

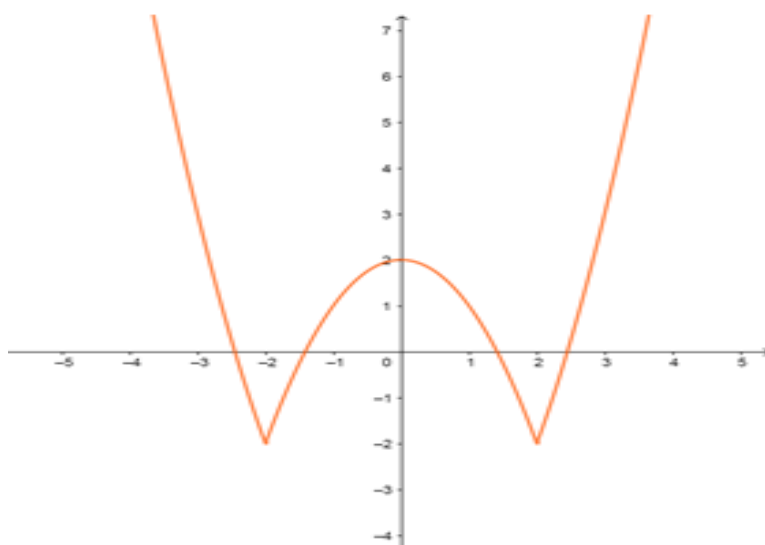


REPÚBLICA DE MOÇAMBIQUE
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO HUMANO
DIRECÇÃO NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

MATEMÁTICA

12ª Classe

O meu caderno de actividades

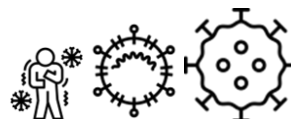


$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$



STOP SIDA



STOP COVID-19

FICHA TÉCNICA

Título:	O meu caderno de actividades de Matemática: 12ª Classe
Direcção:	Gina Guibunda & João Jeque
Coordenação Geral:	Manuel Biriarte
Elaborador:	Anselmo Chuquela João Sapatinha & Cláudio Monjane
Concepção gráfica da capa:	Hélder Bayat, Bui Nguyet e Manuel Biriarte
Layout:	Hélder Bayat
Impressão e acabamentos:	MINEDH
Revisão Científica:	Carlos Muchanga
Revisão Linguística:	Rui Manjate
Tiragem:	xxx exemplares

PREFÁCIO

No âmbito da prevenção e mitigação do impacto da COVID-19, particularmente no processo de ensino-aprendizagem, o Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano concebeu um conjunto de medidas que incluem o ajuste do plano de estudos, os programas de ensino, bem como a elaboração de orientações pedagógicas a serem seguidas para a melhoria da qualidade de ensino e aprendizagem.

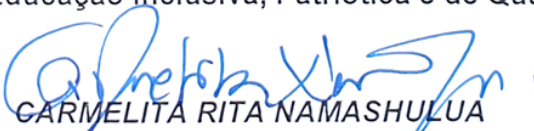
Neste contexto, foi elaborado o presente Caderno de Actividades, tendo em consideração os diferentes conteúdos programáticos nas diferentes disciplinas leccionadas no Ensino Secundário. Nele é proposto um conjunto alargado de actividades variadas, destinadas a complementar as acções desenvolvidas na aula e também disponibilizar materiais opcionais ao desenvolvimento de competências pré-definidas nos programas.

A concepção deste Caderno de Actividades obedeceu à sequência e objectivos dos programas de ensino que privilegiam o lado prático com vista à resolução dos problemas do dia-a-dia e está estruturado em três (3) partes, a saber: I. Síntese dos conteúdos temáticos de cada unidade didáctica; II. Exercícios; III. Tópicos de correcção/resolução dos exercícios propostos.

Acreditamos que o presente Caderno de Actividades constitui um instrumento útil para o auto-estudo e aprimoramento dos conteúdos da disciplina ao longo do ano lectivo. O mesmo irá permitir desenvolver a formação cultural, o espírito crítico, a criatividade, a análise e síntese e, sobretudo, o desenvolvimento de habilidades para a vida.

As actividades propostas no Caderno só serão significativas se o caro estudante resolvê-las adequadamente, com a mediação imprescindível do professor.

“Por uma Educação Inclusiva, Patriótica e de Qualidade!”


CARMELITA RITA NAMASHULUA
MINISTRA DA EDUCAÇÃO E
DESENVOLVIMENTO HUMANO

ÍNDICE

UNIDADE TEMÁTICA I : MÓDULOS Error! Bookmark not defined.

I.RESUMO	Error! Bookmark not defined.
II.EXERCÍCIOS RESOLVIDOS	5
III.EXERCÍCIOS PROPOSTOS	8

UNIDADE TEMÁTICA II : CÁLCULO COMBINATÓRIO E PROBABILIDADES Error!

Bookmark not defined.

I.RESUMO	Error! Bookmark not defined.
II.EXERCÍCIOS RESOLVIDOS	Error! Bookmark not defined.5
III.EXERCÍCIOS PROPOSTOS	Error! Bookmark not defined.7

UNIDADE TEMÁTICA III : FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEIS REAIS 20

I.RESUMO	20
II.EXERCÍCIOS RESOLVIDOS	Error! Bookmark not defined.
III.EXERCÍCIOS PROPOSTOS	30

UNIDADE TEMÁTICA IV : FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL NATURAL 33

I.RESUMO	33
II.EXERCÍCIOS RESOLVIDOS	61
III.EXERCÍCIOS PROPOSTOS	64

UNIDADE TEMÁTICA V : LIMITES E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES 74

I.RESUMO	74
II.EXERCÍCIOS RESOLVIDOS	78
III.EXERCÍCIOS PROPOSTOS	80

UNIDADE TEMÁTICA VI : CÁLCULO DIFERENCIAL 82

I.RESUMO	82
II.EXERCÍCIOS PROPOSTOS	93

UNIDADE TEMÁTICA VII : NÚMEROS COMPLEXOS 95

I.RESUMO	95
II.EXERCÍCIOS PROPOSTOS	Error! Bookmark not defined.

Tópicos de correcção/resoluções dos exercícios propostos 100

Bibliografia Error! Bookmark not defined.



I. RESUMO

1.1. Definição do módulo de um número real

Sabemos que todo o número real tem um simétrico. Por exemplo:

- O simétrico de -3 é 3 ;
- O simétrico de 0 é 0 ;
- O simétrico de $+95$ é -95

O módulo ou o valor absoluto de um número real x é definido como o valor numérico desse número, sem ter em conta o seu sinal.

Exemplos:

- $|-4| = 4$ e $|+4| = 4$
- $|0| = 0$

O módulo de um número real é sempre não-negativo.

1.1.1. Propriedades do módulo

Os módulos de dois números reais x e y satisfazem as seguintes condições:

- $|x + y| \leq |x| + |y|$ sub-aditividade
- $|x - y| \geq |x| - |y|$ sub-aditividade
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ multiplicação
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, com $y \neq 0$
- Se $|x|^2 = a^2$, então $|x| = \sqrt{x^2}$
- Se $a > 0$, então $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- Se $a > 0$, então $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$

1.1.2. Interpretação geométrica do módulo

O módulo de um número real x representa, num eixo real, a distância entre o ponto x e a origem do sistema coordenado.

Vamos representar a distância por x . Assim: $|x| = (0; x)$.

Exemplos:

Exemplo 1: Escrever simbolicamente: Distância entre os pontos da recta numérica cujas abcissas são x e 2 .

Resolução:

A distância entre x e 2 é dada por $|x - 2|$ ou $|2 - x|$

Exemplo 2: Calcula os seguintes módulos:

a) $|-21| = 21$

b) $|(-2) - (-3)| = |-2 + 3| = |1| = 1$

c) $|-1 - 3|^2 - | -(-4) |^{\frac{1}{2}} = |-4|^2 - |4|^{\frac{1}{2}} = 4^2 - 4^{\frac{1}{2}} = 16 - \sqrt{4} = 16 - 2 = 14$

Exemplo 3: Usando a definição de módulo a que é igual:

a) $|3x - 6|$ se $x \geq 2$

Resolução

$$\begin{cases} 3x - 6, & \text{se } 3x - 6 \geq 0 \\ -(3x - 6), & \text{se } 3x - 6 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 6, & \text{se } x \geq 2 \\ -3x + 6, & \text{se } x < 2 \end{cases} \quad \text{sol. } 3x - 6 \text{ se } x \geq 2$$

b) $|7x + 8|$ se $x < -\frac{7}{8}$

Resolução

$$|7x + 8| \text{ se } x < -\frac{7}{8}$$

$$7x + 8 \text{ se } 7x + 8 \geq 0 \rightarrow 7x + 8 \text{ se } x \geq -\frac{8}{7} \leftrightarrow -(7x + 8) \text{ se } 7x + 8 < 0 \rightarrow -7x - 8 \text{ se } x < -\frac{8}{7}$$

$$\text{Sol. } -7x - 8 \text{ se } x < -\frac{8}{7}$$

1.1.3. Função modular

Chama-se função modular a função $f(x) = |x|$, definida por:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \text{Para todo o número real.}$$

Observando a função modular, podemos constatar que ela é definida pelas condições:

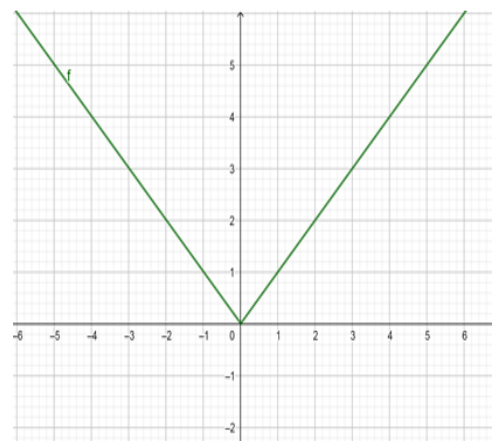
1. $f(x) = x$ se $x > 0$
2. $f(x) = x$ se $x = 0$
3. $f(x) = -x$ se $x < 0$

1.1.3.1. Gráficos de funções modulares

Exemplo: Dada a função $f(x) = |x|$, vamos representar o seu gráfico:

Observando o gráfico ao lado, podemos concluir que:

- Domínio da função: $Df = x \in \mathbb{R}$;
- Contradomínio da função: $D'f = y \in \mathbb{R}_0^+$;
- Zeros da função: $x = 0$;
- Variação do sinal da função: A função é positiva para todo o domínio $\mathbb{R}$;
- Monotonia:
 - i) Decrescente: $x \in]-\infty; 0[$;



- ii) Crescente: $]0; +\infty[$;
- Extremos relativos: A função tem um mínimo no ponto de abcissa 0.
- Injectividade: A função não é injectiva.

1.1.4. Equações e inequações modulares

1.1.4.1. Equações modulares

Chama-se equação modular toda a equação que a incógnita aparece dentro do módulo.

Exemplos:

- $|x + 2| = 3$
- $|3x + 2| = x + 1$
- $|x|^2 + |x| - 6 = 0$
- $|2x - 5| = 7$
- $|3x + 1| = |x - 3|$

Resolução de equações modulares

Para resolver uma equação modular, é necessário analisar cada uma das possibilidades segundo a definição do módulo. Além de saber a definição de módulo, para resolver equações modulares, é importante ter domínio da resolução das equações polinomiais (lineares, quadráticas, etc.).

Exemplos:

1. Resolva analiticamente as seguintes equações modulares:

a) $|x + 2| = 3$

Pela definição do módulo: $|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$, teremos:

$x + 2 = 3 \vee -(x + 2) = 3$. Resolvendo cada equação, teremos:

$$x = 1 \vee -x - 2 = 3$$

$$x = 1 \vee -x = 3 + 2$$

$$x = 1 \vee -x = 5$$

$$x = 1 \vee x = -5$$

Logo a solução é: $S = \{-5; 1\}$

b) $|x - 3| = -7$. Neste caso, a solução será impossível, visto que o módulo de um número real é sempre positivo. A solução é: $S = \{ \}$ ou $S = \emptyset$

c) $|x - 7| = |3x + 2|$

$$\Leftrightarrow x - 7 = 3x + 2 \vee -(x - 7) = 3x + 2$$

$$x - 3x = 2 + 7 \vee -x + 7 = 3x + 2$$

$$-2x = 9 \quad \vee \quad -x - 3x = 2 - 7$$

$$x = -\frac{9}{2} \quad \vee \quad -4x = -5$$

$$\vee \quad x = \frac{5}{4} \quad S = \left\{ -\frac{9}{2} ; \frac{5}{4} \right\}$$

d) $|3x + 2| = 4 - 8x$

Condição: $4 - 8x \geq 0 \Leftrightarrow -8x \geq -4 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$

$$3x + 2 = 4 - 8x \quad \vee \quad -(3x + 2) = 4 - 8x$$

$$3x + 8x = 4 - 2 \quad \vee \quad -3x - 2 = 4 - 8x$$

$$11x = 2 \quad \vee \quad -3x + 8x = 4 + 2$$

$$x = \frac{2}{11} \quad \vee \quad 5x = 6$$

$$\vee \quad x = \frac{6}{5} \quad S = \left\{ \frac{2}{11} \right\}$$

1.1.4.2. Inequações modulares

Inequação modular é toda a inequação cuja incógnita aparece em módulo.

Exemplos:

- $|x| > 5$
- $|x| \leq 3$
- $|x + 2| > 4$

Resolução de inequações modulares

Para resolver uma inequação modular, para além dos conhecimentos sobre definição do módulo de um número, é importante conhecer as propriedades dos módulos.

❖ Tipo: $|x| < a \Leftrightarrow x < a \wedge x > -a$

Exemplos: Resolva as seguintes inequações modulares:

a) $|x| < 3 \Leftrightarrow x < 3 \wedge x > -3$ Sol: $x \in \mathbb{R}:]-3; 3[$

b) $|x| \leq 3$

$$x \leq 3 \wedge x \geq -3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}: -3 \leq x \leq 3\}$$

c) $|x - 3| \leq 5 \Leftrightarrow x - 3 \leq 5 \wedge x - 3 \geq -5 \Leftrightarrow x \leq 8 \wedge x \geq -2$

$$\text{Sol: } x \in \mathbb{R}: [-2; 8]$$

d) $|x - 2| < 2x + 5$ Condição: $2x + 5 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{5}{2}$

$$\Leftrightarrow x - 2 < 2x + 5 \wedge x - 2 > -(2x + 5) \Leftrightarrow -x < 7 \wedge x - 2 > -2x - 5$$

$$\Leftrightarrow x > -7 \wedge x > -1$$

$$\text{Sol: }]-1; +\infty[$$

❖ II Tipo: $|x| > a \Leftrightarrow x > a \vee x < -a$

Exemplos: Resolva as seguintes inequações modulares:

a) $|x + 2| > 4$

$$\rightarrow x + 2 < -4 \vee x + 2 > 4$$

$$x + 2 < -4$$

$$\Leftrightarrow x < -4 - 2$$

$$\Leftrightarrow x < -6$$

$$x + 2 > 4$$

$$\Leftrightarrow x > 4 - 2$$

$$\Leftrightarrow x > 2$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x < -6 \vee x > 2\}$$

$$b) |3 + x| \geq 2 \Leftrightarrow 3 + x \geq 2 \vee 3 + x \leq -2 \Leftrightarrow x \geq -1 \vee x \leq -5$$

$$\text{Sol: }]-\infty; -5] \cup [-1; +\infty[$$

$$c) |2x + 7| > \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x + 7 > \frac{3}{2} \vee 2x + 7 < -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x > \frac{3}{2} - 7 \vee 2x < -\frac{3}{2} - 7$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{11}{4} \vee x < -\frac{17}{4}$$

$$\text{Sol: }]-\infty; -\frac{17}{4}[\cup]-\frac{11}{4}; +\infty[$$



I. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Dadas as funções abaixo, representa-as graficamente e faz o estudo completo:

$$a) f(x) = |x + 2|$$

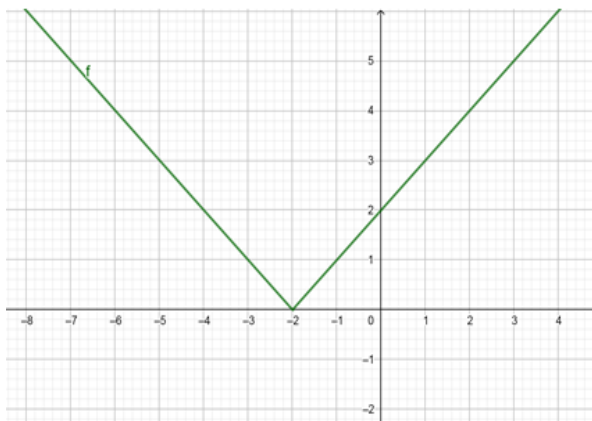
$$b) g(x) = |x^2 - 1|$$

$$c) h(x) = |x|^2 - 3|x|$$

$$d) h(x) = ||x|^2 - 3|x||$$

Resolução

$$a) f(x) = |x + 2|$$

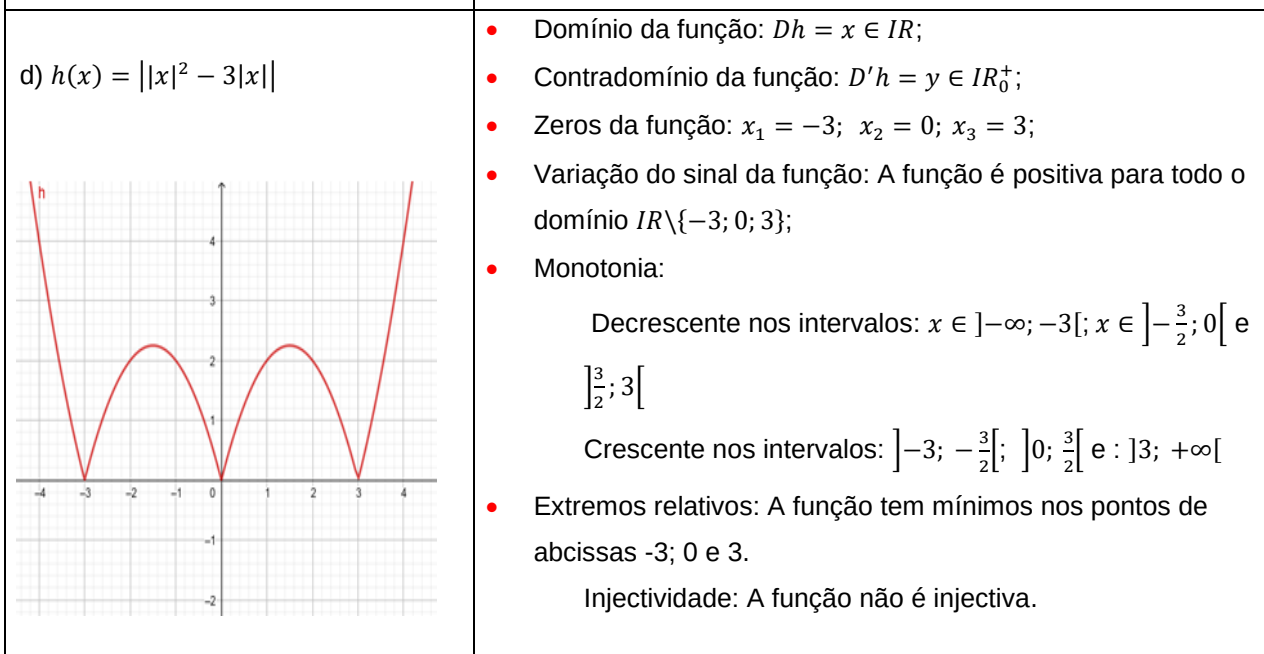
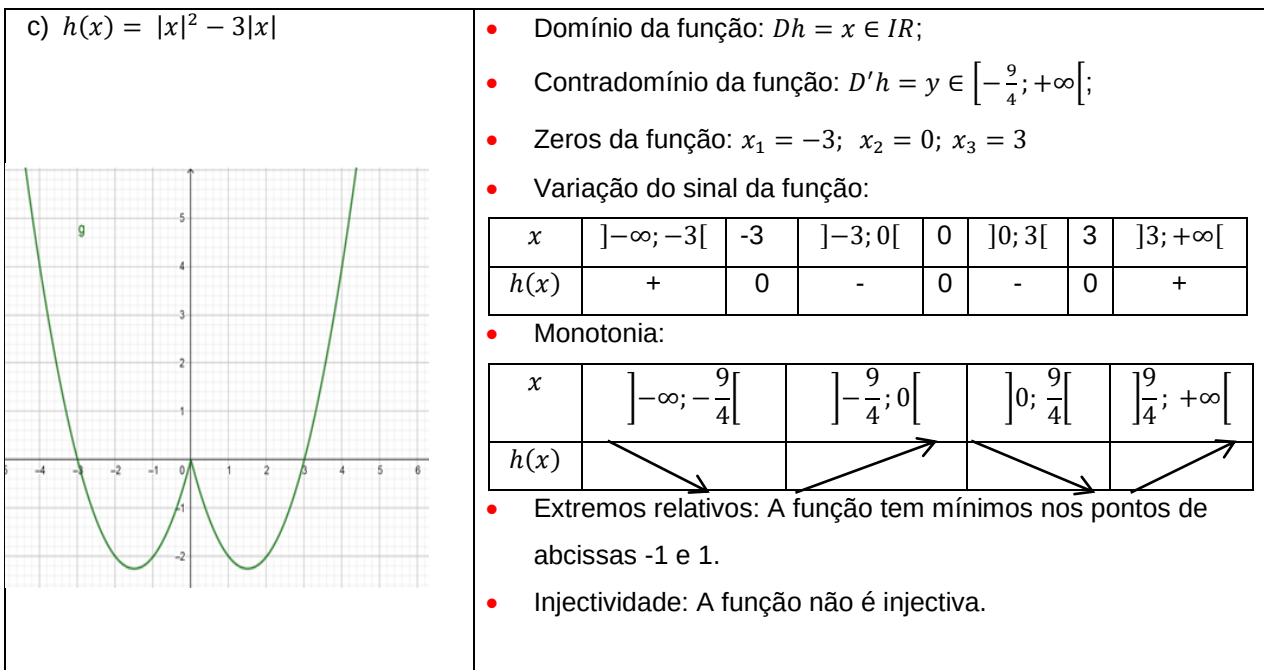
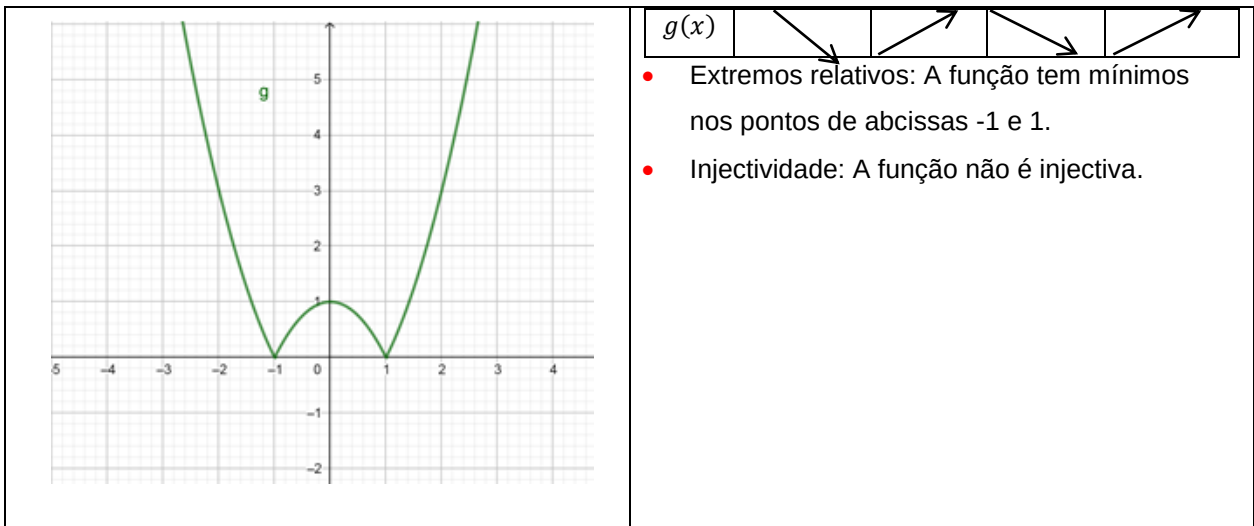


