

FICHE INTÉGRATION

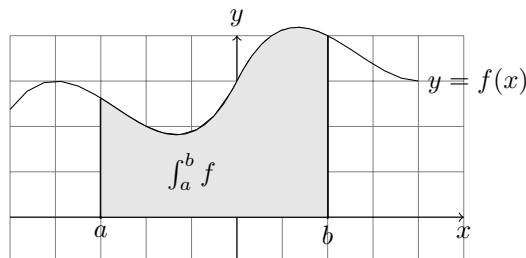
RAPPEL DES NOTIONS D'INTÉGRATION DE TERMINALE

• **Notion d'aire:** Soit a, b deux réels tels que $a \leq b$, et f une fonction continue sur $[a, b]$.

On note $\int_a^b f(t)dt$ ou encore $\int_a^b f$ l'aire signée délimitée par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses, la droite verticale d'équation $x = a$, et la droite verticale d'équation $x = b$.

La variable d'intégration est muette, et peut être remplacé par n'importe quel autre nom de variable:

$\int_a^b f = \int_a^b f(u)du$. Si $a > b$, on prendra comme convention: $\int_a^b f = -\int_b^a f$. A partir de maintenant, on ne se souciera pas de l'ordre des bornes si les bornes sont des variables, les deux notions auront un sens.



• **Notion de primitive:** On appelle primitive de la fonction f toute fonction F dérivable tels que $F' = f$. (opération inverse de la dérivation). Par exemple, une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ est $x \mapsto \sqrt{x}$.

Attention, la notion F pour une primitive de f est commune, mais n'est pas une définition: on doit l'introduire à chaque fois.

• **Lien entre les deux notions:**

Trouver une primitive de f va servir à calculer une intégrale (c'est-à-dire une aire sous la courbe). Voici le théorème fondamental de l'intégration:

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ admettant pour primitive F sur $[a, b]$, alors:

$$\int_a^b f(t)dt = \left[F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

(valable quelle que soit l'ordre des bornes).

• **Quelques règles de bases :**

- Inversion des bornes: $\int_a^b f = -\int_b^a f$
- Relation de Chasles: pour tous réels a, b, c dans un intervalle I sur lequel f est continue: (quelque soit l'ordre des bornes)

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

- gestion des constantes: si λ est une constante,

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$$

- Somme: par propriété sur la dérivation, une primitive d'une somme peut être trouvée en faisant la somme des primitives, et donc:

$$\int_a^b f(t) + g(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

- RIEN sur le produit ou le quotient... il faut alors ouvrir les yeux pour reconnaître une primitive parmi les fonctions usuelles ou composées de fonctions usuelles.

- S'il manque une **constante** ou un signe pour obtenir une forme $u'(x) \cdot f(u(x))$, forcez son expression

Exemple: si $f(x) = \frac{1}{(3+2x)^2}$, cela fait penser à de la forme $\frac{-u'}{u^2}$, où $u(x) = 3 + 2x$, mais alors il manque un "-2". Ainsi, on écrit:

$$f(x) = \frac{-2}{-2} \cdot \frac{1}{(3+2x)^2} = \frac{1}{-2} \cdot \frac{-u'(x)}{u^2(x)}$$

et une primitive de f est alors $F : x \mapsto \frac{1}{-2(3+2x)}$.

Attention: cela ne fonctionne que pour les constantes à cause des règles de dérivation.

- les formules de bases

	Fonctions simples	composition avec une fonction u
Pour $\alpha \neq -1$	$\int^x t^\alpha dt = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\int u' u^\alpha = \left[\frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} \right]$
	$\int^x \frac{1}{t} dt = \ln x $	$\int \frac{u'}{u} = [\ln(u)]$
	$\int^x e^t dt = e^x$	$\int u' e^u = [e^u]$
	$\int^x \cos t dt = \sin x$	$\int u' \cos(u) = [\sin(u)]$
	$\int^x \sin t dt = -\cos x$	$\int u' \sin(u) = [-\cos(u)]$

On remarquera que la première ligne donne une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, et aussi celle de $g : x \mapsto \frac{1}{x^2}$, pour $\alpha = -2$.

