Análisis Combinatorio

Gerardo Acosta*

9 de agosto de 2019

Índice

*Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, Ciudad de México, C.P. 04510, México, gacosta@matem.unam.mx, e Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM), Río Hondo No. 1, Progreso Tizapán, Ciudad de México, C. P. 01080, México, gerardo.acosta@itam.mx

1. Introducción

El presente trabajo contiene parte del material contemplado en el Temario de Álgebra Superior II (MAT 14301) que se imparte en el Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM). Incluye el capítulo titulado Análisis Combinatorio y cuyos puntos son: Principios Básicos de Conteo (Suma y Producto), Permutaciones y Combinaciones, Ordenaciones con Repetición, Ordenaciones sin Repetición y Permutaciones, Arreglos Circulares, Combinaciones, Fórmula de Pascal, Teorema del Binomio, El Número de Subconjuntos de un Conjunto, Arreglos con Clases de Objetos Indistinguibles (llamados aquí Permutaciones con Repetición) y Principio de las Casillas o del Palomar.

Del capítulo titulado Técnicas Avanzadas de Conteo, solamente hemos incluido lo correspondiente al Principio de Inclusión y Exclusión, Aplicaciones y Desórdenes. Los puntos correspondientes a las Series de Potencias, las Funciones Generadoras y sus Aplicaciones a Problemas de Conteo, Funciones Generadoras Exponenciales y sus Aplicaciones, Relaciones de Recurrencia Lineales Homogéneas y no Homogéneas de Orden Uno y Dos y Solución de Relaciones de Recurrencia Vía Funciones Generadoras (Opcional), no se incluyen en el presente trabajo. Pueden ser consultados en libros que aparecen en las Referencias, como [3], [4], [5] y [8], los cuales han sido las fuentes principales para el desarrollo de los temas que aquí aparecen.

En la Introducción escrita en [8], se comenta que "el interés de la Combinatoria ha aumentado considerablemente. En gran parte esto se debe al desarrollo de la Ciencia de la Computación, en la cual juega un rol central el concepto de algoritmo. Para estimar la eficiencia de un algoritmo, es necesario contar el número de veces que se ejecutará cada paso del mismo, y esto es un típico problema combinatorio." También se comenta que la Combinatoria tiene aplicaciones en las ciencias físicas, en la Teoría de Grupos, la Teoría de Probabilidades, la Teoría de Números y la Teoría de Grafos, entre muchas otras ramas de las Matemáticas.

Hemos intentado escribir el presente trabajo lo más autocontenido posible. Sin embargo, para entender la solución de varios de los ejemplos que hemos escogido, son importantes las ideas de la Teoría de Conjuntos, de la Divisibilidad y/o de la Congruencia Numérica. Por otro lado, varias demostraciones que damos se realizan por inducción matemática, o bien por reducción al absurdo. Todos estos temas y métodos de demostración, suelen considerarse en el curso de Álgebra Superior I impartido en el ITAM.

2. Preliminares

En la presente sección comentamos conceptos y terminología que se utilizan a lo largo de todo el trabajo, sobre la Teoría de Conjuntos, en particular, en lo referente a las relaciones y funciones, los conjuntos finitos y la cardinalidad de un conjunto.

2.1. Conjuntos

Supongamos que A y B son conjuntos. Decimos que A es *subconjunto* de B, cosa que denotamos con el símbolo $A \subset B$, si cada elemento de A se encuentra en B. Decimos que A es un *subconjunto propio* de B, lo cual denotamos con el símbolo $A \subsetneq B$, si $A \subset B$ y si existe un elemento de B que no está en A. Los conjuntos A y B son *iguales* si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$. En caso contrario, decimos que A y B son *diferentes* o *distintos*. El símbolo $x \in A$ significa que x es un elemento del conjunto A, mientras que $x \notin A$, indica que x no es un elemento de A.

Si A y B son dos conjuntos, entonces $A \cap B$ representa la *intersección* de A y B, el cual es el conjunto de los elementos que están tanto en A como en B. El símbolo $A \cup B$ es la *unión* de A y B, y se define como el conjunto de los elementos que están en A o en B. El símbolo $A - B$ es la *diferencia* de A en B, y se define como el conjunto de los elementos de A que no están en B. Notemos que $A - B$ y $B - A$ son, en general, conjuntos distintos.

Un conjunto especial es el *conjunto vacío*, el cual se denota como $\emptyset$. Dicho conjunto es un subconjunto de cualquier conjunto. Incluso es el único conjunto con esta propiedad. Utilizando el conjunto vacío, decimos que dos conjuntos A y B son *ajenos* si $A \cap B = \emptyset$. En general, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos, decimos que son *ajenos dos a dos* si para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ con $i \neq j$, sucede que $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Si $\mathcal{A} = \{A_i \colon i \in I\}$ es una familia de conjuntos, su unión se representa como $\bigcup_{i \in I} A_i$ y su intersección como $\bigcap_{i \in I} A_i$. Decimos que los elementos de $\mathcal{A}$ son *ajenos dos a dos* si para cada $i, j \in I$ con $i \neq j$, sucede que $A_i \cap A_j = \emptyset$.

2.2. Relaciones

Una *relación* de un conjunto A en un conjunto B, es un subconjunto del producto cartesiano

$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

El símbolo (a, b) es la *pareja ordenada* cuyo primer elemento a se encuentra en el conjunto A, y su segundo elemento b está en el conjunto B. Más que la definición formal de (a, b), la propiedad importante que debemos retener es que si (a_1, b_1) y (a_2, b_2) son dos parejas ordenadas, entonces

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \quad \text{si y sólo si} \quad a_1 = a_2 \text{ y } b_1 = b_2.$$

Así pues, si R es una relación de A en B, entonces $R \subset A \times B$. Si $(a, b) \in R$, decimos que *a está relacionado con b bajo R*. En lugar de la letra R, es muy común utilizar el símbolo $\sim$ para referirse a una relación de A en B. También, en lugar de decir que $(a, b) \in R$, solemos indicar que $a \sim b$ y decir que a está relacionado con b (informalmente, si a $\sim$ le llamamos "onda", el símbolo $a \sim b$ significa que a está en onda con b). El símbolo $a \nsim b$ significa que a no está relacionado con b. Cuando $A = B$, a las relaciones de A en B les llamamos simplemente relaciones en A.

Supongamos que $\sim$ es una relación en A. De acuerdo a las propiedades que pueden cumplir los elementos de A que estén relacionados bajo $\sim$, las relaciones reciben nombres especiales, como los que se indican en la siguiente definición.

Definición 2.1. Sea $\sim$ una relación en un conjunto A. Decimos que $\sim$ es

1) **reflexiva** si para cada $a \in A$, se cumple que $a \sim a$;

2) **antireflexiva** si para ninguna $a \in A$ se cumple que $a \sim a$;

3) **simétrica** si para cada $a, b \in A$, del hecho de que $a \sim b$ se sigue que $b \sim a$;

4) **antisimétrica** si para cada $a, b \in A$, del hecho de que $a \sim b$ y $b \sim a$ se sigue que $a = b$;

5) **transitiva** si para cada $a, b, c \in A$, del hecho de que $a \sim b$ y $b \sim c$ se sigue que $a \sim c$;

6) una **relación de equivalencia** en A, si $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva;

7) un **orden parcial** en A, si $\sim$ es antireflexiva y transitiva.

8) un **orden total** en A, si $\sim$ es un orden parcial en A tal que, para cada $a, b \in A$, una y sólo una de las siguientes tres afirmaciones es cierta

$$a \sim b, \quad a = b, \quad b \sim a.$$

La igualdad es una relación de equivalencia y, por esta razón, las relaciones de equivalencia suelen denotarse con símbolos como $\equiv$ o $\approx$. Se dice, incluso, que las relaciones de equivalencia emulan la igualdad, en el sentido de que dos elementos que están relacionados bajo una relación de equivalencia, aunque formalmente puedan ser objetos distintos, se consideran iguales a los ojos de la relación de equivalencia. La desigualdad $<$ entre números reales es una relación de orden y, por esta razón, las relaciones de orden suelen denotarse con símbolos como $\prec$ o $\ll$. Se dice incluso que las relaciones de orden parcial emulan la desigualdad, en el sentido de que si dos elementos a y b están relacionados bajo un orden parcial $\prec$, de modo que $a \prec b$, aunque formalmente a y b no sean números reales, se considera que a es menor que b a los ojos de $\prec$.

Como la presente sección solamente es una introducción a los conceptos que se utilizarán en secciones posteriores, no nos vamos a detener a dar ejemplos y propiedades más allá de las que se usarán. El lector interesado en estos dos temas, puede consultar la Sección 5.1 del libro [5], o bien las Secciones 1.4, 1.6 y 1.7 de [6].

Si $\approx$ es una relación de equivalencia en un conjunto A, entonces cada $a \in A$ determina el conjunto

$$[a]_{\approx} = \{b \in A \colon a \approx b\},$$

que se llama la *clase de equivalencia* de a bajo $\approx$. En [6, Teorema 1.6.7] se prueba que, para cada $a, b \in A$ las afirmaciones $a \approx b$, $[a]_{\approx} = [b]_{\approx}$ y $[a]_{\approx} \cap [b]_{\approx} \neq \emptyset$ son equivalentes. Son justo los elementos de $[a]_{\approx}$ los que se consideran iguales que a, a los ojos de la relación de equivalencia $\approx$.

Si $\prec$ es una relación de orden parcial en un conjunto A y $a, b \in A$ son tales que $a \prec b$ entonces, como ya comentamos, se dice que a es *menor que* b con respecto a $\prec$. A la pareja $(A, \prec)$ se le llama un *conjunto parcialmente ordenado* y, cuando $\prec$ es un orden total en A, decimos que la pareja $(A, \prec)$ es un *conjunto totalmente ordenado.* Cuando $(A, \prec)$ es un conjunto parcialmente odenado, la relación $\prec$ induce una relación $\preceq$ en donde, para $a, b \in A$, decimos que

$$a \preceq b \quad \text{si y sólo si} \quad a \prec b \text{ o bien } a = b.$$

En tal caso, $\preceq$ es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva. Si $a \preceq b$, decimos que a es *menor o igual* a b.

2.3. Funciones

Una relación de un conjunto A en un conjunto B es una *función* de A en B, si cada elemento de A se relaciona con solamente un elemento de B. Si f es una función de A en B, solemos escribir $f \colon A \to B$ y, si el elemento a de A está relacionado con el elemento b de B, escribimos $f(a) = b$. A $f(a)$ se le suele llamar el *valor* de f en a, aunque también es común llamarlo la imagen de a bajo la función f. Decimos que

1) f es una *función inyectiva* si para cada $a, b \in A$ con $a \neq b$ sucede que $f(a) \neq f(b)$. Esto es equivalente a decir que si $a, b \in A$ son tales que $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$.

2) f es una *función suprayectiva* si para cada elemento $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

3) f es una *función biyectiva* si f es inyectiva y suprayectiva.

Si $f\colon A \to B$ es una función, decimos que A es el *dominio* de f, y que B el *contradominio* o *codominio* de f. Si $g\colon C \to D$ es otra función, entonces $f = g$ si y sólo si $A = C$, $B = D$ y $f(x) = g(x)$, para cada x. En otras palabras, para que dos funciones sean iguales, debemos verificar que tienen el mismo dominio, el mismo contradominio y los mismos valores.

A partir de este momento, la letra $\mathbb{N}$ representa el conjunto de los números naturales. Pensamos que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ por lo que $0 \notin \mathbb{N}$. Los símbolos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$ representan los conjuntos de los números enteros y de los números reales, respectivamente. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por I_n al conjunto de los números naturales entre 1 y n, es decir,

$$I_n = \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{1}$$

Por ejemplo $I_1 = \{1\}$ e $I_2 = \{1, 2\}$. Notemos que si $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $I_n \subsetneq I_m$ si y sólo si $n < m$. Además si $n, m \in \mathbb{N}$ entonces $I_n \subset I_m$ o bien $I_m \subset I_n$. A lo largo de todo el trabajo aparecerá el símbolo I_n en lugar del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, como parte de una demostración o en afirmaciones del tipo "para cada $i \in I_n$". Para más información en el tema de las funciones, el lector puede consultar el Capítulo 5 de [5], así como las Secciones 1.4 y 1.5 de [6].

2.4. El Orden de Lista

Si A es un conjunto, entonces una *sucesión* en A es una función de $\mathbb{N}$ en A. Una *sucesión finita* en A es una función $s\colon I_m \to A$, para alguna $m \in \mathbb{N}$. En dicho caso, para cada $i \in I_m$ es común denotar el valor $s(i)$ por s_i y la sucesión s como $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$. Al ser s una función, elementos distintos del dominio de s pueden tener los mismos valores. Entonces, para cada $i, j \in I_m$ con $i \neq j$, puede suceder que $s_i = s_j$ o bien que $s_i \neq s_j$. Independientemente de si s_i y s_j son iguales o distintos, en la sucesión $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ colocamos a s_i en la posición i y a s_j en la posición j. Podemos pensar entonces que $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ es una lista de m elementos de A, en donde dos de dichos elementos pueden ser iguales.

Supongamos ahora que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es un conjunto con n elementos. Entonces en A podemos definir un orden total $\prec$ en el que, informalmente hablando, la manera de escribir los elementos de A determina su orden. Formalmente, dados dos elementos $a_i, a_j \in A$ diremos que

$$a_i \prec a_j \quad \text{si y sólo si} \quad i < j.$$

Entonces para ninguna $i \in I_n$ es cierto que $a_i \prec a_i$. Además si $a_i \prec a_j$ y $a_j \prec a_k$, resulta que $a_i \prec a_k$. Esto muestra que $\prec$ es un orden parcial en A. También, para cada $a_i, a_j \in A$, una y sólo una de las siguientes tres afirmaciones es cierta:

$$a_i \prec a_j, \quad a_i = a_j, \quad a_j \prec a_i.$$

Luego, $\prec$ es un orden total en A. Vamos a decir que $\prec$ es el *orden de lista* de A. Una *lista ordenada* de m elementos de A, donde $m \leq n$, es una sucesión finita $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ de elementos de A con el orden de lista.

2.5. Inducción Matemática

A lo largo del curso utilizaremos el Principio de Inducción Matemática, así como el Principio del Buen Orden. Éste último dice lo que sigue.

Proposición 2.2. *Si A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, entonces existe $a \in A$ tal que $a \leq b$, para cada $b \in A$.*

Al elemento a que se garantiza en la proposición anterior, se le llama el *primer elemento* de A. Supongamos ahora que $P(x)$ es un proposición y que, para cada $n \in \mathbb{N}$, cuando cambiamos x por n, podemos determinar el valor de verdad de $P(n)$ (verdadero o falso, según corresponda). El Principio de Inducción Matemática dice que $P(n)$ es verdadera para cada $n \in \mathbb{N}$ si hacemos ver que se cumplen las siguientes dos propiedades:

1) $P(1)$ es verdadera;

2) si $P(k)$ es verdadera para alguna $k \in \mathbb{N}$, entonces $P(k+1)$ es cierta.

Demostrar, por inducción, que una afirmación $P(n)$ es cierta para cada número natural n, significa verificar que las afirmaciones 1) y 2) anteriores son ciertas. Una forma equivalente del Principio de Inducción Matemática es el siguiente: supongamos que $A \subset \mathbb{N}$ satisface las siguientes propiedades:

1) $1 \in A$;

2) para $n \in \mathbb{N}$, del hecho de que $n \in A$ se cumple que $n+1 \in A$.

Entonces $A = \mathbb{N}$. En [6, Teorema 2.2.1] se prueba que el Principio del Buen Orden es equivalente al Principio de Inducción Matemática. Por tanto, suponiendo cierto alguno de éstos dos principios, resulta que el otro es cierto. Es por esta razón que en [6], al Principio del Buen Orden se le llama Axioma del Buen Orden, es decir, se considera que lo enunciado en la Proposición 2.2, es una afirmación que no requiere demostración.

Para un estudio de la Inducción Matemática, con ejemplos de pruebas por inducción, el lector puede consultar la Sección 4.1 de [5], o bien la Sección 2.2 de [6]. Para un estudio más profundo, recomendamos [1] y [10]. A lo largo del presente trabajo daremos varias demostraciones por inducción, e incluso veremos que algunos resultados se pueden probar por inducción y también con métodos combinatorios. La idea de presentar ambas demostraciones es para que el lector compare dichas pruebas y vea que, en la mayoría de las ocasiones, una prueba combinatoria es más sencilla que una prueba que utilice otro tipo de ideas, como métodos algebraicos o el principio de inducción, por ejemplo.

2.6. Cardinalidad

Ahora vamos a comentar sobre la cardinalidad de conjuntos. Primero, decimos que un conjunto A es *equipotente* a un conjunto B, si existe una función biyectiva

$f\colon A \to B$. El símbolo $A \approx B$ significa que A es equipotente con B. Como la función identidad de A en A es biyectiva, la inversa de una función biyectiva es biyectiva y la composición de funciones biyectivas es biyectiva, tenemos que si A, B y C son conjuntos, entonces $A \approx A$, si $A \approx B$ entonces $B \approx A$ y, si $A \approx B$ y $B \approx C$, entonces $A \approx C$. Por tanto la relación de equipotencia $\approx$ es de equivalencia. Esto tiene una serie de consecuencias pues, para empezar, ya no es necesario decir que un conjunto A es equipotente con un conjunto B (en ese orden), sino simplemente que A y B son equipotentes. Además, cualquier colección dada de conjuntos, se puede dividir en clases de equivalencia de modo que dos conjuntos están en la misma clase de equivalencia si y sólo si son equipotentes.

Recordemos que para cada natural n, $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. En [6, Proposición 3.1.5] se prueba, por inducción, el siguiente resultado.

Proposición 2.3. *Para cada $n, m \in \mathbb{N}$ los conjuntos I_n e I_m son equipotentes si y sólo si $n = m$.*

Decimos que un conjunto A es *finito* si A es el conjunto vacío o bien si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que I_n y A son equipotentes. Si A es no vacío y finito entonces, utilizando el hecho de que la relación de equipotencia es de equivalencia así como la Proposición 2.3, resulta que existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que I_n y A son equipotentes. En tal situación, si $f\colon I_n \to A$ es una función biyectiva y, para cada $i \in I_n$ definimos $a_i = f(i)$, entonces podemos denotar al conjunto A como $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. En ocasiones se define que un conjunto A es finito si no existe un subconjunto propio B de A tal que B y A son equipotentes (ver, por ejemplo, [6, Definición 3.1.6]). No está dentro de los propósitos del presente trabajo, probar que ambas formas de considerar la noción de conjunto finito son equivalentes. Ahora bien, se dice que un conjunto A es *infinito* si no es finito. Esto significa, que existe un subconjunto propio de A que es equipotente a A.

Cuando dos conjuntos son equipotentes, es común decir que tienen la misma *cardinalidad*. Denotamos por $|A|$ la cardinalidad de un conjunto A. Tenemos que para cada conjunto A, $|A| \geq 0$. Si $A = \emptyset$, decimos que $|A| = 0$ y que A tiene cero elementos. Si $A \neq \emptyset$ y es finito, consideramos el único número natural n tal que I_n y A son equipotentes. Decimos que $|A| = n$ y que A tiene n elementos. Si A y B son conjuntos finitos y $A \approx B$, entonces A y B tienen el mismo número de elementos.

Una prueba de la siguiente proposición aparece en [6, Teorema 3.1.9]. Más adelante probaremos su parte 1) utilizando argumentos combinatorios (ver Teorema 5.5).

Proposición 2.4. *Sean A y B dos conjuntos finitos tales que $|A| = m$ y $|B| = n$, y $f\colon A \to B$ una función. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *si f es inyectiva, entonces $m \leq n$;*

2) *si f es suprayectiva, entonces $n \leq m$.*

Con las hipótesis de la Proposición 2.4, si $f\colon A \to B$ es biyectiva, entonces $m = n$ por lo que A y B tienen la misma cardinalidad. Una prueba del siguiente resultado aparece en [6, Teorema 3.1.10].

Proposición 2.5. *Sean A y B dos conjuntos finitos tales que $|A| = |B|$ y $f\colon A \to B$ una función. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *f es inyectiva;*

2) *f es suprayectiva.*

De acuerdo al resultado anterior, cuando dos conjuntos finitos A y B tienen la misma cardinalidad, para demostrar que una función $f\colon A \to B$ es biyectiva, basta con verificar que f es inyectiva o bien suprayectiva.

3. Regla de la Suma y del Producto

Dado un conjunto finito A, en ocasiones deseamos determinar de manera precisa el número de elementos de A que satisfacen ciertas condiciones. Aunque algunas veces este conteo puede realizarse enumerando explícitamente cada uno de los elementos, ésta forma de proceder resulta poco práctica en problemas complejos, por lo que es importante tener métodos de conteo que sean aplicables a una gran variedad de situaciones. En la presente sección atenderemos dos de los principios más básicos de conteo: la Regla de la Suma y la Regla del Producto.

En el tema de la historia de la Combinatoria, en [8, p. 2] se comenta que en el siglo XII, el matemático hindú Bhaskara conocía la fórmula para calcular C_n^m, el número de combinaciones de n en m, la cual veremos en la Sección 6. A principios del siglo XIII, Leví Ben Gerson realizó un estudio detallado de las permutaciones, las ordenaciones y las combinaciones. Sin embargo, sus escritos aparentemente no alcanzaron mucha difusión, y varios de sus resultados fueron redescubiertos varias veces por los matemáticos de los siglos siguientes. Como se menciona en [3, p. 215], puede considerarse que la Combinatoria, como disciplina científica, tiene su inicio con los trabajos de G. W. Leibnitz y J. Bernoulli. El primero de ellos realizó en 1666 la primera construcción sistemática de esta parte de las matemáticas en el libro [7]. Luego, en 1700, G. W. Leibnitz perfeccionó el simbolismo combinatorio. Fue J. Bernoulli quien en 1713 en su libro *Ars Conjectandi* (Arte de las Conjeturas), el primero de importancia dedicado al cálculo de probabilidades, construyó la Combinatoria como el principal aparato de aquella época para resolver problemas teórico-probabilistas. Sin embargo, la resolución de muchos problemas concretos de la Combinatoria, no estuvo acompañada hasta finales de los años 70 del siglo XVIII, del perfeccionamiento de la teoría general. En esa época se formaba en Alemania una numerosa escuela matemática cuyo fundador y director fue K. F. Hinderburg.

Los métodos combinatorios quedaron como medio de resolución de problemas en diferentes ramas de la Matemática. El Análisis Combinatorio comenzó un nuevo desarrollo a mediados del siglo XX, debido al gran número de aplicaciones que se fueron encontrando. Para consultar más información acerca de la historia de la enumeración, pueden verse el artículo [2] así como la Sección 1.2 de [8].

3.1. Regla de la Suma

El primer principio del conteo se utiliza para calcular el número de formas en que puede suceder una situación u otra, pero no ambas y se expresa como sigue:

1) **Regla de la Suma.** Supongamos que un evento puede realizarse de m formas y que un segundo evento puede realizarse de n maneras. Consideremos que no es posible realizar ambos eventos simultáneamente. Entonces el número de maneras de realizar ambos eventos es $m + n$.

Cuando en el enunciado anterior decimos que un evento puede realizarse de m formas, entendemos que dichas m formas son distintas. La Regla de la Suma puede extenderse a una cantidad finita de eventos, siempre que ninguna pareja de dichos eventos se puede realizar simultáneamente.

Ejemplo 3.1. Supongamos que la biblioteca del ITAM tiene 40 libros de Sociología y 50 de Antropología. Entonces, por la Regla de la Suma, un lector de dicha biblioteca puede elegir entre $40 + 50 = 90$ libros de texto para aprender acerca de alguno de estos dos temas. $\square$

Consideremos que un evento E_1 puede realizarse de m formas y que un segundo evento E_2 puede realizarse de n maneras. Denotemos por A al conjunto de resultados que se pueden dar del evento E_1 y, por B, al conjunto de resultados que se pueden dar del evento E_1. Entonces A tiene m elementos y B tiene n elementos. Si los eventos E_1 y E_2 no se pueden realizar simultáneamente, entonces $A \cap B = \emptyset$ y, por la Regla de la Suma, el número de maneras en que se puede dar el evento E_1 o el evento E_1 es $m + n$.

En términos de conjuntos, la Regla de la Suma lo que dice es que si A y B son dos conjuntos finitos y ajenos, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Generalizando la regla, también dice que si $n \geq 2$ y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos y ajenos dos a dos, entonces

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|. \tag{2}$$

La Regla de la Suma no es un axioma sino una afirmación que debemos demostrar. Una forma de verificar la regla es mostrando, por ejemplo por inducción matemática sobre n, que la igualdad (2) es cierta. Para $n = 2$ tenemos dos conjuntos finitos y ajenos A_1 y A_2. Supongamos que $A_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ tienen m y n elementos, respectivamente. Como $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, sucede que

$$A_1 \cup A_2 = \{a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n\}.$$

Luego $|A_1 \cup A_2| = m + n = |A_1| + |A_2|$. Ahora supongamos que la igualdad (2) es cierta para $n = k$ (con $k \geq 2$) y veamos que permanece cierta para $n = k + 1$. Consideremos, por tanto $k+1$ conjuntos finitos $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$ y ajenos dos a dos. Como la unión de conjuntos es asociativa,

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1}.$$

Ahora bien, el hecho de que los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$ sean ajenos dos a dos, implica que los conjuntos $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ y A_{k+1} son ajenos. Por tanto, utilizando que ya sabemos que la igualdad (2) se vale para $n = 2$, así como la hipótesis de inducción sobre los conjuntos finitos y ajenos dos a dos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, tenemos que

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| + |A_{k+1}| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k| + |A_{k+1}|.$$

Esto prueba que la igualdad (2) es cierta para cada número natural $n \geq 2$. Naturalmente dicha igualdad también es cierta para $n = 1$, pero esto no es un asunto que le importe a la Regla de la Suma.

En la Sección 10 hablaremos del Principio de Inclusión y Exclusión. Dicho principio generaliza la igualdad (2).

Ejemplo 3.2. Vamos a demostrar que si A y B son conjuntos finitos tales que $A \subset B$, entonces $|A| \leq |B|$. En efecto, como $A \subset B$, tenemos que $B = A \cup (B - A)$. En vista de que $A \cap (B - A) = \emptyset$, por la Regla de la Suma, $|B| = |A| + |B - A|$. Como $|B - A| \geq 0$, resulta que $|B| = |A| + |B - A| \geq |A|$. □

Ejemplo 3.3. Vamos a determinar el número de formas en que, al lanzar dos dados d_1 y d_2, obtenemos un siete o un ocho. Consideremos el par ordenado (a, b) donde a representa el resultado obtenido al lanzar el dado d_1, y b el obtenido al lanzar el dado d_2. Entonces $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Buscamos, de entre dichas parejas (a, b), las que satisfacen que $a + b$ es siete u ocho. Las que dan siete forman el conjunto

$$A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

mientras que las que nos dan ocho determinan el conjunto

$$B = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}.$$

Como $A \cap B = \emptyset$, por la Regla de la Suma, el número que buscamos es

$$|A \cup B| = |A| + |B| = 6 + 5 = 11.$$

□

Cuando en la Regla de la Suma, en términos de los conjuntos finitos A y B, la intersección $A \cap B$ es no vacía, el siguiente resultado indica la cardinalidad de $A \cup B$.

Proposición 3.4. *Si A y B son dos conjuntos finitos, entonces*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{3}$$

Demostración. Como $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ y los conjutos $A - B$ y $A \cap B$ son ajenos, por la Regla de la Suma,

$$|A| = |A - B| + |A \cap B|. \tag{4}$$

De manera similar, como $B = (B - A) \cap (A \cap B)$ y los conjuntos $B - A$ y $A \cap B$ son ajenos, por la Regla de la Suma,

$$|B| = |B - A| + |A \cap B|. \tag{5}$$

Por otra parte, $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$ y los conjuntos $A - B, A \cap B$ y $B - A$ son ajenos dos a dos. Luego, por la Regla de la Suma,

$$|A \cup B| = |A - B| + |A \cap B| + |B - A|. \tag{6}$$

De (4), (5) y (6) tenemos que

$$\begin{aligned}|A|+|B| = (|A-B|+|A\cap B|)+(|B-A|+|A\cap B|) = (|A-B|+|A\cap B|+|B-A|)+|A\cap B| = \\ = |A \cup B| + |A \cap B|.\end{aligned}$$

Es decir, $|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$. De aquí se sigue la igualdad (3). □

En la Sección 10, de nueva cuenta gracias al Principio de Inclusión y Exclusión, vamos a generalizar la igualdad (3), al calcular la cardinalidad de la unión de un número finito de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ que no necesariamente son ajenos dos a dos. Ahora bien, en términos de eventos, la Proposición 3.4 toma la siguiente forma.

Proposición 3.5. *Supongamos que un evento E_1 se puede realizar de m maneras y un evento E_2 se puede dar de n maneras. Supongamos también que k es el número de resultados del evento E_1 que coinciden con algún resultado del evento E_2. Entonces el número de maneras en que se puede dar el evento E_1 o el evento E_2 es $m + n - k$.*

Demostración. Denotemos por A al conjunto de resultados que se pueden dar del evento E_1 y, por B, al conjunto de resultados que se pueden dar del evento E_2. Entonces A tiene m elementos, B tiene n elementos y $A \cap B$ tiene k elementos. El número de maneras en que se puede dar el evento E_1 o el evento E_2 es igual a la cardinalidad de $A \cup B$ la cual, por la Proposición 3.4, es justo $|A| + |B| - |A \cap B| = m + n - k$. □

3.2. Regla del Producto

El segundo principio de conteo, también llamado *Principio Fundamental de Conteo*, se expresa como sigue:

2) **Regla del Producto.** Si un procedimiento se puede descomponer en dos etapas y existen m maneras de realizar la primera etapa y, por cada uno de estos resultados, hay n maneras de realizar la segunda etapa, entonces el procedimiento se puede realizar, en el orden dado, de mn formas.

Si un conjunto A tiene m elementos y un conjunto B tiene n elementos, entonces el número de maneras de escoger un elemento de A y un elemento de B es, por la Regla del Producto, mn, teniendo en cuenta que la elección del elemento de B no depende del elemento de A seleccionado.

La Regla del Producto se puede extender a un procedimiento que se puede descomponer en k etapas $E_1, E_2, \ldots, E_k$, suponiendo que la etapa E_1 se puede realizar de m_1 maneras de modo que, por cada una de ellas, la etapa E_2 se realiza de m_2 maneras y que, por cada una de estas m_2 maneras, la etapa E_3 se realiza de m_3 manera y así sucesivamente, es decir, para cada $i \in I_{k-1}$, la etapa E_i se realiza de m_i maneras y, por cada una de ellas, la etapa E_{i+1} se realiza de m_{i+1} maneras. Entonces el procedimiento se puede realizar, en el orden dado, de $m_1 m_2 \cdots m_k$ maneras.