- Domínio da função: $Df = x \in \mathbb{R}$;
- Contradomínio da função: $D'f = y \in \mathbb{R}_0^+$;
- Zeros da função: $x = -2$;
- Variação do sinal da função: A função é positiva para todo o domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$;
- Monotonia:
 - i) Decrescente: $x \in]-\infty; -2[$;
 - ii) Crescente: $] -2; +\infty[$;
- Extremos relativos: A função tem um mínimo no ponto de abscissa -2.
- Injectividade: A função não é injectiva.

$$b) g(x) = |x^2 - 1|$$

- Domínio da função: $Dg = x \in \mathbb{R}$;
- Contradomínio da função: $D'g = y \in \mathbb{R}_0^+$;
- Zeros da função: $x_1 = -1 \wedge x_2 = 1$;
- Variação do sinal da função: A função é positiva para todo o domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$;
- Monotonia:

x	$] -\infty; -1[$	$] -1; 0[$	$] 0; 1[$	$] 1; +\infty[$
-----	------------------	------------	-----------	-----------------



2. Resolva as seguintes equações modulares:

a) $|2x - 5| = 7$

b) $|3x + 2| = x + 1$

c) $|3x + 1| = |x - 3|$

d) $|x|^2 + |x| - 6 = 0$

Resolução:

a) $|2x - 5| = 7$. Procedendo da mesma forma do exemplo anterior, teremos:

$2x - 5 = 7 \vee 2x - 5 = -7$. Resolvendo cada equação, teremos:

$$2x = 7 + 5 \vee 2x = -7 + 5$$

$$x = \frac{12}{2} = 6 \vee x = \frac{-2}{2} = -1 \quad S = \{-1; 6\}$$

b) $|3x + 2| = x + 1$. Pela definição do módulo, teremos:

$$\begin{aligned} |3x + 2| = x + 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 = x + 1 \\ 3x + 2 = -(x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -1 \\ 3x + 2 = -x - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ 4x = -1 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases} \quad S = \left\{-\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

c) $|3x + 1| = |x - 3|$

Pela definição do módulo, teremos:

$$|3x + 1| = |x - 3| \Rightarrow 3x + 1 = x - 3 \text{ ou } 3x + 1 = -(x - 3)$$

$$3x + 1 = x - 3$$

$$3x + 1 = -(x - 3)$$

$$3x - x = -3 - 1$$

$$3x + 1 = -x + 3$$

$$S = \left\{-2; \frac{1}{2}\right\}$$

$$x = -\frac{4}{2} = -2$$

$$x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

d) $|x|^2 + |x| - 6 = 0$

Para resolver este tipo de equações, devemos fazer o uso de uma variável auxiliar, isto é:

$y = |x|$, Voltando a substituir na equação dada, teremos:

$$y^2 + y - 6 = 0. \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.1.(-6) = 25$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2.1} = \begin{cases} y_1 = \frac{-1 - 5}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \\ y_2 = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Como $|x| = y$, substituído o y pelas soluções encontradas, teremos:

$$|x| = 2 \Rightarrow x = -2 \vee x = 2$$

Como o módulo de um numero é sempre um valor não negativo, $|x| = -3$, não tem solução, logo -3 não satisfaz a equação dada. Assim, a solução é: $S = \{-2; 2\}$



II. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Calcule:

a) $|-1 - 2|^2 + | -(-3)|^3 + |-1|^{\frac{1}{2}} + | -(-1)|^{-1}$

b) $|-8 - (-5)|^2$

c) $|-1|^{\frac{1}{2}} + | -(-4)|^3$

2. Resolva usando a definição de módulo.

a) $|x + 5|$ se $x \geq -5$

b) $|x - 5|$ se $x < 5$

c) $|4x + 1|$ se $x = -1$

3. Resolva as seguintes equações modulares:

a) $|x| = 0$

b) $|x + 8| = -10$

c) $\left| x + \frac{2}{3} \right| = \left| 2x - \frac{3}{4} \right|$

d) $|x + 3| = 3x - 9$

e) $|x - 3| = 4x$

4. Qual é a distância entre os pontos das abscissas?

a) -8 e 5

b) 4 e 9

c) $-\sqrt{50}$ e $\sqrt{32}$

5. Resolva as seguintes inequações:

a) $|x| < 10$

b) $|x - 4| < 2$

c) $|3x - 4| < 2x + 1$

d) $|-x + 3| \geq 1$

e) $|1 - 3x| > -8$

f) $\left| -2x + \frac{1}{2} \right| \geq 5$



I. RESUMO

1.1. Cálculo combinatório

1.1.1. Factorial e cálculo com factorial

Dado um número natural n chama-se factorial de n ao produto dos n factores, desde n até 1, com $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$. $n!$ lê-se « n factorial» ou «factorial de n ».

Alguns casos especiais: $1! = 1$; $0! = 1$.

Em geral: $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

Observações:

- $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)!$
- $(n + 2)! = (n + 2)(n + 1)n!$
- $(n - 2)! = (n - 2)(n - 3)!$

Exemplo:

Exemplo 1: Vamos calcular os seguintes factoriais:

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

$$5! + 4! = 120 + 24 = 144$$

$$1.1 \frac{5!+4!}{5!-4!} = \frac{5 \cdot 4!+4!}{5 \cdot 4!-4!} = \frac{4!(5+1)}{4!(5-1)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Exemplo 2: Vamos simplificar as seguintes fracções:

$$2.1 \frac{(n+1)!}{n!+(n+1)!} = \frac{(n+1) \cdot n!}{n!+(n+1) \cdot n!} = \frac{(n+1) \cdot n!}{n!(1+n+1)} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$2.2 \frac{(n-1)!-(n-2)!}{n!} = \frac{(n-1)(n-2)!-(n-2)!}{n(n-1)(n-2)!} = \frac{(n-2)!(n-1-1)}{n(n-1)(n-2)!} = \frac{n-2}{n(n-1)} = \frac{n-2}{n^2-n}$$

1.1.2. Permutações

Chama-se permutação de n elementos de um conjunto finito A a qualquer arranjo que tenha todos os elementos de A .

1.1.2.1. Fórmula de Permutações

$$P_n = n!$$

Exemplo: Vamos calcular a permutação de P_4

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

1.1.3. Arranjos sem repetição

Dados n elementos quaisquer, chama-se arranjos sem repetição dos n elementos n a n a todas as seqüências que são possíveis obter com n elementos escolhidos arbitrariamente entre os n escolhidos.

Os arranjos são agrupamentos que diferem entre si ao mudar a ordem de seus elementos.

1.1.3.1. Fórmula de arranjos sem repetição

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ em que } p \leq n \text{ quando } p = n \text{ temos: } A_p^n = n!$$

Exemplo:

Exemplo 1: $A_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20$

Exemplo 2: Vamos determinar n , sabendo que $A_2^n = 156$

$$A_2^n = \frac{n!}{(n-2)!} \leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 156 \leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 156 \leftrightarrow n(n-1) = 156 \leftrightarrow n^2 - n - 156 = 0$$

$$\leftrightarrow n = -12 \vee n = 13$$

$n = -12$ não serve porque não é um número natural ; logo a solução é $n = 13$

Exemplo 3: Quantos números de três dígitos distintos escolhidos entre 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, podemos formar?

$$A_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 210$$

1.1.4. Combinações

Chama-se combinações de n elementos agrupados p a p , e representa-se por C_p^n ao número de grupos que se podem formar com p dos n elementos, diferindo uns dos outros pela natureza dos seus elementos.

Combinações são agrupamentos que não diferem entre si ao mudar a ordem de seus elementos.

1.1.4.1. Fórmula de combinações

$$C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemplo:

Exemplo 1: Vamos calcular as seguintes combinações:

$$C_{12}^{15} = \frac{15!}{12!(15-12)!} = \frac{15!}{12!3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{12! \cdot 3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 7 \cdot 13 = 455$$

Exemplo 2: Vamos determinar n , sabendo que $C_2^n = 231$

$$C_2^n = 231 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 231 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 231 \Leftrightarrow n(n-1) = 462 \Leftrightarrow n^2 - n - 462 = 0 \Leftrightarrow n = -21 \vee n = 22$$

A solução é apenas. $n = 22$, pois -21 não é um número natural.

Exemplo 3: Uma escola tem 6 professores de Matemática, três deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos de três são possíveis formar?

$$C_2^6 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6.5.4.3!}{3.2.1.3!} = 20$$

1.1.4.2. Propriedades da função C_p^n de n e p

A fórmula $C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ é uma função de n e p que goza das seguintes propriedades:

Propriedade 1

Quaisquer que sejam os inteiros n e p tais que $n > p > 0$, tem-se:

$$C_p^n = C_{n-p}^n$$

Exemplos:

$$C_2^5 = C_{5-2}^5 \Leftrightarrow \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{(5-2)!(5-5+2)!} \Leftrightarrow \frac{20}{2} = \frac{20}{2} \Leftrightarrow 10 = 10$$

$$C_2^6 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6.5.4.3!}{3.2.1.3!} = 20$$

Propriedade 2

Quaisquer que sejam os inteiros n e p tais que $n > p > 0$, tem-se:

$$C_p^n = C_p^{n-1} + C_{p-1}^{n-1}$$

Exemplo:

$$C_4^6 = C_4^{6-1} + C_{4-1}^{6-1} \Leftrightarrow C_4^6 = C_4^5 + C_3^5 \Leftrightarrow \frac{6!}{4!2!} = \frac{5!}{4!2!} + \frac{5!}{3!2!} \Leftrightarrow 15 = 15$$

1.1.4.3. Triângulo de Pascal

O triângulo de Pascal é utilizado na resolução de problemas de combinação.

O **triângulo de Pascal** é uma ferramenta utilizada para encontrar o valor de combinações estudadas na análise combinatória. Ao longo da história, ele já recebeu outros nomes, como triângulo de Tartaglia e triângulo aritmético. Actualmente o nome mais comum dado a ele é triângulo de Pascal, em homenagem ao matemático Pascal que fez várias contribuições durante o estudo desse triângulo, descobrindo as suas principais propriedades e aplicações.

A construção do triângulo de Pascal é realizada seguindo uma lógica herdada das suas propriedades, possuindo aplicações para encontrar as combinações da análise combinatória. Ele

é utilizado também para encontrar os coeficientes binomiais, ou seja, auxilia no cálculo de um binômio de Newton.

Resumo sobre triângulo de Pascal

- É formado pelas combinações, e dividido por linhas e colunas.
- É utilizado para resolver problemas de combinação.
- Uma das suas aplicações é na resolução de binômios de Newton.

							1							
							1		1					
						1	2		1					
					1	3	3		1					
				1	4	6	4		1					
			1	5	10	10	5		1					
		1	6	15	20	15	6		1					
	1	7	21	35	35	21	7		1					

1.1.4.4. Binômio de Newton

Definimos como binômio de Newton a potência de um polinômio que possui dois termos. O cálculo de um binômio está relacionado com o triângulo de Pascal, que se torna um mecanismo para calcular o que chamamos de coeficientes binomiais. Para calcular um binômio, usamos a seguinte fórmula:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Note que o valor do expoente de **a** vai diminuindo até que no último termo ele seja igual a **a⁰**. Sabemos que todo o número elevado a **0** é igual a **1**, por isso o termo **a** não aparece no último termo. Perceba também que o expoente de **b** começa com **b⁰**, logo **b** não aparece no primeiro termo e vai aumentando até chegar a **bⁿ**, no último termo.

Além disso, o número que acompanha cada um dos termos é o que chamamos de coeficiente – neste caso, conhecido como coeficiente binomial.

❖ Coeficiente binomial

O coeficiente binomial nada mais é do que a combinação, que pode ser calculada pela fórmula:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Porém, para facilitar o cálculo do binômio de Newton, é essencial o uso do triângulo de Pascal, já que ele nos dá o resultado da combinação de forma mais rápida.

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

1.2. Introdução às probabilidades

1.2.1. Conceitos básicos

Fenómenos aleatórios ou acontecimentos – São aqueles cujos resultados não podem ser previstos com certeza, isto é, são acontecimentos cujo aparecimento depende inteiramente do acaso.

Exemplo:

O aparecimento da face “cara” ou “coroa” no lançamento de uma moeda ao ar; a cura de uma doença; o aparecimento de “3” no lançamento de um dado; condições climáticas do próximo sábado; tempo de duração de uma lâmpada, etc.

NB: Estes fenómenos são o objecto de estudo do cálculo das probabilidades.

Universo dos resultados ou Espaço amostral – É o conjunto de todos os resultados possíveis relativos a uma prova.

Exemplo:

Se o acontecimento é lançar uma moeda e verificar a face voltada para cima, o espaço amostral é o conjunto $\{cara, coroa\}$; Para o lançamento de um dado de seis faces, o espaço amostral é $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, etc.

Acontecimento união - Acontecimento união dos acontecimentos **A** e **B** consiste em se realizar pelo menos um dos acontecimentos **A** ou **B**.

Exemplo:

No lançamento de um dado “sair pontos menores que três” é o acontecimento união de “sair ponto 1”, “sair ponto 2”. Simbolicamente, escreve - se $\{1; 2\} = \{1\} \cup \{2\}$.

Acontecimento intersecção – Acontecimento intersecção dos acontecimentos **A** e **B** consiste em que A e B se realizem mutuamente.

Exemplo:

No lançamento de um dado. $M = \{\text{sair número par}\}$,

$N = \{\text{sair número dobro de 3}\}$, o acontecimento $K = M \cap N = \{6\}$.

Acontecimento certo – É aquele que se verifica sempre que se realiza a prova (corresponde ao conjunto universo).

Exemplos:

- I. No lançamento de uma moeda ao ar “ sair cara ou coroa”;
- II. No lançamento de um dado numerado de 1 a 6, “sair um número inferior a 7”.

Acontecimento impossível – É aquele que nunca ocorre quando se realiza uma prova (corresponde ao conjunto vazio).

Exemplo:

1. No lançamento de um dado, sair o número 9.
2. Nascer uma criança com 20 Kg.

Acontecimento contrário – Acontecimento contrário de um acontecimento A é aquele que consiste em não se realizar A.

Exemplo:

No lançamento de um dado. $A = \{\text{sair número par}\}$, o acontecimento contrário a A é o acontecimento $\bar{A} = \{\text{sair número ímpar}\}$.

Acontecimentos disjuntos ou incompatíveis – Dois acontecimentos relativos a uma dada prova são disjuntos quando a sua intersecção é um acontecimento impossível.

Exemplo:

No lançamento de um dado, “sair o nº 4” e “sair nº ímpar” são acontecimentos disjuntos, pois a intersecção é um acontecimento impossível.

$$\{4\} \cap \{1; 3; 5\} = \emptyset$$

1.2.2. Probabilidades - definições

1.2.2.1. Frequência absoluta e frequência relativa de um acontecimento

Chama-se **frequência absoluta** de um acontecimento, e representa-se por f , ao número de vezes que um valor é observado.

Chama-se **frequência relativa** de um acontecimento, e representa-se por f_r , ao quociente entre a frequência absoluta e o número total de observações $\left(f_r = \frac{f}{N}\right)$.

$$\text{NB: } 0 \leq f_r \leq 1$$

Exemplos:

- 1) Realizemos uma experiência que consiste em lançar 20 vezes uma moeda ao ar e suponhamos que os resultados obtidos são os seguintes:
5 vezes “saiu cara” e “15 vezes saiu coroa”.
A frequência absoluta do acontecimento “sair cara” é 5 e a frequência relativa é $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$. A frequência absoluta do acontecimento “sair coroa” é 15 e a frequência relativa é $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.
- 2) Em um teste de Matemática dado a uma turma de 20 alunos, 70% tiveram notas positivas, 25% tiveram notas medíocres e 5% notas negativas.

- a) Quais são as respectivas frequências absolutas para as notas positivas, medíocres e negativas?
- b) Quais são as respectivas frequências relativas?

Resolução:

- a) $f_{\text{positiva}} = 14$; $f_{\text{mediocre}} = 5$; $f_{\text{negativa}} = 1$
- b) $f_r(\text{positiva}) = 0.7$; $f_r(\text{mediocre}) = 0.25$; $f_r(\text{negativa}) = 0.05$

1.2.2.2. Definição axiomática de probabilidades (Definição de Bernoulli)

Axioma 1: $0 \leq p(A) \leq 1$

Axioma 2: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, se $A \cap B = \emptyset$, em que A e B são dois acontecimentos disjuntos

Propriedade 1: $p(\bar{A}) + p(A) = 1 \Rightarrow p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

Propriedade 2: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, se $A \cap B \neq \emptyset$, em que A e B são dois acontecimentos quaisquer.

1.2.2.3. Definição clássica de probabilidade (Lei de Laplace)

$$p(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis ao acontecimento A}}{\text{número de casos possíveis}}$$



II. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Desenvolve o binômio $(x - 3)^6$

Dados: $a = x, b = -3, n = 6$

Resolução:

$$\begin{aligned} (x - 3)^6 &= \binom{6}{0} x^6 \cdot (-3)^0 + \binom{6}{1} x^5 \cdot (-3)^1 + \binom{6}{2} x^4 \cdot (-3)^2 + \binom{6}{3} x^3 \cdot (-3)^3 + \binom{6}{4} x^2 \cdot (-3)^4 \\ &\quad + \binom{6}{5} x^1 \cdot (-3)^5 + \binom{6}{6} x^0 \cdot (-3)^6 \\ &= x^6 - 18x^5 + 135x^4 - 540x^3 + 1215x^2 - 1458x + 729 \end{aligned}$$

2. Determina o quarto termo do desenvolvimento de $(2 - x)^4$

Dados: $a = 2$; $b = x$; $n = 4$ $0 \leq k \leq 4$

Resolução:

$$T_{k+1} = (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

$$k + 1 = 4 \rightarrow k = 3$$

$$T_{3+1} = (-1)^3 \cdot \binom{4}{3} \cdot 2^{4-3} \cdot x^3$$

$$T_4 = -\binom{4}{3} 2x^3$$

$$T_4 = -4 \cdot 2x^3 \text{ Finalmente; } T_4 = -8x^3$$

3. Lança-se um dado equilibrado de faces numeradas de 1 a 6. Calcula a probabilidade de se verificar um dos seguintes acontecimentos:

- a) “Sair número ímpar”.
b) “Sair múltiplo de 3”
c) “Sair número maior que 5”

Resolução:

- a) $A = \{\text{Sair número ímpar}\} = \{1; 3; 5\}$. Número de casos favoráveis (CF) = 3 e os casos possíveis (CP) são 6.

$$\text{Assim, } P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

- b) $B = \{\text{Sair múltiplo de 3}\} = \{3; 6\}$. CF = 2 e CP = 6, Assim $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

- c) $C = \{\text{Sair número maior que 5}\} = \{6\}$. CF = 1 e CP = 6, Assim $P(C) = \frac{1}{6}$.

4. Uma urna contém 5 bolas brancas e 15 bolas verdes. Extrai-se uma bola ao acaso. Qual é a probabilidade de que saia:

- a) Uma bola branca $P(B)$?
b) Uma bola verde $P(V)$?
c) Uma bola branca ou verde?
d) Uma bola branca e verde?

Resolução:

- a) N° de CP = 5 + 15 = 20 e n° de CF = 5

$$P(B) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

- b) N° de CP = 5 + 15 = 20 e n° de CF = 15

$$P(V) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

- c) $P(B \cup V) = P(B) + P(V) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, pois os acontecimentos **B** e **V** são disjuntos.

- d) $P(B \cap V) = \emptyset$, pois nenhuma bola tem duas cores.

5. Uma urna contém 7 bolas pretas e 6 bolas brancas, retirando, ao acaso e simultaneamente, 8 bolas, qual é a probabilidade de se obter 4 e só 4 bolas pretas?

Resolução:

$$\text{N° de CP} = C_{13}^8 = 1287; \text{ n° de CF} = C_7^4 \times C_6^4 = 525$$

$$P(L) = \frac{C_7^4 \times C_6^4}{C_{13}^8} = 0.4$$

6. São lançadas ao ar, simultaneamente, quatro moedas, qual é a probabilidade de se obterem 3 e só 3 caras?

Resolução:

	CC	CK	KC	KK	onde C – cara K – coroa CP = 16 CF = 4
CC	CCCC	CCCK	CCKC	CCKK	
CK	CKCC	CKCK	CKKC	CKKK	
KC	KCCC	KCCK	KCKC	KCKK	
KK	KKCC	KKCK	KKKC	KKKK	

$$P(F) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$



III. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

3.1. Exercícios propostos 1

- De quantas maneiras diferentes 3 amigos podem se posicionar numa fila para tirar uma fotografia.
- Quantos anagramas podem ser escritos a partir da palavra calcanhar?
- Forme todos arranjos possíveis das letras a, b, c, tomadas duas a duas.
- De quantas maneiras diferentes se podem sentar 3 raparigas e 4 rapazes, num banco de 7 lugares sabendo que em cada um dos extremos fica uma rapariga?
- Quantos números de 3 algarismos diferentes podem ser escritos com os algarismos 1,3,7,8,9?
- Existem 7 cadeiras diferentes e pretende-se escolher 4. De quantas formas isso pode acontecer?
- Em um pelotão há 18 polícias, 11 homens e 7 mulheres. De quantas formas pode-se seleccionar 6 desses policia para compor uma equipa se apenas dois deles devem ser do sexo feminino.
- Um examinando precisa de responder a 8 das 10 questões do exame de matemática para poder transitar de classe. De quantas maneiras diferentes o examinando pode fazer a sua escolha?
- Sendo $C_2^n = 45$, $n > 2$, qual é o valor de n ?
- Simplifica:
 - $\frac{8!-6!}{7!}$
 - $\frac{n!+(n+1)!}{(n-1)!}$
- Qual é o valor de n na equação $\frac{(n+1)!}{n!} = 68$?
- Quantos números de 3 algarismos diferentes se podem escrever com os algarismos 5,6,7,8 e 9.
- Quantos números podem ser escritos com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, de modo que, em cada número, figurem aqueles algarismos sem repetição.