EXERCICES

EXERCICE 1 □ □ □

Donner les valeurs des intégrales suivantes:

$$\textcircled{1} \quad I_1 = \int_{-2}^5 (3x^2 - 2x + 7) \cdot dx$$

$$\textcircled{9} \quad I_9 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \cdot dx$$

$$\textcircled{2} \quad I_2 = \int_{\ln 2}^1 (e^t + t) \cdot dt$$

$$\textcircled{10} \quad I_{10} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos y)(\sin y) \cdot dy$$

$$\textcircled{3} \quad I_3 = \int_{\pi/2}^{\pi} (\cos x - \sin x) \cdot dx$$

$$\textcircled{11} \quad I_{11} = \int_{-1}^1 \left(\frac{x}{2} - 1\right)^5 \cdot dx$$

$$\textcircled{4} \quad I_4 = \int_1^e \left(t + \frac{1}{t}\right) \cdot dt$$

$$\textcircled{12} \quad I_{12} = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \cdot dx$$

$$\textcircled{5} \quad I_5 = \int_1^{10} \frac{5}{x^2} \cdot dx$$

$$\textcircled{13} \quad I_{13} = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin t}{\cos t} \cdot dt$$

$$\textcircled{6} \quad I_6 = \int_0^{\ln 5} e^{2x+1} \cdot dx$$

$$\textcircled{14} \quad I_{14} = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} \cdot dx$$

$$\textcircled{7} \quad I_7 = \int_0^{\ln 3} e^t (e^t + 1) \cdot dt$$

$$\textcircled{15} \quad I_{15} = \int_{-2}^1 \frac{t}{t^2 + 1} \cdot dt$$

$$\textcircled{8} \quad I_8 = \int_0^2 \frac{2t - 3}{t^2 - 3t + 4} \cdot dt$$

$$\textcircled{16} \quad I_{16} = \int_{1/2}^1 \frac{t^2 + 1}{t} \cdot dt$$

EXERCICE 2 □ □ □

Même consigne

$$\textcircled{1} \quad A = \int_0^4 (2x^2 + 5x - 8) dx$$

$$\textcircled{8} \quad H = \int_0^{\pi} (\cos(2t) + \sin(t)) dt$$

$$\textcircled{2} \quad B = \int_1^4 \frac{2x^3 + x^2 - 5x + 1}{x} dx$$

$$\textcircled{9} \quad I = \int_0^2 e^{3x+1} dx$$

$$\textcircled{3} \quad C = \int_3^4 \frac{2x - 2}{x^2 - 2x} dx$$

$$\textcircled{10} \quad J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(t) \cos^3(t) dt$$

$$\textcircled{4} \quad D = \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx$$

$$\textcircled{11} \quad K = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$$

$$\textcircled{5} \quad E = \int_0^{\pi} \cos(x) dx$$

$$\textcircled{12} \quad L = \int_0^4 t e^{t^2} dt$$

$$\textcircled{6} \quad F = \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx$$

$$\textcircled{13} \quad M = \int_1^9 (x+1)\sqrt{x} dx$$

EXERCICE 3 □ □ □

On pose $u(x) = \ln(x)$ pour $x > 1$.

$$\textcircled{1} \quad \text{Ecrire } \frac{\ln(x)}{x} \text{ et } \frac{1}{x \ln(x)} \text{ en fonction de } u \text{ et de } u'.$$

$$\textcircled{2} \quad \text{On considère les fonctions } f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x} \text{ et } g : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)} \text{ définies sur }]1; +\infty[. \text{ Déterminer des primitives de } f \text{ et } g \text{ sur }]1; +\infty[.$$

- ③ En déduire $\int_e^{e^2} f(x)dx$ et $\int_e^{e^2} g(x)dx$.

EXERCICE 4 □ □ □ **Supplémentaire**

A l'aide d'intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes:

① $A = \int_0^1 (2x - 4)e^x dx$

⑤ $E = \int_1^e x \ln(x) dx$

② $B = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

⑥ $F = \int_0^\pi x \cos(2x) dx$

③ $C = \int_2^4 (x + 1) \ln(x) dx$

⑦ $G = \int_0^3 x \sqrt{3 - x} dx$

④ $D = \int_0^\pi 2t \sin(t) dt$

⑧ $H = \int_0^1 \frac{\ln(t + 1)}{(t + 1)^2} dt$