Ejemplo 3.6. En el ITAM se tienen 6 estudiantes hombres y 8 mujeres y se quiere escoger a un hombre y a una mujer. Por la Regla del Producto, hay $6 \cdot 8 = 48$ maneras de realizar dicha elección. Si se quieren construir placas que consten de dos letras seguidas de cuatro dígitos, tomando en cuenta que hay 26 letras y 10 dígitos entonces, por la Regla del Producto, hay $26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 3,266,000$ placas posibles diferentes, si ninguna letra o dígito se puede repetir, y se usan solamente letras mayúsculas. Si se permite repetir la letras y los dígitos, entonces hay $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 6,760,000$ placas posibles diferentes. Si la primera letra de la placa ha de ser una vocal, la segunda una consonante y los dígitos han de ser pares, entonces hay $5 \cdot 21 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 84,375$ placas posibles diferentes. □

En términos de conjuntos, la Regla del Producto dice que si A y B son dos conjuntos finitos y no vacíos, entonces

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|,$$

donde

$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A \text{ y } b \in B\}$$

es el producto cartesiano de los conjuntos A y B. Para una cantidad finita de conjuntos, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, su producto cartesiano es el conjunto

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \colon a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Ahora entendemos que si $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, entonces

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \quad \text{si y sólo si} \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n.$$

Si $n \geq 2$ y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos y no vacíos, entonces la Regla del Producto dice que

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|. \tag{7}$$

Como en el caso de la Regla de la Suma, la Regla del Producto no es un axioma sino una afirmación que debemos demostrar. Para esto, podemos proceder por inducción sobre n. Para $n = 2$ supongamos que $A_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ y $A_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

tienen m y n elementos, respectivamente. Para cada $i \in I_m$, tenemos n parejas ordenadas distintas $(a_i, b_1), (a_i, b_2), \ldots, (a_i, b_n)$ en $A_1 \times A_2$. Como esto se puede hacer con cada uno de los m elementos de A_1, por la Regla de la Suma, tenemos en total

$$\underbrace{m + m + \cdots + m}_{n \text{ veces}} = mn$$

parejas ordenadas distintas en $A_1 \times A_2$. Luego $|A_1 \times A_2| = mn = |A_1| \times |A_2|$. Esto prueba que la igualdad (7) es cierta para $n = 2$. Ahora supongamos que dicha igualdad es cierta para $n = k$ (con $k \geq 2$) y verifiquemos que permanece válida para $n = k + 1$. Utilizando que el producto cartesiano es asociativo, así como la hipótesis de inducción sobre los k conjuntos finitos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, tenemos que

$$\begin{aligned} |A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1}| &= |(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1}| = \\ &= |A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| \cdot |A_{k+1}| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_k| \cdot |A_{k+1}|. \end{aligned}$$

Esto prueba que la igualdad (7) es cierta para cada número natural $n \geq 2$. Dicha igualdad también es cierta para $n = 1$, pero eso no es competencia de la Regla del Producto.

Ejemplo 3.7. Vamos a calcular la cantidad de números naturales distintos que son mayores que 5,000, menores que 10,000 y cuyas cifras son distintas dos a dos. Un número con dichas características ha de tener cuatro cifras $abcd$, en donde $a \neq b$, $a \neq c$, $a \neq d$, $b \neq c$, $b \neq d$ y $c \neq d$. Como $5,000 < abcd$ la cifra a debe ser un número en el conjunto $\{5, 6, 7, 8, 9\}$. Por tanto hay 5 maneras de escoger la cifra a. Una vez elegida dicha cifra, para la cifra b tenemos 9 posibilidades (los diez dígitos del 0 al 9 menos la cifra que ya elegimos para a). Escogidos a y b, nos quedan 8 posibilidades para la cifra c y 7 para la cifra d. Por la Regla del Producto, hay $5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 2,520$ números que satisfacen las condiciones indicadas.

Es posible que para resolver un procedimiento debamos usar tanto la Regla de la Suma como la Regla del Producto.

Ejemplo 3.8. Vamos a calcular el número de maneras de colocar, en un tablero vacío de ajedrez, una torre blanca y una torre negra de modo que se ataquen. Recordemos que el tablero de ajedrez tiene $8 \times 8 = 64$ casillas y, como está vacío, 64 es el número de maneras en que se puede ubicar la torre blanca. Una vez ubicada dicha torre blanca, la torre negra debe colocarse en una casilla de la misma columna o de la misma fila ocupada por la torre blanca. Como la torre blanca ya ocupa una posición, nos quedan 7 casillas disponibles para colocar la torre negra en la misma fila que la torre blanca, así como 7 casillas disponibles para colocar la torre negra en la misma columna que la torre blanca. Por la Regla de la Suma, hay $7 + 7 = 14$ casillas disponibles para colocar la torre negra. Así pues, cada una de las 64 elecciones para colocar la torre blanca, producen 14 elecciones para colocar la torre negra. Por la Regla del Producto, la respuesta a nuestro problema es $64 \cdot 14 = 896$. Si en lugar de una torre blanca y una torre negra (que podemos distinguir), deseamos colocar dos torres blancas (que no podemos distinguir) que se defiendan mutuamente, entonces el número de maneras de colocarlas en el tablero de ajedrez es $\frac{896}{2} = 448$. $\square$

Ejemplo 3.9. Supongamos que el nombre de una variable consta de una letra o bien de una letra seguida de un dígito. Consideremos que no se distingue entre mayúsculas y minúsculas, por lo que las variables a y A son la misma, y también son iguales las variables A3 y a3. Entonces hay 26 variables que constan de una sola letra y, por la Regla del Producto, hay $26 \cdot 10 = 260$ variables que constan de una letra seguida de un dígito. Luego, por la Regla de la Suma, hay $26 + 260 = 286$ variables en total. Si las mayúsculas y las minúsculas producen variables distintas, entonces hay $52 + 52 \cdot 10 = 572$ variables en total. □

Terminamos la sección con el siguiente ejemplo el cual indica que, en ocasiones, para calcular el número de maneras en que se puede realizar un evento E_1, hay que encontrar un evento E_2 de modo que el número de maneras en que se puede realizar el evento E_2, coincide con el número de maneras en que se puede realizar el evento E_1. La idea para proceder de esta manera, es que el cálculo del número de maneras en que se puede realizar el evento E_2, sea sencillo.

Ejemplo 3.10. Supongamos que X es un conjunto con n elementos. Queremos determinar el número de parejas ordenadas (A, B) tales que $A \subset B \subset X$. Sea (A, B) una de estas parejas ordenadas. Como $A \subset B \subset X$, cada elemento de X está en uno y sólo uno de los conjuntos $A, B - A$ y $X - B$. A la inversa, si A y B son subconjuntos de X tales que cada elemento de X está en uno y sólo uno de los conjuntos $A, B - A$ y $X - B$, entonces $A \subset B$. En efecto, si $x \in A$, como x se encuentra en uno y sólo uno de los conjuntos $A, B - A$ y $X - B$ y estamos suponiendo que $x \in A$, sucede que $x \notin X - B$. Luego $x \in B$ y, de esta manera, $A \subset B$. Esto muestra que el número de parejas (A, B) tales que $A \subset B \subset X$, es igual al número de maneras en que un elemento de X vive en alguno de los conjuntos ajenos dos a dos $A, B - A$ y $X - B$. El primer elemento de X, llamémosle x, vive en alguno de esos tres conjuntos, así que hay tres maneras de asignarle a x uno de los conjuntos $A, B - A$ y $X - B$. Lo mismo pasa con el resto de los n elementos de X. Luego, por la Regla del Producto, hay 3^n maneras en que un elemento de X vive en alguno de los tres conjuntos $A, B - A$ y $X - B$.

4. El Principio de las Casillas o del Palomar

En la presente sección estudiamos el siguiente resultado, llamado El Principio de las Casillas o del Palomar. El enunciado, aunque intuitivamente obvio, es muy útil. Supongamos que un cartero debe depositar m cartas en n casilleros (llamados "pigeonholes", en inglés) y que $m > n$. Entonces hay más cartas que casilleros. Aunque no podemos deducir nada sobre la distribución exacta de las cartas, lo que sí podemos concluir es que por lo menos un casillero tendrá al menos dos cartas.

4.1. Forma Usual del Principio

Comenzamos con el siguiente resultado, que es la forma usual del Principio de las Casillas.

Teorema 4.1. *Si m palomas ocupan n nidos y $m > n$, entonces al menos un nido tiene dos o más palomas descansando en él.*

Demostración. Si en cada nido descansa a lo más una paloma, entonces en los n nidos descansan a lo más n palomas. Como $n < m$, no hemos contado a todas las m palomas. Por tanto, en un nido deben descansar al menos dos palomas. Vamos a dar ahora una prueba alternativa, en términos de la siguiente afirmación, que es equivalente a lo enunciado en el teorema:

($\star$) si m objetos se introducen en n cajas, donde $m > n$ entonces alguna de las cajas tiene al menos dos objetos.

Hagamos la prueba de ($\star$) por inducción sobre n. Si $n = 1$ entonces tenemos m objetos introducidos en una sola caja y, como $m > 1$, dicha caja tiene por lo menos dos objetos. Esto significa que el resultado es válido para $n = 1$. Supongamos ahora que es válido para $n = r \in \mathbb{N}$ y mostremos que sigue siendo válido para $n = r + 1$. Tenemos entonces m objetos introducidos en $r+1$ cajas $C_1, C_2, \ldots, C_r, C_{r+1}$, donde $m > r+1$. Luego $m \geq 2$. Sea k el número de objetos en la caja C_{r+1}. Si $k \geq 2$, la prueba termina. Si $k \leq 1$, entonces $k = 0$ o bien $k = 1$. Luego, en las cajas $C_1, C_2, \ldots, C_r$ hay m o bien $m - 1$ objetos (dependiendo de si $k = 0$ o bien $k = 1$). Notemos que $m > m - 1 > r$, por lo que el número de objetos que no están en la caja C_{r+1} es mayor que r. Esto implica, por hipótesis de inducción, que una de las cajas $C_1, C_2, \ldots, C_r$ contiene al menos dos objetos. $\square$

El primero en formular el Principio de las Casillas fue el matemático alemán P. G. Lejeune Dirichlet, en 1834. Incluso en alemán al principio en cuestión se le conoce como el "schubfachprinzip" de Dirichlet (el principio de los cajones de Dirichlet). En [3, Teorema 3-1.8, p. 222] el Principio de las Casillas se denomina Principio de Distribución.

En el siguiente ejemplo, que aparece en [10, p. 13-14], vamos a utilizar el Principio de las Casillas.

Ejemplo 4.2. Un $n \times n$ *cuadrado mágico* se puede pensar como una matriz de $n \times n$ cuyas entradas son números enteros tales que la suma de los números en los renglones, en las columnas y en las dos diagonales es siempre la misma. Por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 18 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

son 3×3 y 4×4 cuadrados mágicos, respectivamente. Vamos a decir que un $n \times n$ *cuadrado antimágico* es una matriz de $n \times n$ cuyas entradas son números enteros tales que las correspondientes sumas de los números en los renglones, en las columnas y en las dos diagonales son todos distintos. Por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 10 & 3 & -2 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 & 9 \\ 4 & -9 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

son 3×3 y 4×4 cuadrados antimágicos, respectivamente. Vamos a probar ahora que

- para cada $n \in \mathbb{N}$, no existe un $n \times n$ cuadrado antimágico tal que sus entradas son números enteros en el conjunto $\{-1, 0, 1\}$.

Para probar esto, supongamos que $A = (a_{ij})$ es un $n \times n$ cuadrado antimágico tal que cada a_{ij} es un elemento del conjunto $\{-1, 0, 1\}$. La suma más grande que se puede obtener, con un renglón, una columna o una diagonal es n (justo cuando todas las entradas correspondientes valen 1). La suma más pequeña que se puede obtener es $-n$ (cuando todas las entradas correspondientes valen -1). Entonces cada suma a considerar, ya sea una suma de los elementos de una renglón, de una columna o de una diagonal, es un número entero entre $-n$ y n. Hay por tanto $2n+1$ enteros disponibles para dicha suma. Por otro lado, tenemos n renglones, n columnas y 2 diagonales. Así que hay $2n+2$ sumas a considerar (esto es tanto como decir que tenemos $2n+2$ palomas) y, a cada una de estas sumas, le hemos de asignar un entero entre $2n+1$ disponibles (esto es tanto como decir que tenemos $2n+1$ nidos). Por el Teorema 4.1, esto implica que dos de dichas sumas han de tener asignado el mismo valor. Luego A no es un $n \times n$ cuadrado antimágico. $\square$

4.2. Formas Fuertes del Principio

En el siguiente resultado, que aparece en [10, Teorema 1.4.3], vemos una forma más fuerte del Principio de las Casillas.

Teorema 4.3. *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1) *si un número infinito de objetos se introducen en un número finito de cajas, entonces alguna de dichas cajas contiene un número infinito de objetos;*

2) *si m objetos se introducen en n cajas y $m < n$, entonces al menos una caja no posee objetos;*

3) *si m objetos se introducen en m cajas, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

   3.1) *cada caja contiene exactamente un objeto;*

   3.2) *cada caja contiene al menos un objeto;*

   3.3) *cada caja contiene a lo más un objeto.*

Demostración. Para probar 1), supongamos que un número infinito de objetos se introducen en n cajas. Si cada caja contiene un número finito de objetos, al sumar todos éstos objetos, y tomando en cuenta que hay un número finito de cajas, obtendremos que solamente hemos introducido un número finto de objetos y no una cantidad infinita, como originalmente supusimos. Luego, al menos un caja contiene un número infinito de objetos. Hagamos ahora la prueba por inducción sobre n. Si $n = 1$, entonces todos los objetos se introducen en una sola caja, por lo que dicha caja tiene un número infinito de objetos. Esto muestra que el resultado es válido para $n = 1$. Supongamos que el resultado es válido para $n = r$ y probemos que sigue siendo válido para $n = r + 1$. Consideremos que los objetos se introducen en $r + 1$ cajas $C_1, C_2, \ldots, C_r, C_{r+1}$. Si C_{r+1} tiene un número infinito de objetos, la prueba termina. Supongamos, por tanto, que C_{r+1} contiene una cantidad finita de objetos. El resto de los objetos, el cual es un número infinito, se introducen en las cajas $C_1, C_2, \ldots, C_r$. Por hipótesis de inducción alguna de dichas r cajas contiene una infinidad de objetos. Esto termina la prueba de 1).

La afirmación 2) parece muy clara pues, si introducimos al menos un objeto en cada caja, entonces en m de las n cajas disponibles hemos introducido todos los objetos. Como $m < n$, nos quedan aún $n - m$ cajas y, en ellas, no hay objetos introducidos. Como $n - m \geq 1$, al menos una caja no posee objetos. Si queremos dar una prueba de 2) por inducción, hemos de utilizar el llamado *Principio de Inducción Completa* sobre m. Recordemos que dicho principio tiene la siguiente forma:

- supongamos que m_0 es un número entero fijo y que $P(m)$ es una proposición correspondiente a un número entero $m \geq m_0$. Si $P(m_0)$ es verdadera y si del hecho de que $P(k)$ es verdadera para todos los valores de k con $m_0 \leq k \leq m$, se sigue que $P(m + 1)$ es verdadera, entonces se concluye que $P(m)$ es verdadera para cada entero $m \geq m_0$.

En nuestro caso $m_0 = 1$ y $P(m)$ es la proposición “si m objetos se introducen en n cajas y $m < n$, entonces al menos una caja no posee objetos”. Si $m = 1$ entonces, como $1 = m < n$, tenemos que un objeto se introduce en por lo menos dos cajas. Por tanto, una de dichas cajas no posee objetos. Esto muestra que el resultado es válido para $m = 1$. Supongamos que el resultado es válido para cada número natural s con $1 \leq s \leq r < n$. Vamos a mostrar que permanece cierto para $r + 1$. Consideremos entonces que $r+1$ objetos se introducen en n cajas $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C_n$, donde $r+1 < n$. Si en la caja C_n no hay objetos, la prueba termina. Supongamos, por tanto, que en C_n hay $k \geq 1$ objetos. El resto de los $r + 1 - k$ objetos, se introducen en las cajas $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$. Como $k \geq 1$, tenemos que $r + k \geq r + 1$, de donde $r + 1 - k \leq r$. También $r + 1 < n$ y $-k \leq -1$, así que $r + 1 - k < n - 1$. Luego, por la hipótesis de inducción completa aplicada al número $s = r+1-k$, alguna de las cajas $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ no tiene objetos. Esto termina la prueba de 2).

Ahora probamos 3). Supongamos, por tanto, que m objetos se introducen en m cajas. Es claro que 3.1) implica 3.2). Ahora supongamos 3.2). Si 3.3) es falso, entonces una caja contiene k objetos, con $k > 1$. Las $m - 1$ cajas restantes, contienen $m - k$ objetos. Como $m-k < m-1$, por 2), alguna de dichas $m-1$ cajas no tiene objetos. Esto contradice 3.2) y, por consiguiente, 3.3) es verdadero. Esto prueba que 3.2) implica 3.3). Ahora supongamos que 3.3) es cierto. Si 3.1) es falso, entonces al menos una de las cajas no tiene objetos. Por tanto los m objetos se acomodan en $m-1$ cajas. Luego, por el Teorema 4.1, alguna de estas $m - 1$ cajas tiene por lo menos dos objetos. Por tanto, 3.3) es falso. Como esto es una contradicción, hemos probado que 3.3) implica 3.1). Luego, las afirmaciones 3.1), 3.2) y 3.3) son equivalentes. $\square$

Vamos a ver una forma alternativas más de enunciar el Principio de las Casillas. Para esto, consideremos primero un conjunto A. Una *partición* de A es una familia $\{A_i \colon i \in I\}$ de subconjuntos no vacíos de A, ajenos dos a dos y cuya unión es A. Si, por ejemplo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, entonces la familia $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$ es una partición de A pues, los conjuntos $\{1, 2\}, \{3\}$ y $\{4, 5\}$ son ajenos dos a dos y su unión es A. En este caso, A tiene cinco elementos y hemos dado una partición de A que tiene tres elementos (los conjuntos $\{1, 2\}, \{3\}$ y $\{4, 5\}$).

El siguiente resultado aparece en [3, Teorema 3-1.8, p. 222], generaliza [1, Ejemplo 7.1, p. 118] y es otra forma más fuerte del Principio de las Casillas.

Teorema 4.4. *Sean $n, k, m \in \mathbb{N}$. Si un conjunto con $nk + m$ elementos distintos, posee una partición con n elementos, entonces un miembro de dicha partición tiene al menos $k + 1$ elementos.*

Demostración. En términos de palomas y nidos, el enunciado del teorema equivale a decir que

($\star$) si $nk+m$ palomas ocupan n nidos, entonces algún nido tiene $k+1$ o más palomas descansando en él.

Esta afirmación es más general que la enunciada en el Teorema 4.1 y, de hecho, la implica pues si p palomas ocupan n nidos y $p > n$, tomando $k = 1$ y $m \in \mathbb{N}$ de modo que $p = n + m = nk + m$, tenemos que $nk + m$ palomas ocupan n nidos. Entonces, por ($\star$), un nido tiene $k + 1 = 2$ o más palomas descansando en él.

En términos de objetos en cajas, el enunciado del teorema equivale a probar que

($\star\star$) si $nk+m$ objetos se introducen en n cajas, entonces alguna de dichas cajas tiene al menos $k + 1$ objetos.

Podemos probar ($\star\star$) por reducción al absurdo. En efecto, si cada caja tiene a lo más k objetos entonces, como tenemos en total n cajas, hemos introducido a lo más nk objetos en dichas cajas. Como m es un número natural, la cantidad mínima de objetos que tenemos es $nk+1$. Entonces no hemos introducido todos los objetos en las cajas dadas. De esta contradicción concluimos que alguna de las cajas tiene al menos $k + 1$ objetos.

Supongamos que A es un conjunto con $nk+m$ elementos y que $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es una partición de A con justo n elementos. Lo que estamos afirmando en el teorema, es que existe $i \in I_n$ tal que A_i tiene al menos $k + 1$ elementos. Vamos a dar ahora una prueba por inducción sobre n. Supongamos primero que $n = 1$. Debemos probar entonces que si A tiene $k+m$ elementos y si $\mathcal{A} = \{A_1\}$ es una partición de A, entonces A_1 (el único miembro de la partición) tiene al menos $k + 1$ elementos. Esto es cierto pues, al ser $\mathcal{A}$ una partición de A con un sólo elemento, necesariamente $A_1 = A$. Por tanto, el resultado es cierto para $n = 1$.

Supongamos que el resultado el cierto para $n = r$ y verifiquemos que sigue siendo cierto para $n = r + 1$. Sean A un conjunto con $(r + 1)k + m$ elementos y

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_r, A_{r+1}\}$$

una partición de A con $r + 1$ elementos. Si A_{r+1} tiene al menos $k + 1$ elementos, la prueba termina (pues lo que hemos de probar es que algún miembro de $\mathcal{A}$ tiene por lo menos $k+1$ elementos y, en este caso, quien cumple con esto es A_{r+1}). Supongamos ahora que A_{r+1} tiene a lo más k elementos. Sean

$$B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\}.$$

Es claro que $\mathcal{B}$ es una partición de B con justo r elementos. Ahora bien, como A tiene $(r+1)k+m$ elementos y los miembros de $\mathcal{A}$ son ajenos dos a dos, B tiene al menos

$$(r+1)k + m - k = rk + m$$

elementos. Si B tiene justo $rk+m$ elementos entonces, por hipótesis de inducción, algún miembro de $\mathcal{B}$, que también es un miembro de $\mathcal{A}$, tiene por lo menos $k+1$ elementos y la prueba termina.

Supongamos que B tiene más de $rk+m$ elementos. Como

$$rk + m = r + [r(k-1) + m],$$

existe $C \subset B$ tal que C tiene justo $rk+m$ elementos y $C \cap A_i \neq \emptyset$ para cada $i \in I_r$. El conjunto C se obtiene eligiendo, para cada $i \in I_r$, un miembro a_i de A_i y luego escogiendo los $r(k-1)+m$ elementos restantes de forma arbitraria, en el complemento $B - \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$. Entonces

$$\mathcal{C} = \{C \cap A_1, C \cap A_2, \ldots, C \cap A_r\}$$

es una partición de C con justo r elementos. Por hipótesis de inducción, existe $j \in I_r$ tal que $C \cap A_j$ tiene al menos $k+1$ elementos. Como $C \cap A_j \subset A_j$, el miembro A_j de $\mathcal{A}$ tiene al menos $k+1$ elementos. Esto termina la demostración. $\square$

Corolario 4.5. *Sean $k, n, \in \mathbb{N}$ y $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ tales que*

$$\frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{n} > k.$$

Entonces existe $i \in I_n$ tal que $m_i > k$.

Demostración. Lo que estamos afirmando es que si el promedio de n números naturales es por lo menos $k+1$, entonces alguno de los naturales es por lo menos $k+1$. Si $n = 1$, lo que estamos afirmando es que si $\frac{m_1}{1} > k$, entonces $m_1 > k$. Dicha afirmación es cierta. Supongamos que $n \geq 2$ y que

$$\frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{n} > k.$$

Entonces $m_1+m_2+\cdots+m_n > nk$, por lo que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m_1+m_2+\cdots+m_n = nk+m$. Supongamos ahora que $nk+m$ objetos se introducen en n cajas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de modo que, para cada $i \in I_n$, en la caja C_i hay m_i objetos. Por el Teorema 4.4, existe $i \in I_n$ tal que C_i tiene al menos $k+1$ objetos. Como C_i tiene m_i objetos, resulta entonces que $m_i \geq k+1$. $\square$

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $m \geq n$. Consideremos que m objetos se introducen en n cajas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de modo que, para cada $i \in I_n$, la caja C_i posee m_i objetos. Si cada m_i es menor que $\frac{m}{n}$, entonces

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n < \frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \cdots + \frac{m}{n} = n\left(\frac{m}{n}\right) = m.$$

Como esto es una contradicción, alguna m_r es mayor o igual a $\frac{m}{n}$. De manera similar, si cada m_i es mayor que $\frac{m}{n}$, entonces

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n > \frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \cdots + \frac{m}{n} = n\left(\frac{m}{n}\right) = m.$$

De nueva cuenta tenemos una contradicción, por lo que alguna m_s es menor o igual que $\frac{m}{n}$. Esto prueba que si m objetos se introducen en n cajas, entonces alguna caja contiene al menos $\frac{m}{n}$ elementos y alguna otra caja (posiblemente la misma que la anterior) contiene a lo más $\frac{m}{n}$ elementos. En términos de particiones, tenemos que si un conjunto finito con m elementos, posee una partición con n miembros, entonces un miembro de dicha partición tiene al menos $\frac{m}{n}$ elementos, y otro miembro de la partición, posiblemente el mismo que el anterior, tiene a lo más $\frac{m}{n}$ elementos.

Como los elementos en una caja han de ser números enteros mayores o iguales a cero y el cociente $\frac{m}{n}$ puede no ser un entero, vamos a formalizar el resultado del párrafo anterior, utilizando los llamados techo y piso de un número real. Si $r \in \mathbb{R}$, es decir si r es un número real, entonces el *suelo* de r se denota por $\lfloor r \rfloor$ y se define como el entero más grande que es menor o igual a r. Es decir

$$\lfloor r \rfloor = \text{máx}\{k \in \mathbb{Z} \colon k \leq r\}.$$

El *techo* de r se denota por $\lceil r \rceil$ y se define como el entero más pequeño que es mayor o igual a r. Luego

$$\lceil r \rceil = \text{mín}\{k \in \mathbb{Z} \colon k \geq r\}.$$

A $\lfloor r \rfloor$ también se la llama la *parte entera* de r. Notemos que si $r \in \mathbb{Z}$, entonces $\lceil r \rceil = \lfloor r \rfloor = r$. A modo de ejemplo, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil -2.3 \rceil = -2$, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$ y $\lfloor -2.3 \rfloor = -3$.

Teorema 4.6. *Si $m, n, p \in \mathbb{N}$, entonces los siguientes resultados son ciertos.*

1) *si m objetos se introducen en n cajas y $m > np$, entonces alguna caja tiene más de p objetos;*

2) *si m objetos se introducen en n cajas, entonces alguna caja tiene al menos $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ objetos y alguna caja tiene a lo más $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ objetos.*

Demostración. Para probar 1) supongamos que m objetos se introducen en n cajas y que $m > np$. Tomemos $q \in \mathbb{N}$ tal que $m = np + q$. Entonces $np + q$ objetos se introducen en n cajas y, por el Teorema 4.4, alguna de dichas cajas tiene al menos $p + 1$ objetos. Esto prueba 1).

Para probar 2), supongamos que m objetos se introducen en n cajas $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Como ya mostramos, alguna caja C_i contiene al menos $\frac{m}{n}$ elementos y alguna caja C_j

tiene a lo más $\frac{m}{n}$ elementos. Si $\frac{m}{n} \in \mathbb{N}$, entonces $\frac{m}{n} = \lceil \frac{m}{n} \rceil = \lfloor \frac{m}{n} \rfloor$. Si $\frac{m}{n} \notin \mathbb{N}$, entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $p - 1 < \frac{m}{n} < p$. Luego $\lceil \frac{m}{n} \rceil = p$ y $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor = p - 1$. En cualquier caso deducimos que la caja C_i tiene al menos $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ objetos y la caja C_j tiene a lo más $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ objetos. Esto prueba 2). $\square$

Dejamos como ejercicio al lector probar que si m objetos se introducen en n cajas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ y $m_1, m_2, \ldots, m_n \geq 0$ son enteros tales que

$$m \geq m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n + 1,$$

entonces, para alguna $i \in I_n$, la caja C_i contiene al menos m_i objetos.

4.3. Ejemplos

Vamos a dar ahora una serie de ejemplos en el que utilizamos el Principio de las Casillas para resolverlos.

Ejemplo 4.7. Probemos que cualquier subconjunto de $I_{40} = \{1, 2, \ldots, 40\}$, con 21 elementos, posee dos miembros tales que uno de ellos divide al otro. Para resolver este problema, utilizamos el hecho de que cada número natural n se puede escribir en la forma $n = 2^m c$, donde $m \geq 0$ y c es impar. Sea B un subconjunto de I_{40} tal que $|B| = 21$. Como en el conjunto I_{40} hay 20 números impares, por el Principio de las Casillas, existen $a, b \in B$ tales que $a = 2^m c$ y $b = 2^n c$ para algunos $m, n \geq 0$ y un impar c. Si $m \leq n$, entonces a divide a b, mientras que si $n < m$, sucede que b divide a a. $\square$

Ejemplo 4.8. Vamos a probar que para cada $a, b, c \in \mathbb{N}$ al menos un elemento del conjunto

$$A = \{a, b, c, a + b, b + c, a + b + c\}$$

es múltiplo de tres. Una forma de resolver esto es utilizando congruencias numéricas módulo 3. Cada número entero k es congruente, módulo 3, con uno y sólo un entero $f(k) \in \{0, 1, 2\}$. A partir de aquí, una forma de resolver el problema es considerando todos los casos posibles, atendiendo los residuos que dejan a, b y c al dividirse entre tres. Los casos a considerar son: los tres números dados dejan el mismo residuo, los tres números dejan diferente residuo y dos de los tres números dejan el mismo residuo. Cada caso se divide en subcasos y, si procedemos con cuidado, podemos resolver el problema atendiendo cada uno de dichos subcasos.

Utilizando el Principio de las Casillas, el problema anterior tiene una solución más inmediata. Como el conjunto $B = \{0, a, a + b, a + b + c\}$ tiene cuatro elementos y $\{0, 1, 2\}$ tiene tres elementos, por el Principio de las Casillas, existen $m, n \in B$ tales que $n < m$ y $f(m) = f(n)$, es decir de modo que m y n dejan el mismo residuo cuando se dividen entre tres. Luego m y n son congruentes módulo 3 o, equivalentemente, $m-n$ es múltiplo de tres. Ahora bien, las posibilidades para la diferencia $m - n$, tomando en cuenta que $m, n \in B$ y $n < m$, son las siguientes: $a, a + b, a + b + c, b, b + c, c$, justo los elementos de A. Tenemos entonces que uno de los elementos de A es la diferencia $m - n$, es decir, es múltiplo de 3. $\square$

Ejemplo 4.9. En una circunferencia consideremos diez puntos $p_1, p_2, \dots, p_{10}$ y a cada uno de dichos puntos le asignamos un número del uno al diez. Vamos a demostrar que al menos una de las sumas de los números asignados a tres puntos consecutivos es mayor que 16. Para cada $i \in I_{10}$, sea a_i el número asignado al punto p_i. Entonces cada a_i es un número ente 1 y 10 y, si p_i y p_j son distintos puntos de la circunferencia, entonces los números asignados a_i y a_j son distintos. Hagamos

$$s_9 = a_9 + a_{10} + a_1, \qquad s_{10} = a_{10} + a_1 + a_2$$

y, para toda $i \in I_8$, sea $s_i = a_i + a_{i+1} + a_{i+2}$. Como cada a_i aparece en tres sumas, tenemos que

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_{10} = 3(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) = 3(1 + 2 + \cdots + 10) = 3 \cdot 55 = 165.$$

Luego

$$\frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_{10}}{10} = \frac{165}{10} = 16.5 > 16.$$

Por el Corolario 4.5, que es una consecuencia de la forma fuerte del Principio de las Casillas dada en el Teorema 4.4, la desigualdad anterior implica que existe $i \in I_{10}$ tal que $s_i > 16$. $\square$

En el siguiente ejemplo, utilizamos la Regla de la Suma, la Regla del Producto y el Principio de las Casillas.