14. Em uma turma há 12 rapazes e 7 raparigas. De quantos modos diferentes se pode organizar uma comissão formada por 3 rapazes e 3 raparigas dessa turma?
15. Quantos números de 4 algarismos diferentes podem ser escritos com os algarismos do conjunto $M = \{1;3;7;8;9\}$?
16. Resolva as equações:

a. $A_n^2 = 20$.

b. $C_n^2 = 45$.

17. Utilizando o desenvolvimento do binómio de Newton, determina: $(2x + 1)^4$.
18. Calcula o termo médio do desenvolvimento de $(3x - 5)^6$.
19. Aplicando o binómio de Newton determina:

a) 99^2

b) 21^3

c) 46^3

3.2. Exercícios propostos 2

1. Sabendo que a probabilidade de um acontecimento A, relativo à prova P é 0,16 e que a probabilidade do acontecimento B, relativo à mesma prova, é igual a 0,24, determina a probabilidade:
- a) Do acontecimento união dos acontecimentos A e B.
- b) Do acontecimento contrário ao acontecimento A.
2. Qual é a probabilidade de aparecer 3 ou 6 no lançamento de um dado?
3. Lançam-se dois dados equilibrados simultaneamente, qual é a probabilidade de se obter uma soma de pontos igual a 9?
4. No lançamento de duas moedas ao ar, calcula a probabilidade de:
- a) Obter só uma cara.
- b) Obter pelo menos uma cara.
- c) Obter exactamente duas caras.
5. Num lançamento de um dado perfeito, ocorre o acontecimento A “Sair um ponto ímpar” e o acontecimento B “Sair um ponto inferior a 3”. Calcula a probabilidade dos acontecimentos:
- a) A b) B c) $A \cap B$ d) $A \cup B$ e) $\bar{A} \cap B$
6. Um saco contém 12 bolas, sendo 3 brancas, 5 azuis e 4 pretas. Retirando uma bola ao acaso, diga qual é a probabilidade de sair:
- a) Bola branca; b) Bola preta; c) Bola branca ou azul.
7. Numa caixa há 5 laranjas e 4 maçãs. Tiram-se simultaneamente 2 frutas ao acaso. Qual é a probabilidade de que ambas sejam maçãs.
8. Numa escola há 1000 alunos. Desses, alguns usam óculos e outros ainda não. Abriu-se a porta e saiu um aluno. Indica a probabilidade desse aluno:
- a) Ser uma rapariga.
- b) Ser um rapaz.
- c) Usar óculos.
- d) Usar óculos e ser uma rapariga.

	Rapazes	Raparigas
Usam óculos	282	120
Não usam óculos	318	280

9. Num lote de 100 peças, das quais 20 são defeituosas e 80 são perfeitas, escolhe-se uma amostra de 10 peças. Qual é a probabilidade de achar 3 peças defeituosas e 7 perfeitas?
10. O António abre aleatoriamente uma revista com 49 páginas numeradas de 1 a 40. Qual é a probabilidade de abrir uma página cujo número é múltiplo de 6.
11. Numa festa há cinco tipos de doces e três de salgados. Se cada pessoa receber apenas três tipos de doces e dois de salgados, de quantas maneiras diferentes poder-se-á, fazer esta distribuição?
12. Uma caixa contém 10 camisas, das quais 4 são de mangas compridas. Extrai-se 2 ao acaso. Qual é a probabilidade de que nenhuma das camisas extraídas seja de mangas cumpridas.
13. Num café estão 20 pessoas das quais 8 são mulheres. Qual é a probabilidade de ao escolher uma das pessoas, ao acaso, seja homem?



I. RESUMO

1.1. Definição:

Dados dois conjuntos **A** e **B**, não vazios, diz-se que a relação **f** de **A** em **B** é função se, e somente se, para qualquer x pertencente ao conjunto **A**, existe, em correspondência, um único y pertencente a **B**, tal que o par ordenado (x, y) pertença a f .

$$f \text{ é função de } A \text{ em } B \leftrightarrow (\forall x \in A, \exists y \in B | (x, y) \in f)$$

Exemplo:

Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, vamos analisar algumas relações estabelecidas a partir de **A x B** e determina quais são funções e quais não são:

$$R_1 = \{(x, y) \in A \times B : x + y = 1\}, R_2 = \{(x, y) \in A \times B : x = y^2\} \text{ e } R_3 = \{(x, y) \in A \times B : y - 1 = x\}$$

Primeiro vamos calcular o produto cartesiano:

$$A \times B = \left\{ \begin{array}{l} (-1, 0); (-1, 1); (-1, 2); (-1, 3); (-1, 4); (0, 0); (0, 1); (0, 2); (0, 3); (0, 4); (1, 0); (1, 1); (1, 2); \\ (1, 3); (1, 4); (2, 0); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 0); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4) \end{array} \right\}$$

De seguida vamos apresentar as relações por extensão: $R_1 = \{(-1, 2); (0, 1); (1, 0)\}$, $R_2 = \{(0, 0); (1, 1); \}$ e $R_3 = \{(-1, 0); (0, 1); (1, 2); (2, 3); (3, 4)\}$

É fácil perceber que R_1 e R_2 não são funções, pois nem todos os elementos de **A** têm imagem em **B** mas R_3 é função porque cada elemento de **A** tem uma e somente uma imagem em **B**.

1.2. Domínio e Imagem de Função

1.2.1. Domínio

Domínio de uma função f (Df) é o conjunto formado pelos primeiros elementos dos pares ordenados (x, y) pertencentes a f .

Exemplo:

Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e a função $f: A \rightarrow B$, definida por $f(x) = x + 2$, nomeando seus elementos e representando-os em diagramas, temos:

$$f = \{(-2, 0); (-1, 1); (0, 2); (1, 3); (2, 4)\}$$

$$D(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \text{ ou } D(f) = A$$

Obs: Pela definição, todos os elementos de A tem um único correspondente em B; logo o Domínio de f sempre é o conjunto A.

1.2.2. Contradomínio ou Imagem

Imagem de uma função f ($Im(f)$) é o conjunto formado pelos segundos elementos dos pares ordenados (x,y) pertencentes a f .

1.3. Monotonia de uma função

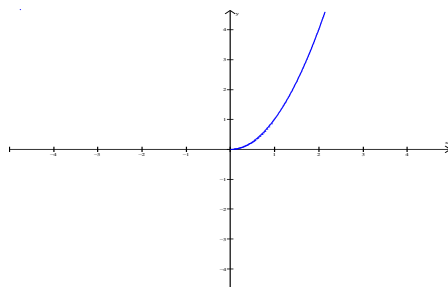
1.3.1. Função Crescente

Diz-se que uma função $y = f(x)$, de A em B é crescente em um intervalo $[a,b] \subset A$ se, e somente se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes ao intervalo $[a,b]$, temos:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

Exemplo:

A função $f(x) = x^2$ é crescente em $\mathbb{R}^+$. Como $f(x_1) = (x_1)^2$ e $f(x_2) = (x_2)^2$, para $\forall x_1$ e $x_2 \in \mathbb{R}^+$ temos: $x_2 > x_1 \rightarrow (x_2)^2 > (x_1)^2$



Em $x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

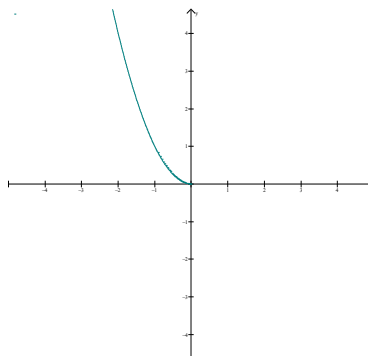
1.3.2 Função Decrescente

Diz-se que uma função $y = f(x)$, de A em B, é decrescente em um intervalo $[a,b] \subset A$ se, e somente se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a um intervalo $[a,b]$, temos:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

Exemplo:

A função $f(x) = x^2$ é decrescente em $\mathbb{R}^-$. Como $f(x_1) = (x_1)^2$ e $f(x_2) = (x_2)^2$, para $\forall x_1$ e $x_2 \in \mathbb{R}^-$ temos: $x_1 < x_2 \rightarrow (x_1)^2 > (x_2)^2$



Em $\mathbb{R}^-, x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

Nota:

- Uma função diz-se crescente se for crescente em todo o seu domínio.
- Uma função diz-se decrescente se for decrescente em todo o seu domínio.
- Uma função é monótona em um intervalo se for crescente ou decrescente nesse intervalo.
- Uma função constante é crescente e decrescente em qualquer intervalo do seu Domínio.
- Uma função f é estritamente crescente em um intervalo $[a, b] \subset Df$, se $a < b$ então $f(a) < f(b)$.
- Uma função f é estritamente **decrescente** em um intervalo $[a, b] \subset Df$, se $a < b$ então $f(a) > f(b)$.

1.4. Tipos de Funções**1.4.1 Função Injectiva**

Uma função real de variável real $f: A \rightarrow B$ diz-se injectiva se, e somente se, dois elementos distintos quaisquer do Domínio de f possui imagens distintas em B .

Sendo $x_1 \in A$ e $x_2 \in A$, temos:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

1.4.2. Função Sobrejectiva

Uma função $f: A \rightarrow B$ é sobrejectiva se, e somente se, $Im(f)=B$, em que B é $CD(f)$:

$$f: A \rightarrow B \text{ é Sobrejectiva} \Leftrightarrow Im(f) = B$$

Exemplos:

1. A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x - 1$ é Sobrejectiva, pois $Im(f) = \mathbb{R}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$; logo, $Im(f) = CD(f)$.
2. A função $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, definida por $f(x) = 2x^2$ é Sobrejectiva, pois $Im(f) = \mathbb{R}_0^+$ e $CD(f) = \mathbb{R}_0^+$; logo, $Im(f) = CD(f)$.
3. A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$ não é Sobrejectiva, pois $Im(f) = \mathbb{R}_0^+$ e $CD(f) = \mathbb{R}$; logo, $Im(f) \neq CD(f)$.

1.4.3. Função Bijectiva

Uma função $f: A \rightarrow B$ é bijectiva se, e somente se, é injectiva e sobrejectiva.

Exemplo:

Dada a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x + 2$, temos:

- (1) Sendo $x_1 = 2$ e $x_2 = -1$ ($x_1 \neq x_2$), temos:

$$f(x) = 3x + 2$$

$$f(x_1) = f(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 8$$

$$f(x_2) = f(-1) = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$$

Assim:

$\forall x_1 \text{ e } x_2 \in \mathbb{R} \rightarrow x_1 \neq x_2 \rightarrow 3x_1 \neq 3x_2 \rightarrow 3x_1 + 2 \neq 3x_2 + 2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ logo, a função é injectiva

(2) Como $Im(f) = \mathbb{R}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$, então:

$Im(f) = CD(f)$ logo a função é sobrejectiva.

(3) Se $f(x) = 3x + 2$ é injectiva e sobrejectiva, então é bijectiva.

1.5. Funções Pares, Ímpares e Funções que não são Pares e nem Ímpares

1.5.1. Função Par

Uma função $f: A \rightarrow B$ é par se, para qualquer $x \in A$, temos $f(x) = f(-x)$.

Exemplos:

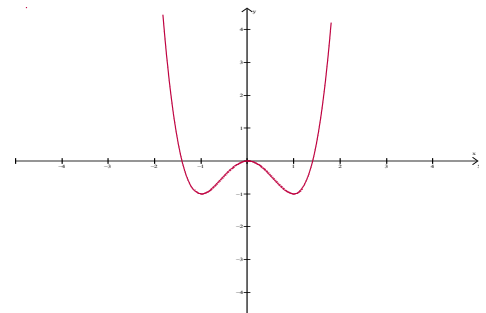
A função $f(x) = x^4 - 2x^2$ é par:

$$f(x) = x^4 - 2x^2;$$

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2, \text{ logo } f(x) = f(-x)$$

Graficamente:

Analisando o gráfico, podemos concluir que ele é simétrico em relação ao eixo das ordenadas. Sendo assim, todo o gráfico da **função par** é simétrico em relação ao eixo das ordenadas. Para toda a função par, verifica-se que para objectos simétricos têm a mesma imagem.



Exemplo:

1. Considere a função $f(x) = x^2 - 1$. Determina $f(-2)$ e $f(2)$.

$$f(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$f(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

Neste caso, podemos notar que dois objectos simétricos têm mesma imagem, sendo assim a função $f(x) = x^2 - 1$ é par.

1.5.2. Função Ímpar

Uma função $f: A \rightarrow B$ é ímpar se, para qualquer $x \in A$, temos $f(-x) = -f(x)$.

Exemplos:

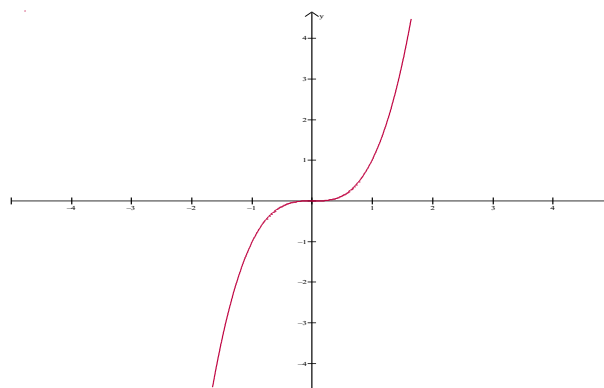
1. A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$, é uma função ímpar

$$f(x) = x^3$$

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3$$

$$-f(x) = -x^3$$

logo, $f(-x) = -f(x)$. Graficamente:

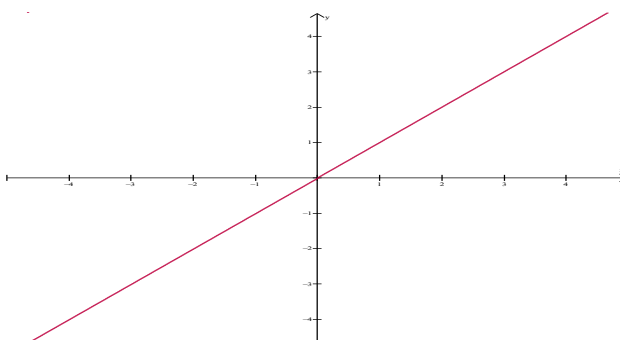


2. A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$, é uma função ímpar.

$$f(-x) = -x$$

$$-f(x) = -x$$

logo, $f(-x) = -f(x)$. Graficamente:



Nota: Analisando o gráfico de uma função ímpar, verificamos que, para números simétricos do Domínio, obtemos imagens opostas, isto é, o gráfico é simétrico em relação à origem (0,0).

1.5.3. Função que não é par e nem é ímpar

Uma função $f: A \rightarrow B$ não é par e nem ímpar se, para qualquer $x \in A$, nem $f(x) = f(-x)$, nem $f(-x) = -f(x)$.

Exemplos:

A função $f(x) = x - 1$ não é par e nem é ímpar pois:

$$f(-x) = -x - 1$$

$$-f(x) = -x + 1 \text{ logo não é par nem ímpar.}$$

1.6. Função homógrafa

Função homógrafa é toda a função real de variável real cuja expressão analítica é da forma:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ em que } cx + d \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$$

O domínio é constituído por todos os números reais que não anulam o denominador.

$$Df = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$$

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ pode ser transformada na forma, $f(x) = B + \frac{k}{x+m}$.

As **assíntotas verticais** (AV) são os zeros do denominador:

$$AV: cx + d = 0 \leftrightarrow x = -\frac{d}{c} \text{ ou } x = -m$$

Desde que o grau do numerador seja menor ou igual ao grau do denominador, a função terá **assíntota horizontal** (AH). Nestas condições, a assíntota horizontal é dada por:

$$AH: y = \frac{a}{c} \text{ ou } y = B$$

Se o grau do numerador é menor que o grau do denominador, a assíntota horizontal é:

$$AH: y = 0$$

Se $B = m = 0$ então $f(x) = \frac{k}{x}$ e terá como assíntotas os eixos coordenados e o gráfico encontra-se:

No 1º e 3º quadrante quando $k > 0$. A função é decrescente.

No 2º e 4º quadrante quando $k < 0$. A função é crescente, com $k = b - \frac{ad}{c}$

O gráfico de função homógrafa é uma **hipérbole**.

Exemplo:

Dada a função $f(x) = \frac{2x+4}{x-3}$, constrói o gráfico e faz o respectivo estudo.

Esta função, $f(x) = \frac{2x+4}{x-3}$ feita a transformação, teremos: $f(x) = 2 + \frac{10}{x-3}$.

Então:

1. $Df = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 \neq 0\}; Df = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

9. Gráfico:

2. Zeros da função: $\frac{2x+4}{x-3} = 0 \leftrightarrow 2x + 4 = 0 \leftrightarrow x = -2$

3. Ordenada na origem: $f(0) = \frac{2 \cdot 0 + 4}{0 - 3} = -\frac{4}{3}$

4. Variação do sinal:

$$f(x) > 0 \text{ se } x \in]-\infty; -2] \cup [3; +\infty[$$

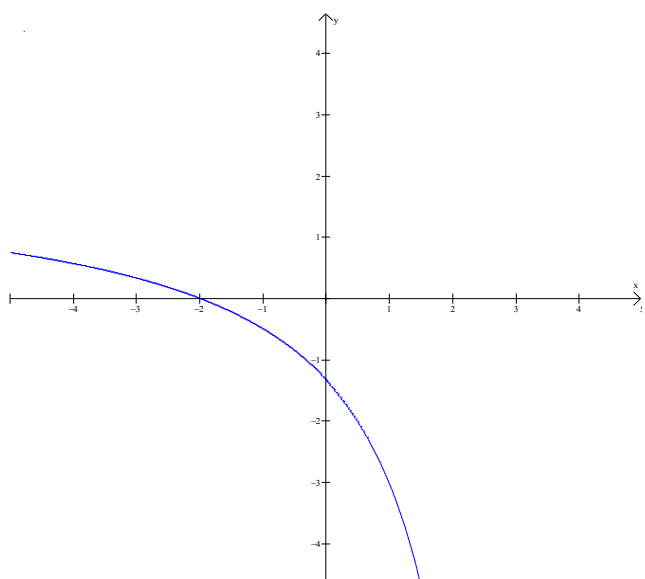
$$f(x) < 0 \text{ se } x \in]-2; 3[$$

5. Paridade: f não é par nem ímpar

6. f é injectiva; f não é sobrejectiva; f não é bijectiva.

7. $k = 10 > 0 \rightarrow$ A função é decrescente.

8. Assíntotas: AV: $x = 3$; AH: $y = 2$



1.7. Função Inversa

Através de vários exemplos, iremos recordar o que foi dado nos anos anteriores.

Seja f uma função injectiva sobre o seu Domínio Df . Então, existe uma função f^{-1} , inversa de f , também injectiva sobre o seu Domínio Df^{-1} , com as propriedades seguintes:

a) O Domínio da função inversa é o Contradomínio da função:

$$Df^{-1} = D'f$$

b) O Contradomínio da função inversa é o Domínio da função:

$$D'f^{-1} = Df$$

Exemplos:

1. Determina a função inversa das seguintes funções:

a) $f(x) = x + 1 \Leftrightarrow y = x + 1 \Leftrightarrow x = y - 1 \Leftrightarrow y = x - 1 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x - 1$

b) $f(x) = 2^x + 2 \Leftrightarrow y = 2^x + 2 \Leftrightarrow y - 2 = 2^x \Leftrightarrow x = \log_2(y - 2) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \log_2(y - 2)$

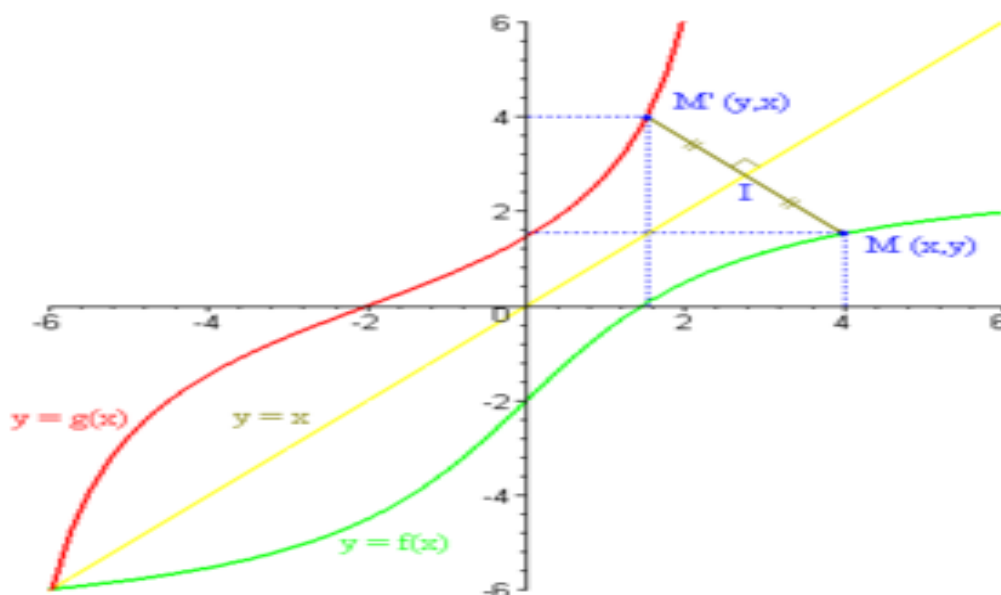
c) $f(x) = 2\log_2(x - 3) + 2 \Leftrightarrow y - 2 = 2\log_2(x - 3) \Leftrightarrow \frac{y-2}{2} = \log_2(x - 3) \Leftrightarrow 2^{\frac{y-2}{2}} = x - 3 \Leftrightarrow$

$$x = 2^{\frac{y-2}{2}} + 3 \Leftrightarrow y = 2^{\frac{x-2}{2}} + 3 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = 2^{\frac{x-2}{2}} + 3$$

d) $f(x) = \frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow y(x-1) = x+2 \Leftrightarrow yx - y = x+2 \Leftrightarrow yx - x = y+2 \Leftrightarrow x(y-1) = y+2$

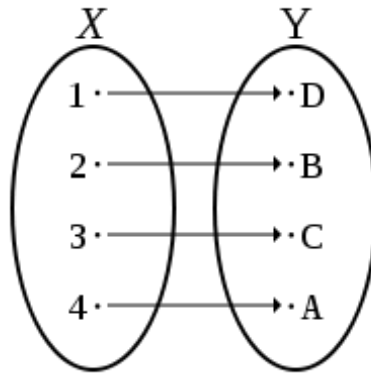
$$\Leftrightarrow x = \frac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow y = \frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

Resumo sobre função inversa



A função inversa g de uma função real de variável real f obtém-se de f por uma simetria em relação à recta $y = x$.

