2} + o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)$$

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

### Correction de l'EXERCICE 16

- ① La fonction  $x \mapsto P_n(x)$  est strictement décroissante sur  $[0; 1]$  car

$$P'_n(x) = n(x^{n-1} - 1)$$

est strictement négatif sauf pour  $x = 1$ . La fonction continue  $P_n$  réalise donc une bijection strictement décroissante de  $[0; 1]$  vers  $[P_n(1); P_n(0)] = [2 - n; 1]$ . On en déduit l'existence et l'unicité de la solution  $x_n$  à l'équation  $P_n(x) = 0$ .

- ② Puisque  $x_n \in [0; 1]$ , on a  $x_n^{n+1} \leq x_n^n$  puis

$$P_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (n+1)x_n + 1 \leq P_n(x_n) = 0$$

Ainsi  $P_{n+1}(x_n) \leq P_{n+1}(x_{n+1})$  et donc  $x_{n+1} \leq x_n$  car la fonction  $P_{n+1}$  est strictement décroissante. La suite  $(x_n)$  est décroissante et minorée, elle converge donc vers un réel  $\ell \in [0; 1]$ . Si  $\ell > 0$  alors

$$P_n(x_n) = x_n^n - nx_n + 1 \rightarrow -\infty$$

ce qui est absurde. On conclut  $\ell = 0$ .

- ③ On a

$$\frac{x_n^n}{nx_n} = \frac{1}{n} x_n^{n-1} \rightarrow 0$$

et donc  $x_n^n = o(nx_n)$ . Sachant  $x_n^n - nx_n + 1 = 0$ , on obtient  $nx_n \sim 1$  puis

$$x_n \sim \frac{1}{n}$$

Écrivons ensuite

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n} \text{ avec } \varepsilon_n \rightarrow 0$$

Puisque  $x_n^n = nx_n - 1$ , on a

$$\varepsilon_n = x_n^n = \frac{(1 + \varepsilon_n)^n}{n^n} \geq 0$$

Nous allons montrer

$$(1 + \varepsilon_n)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

ce qui permettra de déterminer un équivalent de  $\varepsilon_n$  puis de conclure. Puisque  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , pour  $n$  assez grand, on a  $|1 + \varepsilon_n| \leq 2$  et alors

$$\varepsilon_n = \frac{(1 + \varepsilon_n)^n}{n^n} \leq \frac{2^n}{n^n}$$

On en déduit

$$1 \leq (1 + \varepsilon_n)^n \leq \left(1 + \frac{2^n}{n^n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{2^n}{n^n}\right)\right)$$

Or

$$n \ln\left(1 + \frac{2^n}{n^n}\right) \sim \frac{2^n}{n^{n-1}} \rightarrow 0$$

et par encadrement

$$(1 + \varepsilon_n)^n \rightarrow 1$$

On peut conclure  $\varepsilon_n \sim \frac{1}{n^n}$  et finalement

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{n+1}} + o\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right)$$

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

### Correction de l'EXERCICE 17

- ① La fonction  $f$  est définie et  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{D} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k$  avec

$$I_k = ]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$$

Pour  $x \in \mathcal{D}$ , la tangente en  $(x, f(x))$  passe par  $O$  si, et seulement si,  $xf'(x) = f(x)$ . Après transformation, ceci équivaut pour  $x > 0$  à l'équation

$$x \tan x + \ln(\cos(x)) + x = 0$$

Posons  $\varphi(x) = x \tan x + \ln(\cos(x)) + x$ .  $\varphi$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{D}$ .  $\varphi'(x) = x(1 + \tan^2 x) + 1 > 0$  sur  $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}_+^*$ . Quand  $x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^-$ ,  $\varphi(x) \rightarrow +\infty$ . Quand  $x \rightarrow (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^+$ ,  $\varphi(x) \rightarrow -\infty$ .  $\varphi|_{I_k}$  réalise donc une bijection de  $I_k$  vers  $\mathbb{R}$  (pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ). La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  avec  $x_n = (\varphi|_{I_n})^{-1}(0)$  est solution.

- ② Evidemment  $x_n \sim 2n\pi$  et donc  $x_n = 2n\pi + y_n$ .

Après calculs, on obtient

$$(2n\pi + y_n)(\cos y_n + \sin y_n) = -\cos(y_n) \ln(\cos y_n)$$

La fonction  $t \mapsto t \ln t$  est bornée sur  $]0; 1]$  car prolongeable par continuité en 0 et donc

$$\cos y_n + \sin y_n = -\frac{\cos y_n \ln(\cos y_n)}{2n\pi + y_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Sachant  $|y_n| < \pi/2$ , on en déduit  $y_n \rightarrow -\pi/4$ . On conclut

$$x_n = 2n\pi - \frac{\pi}{4} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

### Correction de l'EXERCICE 18 Quand l'intervalle bouge

- ① Sur  $I_n$ , la fonction  $f_n : x \mapsto \tan x - x$  est continue et croît strictement de  $-\infty$  vers  $+\infty$ . Elle réalise donc une bijection de  $I_n$  vers  $\mathbb{R}$ . L'équation  $f_n(x) = 0$  possède alors une unique solution dans  $I_n$ .