Ejemplo 4.10. Consideremos, con las 26 letras minúsculas del alfabeto, 500,000 palabras de a lo más cuatro letras (bastan tomar, en realidad, 475,255 palabras, pero el problema luce más interesante diciendo que tomamos 500,000 palabras). Algunas de dichas palabras pueden tener sentido en español o en algún otro idioma, como por ejemplo full, rio, tu, casa, el, tea, mientras que otras palabras pueden no tener sentido, como abef, yurs, rrft, wxt, etc. Vamos a probar que dos de esas 500,000 palabras son la misma. Notemos que hay 26 palabras de una sola letra. Además, por la Regla del Producto, hay $26 \cdot 26$ palabras de dos letras, $26 \cdot 26 \cdot 26$ palabras de tres letras y $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26$ palabras de cuatro letras. Entonces, por la Regla de la Suma, hay $26^4 + 26^3 + 26^2 + 26 = 475,254$ palabras de a lo más cuatro letras. Como $500,000 > 475,254$, por el Principio de las Casillas, al menos dos de las 500,000 palabras consideras son la misma. $\square$

5. Ordenaciones y Permutaciones

Dado un conjunto finito y no vacío, existen diversas formas de agrupar, distribuir, seleccionar o escoger sus elementos. En esta sección, consideramos las ordenaciones con repetición, las ordenaciones, las permutaciones y las permutaciones con repetición. En las demás secciones veremos otras nociones. Como mostraremos, la siguiente notación es útil al trabajar con problemas de conteo.

Definición 5.1. Dada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ el **factorial** de n, denotado por $n!$ se define como 1 si $n = 0$ y como $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ si $n \in \mathbb{N}$.

Por tanto, $0! = 1$ y $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Por ejemplo, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. En [8, p. 10] al producto

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

de m factores decrecientes, le llaman el *factorial inferior* de n de orden m. Cuando $n = m$ dicho factorial inferior coincide con $n!$ Veremos que el factorial inferior es una forma de conteo.

Contaremos ahora, y a menos que digamos explícitamente lo contrario, disposiciones lineales de objetos, utilizando las ordenaciones y las permutaciones. Dichas nociones son importantes para contar y, formalmente, son funciones entre conjuntos finitos.

5.1. Ordenaciones con Repetición

Comenzamos con la siguiente definición.

Definición 5.2. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Una **ordenación con repetición** de n elementos, tomados de m en m, es una función de I_m en un conjunto con n elementos. Al número total de dichas funciones lo denotamos como OR_n^m.

Para simplificar la escritura, a las ordenaciones con repetición de n elementos tomados de m en m, las llamaremos simplemente *ordenaciones con repetición de n en m*. En [8, p. 15] a una ordenación con repetición de n en m se le llama un arreglo de n elementos tomados de m en m, mientras que en [3, Definición 3-2.19, p. 241] se le llama una variación con repetición de orden m, tomada de un conjunto con n elementos. Además al número total de ellas lo denotan con el símbolo $VR(n, m)$. Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, también dicen que una variación con repetición de orden m de A, es una lista ordenada $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ de elementos de A (en donde, como indicamos en la Subsección 2.4, dos de elementos de dicha lista pueden ser iguales, es decir, se pueden repetir). Dos de dichas variaciones son diferentes si algún elemento de una de las dos listas no se encuentra en la otra lista, o bien si las dos listas contienen los mismos elementos pero en distinto orden (es decir, su orden de lista es distinto).

Todo lo anterior es compatible con lo enunciado en la Definición 5.2. En efecto, si A es un conjunto con n elementos y $f\colon I_m \to A$ es una ordenación con repetición de n en m, entonces los elementos de A, $f(1), f(2), \ldots, f(m)$, los podemos pensar como la sucesión finita $(f(1), f(2), \ldots, f(m))$. En dicha sucesión finita, dos elementos de A pueden ser iguales. Si $g\colon I_m \to A$ es una ordenación con repetición de n en m y $f \neq g$ entonces, como f y g son funciones diferentes y tienen el mismo dominio, sucede que $f(I_m) \neq g(I_m)$ o bien $f(I_m) = g(I_m)$ y en algún elemento de I_m los valores de f y g son distintos. En el primer caso, cuando los conjuntos

$$f(I_m) = \{f(1), f(2), \ldots, f(m)\} \quad \text{y} \quad g(I_m) = \{g(1), g(2), \ldots, g(m)\}$$

son diferentes, algún elemento en uno de $f(I_m)$ o $g(I_m)$ no está en el otro conjunto. En el segundo caso, cuando $f(I_m) = g(I_m)$ y existe $i \in I_m$ tal que los valores $f(i)$ y $g(i)$ son distintos, deducimos que los elementos de A seleccionados, son los mismos pero aparecen en distinto orden de lista, es decir, fueron puestos en una disposición distinta.

Si $A = \{a, b, c\}$, prescindiendo de los paréntesis que denotan a una sucesión finita, las ordenaciones con repetición de 3 en 2 de A, son

$$aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc.$$

Notemos que OR_2^1 denota el número de funciones que tienen por dominio al conjunto $I_1 = \{1\}$ y, por contradominio, a un conjunto $A = \{a_1, a_2\}$ con dos elementos. Si $f\colon I_1 \to A$ es una de dichas funciones, entonces el valor $f(1)$ puede ser a_1 o bien a_2. Por tanto, tenemos dos maneras de elegir $f(1)$. Esto implica que $OR_2^1 = 2$. Por otro lado, OR_1^2 es el número de funciones que tienen por dominio al conjunto $I_2 = \{1, 2\}$ y, por contradominio, un conjunto $B = \{a_1\}$ con un sólo elemento. Si $f\colon I_2 \to B$ es un de estas funciones, entonces $f(1) = f(2) = a_1$, y sólo haya una forma de construir tal función f. Luego $OR_1^2 = 1$. Por tanto $OR_1^2 \neq OR_2^1$. En general OR_n^m y OR_m^n son distintos.

Supongamos que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es un conjunto con n elementos y que $f\colon I_m \to A$ es una ordenación con repetición de n en m. Como lo hemos pensado, para cada $i \in I_m$, $f(i)$ significa seleccionar uno de los n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de A. Al ser f una función, si $i, j \in I_m$ son distintos las selecciones $f(i)$ y $f(j)$ pueden ser iguales, es decir, $f(i) = f(j)$ es posible. Por tanto, $f(i)$ se puede seleccionar de n maneras lo mismo que $f(j)$. Por tanto, hay n maneras para elegir $f(1)$ y, una vez elegido, seguimos teniendo n maneras para elegir $f(2)$, lo mismo que $f(3), f(4), \ldots f(m)$. Luego, por la Regla del Producto, el número de formas en que podemos seleccionar los valores de f, para así construir a f, es n^m. Una prueba alternativa de este hecho, y que utiliza la igualdad (7), aparece en [8, Proposición 1.3.12, p. 9]. Tenemos entonces el siguiente resultado.

Proposición 5.3. *Para cada $m, n \in \mathbb{N}$ tenemos que $OR_n^m = n^m$.*

Demostración. Supongamos que A es un conjunto con n elementos. Aunque ya mostramos en el párrafo anterior que $OR_n^m = n^m$, usando la Regla del Producto, vamos ahora a dar una prueba por inducción sobre m. Si $m = 1$, entonces OR_n^1 es el número de funciones de I_1 a A. Si $f\colon I_1 \to A$, hay n maneras de escoger a $f(1)$. Luego $OR_n^1 = n = n^1$ y el resultado se cumple para $m = 1$. Supongamos ahora que la fórmula es cierta para m y mostremos que sigue siendo cierta para $m + 1$. Tenemos así que $OR_n^m = n^m$ y debemos probar que $OR_n^{m+1} = n^{m+1}$. Si $f\colon I_{m+1} \to A$, entonces la restricción de f a I_m es una función de I_m en A. Por tanto, f se puede pensar como una extensión de una función de I_m en A. Por hipótesis de inducción, hay $OR_n^m = n^m$ funciones de I_m en A. Dada una de ellas, digamos $g\colon I_m \to A$, hay n maneras de elegir el elemento $g(m + 1)$, para así extender g a una función de I_{m+1} en A. Luego, por la Regla del Producto, hay $n^m \cdot n = n^{m+1}$ maneras de extender una función de I_m en A, a una función de I_{m+1} en A. Esto termina la demostración. □

De la Proposición 5.3 se sigue que $OR_n^m = n^m$ y $OR_m^n = m^n$. Como los números n^m y m^n son en general diferentes, sucede que OR_n^m y OR_m^n son, también en general distintos. Notemos que $OR_1^m = 1^m = 1$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Retomemos el problema de m objetos distintos que se introducen en n cajas distintas $C_1, C_2, \ldots, C_n$, que comentamos en la Sección 4. Sean $A = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ y $f: I_m \to A$ una ordenación con repetición de n en m. Podemos pensar que, para cada $i \in I_m$, el valor $f(i)$ significa que el objeto i se introduce en la caja $f(i)$. Como f es una función, todos los m objetos pueden ser introducidos en la misma caja, por lo que pueden quedar cajas vacías. Notemos que f representa una sola manera de introducir m objetos distintos en n cajas. Entonces, por la Proposición 5.3,

a) $OR_n^m = n^m$ cuenta el número de maneras en que m objetos distintos se introducen en n cajas distintas.

5.2. Ordenaciones

Supongamos, de nuevo, que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es un conjunto con n elementos y que $f: I_m \to A$ es una ordenación con repetición de n en m. Si ahora pensamos que para cada $i, j \in I_m$ distintos, las selecciones $f(i)$ y $f(j)$ son diferentes, entonces la función f es inyectiva y $f(I_m) = \{f(1), f(2), \ldots, f(m)\}$ es un subconjunto de A con m elementos (distintos). Más aún, como $f(I_m) \subset A$, tenemos que $m = |f(I_m)| \leq |A| = n$, es decir, $m \leq n$. Es común decir, en este caso, que $f(I_m)$ es un arreglo ordenado de m elementos de A. A las ordenaciones con repetición que son inyectivas, se les da el nombre que indicamos a continuación.

Definición 5.4. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Una **ordenación** de n elementos, tomados de m en m, es una función inyectiva de I_m en un conjunto con n elementos. Al número total de dichas funciones lo denotamos como O_n^m.

Para simplificar la escritura, a las ordenaciones de n elementos tomados de m en m, les llamaremos *ordenaciones de n en m*. Supongamos que A es un conjunto con n elementos. En [4, p. 306], a una ordenación de n en m se le llama una m-permutación de A, mientras que en [8, p. 13] se les llama arreglo de n objetos tomados de m en m. En [3, Definición 3-2.12, p. 237] se le llama variación de orden m, tomada de un conjunto con n elementos. Además al número total de ellas lo denotan con el símbolo $V(n, m)$. Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, también dicen que una variación de orden m de A, es una lista ordenada $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ de elementos distintos de A. Dos de dichas ordenaciones son diferentes si algún elemento de una de las dos listas no se encuentra en la otra, o bien si las dos listas contienen los mismos elementos pero en distinto orden (es decir, su orden lista es distinto). Todo esto es compatible con lo enunciado en la Definición 5.4, dada en términos de funciones inyectivas.

Consideremos ahora el siguiente resultado, en cuya prueba utilizamos el Principio de las Casillas.

Teorema 5.5. *Si A y B son conjuntos finitos con $|A| > |B|$, entonces no existe una función inyectiva de A en B.*

Demostración. Si $B = \emptyset$, entonces $|B| = 0$ y $A \neq \emptyset$, pues $|A| > |B|$. Por tanto, no existe ni siquiera una función de A en B (recordemos que la *función vacía* es la función que tiene como dominio al conjunto vacío). En particular, no existe una función inyectiva de A en B. Supongamos ahora que $B \neq \emptyset$. Sean $|A| = m$ y $|B| = n$ y f una función de A en B. Podemos pensar que tenemos m palomas que descansan en n nidos y que, para cada $i \in A$, el valor $f(i)$ significa que la paloma i descansa en el nido $f(i)$. Como $m > n$, por el Teorema 4.1, al menos dos palomas descansan en el mismo nido. Esto significa que existen $i, j \in A$ con $i \neq j$ tales que $f(i) = f(j)$. Por tanto, f no es una función inyectiva. $\square$

Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Si $m > n$ entonces, por la Proposición 5.5, $O_n^m = 0$, es decir hay cero funciones inyectivas de I_m en un conjunto con n elementos. Por tanto, para calcular O_n^m, vamos a suponer que $m \leq n$ y proceder como sigue: supongamos que A es un conjunto con n elementos. Queremos saber el número de funciones inyectivas $f\colon I_m \to A$. Tenemos n maneras de seleccionar a $f(1)$ y, como f ha de ser inyectiva, hay $n-1$ maneras de seleccionar a $f(2)$, $n-2$ maneras de seleccionar a $f(3)$ y, así sucesivamente, tenemos $n-m+1$ maneras de seleccionar a $f(m)$. Luego, por la Regla del Producto, existen

$$
\begin{aligned}
&n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \\
&\qquad\qquad = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)\left(\frac{1\cdot 2\cdot (n-m)}{1\cdot 2\cdot (n-m)}\right) = \frac{n!}{(n-m)!}.
\end{aligned}
$$

maneras de elegir a f. Luego $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. Recordemos que al producto

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1),$$

que hemos visto que coincide con O_n^m, lo llamamos el factorial inferior de n de orden m. En el siguiente resultado presentamos una prueba, por inducción, del cálculo de O_n^m.

Proposición 5.6. *Para cada $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, tenemos que*

$$O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Demostración. Supongamos que A es un conjunto con n elementos. De nueva cuenta, hagamos la prueba por inducción sobre m. Para $m = 1$, O_n^1 es el número de funciones inyectivas de I_1 en A. Como toda función de I_1 en A es inyectiva, tenemos que

$$O_n^1 = OR_n^1 = n^1 = n = \frac{n!}{(n-1)!},$$

así que el resultado se vale para $m = 1$. Ahora supongamos que el resultado es cierto para m, y mostremos que es verdadero para $m+1$, donde $m+1 \leq n$. Esto es, supongamos que $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ y, utilizando dicha igualdad, debemos probar que $O_n^{m+1} = \frac{n!}{(n-(m+1))!}$. Como en el caso de la prueba de la Proposición 5.3, cada función inyectiva de I_{m+1} en A, se puede pensar como la extensión a I_{m+1} de una función inyectiva de I_m en A. Por tanto, dada una función inyectiva en I_m en A, debemos contar de cuántas maneras la podemos extender a una función inyectiva de I_{m+1} en A. Sea pues $g\colon I_m \to A$ una función inyectiva. El valor de g en $m+1$ se debe encontrar en el conjunto $A - \{g(1), g(2), \ldots, g(m)\}$, pues queremos que la extensión sea inyectiva. Como A tiene n elementos y, al ser g inyectiva el conjunto $\{g(1), g(2), \ldots, g(m)\}$ tiene m elementos, la diferencia $A - \{g(1), g(2), \ldots, g(m)\}$ tiene $n - m$ elementos (recordemos que $m \leq n$, por lo que $n - m \geq 0$). Entonces hay $n - m$ maneras de extender g a una función inyectiva de I_{m+1} en A.

Como existen $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ funciones inyectivas de I_m en A y, para cada una de ellas, hay $n - m$ maneras de extenderla a una función inyectiva de I_{m+1} en A, por la Regla del Producto,

$$O_n^{m+1} = O_n^m \cdot (n - m) = \frac{n!}{(n - m)!} \cdot (n - m) = \frac{n!}{(n - m - 1)!} = \frac{n!}{(n - (m + 1))!}.$$

Esto termina la demostración. □

Retomemos el problema de m objetos distintos que se introducen en n cajas distintas $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Supongamos que $m \leq n$. Sean $A = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ y $f \colon I_m \to A$ una ordenación de n en m. Podemos pensar que, para cada $i \in I_m$, el valor $f(i)$ significa que el objeto i se introduce en la caja $f(i)$. Como f es una función inyectiva, objetos distintos se introducen en cajas distintas. Con todo, pueden quedar cajas vacías, ya que el número de cajas es mayor o igual al número de objetos. Además, como f es inyectiva, cada caja posee a lo más un objeto. Entonces f representa una sola manera de introducir m objetos distintos en n cajas distintas, en el que $m \leq n$ y con la condición de que objetos distintos se introducen en cajas distintas. Entonces, por la Proposición 5.6,

b) si $m \leq n$, entonces $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ cuenta el número de maneras en que m objetos distintos se introducen en n cajas distintas, de modo que objetos distintos se introducen en cajas distintas.

Por el Teorema 5.5, si $m > n$, entonces hay cero maneras en que m objetos distintos se introducen en n cajas distintas, si queremos que objetos distintos se introduzcan en cajas distintas.

5.3. Permutaciones

Supongamos que A es un conjunto con n elementos. A los arreglos ordenados de todos los elementos de A se les da el nombre que aparece a continuación.

Definición 5.7. Sea $n \in \mathbb{N}$. Una **permutación** de n elementos es una función inyectiva de I_n en un conjunto con n elementos. Al número total de ellas lo denotamos como P_n.

Dada $n \in \mathbb{N}$ como el conjunto I_n es finito, por la Proposición 2.5, las funciones inyectivas de I_n en un conjunto con n elementos, son justo las funciones biyectivas entre dichos conjuntos. Luego, una permutación de n elementos es una función biyectiva de I_n en un conjunto con n elementos. Por la Proposición 5.6,

$$P_n = O_n^n = \frac{n!}{(n - n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Escribimos esto en el siguiente resultado.

Proposición 5.8. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *tenemos que* $P_n = n!$

Dada una colección de n objetos distintos, cualquier disposición o arreglo lineal de dichos objetos es una permutación de tal colección. Por ejemplo, si la colección es $\{a, b, c\}$, entonces abc, acb, bac, bca, cab y cba son todas las permutaciones de dicha colección. Partiendo con la colección $\{a, b, c\}$, si en lugar de colocar tres letras a la vez (de tres en tres, como se suele decir), estamos interesados en colocar dos letras a la vez (tomar las letras a, b y c de dos en dos), entonces tenemos

$$O_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

maneras de realizar esto, a saber, ab, ba, ac, ca, bc y cb.

En ocasiones a las ordenaciones de n en m se les llama las *permutaciones de n elementos de tamaño m*. En la literatura, algunos autores denotan por OR_m^n y por O_m^n lo que hemos aquí denotado por OR_n^m y O_n^m, respectivamente. También el símbolo $P(n, m)$ suele utilizarse para referirse a lo que hemos denotado por O_n^m. Con esta notación, $P_n = P(n, n)$.

A lo largo de la presente sección vamos a dar una serie de ejemplos en los que, para su solución, requerimos de la noción de ordenación con repetición, de la de ordenación o de la de permutación. Conviene comentar que en el cálculo de OR_n^m y O_n^m, el orden es importante.

Ejemplo 5.9. Supongamos que se quiere confeccionar una bandera de tres franjas y que cada franja puede ser de color rojo, verde, amarillo o blanco, sin importar que haya más de una franja del mismo color. Entonces el orden es importante pues no es lo mismo una bandera cuyos colores en orden son rojo, rojo y amarillo, que una que tenga esos mismos colores, pero en otro orden, como rojo, amarillo, rojo. Como podemos repetir cualesquiera de los cuatro colores que tenemos disponibles, si $n = 4$ representa el número de colores con que contamos y $m = 3$ es el número de franjas de la bandera que queremos confeccionar, entonces $OR_n^m = OR_4^3 = 4^3 = 64$ es el número de maneras de confeccionar dicha bandera. Si ahora se nos dice que no podemos repetir color, entonces hay $O_n^m = O_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ maneras de confeccionar dicha bandera. $\square$

Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es un conjunto con n elementos y $f\colon I_m \to A$ es una función, entonces f es una ordenación con repetición de n en m. Dado $i \in I_m$ importa el valor asignado $f(i)$. Para ver esto, consideremos que $m = 2$ y que tanto $f\colon I_2 \to A$ como $g\colon I_2 \to A$ son funciones tales que

$$f(1) = a_1, \quad f(2) = a_2, \quad g(1) = a_2 \quad \text{y} \quad g(2) = a_1.$$

Entonces $f(I_2) = g(I_2)$, es decir tanto f como g seleccionan los mismos elementos de A, a saber a_1 y a_2, pero lo hacen en un orden distinto, pues f selecciona primero a_1 y luego a_2, mientras que g selecciona primero a_2 y luego a_1. En términos de objetos distintos que se introducen en cajas distintas, dadas dos formas de realizar esto, aunque los objetos terminen en las mismas cajas, no es lo mismo decir que el objeto 1 está en la caja C_1 y el objeto 2 en la caja C_2 (lo que hace la función f), a que el objeto 1 está en la caja C_2 y el objeto 2 en la caja C_1 (lo que hace la función g).

5.4. Permutaciones con Repetición

En los siguientes dos ejemplos, nos enfrentamos con el problema de calcular ordenaciones de objetos en los que algunos de sus elementos no se distinguen. Dichos ejemplos siguen el siguiente esquema.

Definición 5.10. Supongamos que tenemos k objetos distintos $a_1, a_2, \dots, a_k$ y k números naturales $n_1, n_2, \dots, n_k$ tales que

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

A las disposiciones lineales de los k objetos que se pueden formar de modo que, para cada $i \in I_k$, a_i aparece n_i veces, se les llama **permutaciones con repetición** de k objetos con multiplicidades $n_1, n_2, \dots, n_k$.

Ejemplo 5.11. El número de permutaciones en la palabra $COMPUTER$ es 8! pues cada una de las ocho letras que forman la palabra $COMPUTER$ es distinta. Sin embargo, el numero de permutaciones en la palabra $BALL$ no es 4!, pues dos de las cuatro letras que forman la palabra $BALL$ son iguales. Si dos letras L se distinguen por L_1 y L_2, entonces tenemos $4! = 24$ permutaciones de las letras B, A, L_1 y L_2, dos de ellas son por ejemplo L_1L_2AB y L_2L_1AB que corresponden a la misma disposición $LLAB$, cuando las letras L no se distinguen. Entonces a cada disposición en que las letras L son indistinguibles, le corresponde una pareja de permutaciones con letras L distinguidas como L_1 y L_2. Luego el doble del número de las permutaciones de las letras B, A, L, L es igual al número de permutaciones de los símbolos B, A, L_1, L_2. El número de permutaciones en la palabra $BALL$ es, por tanto, $\frac{24}{2} = 12$. Hemos contado las permutaciones con repetición de 3 objetos (las letras B, A, L) con multiplicidades $1, 1, 2$ (pues hay una letra B, una letra A y dos letras L). □

Ejemplo 5.12. Analicemos ahora las disposiciones o permutaciones de las seis letras en la palabra $PEPPER$, es decir, el número de permutaciones con repetición en dicha palabra. Existen $3! = 6$ disposiciones con las letras P distinguidas, para cada disposición en las que las letras P no se distinguen. Por ejemplo,

$$P_1EP_2P_3ER,\ \ P_1EP_3P_2ER,\ \ P_2EP_1P_3ER,\ \ P_2EP_3P_1ER,\ \ P_3EP_1P_2ER$$

y $P_3EP_2P_1ER$ corresponden, todas ellas, a $PEPPER$ cuando eliminamos los subíndices de las letras P. La manera de convencerse de esto, es que para que una disposición con las letras P distinguidas, corresponda a una en donde no se distingue dicha letra, dos letras P distinguidas aparecen una después de la otra y, la tercera, se puede colocar en donde se desee. Teniendo 3 letras P, por la Regla del Producto, hay $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneras de colocar las letras P distinguidas.

Además, a la disposición $P_1EP_2P_3ER$ le corresponde la pareja de permutaciones $P_1E_1P_2P_3E_2R$ y $P_1E_2P_2P_3E_1R$ cuando se distinguen las letras E. En otras palabras, cada disposición en que las letras P distinguidas corresponde a una en donde no se distingue dicha letra, produce $2! = 2$ disposiciones en donde las letras E distinguidas corresponden a la misma disposición en donde no se distingue dicha letra (dado que contamos con dos letras E en la palabra dada). Por tanto

$$\begin{aligned}&(2!)(3!)(\text{permutaciones de las letras de } PEPPER) = \\ &\qquad = (\text{número de disposiciones de los símbolos } P_1, E_1, P_2, P_3, E_2, R) = 6!\end{aligned}$$

Luego, el número de permutaciones de las seis letras en la palabra $PEPPER$ es $\frac{6!}{2!3!} = 60$. Hemos contado, así, las permutaciones con repetición de 3 objetos (las letras P, E, R) con multiplicidades $3, 2, 1$ (pues hay tres letras P, dos letras E y una letra R). □

Notemos que O_n^m cuenta disposiciones lineales en las que los m objetos no pueden repetirse. Para disposiciones con símbolos repetidos o permutaciones con repetición, como en las palabras $BALL$ o $PEPPER$ realizamos lo que enunciamos en el siguiente resultado.

Teorema 5.13. *El número de permutaciones con repetición de k objetos con multiplicidades $n_1, n_2, \ldots, n_k$ es*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}, \tag{8}$$

donde $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

Una forma alternativa de considerar el problema de las permutaciones con repetición es la siguiente: supongamos que tenemos n objetos, con n_1 de un primer tipo, n_2 de un segundo tipo y, así, n_k de un k-ésimo tipo, de modo que

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

Supongamos que los objetos del mismo tipo son indistinguibles (podemos tener, por ejemplo $n = 10$ canicas de las cuales $n_1 = 4$ son azules, $n_2 = 3$ son rojas y $n_3 = 3$ son blancas. Las canicas de cada tipo, color en este caso, son indistinguibles). Entonces existen

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

disposiciones lineales de los n objetos dados (para nuestro ejemplo con canicas, existen $\frac{10!}{4!3!3!} = 4,200$ disposiciones lineales).

La demostración del Teorema 5.13 sigue las mismas ideas indicadas en los Ejemplos 5.11 y 5.12. Con respecto a la forma alternativa, en la palabra $BALL$, $n = 4$ (las cuatro letras B, A, L, L), $n_1 = 1$ (una letra B), $n_2 = 1$ (una letra A) y $n_3 = 2$ (las dos letras L) y hay $\frac{4!}{1!1!2!} = 12$ permutaciones con las letras de dicha palabra. Con $PEPPER$ tenemos que $n = 6$ (las letras disponibles), $n_1 = 1$ (una letra R), $n_2 = 3$ (tres letras P), $n_3 = 2$ (dos letras E) y hay $\frac{6!}{1!2!3!} = 60$ permutaciones con las letras de dicha palabra.

Ejemplo 5.14. Consideremos de nuevo las letras de la palabra $PEPPER$. Ahora deseamos el número de disposiciones lineales en las que aparecen juntas las tres letras P. Esto se consigue pensando que solo tenemos una letra P y, por tanto, hay cuatro letras: una P, dos letras E y una letra R. Entonces hay $\frac{4!}{1!2!1!} = 12$ disposiciones.

Ejemplo 5.15. Consideremos, en el plano cartesiano, los puntos $a = (2, 1)$ y $b = (7,4)$. Pensemos que una trayectoria de a a b está formada por escalones individuales que, partiendo de a, van una unidad hacia la derecha (D) o una unidad hacia arriba (A), hasta terminar en b. Por ejemplo la trayectoria DADDADDA es la que se mueve como sigue: empieza en el punto a, una unidad a la derecha al punto $(3, 1)$, una unidad arriba al punto $(3, 2)$, una unidad a la derecha al punto $(4, 2)$, otra unidad a la derecha para llegar al punto $(5, 2)$, una unidad arriba para obtener el punto $(5, 3)$, una unidad a la derecha al punto $(6, 3)$, luego otra a la derecha para llegar al punto $(7, 3)$ y, finalmente, una unidad arriba para llegar a b. Otra trayectoria es, por ejemplo, ADDDAADD. Notemos que cada trayectoria de a a b necesita de $7-2 = 5$ movimientos horizontales a la derecha (es decir, de cinco letras D) y $4 - 1 = 3$ movimientos verticales hacia arriba (es decir, de cuatro letras A). El número de trayectorias, según el Teorema 5.13, es $\frac{8!}{5!3!} = 56$. □

Ejemplo 5.16. Consideremos que $k \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 5.13, el número de maneras en que podemos ordenar los $2k$ símbolos $x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_k, x_k$ es un entero igual a

$$\frac{(2k)!}{2!2! \cdots 2!} = \frac{(2k)!}{2^k}.$$

Esto muestra, de manera combinatoria, que para cualquier número natural k, el cociente $\frac{(2k)!}{2^k}$ es un número natural, afirmación que podemos también demostrar por inducción matemática. En efecto, para $k = 1$, tenemos que

$$\frac{(2k)!}{2^k} = \frac{(2)!}{2^1} = \frac{2}{2} = 1$$

es un entero, por lo que el resultado es válido para $k = 1$. Supongamos que también es válido para k. Entonces $m = \frac{(2k)!}{2^k}$ es un entero. Luego

$$\frac{(2(k+1))!}{2^{k+1}} = \frac{(2k+2)!}{2 \cdot 2^k} = \frac{(2k+2)(2k+1)(2k)!}{2 \cdot 2^k} = (k+1)(2k+1)\frac{(2k)!}{2^k} = (k+1)(2k+1)m$$

es un entero y, así, el resultado es válido para $k + 1$. Hemos probado por inducción lo que en un principio mostramos de forma combinatoria. □

5.5. Permutaciones Circulares

En la presente subsección vamos a considerar un tipo diferente de permutación. Veamos primero el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.17. Estamos ahora interesados en acomodar a seis personas en sillas numeradas del 1 al 6. En el asiento 1 se puede sentar cualquiera de las seis personas, en el asiento 2 cualquiera de las cinco restantes. Así, por la Regla del Producto, en las primeras dos sillas el número de elecciones es $6 \cdot 5 = 30$. Continuando de esta manera, el número de elecciones es $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. El mismo problema, con cinco personas, da como respuesta $5! = 120$.