Em matemática, a **função inversa** de uma função $f : X \rightarrow Y$ é, quando existe, a função $f^{-1} : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$ e $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$ (id=função identidade). Ou seja, o que era domínio na função original (o conjunto X neste caso, ilustrado na figura abaixo) vira imagem na função inversa, e o que era imagem na função original (Y , neste caso - ilustrado na figura abaixo) vira domínio.



Uma função que tenha inversa diz-se **invertível**. Se uma função for invertível, então tem uma única inversa. Uma condição necessária e suficiente para que uma função seja invertível é que seja **bijectiva**.

Se f for uma **função injectiva e sobrejectiva** de x em y ao mesmo tempo, então f é também uma função bijectiva de x em $f(x)$. Consequentemente, tem uma inversa de $f(x)$ em x . Por abuso de linguagem, também se designa esta função por inversa de f , embora o seu domínio não seja, em geral, o conjunto y .

Somente as funções bijectoras apresentam inversa, pois qualquer número do domínio tem um único correspondente no **contradomínio** (injectiva) e este tem todos os seus valores relacionados uma única vez (sobrejectiva). Assim, podemos estabelecer uma relação inversa, transformando o **contradomínio** em domínio, e o domínio em contradomínio de uma função. A expressão que representa essa troca é chamada de função inversa, e é representada por $f^{-1}(x)$.

Exemplo:

1. Dada a função: $f(x) = x + 1$, determina a sua inversa.

1º $y = x + 1$.

2º $x = y + 1$. Trocar a variável x por y e y por x .

3º $y = x - 1$. Resolver a equação em ordem a y .

4º $f^{-1}(x) = x - 1$. É a função inversa de $f(x) = x + 1$.

1.8. Composição de funções

Dadas duas funções reais de variável real f e g , de Domínio Df e Dg , respectivamente, chama-se **função composta de g com f** e representa-se por $g \circ f$ à função assim definida.

$$Gof: Dg \circ f \rightarrow IR \quad x \rightarrow f(x) \rightarrow g[f(x)] \quad x \rightarrow g[f(x)]$$

$$\text{Onde: } - Dg \circ f = \{x \in IR: x \in Df \wedge f(x) \in Dg\}$$

- A função $g \circ f$ lê-se “ g após f ” ou “ f seguido de g ”.

- A função composta $g \circ f$ faz corresponder a um objecto x uma imagem $f(x)$ como objecto para a função g .

- A composição de funções não é comutativa mas é associativa.

Exemplos:

1. Sejam as funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = x + 1$. Determina:

a) $(f \circ g)(3) = f[g(3)] = f(3 + 1) = f(4) = 2 \cdot 4 = 8$

b) $(g \circ f)(3) = g[f(3)] = g(6) = 6 + 1 = 7$

c) $(f \circ f)(-4) = f[f(-4)] = f(-8) = 2 \cdot (-8) = -16$

d) $(g \circ g)(4) = g[g(4)] = g(5) = 6$

e) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x + 1) = 2(x + 1) = 2x + 2$

f) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x) = 2x + 1$

2. Sabendo que $g(x) = 8x$ e $g[f(x)] = 16x + 32$, determina $f(x)$.

$$g[f(x)] = 8f(x) = 16x + 32 \leftrightarrow f(x) = \frac{16x + 32}{8} \leftrightarrow f(x) = 2x + 4$$



II. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Dado o conjunto $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e a função $f: A \rightarrow B$, definida por $f(x) = x + 1$, nomeando seus elementos e representando-os em diagrama, teremos:

$$f = \{(-2, -1); (-1, 0); (0, 1); (1, 2); (2, 3)\}$$

$$Im(f) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

2. Determina o Domínios das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x$

b) $g(x) = \frac{2}{x+1}$

c) $h(x) = \sqrt{2x - 4}$

d) $l(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$

Resolução:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x$. O domínio de existência de uma função polinomial é todo o **conjunto dos números reais** (conjunto $\mathbb{R}$), logo a função $f(x)$ tem domínio $\mathbb{R}$.

b) $g(x) = \frac{2}{x+1}$ Domínio de existência: $x \in \mathbb{R} \wedge x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Logo: O Domínio de existência da função $g(x)$ é: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

c) $h(x) = \sqrt{2x-4}$ Domínio de existência: $2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2; x \in [2; +\infty[$

Logo: O Domínio de existência da função $h(x)$ é: $x \in [2; +\infty[$

d) $l(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ Domínio de existência: $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1; x \in]-1; +\infty[$

Logo: O Domínio de existência da função $l(x)$ é: $x \in]-1; +\infty[$

3. A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$, é injectiva.

Sempre que escolhermos dois valores distintos do Domínio para esta função as imagens serão sempre diferentes:

Sendo $x_1 = -2$ e $x_2 = 3$, temos:

$$\begin{cases} (-2)^3 = -8 \\ 3^3 = 27 \end{cases}$$

Logo: $-2 \neq 3 \rightarrow -8 \neq 27$ para $\forall x_1 \in \mathbb{R}$ e $\forall x_2 \in \mathbb{R} \rightarrow x_1 \neq x_2 \rightarrow (x_1)^3 \neq (x_2)^3$.

4. A função $f: \mathbb{R}^+ \Rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^2$, é injectiva.

Sempre que escolhermos dois valores distintos do Domínio para esta função as imagens serão sempre diferentes:

Sendo $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$, temos: $\begin{cases} 2^2 = 4 \\ 3^2 = 9 \end{cases}$

Logo: $2 \neq 3 \rightarrow 4 \neq 9$ para $\forall x_1$ e $x_2 \in \mathbb{R} \rightarrow x_1 \neq x_2 \rightarrow (x_1)^2 \neq (x_2)^2$.

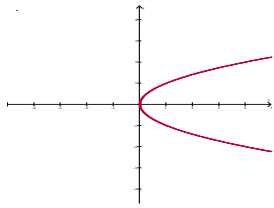
5. A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Definida por $f(x) = x^2$, não é injectiva, pois:

$$-2 \neq +2 \Rightarrow (-2)^2 = (+2)^2 \Leftrightarrow 4 = 4$$

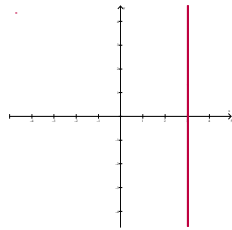


III. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

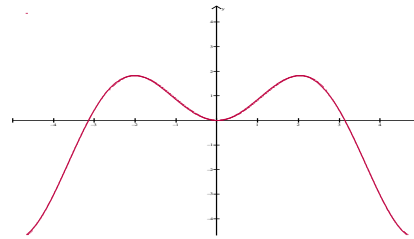
1. Dos gráficos que se seguem, indica os que são de funções e os que não são, justificando:



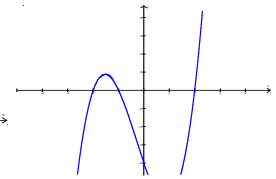
A



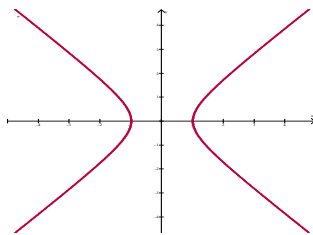
B



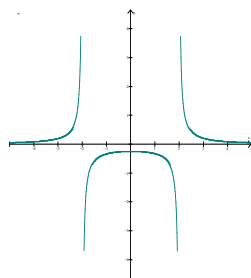
C



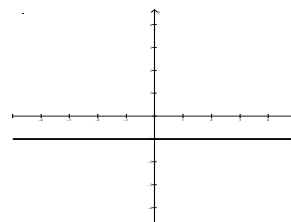
D



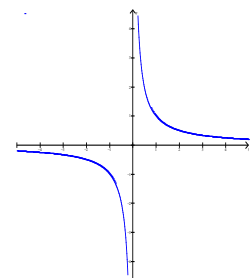
E



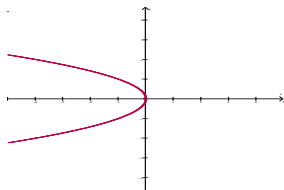
F



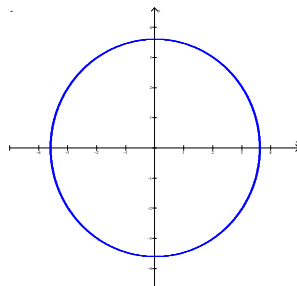
G



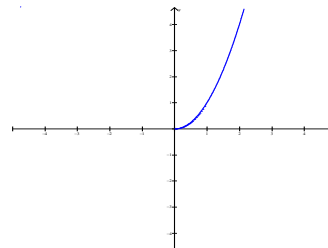
H



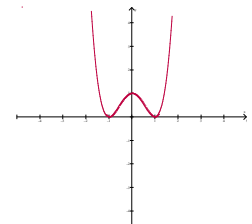
I



J



K



L

2. Determina o conjunto imagem da função $f: A \rightarrow B$, definida por $f(x) = 3x^2 - 5$, sendo $A = \{-1, 2, \sqrt{2}, \sqrt{5}\}$
3. Quais dos pares $(0, -4); (1, 6); (1, -3); (1, -4); (-1, -6)$ e $(-1, -3)$ pertencem a função definida por $f(x) = (x + 2)(x - 2)$?
4. Determina o Domínios das seguintes funções reais:

a) $f(x) = \frac{3x}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}}$

c) $\frac{2}{x^2-1} + \frac{3}{x}$

d) $\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}$

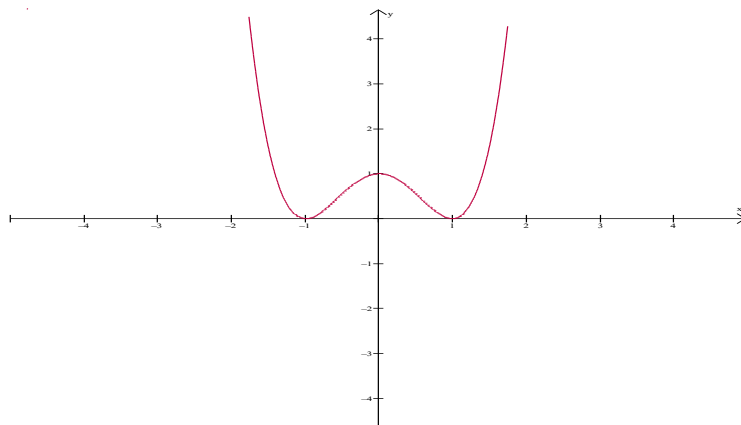
5. Identifica em que intervalos reais as funções são crescentes ou decrescentes:

a) $f(x) = x + 2$

b) $h(x) = x^2$

c) $g(x) = 2 - 3x$

6. Determina em que intervalos a função seguinte é decrescente:



7. Classifica as funções em injectivas, sobrejectivas ou bijectivas:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x + 1$

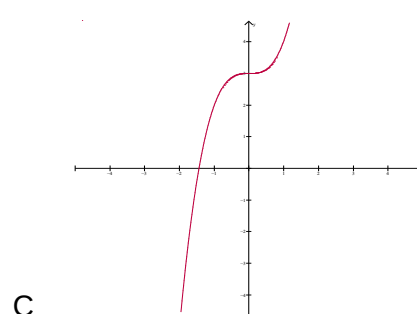
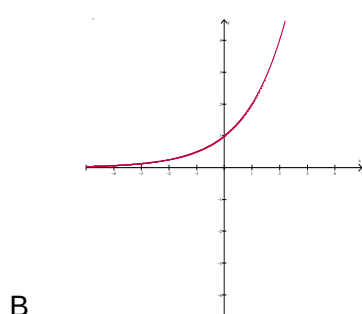
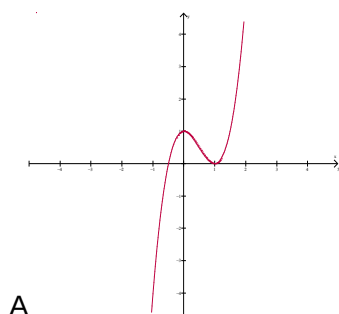
c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$; $y = 2x^2$

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$; $y = |x - 1|$

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x - 3$

f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $y = 3$

8. Verifica se as funções reais representadas nos gráficos são bijectivas:



9. Seja $f(x) = \frac{ax+b}{cx+8}$; determina os valores de a, b e c , sabendo que o gráfico passa por $(1; -2)$ e $(0; -\frac{5}{8})$ e tem como assíntota vertical $x = 2$.

10. Seja $f(x) = \frac{ax+b}{cx+6}$; determina a e c , se $AV: x = -2$ e $AH: y = 4$.

11. Considere as funções: $f(x) = \frac{2}{x}$ e $g(x) = \frac{x+2}{2x-1}$.

a) Construa os gráficos.

b) Faz o estudo completo.

12. Determina $f^{-1}(x)$ se :

a) $f(x) = 2x - 4$

b) $f(x) = ax + b, a \neq 0$

c) $f(x) = \frac{1}{x+4} - 2$

d) $f(x) = 2^x - 2$

e) $f(x) = 2^{x-4}$

f) $f(x) = \log_2\left(\frac{x}{2} - 1\right)$

g) $f(x) = 2\lg x$

13. Dadas as funções: $f = \{(0,4)(1,0)(2,1)(3,2)\}$ e $g = \{(0,2)(1,3)(2,0)(3,4)\}$, determina:

- a. $(f \circ g)(0) =$ b. $(f \circ f)(2) =$ c. $(g \circ f)(3) =$ d. $(g \circ g)(1) =$

14. Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$, determina:

- a) $(f \circ f)(5)$ b) $(g \circ f)(5)$ c) $(f \circ g)(-3)$
d) $(g \circ f)(3)$ e) $(f \circ f)(x)$

15. Calcula $(g \circ f)(-2)$ e $(f \circ g)(3)$ para cada um dos pares das funções definidas por:

- a) $f(x) = x$ e $g(x) = x - 1$ b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ e $g(x) = x + 2$
c) $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 3x + 2$ d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $g(x) = 2x$



I. RESUMO

1.1. Noção de sucessão

Uma sucessão de números reais (a_n) é uma função f em que o domínio é o conjunto dos números naturais e as imagens são números reais. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \rightarrow a_n$

Os valores da função $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, são designados termos da sucessão.

Assim, numa sucessão:

$n \rightarrow$ ordem do termo

$f(n) = a_n$ é o termo geral da sucessão

$(f(n))$ ou $(a_n) \rightarrow$ Representa a sucessão

1.1.1. Termo Geral da Sucessão

O conceito de número está ligado a objectos cuja quantidade é por ele representada. É uma ideia abstracta que associa a cada objecto uma unidade. A sucessão dos números naturais 1, 2, 3, 4, 5, ... envolve outros conceitos além do conceito de número:

- Os números estão dispostos por certa ordem;
- Conhecido um elemento da sucessão conhece-se o seguinte;
- Não há um último elemento, mas há um primeiro elemento.

Esta sucessão é a mais simples de todas e a partir dela surgem todas as outras. Chama-se **sucessão de números reais ou sequência** a uma função que a cada número natural faz corresponder um número real.

Termo geral de uma sucessão é **a lei ou relação definida para a obtenção de cada termo da sucessão**. O termo geral de uma sucessão define a lei de formação da sucessão pela qual se pode obter todos os seus termos a partir do termo geral podemos obter os seguintes termos, elas podem ser finitas ou infinitas.

1.2. Monotonia de uma sucessão

Uma sucessão (u_n) diz-se monótona quando ela for crescente ou decrescente.

Exemplos:

a) $u_n = (2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots)$

b) $b_n = (11, 9, 7, 5, 3, \dots)$

1.3. Sucessão estritamente crescente

Uma sucessão (u_n) é crescente se cada termo seguinte é maior que o termo anterior, ou seja, se:

$$u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N} \leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemplos: $u_n = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$; $b_n = (1, 4, 9, 16, 25, \dots)$

1.4. Sucessão crescente em sentido lato

Uma sucessão (u_n) é crescente em sentido lato se cada termo é maior ou igual ao termo anterior, ou seja, se:

$$u_{n+1} \geq u_n, \forall n \in \mathbb{N} \leftrightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemplos: $u_n = (1, 2, 2, 3, 4, 4, \dots)$; $b_n = (3, 7, 9, 9, 15, 18, \dots)$

1.5. Sucessão estritamente decrescente

Uma sucessão (u_n) é decrescente se cada termo seguinte é menor que termo anterior, ou seja, se:

$$u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N} \leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemplos: $u_n = (4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots)$; $b_n = (11, 9, 7, 5, \dots)$

1.6. Sucessão decrescente em sentido lato

Uma sucessão (u_n) é decrescente em sentido lato se cada termo seguinte é menor ou igual ao termo anterior, ou seja, se: $u_{n+1} \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N} \leftrightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplos:

$$u_n = (4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots) \quad b_n = (11, 9, 9, 7, 7, 5, \dots)$$

Exemplos: Estude a monotonia das sucessões e definidas por:

a) $u_n = \frac{n}{n+1}$

b) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Resolução algébrica

a) $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+2).(n+1)} = \frac{1}{(n+2).(n+1)}$ Como $n+2 > 0$ e $n+1 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então; $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$.

Pode se concluir que a sucessão dada é estritamente crescente, ou seja, que é monótona crescente em sentido estrito.

b) $a_{n+1} - a_n < 0 \leftrightarrow a_{n+1} < a_n \leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \leftrightarrow \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3}$ Como $\frac{2}{3} < 1$, a sucessão é monótona decrescente em sentido estrito.

1.7. Sucessão Constante

$$a_n - a_{n-1} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemplo: $u_n = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots)$

1.8. Sucessão alternada/oscilante

Uma sucessão diz-se alternada quando é periódica.

Exemplos:

a) $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$

b) $2, 3, 4, 5, 2, 3, 4, 5, 2, 3, 4, 5, \dots$

1.9. Sucessão Limitada

Uma sucessão (a_n) é limitada se existem dois números reais m e M tais que:

$$m \leq a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N} \text{ em que } m \text{ é minorante do conjunto e } M \text{ é majorante.}$$

Exemplos:

1. A sucessão $a_n = 2n + 1$ é minorante ($m=3$) mas não é majorante pois os seus termos tendem para o mais infinito.

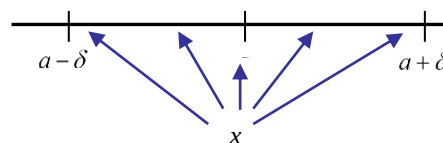
2. A sucessão $b_n = \frac{2}{n}$, os seus termos tendem a zero isto é, estão entre 2 e 0, logo é uma sucessão limitada, pois m (minorante) $=0$ e M (Majorante) $=2$.

1.10. Limites de Sucessões

1.10.1. Vizinhança de um número real

Dizemos que x é valor aproximado de a com erro inferior δ

se: $|x - a| < \delta$, sendo $|x - a|$ o **erro de x em relação a a** .



Repare-se que:

$$\begin{aligned}
& |x - a| < \delta \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow x - a < \delta \quad \wedge \quad x - a > -\delta \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow x < \delta + a \quad \wedge \quad x > -\delta + a \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta \\
& \Leftrightarrow x \in]a - \delta, a + \delta[
\end{aligned}$$

Definição:

Ao intervalo $]a - \delta, a + \delta[$ chama-se **vizinhança de centro a e raio δ** e representa-se por $V_\delta(a)$, isto é,

$V_\delta(a) =]a - \delta, a + \delta[$. (portanto, vizinhança de a de raio δ é o conjunto de todos os valores aproximados de a com erro inferior a δ .)

Exemplo: $V_{0,1}(3) =]3 - 0,1; 3 + 0,1[=]2,9; 3,1[$

OBS: Qualquer intervalo de números reais aberto pode ser escrito sob a forma de vizinhança do seguinte modo:

$$]a, b[= V_{\frac{b-a}{2}}\left(\frac{b+a}{2}\right)$$

Exemplo: $]10,6; 11,4[= V_{\frac{11,4-10,6}{2}}\left(\frac{11,4+10,6}{2}\right) = V_{0,4}(11)$

1.10.2. Limite de uma sucessão

Definição:

Uma sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tem por limite, tende para a ou converge para a** , $a \in \mathbb{R}$ se para todo o $\delta \in \mathbb{R}^+$ existe uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão são valores aproximados de a a menos de δ , ou seja, todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo $]a - \delta, a + \delta[$.

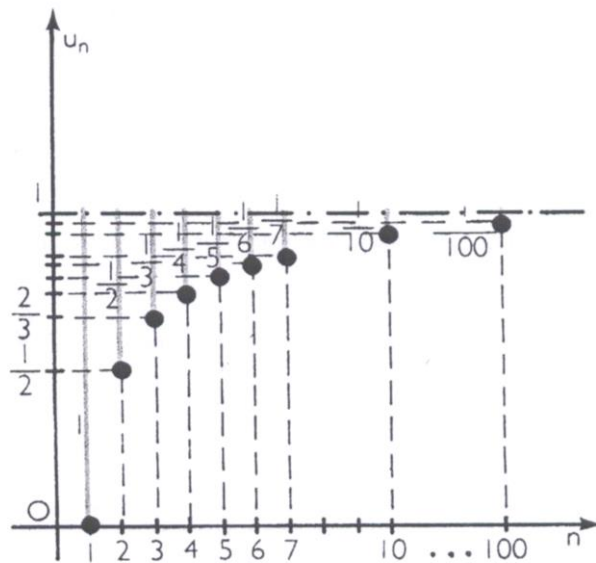
Simbolicamente, tem-se:

$$\lim u_n = a \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > p \Rightarrow |u_n - a| < \delta \quad \text{ou}$$

$$\lim u_n = a \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > p \Rightarrow u_n \in V_\delta(a)$$

Consideremos a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de termo geral $u_n = \frac{n-1}{n}$.