- ② Puisque  $x_n$  est un élément de  $I_n$ , on dispose de l'encadrement

$$-\frac{\pi}{2} + n\pi < x_n < \frac{\pi}{2} + n\pi$$

On en déduit

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi$$

- ③ Posons

$$y_n = x_n - n\pi$$

On a

$$\tan y_n = x_n \text{ avec } y_n \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

et donc

$$y_n = \arctan x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

On peut ainsi déjà écrire le développement asymptotique à deux termes

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$$

Déterminons un équivalent de ce  $o(1)$  en étudiant

$$z_n = \frac{\pi}{2} - y_n = \frac{\pi}{2} - \arctan x_n$$

Sachant

$$\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

on obtient

$$z_n = \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \arctan\left(\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}$$

Finalement

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

### Correction de l'EXERCICE 19

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$f'(x) = (1 + 2x^2)e^{x^2} > 0$$

de plus  $\lim_{+\infty} f = +\infty$ ,  $\lim_{-\infty} f = -\infty$ . Donc  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  et  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . En particulier  $f^{-1}$  admet une  $DL_5(0)$ , de plus comme  $f$  est impaire,  $f^{-1}$  l'est aussi et le  $DL_5(0)$  de  $f^{-1}$  est de la forme

$$f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$$

En réalisant un  $DL_5(0)$  de  $f^{-1}(f(x))$  on obtient

$$f^{-1}(f(x)) = ax + (a+b)x^3 + \left(\frac{1}{2}a + 3b + c\right)x^5 + o(x^5)$$

Or  $f^{-1}(f(x)) = x$ , donc

$$a = 1, b = -1 \text{ et } c = \frac{5}{2}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

### Correction de l'EXERCICE 20

- ① La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et sa dérivée,  $x \mapsto 2 + \cos x$ , est strictement positive. Par conséquent,  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  (car  $\lim_{-\infty} f = -\infty$  et  $\lim_{+\infty} f = +\infty$ ).

- ② D'après la première question,  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  (car la dérivée ne s'annule pas) donc admet des DL de tout ordre en 0. Comme par ailleurs,  $f$  est impaire,  $f^{-1}$  l'est aussi. Notons  $f^{-1}(x) = ax + bx^3 + o(x^3)$  le DL à l'ordre 3 en 0 de  $f^{-1}$ .

Comme  $f(x) = 3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ , la relation  $f^{-1}(f(x)) = x$  entraîne

$$\begin{aligned} x_0 &= a \left( 3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) + b \left( 3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^3 + o(x^3) \\ &= 3ax + \left( -\frac{a}{6} + 27b \right) x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

En identifiant les parties régulières, on trouve  $a = \frac{1}{3}$  et  $b = \frac{1}{486}$ , donc

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{486}x^3 + o(x^3)$$

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

### Correction de l'EXERCICE 21

Remarquons que l'argument du logarithme est la partie régulière du DL à l'ordre 999 en 0 de l'exponentielle. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \ln \left( \sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!} \right) &= \ln \left( e^x - \frac{x^{1000}}{1000!} + o(x^{1000}) \right) \\ &= x + \ln \left( 1 + e^{-x} \frac{x^{1000}}{1000!} + o(e^{-x} x^{1000}) \right) \\ &= x + \ln \left( 1 + (1 + o(1)) \frac{x^{1000}}{1000!} + o(x^{1000}) \right) \\ &= x + \ln \left( 1 + \frac{x^{1000}}{1000!} + o(x^{1000}) \right) \\ &= x - \frac{x^{1000}}{1000!} + o(x^{1000}) \end{aligned}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)

### Correction de l'EXERCICE 22

- ① Soit  $G$  une primitive de la fonction  $t \mapsto 1/\ln t$  sur  $]0, 1[$  (resp. sur  $]1, +\infty[$ ). Pour tout  $x \in ]0, 1[$  (resp.  $]1, +\infty[$ ), on a  $f(x) = G(x^2) - G(x)$ . On en déduit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, 1[$  (resp. sur  $]1, +\infty[$ ) et

$$f'(x) = \frac{2x}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$$

On a alors

$$f''(x) = \frac{x \ln x - x + 1}{x(\ln x)^2}$$

Soit  $g(x) = x \ln x - x + 1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et  $g'(x) = \ln(x)$ . Puisque  $g(1) = 0$ , la fonction  $g$  est positive puis  $f'' \geq 0$  sur  $]0; 1[$  (resp.  $]1; +\infty[$ ).

- ② Pour  $x > 1$ ,

$$\forall t \in [x; x^2], \frac{x}{t \ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t}$$

D'où

$$\int_x^{x^2} \frac{x \, dt}{t \cdot \ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2 \, dt}{t \cdot \ln t}$$

Comme  $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \cdot \ln t} = \ln 2$ , on obtient

$$x \ln 2 \leq f(x) \leq x^2 \ln 2$$

puis  $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \ln 2$ . Pour  $x < 1$ ,

$$\forall t \in [x^2; x], \frac{x}{t \ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t}$$

D'où

$$\int_x^{x^2} \frac{x^2 \, dt}{t \cdot \ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{x \, dt}{t \cdot \ln t}$$

On obtient  $x^2 \ln 2 \leq f(x) \leq x \ln 2$  puis  $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \ln 2$ .

- ③  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$  et

$$f'(1+h) = \frac{h}{\ln(1+h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$$

Par le théorème de prolongement  $\mathcal{C}^1$ , on a  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $f'(1) = 1$ . De même, en exploitant

$$f''(1+h) = \frac{(1+h) \ln(1+h) - h}{(1+h)(\ln(1+h))^2} \sim \frac{h^2/2}{(1+h)h^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

on obtient que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $f''(1) = 1/2$ . Comme  $f''$  est positive sur  $]0, +\infty[$ , on peut conclure que  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)