Ejemplo 5.18. Ahora supongamos que deseamos acomodar a seis personas A, B, C, D, E y F en una mesa redonda. Convenimos que las disposiciones se consideran iguales cuando una puede obtenerse de otra mediante una rotación. Por ejemplo, si nos movemos en el sentido de las manecillas del reloj, los seis arreglos lineales distintos

$$ABEFCD, \quad CDABEF, \quad BEFCDA, \quad DABEFC, \quad EFCDAB \text{ y } FCDABE$$

son iguales como arreglos circulares. Cada arreglo circular corresponde a seis arreglos lineales, por lo que

$$\begin{aligned} &6 \cdot (\text{número de arreglos circulares de } A, B, C, D, E, F) = \\ &\qquad = (\text{número de arreglos lineales de } A, B, C, D, E, F) = 6! \end{aligned}$$

Luego, hay $\frac{6!}{6} = 5! = 120$ arreglos circulares con las letras A, B, C, D, E y F, es decir, 120 maneras de acomodar en una mesa redonda a las seis personas.

Una manera alternativa de resolver el problema anterior es el siguiente: coloquemos a la persona A en la mesa. Debemos ahora llenar cinco lugares, digamos que en el sentido de las manecillas del reloj a partir de A. Notemos que colocar en forma circular a las personas B, C, D, E y F es lo mismo que permutar en forma lineal las letras B, C, D, E y F, lo cual se puede lograr de 5! maneras distintas. Por tanto, al colocar a la primera persona, el resto de los elementos quedan, en cierta forma, acomodados. $\square$

Una *permutación circular* de n elementos, es un caso particular de una permutación. Se usa cuando los n elementos se han de ordenar en círculo de modo que el primer elemento que se sitúe, determina el principio y el final de la muestra. Como indicamos en el Ejemplo 5.18, dos permutaciones circulares se consideran iguales cuando una puede obtenerse de otra mediante una rotación. Dada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por PC_n el número de permutaciones circulares de un conjunto con n elementos. Razonando como en el caso de acomodar a seis personas en una mesa redonda, si deseamos acomodar a n personas en una mesa redonda resulta que $PC_n = (n-1)!$ Escribimos esto en el siguiente resultado

Proposición 5.19. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, el número de permutaciones circulares de n elementos es $PC_n = (n-1)!$*

Ejemplo 5.20. Ahora supongamos que tenemos seis personas A, B, C, D, E y F de modo que A, B y C son mujeres y D, E y F son hombres. Ahora deseamos acomodar a las seis personas por parejas hombre-mujer, es decir, de modo que los sexos se alternen. Como la disposición es circular, dos disposiciones se consideran idénticas si una se puede obtener de la otra mediante rotación. Por tanto, es indistinto la mujer o el hombre que elijamos al principio, es decir, el que sentemos primero en la mesa. Coloquemos a la mujer A. A su lado, en el sentido de las manecillas del reloj, hemos de colocar a un hombre H_1 y tenemos tres formas de hacer esto. Luego, a su lado, hemos de colocar a una mujer M_2 y tenemos dos formas de hacer esto, pues hay tres mujeres y la mujer A ya está sentada en la mesa circular. Al lado de M_2 hemos de colocar a un hombre H_2 y hay dos formas de hacer esto, pues hay tres hombres y el hombre H_1 ya está sentado en la mesa. Al lado de de H_2 hay que colocar a una mujer M_3 y sólo nos queda una manera de hacer esto, pues las mujeres A y M_2 ya están sentadas en la mesa. Finalmente, al lado de M_3 hay que colocar a un hombre H_3 y sólo nos queda una forma de hacer esto, pues los hombres H_1 y H_2 ya están colocados en la mesa. Así, hay $3(2)(2)(1)(1) = 12$ maneras de acomodar a las seis personas como se ha indicado. $\square$

5.6. El Conjunto Potencia

Si A es un conjunto, entonces definimos

$$\mathcal{P}(A) = \{B \colon B \subset A\}.$$

A $\mathcal{P}(A)$ se le suele llamar el *conjunto potencia* de A. Notemos que en dicho conjunto se encuentran todos los subconjuntos de A, incluyendo al conjunto vacío. Utilizando la cantidad de elementos de OR_2^n, podemos determinar el número de elementos de $\mathcal{P}(A)$, suponiendo que A tiene n elementos.

Proposición 5.21. *Si A es un conjunto con n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.*

Demostración. Sea $\mathcal{O}$ la familia de las funciones de I_n en $\{0,1\}$. Como el conjunto $\{0,1\}$ tiene dos elementos, podemos pensar que una ordenación con repetición de 2 en n, es una función de I_n en $\{0,1\}$. Puesto que I_n y A tienen el mismo número de elementos, existe una función biyectiva $h \colon A \to I_n$. Por la Proposición 5.3, $\mathcal{O}$ tiene $OR_2^n = 2^n$ elementos. Ahora vamos a definir una función biyectiva $\varphi \colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{O}$. Si $B \in \mathcal{P}(A)$, entonces $B \subset A$ por lo que $h(B) \subset I_n$. Definimos $\varphi(B) = f_B$, donde $f_B \colon I_n \to \{0,1\}$ se define, para $x \in I_n$, como sigue:

$$f_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in h(B); \\ 0 & \text{si } x \notin h(B). \end{cases}$$

Para mostrar que φ es inyectiva, tomemos $B, C \in \mathcal{P}(A)$ de modo que $\varphi(B) = \varphi(C)$. Entonces $f_B = f_C$, por lo que $f_B(x) = f_C(x)$ para toda $x \in I_n$. Luego

$$h(B) = \{x \in I_n \colon f_B(x) = 1\} = \{x \in I_n \colon f_C(x) = 1\} = h(C).$$

Puesto que h es inyectiva y $h(B) = h(C)$, tenemos que $B = C$. Esto prueba que φ es inyectiva. Para ver que también es suprayectiva, sea $g \in \mathcal{O}$. Entonces g es una función de I_n en $\{0,1\}$. Consideremos el conjunto

$$B = \{a \in A \colon g(h(a)) = 1\}.$$

Notemos que $B \subset A$, por lo que $B \in \mathcal{P}(A)$. Además $\varphi(B) = f_B$ y $f_B \colon I_n \to \{0,1\}$. Vamos a probar que $f_B = g$ por lo que tomemos un elemento $x \in I_n$. Si $x \in h(B)$, entonces existe $a \in B$ tal que $x = h(a)$. Luego $f_B(x) = 1$ y $g(x) = g(h(a)) = 1$ por lo que $f_B(x) = g(x)$. Ahora supongamos que $x \notin h(B)$. Entonces $f_B(x) = 0$. Supongamos que $g(x) = 1$. Como $x \in I_n$ y h es suprayectiva, existe $b \in A$ tal que

$h(b) = x$. Luego $1 = g(x) = g(h(b))$, por lo que $b \in B$ y entonces $x = h(b) \in h(B)$, lo cual es un absurdo. Esto prueba que $g(x) = 0 = f_B(x)$. Con esto tenemos que $f_B = g$ y, por consiguiente, φ es suprayectiva. Tenemos, así, que φ es biyectiva. Luego $\mathcal{F}$ y $\mathcal{P}(A)$ tienen la misma cardinalidad. Por tanto, $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos. $\square$

En la siguiente sección calcularemos la cardinalidad de $\mathcal{P}(A)$, utilizando argumentos combinatorios. Terminamos la sección recordando que O_n^m cuenta disposiciones lineales en las que los objetos no pueden repetirse. Si se permiten las repeticiones, en lugar de O_n^m utilizamos $OR_n^m = n^m$.

6. Combinaciones

Ahora veremos otro tipo de problemas de conteo que se resuelven con la noción que indicamos a continuación.

Definición 6.1. Sean $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$. Una **combinación** de n elementos tomados de m en m, es un subconjunto con m elementos, obtenido de un conjunto con n elementos. Al número total de ellas lo denotamos por C_n^m.

Para simplificar la escritura, a las combinaciones de n elementos tomados de m en m, les llamaremos *combinaciones de n en m*. Sea A un conjunto con n elementos. En [4, p. 308] a una combinación de n en m se le llama una m-combinación de A y, en [3, Definición 3-2.26, p. 244], se le llama una combinación de orden m, tomada de un conjunto con n elementos. Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, también se dice en [3] que una combinación de orden m, de A, es una lista $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ de m elementos distintos de A. Dos de dichas combinaciones se consideran diferentes, si algún elemento de una lista no se encuentra en la otra. Si, por ejemplo, $n = 3$ y $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, entonces $\{a_1, a_2\}$ es una combinación de 3 en 2. Como conjuntos, $\{a_1, a_2\} = \{a_2, a_1\}$, así que $\{a_2, a_1\}$ representa la misma combinación que $\{a_1, a_2\}$. Una combinación distinta de 3 en 2 es, por ejemplo, $\{a_1, a_3\}$.

En la literatura, los símbolos C_m^n, $C(n, m)$ o bien $\binom{n}{m}$ se usan para designar lo que hemos denotado por C_n^m. En [8, p. 17] se dice que la notación $\binom{n}{m}$ fue introducida por Andreas von Ettingshausen en su obra *Die Combinatorische Analysi*, publicada en 1826.

Notemos que si $m > n$, entonces $C_n^m = 0$ pues un conjunto con n elementos tiene cero subconjuntos con m elementos, dado que m es mayor que n. Por otra parte, C_n^0 indica el número de subconjuntos con cero elementos que tiene un conjunto dado de n elementos. Luego $C_n^0 = 1$, pues el vacío es el único subconjunto con dichas características. Notemos que $C_n^n = 1$ pues un conjunto con n elementos posee solamente un subconjunto con n elementos. A partir de este momento, cuando consideremos a C_n^m, pensaremos que $0 \leq m \leq n$, salvo que explícitamente digamos lo contrario.

En la sección anterior comentamos que, en el cálculo de OR_n^m y de O_n^m, el orden importa. Ahora, para calcular C_n^m, el orden no importa pues sólo deseamos saber la cantidad de subconjuntos con m elementos que tiene un subconjunto con n elementos, y no el orden en que los m elementos se acomodan o se escogen.

Proposición 6.2. *Para cada $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$ con $0 \leq m \leq n$, tenemos que*

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{9}$$

Demostración. Sea A un conjunto con n elementos. Ya comentamos que $C_n^0 = 1$. Además, cuando $m = 0$, tenemos que

$$\frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{0!n!} = 1.$$

Por tanto la igualdad (9) se cumple cuando $m = 0$. Supongamos ahora que $m \in \mathbb{N}$. Denotemos por $\mathcal{O}$ a la ordenaciones de los elementos de A, tomadas de m en m, y por $\mathcal{C}$ a las combinaciones de los miembros de A, tomados de m en m. Notemos que la cardinalidad de $\mathcal{O}$ es O_n^m y la cardinalidad de $\mathcal{C}$ es C_n^m. Definimos una función $h\colon \mathcal{O} \to \mathcal{C}$ como sigue: consideremos $f \in \mathcal{O}$. Entonces $f\colon I_m \to A$ es una función inyectiva, por lo que $f(I_m) = \{f(1), f(2), \ldots, f(m)\}$ es un subconjunto de A con m elementos, luego $f(I_m) \in \mathcal{C}$. Hacemos entonces $h(f) = f(I_m)$.

Sean $f, g \in \mathcal{O}$ tales que $h(f) = h(g)$. Entonces f y g son funciones inyectivas de I_m en A tales que $f(I_m) = g(I_m)$. Si fijamos f así como los miembros del conjunto $\{f(1), f(2), \ldots, f(m)\}$, entonces g lo que hace es permutar dichos miembros, pues

$$\{f(1), f(2), \ldots, f(m)\} = \{g(1), g(2), \ldots, g(m)\}.$$

A la inversa, si fijamos los elementos del conjunto $\{f(1), f(2), \ldots, f(m)\}$, entonces cada permutación de dichos elementos determina una función inyectiva $g\colon I_m \to A$ tal que $g(I_m) = \{f(1), f(2), \ldots, f(m)\}$.

Consideremos ahora un elemento $B \in \mathcal{C}$. Entonces B es un subconjunto de A con m elementos. Además hay $P_m = m!$ permutaciones de los elementos de B. Cada una de estas permutaciones es un elemento de $\mathcal{O}$, es decir una función inyectiva $g\colon I_m \to A$, tal que $g(I_m) = B$. En otras palabras, cada elemento de $\mathcal{C}$ produce $m!$ elementos de $\mathcal{O}$. Luego, por la Regla del Producto, la cardinalidad de $\mathcal{O}$ es el producto de la cardinalidad de $\mathcal{C}$ por $m!$ Así $m!C_n^m = O_n^m$. Como $m! \neq 0$, por la Proposición 5.6,

$$C_n^m = \frac{1}{m!} \cdot O_n^m = \frac{1}{m!} \cdot \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

$\square$

La prueba dada en el teorema anterior la podemos ejemplificar como sigue.

Ejemplo 6.3. La baraja normal consta de 52 cartas con cuatro palos: tréboles (T o $\clubsuit$), diamantes (D o $\diamondsuit$), corazones (C o $\heartsuit$)) y espadas (E o $\spadesuit$). Cada palo tiene 13 cartas: as (A), $2, 3, \ldots, 9, 10$, sota (J), reina (Q) y rey (R). Con estas letras y dígitos podemos representar cada miembro de la baraja. Por ejemplo, 2C es el dos de corazones mientras que JD es la sota de diamantes y AE es el as de espadas. Si nos piden sacar tres cartas de una bajara normal, una tras otra y sin sustituirlas entonces, por la Regla del Producto, existen

$$O_{52}^3 = \frac{52!}{49!} = 52 \cdot 51 \cdot 50$$

posibilidades. Supongamos que ahora nos piden sacar tres cartas a la vez, de modo que el orden de selección de las cartas no sea importante. Entonces al sacar, por ejemplo AC, 9T y RD (el as de corazones, el 9 de tréboles y el rey de diamantes), las seis permutaciones de dichas cartas

AC-9T-RD, AC-RD-9T, 9T-AC-RD, 9T-RD-AC, RD-AC-9T y RD-9T-AC

corresponden a una sola forma no ordenada de sacar éstas tres cartas. En otras palabras, cada selección de tres cartas, sin tener en cuenta el orden, corresponde a 3! permutaciones de dichas cartas, en donde tomamos en cuenta el orden. Luego

$$\begin{aligned}(3!)\cdot(&\text{número de selecciones de tamaño tres de una baraja de 52 cartas}) = \\ &= \text{número de permutaciones de tamaño 3 de una baraja de 52 cartas} = \\ &= O_{52}^{3} = \frac{52!}{49!}.\end{aligned}$$

Luego, el número de selecciones de tamaño tres de una baraja de 52 cartas, es decir, C_{52}^{3}, es justo

$$\frac{O_{52}^{3}}{3!} = \frac{52!}{3!49!} = 22,100.$$

□

Retomemos el problema de m objetos que se introducen en n cajas $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Sea $A = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$. Como ya indicamos en la afirmación b) de la Subsección 5.2, si $m \leq n$ y los m objetos son distintos entonces

$$O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

cuenta el número de maneras en que m objetos distintos se introducen en n cajas distintas, de modo que objetos distintos se introducen en cajas distintas (y, por ende, en cada caja hay a lo más un objeto).

Ahora deseamos determinar el número k de formas en que m objetos idénticos se introducen en n cajas distintas, de modo que en cada caja hay a lo más un objeto. Supongamos que $m \leq n$. Entonces una elección de los m objetos idénticos en las n cajas $C_1, C_2, \ldots, C_n$, produce un subconjunto de $A = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ con m elementos. A la inversa, cada subconjunto de A con m elementos, se puede pensar como una forma en que m objetos idénticos se introducen en n cajas distintas. Esto significa que k es justo el número de subconjuntos con m elementos que tiene el conjunto A. Por la Proposición 6.2, $k = C_n^m$. Tenemos, por tanto, que

c) si $m \leq n$, entonces $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ cuenta el número de maneras en que m objetos idénticos se introducen en n cajas distintas, de modo que en cada caja hay a lo más un objeto.

Si $m > n$, entonces hay cero maneras en que m objetos idénticos se introducen en n cajas distintas, de modo que en cada caja hay a lo más un objeto. Más adelante, en la Sección 8, veremos cómo calcular el número de formas en que m objetos idénticos se pueden introducir en n cajas distintas si no hay más restricciones, es decir, si pueden quedar cajas sin objetos y también una caja puede tener más de un objeto. Calcularemos también el número de formas en que m objetos idénticos se pueden introducir en n cajas distintas de modo que no queden cajas vacías, es decir, con la condición de que cada caja posee al menos un objeto.

6.1. Funciones Estrictamente Crecientes

Supongamos que A es un conjunto con n elementos y que $m \in \mathbb{N}$. Hemos visto que una ordenación con repetición de n en m, es una función $f\colon I_m \to A$, mientras que una ordenación de n en m es una función inyectiva $f\colon I_m \to A$, y una permutación de n elementos es una función biyectiva $f\colon I_n \to A$. En esta subsección, veremos que las combinaciones de n en m, pueden ser pensadas como funciones especiales de I_m en A. Para esto la noción que conjunto totalmente ordenado, presentada en la Subsección 2.2, jugará un papel importante.

Recordemos que si $(B, \prec_B)$ es un conjunto totalmente ordenado y $b, c \in B$ son tales que $b \prec_B c$, entonces decimos que b es menor que c con respecto al orden total $\prec_B$. En la siguiente definición consideramos funciones, definidas entre conjuntos totalmente ordenados, que preservan o bien que invierten el orden total de dichos conjuntos.

Definición 6.4. Sean $(B, \prec_B)$ y $(C, \prec_C)$ dos conjuntos totalmente ordenados. Decimos que una función $f\colon B \to C$ es

1) **estrictamente creciente** si para cada $b, c \in B$ del hecho de que $b \prec_B c$ se infiere que $f(b) \prec_C f(c)$;

2) **estrictamente decreciente** si para cada $b, c \in B$ del hecho de que $b \prec_B c$ se infiere que $f(c) \prec_C f(b)$.

Como es de esperarse, tanto las funciones estrictamente crecientes como las estrictamente decrecientes, son inyectivas, cosa que probamos en el siguiente resultado.

Proposición 6.5. *Sean $(B, \prec_B)$ y $(C, \prec_C)$ dos conjuntos totalmente ordenados. Si $f\colon B \to C$ es una función estrictamente creciente o bien estrictamente decreciente, entonces f es inyectiva. En particular, si B y C son finitos, tenemos que $|B| \leq |C|$.*

Demostración. Supongamos que f es estrictamente creciente. Si f no es inyectiva, entonces existen $b, c \in B$ tales que $b \neq c$ y $f(b) = f(c)$. Como $\prec_B$ es un orden total en B, tenemos que $b \prec_B c$ o bien $c \prec_B b$. En el primer caso, al ser f estrictamente creciente, tenemos que $f(b) \prec_C f(c)$. En el segundo caso, usando de nuevo que f es estrictamente creciente, deducimos que $f(c) \prec_C f(b)$. Como $f(b) = f(c)$, en cualquier caso se sigue que $f(b) \prec_C f(b)$, lo cual contradice el hecho de que la relación $\prec_C$ es antireflexiva. Esto prueba que f es inyectiva. La prueba para el caso en que f es estrictamente decreciente es similar. Si B y C son finitos, el resto de la prueba se sigue del Teorema 5.5. □

En el siguiente resultado, mostrarmos que una combinación de n en m se puede considerar como una función estrictamente creciente de un conjunto con m elementos a un conjunto con n elementos.

Teorema 6.6. *Supongamos que* $(B, \prec_B)$ *y* $(C, \prec_C)$ *son dos conjuntos totalmente ordenados tales que* $|B| = m$, $|C| = n$ *y* $m \leq n$. *Entonces el número de funciones estrictamente crecientes de* B *en* C *es igual al número de combinaciones de* n *en* m, *es decir, igual a* C_n^m.

Demostración. Sean $\mathcal{E}$ el conjunto de las funciones estrictamente crecientes de B en C, y $\mathcal{C}$ el conjunto de las combinaciones de n en m que tiene el conjunto C. Los elementos de $\mathcal{C}$ son subconjuntos de C con m elementos. Vamos a probar que los conjuntos $\mathcal{E}$ y $\mathcal{C}$ son equipotentes. Para esto, vamos a construir una función biyectiva $\varphi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ como sigue: si $f\colon B \to C$ es una función estrictamente creciente, definimos

$$\varphi(f) = f(B), \quad \text{donde } f(B) = \{f(b)\colon b \in B\}$$

es la imagen directa de B bajo f. Es claro que $f(B) \subset C$. Por la Proposición 6.5, f es inyectiva y, como B tiene m elementos, sucede que $f(B)$ tiene m elementos. Luego $\varphi(f) = f(B) \in \mathcal{C}$. Con esto se muestra que la función φ está bien definida.

Vamos a probar que φ es suprayectiva. Sea $D \in \mathcal{C}$. Entonces D es un subconjunto de C con m elementos. Como $(C, \prec_C)$ está totalmente ordenado, podemos pensar que los elementos de D son $d_1, d_2, \ldots, d_m$ y que, además,

$$d_1 \prec_C d_2 \prec_C d_3 \prec_C \cdots \prec_C d_m. \tag{10}$$

También podemos pensar que los elementos de B son $b_1, b_2, \ldots, b_m$ y que, además

$$b_1 \prec_B b_2 \prec_B b_3 \prec_B \cdots \prec_B b_m. \tag{11}$$

Sea $f\colon B \to C$ la función definida, para cada $i \in I_m$ como $f(b_i) = d_i$. Es claro que f es una función estrictamente creciente tal que

$$\varphi(f) = f(B) = \{f(b_1), f(b_2), \ldots, f(b_m)\} = \{d_1, d_2, \ldots, d_m\} = D.$$

Por tanto $f \in \mathcal{E}$ y $\varphi(f) = D$. Esto prueba que φ es suprayectiva.

Para ver que φ también es inyectiva, sean $f\colon B \to C$ y $g\colon B \to C$ dos funciones estrictamente crecientes tales que $f \neq g$. Pensemos que los elementos que B son $b_1, b_2, \ldots, b_m$ y que, además se cumple (11). Como $f \neq g$ podemos considerar el menor número natural $j \in I_m$ tal que $f(b_j) \neq g(b_j)$. Puesto que $(C, \prec_C)$ está totalmente ordenado, $f(b_j) \prec_C g(b_j)$ o bien $g(b_j) \prec_C f(b_j)$. Supongamos, sin perder generalidad, que $g(b_j) \prec f(b_j)$. Para cada $i \in I_m - \{j\}$, tenemos dos casos: $1 \leq i < j$ o bien $j < i \leq m$. Consideremos primero que $1 \leq i < j$. Como g es estrictamente creciente, tenemos que

$$b_i \prec_B b_j \quad \text{y} \quad f(b_i) = g(b_i) \prec_C g(b_j).$$

Por tanto $f(b_i) \prec_C g(b_j)$ para todo $1 \leq i < j$. Esto implica, por ser $\prec_C$ una relación antireflexiva, que $g(b_j)$ no coincide con los elementos $f(b_1), f(b_2), \ldots, f(b_{j-1})$ que se encuentran en $f(B)$. Tampoco $g(b_j)$ coincide con el elemento $f(b_j)$ de $f(B)$. Ahora bien, si $j < i \leq m$ usando que f es estrictamente creciente, tenemos que

$$b_j \prec_B b_i \quad \text{y} \quad g(b_j) \prec_C f(b_j) \prec_C f(b_i).$$

Por tanto $g(b_j) \prec_C f(b_i)$ para todo $j < i \leq m$. Esto implica, por ser $\prec_C$ una relación antireflexiva, que $g(b_j)$ no coincide con los elementos $f(b_{j+1}), f(b_{j+2}), \ldots, f(b_m)$ de $f(B)$. En consecuencia, $g(b_j) \notin f(B)$. Por tanto,

$$\varphi(f) = f(B) \neq g(B) = \varphi(g),$$

probando así que φ es inyectiva.

Hemos demostrado que la función $\varphi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ es biyectiva. Como consecuencia de esto, los conjuntos $\mathcal{E}$ y $\mathcal{C}$ son equipotentes. Luego

$$|\mathcal{E}| = |\mathcal{C}| = C_n^m.$$

Más aún, cada función estrictamente creciente de B en C, tiene asociado bajo φ un subconjunto de C con m elementos, es decir, una combinación de n en m. Por otro lado, cada combinación de n en m, que se puede pensar como un subconjunto de C con m elementos, tiene asociado bajo φ^{-1} una función estrictamente creciente de B en C. □

Si consideramos ahora que $\mathcal{E}$ es el conjunto de las funciones estrictamente decrecientes de B en C entonces, utilizando una demostración similar a la que hemos dado, la misma función $\varphi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ es biyectiva (la prueba de la suprayectividad de φ sigue las mismas ideas, ordenando a B y D como en (11) y (10), y definiendo $f\colon B \to C$ para cada $i \in I_m$ como $f(b_i) = d_{m-(i-1)}$, para que resulte estrictamente decreciente). Con esto tenemos también el siguiente resultado.

Teorema 6.7. *Supongamos que $(B, \prec_B)$ y $(C, \prec_C)$ son dos conjuntos totalmente ordenados tales que $|B| = m$ y $|C| = n$. Entonces el número de funciones estrictamente decrecientes de B en C es igual al número de combinaciones de n en m, es decir, igual a C_n^m.*

Los Teoremas 6.6 y 6.7 también funcionan cuando $m = 0$ pues, en dicho caso, el único elemento del conjunto $\mathcal{E}$ (ya sea el de las funciones estrictamente crecientes o bien el de las estrictamente decrecientes de B en C) es la función vacía y, además, $C_n^0 = 1$.

Supongamos que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es un conjunto con n elementos. Definiendo en A el orden de lista $\prec$ que describimos en la Subsección 2.4, tenemos que $(A, \prec)$ es un conjunto totalmente ordenado. Para cada $m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, el conjunto $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ posee su orden natural, el cual es un orden total. Tiene sentido, entonces, considerar funciones estrictamente crecientes o bien estrictamente decrecientes de I_m en A. Además, por los Teoremas 6.6 y 6.7, el número de funciones estrictamente crecientes de I_m en A es igual al número de funciones estrictamente decrecientes de I_m en A, y también igual a C_n^m.

Concluimos, por lo comentado en el párrafo anterior que, de haberlo deseado así, pudimos haber dicho que dados $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$ con $0 \leq m \leq n$, una combinación de n elementos tomados de m en m, es una función estrictamente creciente de I_m en un conjunto A con n elementos, en donde en I_m consideramos el orden usual y en A el orden de lista. También pudimos haber dicho que una combinación de n elementos tomados de m en m, es una función estrictamente decreciente de I_m en un conjunto A con n elementos, en donde en I_m consideramos el orden usual y en A el orden de lista. Ahora bien, cuando interpretamos una combinación de n en m en términos de funciones estrictamente crecientes o bien estrictamente decrecientes, ¿en qué sentido el orden no importa? Dejamos al lector pensar en esta pregunta.

6.2. Ejemplos

Vamos a dar ahora una serie de ejemplos en el que, para su solución, la noción de combinación es importante.

Ejemplo 6.8. Si un examen tiene 10 preguntas y hemos de contestar 7 de ellas, sin importar el orden, entonces hay $C_{10}^{7} = \frac{10!}{7!3!} = 120$ maneras de contestar dichas preguntas. Si hemos de responder tres preguntas de las primeras cinco y cuatro de las últimas cinco, entonces las primeras tres preguntas se pueden elegir de $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$ formas, las otras cuatro preguntas se pueden elegir de $C_5^4 = \frac{5!}{4!1!} = 5$ formas. Como por cada manera de elegir las primeras tres preguntas, hay 5 formas de elegir las otras cuatro, por la Regla del Producto, hay $10 \cdot 5 = 50$ formas de elegir las siete preguntas con las condiciones indicadas. Ahora supongamos que debemos responder 7 de las 10 preguntas de modo que al menos tres deberán ser de las primeras cinco. Para determinar el número de formas en que se puede realizar esto, hay que considerar tres casos:

1) Supongamos primero que respondemos justo tres de las primeras cinco preguntas y cuatro de las últimas cinco. Dicho caso lo acabamos de resolver y nos dan 50 formas.

2) Supongamos ahora que respondemos justo cuatro de las primero cinco preguntas y tres de las últimas cinco. Entonces, como hicimos con el caso anterior, hay $C_5^4 \cdot C_5^3 = 50$ formas de realizar esto.

3) Supongamos, por último, que respondemos las cinco primeras preguntas y dos de las últimas cinco. Entonces, por la Regla del Producto, hay $C_5^5 \cdot C_5^2 = 1 \cdot 10 = 10$ formas de realizar esto.

Como las formas obtenidas en las partes 1), 2) y 3) no se pueden realizar de manera simultánea, por la Regla de la Suma, tenemos $50 + 50 + 10 = 110$ maneras de elegir las siete preguntas de modo que al menos tres son de las primeras cinco. $\square$

Ejemplo 6.9. Supongamos que una maestra del ITAM debe formar cuatro equipos A, B, C y D de nueve mujeres cada uno. Hay disponibles 36 mujeres. Para formar el equipo A, hay C_{36}^{9} formas. Una vez seleccionado dicho equipo, nos quedan 27 mujeres para formar el equipo B. Por tanto, hay C_{27}^{9} maneras de formar dicho equipo. Nos quedan 18 mujeres para formar al equipo C, así que hay C_{18}^{7} maneras para esto. Luego nos quedan 9 mujeres y éstas han de formar al equipo D. Por la Regla del Producto, la solución a nuestro problema es

$$C_{36}^{9} \cdot C_{27}^{9} \cdot C_{18}^{9} = \frac{36!27!18!}{9!27!9!18!9!9!} = \frac{36!}{9!9!9!9!} = 2.145 \times 10^{19}.$$

Considerando que las 36 mujeres están alineadas, el problema se puede pensar como una permutación con repetición de 4 objetos (los cuatro equipos a formar), con multiplicidades 9,9,9,9. Hay, por tanto, $\frac{36!}{9!9!9!9!}$ maneras de formar los cuatro equipos. $\square$

Ejemplo 6.10. Consideremos las once letras de la palabra $TALLAHASSEE$. Por el Teorema 5.13, hay

$$\frac{11!}{3!2!2!2!1!1!} = 831,600$$

permutaciones con repetición. Nos preguntamos ahora por el números de dichas permutaciones en las que no aparecen dos letras A consecutivas. Podemos resolver esto como sigue: no tomemos en cuenta de momento a las tres letras A. Entonces nos quedan ocho letras en donde, en donde hay letras repetidas las cuales, por el Teorema 5.13, se pueden arreglar de

$$\frac{8!}{2!2!2!1!1!} = 5,040$$

maneras. Para cada una de dichas 5,040 formas, por ejemplo para la palabra

$$EESTLLSH,$$

debemos insertar las tres letras A de modo que no haya dos consecutivas. Si distinguimos las letras de dicha palabra, obtenemos $E_1E_2S_1TL_1L_2S_2H$. Notemos que hay 9 posiciones para seleccionar las tres letras A: a la izquierda de E_1, entre E_1 y E_2, entre E_2 y S_1, entre S_1 y T, entre T y L_1, entre L_1 y L_2, entre L_2 y S_2, entre S_2 y H y a la derecha de H. Entonces hay

$$C_9^3 = \frac{9!}{3!6!} = 84$$

formas de seleccionar las tres letras A. Luego, por la Regla del Producto, hay

$$5,040 \times 84 = 423,360$$

disposiciones de las letras de la palabra $TALLAHASSEE$ en las que no aparecen dos letras A consecutivas. $\square$

Hay que tener cuidado, en un problema de conteo, con lo que se llama “recuento excesivo” o, en otras palabras, con el contar de más. El siguiente ejemplo indica cómo podemos caer en esta situación.