Calculamos os seus primeiros termos e esboçemos o seu gráfico.



$$u_1 = \frac{1-1}{1} = 0 ; \quad u_2 = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} ; \quad u_3 = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3} ; \quad u_4 = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4} ; \quad u_5 = \frac{5-1}{5} = \frac{4}{5} ; \quad \dots ; \quad u_{100} = \frac{100-1}{100} = \frac{99}{100}$$

Verifica-se que os termos da sucessão se vão aproximando de 1.

Analise-se o erro de cada termo em relação a 1.

- $u_1 = 0 \rightarrow |0-1| = 1$
- $u_2 = \frac{1}{2} \rightarrow \left| \frac{1}{2} - 1 \right| = \frac{1}{2} = 0,5$
- $u_3 = \frac{2}{3} \rightarrow \left| \frac{2}{3} - 1 \right| = \frac{1}{3} = 0,33$
- $u_4 = \frac{3}{4} \rightarrow \left| \frac{3}{4} - 1 \right| = \frac{1}{4} = 0,25$
- $u_5 = \frac{4}{5} \rightarrow \left| \frac{4}{5} - 1 \right| = \frac{1}{5} = 0,2$
- $u_{100} = \frac{99}{100} \rightarrow \left| \frac{99}{100} - 1 \right| = \frac{1}{100} = 0,01$

Observa-se que os erros se estão a aproximar-se de zero, logo os termos da sucessão se aproximam **d**.

1. Portanto, fixando um erro qualquer δ , podemos sempre determinar uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão são valores aproximados de 1, com erro inferior a δ , isto é,

$$\forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > p \Rightarrow |u_n - 1| < \delta \quad \text{ou} \quad \forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > p \Rightarrow u_n \in V_\delta(1).$$

Neste caso, dizemos que 1 é o **limite** da sucessão e representa-se por:

$\lim u_n = 1$ ou $u_n \rightarrow 1$ (lê-se u_n tende para 1 ou u_n converge para 1).

Exemplo: Mostra que a sucessão de termo geral $a_n = \frac{2n}{n+3}$ tende para 2.

Resolução:

$$\lim a_n = 2 \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > p \Rightarrow |a_n - 2| < \delta$$

$$\text{Ora, } |a_n - 2| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{2n}{n+3} - 2 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{2n - 2n - 6}{n+3} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{-6}{n+3} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{6}{n+3} < \delta \Leftrightarrow 6 < n\delta + 3\delta \Leftrightarrow n\delta + 3\delta > 6 \Leftrightarrow n > \frac{6-3\delta}{\delta}.$$

Portanto, podemos escrever $n > \frac{6-3\delta}{\delta} \Rightarrow \left| \frac{2n}{n+3} - 2 \right| < \delta$; e, conseqüentemente, tomando p um número natural maior ou igual a $\frac{6-3\delta}{\delta}$, temos que é verdadeira a proposição

$$\forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > p \Rightarrow |a_n - 2| < \delta.$$

Então, $\lim a_n = 2$ ou a_n tende para 2.

1.10.3. Sucessões convergentes

Definição:

Uma sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é **convergente** se tem por limite um número real a . Dizemos que a sucessão tende para a , converge para a ou que o seu limite é a .

Simbolicamente, escreve-se: $\lim u_n = a$ ou $u_n \rightarrow a$.

Se uma sucessão não é convergente, diz-se que é **divergente**.

Exemplo: Mostra, a partir da definição, que a sucessão de termo geral $w_n = \frac{2n+1}{n}$ não converge para 1.

Resolução:

Suponhamos que $w_n \rightarrow 1$. Então, $\forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > p \Rightarrow |w_n - 1| < \delta$.

$$\text{Ora, } |w_n - 1| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{2n+1}{n} - 1 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{2n+1-n}{n} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{n+1}{n} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} < \delta \Leftrightarrow n+1 < n\delta \Leftrightarrow n\delta > 1+n \Leftrightarrow n\delta - n > 1 \Leftrightarrow n(\delta-1) > 1$$

Se $\delta - 1 > 0 \Leftrightarrow \delta > 1$ vem $n > \frac{1}{\delta - 1}$	Se $\delta - 1 < 0 \Leftrightarrow \delta < 1$ vem $n < \frac{1}{\delta - 1}$
Apesar de todos os termos a partir da ordem $\frac{1}{\delta - 1}$ serem valores aproximados de 1 a menos de δ , tal só acontece se $\delta > 1$ e não para qualquer $\delta > 0$, como exige a definição.	Neste caso, os únicos termos que são valores aproximados de 1 a menos de δ são apenas os de ordem inferior a $\frac{1}{\delta - 1}$ e não todos a partir de uma certa ordem como exige a definição.

Portanto, é falso que $w_n \rightarrow 1$, ou seja, w_n não converge para 1.

1.10.4. Teoremas sobre sucessões convergentes

Teorema:

Toda a sucessão constante é convergente e converge para essa constante.

Exemplo:

Considere-se a sucessão $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de termo geral $v_n = 5, \forall n \in \mathbb{N}$. Ora, $\lim v_n = \lim 5 = 5$ ou ainda $v_n \rightarrow 5$.

Teorema da Unicidade do Limite:

O limite de uma sucessão, quando existe, é único.

Exemplo: Mostra que a sucessão de termo geral $u_n = (-1)^{n-2} \times \frac{5}{3}$ é divergente.

Resolução: Calculamos os primeiro quatro termos de (u_n) .

$$u_1 = (-1)^{1-2} \times \frac{5}{3} = (-1)^{-1} \times \frac{5}{3} = -1 \times \frac{5}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$u_2 = (-1)^{2-2} \times \frac{5}{3} = (-1)^0 \times \frac{5}{3} = 1 \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

$$u_3 = (-1)^{3-2} \times \frac{5}{3} = (-1)^1 \times \frac{5}{3} = -1 \times \frac{5}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$u_4 = (-1)^{4-2} \times \frac{5}{3} = (-1)^2 \times \frac{5}{3} = 1 \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

Verificamos que $u_n = (-1)^{n-2} \times \frac{5}{3} = \begin{cases} -\frac{5}{3} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \frac{5}{3} & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$, ou seja, a sub-sucessão dos termos de ordem par

converge para $\frac{5}{3}$ e a dos termos de ordem ímpar converge para $-\frac{5}{3}$; pelo que a sucessão (u_n) não

pode ter como limite $\frac{5}{3}$ e $-\frac{5}{3}$ (Teorema da Unicidade do Limite). Logo, (u_n) não tem limite e por isso é uma sucessão divergente oscilante.

Teorema:

Toda a sub-sucessão de uma sucessão convergente converge para o mesmo limite.

Exemplo:

Considerando a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$, temos que $v_n = \frac{1}{2n}$ é uma sub-sucessão de (u_n) e $u_n \rightarrow 0$. Logo, $v_n \rightarrow 0$.

Teorema (Critério de Convergência):

Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.

Exemplo: Prova que a sucessão de termo geral $a_n = \frac{2n+1}{n+3}$ é convergente.

Resolução:

- *Monotonia*

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n+1)+1}{n+1+3} - \frac{2n+1}{n+3} = \frac{2n+2+1}{n+4} - \frac{2n+1}{n+3} = \frac{2n+3}{n+4} - \frac{2n+1}{n+3} = \frac{2n^2+6n+3n+9-2n^2-n-8n-4}{(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{5}{(n+3)(n+4)} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Como $a_{n+1} - a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, então (a_n) é monótona crescente.

- *Limitada*

Pretende-se mostrar que $\exists L \in \mathbb{R}^+ : |a_n| \leq L, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Ora, } |a_n| \leq L \Leftrightarrow \left| \frac{2n+1}{n+3} \right| \leq L \Leftrightarrow \frac{2n+1}{n+3} \leq L \Leftrightarrow 2n+1 \leq nL+3L \Leftrightarrow 2n-nL \leq 3L-1 \Leftrightarrow n(2-L) \leq 3L-1$$

Tomando $L=2$, tem-se $n(2-2) \leq 3 \times 2 - 1 \Leftrightarrow 0n \leq 5$, o que é uma condição universal em $\mathbb{N}$.

Logo, (a_n) é limitada.

Portanto, como (a_n) é monótona e limitada, então é convergente.

1.11. Infinitésimos

Definição:

Uma sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um **infinitésimo** se o seu limite é zero.

$$(u_n) \text{ infinitésimo} \Leftrightarrow \lim u_n = 0$$

$$\Leftrightarrow u_n \rightarrow 0$$

Simbolicamente, escreve-se:

$$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > p \Rightarrow u_n \in V_\delta(0)$$

$$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > p \Rightarrow |u_n| < \delta$$

Exemplo: Prova que a sucessão de termo geral $a_n = \frac{5}{2n+5}$ é um infinitésimo.

Resolução:

Quer-se mostrar que $\forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > p \Rightarrow |a_n| < \delta$.

$$\text{Ora, } |a_n| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{5}{2n+5} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{5}{2n+5} < \delta \Leftrightarrow 5 < 2n\delta + 5\delta \Leftrightarrow -2n\delta < 5\delta - 5 \Leftrightarrow 2n\delta > -5\delta + 5 \Leftrightarrow n > \frac{-5\delta + 5}{2\delta}.$$

Assim, tomando p um número natural maior ou igual a $\frac{5-5\delta}{2\delta}$, temos que é verdadeira a proposição $\forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > p \Rightarrow |a_n| < \delta$.

Então, $\lim a_n = 0$ ou a_n tende para 0. Portanto, a_n é um infinitésimo.

1.11.1. Infinitésimos de referência

Consideram-se infinitésimos de referência as seguintes sucessões de termo geral:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{n^2}$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$d_n = \frac{1}{2^n}$$

1.11.2. Infinitamente grandes

Considere-se a sucessão dos números pares: $u_n = 2n$ e escreva-se os seus seis primeiros termos:

2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; ...

Existirá um número par maior do que todos os outros? Não. Por maior que seja o número par que se imagine, existe sempre um maior do que ele e todos os números pares seguintes são também maiores do que o número imaginado.

Diz-se que a sucessão dos números pares é um infinitamente grande positivo ou que tende para mais infinito. Simbolicamente escreve-se: $\lim(2n) = +\infty$ ou $2n \rightarrow +\infty$.

Definição:

Uma sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um **infinitamente grande positivo** se, qualquer que seja o número real positivo L , existe uma ordem a partir da qual todos os termos de (u_n) são maiores do que L , isto é,

$$(u_n) \text{ é um infinitamente grande positivo} \Leftrightarrow \forall L > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > p \Rightarrow u_n > L$$

Simbolicamente, escreve-se: $u_n \rightarrow +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$.

1.11.3. Infinitamente grande positivo

Exemplo: Mostra que a sucessão de termo geral $b_n = 2n + 1$ é um infinitamente grande positivo.

Resolução:

Pretende-se provar que $\forall L > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > p \Rightarrow b_n > L$. Seja $L > 0$ qualquer.

Ora, $u_n > L \Leftrightarrow 2n + 1 > L \Leftrightarrow 2n > L - 1 \Leftrightarrow n > \frac{L-1}{2}$. Assim, tomando p um número natural maior ou igual a $\frac{L-1}{2}$, temos que todos os termos da sucessão de ordem superior a p são maiores do que L , ou seja, é verdadeira a proposição $\forall L > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > p \Rightarrow b_n > L$.

Então, $\lim b_n = +\infty$ ou $b_n \rightarrow +\infty$. Portanto, b_n é um infinitamente grande positivo.

1.11.4. Infinitamente grandes positivos de referência

Consideram-se infinitamente grandes positivos de referência as seguintes sucessões de termo geral:

$$a_n = n$$

$$b_n = n^2$$

$$c_n = \sqrt{n}$$

$$d_n = 2^n$$

1.11.5. Infinitamente grande negativo

Definição:

Uma sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um **infinitamente grande negativo** se a sucessão $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cujos termos são simétricos dos da sucessão (u_n) , é um infinitamente grande positivo, isto é,

$$(u_n) \text{ é um infinitamente grande negativo} \Leftrightarrow (-u_n) \text{ é um infinitamente grande positivo, ou seja,}$$

$$u_n \rightarrow -\infty \Leftrightarrow -u_n \rightarrow +\infty.$$

Exemplo:

Mostra que a sucessão de termo geral $c_n = 1 - 5n$ é um infinitamente grande positivo.

Resolução:

Para mostrar que $\lim u_n = -\infty$ temos de mostrar que $\lim (-u_n) = +\infty$, ou seja,

$\forall L > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > p \Rightarrow -u_n > L$. Seja $L > 0$ qualquer.

Ora, $-u_n > L \Leftrightarrow -1 + 5n > L \Leftrightarrow 5n > L + 1 \Leftrightarrow n > \frac{L+1}{5}$. Assim, tomando p um número natural maior ou igual a

$\frac{L+1}{5}$, temos que todos os termos da sucessão $(-u_n)$ de ordem superior a p são maiores do que L , ou seja, é verdadeira a proposição $\forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > p \Rightarrow -u_n > L$.

Então, $\lim (-u_n) = +\infty$ e assim ou $\lim u_n = -\infty$. Portanto, u_n é um infinitamente grande negativo.

1.11.6. Infinitamente grandes negativos de referência

Consideram-se infinitamente grandes negativos de referência as seguintes sucessões de termo geral:

$$a_n = -n$$

$$b_n = -n^2$$

$$c_n = -\sqrt{n}$$

$$d_n = -2^n$$

1.11.7. Infinitamente grande em módulo

Definição:

Uma sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um **infinitamente grande em módulo** se a sucessão $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ cujos termos são o módulo dos da sucessão (u_n) , é um infinitamente grande positivo, isto é,

(u_n) é um **infinitamente grande em módulo** $\Leftrightarrow u_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow (|u_n|)$ é um **infinitamente grande positivo**, ou seja, $|u_n| \rightarrow +\infty$.

Exemplo:

Mostra que a sucessão de termo geral $d_n = (-1)^n \cdot (1 - 3n)$ é um infinitamente grande em módulo.

Resolução:

Para mostrar que d_n é um infinitamente grande em módulo temos de mostrar que $\lim (|d_n|) = +\infty$, ou seja, $\forall L > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > p \Rightarrow |d_n| > L$. Seja $L > 0$ qualquer.

Ora, $|d_n| > L \Leftrightarrow |(-1)^n \cdot (1-3n)| > L \Leftrightarrow |(-1)^n| \cdot |1-3n| > L \Leftrightarrow -1+3n > L \Leftrightarrow 3n > L+1 \Leftrightarrow n > \frac{L+1}{3}$. Assim, tomando p um número natural maior ou igual a $\frac{L+1}{3}$, temos que todos os termos da sucessão $|d_n|$ de ordem superior a p são maiores do que L , ou seja, é verdadeira a proposição $\forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > p \Rightarrow |d_n| > L$.

Então, $\lim(|d_n|) = +\infty$ e portanto, d_n é um infinitamente grande em módulo.

1.11.8. Infinitamente grandes em módulo de referência

Consideram-se infinitamente grandes em módulo de referência as seguintes sucessões de termo geral:

$$a_n = (-1)^n \cdot n$$

$$b_n = (-1)^n \cdot n^2$$

$$c_n = (-1)^n \cdot \sqrt{n}$$

$$d_n = (-1)^n \cdot 2^n$$

1.12. Teorema sobre infinitamente grandes e infinitésimos

Teorema:

O inverso de um infinitamente grande é um infinitésimo e vice-versa, isto é, se

$$u_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} \rightarrow 0, \text{ com } u_n \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad u_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} \rightarrow \infty, \text{ com } u_n \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo:

Prova que $\lim \frac{1}{5+3n} = 0$.

Resolução:

Para provar que $\lim \frac{1}{5+3n} = 0$, basta provar que $\lim (5+3n) = +\infty$, ou seja,

$$\forall L > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > p \Rightarrow 5+3n > L.$$

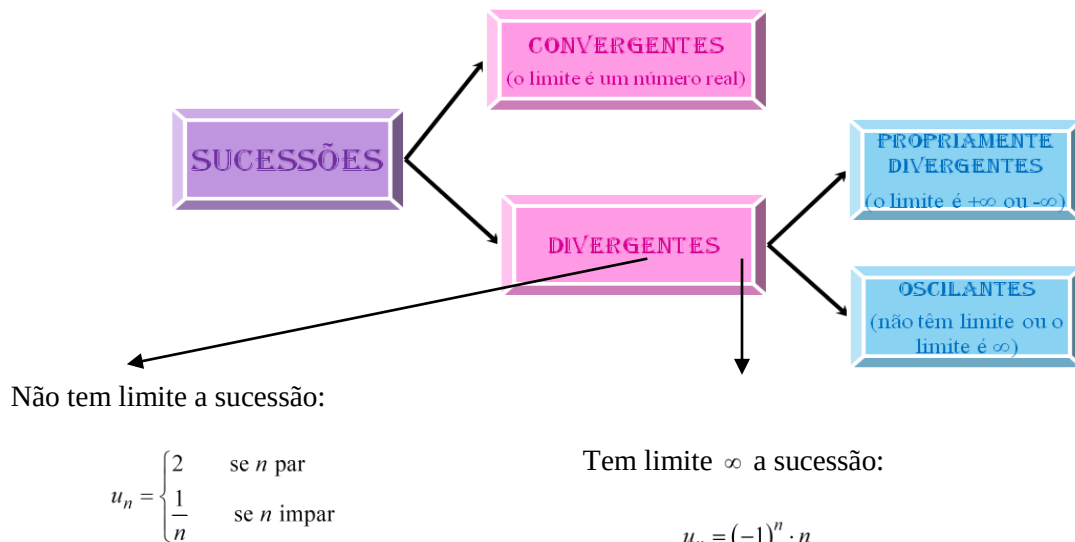
Seja $L > 0$ qualquer.

Ora, $5+3n > L \Leftrightarrow 3n > L-5 \Leftrightarrow n > \frac{L-5}{3}$. Assim, tomando p um número natural maior ou igual a $\frac{L-5}{3}$, temos que todos os termos da sucessão $(5+3n)$ de ordem superior a p são maiores do que L , ou seja, é verdadeira a proposição $\forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > p \Rightarrow 5+3n > L$.

Então, $\lim (5+3n) = +\infty$ e portanto, $\lim \frac{1}{5+3n} = 0$.

1.13. Classificação de sucessões

Quanto à existência e natureza do limite, as sucessões classificam-se em:



1.14. Cálculo do Limite de Sucessões

1.14.1. Operações com sucessões convergentes

Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sucessões convergentes em que: $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Então, verificam-se as seguintes propriedades:

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a + b$$

$$\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n = a - b$$

$$\lim(a_n \times b_n) = \lim a_n \times \lim b_n = a \times b$$

$$\lim \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{a}{b} \quad (b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } b \neq 0)$$

Nota: Se $a \neq 0$ e $b = 0$, $\lim \frac{a_n}{b_n} = \pm \infty$ ($\frac{a}{0} = \pm \infty$, $a \neq 0$)

$$\lim(a_n^{b_n}) = (\lim a_n)^{\lim b_n} = a^b \quad (a \text{ e } b \text{ não podem ser simultaneamente nulos})$$

$$\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim a_n} = \sqrt[k]{a} \quad (\text{se } k \text{ é par, então } a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N} \wedge a \geq 0)$$

Exemplo: Considera as sucessões de termo geral $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ e $v_n = \frac{3n+1}{2n}$. Calcula:

a) $\lim u_n$

b) $\lim v_n$

c) $\lim \left[\left(\frac{2u_n - v_n}{u_n} \right)^2 \right]$

Resolução:

a) $\lim u_n = \lim \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \lim 1 - \lim \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1$

b) $\lim v_n = \lim \frac{3n+1}{2n} = \lim \left(\frac{3n}{2n} + \frac{1}{2n} \right) = \lim \frac{3n}{2n} + \lim \frac{1}{2n} = \lim \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \lim \frac{1}{n} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{3}{2} + 0 = \frac{3}{2}$

c)
$$\begin{aligned} \lim \left[\left(\frac{2u_n - v_n}{u_n} \right)^2 \right] &= \left[\lim \left(\frac{2u_n - v_n}{u_n} \right) \right]^2 = \left[\lim \left(\frac{2u_n}{u_n} - \frac{v_n}{u_n} \right) \right]^2 = \left[\lim \left(2 - \frac{v_n}{u_n} \right) \right]^2 = \left(\lim 2 - \lim \frac{v_n}{u_n} \right)^2 \\ &= \left(2 - \frac{\lim v_n}{\lim u_n} \right)^2 = \left(2 - \frac{\frac{3}{2}}{1} \right)^2 = \left(2 - \frac{3}{2} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

1.14.2. Operações com sucessões divergentes

Considere-se duas sucessões $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que têm por limite $+\infty$, ou seja, $\lim a_n = +\infty$ e $\lim b_n = +\infty$.

Então, $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = +\infty$.

Simbolicamente, escreve-se: $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

Tomando $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, outros resultados podem simbolicamente ser assim escritos:

- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

- $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

- $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

- $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

- $a \times (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$

- $a \times (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ +\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$

- $a + (+\infty) = +\infty$

- $a + (-\infty) = -\infty$

- $a - (+\infty) = -\infty$

- $a - (-\infty) = +\infty$

- $\frac{+\infty}{a} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$

- $\frac{-\infty}{a} = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ +\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$

- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$

- $\frac{a}{0} = \infty$

Exemplo: Considera as sucessões de termo geral $u_n = 2 + \frac{3}{n}$ e $v_n = -2n$. Calcula:

- a) $\lim u_n$ b) $\lim v_n$ c) $\lim (u_n \cdot v_n)$ d) $\lim (3v_n)$ e) $\lim \left(-\frac{1}{2}v_n\right)$

Resolução:

$$\text{a) } \lim u_n = \lim \left(2 + \frac{3}{n}\right) = \lim 2 + \lim \frac{3}{n} = 2 + 3 \lim \frac{1}{n} = 2 + 3 \times 0 = 2$$

$$\text{b) } \lim v_n = \lim (-2n) = \lim (-2) \times \lim n = -2 \times (+\infty) = -\infty$$

$$\text{c) } \lim (u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n = 2 \times (-\infty) = -\infty$$

$$\text{d) } \lim (3v_n) = \lim 3 \cdot \lim v_n = 3 \times (-\infty) = -\infty$$

$$\text{e) } \lim \left(-\frac{1}{2}v_n\right) = \lim \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \lim v_n = -\frac{1}{2} \times (-\infty) = +\infty$$

1.14.3. Indeterminações

Do cálculo de limites com sucessões convergentes podem resultar situações do tipo $\frac{0}{0}$ ou 0^0 e quando os cálculos envolvem operações com sucessões divergentes podem acontecer casos de $\infty - \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \times \infty$; ∞^0 e 1^∞ .