Ejemplo 6.11. Retomemos el Ejemplo 6.3. Deseamos sacar cinco cartas de manera que no hayan tréboles. Como la baraja tiene 52 cartas y hay 13 tréboles, debemos elegir cinco cartas de entre 39 disponibles (las que no tienen trébol). Entonces hay C_{39}^5 maneras de hacer esto. Ahora pensemos que deseamos que en nuestras cinco cartas elegidas, haya por lo menos un trébol. Para resolver esto, consideremos primero que en las cinco cartas no hay un trébol. Esto lo acabamos de resolver, y la respuesta es C_{39}^5. Como C_{52}^5 es el número de maneras en que podemos sacar cinco cartas, la resta

$$C_{52}^5 - C_{39}^5 = 2,598,960 - 575,757 = 2,023,203$$

es la solución del problema. Pensemos ahora el problema de otra manera: para sacar un trébol de trece disponibles, hay C_{13}^1 maneras. Nos quedan ahora 51 cartas para sacar cuatro de ellas, por lo que hay C^4_{51} maneras de hacer esto. Luego, por la Regla del Producto, hay

$$C^1_{13} \cdot C^4_{51} = 13 \times 249,900 = 3,248,700$$

maneras de hacer esto. Nuestro argumento parece razonable y, sin embargo, el resultado obtenido no coincide con el primero. Hay un error de más de un millón. La razón es que estamos contando de más. Si, por ejemplo, nuestra primera carta es 3T, entonces las disposiciones

3T-5T-RT-7C-JE y 5T-3T-RT-7C-JE

son la misma y, sin embargo, en el segundo argumento dado, las estamos contando como selecciones distintas, pues solamente nos preocupamos de que la primera carta elegida fuese un trébol. Esto nos debe de convencer de que hemos contado de más.

La primera respuesta, aunque correcta, la obtuvimos de un modo indirecto: contamos el número de formas en que no se puede realizar lo que queremos y luego restamos. Este método hay que tomarlo en cuenta, pues en otros problemas puede ser que tengamos que utilizarlo. Una forma alternativa de resolver el problema es el siguiente: necesitamos ver por lo menos un trébol en nuestras cinco cartas. Consideremos entonces cinco casos, dependiendo de la cantidad de tréboles que veamos. Si deseamos ver solamente un trébol, entonces las otras cuatro cartas no son tréboles. En este caso, hay $C^1_{13} \cdot C^4_{39}$ maneras de hacer esto (de entre trece tréboles hay que escoger solamente uno, y de nuestras 39 cartas restantes que no tienen tréboles, hay que escoger cuatro). Si deseamos ver solamente dos tréboles, entonces hay $C^2_{13} \cdot C^3_{39}$ maneras de realizar esto (de entre trece tréboles hay que escoger dos, y de nuestras 39 cartas restantes hay que escoger tres). Si deseamos ver solamente tres tréboles, la respuesta es $C^3_{13} \cdot C^2_{39}$, si deseamos ver solamente cuatro tréboles, entonces hay $C^4_{13} \cdot C^1_{39}$ resultados. Si nuestras cinco cartas han de ser tréboles, entonces hay $C^5_{13} \cdot C^0_{39}$ resultados. Como los resultados obtenidos en cada caso son exclusivos, por la Regla de la Suma, el número buscado es

$$C^1_{13} \cdot C^4_{39} + C^2_{13} \cdot C^3_{39} + C^3_{13} \cdot C^2_{39} + C^4_{13} \cdot C^1_{39} + C^5_{13} \cdot C^0_{39} = \sum_{i=1}^{5} C^i_{13} \cdot C^{5-i}_{39} =$$

$$= (13 \times 82,251) + (78 \times 9,139) + (286 \times 741) + (715 \times 39) + (1,287 \times 1) = 2,023,203,$$

justo el que obtuvimos al principio. Si en lugar de cinco cartas, deseamos sacar diez y queremos que al menos unas de ellas sea un trébol, entonces imitando el procedimiento que acabamos de mostrar, la respuesta será

$$\sum_{i=1}^{10} C^i_{13} \cdot C^{10-i}_{39},$$

número que ha de coincidir con $C^{10}_{52} - C^{10}_{39}$ (al número de maneras de sacar 10 de las 52 cartas, le quitamos el número de maneras de no sacar un trébol en nuestras 10 cartas). □

Ejemplo 6.12. Supongamos que una caja contiene 7 bolas: 3 rojas, 2 azules y 2 blancas. Seleccionemos de forma aleatoria tres bolas de dicha caja. Buscamos el número de formas de obtener al menos dos bolas rojas. Para resolver el problema, vamos a determinar primero el número de formas en que 2 de las tres bolas seleccionadas son rojas. Como contamos con 3 bolas rojas y hemos de escoger 2 de ellas, el número de formas de realizar esto es C_3^2. La bola restante no ha de ser roja y es cualquiera de las 4 bolas que no son rojas (las 2 azules y las 2 blancas). Por la Regla del Producto, hay $C_3^2 \cdot 4 = 12$ formas de obtener justo 2 bolas rojas. Ahora bien, el número de formas de obtener las tres bolas rojas, es $C_3^3 = 1$ así que, por la Regla de la Suma, el número que buscamos es $12 + 1 = 13$. □

Decimos que un *número combinatorio* es un número de la forma C_n^m, donde $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $m \leq n$. Terminamos la sección con el siguiente resultado teórico, que indica un forma especial de multiplicación de dos números combinatorios.

Proposición 6.13. *Para cada $k, m, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de modo que $m + k \leq r$, tenemos que*

$$C_{m+k}^k \cdot C_r^{m+k} = C_r^m \cdot C_{r-m}^k. \tag{12}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} C_{m+k}^k \cdot C_r^{m+k} &= \frac{(m+k)!}{k![(m+k)-k]!} \cdot \frac{r!}{(m+k)![r-(m+k)]!} = \frac{r!}{m!} \cdot \frac{1}{k!(r-m-k)!} = \\ &= \frac{r!}{m!(r-m)!} \cdot \frac{(r-m)!}{k!(r-m-k)!} = C_r^m \cdot C_{r-m}^k. \end{aligned}$$

□

7. El Teorema del Binomio

Supongamos que el conjunto A tiene n elementos. Notemos que al considerar un subconjunto B de A con m elementos, entonces consciente o incoscientemente también estamos considerando un subconjunto de A con $n-m$ elementos, precisamente $A-B$, el complemento de los elementos de B. Por hay tantos subconjuntos de A con m elementos, como subconjuntos de A con $n-m$ elementos o, en símbolos,

$$C_n^m = C_n^{n-m}. \tag{13}$$

Podemos comprobar algebraicamente la igualdad (13) como sigue:

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = C_n^m.$$

En el siguiente ejemplo vemos una aplicación de la fórmula (13).

Ejemplo 7.1. Retomemos el Ejemplo 5.15, en el que contamos el número de trayectorias en el plano cartesiano, del punto $a = (2, 1)$ al punto $b = (7, 4)$. Por trayectoria de a a b entendemos una sucesión de escalones individuales que, partiendo de a, van una unidad hacia la derecha (D) o una unidad hacia arriba (A), hasta terminar en b. Como ya indicamos, cada trayectoria de a a b necesita 5 movimientos horizontales a la derecha y 3 movimientos verticales hacia arriba. Por (13), encontrar un subconjunto de I_8 con 5 elementos, es lo mismo que encontrar un subconjunto de I_8 con 3 elementos. Un subconjunto de I_8 con 5 elementos, puede verse como la cantidad de movimientos hacia la derecha que debemos considerar en la trayectoria de a a b. Por tanto, el número de trayectorias de a a b es

$$C_8^5 = \frac{8!}{5!3!} = 56,$$

como vimos en el Ejemplo 5.15, en donde razonamos el problema como una permutación con repetición de dos objetos con multiplicidades 5,3, para aplicar luego el Teorema 5.13. □

En el siguiente ejemplo, usamos trayectorias que van del origen a un punto de $\mathbb{R}^2$, para así dar una interpretación geométrica de las combinaciones de n en m.

Ejemplo 7.2. Consideremos en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, las poligonales $P_0P_1 \cdots P_m$ con las siguientes propiedades:

1) para cada $i \in I_m \cup \{0\}$, P_i es un punto de $\mathbb{R}^2$;

2) para toda $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, P_iP_{i+1} es el segmento de recta de P_i a P_{i+1}; más aún, si las coordenadas de P_i son (x, y), entonces las coordenadas de P_{i+1} son $(x+1, y)$ o bien $(x, y+1)$.

De acuerdo con 2), para cada $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, el segmento P_iP_{i+1} es de longitud uno y paralelo a uno de los ejes coordenados. La poligonal $P_0P_1 \cdots P_m$ resulta ser una trayectoria del punto P_0 al punto P_m, con las condiciones que indicamos en los Ejemplos 5.15 y 7.1. Diremos que la trayectoria $P_0P_1 \cdots P_m$ de P_0 a P_m es de longitud m. Vamos a demostrar que:

(•) El número de trayectorias de longitud m, que parten del origen, es 2^m. Más aún, para cada $n, k \in \mathbb{N}$, el número de trayectorias que parten del origen y terminan en el punto (n, k) es C_{n+k}^n.

Sea $P_0P_1 \cdots P_m$ una trayectoria de longitud m tal que $P_0 = (0, 1)$. Tenemos dos maneras de elegir el punto P_1, a saber $P_1 = (1, 0)$ o bien $P_1 = (0, 1)$. Una vez elegido P_1, volvemos a tener dos maneras para elegir a P_2 y así sucesivamente. Entonces, por la Regla del Producto, tenemos 2^m maneras de construir la trayectoria $P_0P_1 \cdots P_m$. Esto prueba la primera parte de (•).

Para probar la segunda parte, sean $n, k \in \mathbb{N}$ y $P_0P_1 \cdots P_m$ una trayectoria tal que $P_0 = (0, 0)$ y $P_m = (n, k)$. Como vimos en los Ejemplos 5.15 y 7.1, cuando considerábamos trayectorias del punto $(2, 1)$ al punto $(7, 4)$, una trayectoria de P_0 a P_m necesita de n movimientos horizontales a la derecha y k movimientos verticales hacia arriba, pues dado el punto P_i, resulta que la abscisa o bien la ordenada de P_{i+1} es una unidad mayor a la correspondiente de P_i. Esto significa que $m = n + k$. Por (13), encontrar un subconjunto de I_{n+k} con n elementos, es lo mismo que encontrar un subconjunto de I_{n+k} con k elementos. Un subconjunto de I_{n+k} con n elementos, puede verse como la cantidad de movimientos hacia la derecha que debemos considerar en la trayectoria de P_0 a P_m. Por tanto, el número de trayectorias de P_0 a P_m es C^n_{n+k}.

Supongamos ahora que $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ son tales que $0 \leq m \leq n$. Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $n = m + k$. Entonces $C^m_n = C^m_{m+k}$ y, por ($\bullet$), el número C^m_n corresponde a la cantidad de trayectorias del punto $(0,0)$ al punto (m,k). Como $k = n - m$, tenemos la siguiente interpretación geométrica de las combinaciones n en m:

($\bullet\bullet$) Sean $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $0 \leq m \leq n$. Geométricamente, una combinación de n en m es una trayectoria en $\mathbb{R}^2$ de $(0,0)$ a $(m, n-m)$.

$\square$

El siguiente resultado se conoce como el Teorema de Pascal.

Teorema 7.3. (Teorema de Pascal). *Si* $m, n \in \mathbb{N}$ *y* $m \leq n-1$, *entonces*

$$C^{m-1}_{n-1} + C^m_{n-1} = C^m_n. \tag{14}$$

Demostración. Como $n - m \geq 1$, tenemos que

$$C^{m-1}_{n-1} + C^m_{n-1} = C^m_{n-1} + C^{m-1}_{n-1} = \frac{(n-1)!}{m!(n-1-m)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-1-(m-1))!} =$$
$$= \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} = \frac{(n-1)!(n-m)}{m!(n-m)(n-m-1)!} + \frac{(n-1)!m}{m(m-1)!(n-m)!} =$$
$$\frac{(n-1)!(n-m)}{m!(n-m)!} + \frac{(n-1)!m}{m!(n-m)!} = \frac{(n-1)!(n-m) + (n-1)!m}{m!(n-m)!} =$$
$$\frac{(n-1)!(n-m+m)}{m!(n-m)!} = \frac{(n-1)!(n)}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C^m_n.$$

$\square$

Del Teorema de Pascal se sigue que

$$C^{m-1}_n + C^m_n = C^m_{n+1} \quad \text{para cada } m, n \in \mathbb{N} \text{ con } m \leq n. \tag{15}$$

Una prueba combinatoria de (15) puede realizarse como sigue: sea

$$A = \{x, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

un conjunto con $n+1$ elementos. Tomemos $m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$. Entonces C^m_{n+1} es el número de subconjunto de A con m elementos. Si B es uno de tales subconjuntos, entonces $x \in B$ o bien $x \notin B$. Por tanto, por la Regla de la Suma, la cantidad de subconjuntos de A con m elementos, es igual al número de subconjuntos de A con m elementos que tienen a x, más el número de subconjuntos de A con m elementos y que no tienen a x. Sea C un subconjunto de A con m elementos y tal que $x \in C$. Como C ha de tener m elementos y uno de ellos es x, hay C^{m-1}_n maneras de escoger al resto de los elementos de C. Entonces hay C^{m-1}_n subconjuntos de A con m elementos y que tienen a x. Ahora bien, si $x \notin C$, entonces $C \subset \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y, como C ha de tener m elementos, hay C_n^m maneras de elegir a los elementos de C. Por tanto hay C_n^m subconjuntos de A con m elementos y que no tienen a x. Esto prueba (15).

Tomemos ahora $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$ de modo que $m \leq n$. Sabemos que C_n^m es un número natural pues es justo el número de subconjuntos con m elementos que tiene un conjunto con n elementos. Ahora bien, si sólo pensamos que C_n^m es la fracción

$$\frac{n!}{m!(n-m)!},$$

podemos usar el Teorema de Pascal para probar, por inducción sobre n que C_n^m es un número natural. Si $n = 1$ entonces $m = 0$ o bien $m = 1$. En el primer caso $C_1^0 = \frac{1!}{0!1!} = 1$ es un número natural y, en el segundo caso, $C_1^1 = \frac{1!}{1!0!} = 1$ también es un número natural. Supongamos que para $n-1 \geq 0$ tenemos que C_{n-1}^m es un número natural para toda $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $m \leq n-1$. Mostremos que C_n^m es un número natural para toda $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $m \leq n$. Sea pues $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $m \leq n$. Si $m = 0$, entonces

$$C_n^m = C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = v\frac{n!}{n!} = 1$$

es un número natural. Si $m = n$, entonces

$$C_n^m = C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

es un número natural. Supongamos ahora que $1 \leq m \leq n-1$. Entonces $0 \leq m-1 \leq n-1$ y, por hipótesis de inducción, C_{n-1}^m y C_{n-1}^{m-1} son números naturales. Luego, por el Teorema de Pascal, $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ es la suma de dos números naturales y, por tanto, un número natural.

A los coeficientes del desarrollo de $(a+b)^n$, con a y b números reales, se les llama *coeficientes binomiales* debido al siguiente resultado, conocido como el Teorema del Binomio

Teorema 7.4. (Teorema del Binomio). *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i.$$

Demostración. Notemos que la suma de los exponentes $n-i$ e i en cada expresión $a^{n-i}b^i$ es n. Además, desarrollando la sumatoria, tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n. \quad (16)$$

Vamos a dar la prueba por inducción sobre n. Para $n = 0$ tenemos que $(a+b)^0 = 1$, mientras que

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i = \sum_{i=0}^{0} C_0^i a^{0-i} b^i = C_0^0 a^{0-0} b^0 = 1,$$

por lo que el resultado se cumple para $n = 0$. Ahora supongamos que el resultado se cumple para $n = k$. Luego

$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^{k-i} b^i.$$

Para mostrar que el resultado se cumple para $n = k+1$, vamos a admitir que $C_k^{-1} = 0$. Recordemos que $C_k^{k+1} = 0$ (un conjunto con k elementos posee cero subconjuntos con $k+1$ elementos). Entonces

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = (a+b)\left(\sum_{i=0}^{k} C_k^i a^{k-i} b^i\right) =$$
$$a\left(\sum_{i=0}^{k} C_k^i a^{k-i} b^i\right) + b\left(\sum_{i=0}^{k} C_k^i a^{k-i} b^i\right) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^{k+1-i} b^i + \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^{k-i} b^{i+1}.$$

Como $C_k^{k+1} = 0$, tenemos que

$$\sum_{i=0}^{k} C_k^i a^{k+1-i} b^i = \sum_{i=0}^{k+1} C_k^i a^{k+1-i} b^i$$

y, como estamos admitiendo que $C_k^{-1} = 0$,

$$\sum_{i=0}^{k} C_k^i a^{k-i} b^{i+1} = \sum_{i=1}^{k+1} C_k^{i-1} a^{k+1-i} b^i = \sum_{i=0}^{k+1} C_k^{i-1} a^{k+1-i} b^i.$$

Además, por (15), $C_k^i + C_k^{i-1} = C_{k+1}^i$ para cada $i, n \in \mathbb{N}$ con $i \leq n$. Por otro lado,

$$C_k^0 + C_k^{-1} = 1 + 0 = 1 = C_{k+1}^0 \quad \text{y} \quad C_k^{k+1} + C_k^k = 0 + 1 = 1 = C_{k+1}^{k+1}.$$

Luego,

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^{k+1-i} b^i + \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^{k-i} b^{i+1} = \sum_{i=0}^{k+1} C_k^i a^{k+1-i} b^i + \sum_{i=0}^{k+1} C_k^{i-1} a^{k+1-i} b^i =$$
$$\sum_{i=0}^{k+1} (C_k^i + C_k^{i-1}) a^{k+1-i} b^i = (C_k^0 + C_k^{-1}) a^{k+1} b^0 + \left(\sum_{i=1}^{k} (C_k^i + C_k^{i-1}) a^{k+1-i} b^i\right) +$$
$$+ (C_k^{k+1} + C_k^k) a^0 b^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} b^0 + \left(\sum_{i=1}^{k} C_{k+1}^i a^{k+1-i} b^i\right) + C_{k+1}^{k+1} a^0 b^{k+1} =$$
$$= \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i a^{k+1-i} b^i.$$

En otras palabras,

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i a^{k+1-i} b^i.$$

Esto muestra que el resultado se cumple para $n = k+1$, y la demostración termina.
$\square$

Corolario 7.5. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que*

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n \quad y \quad C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

Demostración. Si $a = b = 1$ entonces, por el Teorema del Binomio,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i = \sum_{i=0}^{n} C_n^i = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

Supongamos ahora que $a = 1$ y $b = -1$. Entonces, por el Teorema del Binomio,

$$0 = (1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

□

Consideremos ahora, en el desarrollo de $(a+b)^n$, el sumando $C_n^i a^{n-i} b^i$. Como ya indicamos, la suma de los exponentes de a y b es n. Ademas podemos pensar que $a^{n-i} b^i$ es una palabra que tiene i letras b y $n-i$ letras a. Vamos a calcular el número de formas en que podemos elegir n letras entre a y b, de las cuales i de ellas deben ser b (esto obliga que las $n-i$ restantes han de ser letras a). Como el orden para elegir las i letras b no importa, la respuesta es C_n^i, justo el coeficiente de $C_n^i a^{n-i} b^i$. Así pues, si con las letras a y b hemos de formar palabras de n letras, la fórmula (16) puede leerse como sigue: el número de palabras que tienen 0 letras b por la expresión $a^n b^0$, más el número de palabras que tienen 1 letra b por la expresión $a^{n-1} b^1$, más el número de palabras que tienen 2 letras b por la expresión $a^{n-2} b^2$ y, así sucesivamente, hasta el número de palabras que tienen n letras b por la expresión $a^0 b^n$.

Ejemplo 7.6. Del Teorema del Binomio se sigue que el coeficiente de $x^5 y^2$ en el desarrollo de $(x+y)^7$ es $C_7^5 = \frac{7!}{5!2!} = 21$. Consideremos ahora $(2a - 3b)^7$. Queremos saber el coeficiente de $a^5 b^2$. Hagamos $x = 2a$ y $y = -3b$. Entonces

$$(2a - 3b)^7 = (x+y)^7 \quad \text{y} \quad a^5 b^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^5 \left(\frac{-y}{3}\right)^2 = \frac{x^5 y^2}{2^5 (-3)^2}.$$

Por tanto $x^5 y^2 = 2^5 (-3)^2 a^5 b^2$. Por el Teorema del Binomio, el coeficiente de $x^5 y^2$ en el desarrollo de $(x+y)^5$ es $C_7^5 = 21$. Luego, el coeficiente de $a^5 b^2$ en el desarrollo de $(2a - 3b)^7$ es $21(2)^5(-3)^2$. □

Supongamos que A es un conjunto con n elementos. En la Proposición 5.21, probamos que el conjunto potencia de A, $\mathcal{P}(A)$, tiene 2^n elementos. Dada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, A posee C_n^i subconjuntos con i elementos. Luego, por la Regla de la Suma y el Corolario 7.5, $\mathcal{P}(A)$ tiene

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

elementos. Una forma alternativa de obtener esto es la siguiente: sea C un subconjunto de A. Para cada $x \in A$ hay dos opciones con respecto a C, a saber: $x \in C$ o bien $x \notin C$. Como tenemos n elementos en A y cada uno de ellos produce dos opciones con respecto a C, por la Regla del Producto, hay $2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$ opciones para elegir a C. Entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

El siguiente resultado generaliza el Teorema del Binomio y se conoce como el Teorema Multinomial.

Teorema 7.7. (Teorema Multinomial). *Si $n, k \in \mathbb{N}$, entonces en el desarrollo de*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n,$$

el coeficiente de $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \cdots x_k^{n_k}$ es

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!},$$

donde, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, tenemos que n_i es un entero tal que $0 \leq n_i \leq n$ y $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

Demostración. El coeficiente de $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \cdots x_k^{n_k}$ es igual al número de maneras en que podemos formar, con las letras $x_1, x_2, \ldots, x_k$, una palabra de n letras de las cuales n_1 han de ser letras x_1, n_2 han de ser letras x_2, y así sucesivamente, n_k han de ser letras x_k. Para elegir a x_1 tenemos $C_n^{n_1}$ formas. Una vez que escogimos las n_1 letras x_1, nos quedan $n - n_1$ lugares para escoger n_2 letras x_2. Esto se puede lograr de $C_{n-n_1}^{n_2}$ maneras. Ya que escogimos las n_1 letras x_1 y las n_2 letras x_2, nos quedan $n - n_1 - n_2$ lugares para escoger n_3 letras x_3. Esto se puede lograr de $C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$ maneras, y así sucesivamente. Por tanto, el coeficiente buscado es

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdots C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} =$$
$$= \frac{n!(n-n_1)!(n-n_1-n_2)!(n-n_1-n_2-n_3)! \cdots (n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1})!}{n_1! n_2! \cdots n_k!(n-n_1)!(n-n_1-n_2)!(n-n_1-n_2-n_3)! \cdots (n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1})!} =$$
$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

□

La expresión

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!},$$

que corresponde al número de permutaciones con repetición de k objetos con multiplicidades $n_1, n_2, \ldots, n_k$ (donde la suma de dichas multiplicidades es n), suele denotarse como $C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ y se llama el *coeficiente multinomial*, por aparecer como coeficiente en el desarrollo de $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$. Así pues

$$C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

Como indicamos en la prueba del Teorema 7.7, $C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ es el número de formas de itroducir n objetos distintos en k cajas distintas, de manera que en cada una de esas cajas hay n_i objetos.

Vamos a escribir, para $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $m \leq n$, $\binom{n}{m}$ en lugar de C_n^m. Estos números se pueden acomodar en lo que se conoce como el *triángulo de Pascal*:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}$$

Cada renglón tiene los coeficientes en el desarrollo del binomio $(a+b)^n$. Calculando los valores de $\binom{n}{m}$, el triángulo de Pascal toma la siguiente forma.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

El triángulo de Pascal tiene muchas propiedades interesantes, y muchas de ellas aparecen en el libro [9]. Por ejemplo, en dicho triángulo, cualquier diagonal que empiece en un extremo del triángulo, y de la longitud que sea, cumple la siguiente propiedad: la suma de todos los números que la integran se encuentran justo debajo del último de ellos, en la diagonal contraria. Por ejemplo

$$\binom{2}{0} + \binom{3}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2}$$

mientras que

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} = \binom{5}{3}.$$

En general

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k} \qquad (17)$$

y

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}. \tag{18}$$

Dejamos al lector la prueba de (17) y (18), utilizando la igualdad (15). Por el Corolario 7.5 y la igualdad (13), tenemos que

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^{n-i}. \tag{19}$$

Terminamos la sección con el siguiente resultado, que dejamos como ejercicio al lector.

Teorema 7.8. *Si $m, n \in \mathbb{N}$ y $m < n$, entonces*

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^{n-i} \cdot (n-i)^m = 0. \tag{20}$$

8. Combinaciones con Repetición

Cuando se permiten repeticiones, hemos visto que para n objetos distintos, una disposición de tamaño m de éstos objetos puede obtenerse de n^m formas, según la Proposición 5.3. El concepto análogo, en el caso de las combinaciones, es el que se da a continuación.

Definición 8.1. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Una **combinación con repetición** de n elementos tomados de m en m, es una lista de m elementos que pueden formarse con los n dados, sin tomar en cuenta el orden y de manera que dos elementos de dicha lista se pueden repetir. Al número total de ellas lo denotamos por CR_n^m.

Para simplificar la escritura, a las combinaciones con repetición de n elementos tomados de m en m, les llamaremos *combinaciones con repetición de n en m*. En la Subsección 2.4 dimos el concepto de sucesión finita, así como la manera de denotarla. En dichos términos, si A es un conjunto con n elementos, entonces una combinación de n en m es una sucesión finita $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ de elementos de A, inmune al orden. Esto significa que dos sucesiones finitas $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ y $(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ se consideran iguales si cada elemento de la primera lista aparece en la segunda, y cada elemento de la segunda lista aparece en la primera (en símbolos si para cada $i \in I_m$, existe $j \in I_m$ de modo que $s_i = t_j$ y, para cada $i \in I_m$ existe $j \in I_m$ tal que $t_i = s_j$). En otras palabras, las sucesiones finitas $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ y $(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ son diferentes si algún elemento de una de las dos no se encuentra en la otra. Ahora bien, al ser $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ una sucesión finita, sus elementos se pueden repetir.

Si $A = \{a, b, c\}$ y, prescindiendo de los paréntesis que denotan a una sucesión finita, ya comentamos que las ordenaciones con repetición de 3 en 2 de A, son

$$aa, \quad ab, \quad ac, \quad ba, \quad bb, \quad bc, \quad ca, \quad cb, \quad cc.$$

Las combinaciones con repetición de 3 en 2 de A son

$$aa, \quad ab, \quad ac, \quad bb, \quad bc, \quad cc.$$

Ahora ab y ba se consideran iguales, pues en las combinaciones con repetición no importa el orden. Si $n = 4$ y $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ entonces, retomando los paréntesis, $(a_1, a_1, a_2, a_2, a_3)$ es una combinación con repetición de 4 en 5, mientras que

$$(a_1, a_2, a_3), \quad (a_1, a_2, a_2) \ \text{ y } \ (a_1, a_1, a_3)$$

son combinaciones con repetición de 4 en 3.

En [3, p. 250] al número de combinaciones con repetición de n en m lo denotan con el símbolo $CR(n, m)$. Vamos a utilizar el mismo símbolo en el presente trabajo.

Hemos introducido tres conceptos combinatorios con el apellido "repetición": las permutaciones con repetición, las ordenaciones con repetición y las combinaciones con repetición. Conviene compararlos y, para esto, utilizaremos las letras k, m y n, así como un conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ con k elementos. Si tenemos k números naturales $n_1, n_2, \ldots, n_k$ de modo que

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n,$$

entonces un permutación con repetición de A, con multiplicidades $n_1, n_2, \ldots, n_k$, es una disposición lineal de los elementos de A en donde, para cada $i \in I_k$, el elemento a_i de A aparece n_i veces. Tal disposición lineal se puede pensar como una sucesión finita $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de elementos de A en donde, para cada $i \in I_k$, n_i términos de dicha sucesión finita son iguales. El apellido "repetición" que aparece en la noción de permutación con repetición, se aplica a la cantidad de veces (o multiplicidad) en que se repite cada elemento de A.

Una ordenación con repetición de k en m, la podemos pensar como una función $f\colon I_m \to A$, donde $|A| = k$. Como ya comentamos esto es lo mismo que considerar una sucesión finita $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ de elementos de A, en donde dos de ellos pueden ser iguales y el orden importa. El apellido "repetición" que aparece en la noción de ordenación con repetición, se aplica al hecho de que los elementos de A pueden repetirse.

Una combinación con repetición de k en m es una sucesión finita $s\colon I_m \to A$, donde $|A| = k$. Ya indicamos que la sucesión finita la podemos escribir como $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$. La diferencia ahora está en que la sucesión finita $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ es inmune al orden, cosa que no sucede con las ordenaciones con repetición de k en m. El apellido "repetición" que aparece en la noción de combinación con repetición, también se aplica al hecho de que los elementos de A pueden repetirse.

Retomemos las letras n y m que aparecen en la noción de combinación con repetición de n en m. Antes de dar una fórmula para CR_n^m, vamos a ver dos formas alternativas de considerar a las combinaciones con repetición de n en m. Para explicar la primera forma, sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto con n elementos. Consideremos todos los monomios de la forma

$$a_1^{y_1} a_2^{y_2} \cdots a_n^{y_n}, \quad \text{donde } y_i \geq 0 \text{ para cada } i \in I_n. \tag{21}$$

Para toda $i \in I_n$, podemos pensar que el elemento a_i de A aparece y_i veces, para construir el monomio (21). El siguiente resultado es fácil de probar.

Proposición 8.2. *El problema de encontrar el número de combinaciones con repetición de n en m, es equivalente al de encontrar el número de monomios de la forma* (21)*.*

En [8, p. 19] se calcula el número de monomio de la forma (21). Pudimos haber dicho, si así nos convenía, que una combinación con repetición de n en m es un monomio de la forma (21). En el siguiente resultado vemos la segunda forma de considerar las combinaciones con repetición de n en m.

Proposición 8.3. *El problema de encontrar el número de combinaciones con repetición de n en m, es equivalente al de encontrar el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m, \qquad \textit{donde } x_i \geq 0 \textit{ para cada } 1 \leq i \leq n. \tag{22}$$

Demostración. Sean $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto con n elementos y

$$(s_1, s_2, \ldots, s_m)$$

una sucesión finita en A. Para cada $i \in I_n$ sea y_i el número de veces que aparece el elemento a_i de A en $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$. Entonces $0 \leq y_i \leq m$, para toda $i \in I_n$. Además

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = m$$

pues, contando repeticiones, $s(I_m)$ tiene m elementos. Notemos que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ es una solución entera no negativa de la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$. Con esto hemos demostrado que cada combinación con repetición de n en m produce una solución entera no negativa de la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$.

Consideremos ahora una solución entera no negativa $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$. Sea $s\colon I_m \to A$ la sucesión finita cuyos primeros y_1 términos son a_1, sus siguientes y_2 términos son a_2 y así sucesivamente, sus últimos y_n términos son a_n. Esquemáticamente, s es la sucesión finita

$$(\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{y_1}, \underbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2}_{y_2}, \ldots, \underbrace{a_n, a_n, \ldots, a_n}_{y_n}).$$

Como $y_1 + y_2 + \ldots + y_m$, sucede que s es una combinación con repetición de n en m. Hemos probado, con esto, que cada solución entera no negativa de la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ produce una combinación con repetición de n en m. Luego, el número de combinaciones con repetición de n en m, es igual al número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$. $\square$

La correspondencia que hemos establecido en la prueba de la Proposición 8.3 hace ver que, de convenir, podemos decir que una combinación con repetición de n en m es una solución entera no negativa de la ecuación que aparece en (22).

Vamos ahora a calcular el número de soluciones enteras no negativas de una ecuación como la que aparece en (22).

Ejemplo 8.4. Determinemos el número de soluciones enteras de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \qquad \text{donde } x_i \geq 0 \text{ para cada } 1 \leq i \leq 4.$$

Con respecto a la Proposición 8.3, $n = 4$ y $m = 7$. Una solución de la ecuación lineal dada es $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$ y $x_4 = 1$, la cual se considera diferente a la solución $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$ y $x_4 = 3$, aunque se utilicen los mismos cuatro dígitos 0,1,3,3 en otro orden. El problema lo podemos pensar como si quisiéramos repartir 7 monedas entre cuatro personas y la solución $x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 0$ y $x_4 = 1$ significa que a la primera persona le hemos dado tres monedas, a la segunda otras tres monedas, nada a la tercer persona y una moneda a la cuarta persona. De esta manera, cada solución entera y no negativa de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7,$$

corresponde a una selección con repetición de 10 símbolos, 7 del tipo $\times$ y 3 del tipo $|$. Por ejemplo,

$$\times\times\times|\times\times\times||\times$$

es una de tales representaciones, la cual corresponde a la solución $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$ y $x_4 = 1$. El problema entonces se reduce a determinar el número de disposiciones lineales de 10 símbolos en donde 7, el número de monedas, son del tipo $\times$ y $3 = 4 - 1$, el número de personas menos uno, son del tipo $|$. Por el Teorema 5.13, la respuesta es

$$\frac{10!}{7!3!} = C^7_{10} = \frac{10(9)(8)(7!)}{7!3(2)} = 5(3)(8) = 120.$$

Luego, $CR^7_4 = C^7_{4+7-1} = C^7_{10} = 120$. □

Consideremos ahora el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.5. Supongamos que m estudiantes del ITAM han de elegir entre n objetos. Por ejemplo siete estudiantes han de elegir entre comer una hamburguesa (h), un taco (t), un sandwich (s) o un hot dog (d). Queremos determinar el número de artículos que se consumieron y no el orden en que se adquirieron. Una posibilidad es que los siete estudiantes eligieron una hamburguesa. Separemos los artículos h, t, s y d con el símbolo $|$ y las personas con el símbolo $\times$. Entonces

$$\times\times|\times\times|\times\times|\times$$

significa que las primeras dos personas eligieron una hamburguesa, las otras dos un taco, las otras dos un sandwich y la última persona un hot dog. Como tenemos cuatro artículos (a saber h, t, s y d), hay que usar tres símbolos $|$ y también hay que usar siete símbolos $\times$ pues hay siete personas. Partiendo de la selección $\times\times|\times\times|\times\times|\times$, moviendo los símbolos $|$ podemos obtener otra selección como

$$||\times\times\times\times\times|\times\times,$$

la cual significa que no se eligieron hamburguesas ni tacos, que cinco personas eligieron un sandwich y dos un hot dog. El problema entonces se reduce a determinar el número de disposiciones lineales de 10 símbolos, en donde 7 son del tipo $\times$ y 3 = 4 - 1 del tipo $|$. Por el Teorema 5.13, la respuesta es

$$\frac{10!}{7!3!} = C_{10}^{7} = \frac{10(9)(8)(7!)}{7!3(2)} = 5(3)(8) = 120.$$

Luego, $CR_4^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = 120$, como en el ejemplo anterior. $\square$

En general, cuando queremos elegir, *con repetición*, m de n objetos distintos (por ejemplo, que las siete personas elijan entre los cuatro objetos distintos h, t, s y d), estamos considerando todas las disposiciones lineales de $n+m-1$ símbolos, en donde m son del tipo $\times$ y $n-1$ son del tipo $|$. Por el Teorema 5.13, el cual cuenta las permutaciones con repetición de dos objetos con multiplicidades m y $n-1$, el número de combinaciones con repetrición de n en m es

$$C_{n+m-1}^{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}. \tag{23}$$

Escribamos esto como una proposición.

Proposición 8.6. *Si* $m, n \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$CR_n^m = C_{n+m-1}^{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Notemos que

$$CR_m^n = C_{m+n-1}^{n} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}.$$

Luego CR_n^m y CR_m^n son, en general, números distintos. Es por tanto importante, en un problema de combinaciones con repetición, tener claro quién es n y quién m. Puede suceder que m sea menor o igual a n o bien que m sea mayor que n. Si $n \in \mathbb{N}$ y $m = 0$, tenemos que $C_{n+m-1}^{m} = C_{n-1}^{0} = 1$. Por otra parte, el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m = 0$ es uno, justo aquella en la que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Podemos admitir, por la Proposición 8.3, que la noción de combinación con repetición de n en m, también vale cuando $m = 0$, en cuyo caso definimos

$$CR_n^0 = 1.$$

En tal situación, el cáculo de CR_n^0 también lo podemos efectuar con la fórmula C_{n+m-1}^{m}, cambiando m por 0.

Proposición 8.7. *Dados dos números naturales n y m, los siguientes problemas son equivalentes:*

1) *El número de soluciones enteras no negativas de la ecuación*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m, \qquad \textit{donde } x_i \geq 0 \textit{ para cada } 1 \leq i \leq n.$$

2) *El número de combinaciones con repetición de n en m, es decir, $CR_n^m = C_{n+m-1}^{m}$.*

3) *El número de selecciones con repetición, de tamaño m de una colección de tamaño n.*

4) *El número de formas en que m objetos idénticos se pueden introducir en n cajas distintas.*

Demostración. La equivalencia entre las afirmaciones 1) y 2) es la Proposición 8.3. La afirmación 3) es una reformulación de la 2). Si m objetos idénticos se introducen en n cajas distintas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ entonces, para cada $i \in I_n$ sea x_i el número de objetos que se introdujeron en la caja C_i. Luego $0 \leq x_i \leq m$ y

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m.$$

Por tanto, una introducción de m objetos idénticos en n cajas distintas produce una solución entera no negativa de la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$. A la inversa, si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ es una solución entera no negativa de la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ entonces, para cada $i \in I_n$, pensemos que la caja C_i posee y_i objetos. Se ha producido entonces una forma de introducir m objetos idénticos en n cajas distintas. Esto prueba que las afirmaciones 4) y 1) son equivalentes. Con todo, tenemos que las afirmaciones 1), 2), 3) y 4) son equivalentes. □

Como las afirmaciones 2) y 4) son válidas

d) si $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $CR_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$ cuenta el número de maneras en que m objetos idénticos se introducen en n cajas distintas.

En el proceso descrito en d), bien pueden quedar cajas vacías y una caja no vacía puede tener más de un objeto. Como ya indicamos, el problema indicado en d), equivale a la afirmación 1) en donde las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ toman valores mayores o iguales que cero. Cuando una de dichas incógnitas toma el valor 0, entendemos que una de las n cajas quedó vacía. Si el número de maneras de introducir m objetos idénticos en n cajas distintas, es el mismo que el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$, entonces el número de maneras de introducir m objetos idénticos en n cajas distintas, de modo que no queden vacías, es el mismo que el número de soluciones enteras positivas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m, \qquad \text{donde } x_i \geq 1 \text{ para cada } 1 \leq i \leq n.$$

El hecho de que cada incógnita tome valores mayores o iguales que 1, indica que cada una de las caja tiene por lo menos un elemento. En el siguiente ejemplo, resolvemos el problema anterior en términos de la ecuación lineal indicada.

Ejemplo 8.8. Para $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$, vamos a determinar el número de soluciones enteras positivas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m, \qquad \text{donde } x_i \geq 1 \text{ para cada } 1 \leq i \leq n.$$

Hagamos $y_i = x_i - 1$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces nuestro problema equivale a determinar el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = m - n, \qquad \text{donde } y_i \geq 0 \text{ para cada } 1 \leq i \leq n.$$

Dicho número es, como ya sabemos,

$$CR_n^{m-n} = C_{n+(m-n)-1}^{m-n} = C_{m-1}^{m-n} = \frac{(m-1)!}{(m-n)![m-1-(m-n)]!} =$$
$$= \frac{(m-1)!}{(m-n)!(n-1)!} = \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!} = C_{m-1}^{n-1}.$$

Así pues, $C_{m-1}^{n-1} = C_{m-1}^{m-n}$ es el número de soluciones enteras positivas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m.$$

□

De esta manera,

e) si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n \leq m$, entonces $C_{m-1}^{n-1} = C_{m-1}^{m-n} = \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!}$ cuenta el número de maneras en que m objetos idénticos se introducen en n cajas distintas, de modo que no queden cajas vacías.

A modo de resumen, si m objetos se introducen en n cajas, entonces

1) cuando los m objetos son idénticos y las n cajas son distintas, tenemos lo siguientes casos:

   1.1) por la afirmación c) de la Sección 6, si $m \leq n$, entonces

   $$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

   cuenta el número de maneras en que m objetos idénticos se introducen en n cajas distintas, de modo que en cada caja hay a lo más un objeto;

   1.2) por la afirmación d),

   $$CR_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

   cuenta el número de maneras en que m objetos idénticos se introducen en n cajas distintas (pueden quedar cajas vacías y una caja no vacía puede tener más de un objeto);

   1.3) por la afirmación e), si $n \leq m$, entonces

   $$C_{m-1}^{n-1} = C_{m-1}^{m-n} = \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!}$$

   cuenta el número de maneras en que m objetos idénticos se introducen en n cajas distintas, de modo que no queden cajas vacías.

2) cuando los m objetos son distintos y las n cajas son distintas, tenemos los siguientes casos:

2.1) por la afirmación a) de la Subsección 5.1,

$$OR_n^m = n^m$$

cuenta el número de maneras en que m objetos distintos se introducen en n cajas distintas (pueden quedar cajas vacías y una caja no vacía puede tener más de un objeto);

2.2) si $m \leq n$, por la afirmación b) de la Subsección 5.2,

$$O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

cuenta el número de maneras en que m objetos distintos se introducen en las n cajas distintas, de modo que objetos distintos se introducen en cajas distintas (en cada caja hay a lo más un objeto);

2.3) en la afirmación f) de la Sección 10, contaremos el número de maneras en que m objetos distintos se introducen en n cajas distintas, de modo que no queden cajas vacías (Teorema 10.4).

En (25) daremos una fórmula para calcular el número de maneras en que m objetos distintos se introducen en n cajas idénticas. Cuando los m objetos y las n cajas son idénticos, no presentaremos una fórmula que calcule el número de formas en que los m objetos se introducen en n cajas. Para esto hay que hablar de las reglas de recurrencia, tema que aparece en el Capítulo 10 de [5].

En el siguiente ejemplo resolvemos el problema de introducir m objetos idénticos en n cajas distintas, de modo que cada caja tenga más de a_i objetos.

Ejemplo 8.9. Para $n, m \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq m$, vamos a determinar el número de soluciones enteras positivas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m, \qquad \text{donde } x_i > a_i \text{ para cada } 1 \leq i \leq n.$$

Hagamos $y_i = x_i - a_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces nuestro problema equivale a determinar el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = m - a_1 - a_2 - \cdots - a_n, \quad \text{donde } y_i \geq 1 \text{ para cada } 1 \leq i \leq n.$$

Dicho número es, por el Ejemplo 8.8, $C^{n-1}_{m-a_1-a_2-\cdots-a_n-1}$. □

Por la igualdad (13) de la Sección 7, tenemos que

$$C^m_{n+m-1} = C^{n-1}_{n+m-1}.$$

Terminamos la sección con los siguientes ejemplos, en donde las combinaciones con repetición juegan un papel importante.

Ejemplo 8.10. Se quieren repartir \$1,000 dólares entre cuatro personas A, B, C y D. La repartición ha de darse en cheques que sean múltiplos de \$100 dólares, y se admite que una persona no reciba cheque alguno. Por tanto los \$1,000 dólares los puede recibir la persona A. Como 1,000 tiene 10 múltiplos de 100, podemos pensar que tenemos 10 cheques, cada uno emitido por \$100 dólares, aunque al final emitamos los cheques por las cantidades adecuadas. Entonces tenemos 13 símbolos, 10 del tipo $\times$ y tres del tipo $|$. Una disposición como

$$\times | \times\times\times\times | \times | \times\times\times\times$$

significa que la persona A recibe un cheque de \$100 dólares, la persona B un cheque de \$400 dólares, la persona C un cheque de \$100 dólares y la persona D un cheque de \$400 dólares. Buscamos, por tanto, las combinaciones con repetición de 4 objetos (las cuatro personas) tomados de 10 en 10 (los 10 cheques). La respuesta es

$$CR_4^{10} = C_{4+10-1}^{10} = C_{13}^{10} = 286.$$

Supongamos que cada una de las cuatro personas recibe al menos un cheque de \$100 dólares. Una vez repartidos cuatro cheques de \$100, nos quedan seis cheques para repartir entre cuatro personas. Tenemos ahora 9 símbolos, 6 del tipo $\times$ y tres del tipo $|$. Una disposición como

$$|| \times\times | \times\times\times\times$$

significa que las personas A y B recibieron justo \$100 dólares cada una (nada adicional), que la persona C recibió \$300 dólares (\$200 adicionales) y la persona D recibió \$500 dólares (\$400 adicionales). El número de formas de realizar la repartición, son las combinaciones con repetición de 4 objetos tomados de 6 en 6. La respuesta es

$$C_{4+6-1}^{6} = C_9^6 = 84.$$

Supongamos que la persona A recibe al menos un cheque de \$500 dólares y que las personas B, C y D reciben al menos \$100 dólares. El número de formas de repartir el dinero, depende de lo que recibe la persona A. Si recibe exactamente \$500, entonces ya hay repartidos \$800 dólares (los 500 de la persona A y los 300 divididos entre las personas B, C y D). Entonces hay que repartir \$200 dólares entre tres personas. El número de maneras de realizar esto es $CR_3^2 = C_{3+2-1}^2$. De manera similar, si la persona A recibe \$600 dólares, entonces hay $CR_3^1 = C_{3+1-1}^1$ maneras de repartir el resto. Si A recibe \$700, entonces hay $CR_3^0 = C_{3+0-1}^0$ maneras de repartir el resto. Por la Regla de la Suma, la respuesta al problema planteado es

$$C_{3+2-1}^2 + C_{3+1-1}^1 + C_{3+0-1}^0 = C_4^2 + C_3^1 + C_2^0 = C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10.$$

□

Ejemplo 8.11. Si queremos introducir 10 canicas blancas idénticas en 6 cajas diferentes entonces, por 1.2), el número de maneras de realizar esto es $CR_4^{10} = C_{6+10-1}^{10} = 3,003$. □

Ejemplo 8.12. Ahora queremos calcular el número de términos en el desarrollo de $(w+x+y+z)^{10}$. Por el Teorema 7.7, cada término de dicho desarrollo tiene la forma

$$C_{10}^{n_1,n_2,n_3,n_4} w^{n_1} x^{n_2} y^{n_3} z^{n_4}$$

donde $n_i \geq 0$ para cada $i \in \{1,2,3,4\}$ y $n_1+n_2+n_3+n_4 = 10$. Por tanto, el número de términos en el desarrollo de $(w+x+y+z)^{10}$, coincide con el número de soluciones enteras de la ecuación $n_1+n_2+n_3+n_4 = 10$. Por la la Proposición 8.3, dicho número es $CR_4^{10} = C_{4+10-1}^{10} = 286$. Razonando de manera similar, el número de términos en el desarrollo de $(a+b)^n$ es $CR_2^n = C_{2+n-1}^n = C_{n+1}^n = n+1$. □

Ejemplo 8.13. Como ya hemos visto, el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10$$

es $CR_6^{10} = C_{6+10-1}^{10} = 3,003$. Vamos ahora a determinar el número de soluciones no negativas de la desigualdad

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 < 10.$$

Una manera de resolver esto es calcular, para cada $k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, el número de soluciones no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = k$$

y sumar los diez números obtenidos. Para cada k, la respuesta es

$$CR_6^k = C_{6+k-1}^k = C_{5+k}^k.$$

Por tanto, asignándole a k los valores entre cero y nueve y utilizando la igualdad (17), el número buscado es:

$$C_5^0 + C_6^1 + C_7^2 + C_8^3 + C_9^4 + C_{10}^5 + C_{11}^6 + C_{12}^7 + C_{13}^8 + C_{14}^9 = C_{15}^9 = 5,005.$$

Veamos una forma alternativa de resolver el problema. Para esto, recordemos que si a y b son números reales, entonces $a \leq b$ si y sólo si existe un número real $c \leq 0$ tal que $a+c=b$. Si $a<b$, entonces el número real c tal que $a+c=b$ es mayor que cero. Utilizando esto, la desigualdad

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 < 10$$

equivale a decir que existe $x_7 > 0$ tal que

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 10.$$

Haciendo $y_i = x_i$ para cada $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ y $y_7 = x_7 - 1$ este problema, a su vez, es equivalente a encontrar el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 = 9$$

el cual es $CR_7^9 = C_{7+9-1}^9 = C_{15}^9 = 5,005$. □

Ejemplo 8.14. Vamos a determinar el número de elementos del conjunto $I_{1,000}$ que tienen las propiedad de que la suma de sus dígitos es 5. El número 1,000 no satisface dicha propiedad, pues la suma de sus dígitos es 1. Consideramos entonces los números del 0 a 999. Pensaremos cada número de dicha lista, como un número de tres dígitos: 1 es 001, 2 es 002, 10 es 010, y así sucesivamente. Si las cifras de un número son $x_1x_2x_3$, entonces buscamos todos los números $x_1x_2x_3$ tales que $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ y $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. El número que buscamos es

$$CR_3^5 = C_{3+5-1}^5 = C_7^5 = 21.$$

□

9. Funciones Suprayectivas (Hacia la Fórmula)

Sea A un conjunto con n elementos. Recordemos que una ordenación con repetición de n en m, es una función de $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ en A. El número de funciones que hay de I_m en A es $OR_n^m = n^m$. Por otro lado, una ordenación de n en m, es una función inyectiva de I_m. El número de funciones inyectivas que hay de I_m en A es

$$O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Ahora estamos interesados en conocer el número de funciones suprayectivas que hay de I_m en A. En general, deseamos conocer el número de funciones suprayectivas que hay de un conjunto con m elementos (el dominio de las función) a un conjunto con n elementos (la imagen de la función). Notemos que si $m < n$ entonces, por la parte 2) de la Proposición 2.4, no existen funciones suprayectivas de I_m en A. Si $m = n$, por la Proposición 2.5, el número de funciones suprayectivas de I_m en A es igual al número de funciones inyectivas de I_m en A, el cual ya lo determinamos (es O_n^m). Si $n = 1$, entonces toda función de I_m en A es suprayectiva y, de hecho, hay sólo $OR_1^m = 1^m = 1$ función suprayectiva de I_m en A. Supondremos, por tanto que $1 < n < m$.

En lo siguientes dos ejemplos, vamos a calcular el número de funciones suprayectivas de I_m en A, primero cuando $|A| = 2$ y luego cuando $|A| = 3$.

Ejemplo 9.1. Supongamos que $A = \{a_1, a_2\}$. Notemos que las únicas funciones de I_3 en A que no son suprayectivas son las funciones constantes, y hay dos de ellas: mandar todos los elementos de I_3 a a_1 y mandar todos los elementos de I_3 a a_2. Entonces, el número de funciones suprayectivas de I_3 en A es igual al número de funciones de I_3 en A (que es $OR_2^3 = 2^3$) menos el número de funciones de I_3 en A que no son suprayectivas y, en este caso, dicho número coincide con el número de funciones constantes de I_3 en A, que es dos. Por tanto, hay $2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$ funciones suprayectivas de I_3 en A. En general, siguiendo el mismo razonamiento, el número de funciones suprayectivas de I_m en A es $2^m - 2$ (pensando que $m > 2$). □

Ejemplo 9.2. Ahora supongamos que $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. Buscamos el número de funciones suprayectivas de I_4 en A. Sabemos que hay $OR_3^4 = 3^4$ funciones de I_4 en A. Una función de I_4 en A que no sea suprayectiva, es una función de I_4 en B, donde B es un subconjunto propio de A. Si k es el número de funciones de I_4 en un subconjunto propio de A, entonces el número de funciones suprayectivas de I_4 en B es $3^4 - k$.

Vamos a resolver el problema de dos maneras. Consideremos primero el número de funciones suprayectivas de I_4 en un subconjunto de A con un sólo elemento. Notemos que A posee $C_3^1 = 3$ subconjuntos con justo un elemento, a saber, $\{a_1\}, \{a_2\}$ y $\{a_3\}$. Cada función de I_4 en uno de estos tres conjuntos es una función constante y, por tanto, suprayectiva. Tenemos entonces tres funciones suprayectivas de I_4 en un subconjunto de A con exactamente un elemento. Ahora vamos a contar el número de funciones suprayectivas de I_4 en un subconjunto de A con exactamente dos elementos. Notemos que A posee $C_3^2 = 3$ subconjuntos con justo dos elementos, a saber $\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}$ y $\{a_2, a_3\}$. Si B es un subconjunto de A con dos elementos entonces, por el Ejemplo 9.1, el número de funciones suprayectivas de I_4 en B es $2^4 - 2$. Luego, por la Regla del Producto, hay $3(2^4 - 2) = 3(14)$ funciones suprayectivas de I_4 en un subconjunto de A con exactamente dos elementos. Aplicando ahora la Regla de la Suma, hay $k = 3 + 3(2^4 - 2) = 3 + 3(14) = 3(15) = 45$ funciones de I_4 en un subconjunto propio de A. Por tanto, hay

$$3^4 - k = 3^4 - 45 = 81 - 45 = 36$$

funciones suprayectivas de I_4 en A. Siguiendo las mismas ideas, si $m > 3$, el número de funciones suprayectivas de I_m en A es

$$3^m - 3 - 3(2^m - 2) = 3^m - 3(2^m - 2 + 1) = 3^m - 3(2^m - 1) = 3^m - 3 \cdot 2^m + 3.$$

La fórmula anterior funciona incluso cuando $m = 3$, pues

$$3^3 - 3(2^3 - 1) = 27 - 3(7) = 6.$$

Además el número de funciones suprayectivas de I_3 en A es igual al número de funciones inyectivas de I_3 en A, el cual es $O_3^3 = \frac{3!}{(3-3)!} = 6$. Cuando $m = 2$, la fórmula da

$$3^2 - 3 \cdot 2^2 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$$

y cero es justo el número de funciones suprayectivas de I_2 en A. Si $m = 1$, la fórmula anterior da

$$3^1 - 3 \cdot 2^1 + 3 = 3 - 6 + 3 = 0$$

y cero es justo el número de funciones suprayectivas de I_1 en A. Por tanto, la fórmula

$$3^m - 3 \cdot 2^m + 3$$

es el número de funciones suprayectivas de I_m en A, para cualquier $m \in \mathbb{N}$.

Una manera alternativa de llegar al número calculado antes es la siguiente: el número de funciones de I_4 en un subconjunto de A con justo dos elementos es $OR_2^4 = 2^4$. Como hay $C_3^2 = 3$ subconjuntos de A con dos elementos, estamos tentados a decir que por la Regla del Producto, hay $C_3^2 \cdot OR_2^4 = 3 \cdot 2^4$ funciones de A en un subconjunto de A con justo dos elementos. Sin embargo, en dicho cálculo, estamos contando de más. Para ver esto, consideremos dos subconjuntos B y C de A con justo dos elementos.

Entonces $B \cap C$ tiene justo un elemento, digamos x. La función que cada elemento de I_4 lo manda a x la estamos contando dos veces, uno en el cálculo de las funciones de I_4 en B y otra en el cálculo de las funciones de I_4 en C. Como hay tres subconjuntos B, C y D de A con dos elementos, hay tres intersecciones a considerar: $B \cap C$, $B \cap D$ y $C \cap D$. Cada una de dichas intersecciones tiene un sólo elemento y hay tres funciones constantes que estamos contando dos veces. Por tanto, el número de funciones de I_4 en un subconjunto de A con dos elementos es $3 \cdot 2^4 - 3$. Luego, el número de funciones suprayectivas de I_4 en A es

$$3^4 - (3 \cdot 2^4 - 3) = C_3^3 \cdot 3^4 - C_3^2 \cdot 2^4 + C_3^1 \cdot 1^4 = 36.$$

Siguiendo las mismas ideas, cuando $m > 3$, el número de funciones suprayectivas de I_m en A es

$$C_3^3 \cdot 3^m - C_3^2 \cdot 2^m + C_3^1 \cdot 1^m = 3^m - 3 \cdot 2^m + 3. \tag{24}$$

La fórmula anterior es la que calculamos antes y que funciona incluso cuando $m \in \{1, 2, 3\}$. □

De (24) surge la siguiente conjetura. En la Sección 10 probaremos que es cierta.

Conjetura 9.3. *Sean A y B dos conjuntos finitos con m y n elementos, respectivamente. El número de funciones suprayectivas de A en B es*

$$\begin{aligned} C_n^n \cdot n^m - C_n^{n-1} \cdot (n-1)^m + C_n^{n-2} \cdot (n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-2} C_n^2 \cdot 2^m + C_n^1 \cdot 1^m = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^{n-k} \cdot (n-k)^m = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^{n-k} \cdot (n-k)^m. \end{aligned}$$

El cálculo de las funciones suprayectivas de un conjunto A con m elementos a un conjunto B con n elementos, coincide con el número de formas en que m objetos distintos se pueden introducir en n cajas distintas, de modo que no queden cajas vacías. Si las cajas son idénticas, entonces una distribución de estas n cajas idénticas (en donde no quedan cajas vacías), corresponde a $n!$ de estas distribuciones en los que las cajas son diferentes. Así, el número de formas en que podemos introducir m objetos distintos en n cajas idénticas, sin que queden cajas vacías, es

$$S(m, n) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^{n-k} \cdot (n-k)^m. \tag{25}$$

A $S(m, n)$ se le llama el *número de Stirling del segundo tipo.* Si A y B son conjuntos con m y n elementos, respectivamente, y $m \geq n$, entonces existen $n!S(m, n)$ funciones suprayectivas de A en B.

10. El Principio de Inclusión y Exclusión

En la presente sección vemos el principio de inclusión y exclusión. Motivamos dicho principio con un ejemplo. Es importante considerar, dados un conjunto finito A y una condición c, tanto al subconjunto A_1 de A de aquellos elementos que satisfacen la condición c, como al subconjunto A_2 de A de los que no satisfacen la condición c. Es claro que

$$|A_2| = |A| - |A_1|. \tag{26}$$

La fórmula (26), primero *incluye* el número de elementos de A y luego *excluye* el número de elementos de A_1. En otras palabras, primero incluimos $|A|$ y luego excluimos $|A_1|$.