Nestes casos não é possível indicar, de uma forma directa, o limite. Por vezes esse limite nem existe. São situações chamadas de indeterminação.

Quando, efectuando alguns cálculos, se consegue Determinar o limite, diz-se que se levantou a indeterminação.

As indeterminações a estudar são do tipo $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; $0 \times \infty$ e $\infty - \infty$.

1.14.3.1. Indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Exemplo: Calcula o seguinte limite: $\lim \frac{3n^2 + 2n + 1}{-4n^2 + 2}$.

Resolução:

Temos que:

$$\lim (3n^2 + 2n + 1) = \lim 3 \times \lim (n^2) + \lim 2 \times \lim n + \lim 1 = 3 \times (+\infty) + 2 \times (+\infty) + 1 = (+\infty) + (+\infty) + 1 = (+\infty) + 1 = +\infty$$

$$\text{e } \lim (-4n^2 + 2) = \lim (-4) \times \lim (n^2) + \lim 2 = -4 \times (+\infty) + 2 = (-\infty) + 2 = -\infty$$

Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n + 1}{-4n^2 + 2} = \frac{\infty}{\infty}$.

Para levantar indeterminações deste tipo existem dois processos diferentes:

1º Processo: Dividir o numerador e o denominador pela maior potência de n .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n + 1}{-4n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{-4n^2}{n^2} + \frac{2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{-4 + \frac{2}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} (-4) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}} = \frac{3 + 0 + 0}{-4 + 0} = -\frac{3}{4}$$

2º Processo: Pôr em evidência no numerador e no denominador o termo em n de maior grau.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n + 1}{-4n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 \left(1 + \frac{2}{3n} + \frac{1}{3n^2} \right)}{-4n^2 \left(1 - \frac{2}{4n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{-4n^2} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{3n} + \frac{1}{3n^2}}{1 - \frac{2}{4n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{4} \right) \times \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{4n^2}} = -\frac{3}{4} \times \frac{1 + 0 + 0}{1 - 0} = -\frac{3}{4}$$

Generalizando teremos: As indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ levantam-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_{p-1} n + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + a_{q-1} n + a_q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^p \left(1 + \frac{a_1}{a_0 n} + \dots + \frac{a_{p-1}}{a_0 n^{p-1}} + \frac{a_p}{a_0 n^p} \right)}{b_0 n^q \left(1 + \frac{b_1}{b_0 n} + \dots + \frac{b_{q-1}}{b_0 n^{q-1}} + \frac{b_q}{b_0 n^q} \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^p}{b_0 n^q} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{a_1}{a_0 n} + \dots + \frac{a_{p-1}}{a_0 n^{p-1}} + \frac{a_p}{a_0 n^p} \right)}{\left(1 + \frac{b_1}{b_0 n} + \dots + \frac{b_{q-1}}{b_0 n^{q-1}} + \frac{b_q}{b_0 n^q} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^p}{b_0 n^q} \times 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^p}{b_0 n^q} \end{aligned}$$

Ou seja, este tipo de indeterminação levanta-se, normalmente, através do cálculo do limite do quociente entre os termos de mais alta potência do numerador e do denominador.

1.14.3.2. Indeterminações do tipo $0 \times \infty$

Este tipo de indeterminações reduz-se a indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, efectuando cálculos.

Exemplo: Calcula o seguinte limite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{n^3 + 5}{n^2} \right)$.

Resolução:

$$\lim \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{n^3 + 5}{n^2} \right)^{0 \times \infty} = \lim \frac{n^3 + 5}{n^3} = \lim \frac{\frac{n^3}{n^3} + \frac{5}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}} = \frac{\lim 1 + \lim \frac{5}{n^3}}{\lim 1} = \frac{1 + 0}{1} = 1$$

1.14.3.3. Indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$

Este tipo de indeterminações também se reduz a indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, efectuando cálculos.

Exemplo: Calcula o seguinte limite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3n+1}}{\frac{\sqrt{n+1}}{n^2}}$.

Resolução:

1º Processo:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3n+1}}{\frac{\sqrt{n+1}}{n^2}} &= \frac{0}{0} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3n+1}}{\frac{\sqrt{n+1}}{n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{(3n+1)\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2}}{\left(\frac{3n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\sqrt{n+1}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2}{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}\right)\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} n + \lim_{n \rightarrow \infty} 1}} \\ &= \frac{2}{(0^+ + 0^+)\sqrt{+\infty + 1}} = \frac{2}{0 \times \infty} = \dots \end{aligned}$$

2º Processo:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3n+1}}{\frac{\sqrt{n+1}}{n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{(3n+1)\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{\sqrt{(3n+1)^2(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{\sqrt{(9n^2 + 6n + 1)(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{\sqrt{9n^3 + 9n^2 + 6n^2 + 6n + n + 1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{\sqrt{9n^3 + 15n^2 + 7n + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2}}{\sqrt{\frac{9n^3}{n^4} + \frac{15n^2}{n^4} + \frac{7n}{n^4} + \frac{1}{n^4}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{9}{n} + \frac{15}{n^2} + \frac{7}{n^3} + \frac{1}{n^4}}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2}{\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4}}} = \frac{2}{\sqrt{0^+ + 0^+ + 0^+ + 0^+}} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

3º Processo:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{n+1}}}{\frac{0}{n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{(3n+1)\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{2n^2}}{\sqrt{(3n+1)\sqrt{n+1}}} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^4}{(9n^2+6n+1)(n+1)}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^4}{9n^3+9n^2+6n^2+6n+n+1}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4}{9n^3+9n^2+6n^2+6n+n+1}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4}{9n^3+15n^2+7n+1}} \\&= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4n^4}{n^4}}{\frac{9n^3}{n^4} + \frac{15n^2}{n^4} + \frac{7n}{n^4} + \frac{1}{n^4}}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\frac{9}{n} + \frac{15}{n^2} + \frac{7}{n^3} + \frac{1}{n^4}}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4}}} = \sqrt{\frac{2}{0^+ + 0^+ + 0^+ + 0^+}} \\&= \sqrt{\frac{2}{0^+}} = \sqrt{+\infty} = +\infty\end{aligned}$$

1.14.3.4. Indeterminações do tipo $\infty - \infty$

Este tipo de indeterminações levanta-se por dois processos diferentes:

1º Processo: Pôr em evidência o termo em n de maior grau (no caso dos polinômios).

Exemplo: Calcula o seguinte limite: $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^3 - n)$.

Resolução:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^3 - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2n^3 \left(1 - \frac{n}{2n^3} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2n^3 \left(1 - \frac{1}{2n^2} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n^3) \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n^2} \right) = (+\infty) \times (1 - 0) = +\infty$$

2º Processo: Multiplicar e dividir pelo conjugado (no caso dos radicais).

Exemplo: Calcula o seguinte limite: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$.

Resolução:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n})^2 - (\sqrt{n+1})^2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - n - 1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \\&= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)}{\lim_{n \rightarrow \infty} n + \lim_{n \rightarrow \infty} n + \lim_{n \rightarrow \infty} 1} = \frac{-1}{(+\infty) + (+\infty + 1)} = \frac{-1}{(+\infty) + (+\infty)} = \frac{-1}{+\infty} = 0^-\end{aligned}$$

1.14.4. Sucessão do tipo a^n $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de termo geral $u_n = a^n$ ($a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$).

Então, quanto à monotonia e à convergência, tem-se:

$a \in \mathbb{R}$	Monotonia	Convergência
$a > 1$	Monótona crescente	Propriamente divergente $u_n \rightarrow +\infty$
$a = 1$	Constante	Convergente $u_n \rightarrow 1$
$0 < a < 1$	Monótona decrescente	Convergente (infinitésimo) $u_n \rightarrow 0$
$a = 0$	Constante	
$-1 < a < 0$	Não monótona	Divergente oscilante
$a = -1$		
$a < -1$		

Exemplo:

1. Classifica cada uma das seguintes sucessões quanto à monotonia e à convergência:

a) $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

b) $v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

Resolução:

a) Como $\frac{3}{2} > 1$, então (u_n) é monótona crescente e propriamente divergente ($u_n \rightarrow +\infty$).

b) Como $-1 < -\frac{2}{3} < 0$, então (v_n) é não monótona e é um infinitésimo ($v_n \rightarrow 0$).

1.14.4.1. Limites de sucessões do tipo a^n $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

Exemplo:

1. Determina cada um dos seguintes limites:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^n}{2^n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (5^{n+1} - 6^n)$

Resolução:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{2^n} + \frac{3^n}{2^n}}{\frac{2^n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3^n}{2^n} \times \frac{1}{2}}{\frac{2^n}{2^n} \times \frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{1}{2}}{1 \times \frac{1}{2}} = \frac{1 + (+\infty)}{\frac{1}{2}} = +\infty$$

ou

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{3^n} + \frac{3^n}{3^n}}{\frac{2^n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n}{3^n} \times 2 + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n \times 2 + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{0 \times 2 + 1}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Nota:

Para levantar a indeterminação devemos dividir ambos os termos da fracção pelo termo de **maior base** ou maior expoente.

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (5^{n+1} - 6^n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[5^{n+1} \left(1 - \frac{6^n}{5^{n+1}} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} (5^n \times 5) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{6^n}{5^{n+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (5^n \times 5) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{6^n}{5^n} \times \frac{1}{5} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (5^n \times 5) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \left(\frac{6}{5} \right)^n \times \frac{1}{5} \right] = +\infty \times \left[1 - \left(+\infty \times \frac{1}{5} \right) \right] = +\infty \times (-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (5^{n+1} - 6^n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[6^n \left(\frac{5^{n+1}}{6^n} - 1 \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} (6^n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5^n}{6^n} \times 5 - 1 \right) \\ \text{b) } &= \lim_{n \rightarrow \infty} (6^n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{5}{6} \right)^n \times 5 - 1 \right] = +\infty \times (0 \times 5 - 1) = +\infty \times (-1) = -\infty \end{aligned}$$

1.15. Progressão Aritmética (PA)

Uma sucessão de números reais é chamada progressão aritmética (PA) quando cada um de seus termos, a partir do segundo, é igual à soma do anterior com uma constante r chamada razão da PA. Se a sucessão $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ é PA então $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = r$ sendo assim teremos:

$$\begin{cases} a_1 \\ a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_1 + 2r \\ \vdots \\ a_n = a_1 + (n-1)r \end{cases} .$$

1.15.1. Termo Geral de uma PA

O termo geral de uma PA é representado pela expressão abaixo:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Exemplos:

1. Considera a sucessão: $0, 2, 4, 6, 8, \dots, an$.
a) Verifica se a sucessão é uma PA.

b) Se for uma PA, determina o termo geral

Resolução

$$a)r = 2 - 0 = 4 - 2 = 6 - 4 = 8 - 6 = 2 \text{ é uma PA.}$$

$$b)\text{Dados: } a_1 = 0, r = 2; \text{ res. } a_n = a_1 + (n-1)r \leftrightarrow a_n = 0 + (n-1).2 \leftrightarrow a_n = 2n - 2$$

Propriedade: De um modo geral, sendo n e m as ordens dos termos de uma PA, para $n > m$, é válida a seguinte relação:

$$a_n = a_m + (n - m).r$$

Exemplo: Em uma PA sabe-se que o terceiro termo é 7 e a razão é 3. Determina o quinto termo.

$$\text{Dados: } n = 5, m = 3 \quad a_3 = 7, a_5 = ?$$

Resolução:

$$a_n = a_m + (n - m)r \rightarrow a_5 = a_3 + (5 - 3).3 \Leftrightarrow a_5 = 7 + 2.3 \Leftrightarrow a_5 = 13$$

1.15.2. Classificação de uma PA

Uma PA, dependendo da razão r , pode ser:

1) **Crescente**, quando $r > 0$

Exemplo: Dada a PA $(4, 7, 10, 13, \dots)$, temos:

$$r = 7 - 4 = 10 - 7 = 13 - 10 = 3, \text{ como } r > 0, \text{ a PA é crescente.}$$

2) **Decrescente**, quando $r < 0$

Exemplo: Dada a PA $(15, 10, 5, 0, \dots)$, temos:

$$r = 10 - 15 = 5 - 10 = 0 - 5 = -5, \text{ como } r < 0, \text{ a PA é decrescente}$$

3) **Constante**, quando $r = 0$

Exemplo: dada a PA $(4, 4, 4, 4, \dots)$, temos:

$$r = 4 - 4 = 4 - 4 = 4 - 4 = 0, \text{ como } r = 0, \text{ a PA é constante}$$

1.15.3. Representação de uma PA

Para representarmos uma PA de razão r e termos desconhecidos, podemos proceder de várias maneiras. Vamos utilizar duas delas:

1) Considerando $a_1 = y$:

$$(y, y + r, y + 2r, \dots)$$

2) Considerando $a_1 = y - r$:

$$(y - r, r, y + r, \dots)$$

Propriedade: Em uma PA, considerando três termos consecutivos, o termo do meio é a média aritmética entre os outros dois.

Assim, sendo a_1, a_2 e a_3 termos de uma PA, temos:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Exemplos:

1. Determina x na PA $\left(x, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}\right)$

Resolução: $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{x + \left(-\frac{2}{3}\right)}{2} \Leftrightarrow x = \frac{11}{3}$

2. Determina a de modo que $(3a, 6a + 3, 15a + 21)$ seja uma PA.

Resolução:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Leftrightarrow 6a + 3 = \frac{3a + 15a + 21}{2} \Leftrightarrow 12a + 6 = 18a + 21 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{2}$$

3. Numa PA, o produto de seus três primeiros termos é igual ao quadrado da soma desses termos, e a soma dos dois primeiros é igual ao terceiro. Escrever a PA.

Resolução:

Por tratar-se de termos desconhecidos representaremos da seguinte maneira: $(x, x + 1, x + 2r)$

$$\begin{cases} x(x+r)(x+2r) = (x+x+r+x+2r)^2 \\ x+x+r = x+2r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot 2x \cdot 3x = (6x)^2 \\ x = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^3 - 36x^2 = 0 \\ \text{-----} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 6 \\ r = 0 \vee r = 6 \end{cases}$$

temos duas possibilidades de escrever a PA:

1. $x = 0$ e $r = 0$ (0,0,0)
2. $x = 6$ e $r = 6$ (6,12,18)

1.15.4. Soma de n primeiros termos de uma PA (S_n)

A soma de n termos de P.A. é dado pela fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \quad (1)$$

Ou

Sabendo que: $a_n = a_1 + (n-1)r$ substituindo na fórmula da soma (1) teremos:

$$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)r]}{2}$$

Exemplos: Determinar a soma dos primeiros trinta termos da PA $(-4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots)$

Resolução

Dados:

$$\begin{cases} a_1 = -4 \\ n = 30 \\ r = -2 - (-4) = 0 - (-2) = 2 - 0 = 4 - 2 = 6 - 4 = 2 \\ S_{30} = ? \end{cases}$$

$$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)r]}{2} \Leftrightarrow S_{30} = \frac{30[2 \cdot (-4) + (30-1) \cdot 2]}{2} = 750$$

1.16. Progressão Geométrica (PG)

Uma sucessão de números reais é chamada de progressão geométrica (PG) quando cada um dos seus termos, a partir do segundo, é igual ao produto do anterior por uma constante **q** chamada razão da PG.

Se a sucessão $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ é PG então $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = q$ sendo assim, teremos:

$$\begin{cases} a_1 \\ a_2 = a_1 \cdot q \\ a_3 = a_1 q^2 \\ \vdots \\ a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \end{cases} .$$

1.16.1. Termo Geral de uma PG

O termo geral de uma PG é representado pela expressão abaixo:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Exemplos: Determina o termo geral da sucessão $(2, 4, 8, \dots)$

- a) Verifica se a sucessão é uma PG.
- b) Se for uma PG, Determina o termo geral

Resolução

a) $q = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = 2$ é uma PG

b) Dados:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 2 \\ a_n = ? \end{cases}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow a_n = 2 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow a_n = 2^n$$

1.16.2. Classificação de uma PG

Uma PG, dependendo da razão q , pode ser:

1. **Crescente**, quando $\begin{cases} q > 0 \text{ e seus termos são positivos} \\ 0 < q < 1 \text{ e seus termos são negativos} \end{cases}$

Exemplos: a) (1, 3, 9, 27, ...)

b) (-81, -27, -9, -3)

2. **Decrescente**, quando $\begin{cases} q > 0 \text{ e seus termos são negativos} \\ 0 < q < 1 \text{ e seus termos são positivos} \end{cases}$

Exemplos: a) (-1, -3, -9, -27, ...)

b) $\left(2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots\right)$

3. **Alternante** quando $q < 0$

Exemplo: (5, -50, 500, -5000, ...)

4. **Constante**, quando $q = 1$.

Exemplo: (9, 9, 9, 9, ...)

5. **Estacionária ou singular**, quando $q = 0$

Exemplo: (4, 0, 0, 0, ...)

1.16.3. Representação de uma PG

Para representarmos uma PG de razão q e termos desconhecidos, podemos proceder de várias maneiras. Vamos utilizar duas delas:

1. Considerando $a_1 = y$

$$(y, yq, yq^2, \dots)$$

2. Considerando $a_1 = \frac{y}{q}$

$$\left(\frac{y}{q}, y, yq, \dots\right)$$

Nota: Em uma PG, considerando três termos consecutivos, o termo do meio é a média geométrica entre os outros dois.

Assim, sendo a_1, a_2 e a_3 termos de uma PG, temos:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$$

Exemplos:

1. Calcular o valor de x na PG $(8, -6, x)$.

Resolução: $a_2^2 = a_1 \cdot a_3 \Rightarrow (-6)^2 = 8x \Leftrightarrow x = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$

2. Sabendo que $x, x+9$ e $x+45$ estão em PG, determinar o valor de x .

Resolução:

$$(x+9)^2 = x(x+45) \Leftrightarrow x^2 + 18x + 81 = x^2 + 45x \Leftrightarrow 45x - 18x = 81 \Leftrightarrow 27x = 81 \Leftrightarrow x = 3$$

1.16.4. Soma de n primeiros termos de uma PG (S_n)

Dada a PG $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ de razão $q \neq 0$ e $q \neq 1$, e a soma S_n de seus n primeiros termos pode ser expressa por:

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Exemplos: Calcular a soma dos dez primeiros termos da PG $(-3, 6, -12, 24, \dots)$

Resolução:

Dados

$$\begin{cases} a_1 = -3 \\ n = 10 \\ q = \frac{6}{-3} = \frac{-12}{6} = \frac{24}{-12} = -2 \\ S_n = ? \end{cases}$$

$$S_{10} = -3 \cdot \frac{1 - (-2)^{10}}{1 - (-2)} = 1023$$

1.16.5. Soma de termos de uma PG infinita

Dada a PG infinita $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ de razão q , chamado de S a soma dos seus infinitos termos, temos três casos a analisar:

- 1) Se $a_1 = 0 \Rightarrow S = 0$

É fácil perceber que, neste caso, a PG é $(0, 0, 0, 0, \dots)$.

- 2) Se $q < -1 \vee q > 1$, isto é, se $|q| > 1$ e $a_1 \neq 0$, S tende a $-\infty \vee +\infty$.

Neste caso, é impossível determinar a soma dos termos da PG.

- 3) Se $-1 < q < 1$, isto é, se $|q| < 1$ e $a_1 \neq 0$, S converge para um valor finito. Assim, a partir da

fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG: $S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Temos que, quando n tende a $+\infty$, q^n tende a zero. Logo:

$$S = a_1 \frac{(1-0)}{1-q} \Leftrightarrow S = \frac{a_1}{1-q}$$

Assim, numa PG infinita com $|q| < 1$ e $a_1 \neq 0$, a soma dos seus infinitos termos é :

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

Nota: Diz-se que S é o limite da soma dos termos da PG quando n tende para o infinito. Essa situação é representada da seguinte maneira:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Exemplos:

1. Calcula a soma dos infinitos termos da PG:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$$

Dados:

$$\begin{cases} q = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}, q < 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Resolução

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

2. Calcula a geratriz da dízima periódica: 0,333333333...

$$0,333333\dots = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots$$

Dados:

$$\begin{cases} a_1 = 0,3 = \frac{3}{10} \\ q = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{3}{10}} = \frac{3}{1000} : \frac{3}{100} = \frac{1}{10} \end{cases}$$

Resolução:

$$S = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{3}$$

A fracção geratriz da dízima periódica é $\frac{1}{3}$.

1.16.6. O número de Neper

Considere-se a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Determina-se alguns dos seus termos e veja-se o que acontece quando $n \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2; \quad u_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25; \quad u_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2,370; \dots; \\ u_5 &= \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5; \quad 2,48832; \dots; \quad u_{10} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10}; \quad 2,59374; \dots; \quad u_{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}; \quad 2,70481; \\ \dots; \quad u_{1000} &= \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000}; \quad 2,71692; \dots; \quad u_{10.000} = \left(1 + \frac{1}{10.000}\right)^{10.000}; \quad 2,71815; \dots \end{aligned}$$

Verifica-se que a sucessão se aproxima cada vez mais de um número. A esse número irracional dá-se o nome de **número de Neper** e representa-se por **e**. A sua descoberta atribui-se a um lorde escocês chamado John Napier, que em 1614 publicou um livro que lhe levou mais de 20 anos a escrever e que revolucionou a Matemática da época.

Neper não se apercebeu da importância deste número. Só um século depois, com o desenvolvimento do cálculo infinitesimal, se veio a reconhecer o papel de relevo de tal número.

Hoje este número é importante em quase todas as áreas do conhecimento: economia, engenharia, biologia, sociologia, etc.

Assim, escreve-se:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{ou} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$$

Uma aproximação do número e com dez casas decimais é a seguinte: $e \approx 2,718\,281\,828\,4$.

1.16.6.1. Aplicação do número de Neper ao cálculo de limites

Sejam $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais, $a, k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$.

1.

$$\lim \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^{u_n} = e \quad \text{e} \quad \lim \left(1 + \frac{k}{u_n}\right)^{u_n} = e^k$$

Exemplos:

$$\text{a) } \lim \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$$

$$\text{b) } \lim \left(1 - \frac{2}{3^n}\right)^{3^n} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

2.

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+a} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \right] =$$

ou

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a = e \times 1 = e \qquad \lim \left(1 + \frac{k}{a_n}\right)^{a_n} = e^k$$

Exemplos:

a) $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3+n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \cdot \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 \times e = e$

b) $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-5} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-5} = e \times 1 = e$

3.