10.1. Un Ejemplo

Comenzamos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.1. Supongamos que S representa un conjunto de 100 estudiantes del ITAM. Hagamos $N = 100$. Entonces $|S| = N = 100$. Supongamos que c_1 y c_2 son condiciones o propiedades que satisfacen los elementos de S, donde un elemento de S satisface c_1 si estudia Actuaría, mientras que un elemento de S satisface c_2 si estudia Ingeniería. Denotamos por $N(c_1)$ (respectivamente, por $N(c_2)$) al número de elementos de S que satisfacen la condición c_1 (respectivamente, c_2). Supongamos que 35 de los 100 elementos de S estudian Actuaría y que 30 estudian Ingeniería. Entonces

$$N(c_1) = 35 \quad \text{y} \quad N(c_2) = 30.$$

Vamos a denotar por $N(c_1c_2)$ al número de elementos de S que satisfacen las condiciones c_1 y c_2. Supongamos que 9 elementos de S estudian tanto Actuaría como Ingeniería. Entonces

$$N(c_1c_2) = 9.$$

Vamos a denotar por $N(\overline{c_1})$ (respectivamente, por $N(\overline{c_2})$) al número de elementos de S que no satisfacen la condición c_1 (respectivamente, c_2). Entonces $N(\overline{c_1})$ es el número de los 100 estudiantes que no estudian Actuaría y $N(\overline{c_2})$ es el número de los 100 estudiantes que no estudian Ingeniería. Luego, usando la fórmula (26),

$$N(\overline{c_1}) = N - N(c_1) = 100 - 35 = 65 \quad \text{y} \quad N(\overline{c_2}) = N - N(c_2) = 100 - 30 = 70.$$

Como hemos visto, la notación con barra significa no satisfacer la condición que está debajo de la barra. Por tanto, $N(c_1\overline{c_2})$ es el número de elementos de S que satisfacen c_1 pero no c_2 (es decir, que estudian Actuaría pero no Ingeniería), mientras que $N(\overline{c_1}c_2)$ es el número de elementos de S que satisfacen c_2 pero no c_1 (es decir, que estudian Ingeniería pero no Actuaría). Aplicando de nuevo la fórmula (26), tenemos que

$$N(c_1\overline{c_2}) = N(c_1) - N(c_1c_2) = 35 - 9 = 26 \;\; \text{y} \;\; N(\overline{c_1}c_2) = N(c_2) - N(c_1c_2) = 30 - 9 = 21.$$

Podemos también considerar $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2})$ y $N(\overline{c_1c_2})$. El primero significa el número de los 100 estudiantes que no satisfacen ni la condición c_1 ni la condición c_2 (es decir, que no estudian ni Actuaría ni Ingeniería), mientras que el segundo significa el número de los 100 estudiantes que no estudian tanto Actuaría como Ingeniería. Entonces, por (26),

$$N(\overline{c_1c_2}) = N - N(c_1c_2) = 100 - 9 = 91.$$

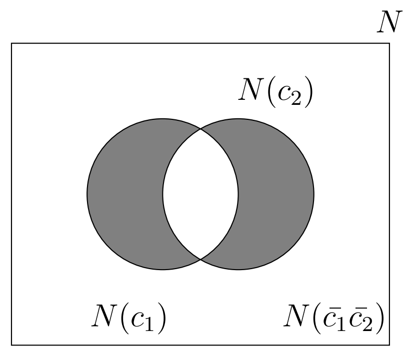
Como $N(\overline{c_1}) = N(\overline{c_1}c_2) + N(\overline{c_1}\ \overline{c_2})$, tenemos que

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}) = N(\overline{c_1}) - N(\overline{c_1}c_2) = 65 - 21 = 44.$$

Notemos también que

$$\begin{aligned} N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}) &= N(\overline{c_1}) - N(\overline{c_1}c_2) = [N - N(c_1)] - [N(c_2) - N(c_1c_2)] = \\ &= N - N(c_1) - N(c_2) + N(c_1c_2) = N - [N(c_1) + N(c_2)] + N(c_1c_2) = \\ &= 100 - [35 + 30] + 9 = 44. \end{aligned}$$

En el diagrama de Venn de abajo, el círculo de la izquierda representa $N(c_1)$, el círculo de la derecha es $N(c_2)$, la región sombreada izquierda es $N(c_1\overline{c_2})$ y la región sombreada derecha es $N(\overline{c_1}c_2)$. La intersección de los círculos es $N(c_1c_2)$, mientras que el complemento de la unión de los círculos es $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2})$.



El complemento de la intersección de los círculos es $N(\overline{c_1c_2})$. Como hemos visto, $N(\overline{c_1c_2})$ y $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2})$ no tienen por que ser iguales. El diagrama ilustra el hecho de que

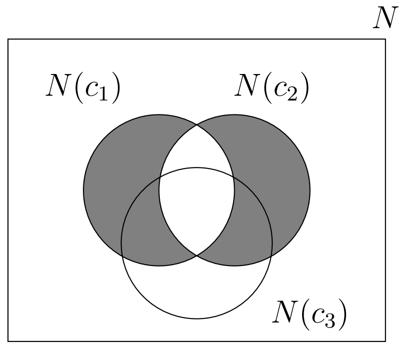
$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}) = N - [N(c_1) + N(c_2)] + N(c_1c_2) \tag{27}$$

pues si a N le quitamos los elementos de la unión de los círculos, es decir si quitamos $N(c_1) + N(c_2)$, entonces estamos quitando dos veces los elementos de la intersección de dichos círculos. Luego debemos de añadirlo. Así como (26), la fórmula (27) es de inclusión y exclusión, pues primero incluimos N, luego excluimos $N(c_1) + N(c_2)$ y después incluimos $N(c_1c_2)$.

Ahora supongamos que un elemento de S satisface la condición c_3 si estudia Matemáticas. Consideremos que

$$N(c_3) = 30, \quad N(c_1c_3) = 11, \quad N(c_2c_3) = 10 \ \text{ y } \ N(c_1c_2c_3) = 5.$$

En otras palabras, de los 100 estudiantes que estamos considerando, 30 estudian Matemáticas, 11 Actuaría y Matemáticas, 10 Ingeniería y Matemáticas y 5 las tres carreras: Actuaría, Ingeniería y Matemáticas. En la figura de abajo hemos agradado un círculo a la figura de arriba. El círculo agregado representa $N(c_3)$.



Ahora queremos calcular $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3})$, es decir el número de los 10 estudiantes que no estudian ni Actuaría, ni Ingeniería ni Matemáticas. Debemos calcular, por tanto, el número de elementos que están en el complemento de la unión de los tres círculos. Apoyándonos en la figura, tenemos que

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}) = N-[N(c_1)+N(c_2)+N(c_3)]+[N(c_1c_2)+N(c_1c_3)+N(c_2c_3)]-N(c_1c_2c_3). \tag{28}$$

En efecto, cuando a N le quitamos $N(c_1)+N(c_2)+N(c_3)$, estamos contando dos veces las intersecciones de los tres círculos, tomados dos a dos, es decir, estamos quitando dos veces a $N(c_1c_2)$, $N(c_1c_3)$ y $N(c_2c_3)$. Al sumar dichas cantidades ajustamos pero ahora, al examinar $N(c_1c_2c_2)$, lo quitamos tres veces al considerar $-[N(c_1)+N(c_2)+N(c_3)]$, y luego los agregamos tres veces en la suma $N(c_1c_2)+N(c_1c_3)+N(c_2c_3)$. Debemos, por tanto, quitarlo para así quedarnos con los elementos de N que están en el complemento de la unión de los tres círculos.

La fórmula (28) es de inclusión y exclusión: primero incluimos N, luego excluimos $N(c_1)+N(c_2)+N(c_3)$, después incluimos $N(c_1c_2)+N(c_1c_3)+N(c_2c_3)$, y finalmente excluimos $N(c_1c_2c_2)$. Con la información que tenemos resulta, aplicando (28), que

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}) = 100-[35+30+30]+[9+11+10]-5=30.$$

También tenemos que

$$N(\overline{c_3}) = N - N(c_3) = 100-30$$

y, procediendo como en la situación que nos llevó a la fórmula (27), resulta que

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_3}) = N-[N(c_1)+N(c_3)]+N(c_1c_3) = 100-[35+30]+11=46.$$

y

$$N(\overline{c_2}\ \overline{c_3}) = N-[N(c_2)+N(c_3)]+N(c_2c_3) = 100-[30+30]+10=50.$$

Si agregamos una cuarta condición c_4, por ejemplo estudiar Finanzas, por el razonamiento que nos llevó a las fórmulas (27) y (28), intuimos que

$$\begin{aligned} N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = N &- [N(c_1)+N(c_2)+N(c_3)+N(c_4)]+\\ &+[N(c_1c_2)+N(c_1c_3)+N(c_1c_4)+N(c_2c_3)+N(c_2c_4)+N(c_3c_4)]-\\ &-[N(c_1c_2c_3)+N(c_1c_2c_4)+N(c_1c_3c_4)+N(c_2c_3c_4)]+N(c_1c_2c_3c_4). \end{aligned} \tag{29}$$

En otras palabras, incluimos N, luego excluimos la suma

$$N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) + N(c_4) \tag{30}$$

correspondiente a sumar las "N's" de los elementos del conjunto $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, tomados de uno en uno, después incluimos la suma

$$N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_1c_4) + N(c_2c_3) + N(c_2c_4) + N(c_3c_4) \tag{31}$$

correspondiente a sumar las "N's" de los elementos del conjunto $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, tomados de dos en dos. Posteriormente excluimos la suma

$$N(c_1c_2c_3) + N(c_1c_2c_4) + N(c_1c_3c_4) + N(c_2c_3c_4) \tag{32}$$

correspondiente a sumar las "N's" de los elementos del conjunto $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, tomados de tres en tres y, finalmente incluimos a $N(c_1c_2c_3c_4)$, correspondiente a sumar las "N's" de los elementos del conjunto $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, tomados de cuatro en cuatro.

Podemos verificar la fórmula (29) como sigue: tomemos un elemento x de S. Vamos a mostrar que x se cuenta el mismo número de veces tanto del lado izquierdo de (29) como de su lado derecho. Recordemos que $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4})$ es el número de elementos de S que no satisfacen ni la condición c_1, ni la c_2, ni la c_3 y ni la c_4. Por tanto, si el elemento x que hemos considerado no satisface ninguna de las condiciones c_1, c_2, c_3 y c_4 entonces x se cuenta una vez en el lado izquierdo de (29). Por otro lado, x no se cuenta en las sumas (30), (31), (32) ni en $N(c_1c_2c_3c_4)$ pues, en todas ellas, se tiene que satisfacer alguna de las cuatro condiciones c_1, c_2, c_3 y c_4. Luego, en el lado derecho de (29) x se considera una sola vez, a saber en N.

Ahora supongamos que x solamente satisface la condición c_1. Entonces x no se toma en cuenta en el lado izquierdo de (29) y, con respecto a su lado derecho, se cuenta una vez en N, y de nuevo se cuenta en el sumando $N(c_1)$ de (30). Como x no satisface las condiciones c_2, c_3 y c_4, no se toma en cuenta en las sumas (31), (32) ni en $N(c_1c_2c_3c_4)$. Considerando los signos que aparecen en el lado derecho de (29), resulta que x se cuenta $1 - 1 = 0$ veces. Viendo el segundo renglón del triángulo de Pascal, tenemos que $1 - 1 = C_1^0 - C_1^1$. Ahora bien, si suponemos que x solamente satisface una de las cuatro condiciones dadas, razonando como hemos hecho, vemos que x se cuenta el mismo número de veces en el lado izquierdo de (29) que en su lado derecho.

Consideremos ahora el caso en que x satisface solamente las condiciones c_1 y c_2. Como no satisface las cuatro condiciones, x no se toma en cuenta en el lado izquierdo de (29) y, con respecto a su lado derecho, se cuenta una vez en N, y de nuevo se cuenta en los sumandos $N(c_1)$ y $N(c_2)$ de (30). También se toma en cuenta en el sumando $N(c_1c_2)$ de (31) y, como x no satisface las condiciones c_3 y c_4, no se toma en cuenta en la suma (32) ni en $N(c_1c_2c_3c_4)$. Considerando los signos que aparecen en el lado derecho de (29), resulta que x se toma en cuenta $1 - [1 + 1] + 1 = 0$ veces. Viendo el tercer renglón del triángulo de Pascal, tenemos que

$$1 - 2 + 1 = C_2^0 - C_2^1 + C_2^2.$$

Ahora bien, si suponemos que x solamente satisface dos de las cuatro condiciones dadas, razonando como hemos hecho, vemos que x se cuenta el mismo número de veces en el lado izquierdo de (29) que en su lado derecho.

Ahora supongamos que x satisface las condiciones c_1, c_2 y c_3 pero no c_4. Entonces x no se toma en cuenta en el lado izquierdo de (29) y, con respecto a su lado derecho, se cuenta una vez en N, y de nuevo se cuenta en los sumandos $N(c_1), N(c_2)$ y $N(c_3)$ de (30). También se cuenta en los sumandos $N(c_1c_2), N(c_1c_3)$ y $N(c_2c_3)$ de (31), y en el sumando $N(c_1c_2c_3)$ de (32) pero no en $N(c_1c_2c_3c_4)$. Considerando los signos que aparecen en el lado derecho de (29), resulta que x se cuenta

$$1 - [1 + 1 + 1] + [1 + 1 + 1] - 1 = 0$$

veces. Viendo el cuarto renglón del triángulo de Pascal, tenemos que

$$1 - 3 + 3 - 1 = C_3^0 - C_3^1 + C_3^2 - C_3^3.$$

Ahora bien, si suponemos que x solamente satisface tres de las cuatro condiciones dadas, razonando como hemos hecho, vemos que x se cuenta el mismo número de veces en el lado izquierdo de (29) que en su lado derecho.

Supongamos, por último, que x satisface las condiciones c_1, c_2, c_3 y c_4. Entonces x no se cuenta en el lado izquierdo de (29) y, con respecto a su lado derecho, se cuenta en todos su términos. Considerando los signos que aparecen en el lado derecho de (29), resulta que x se cuenta

$$1 - [1+1+1+1] + [1+1+1+1+1+1] - [1+1+1+1] + 1 = 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$$

veces. Viendo el quinto renglón del triángulo de Pascal, tenemos que

$$1 - 4 + 6 + 4 - 1 = C_4^0 - C_4^1 + C_4^2 - C_4^3 + C_4^4.$$

Esto termina la demostración y confirma que (29) es la fórmula que se tiene para calcular $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4})$.

Si suponemos que

$$N(c_4) = 41, \quad N(c_1c_4) = 13, \quad N(c_2c_4) = 14, \quad N(c_3c_4) = 10, \quad N(c_1c_2c_4) = 6,$$

$$N(c_1c_3c_4) = 6, \quad N(c_2c_3c_4) = 6 \ \text{ y } \ N(c_1c_2c_3c_4) = 4$$

entonces, por la fórmula (29), tenemos que

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = 100 - [35 + 30 + 30 + 41] + [9 + 11 + 13 + 10 + 14 + 10] - \\ - [5 + 6 + 6 + 6] + 4 = 100 - 136 + 67 - 23 + 4 = 12.$$

Notemos que los elementos de S que satisfacen c_1 pero no las otras tres condiciones, se puede calcular como sigue:

$$N(\overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = N(c_1\overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) + N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}).$$

Admitamos ahora que, aplicando un razonamiento similar al que nos llevó a la fórmula (28), tenemos que

$$N(\overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = N - [N(c_2) + N(c_3) + N(c_4)] + [N(c_2c_3) + N(c_2c_4) + N(c_3c_4)] - N(c_2c_3c_4)$$

Por tanto, combinando la igualdad anterior con la fórmula (29), sucede que

$$N(c_1\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = N(\overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) - N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = \{N - [N(c_2) + N(c_3) + N(c_4)]+$$
$$[N(c_2c_3) + N(c_2c_4) + N(c_3c_4)] - N(c_2c_3c_4)\} - \{N - [N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) + N(c_4)]+$$
$$+ [N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_1c_4) + N(c_2c_3) + N(c_2c_4) + N(c_3c_4)]-$$
$$- [N(c_1c_2c_3) + N(c_1c_2c_4) + N(c_1c_3c_4) + N(c_2c_3c_4)] + N(c_1c_2c_3c_4)\} =$$
$$N(c_1) - [N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_1c_4)] + [N(c_1c_2c_3) + N(c_1c_2c_4) + N(c_1c_3c_4)] - N(c_1c_2c_3c_4).$$

En otras palabras

$$N(c_1\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = N(c_1) - [N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_1c_4)]+$$
$$+ [N(c_1c_2c_3) + N(c_1c_2c_4) + N(c_1c_3c_4)] - N(c_1c_2c_3c_4). \quad (33)$$

Sustituyendo los valores, tenemos que

$$N(c_1\overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = 35 - [9 + 11 + 13] + [5 + 6 + 6] - 4 = 35 - 33 + 17 - 4 = 15.$$

La fórmula (33) sigue el mismo patrón que las fórmulas (27), (28) y (29), sólo que cambiando N por $N(c_1)$ como la primera inclusión, y luego excluimos la suma de las "N's" de los elementos del conjunto $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ tomados de dos en dos pero considerando a c_1, luego incluimos dichas sumas tomados de tres en tres considerando a c_1 y, finalmente, excluimos la que se obtiene tomándolos de cuatro en cuatro. Procediendo de manera similar se tienen las siguientes igualdades:

$$N(\overline{c_1}\ c_2\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = N(c_2) - [N(c_1c_2) + N(c_2c_3) + N(c_2c_4)]+$$
$$+ [N(c_1c_2c_3) + N(c_1c_2c_4) + N(c_2c_3c_4)] - N(c_1c_2c_3c_4), \quad (34)$$

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ c_3\ \overline{c_4}) = N(c_3) - [N(c_1c_3) + N(c_2c_3) + N(c_3c_4)]+$$
$$+ [N(c_1c_2c_3) + N(c_1c_3c_4) + N(c_2c_3c_4)] - N(c_1c_2c_3c_4) \quad (35)$$

y

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ c_4) = N(c_4) - [N(c_1c_4) + N(c_2c_4) + N(c_3c_4)]+$$
$$+ [N(c_1c_2c_4) + N(c_1c_3c_4) + N(c_2c_3c_4)] - N(c_1c_2c_3c_4). \quad (36)$$

□

10.2. El Principio

Vamos ahora a presentar el Principio de Inclusión y Exclusión. Consideramos un conjunto finito S así como $N = |S|$. Supongamos que $t \in \mathbb{N}$ y que $c_1, c_2, \ldots, c_t$ son condiciones o propiedades que aplicamos sobre los elementos de S. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ suponemos que $N(c_i)$ es el número de elementos de S que satisfacen la condición c_i (es decir, que por lo menos satisfacen dicha condición), mientras que $N(\overline{c_i})$ es el número de elementos de S que no satisfacen la condición c_i. Notemos que

$$N(\overline{c_i}) = N - N(c_i).$$

Consideramos que $N(c_i)$ puede ser igual a cero. Incluso bien puede pasar que para $i, j \in \{1, 2, \ldots, t\}$ con $i \neq j$ la intersección $N(c_i) \cap N(c_j)$ es no vacía. En otras palabras, un elemento de S puede satisfacer más de una de las condiciones $c_1, c_2, \ldots, c_t$, incluso puede no satisfacer ninguna de dichas condiciones o satisfacer algunas de ellas y no satisfacer otras. Por tanto, para $i, j \in \{1, 2, \ldots, t\}$ con $i < j$, suponemos que $N(c_i c_j)$ es el número de elementos de S que satisfacen por lo menos las condiciones c_i y c_j, mientras que $N(\overline{c_i} c_j)$ es el número de elementos de S que satisfacen la condición c_j pero no la c_i, $N(c_i \overline{c_j})$ es el número de elementos de S que satisfacen la condición c_i pero no la c_j, y $N(\overline{c_i}\ \overline{c_j})$ es el número de elementos de S que no satisfacen ni condición c_i ni la condición c_j. Podemos considerar incluso a $N(\overline{c_i c_j})$. Como hemos visto en el Ejemplo 10.1, $N(\overline{c_i c_j})$ y $N(\overline{c_i}\ \overline{c_j})$ no necesariamente son iguales.

Tenemos así que cuando escribimos una barrita encima de una condición, significa que no deseamos que se satisfaga dicha condición. Si $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, t\}$ son tales que $i < j < k$, como en el caso de dos condiciones, podemos ahora considerar $N(c_i c_j c_k)$ (los que satisfacen al menos las condiciones c_i, c_j y c_k), $N(\overline{c_i} c_j c_k)$ (los que satisfacen c_j y c_k pero no c_i), $N(c_i \overline{c_j} c_k)$ (los que satisfacen c_i y c_k pero no c_j), $N(c_i c_j \overline{c_k})$ (los que satisfacen c_i y c_j pero no c_k), $N(\overline{c_i}\ \overline{c_j} c_k)$ (los que satisfacen c_k pero no c_i ni c_j), $N(\overline{c_i} c_j \overline{c_k})$ (los que satisfacen c_j pero no c_i ni c_k), $N(c_i \overline{c_j}\ \overline{c_k})$ (los que satisfacen c_i pero no c_j ni c_k) y $N(\overline{c_i}\ \overline{c_j}\ \overline{c_k})$ (los que no satisfacen las condiciones c_i, c_j y c_k). Con cuatro condiciones podemos hacer combinaciones similares y así sucesivamente.

Estamos ahora en condiciones de probar el siguiente resultado.

Teorema 10.2. (El Principio de Inclusión y Exclusión). *Consideremos un conjunto S, con $N = |S|$, así como condiciones $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_t$, cada una de las cuales puede ser satisfecha o no por los elementos de S. El número de elementos de S que no satisfacen ninguna de las condiciones dadas, lo denotamos por*

$$\overline{N} = N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3} \cdots \overline{c_t}).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\overline{N} = N - [N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) + \cdots + N(c_t)] + \\ + [N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \cdots N(c_1c_t) + N(c_2c_3) + \cdots + N(c_2c_t) + \cdots + N(c_{t-1}c_t)] - \\ -[N(c_1c_2c_3) + N(c_1c_2c_4) + \cdots + N(c_1c_2c_t) + N(c_1c_3c_4) + \cdots + N(c_1c_3c_t) + \cdots + N(c_{t_2}c_{t-1}c_t)] + \\ + \cdots + (-1)^t N(c_1c_2c_3 \cdots c_t). \quad (37)\end{aligned}$$

Demostración. La fórmula (37) es de inclusión y exclusión pues incluimos $S_0 = N$, luego excluimos la suma

$$S_1 = N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) + \cdots + N(c_t)$$

de las "N's de los elementos del conjunto $C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_t\}$, tomados de uno en uno. Posteriormente incluimos la suma

$$S_2 = N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \cdots + N(c_1c_t) + N(c_2c_3) + \cdots + N(c_2c_t) + \cdots + N(c_{t-1}c_t)$$

de las "N's de los elementos del conjunto C, tomados de dos en dos, para luego excluir la suma

$$S_3 = N(c_1c_2c_3) + N(c_1c_2c_4) + \cdots + N(c_1c_2c_t) + N(c_1c_3c_4) + \cdots + N(c_1c_3c_t) + \cdots + \\ + N(c_{t-2}c_{t-1}c_t)$$

de las "N's de los elementos del conjunto C, tomados de tres en tres y, así sucesivamente hasta incluir o excluir a $N(c_1c_2c_3\cdots c_t)$ (lo incluimos si t es par y lo excluimos si t es impar). Vamos a demostrar la igualdad (37) de manera similar a como hicimos con (29). Tomemos un elemento $x \in S$. Mostraremos que x se cuenta 0 veces o bien 1 vez en el lado izquierdo de (37) y que, si se cuenta 0 veces del lazo izquierdo, también se cuenta 0 veces del lado derecho. Similarmente, si se cuenta 1 vez del lado izquierdo, también se cuenta 1 vez del lado derecho. Supongamos primero que x no satisface ninguna de las condiciones $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_t$. Entonces x se cuenta una sola vez en el cálculo de $\overline{N}$. Con respecto al lado derecho de (37), x se cuenta una sola vez en N y no se cuenta en el resto de los términos que aparecen en el lado derecho pues, en todos ellos, se cuenta cuando x satisface alguna de las condiciones $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_t$, y éste no es el caso. Entonces en el lado izquierdo de (37) y en su lado derecho, x se cuenta una sola vez.

Ahora supongamos que x satisface al menos una de las condiciones $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_t$. Como hay un número finito de condiciones, podemos considerar $r \in \{1, 2, \ldots, t\}$ de modo que x satisface exactamente r de las t condiciones $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_t$. Si $r = t$, entonces x satisface todas las t condiciones dadas, pero si $r < t$, entonces x satisface r de dichas condiciones pero no $r+1$. Entonces x no cuenta en el lado izquierdo de (37) y, con respecto a su lado derecho, x se cuenta una vez en N. Notemos que $1 = C_r^0$. Además se cuenta r veces en la suma

$$S_1 = N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) + \cdots + N(c_t),$$

justo una vez por cada una de las r condiciones que satisface x. Notemos que $r = C_r^1$. Con respecto a la suma

$$S_2 = N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \cdots + N(c_1c_t) + N(c_2c_3) + \cdots + N(c_2c_t) + \cdots + N(c_{t-1}c_t)$$

el número de veces en que la cuenta da un uno, corresponde al número de maneras en que las r condiciones que satisface x, se pueden tomar de dos en dos, lo cual es C_r^2. De manera similar, en la suma

$$S_3 = N(c_1c_2c_3) + N(c_1c_2c_4) + \cdots + N(c_1c_2c_t) + N(c_1c_3c_4) + \cdots + N(c_1c_3c_t) + \cdots + \\ + N(c_{t-2}c_{t-1}c_t)$$

el número de veces en que la cuenta da un uno, corresponde al número de maneras en que las r condiciones que satisface x, se pueden tomar de tres en tres, lo cual es C_r^3 y así sucesivamente hasta llegar al momento en que consideramos la suma de las "N's" de los elementos del conjunto $C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_t\}$ tomados de r en r, en donde x se contará una sola vez, justo en la "N" de las r condiciones que satisface. Notemos que

$1 = C_r^r$. Por tanto, y de acuerdo con el Corolario 7.5, en el lado derecho de (37), x se cuenta

$$C_r^0 - C_r^1 + C_r^2 - C_r^3 + \cdots + (-1)^r C_r^r = 0$$

veces. Esto prueba la igualdad (37). $\square$

Corolario 10.3. *Consideremos un conjunto* S, *con* $N = |S|$, *así como condiciones* $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_t$, *cada una de las cuales puede ser satisfecha o no por los elementos de* S. *El número de elementos de* S *que satisfacen alguna de las condiciones dadas, lo denotamos por*

$$N(c_1 \vee c_2 \vee c_3 \vee \cdots \vee v_t).$$

Entonces

$$N(c_1 \vee c_2 \vee c_3 \vee \cdots \vee v_t) = N - \overline{N}.$$

Demostración. $\overline{N}$ es el número de elementos de S que no satisfacen ninguna de las t condiciones dadas. Por tanto, $N - \overline{N}$ es el número de elementos de S que satisfacen por lo menos una de dichas t condiciones, lo cual hemos definido como $N(c_1 \vee c_2 \vee c_3 \vee \cdots \vee v_t)$. $\square$

En notación de sumatoria, la fórmula (37) se escribe como sigue:

$$\overline{N} = N - \sum_{1 \leq i \leq t} N(c_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq t} N(c_i c_j) - \sum_{1 \leq i < j < k \leq t} N(c_i c_j c_k) + \cdots + (-1)^t N(c_1 c_2 c_3 \cdots c_t).$$

Definiendo $S_0 = N$ y, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, t\}$,

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq t} N(c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k}),$$

tenemos que

$$\overline{N} = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^t S_t = \sum_{i=0}^{t} (-1)^i S_i.$$

Notemos que S_0 tiene C_t^0 sumando, S_1 tiene C_t^1 sumandos y, en general, S_k tiene C_t^k sumandos.

Podemos utilizar la igualdad (37) para probar la fórmula (33) que mencionamos en el Ejemplo 10.1. Haciendo R igual al conjunto de los elementos de S que satisfacen la condición c_1, tenemos que $|R| = N(c_1)$. Aplicando ahora (37) al conjunto R con las condiciones c_1, c_2, c_3 y c_4, tenemos que siempre se ha de cumplir la condición c_1. Por tanto, lo que es una suma de "N's" de los elementos del conjunto $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, tomados de uno en uno, se convierte en una suma de "N's" de los elementos de C tomados de dos en dos pero incluyendo a c_1. Similarmente una suma de "N's" de los elementos de $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, tomados de dos en dos, se convierte en una suma de "N's" de los elementos de C tomados de tres en tres pero incluyendo a c_1. Así tenemos que

$$N(c_1\,\overline{c_2}\,\overline{c_3}\,\overline{c_4}) = N(c_1) - [N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_1c_4)] + \\ + [N(c_1c_2c_3) + N(c_1c_2c_4) + N(c_1c_3c_4)] - N(c_1c_2c_3c_4).$$

De manera similar se prueban las fórmulas (34), (35) y (36). Incluso fórmulas para $N(c_1c_2\overline{c_3})$ y $N(c_1c_2\overline{c_3}\,\overline{c_4})$ se pueden obtener de manera similar.

10.3. Funciones Suprayectivas (La Fórmula)

Vamos a utilizar ahora el Principio de Inclusión y Exclusión para probar la Conjetura 9.3. Notemos que en el Ejemplo 10.1 las condiciones c_1, c_2, c_3 y c_4 se dieron siempre en positivo (estudiar Actuaría, Ingeniería, Matemáticas y Finanzas, respectivamente). Lo que nos enseña la prueba que daremos a continuación, es que las condiciones no siempre tienen que darse en positivo.

Teorema 10.4. *Sean A y B dos conjuntos finitos con m y n elementos, respectivamente. El número de funciones suprayectivas de A en B es*

$$C_n^n \cdot n^m - C_n^{n-1} \cdot (n-1)^m + C_n^{n-2} \cdot (n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-2} C_n^2 \cdot 2^m + C_n^1 \cdot 1^m = \\ = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^{n-i} \cdot (n-i)^m.$$

Demostración. Hagamos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Vamos a suponer primero que $m \geq n$. Sea

$$S = \{f \colon A \to B \colon f \text{ es una función}\}.$$

Por la Proposición 5.3,

$$N = S_0 = |S| = OR_n^m = n^m = C_n^n \cdot n^m.$$

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ diremos que un elemento $f \colon A \to B$ de S satisface la condición c_i si $b_i \notin f(A)$, es decir, si b_i no está en la imagen de A bajo f. Por tanto $N(\overline{c_i})$ es el número de funciones que tienen a b_i en su imagen. Luego $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\,\overline{c_3}\cdots\overline{c_n})$ es el número de funciones que tienen en su imagen a $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$, los elementos de B. En otras palabras, el número de funciones suprayectivas de A en B es

$$\overline{N} = N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\,\overline{c_3}\cdots\overline{c_n}).$$

De acuerdo con el Principio de Inclusión y Exclusión,

$$\overline{N} = N - [N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) + \cdots + N(c_n)] + \\ + [N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \cdots N(c_1c_n) + N(c_2c_3) + \cdots + N(c_2c_n) + \cdots + N(c_{n-1}c_n)] - \\ -[N(c_1c_2c_3) + N(c_1c_2c_4) + \cdots + N(c_1c_2c_n) + N(c_1c_3c_4) + \cdots + N(c_1c_3c_n) + \cdots + N(c_{n_2}c_{n-1}c_n)] + \\ + \cdots + (-1)^t N(c_1c_2c_3\cdots c_n). \quad (38)$$

Vamos a calcular ahora cada una de las "N's" indicadas en (38). Tomemos un elemento $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ así como un miembro $f\colon A \to B$ de S. Entonces f satisface c_i si y sólo si $b_i \notin f(A)$. Por tanto, en la imagen de A podemos seleccionar cualesquiera de los $n-1$ elementos del conjunto $B - \{b_i\}$. Como A tiene m elementos, el número de manera de producir una función con dicha propiedad es $OR^m_{n-1} = (n-1)^m$. Luego

$$N(c_i) = (n-1)^m.$$

De manera similar se tiene que

$$N(c_1) = N(c_2) = N(c_3) = \cdots = N(c_n) = (n-1)^m$$

y entonces

$$S_1 = N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) + \cdots + N(c_n) = n(n-1)^m = C^1_n \cdot (n-1)^m.$$

Ahora tomemos $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ de modo que $i < j$. Un elemento $f\colon A \to B$ de S satisface las condiciones c_i y c_j si y sólo si los elementos b_i y b_j de B no están en la imagen de f. Luego, para definir a f podemos asignarle a los elementos de A cualquier miembro del conjunto $B - \{b_i, b_j\}$, el cual tiene $n-2$ elementos. Tenemos entonces $OR^m_{n-2} = (n-2)^m$ maneras de producir un elemento de f con dichas características. De esta manera

$$N(c_i c_j) = (n-2)^m$$

y entonces

$$S_2 = N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \cdots + N(c_1c_n) + N(c_2c_3) + \cdots + N(c_2c_n) + \cdots + N(c_{n-1}c_n) = \\ = C^2_n \cdot (n-2)^m.$$

En general, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, si $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, entonces

$$N(c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k}) = (n-k)^m$$

y

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} N(c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k}) = C^n_n \cdot (n-k)^m.$$

Por tanto, aplicando (38) y la igualdad (13), tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{N} &= S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^n S_n = \\ &= n^m - C^1_n \cdot (n-1)^m + C^2_n \cdot (n-2)^m - C^3_n \cdot (n-3)^m + \cdots + (-1)^n C^n_n \cdot (n-n)^m = \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C^i_n \cdot (n-i)^m = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C^{n-i}_n \cdot (n-i)^m. \end{aligned}$$

Así pues, cuando $m \geq n$ hay $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i C^{n-i}_n \cdot (n-i)^m$ funciones suprayectivas de A en B. Supongamos ahora que $m < n$. Entonces hay cero funciones suprayectivas de A en B. Además, por el Teorema 7.8,

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i C^{n-i}_n \cdot (n-i)^m = 0.$$

De esta manera, hay $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^{n-i} \cdot (n-i)^m$ funciones suprayectivas de A en B. $\square$

Vamos a denotar por $T(m,n)$ al número de funciones suprayectivas de un conjunto con m elementos en un conjunto con n elementos. Por el teorema anterior,

$$T(m,n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^{n-i} \cdot (n-i)^m. \tag{39}$$

Con respecto al problema de introducir m objetos en n cajas, tenemos que:

f) $T(m,n)$ cuenta el número de maneras en que m objetos distintos se introducen en n cajas distintas, de modo que no queden cajas vacías.