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n+a}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n+a}\right)^{n+a-a} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n+a}\right)^{n+a} \times \left(1 + \frac{1}{n+a}\right)^{-a} \right]$$

$$= \lim \left(1 + \frac{1}{n+a}\right)^{n+a} \times \lim \left(1 + \frac{1}{n+a}\right)^{-a} = e \times 1 = e$$

Exemplos:

a) $\lim \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{n+3-3} = \lim \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{n+3} \cdot \lim \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{-3} = e \times 1 = e$

b) $\lim \left(1 + \frac{1}{n-4}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n-4}\right)^{n-4+4} = \lim \left(1 + \frac{1}{n-4}\right)^{n-4} \cdot \lim \left(1 + \frac{1}{n-4}\right)^4 = e \times 1 = e$

4.

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{kn} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^k = \left[\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{\lim k} = e^k$$

Exemplos:

a) $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-3n} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{-3} = \left[\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{\lim(-3)} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$

$$\text{b) } \lim \left(1 - \frac{5}{3n}\right)^{6n} = \lim \left(1 - \frac{5}{3n}\right)^{3n \times 2} = \lim \left[\left(1 - \frac{5}{3n}\right)^{3n}\right]^2 = \left[\lim \left(1 - \frac{5}{3n}\right)^{3n}\right]^{\lim 2} = (e^{-5})^2 = e^{-10} = \frac{1}{e^{10}}$$

5.

$$\lim \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{kn \times \frac{1}{k}}\right] = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{kn}\right]^{\frac{1}{k}} = \left[\lim \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{kn}\right]^{\lim \frac{1}{k}} = e^{\frac{1}{k}}$$

Exemplos:

$$\text{a) } \lim \left(1 + \frac{1}{10n}\right)^n = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{10n}\right)^{10n \times \frac{1}{10}}\right] = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{10n}\right)^{10n}\right]^{\frac{1}{10}} = \left[\lim \left(1 + \frac{1}{10n}\right)^{10n}\right]^{\lim \frac{1}{10}} = e^{\frac{1}{10}}$$

b)

$$\lim \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^n = \lim \left[\left(1 - \frac{2}{3n}\right)^{3n \times \frac{1}{3}}\right] = \lim \left[\left(1 - \frac{2}{3n}\right)^{3n}\right]^{\frac{1}{3}} = \left[\lim \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^{3n}\right]^{\lim \frac{1}{3}} = (e^{-2})^{\frac{1}{3}} = e^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{e^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$$



II. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2.1. Exercícios resolvidos 1

1. Determina o próximo número da sequência: 19, 22, 25, 28, ...

Resolução:

Observa que cada número corresponde ao seu antecessor mais 3:

$$\begin{array}{ccccccc} 19, & 22, & 25, & 28, & ? \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ +3 & +3 & +3 & +3 & \end{array}$$

Portanto, o próximo número da sequência é 31, já que $28 + 3 = 31$.

2. Determina o 5º número da sequência: 42, 38, 34, 30, ...

Resolução:

Observa que cada número corresponde ao seu antecessor menos 4:

$$42, 38, 34, 30, ?$$

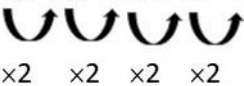

- 4 - 4 - 4 - 4

Portanto, o próximo número é 26, já que $30 - 4 = 26$.

3. Qual o número que continua a sequência? 12, 24, 48, 96, ...

Resolução:

Observa que cada número corresponde ao seu antecessor multiplicado por 2.

$$12, 24, 48, 96, ?$$


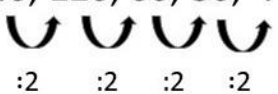
$\times 2$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 2$

Portanto, o próximo número é 192, já que $96 \times 2 = 192$.

4. Qual o próximo número? 240, 120, 60, 30, ...

Resolução:

Observa que cada número corresponde ao seu antecessor dividido por 2:

$$240, 120, 60, 30, ?$$


$:2$ $:2$ $:2$ $:2$

Portanto, o próximo número é 15, já que $30 : 2 = 15$.

5. Determina o termo geral da sequência: 4, 9, 16, 25, 36, ...

Resolução:

Queremos identificar o termo geral da sequência: 4, 9, 16, 25, 36, ...

Observa que os termos são quadrados perfeitos. Então, podemos escrevê-los da seguinte forma:

$$2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, \dots$$

Agora, considerando apenas a base de cada potência, veja que cada uma delas corresponde à posição que ocupa na sequência somado ao número 1.

Podemos reescrevê-la como: $(1 + 1)^2, (2 + 1)^2, (3 + 1)^2, (4 + 1)^2, (5 + 1)^2, \dots$

Portanto, o termo geral é: $a_n = (n + 1)^2$

Onde: a_n é o enésimo termo; n é o número de termos ou ordem.

6. Calcula o termo de ordem 10 na sucessão de termo geral $a_n = 2n - 6$

Resolução:

$n = 10$ portanto, $a_{10} = 2 \times 10 - 6 \rightarrow a_{10} = 20 - 6 \rightarrow a_{10} = 14$. O termo de ordem 10 é 14.

7. Determina a ordem do termo 19, na sucessão do termo geral $u_n = 2n - 1$

Resolução:

Neste caso pretende-se a ordem, isto é, o n .

$19 = 2n - 1 \rightarrow 19 + 1 = 2n \rightarrow 20 = 2n \rightarrow n = 10$. A ordem do termo 19 é 10ª ordem.

8. Determina o termo geral da sucessão: -4, 9, -16, 25, -36, ...

Resolução:

A diferença entre a sucessão abaixo e a sucessão do exercício 5, é que nessa os termos de posição ímpar possuem sinal negativo. -4, 9, -16, 25, -36, ...

Podemos reescrevê-los como:

$$(-1)^1 \cdot 2^2, (-1)^2 \cdot 3^2, (-1)^3 \cdot 4^2, (-1)^4 \cdot 5^2, (-1)^5 \cdot 6^2, \dots$$

Portanto, o termo geral da sucessão é: $a_n = (-1)^n \cdot (n + 1)^2$

9. Determina o termo geral da sucessão? 5, 10, 17, 26, 37, ...

Resolução:

Queremos encontrar o termo geral da sucessão: 5, 10, 17, 26, 37, ...

Observa que cada termos dessa sucessão corresponde a um quadrado perfeito somado 1, isto é, $5 = 4 + 1$, $10 = 9 + 1$, $17 = 16 + 1$, e assim por diante.

Então, podemos reescrevê-la como: $4 + 1$, $9 + 1$, $16 + 1$, $25 + 1$, $36 + 1$, ...

Considerando o termo geral da sucessão (4, 9, 16, 25, 36, ...), é dado por: $a_n = (n + 1)^2$, adicionando 1 termos o termo geral da sucessão desejada, isto é: $a_n = (n + 1)^2 + 1$.

2.2. Exercícios resolvidos 2

1. Determina a soma de todos os termos de uma progressão geométrica $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em que $u_1 = 1$ e

$$r = \frac{1}{2}.$$

2. Determina a soma de todos os termos da progressão geométrica de termo geral $v_n = \frac{3^{n-2}}{5}$

Resolução:

Como $-1 < r < 1$, então $s = \frac{u_1}{1-r}$. Logo, $s = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Portanto, a soma de todos os termos de

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é 2.

$$r = \frac{\frac{3^{n+1}-2}{5}}{\frac{3^{n-2}}{5}} = \frac{5 \cdot 3^{n-1}}{5 \cdot 3^{n-2}} = 3^{n-1-(n-2)} = 3^{n-1-n+2} = 3, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad v_1 = \frac{3^{1-2}}{5} = \frac{3^{-1}}{5} = \frac{\frac{1}{3}}{5} = \frac{1}{15}. \text{ Logo,}$$

$$S = \lim S_n = \lim \left(\frac{1}{15} \times \frac{1-3^n}{1-3} \right) = \lim \left(\frac{1-3^n}{-30} \right) = \lim \left(-\frac{1}{30} \right) \times \lim (1-3^n) = -\frac{1}{30} \times [1 - (+\infty)] = -\frac{1}{30} \times (-\infty) = +\infty$$

Portanto, a soma de todos os termos de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é $+\infty$.



III. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

3.1. Exercícios propostos 01

1. Determina o termo geral das seguintes sucessões:

a) $1, 3, 5, 7, 9, \dots$

b) $2, 6, 10, 14, \dots$

c) $-2, 5, -8, 11, -14, \dots$

2. Calcula os 5 primeiros termos da sucessão de termo geral $b_n = (n+1) \times (-1)^n$

3. Encontra o 130 termo da sucessão $c_n = \frac{2n-1}{n+2}$

4. Determina a ordem do termo $\frac{13}{15}$ na sucessão $b_n = \frac{n-1}{n+1}$

5. Estuda a monotonia das sucessões definidas por:

a. $a_n = \frac{n}{n+1}$

b. $a_n = (2, 5, 8, 11, \dots)$

c. $b_n = (17, 14, 11, 11, 8, 5, \dots)$

d. $c_n = \frac{n+3}{n+1}$

e. $d_n = 2 + \frac{n^2}{3}$

3.2. Exercícios Propostos 02

1. Verifica se cada uma das seguintes sucessões é PA e, em caso afirmativo, determina a razão:

a) $(5, 5, 5, \dots)$

b) $(x, 2x, 3x, 4x, \dots)$

c) $(6, 2, -2, -6, -10)$

d) $(-1, 0, 1, 2, 4, 5)$

e) $(1; 0,7; 0,4; 0,1)$

f) $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2} \right)$

g) $(1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots)$

h) $\sqrt{1}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{4}; \dots$

2. Calcula o valor de x em cada PA:

a)

$$\left(x, \frac{1}{2}, -\frac{2}{5}\right)$$

b)

$$\left(-5, x, \frac{3}{2}\right)$$

3. Em uma PA de dezassete termos, sabe-se que $a_4 = 11$ e $a_8 = 23$. Determina 14º termo dessa PA.
4. Calcula a razão de uma PA, em que $a_1 = 4$ e $a_{10} = 67$.
5. Acha o 60º número natural ímpar.
6. Qual é o primeiro termo da PA de razão 3 cujo 7º termo é 21.
7. Em um PA de razão cinco, o primeiro termo é 6. Que lugar ocupa o termo cujo valor é 56?
8. Quantos múltiplos de 11 existem entre 100 e 1000?
9. Determina a razão de uma PA com dez termos, sabendo que a soma dos dois primeiros é 5 e a soma dos dois últimos é 53.
10. Em uma PA, a soma do primeiro termo com o terceiro é 16 e a razão é igual aos $\frac{5}{3}$ do primeiro termo. Determina a_1 e r .
11. O quinto e o nono termo de uma PA são, respectivamente, as raízes da equação $x^2 - 8x - 20 = 0$. Calcula o menor termo positivo dessa PA.
12. Calcula n , sabendo que o primeiro termo é dois, a razão é três meios e $a_n = 20$.
13. As medidas dos lados de um triângulo são expressas por $x+1, 2x, x^2-5$ e estão em PA, nessa ordem. Determina o perímetro desse triângulo.

3.3. Exercícios Propostos 03

1. Calcula a soma dos dez primeiros termos de uma PA de razão oito, em que o primeiro termo é cinco.
2. Calcula a soma dos cem primeiros números ímpares.
3. Calcula a soma dos vinte e dois termos de uma PA em que o primeiro é sete e o vigésimo segundo é setenta.
4. Calcula a soma dos dez primeiros termos de uma PA de dez termos, em que o primeiro é dois e a razão sete.
5. Determina o número de termos de uma PA, sabendo que a soma de seus termos é cento e vinte e seis, que o primeiro termo é três e que a razão é cinco.
6. Calcula a soma dos cem primeiros termos da PA $\left(1, -\frac{1}{2}, \dots\right)$.
7. Calcula a soma dos múltiplos de três compreendidos entre quatro e noventa e oito.
8. Determina o valor de a na soma: $a + 2a + 3a + \dots + 39a + 40a = 4100$.

9. Numa colecta feita entre alunos de uma escola, foram arrecadados 16500,00mt. O primeiro aluno doou 350,00mt. Cada um dos seguintes deu 50,00mt a mais que o anterior. Quantos alunos fizeram a doação?
10. Calcula a soma dos n primeiros números ímpares.
11. Ao efectuar a soma de cinquenta parcelas da PA (202,206,210, ...), por distração não foi somada a trigésima quinta parcela. Qual foi a soma encontrada?
12. Em um PA de doze termos, a soma do primeiro termo com o último é dez. Calcula a soma dessa PA.
13. A soma dos dez termos consecutivos de uma PA é 200. Sendo o primeiro termo dois, Calcula cada um dos termos dessa PA.
14. Em Janeiro depusitei 100,00mt no banco, em Fevereiro 200,00mt; em Março 300,00mt e assim sucessivamente, aumentando 100,00mt a cada mês nos depósitos, sem falhar em nenhum deles. Quanto terei depositado após quatro anos se mantiver esse mesmo procedimento?

3.4. Exercícios propostos 04

1. Verifica se cada uma das sucessões é uma PG, determinando, em caso afirmativo, a razão q :

a) $\left(\frac{3}{4}, -\frac{9}{2}, \frac{54}{2}\right)$

b) $\left(-\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{4}{15}\right)$
2. Determina o valor de x em cada PG:

a) $(x, 6, 9)$

b) $\left(\frac{3}{2}, x, 6\right)$
3. Sabendo que $x-1, x+5$ e $11x-1$ formam, nessa ordem, uma PG, Determina-a, sendo seus termos números inteiros.
4. Qual é o número que se deve somar a 1,3 e 4 para que se tenha, nessa ordem, uma PG?
5. A sucessão $(x+2, x-2, 3x-6, \dots)$ é uma PG. Calcula seu quarto termo.
6. Em uma PG de doze termos, o primeiro é igual a cinco e a razão a dois. Determina seu último termo.
7. Calcula o primeiro termo de uma PG sabendo $a_9 = 1280$ e $q = 2$.
8. Em uma PG de sete termos, a razão é 2 e o primeiro termo é 5. Determina o último termo.
9. Em uma PG de cinco termos cujo primeiro é quatro e o último é 324. Determina a razão dessa PG.
10. Quantos termos tem uma PG, se o primeiro termo é 3, a razão é 2 e o último é 48?
11. Em uma PG, o quinto termo é igual a 243. Calcula o seu primeiro termo, sabendo que ele é igual a razão.
12. Determina a PG de seis termos cuja soma dos termos de ordem ímpar é 182 e cuja soma dos termos de ordem par é 546.

13. Determina a PG em que são válidas as relações $a_4 + a_6 = 160$ e $a_7 + a_9 = 1280$.

14. Calcula a razão de uma PG na qual o primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e 4° é $\frac{4}{27}$.

3.5. Exercícios propostos 05

1. Calcula a soma dos doze primeiros termos da PG $(1, 3, \dots)$.
2. Sabendo que numa PG $a_1 = \frac{1}{20}$ e que a razão é 2, calcula a soma dos oito primeiros termos.
3. Considera uma PG em que o terceiro termo é 40 e o 6° é -320. Sabendo que a razão é negativa, determina a soma dos 8 primeiros termos.
4. O sétimo termo de uma PG é 8 e a razão é -2. Determina a soma dos três primeiros termos dessa progressão.
5. Qual é o número de termos da PG em que $a_1 = 3$, $q = 2$ e $S_n = 381$?
6. Se a sucessão $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots\right)$ representa uma PG, quantos de seus termos devem ser somados para que o resultado seja $\frac{1023}{4}$?
7. Um furo em um tanque de gasolina provocou a perda de 2 litros no primeiro dia. Como o orifício responsável pelas perdas foi aumentando, no dia seguinte a perda foi o dobro do dia anterior. Se essa perda for dobrando a cada dia, quantos litros de gasolina serão desperdiçados no total até ao 10° dia?
8. Se $S_3 = 21$ e $S_4 = 45$ são, respectivamente, as somas dos três e quatro primeiros termos de uma PG cujo primeiro termo é 3, qual é a soma dos cinco primeiros termos dessa Progressão?

3.6. Exercícios propostos 06

1. Calcula a soma dos termos de cada progressão geométrica:
 - a) $(12, -6, 3, \dots)$
 - b) $\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right)$
 - c) $\left(1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{64}, \dots\right)$
 - d) $(1, 2x, 4x^2, \dots)$

2. É dado um quadrado de 4 m de lado. Internamente, unindo-se os pontos médios dos seus lados, constrói-se um segundo quadrado e, assim, sucessivamente. Incluindo o quadrado de 4 m de lado, Calcula a soma das áreas de todos os quadrados.
3. Em um triângulo equilátero de lado 8 cm constrói-se outro triângulo equilátero nos pontos médios dos seus lados. Esse processo é feito indefinidamente gerando infinitos outros triângulos equiláteros. Determina o limite da soma dos perímetros desses triângulos.
4. Determina a geratriz de cada dízima periódica:
- a) 0,31313... b) 9,444... c) 0,12444...

5. Determina o valor de x em cada equação:

a) $x + 1 + \frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{4} + \dots = 6$

b) $\frac{|x|}{4} + \frac{|x|}{8} + \frac{|x|}{16} + \dots = 3$

6. Mostra que a identidade $x + 1 + \frac{x+1}{x^2} + \frac{x+1}{x^4} + \dots = \frac{x^2}{x-1}$ é verdadeira para todo $x > 1$.

7. Determina a solução de cada uma das equações em IR:

a) $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \dots = 40$

b) $x^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} + \dots = 60$

c) $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{27} + \frac{x}{81} + \dots = 15$

8. Qual é o valor de x na equação:

$$x \left(\frac{9}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5} + \dots \right) = \frac{27}{4}$$

3.7. Exercícios propostos 07

1. Calcula os seguintes limites:

a) $\lim \left(\frac{3}{2} \right)^n$

b) $\lim \left(\frac{2}{3} \right)^n$

c) $\lim \frac{2n+8}{5n-2}$

d) $\lim \frac{2n+8}{5n-2}$

e) $\lim \frac{3n^2+1}{2-n^3}$

f) $\frac{4n^3}{n^2+6}$

g) $\lim \frac{n+\sqrt{n}}{6n}$

h) $\lim \frac{\sqrt{n^2-2n}}{4n+5}$

i) $\lim \frac{2n^2+1}{n^2+1}$

j) $\lim \frac{(2n-1)^3 \cdot (4n+3)^2}{(n+5)^4 \cdot (n-7)}$

k) $\lim (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

l) $\lim (\sqrt{2n} - \sqrt{2n+3})$

m) $\lim (n - \sqrt{n^2 - 3n + 5})$

n) $\lim \left(1 + \frac{4}{n} \right)^n$

o) $\lim \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{3n}$

p) $\lim \left(1 + \frac{7}{3n} \right)^n$

q) $\lim \left(1 + \frac{\pi}{n} \right)^{4n}$

r) $\lim (1 - e)^{\frac{3}{n}}$

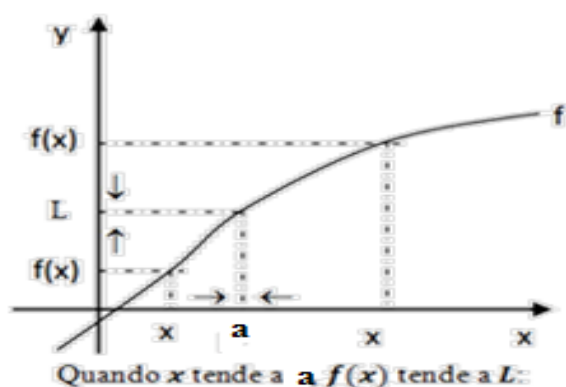


I. RESUMO

1.1. Limites de Funções

Dizemos que o limite de uma função $f(x)$ quando x tende a a é igual ao número real L se, e somente se, os números reais $f(x)$, para os infinitos valores de x , permanecem próximos de L , sempre que x estiver muito próximo de a . Simbolicamente escrevemos por:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$



Exemplo:

Consideremos a função definida por: $f(x) = \frac{4x^2 - 7}{2x + 1}$. Vamos estudar o limite de $f(x)$ quando x tende para 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 \cdot 2^2 - 7}{2 \cdot 2 + 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 \cdot 4 - 7}{4 + 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{16 - 7}{5} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9}{5} = \frac{9}{5}$$

1.1.1. Limite de uma função Constante

O limite de uma constante é a própria constante.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k = k$$

Exemplos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} -6 = -6$$

1.1.2. Limite de uma soma ou diferença

O limite da soma ou da diferença de duas funções é igual à soma dos limites dessas funções, isto é: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Exemplos:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} (x + 5) = \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 = 2 + 3 = 5$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} (x - 9) = \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 9 = 2 - 9 = -7$$

1.1.3. Limite de um produto

O limite do produto de duas funções é igual ao produto dos limites dessas funções, isto é:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Exemplos:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} 5x = \lim_{x \rightarrow 3} 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x = 5 \cdot 3 = 15$$

$$b) \lim_{x \rightarrow x_0} (a \cdot b \cdot c) = \lim_{x \rightarrow x_0} a \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} b \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} c = a \cdot b \cdot c$$

1.1.4. Limite de um quociente

O limite do quociente de duas funções é o quociente dos limites dessas funções excepto quando o limite do divisor for igual a zero.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

Exemplos:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x + 2)}{4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 2)}{\lim_{x \rightarrow 3} 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 2x + \lim_{x \rightarrow 3} 2}{\lim_{x \rightarrow 3} 4} = \frac{6 + 2}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 3)}{(x + 4)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 4)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3}{\lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 4} = \frac{2 + 3}{2 + 4} = \frac{5}{6}$$

1.1.5. Limite de uma potência

O limite de uma potência n-ésima de uma função é igual à potência n-ésima do limite dessa função, isto é:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^n$$

Exemplos:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} x^4 = \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^4 = 2^4 = 16$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2) = \lim_{x \rightarrow 1} 2 \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 1} x \right)^2 = 2 \cdot 1 = 2$$

1.1.6. Limite de uma raiz

O limite da raiz n-ésima de uma função é igual à raiz n-ésima do limite dessa função, isto é:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$$

Exemplos:

$$a) \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 4} x} = \sqrt{4} = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 27} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 27} x} = \sqrt[3]{27} = 3$$

1.1.7. Limite do logaritmo

O limite do logaritmo de uma função é igual ao logaritmo do limite dessa função, isto é:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [\log f(x)] = \log \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]$$

Exemplos:

$$a) \lim_{x \rightarrow 8} \log_2 x = \log_2 \left(\lim_{x \rightarrow 8} x \right) = \log_2 8 = 3$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 10} \lg 10x = \lg \lim_{x \rightarrow 10} 10x = \lg 100 = 2$$

1.2. Limites Notáveis

1.2.1. Limites trigonométricos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

1.2.2. Limite exponencial

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, em que e é um número irracional, chamado número de Euler.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^p} = \infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^p} = 0$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{px} - 1}{px} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$		

1.3. Indeterminações

Ao calcular o limite de uma função $f(x)$ quando x tende ao valor a , pode ocorrer de $f(a)$ assumir os valores como: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$. Neste caso, diz-se que ocorreu indeterminações.