En efecto, como ya hemos indicado, una forma de introducir m objetos distintos en n cajas distintas, es una función $f\colon I_m \to A$, donde $|A| = n$. Si no han de quedar cajas vacías, entonces f es una función suprayectiva. A la inversa, una función suprayectiva de I_m en A se puede pensar como una forma de introducir m objetos distintos en n cajas distintas. Como la función es suprayectiva, no quedan cajas vacías. Por tanto, el número de formas de introducir m objetos distintos en n cajas distintas, coincide con el número de funciones suprayectivas de I_m en A. Dicho número es, por el Teorema 10.4, $T(m,n)$.

10.4. Más Ejemplos

Ahora daremos una serie de ejemplos en donde utilizamos el Principio de Inclusión y Exclusión. Para el siguiente recordemos que si $r \in \mathbb{R}$, entonces el suelo de r se denota por $\lfloor r \rfloor$ y se define como el entero más grande que es menor o igual a r. Es decir

$$\lfloor r \rfloor = \text{máx}\{k \in \mathbb{Z} \colon k \leq r\}.$$

Ejemplo 10.5. Vamos a determinar el número de enteros n entre 1 y 100 que no se pueden dividir por 2, 3 y 5. Hagamos $S = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$. Entonces $N = |S| = 100$. Diremos que un elemento de S satisface la condición c_1 si se puede dividir entre 2. Satisface la condición c_2 si se puede dividir entre 3 y, por último, satisface la condición c_3 si se puede dividir entre 5. En dichos términos y con la notación del Principio de Inclusión y Exclusión, buscamos el número $\overline{N} = N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3})$, el cual es

$$\overline{N} = N - [N(c_1) + N(c_2) + N(c_3)] + [N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_2c_3)] - N(c_1c_2c_3).$$

Notemos que $N(c_1)$ es el número de elementos de 1 a 100 que se pueden dividir entre 2, es decir, que son pares. Dicho número es $\lfloor 100/2 \rfloor = \lfloor 50 \rfloor = 50$. Así $N(c_1) = 50$. De manera similar,

$$N(c_2) = \lfloor 100/3 \rfloor = 33 \text{ y } N(c_3) = \lfloor 100/5 \rfloor = [20] = 20.$$

Como el mínimo común múltiplo de 2 y 3 es 6, los elementos de S que se pueden dividir entre 6, son justo los que se pueden dividir entre 2 y entre 3, es decir los que satisfacen c_1 y c_2. Luego $N(c_1c_2) = \lfloor 100/6 \rfloor = 16$. De manera similar

$$N(c_1c_3) = \lfloor 100/10 \rfloor = \lfloor 10 \rfloor = 10, \quad N(c_2c_3) = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$$

y $N(c_1c_2c_3) = \lfloor 100/30 \rfloor = 3$. Por tanto,

$$\overline{N} = 100 - [50 + 33 + 20] + [16 + 10 + 6] - 3 = 26.$$

$\square$

Ejemplo 10.6. Ya hemos dicho que el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m, \quad \text{donde } x_i \geq 0 \text{ para cada } 1 \leq i \leq n,$$

es $CR_n^m = C_{n+m-1}^m$. En particular el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

es

$$CR_4^{18} = C_{4+18-1}^{18} = C_{21}^{18}.$$

De entre dichas soluciones, buscamos ahora las que satisfacen que $0 \leq x_i \leq 7$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. En otras palabras, cada incógnita debe tomar un valor entre cero y siete. Para resolver dicho problema, sea S es conjunto de las soluciones de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18, \quad \text{donde } x_i \geq 0 \text{ para cada } 1 \leq i \leq 4.$$

Como ya indicamos, $N = |S| = C_{21}^{18}$. Dada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ vamos a decir que una solución x_1, x_2, x_3, x_4 satisface la condición c_i si $x_i \geq 8$. Buscamos entonces el valor del número $\overline{N} = N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4})$. Por simetría tenemos que

$$N(c_1) = N(c_2) = N(c_3) = N(c_4).$$

Para calcular $N(c_1)$, consideremos que

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

y que $x_1 \geq 8$ y $x_2, x_3, x_4 \geq 0$. Hagamos $y_1 = x_1 - 8$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ y $y_4 = x_4$. Entonces

$$18 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = (y_1 + 8) + y_2 + y_3 + y_4$$

de donde

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 18 - 8 = 10.$$

Esto implica que el número de soluciones de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18, \quad \text{con } x_1 \geq 8 \text{ y } x_2, x_3, x_4 \geq 0,$$

es el mismo que el número de soluciones de la ecuación

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 10, \quad \text{con } y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0,$$

el cual es

$$CR_4^{10} = C_{4+10-1}^{10} = C_{13}^{10}.$$

Luego, $N(c_1) = C_{13}^{10}$. Hecho el análisis que nos llevó a calcular $N(c_1)$, debe quedar claro que un análisis similar se puede utilizar para calcular $N(c_2), N(c_3)$ y $N(c_4)$ y que, incluso, obtendremos el mismo resultado, es decir, que

$$N(c_1) = N(c_2) = N(c_3) = N(c_4) = C_{13}^{10}.$$

También por simetría tenemos que

$$N(c_1c_2) = N(c_1c_3) = N(c_1c_4) = N(c_2c_3) = N(c_2c_4) = N(c_3c_4).$$

Para calcular $N(c_1c_2)$ consideremos que

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18, \quad \text{donde } x_1, x_2 \geq 8 \text{ y } x_3, x_4 \geq 0.$$

Hagamos $y_1 = x_1 - 8$, $y_2 = x_2 - 8$, $y_3 = x_3$ y $y_4 = x_4$. Entonces

$$18 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = (y_1 + 8) + (y_2 + 8) + y_3 + y_4$$

de donde

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 18 - 8 - 8 = 2.$$

Esto implica que el número de soluciones de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18, \quad \text{con } x_1, x_2 \geq 8 \text{ y } x_3, x_4 \geq 0,$$

es el mismo que el número de soluciones de la ecuación

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 2, \quad \text{con } y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0,$$

el cual es

$$CR_4^2 = C_{4+2-1}^2 = C_5^2.$$

Luego, $N(c_1c_2) = C_5^2$. Hecho el análisis que nos llevó a calcular $N(c_1c_2)$, debe quedar claro que un análisis similar se puede utilizar para calcular $N(c_1c_3)$, $N(c_1c_4)$, $N(c_2c_3)$, $N(c_2, c_4)$ y $N(c_3c_4)$ y que, incluso, obtendremos el mismo resultado, es decir, que

$$N(c_1c_2) = N(c_1c_3) = N(c_1c_4) = N(c_2c_3) = N(c_2c_4) = N(c_3c_4) = C_5^2.$$

Para calcular $N(c_1c_2c_3)$ consideremos que

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18, \quad \text{donde } x_1, x_2, x_3 \geq 8 \text{ y } x_4 \geq 0.$$

Hagamos $y_1 = x_1 - 8$, $y_2 = x_2 - 8$, $y_3 = x_3 - 8$ y $y_4 = x_4$. Entonces

$$18 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = (y_1 + 8) + (y_2 + 8) + (y_3 + 8) + y_4$$

de donde

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 18 - 8 - 8 - 8 = -6.$$

Como $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$, es imposible que $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = -6$. Por tanto $N(c_1c_2c_3) = 0$. De manera similar tenemos que

$$N(c_1c_3c_4) = N(c_2c_3c_4) = N(c_1c_2c_3c_4) = 0.$$

Luego, por el Principio de Inclusión y Exclusión,

$$\overline{N} = C_{21}^{18} - 4C_{13}^{10} + 6C_5^2 - 0 + 0 = 246.$$

$\square$

Ejemplo 10.7. Vamos a determinar el número de permutaciones de las 26 letras del alfabeto, de manera que ninguno de los patrones sea "cat", "dog", "pun" o "le". Por tanto, palabras prohibidas son: cateto, categoría, dogma, punzada, cable, etc. Para resolver el problema, utilizando el Principio de Inclusión y Exclusión, sea S el conjunto de las permutaciones de las 26 letras del alfabeto. S es un conjunto finito y $N = |S| = 26!$ Consideremos $A_1 = cat$, $A_2 = dog$, $A_3 = pun$ y $A_4 = le$. Dada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ diremos que un elemento de S satisface la condición c_i si contiene la palabra A_i. Debemos calcular

$$\overline{N} = N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}).$$

Notemos que $N(c_1)$ se calcula determinando las permutaciones de las 24 palabras

$$cat, b, d, e, f, \ldots, r, s, u, \ldots, x, y, z.$$

Luego $N(c_1) = 24!$ De manera similar,

$$N(c_2) = N(c_3) = 24! \ \text{ y } \ N(c_4) = 25!$$

El número $N(c_1c_2)$ se calcula contando las permutaciones de las 22 palabras

$$cat, dog, b, e, f, h, \ldots, m, n, p, q, r, s, u, \ldots, x, y, z.$$

Por tanto, $N(c_1c_2) = 22!$ De manera similar,

$$N(c_1c_3) = N(c_2c_3) = 22! \ \text{ y } \ N(c_1c_4) = N(c_2c_4) = N(c_3c_4) = 23!$$

Procediendo de esta manera, tenemos que

$$N(c_1c_2c_3) = 20! \ \text{ y } \ N(c_1c_2c_4) = N(c_1c_3c_4) = N(c_2c_3c_4) = 21!$$

También, por argumentos parecidos, $N(c_1c_2c_3c_4) = 19!$ Luego, por el Principio de Inclusión y Exclusión tenemos que

$$\overline{N} = 26! - [3 \cdot 24! + 25!] + [3 \cdot 22! + 3 \cdot 23!] - [20! + 3 \cdot 21!] + 19!$$

□

Ejemplo 10.8. Supongamos que queremos acomodar en una mesa circular a seis parejas (hombre-mujer) de modo que ninguna esposa se siente al lado de su esposo. Supongamos que H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 y H_6 son los seis hombres y M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 y M_6 las seis mujeres. Consideremos que para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ el hombre H_i está casado con la mujer M_i. Sea S el conjunto de las permutaciones circulares de las 12 personas. Entonces

$$N = |S| = 11! = 39,916,800.$$

Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ diremos que un elemento de S satisface la condición c_i si la pareja (H_i, M_i) está sentada uno al lado del otro. Debemos calcular

$$\overline{N} = N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ \overline{c_5}\ \overline{c_6}).$$

Para determinar $N(c_1)$, consideramos primero las permutaciones circulares de 11 objetos: los hombres y las mujeres H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 y la pareja (H_1, M_1) (considerada como un sólo objeto). Hay $(11-1)! = 10!$ permutaciones circulares de dichos objetos. Para cada una de dichas permutaciones, hay que considerar dos permutaciones más, dependiendo de si en el sentido de las manecillas del reloj, la esposa aparece antes o después de su esposo. Por tanto,

$$N(c_1) = 2 \cdot 10!$$

De manera similar,

$$N(c_2) = N(c_3) = N(c_4) = N(c_5) = N(c_6) = 2 \cdot 10!$$

por lo que

$$S_1 = N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) + \cdots + N(c_6) = 6 \cdot 2 \cdot 10! = C_6^1 \cdot 2 \cdot 10! = 43,545,600.$$

Dados $1 \leq i < j \leq 6$, calculamos $N(c_i c_j)$ considerando primero el números de permutaciones circulares de 10 objetos, en donde las parejas (H_i, M_i) y (H_j, M_j) se consideran como un sólo objeto. Hay $(10-1)! = 9!$ permutaciones circulares de dichos objetos y, por cada una de ellas, hay que considerar cuatro permutaciones: dos por que, en el sentido de las manecillas del reloj, la esposa M_i puede aparecer antes o después de su esposo H_i y dos más para el caso en que, en el sentido de las manecillas del reloj, la esposa M_j aparezca antes o después de su esposo H_j. Por tanto,

$$N(c_i c_j) = 4 \cdot 9! = 2^2 \cdot 9!$$

Luego

$$S_2 = N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \cdots + N(c_1c_6) + N(c_2c_3) + \cdots + N(c_2c_6) + \cdots + N(c_5c_6) = \\ = C_6^2 \cdot 2^2 \cdot 9! = 21,772,800.$$

Razonando de manera similar, tenemos que

$$N(c_{i_1}c_{i_2}c_{i_3}) = 2^3 \cdot 8! \quad \text{para } 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 6,$$

por lo que

$$S_3 = N(c_1c_2c_3) + N(c_1c_2c_4) + \cdots + N(c_1c_5c_6) + N(c_2c_3c_4) + \cdots + N(c_2c_5c_6) + \cdots + \\ + N(c_4c_5c_6) = C_6^3 \cdot 2^3 \cdot 8! = 6,451,200.$$

Para $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 6$,

$$N(c_{i_1}c_{i_2}c_{i_3}c_{i_4}) = 2^4 \cdot 7!$$

de donde

$$S_4 = N(c_1c_2c_3c_4) + N(c_1c_2c_3c_5) + \cdots + N(c_1c_2c_5c_6) + N(c_2c_3c_4c_5) + \cdots + N(c_2c_4c_5c_6) + \cdots + \\ + N(c_3c_4c_5c_6) = C_6^4 \cdot 2^4 \cdot 7! = 1,209,600.$$

Para $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leq 6$,

$$N(c_{i_1}c_{i_2}c_{i_3}c_{i_4}c_{i_5}) = 2^5 \cdot 6!$$

Luego

$$S_5 = N(c_1c_2c_3c_4c_5) + N(c_1c_2c_3c_4c_6) + \cdots + N(c_2c_3c_4c_5c_6) = C_6^5 \cdot 2^5 \cdot 6! = 138,240.$$

Por último,

$$N(c_1c_2c_3c_4c_5c_6) = 2^6 \cdot 5! = C_6^6 \cdot 2^6 \cdot 5! = 7,680.$$

Aplicando el Principio de Inclusión y Exclusión, tenemos por tanto que

$$\overline{N} = N - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5 + S_6 = 11! - C_6^1 \cdot 2 \cdot 10! + C_6^2 \cdot 2^2 \cdot 9! -$$
$$-C_6^3 \cdot 2^3 \cdot 8! + C_6^4 \cdot 2^4 \cdot 7! - C_6^5 \cdot 2^5 \cdot 6! + C_6 6 \cdot 2^6 \cdot 5! = 39,916,88 - 43,545,600 + 21,772,800 -$$
$$-6,451,200 + 1,209,600 - 138,240 + 7,680 = 12,771,840.$$

□

10.5. El Principio Generalizado

Consideremos un conjunto S, con $N = |S|$, así como condiciones $c_1, c_2, \ldots, c_t$, cada una de las cuales puede ser satisfecha o no por los elementos de S. Si $0 \leq m \leq t$, estamos ahora interesados en determinar el número de elementos de S que satisfacen exactamente m de las t condiciones dadas. Vamos a denotar dicho número por E_m. Entonces

$$E_0 = N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3} \cdots \overline{c_t})$$

y, por el Teorema 10.2, sabemos cómo calcular dicho número. Por la Regla de la Suma tenemos, por ejemplo, que

$$E_1 = N(c_1\ \overline{c_2}\ \overline{c_3} \cdots \overline{c_t}) + N(\overline{c_1}\ c_2\ \overline{c_3} \cdots \overline{c_t}) + \cdots + N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \cdots \overline{c_{t-1}} c_t),$$

$$E_2 = N(c_1c_2\ \overline{c_3} \cdots \overline{c_t}) + N(c_1\ \overline{c_2}\ c_3\ \overline{c_4} \cdots \overline{c_t}) + \cdots + N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \cdots \overline{c_{t-2}} c_{t-1} c_t).$$

y $E_t = E(c_1c_2 \cdots c_t)$. Recordemos que $S_0 = N$ y que, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, t\}$,

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq t} N(c_{i_1}c_{i_2} \cdots c_{i_k}),$$

Además en S_k hay C_t^k sumandos. En el siguiente resultado mostramos la fórmula para calcular E_m.

Teorema 10.9. *Consideremos un conjunto S, con $N = |S|$, así como condiciones $c_1, c_2, \ldots, c_t$, cada una de las cuales puede ser satisfecha o no por los elementos de S. Para cada $0 \leq m \leq t$, sea E_m el número de elementos de S que satisfacen exactamente m de las t condiciones dadas. Entonces*

$$E_m = S_m - C_{m+1}^1 \cdot S_{m+1} + C_{m+2}^2 \cdot S_{m+2} - C_{m+3}^3 \cdot S_{m+3} + \cdots + (-1)^{t-m} C_t^{t-m} \cdot S_t. \quad (40)$$

Demostración. Notemos primero que cuando $m = 0$, la igualdad (40) da

$$\begin{aligned} E_0 = S_0 - C_1^1 \cdot S_1 + C_2^2 \cdot S_2 - C_3^3 \cdot S_3 + \cdots + (-1)^t C_t^t \cdot S_t = \\ = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^t S_t = N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3} \cdots \overline{c_t}). \end{aligned}$$

En otras palabras, cuando $m = 0$, (40) coincide con la igualdad (37) del Teorema 10.2. Vamos a dar una demostración similar a la del Teorema 10.2. Tomemos un elemento $x \in S$. Mostraremos que x se cuenta el mismo número de veces en el lazo izquierdo de (40) que en su lado derecho (además veremos que dicha cuenta es cero o uno). Supongamos que x satisface r de las t condiciones. Si $r < m$, entonces x se cuenta cero veces del lado izquierdo y, con respecto a su lado derecho, el hecho de que r sea menor que m implica que x no se cuenta en los términos $S_m, S_{m+1}, S_{m+2}, \ldots, S_t$. Tenemos entonces que la igualdad (40) se cumple en este caso.

Supongamos ahora que $r = m$, es decir, que x satisface exactamente m de las t condiciones dadas. Entonces x se cuenta una sola vez del lado izquierdo de (40) y, con respecto a su lado derecho, se cuenta una vez en S_m y cero veces en cada una de las sumas $S_{m+1}, S_{m+2}, \ldots, S_t$. Por tanto, x también se cuenta una vez en el lado derecho de (40). Supongamos, por último, que $m < r \leq t$. Entonces x se cuenta ceros veces del lado izquierdo de (40) y, con respecto a su lado derecho, x se cuenta una vez en cada uno de los sumando de S_m en donde las r condiciones que satisface x se ven involucradas. Recordemos que S_m tiene C_t^m sumandos. De entre ellos C_r^m son los que involucran a las r condiciones que satisface x. Por tanto, en S_m, x se cuenta C_r^m veces. De manera similar, se infiere que en S_{m+1} el punto x se cuenta C_r^{m+1} veces, en S_{m+2} x se cuenta C_r^{m+2} veces y así sucesivamente, en S_r x se cuenta C_r^r veces. Finalmente x se cuenta cero veces en las sumas $S_{r+1}, S_{r+2}, \ldots, S_t$. Considerando los coeficientes que aparecen en el lado derecho de (40), concluimos que x se cuenta

$$C_r^m - C_{m+1}^1 \cdot C_r^{m+1} + C_{m+2}^2 \cdot C_r^{m+2} - C_{m+3}^3 \cdot C_r^{m+3} + \cdots + (-1)^{r-m} C_r^{r-m} \cdot C_r^r$$

veces. Utilizando la fórmula (12) que aparece en la Proposición 6.13, así como el Corolario 7.5, tenemos que

$$\begin{aligned} C_r^m - C_{m+1}^1 \cdot C_r^{m+1} + C_{m+2}^2 \cdot C_r^{m+2} - C_{m+3}^3 \cdot C_r^{m+3} + \cdots + (-1)^{r-m} C_r^{r-m} \cdot C_r^r = \\ = C_r^m \cdot C_{r-m}^0 - C_r^m \cdot C_{r-m}^1 + C_r^m \cdot C_{r-m}^2 + C_r^m \cdot C_{r-m}^3 + \cdots + (-1)^{r-m} C_r^m \cdot C_{r-m}^{r-m} = \\ = C_r^m [C_{r-m}^0 - C_{r-m}^1 + C_{r-m}^2 - C_{r-m}^3 + \cdots + (-1)^{r-m} C_{r-m}^{r-m}] = \\ = C_r^m \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Esto muestra que x se cuenta cero veces en el lado derecho de (40). Esto prueba la igualdad (40). □

Consideremos un conjunto S, con $N = |S|$, así como condiciones $c_1, c_2, \ldots, c_t$, cada una de las cuales puede ser satisfecha o no por los elementos de S. Para cada $0 \leq m \leq t$, sea L_m el número de elementos de S que satisfacen al menos m de las t condiciones dadas. Notemos que $E_t = L_t = S_t$. Se puede demostrar que

$$L_m = S_m - C_m^{m-1} \cdot S_{m+1} + C_{m+1}^{m-1} \cdot S_{m+2} - C_{m+2}^{m-1} \cdot S_{m+3} + \cdots + (-1)^{t-m} C_{t-1}^{m-1} \cdot S_t. \quad (41)$$

Recordemos que $S_0 = n$ y que

$$\overline{N} = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^t S_t.$$

Cuando $m = 1$, utilizando la igualad anterior, la fórmula (41) se convierte en

$$\begin{aligned} L_1 = S_1 - C_1^0 \cdot S_2 + C_2^0 \cdot S_3 - C_3^0 \cdot S_4 + \cdots + (-1)^{t-1} C_{t-1}^0 \cdot S_t = \\ = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \cdots + (-1)^{t-1} S_t = N - \overline{N}. \end{aligned}$$

El siguiente resultado aparece en [1, Ejemplo 7.2, p. 118] con el nombre de Principio de Inclusión y Exclusión. Recordemos que la cardinalidad de un conjunto A se denota por $|A|$.

Teorema 10.10. *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos, entonces*

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \cdots + \\ + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|. \end{aligned} \tag{42}$$

Demostración. El resultado es cierto para $n = 1$ y, por la Proposición 3.4, también para $n = 2$. Vamos a utilizar ahora el Principio de Inducción Completa. Supongamos, por tanto, que el resultado es válido para cada número natural s con $1 \leq s \leq r < n$, y mostremos que permanece válido para $r+1$. Consideremos, por tanto, $r + 1$ conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_r, A_{r+1}$. Definimos, para cada $1 \leq i \leq r$, $B_i = A_i \cap A_{r+1}$. Notemos que, para cada $1 \leq i, j \leq r$ tenemos que

$$B_i \cap B_j = A_i \cap A_j \cap A_{r+1}.$$

Además

$$B_i \cap B_j \cap B_k = A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1} \quad \text{para todo } 1 \leq i, j, k \leq r.$$

En general

$$B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \cdots \cap B_{i_k} = A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap A_{r+1}.$$

Como la igualdad (42) es cierta para $s = 2$ y para $s = r$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&|(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r) \cup A_{r+1}| = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r| + |A_{r+1}| - \\
&\quad - |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r) \cap A_{r+1}| = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r| + |A_{r+1}| - \\
&\quad |B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_r| = \left(\sum_{1 \le i \le r} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le r} |A_i \cap A_j| + \cdots + \right. \\
&\left. +(-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le r} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + \cdots + (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_r| \right) + \\
&\quad + |A_{r+1}| - \left(\sum_{1 \le i \le r} |B_i| - \sum_{1 \le i < j \le r} |B_i \cap B_j| + \cdots + \right. \\
&\left. +(-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le r} |B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \cdots \cap B_{i_k}| + \cdots + (-1)^{r-1} |B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_r| \right).
\end{aligned} \tag{43}$$

Ahora bien,

$$\sum_{1 \le i \le r} |B_i| = \sum_{1 \le i \le r} |A_i \cap A_{r+1}|,$$

por lo que

$$\sum_{1 \le i < j \le r} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i \le r} |B_i| = \sum_{1 \le i < j \le r+1} |A_i \cap A_j|.$$

De manera similar

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le r} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{k-1} \le r} |B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \cdots \cap B_{i_{k-1}}| = \\
= \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le r+1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.
\end{aligned}$$

Entonces la igualdad (43) equivale a decir que

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r \cup A_{r+1}| = \sum_{1 \le i \le r+1} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le r+1} |A_i \cap A_j| + \cdots + \\
&+(-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le r+1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + \cdots + (-1)^{(r+1)-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{r+1}|.
\end{aligned}$$

Esto muestra que la igualdad (42) es cierta para $r + 1$ y la prueba termina. □

En realidad el resultado anterior es el Principio de Inclusión y Exclusión pero dado en términos de conjuntos y no de condiciones, como originalmente lo planteamos. Dejamos al lector deducir la la igualdad (42), si aplicamos el Principio de Inclusión y Exclusión en términos de condiciones.

10.6. Desórdenes

Para $n \in \mathbb{N}$, hemos definido $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Recordemos que una permutación de n elementos es una función biyectiva de I_n en un conjunto con n elementos. Podemos pensar que una permutación del conjunto I_n es una función biyectiva $f\colon I_n \to I_n$.

Definición 10.11. Dada $n \in \mathbb{N}$, un **desorden** de I_n es una permutación f de I_n tal que $f(i) \neq i$, para cada $i \in I_n$.

En [8, p. 42] a un desorden de I_n se le llama un *desarreglo* del 1 al n. Dada $n \in \mathbb{N}$ denotemos por d_n al número de desórdenes de n elementos. Es decir, d_n es el número de desórdenes de I_n. Para calcular d_n, sea el S el conjunto de las permutaciones de I_n. Entonces

$$N = |S| = n!$$

Para cada $1 \leq i \leq n$ diremos que un elemento de S satisface la condición c_i si el entero i está en el lugar i-ésimo. Recordemos que un elemento de S es una función biyectiva $f\colon I_n \to I_n$. Entonces f satisface c_i si y sólo si $f(i) = i$. En éstos términos,

$$d_n = N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3} \cdots \overline{c_n})$$

así que, por el Principio de Inclusión y Exclusión el cálculo de d_n queda como se indica en el siguiente resultado.

Teorema 10.12. *El número de desórdenes de n elementos es*

$$\begin{aligned} d_n = n! - C_n^1 \cdot (n-1)! + C_n^2 \cdot (n-2)! - C_n^3 \cdot (n-3)! + \cdots + (-1)^n C_n^n (n-n)! = \\ = n! - \frac{n!}{1} + \frac{n!}{2} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} = \\ = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) = n! \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\right). \end{aligned}$$

Por tanto, $d_1 = 0, d_2 = 1$ y para $n \geq 3$,

$$d_n = n! \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\right).$$

Por ejemplo,

$$d_3 = 3! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) = 3! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) = 3 - 1 = 2,$$

$$d_4 = 4! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 4 \cdot 3 - 4 + 1 = 9,$$

$$d_5 = 5! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 60 - 20 + 5 - 1 = 44$$

y

$$d_6 = 6! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right) = 360 - 120 + 30 - 6 + 1 = 265.$$

En los cursos de Cálculo se dice que la fórmula de la función e^x está dada por

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

Cuando $x = -1$ tenemos por tanto que

$$e^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots .$$

Hasta cinco cifras decimales, $e^{-1} = 0.36788$. Por otra parte

$$\sum_{i=0}^{7} \frac{(-1)^i}{i!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^7 \frac{1}{7!} \approx 0.36786.$$

Por tanto, para cualquier número natural $n \geq 7$, la suma $\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$ es muy parecida a e^{-1}. Entonces, para $n \geq 7$

$$d_n = n! \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \right) \approx n! e^{-1}.$$

Comentario Final: El presente trabajo fue escrito durante la estancia sabática del autor en el Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM), en el semestre Primavera 2019, e impartido al Grupo 005 en el curso de Álgebra Superior II. Agradezco el interés de los estudiantes por la lectura de versiones previas de dicho trabajo, así por los comentarios realizados.

Referencias

[1] T. Andreescu, V. Crişan, *Mathematical Induction, A Powerful and Elegant Method of Proof*, XYZ Press, LLC, Texas, 2017.

[2] N. L. Biggs, *The roots of combinatorics*, Historia Mathematica 6, 1979, p. 106–136.

[3] E. Bujalance, J. A. Bujalance, A. F. Costa, E. Martínez, *Elementos de Matemática Discreta*, Tercera Edición, Sanz y Torres, 2005.

[4] R. Espinosa Armenta, *Matemáticas Discretas*, Editorial Alfaomega, México, 2010 (Quinta Reimpresión, Noviembre 2013).

[5] R. P. Grimaldi, *Matemáticas Discreta y Cobinatoria, Una Introducción con Aplicaciones*, Tercera Edición, Pearson Educación, México, 1998.

[6] C. G. Laveaga, *Álgebra Superior, Curso Completo*, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2016.

[7] G. W. Leibnitz, *Disertación Acerca del Arte Combinatorio*, Ediciones Universidad Católica de Chile, Santiago de Chile, 1992.

[8] J. H. Nieto Said, *Teoría Combinatoria*, La Universidad del Zulia, Maracaibo, 1996.

[9] V. A.Uspenski, *Triángulo de Pascal*, Editorial Mir, Lecciones Populares de Matemáticas, Moscú, 1978.

[10] S. H. Weintraub, *The Induction Book*, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2017.