Considera-se pela definição que:

• $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	• $\frac{a}{\infty} = 0$
• $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	• $\frac{a}{0} = \infty$
• $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$;	• $\frac{\pm\infty}{a} = \pm\infty$
• $(-\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$;	• $\frac{0}{\infty} = 0$
• $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty, \forall a \in \mathbb{R}$;	
• $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty, \forall a \in \mathbb{R}$;	
• $a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = +\infty, \forall a \in \mathbb{R}^+$;	
• $a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty, \forall a \in \mathbb{R}^+$;	
• $a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = -\infty, \forall a \in \mathbb{R}^-$;	
• $a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = +\infty, \forall a \in \mathbb{R}^-$;	

1.3.1. Indeterminação do tipo: $\frac{0}{0}$

Para levantar este tipo de indeterminação, simplifica-se a fracção multiplicando o numerador e denominador pelo conjugado ou pondo em evidência a menor potência da variável.

Exemplos: Calcula:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$$

Resolução:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2) \cdot (x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1) \cdot (\sqrt{x} + 1)}{(x - 1) \cdot (\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1) \cdot (\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x + 2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x + 2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} x = -2$$

1.3.2. Indeterminação do tipo: $\frac{\infty}{\infty}$

Esta indeterminação levanta-se dividindo o numerador e o denominador pela maior potência de x e depois faz-se a substituição.

Exemplos:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x}{x^2 + x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{x^4 - 5x + 2}$$

Resolução:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x}{x^2 + x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2} + \frac{2x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{x^4 - 5x + 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{x^4 - 5x + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 \left(1 - \frac{x}{3x^2} + \frac{1}{3x^2}\right)}{x^4 \left(1 - \frac{5x}{x^4} + \frac{2}{x^4}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \left(1 - \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{5}{x^3} + \frac{2}{x^4}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \left(1 - \frac{1}{3 \cdot \infty} + \frac{1}{3 \cdot \infty^2}\right)}{\infty^2 \left(1 - \frac{5}{\infty^3} + \frac{2}{\infty^4}\right)} = \frac{3}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

1.3.3. Indeterminação do tipo: $\infty - \infty$

Exemplos:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 - x + 3$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$$

Resolução:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 - x + 3 = [\infty - \infty]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 - x + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 \left(1 - \frac{x}{2x^2} + \frac{3}{2x^2} \right) = 2(+\infty)^2(1 - 0 + 0) = +\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) = [\infty - \infty]$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2-x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{\infty+2} + \sqrt{\infty}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

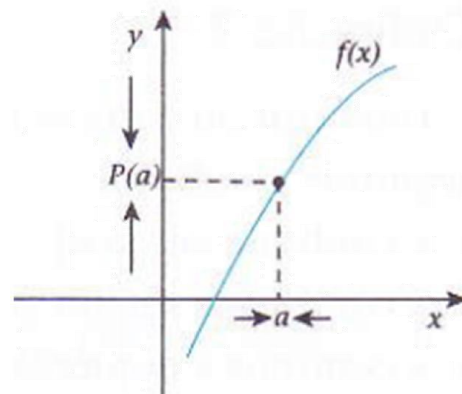
1.4. Continuidade de Funções

1.4.1. Continuidade de uma função num ponto

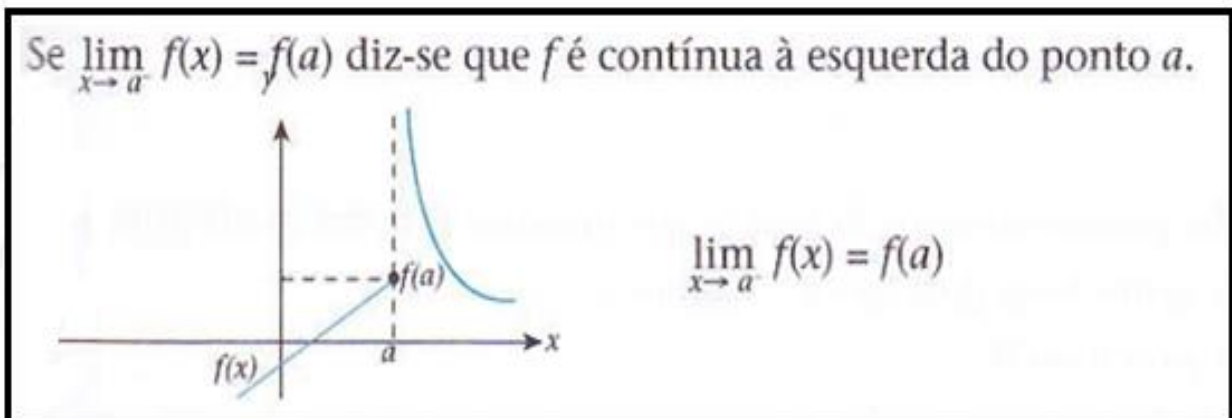
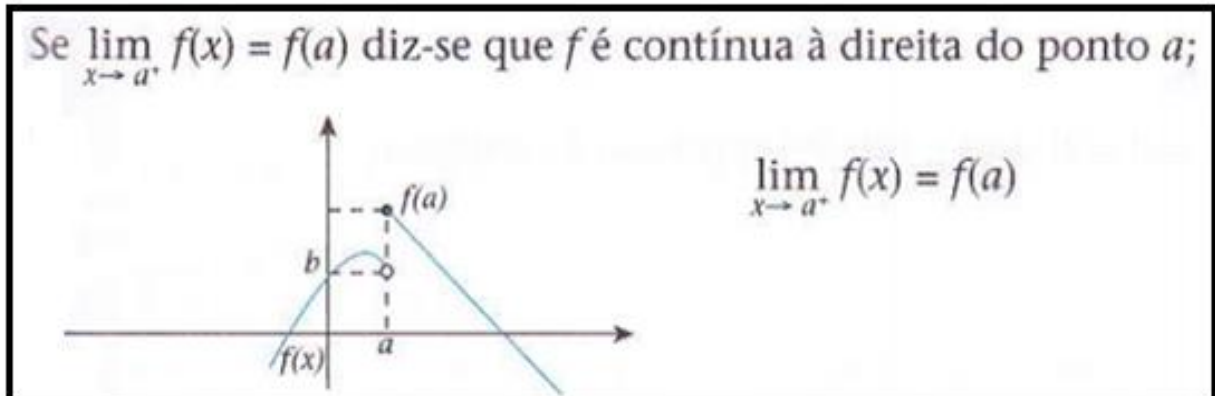
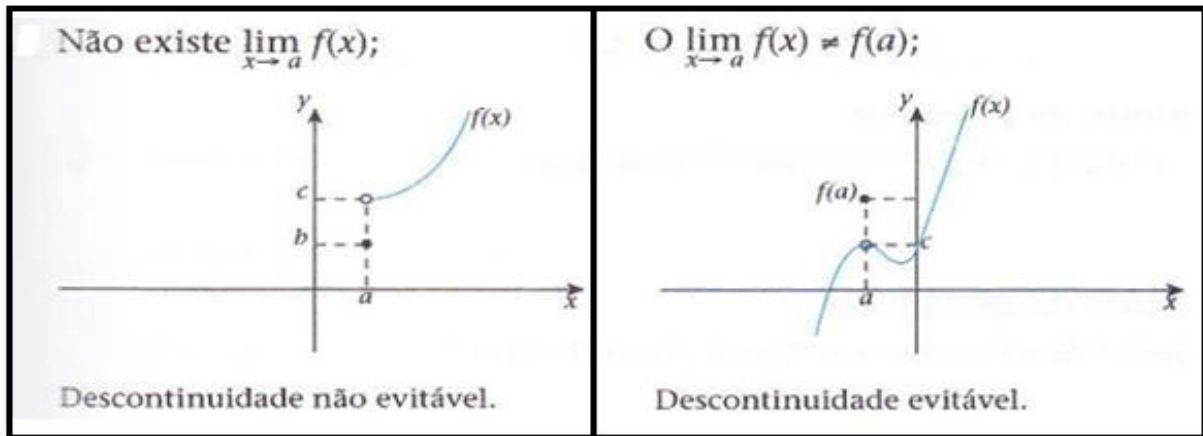
Definição: Seja f uma função real de variável real e a um ponto de acumulação do seu domínio.

Diz-se que f é contínua no ponto a do seu domínio se, e só se, as três condições seguintes se verificarem:

- Existe $f(a)$;
- Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$;
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$



Se uma função não é contínua num ponto $x = a$ do seu domínio, diz-se que a função é **descontínua** nesse ponto, a descontinuidade pode acontecer ou porque a função apresenta um "furo", ou da "salto" nesse ponto.



Podem ocorrer as seguintes situações:

Exemplos:

1. Verificar se a função $f(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{x-1}$ é descontínua em $x = 1$.

Resolução: A função $f(x)$ é descontínua em $x = 1$. Pois ela não é definida nesse ponto.

2. Dada a função $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, Verificar-se:

- a) É contínua no ponto $x = 3$;
- b) É contínua no ponto $x = 2$.

Resolução:

- a) Cálculo de $f(3)$:

$$f(3) = \frac{3^2 - 4}{3 - 2} = \frac{9 - 4}{1} = 5$$

Cálculo de $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 2) = 5$$

Como $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$, então $f(x)$ é contínua em $x = 3$

b) Não existe $f(2)$ porque teríamos uma divisão por zero, logo a função $f(x)$ é descontínua em $x = 2$.

3. Determinar o valor de $m \in \mathbb{R}$ para que a função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6, & \text{se } x \neq 4 \\ 3m, & \text{se } x = 4 \end{cases}$, seja contínua no ponto $x = 4$.

Resolução:

Cálculo de $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 5x + 6) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 2$$

Para que a função seja contínua em $x = 4$ devemos ter: $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$.

$$2 = 3m \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$$

1.4.2. Limites Laterais

Se x se aproxima de a através de valores maiores que a ou pela sua direita, escrevemos: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$. Esse limite é chamado de **limite lateral à direita de a** .

Se x se aproxima de a através de valores menores que a ou pela sua esquerda, escrevemos: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = c$. Esse limite é chamado de **limite lateral à esquerda de a** .

O limite de $f(x)$ para $x \rightarrow a$ existe se, e somente se, os limites laterais à direita e à esquerda são iguais, ou seja: **$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$ então $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$** .

1.4.3. Propriedades das funções contínuas

- Toda a função constante $f(x) = c$ é contínua no domínio $\mathbb{R}$.
- A função identidade $f(x) = x$ é contínua para todo o domínio $\mathbb{R}$.
- Se f e g são duas funções contínuas em $x = a$ então:
 - i) $f + g$ é contínua em $x = a$;
 - ii) $f \cdot g$ é contínua em $x = a$;
 - iii) $\frac{f}{g}$ é contínua em $x = a$;
- Se f é contínua em $x = a$, então:
 - i. f^n ($n \in \mathbb{N}$) é contínua em a ;

ii. $\sqrt[n]{f}$ é contínua em a $n \in \mathbb{N}$ e $f(a) \geq 0$ n é par;

- Se f é contínua em $x = a$ e g é contínua em $f(a)$, então a função $g \circ f$ é contínua em a .
- A função **polinomial** é contínua;
- A função **exponencial** é contínua;
- A função **logarítmica** é contínua;
- A função **Trigonométrica** é contínua.



II. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2.1. Exercícios resolvidos 1

1. Calcula os seguintes limites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + x}{x^3}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{3x}}{2x}$$

Resolução:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5 \right) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 5 = \frac{5}{3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x}}{4 \cdot \frac{\sin 4x}{4x}} = \frac{5 \cdot 1}{4 \cdot 1} = \frac{5}{4}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2}{4} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \right] = \frac{2}{4} \cdot 1^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^3} = \frac{2^\infty}{\infty^3} + \frac{1}{\infty^2} = +\infty + 0 = +\infty$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{3x}}{2x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x(e^{2x} - 1)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} -e^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = -1 \cdot 1 = -1$$

2.2. Exercícios resolvidos 2

1. Estuda a continuidade da seguinte função: $f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{se } x > 0 \\ x^2 + 2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$.

Resolução:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2x + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 2 = 2$$

Como o limite lateral à esquerda é diferente do limite lateral à direita no ponto $x = 0$, então $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existe neste ponto, logo a função $f(x)$ é descontínua no ponto $x = 0$.

2. Determina m de modo que a função $f(x) = \begin{cases} m & \text{se } x = -3 \\ \frac{x^2 - 9}{x + 3} & \text{se } x \neq -3 \end{cases}$ seja contínua em $\mathbb{R}$.

Resolução:

Para que a função seja contínua em um ponto é necessário que: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

O ponto de descontinuidade é $x = -3$.

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = f(-3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x^2 - 9}{x + 3} \right) = m$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 3) \cdot (x + 3)}{x + 3} = m \Rightarrow m = -6.$$

Se $m = -6$, a função $f(x)$ é contínua em -3 .

3. Dada a função: $f(x) = \begin{cases} a + bx & \text{se } x > 2 \\ 3 & \text{se } x = 2 \\ b - ax^2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$. Determina os valores de a e b de modo que ao

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ exista e que seja igual a $f(2)$.

Resolução:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} b - ax^2 = b - a2^2 = -4a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} a + bx = a + b \cdot 2 = a + 2b$$

$$f(2) = 3$$

Condição: Para existência do $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, é necessário que: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$.

$$\text{Então : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + b = 3 \\ a + 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{5}{3} \end{cases}$$



III. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

3.1. Exercícios de Propostos 01

1. Calcula os seguintes limites:

- | | | |
|---|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 + 5x^2 - 1$ | b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} + \sqrt{x})$ | c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+3}\right)^x$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-5}{x+3}$ | e) $\lim_{x \rightarrow 25} \frac{5-\sqrt{x}}{25-x}$ | f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{3x}\right)^x$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+5x+1}{5x^2+3x-4}$ | h) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ | i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{1-e^x}$ |
| j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+5x+1}{5x^3+3x-4}$ | k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{4x}$ | l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x-2}}{6x}$ |
| m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+5x+1}{5x^2+3x-4}$ | n) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-3x-10}{x-5}$ | o) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ |
| p) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2-3x}{x^2-1}}$ | q) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}$ | r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{2x}$ |
| s) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-1}{2x+3}\right)^2$ | t) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-7x+10}{x^2-4}$ | u) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ |
| v) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x})$ | w) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{4x+1}-3}$ | x) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{x}$ |
| y) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2-5})$ | z) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x+3}$ | aa) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ |

2. Calcula $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, se $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq -3 \\ 2x + 15, & \text{se } x > -3 \end{cases}$

3. Calcula $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, se $f(x) = \begin{cases} -5x, & \text{se } x > -1 \\ 3 - x^2, & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$

4. Verifica se as funções abaixo são contínuas ou descontínuas nos pontos indicados.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } x < 2 \\ 7 - 2x, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{x-1}, & \text{se } x \neq -1 \\ 6, & \text{se } x = -1 \end{cases}$

3.2. Exercícios Propostos 02

1. Estuda a continuidade das seguintes funções e classifica o tipo de descontinuidade.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & \text{se } x \geq 2 \\ x^2, & \text{se } x < 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \leq 0 \\ x^3 + 3x^2 + 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & \text{se } x > 3 \\ x - 1, & \text{se } x \leq 3 \end{cases}$

2. Determina o valor de k , na função $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x \geq 4 \\ kx - 3, & \text{se } x < 4 \end{cases}$ para que ela seja contínua em $x = 4$.

3. Determina o valor de m , na função $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - m, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ para que ela seja contínua em $x=1$

4. Na função $f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{se } x \leq -3 \\ a, & \text{se } x > -3 \end{cases}$, determina o valor de a de modo que as funções sejam contínuas em $\mathbb{R}$.

5. Determina a de modo que as funções sejam contínuas em $\mathbb{R}$ sendo:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & \text{se } x \neq 3 \\ a, & \text{se } x = 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -3a + x, & \text{se } x \in \mathbb{R}^+ \\ \frac{6}{x+2}, & \text{se } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$



I. RESUMO

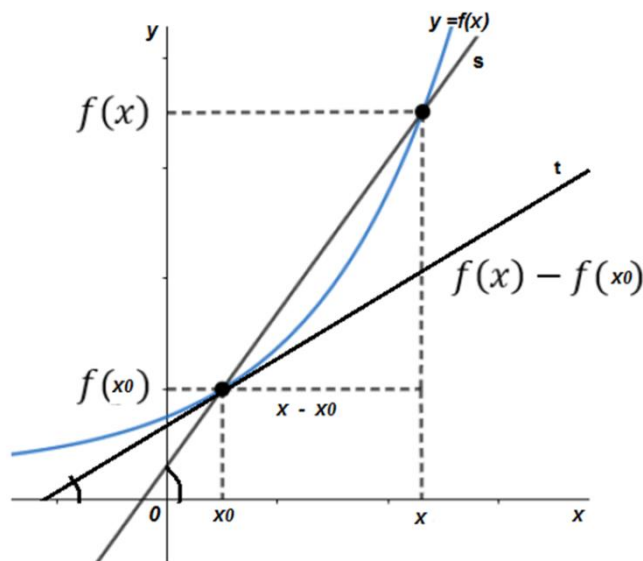
1.1. Conceito de derivada

Consideremos qualquer curva $f(x)$ uma secante e uma tangente sobre o mesmo sistema cartesiano ortogonal. Faremos um acréscimo infinitesimal à variável x e esperamos o comportamento da função y .

$$\Delta y = y_1 - y_0 \Leftrightarrow y_1 = y_0 + \Delta y$$

$$\Delta x = x_1 - x_0 \Leftrightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

A recta secante faz com o eixo OX um ângulo alfa (α) e a recta tangente um ângulo beta (β).



1.2. Determinação da derivada num ponto conhecido $A(x_0; y_0)$

A partir do raciocínio anterior, consideremos a seguinte explicação:

Se aproximarmos a recta secante com o ponto fixo de $A(x_0; y_0)$ até encontrar a tangente. O que se espera da função (curvas)?

Ora, a distância Δx tende a zero. E porque a tendência analisa-se em limites de funções, associaremos ao limite quando $x_1 \rightarrow x_0$ da razão incremental de y .

Em conformidade com os dados patentes, escolhe-se a razão tangente para analisar o

comportamento da função referido acima.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = a_t \rightarrow \text{declive da recta tan gente}$$

Será a derivada da função $f(x_0)$, isto é, no ponto $(x_0; y_0)$ a fórmula:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Esta fórmula determina a derivada de uma função num ponto x_0 conhecido.

Exemplo:

1. Determina a derivada das funções abaixo nos pontos indicados:

a) $f(x) = x^2$ em $x = 2$

b) $f(x) = x^3 + 1$ em $x = -1$

c) $f(x) = \sin x$ em $x = \pi$

d) $f(x) = 3x^2 - 3x$ em $x = -2$

e) $f(x) = \sqrt{x+1}$ em $x = 4$

Resolução:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \left[\frac{0}{0} \right] \rightarrow \text{veja que esta derivada te leva a uma indeterminação}$$

já por ti familiarizada. Ela elimina-se pela factorização do numerador e do denominador e posteriormente a lei de cancelamento. A partir desta fórmula é possível notar que a derivada é limite. E como o conceito de limite já é sobejamente conhecido, há que usar todos os conhecimentos para que o conceito que depende de limites não pareça difícil.

Ora vejamos:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2+2 = 4$$

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1 - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1 - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = (-1)^2 - 1 + 1 = 1$$

Veja que a indeterminação é similar a anterior, ela elimina-se pela factorização dos polinómios

envolvidos e posteriormente aplica-se a lei de cancelamento.

Observação: Faça o mesmo com as restantes alíneas.

1.3. Derivada de funções elementares num ponto genérico dado

Pela fórmula anterior, basta considerar o ponto $x_0 = x$ a fórmula anterior

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ passa a ser } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Exemplos:

1. Determina a derivada das seguintes funções elementares:

a. $f(x) = x^2$

b. $f(x) = x^2 + 3x + 2$

c. $f(x) = x^3$;

d. $f(x) = \sqrt{x}$

e. $f(x) = \sin x$

Resolução: Como se pode ver na definição pela fórmula $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$; $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) + 2 - (x^2 + 3x + 2)}{\Delta x}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3x + 3\Delta x + 2 - x^2 - 3x - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 + 3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x + 3)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = 2x + \Delta x + 3 = 2x + 0 + 3 = 2x + 3 \quad \text{Afinal: } f'(x) = (x^2 + 3x + 2)' = 2x + 3$$

b)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right]; \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x - x) - (x + \Delta x + x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x = 2x + 0 = 2x; f'(x) = (x^2)' = 2x$$

c)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right]; f'(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3\Delta x \cdot x^2 + 3\Delta x^2 \cdot x + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3\Delta x \cdot x + \Delta x^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3x^2 + 3\Delta x \cdot x + \Delta x^2 = 3x^2; f'(x) = (x^3)' = 3x^2$$

d)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0} \right]; f'(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x \cdot (\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})^2 - (\sqrt{x})^2}{\Delta x \cdot (\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x (\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x (\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}; f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

e)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0} \right]; f'(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{x+\Delta x-x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+\Delta x+x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)}{2 \cdot \frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x+\Delta x)}{1}$$

$$f'(x) = \cos\left(\frac{2x+0}{2}\right) = \cos \frac{2x}{2} = \cos x$$

1.4. Regras de derivação

Regra	Exemplos
1. $k' = 0$; em que k é uma constante	$5 = 0$
2. $kx = k$;	$7x = 7$
3. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(x^5)' = 5 \cdot x^{5-1} = 5 \cdot x^4$
4. $(u \pm v)' = u' \pm v'$, em que v e u são funções de x	$(x^2 + 8x)' = (x^2)' + (8x)' = 2x + 8$
5. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	$[(2x-5)^3]' = 3 \cdot (2x-5)^{3-1} \cdot (2x-5)' = 6(2x-5)^2$
6. $(u/v)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	$(x^3 \cdot x^2)' = (x^3)' \cdot x^2 + x^3 (x^2)' = 3 \cdot x^2 \cdot x^2 + x^3 \cdot 2x = 3x^4 + 2x^4 = 5x^4$
7. $\left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{v' \cdot u - v \cdot u'}{u^2}$	$\frac{2x+1}{x-3} = \frac{(2x+1)' \cdot (x-3) - (2x+1) \cdot (x-3)'}{(x-3)^2}$ $= \frac{2 \cdot (x-3) - (2x+1) \cdot 1}{(x-3)^2}$ $= \frac{2x-6-2x-1}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}$

8. $\left(\sqrt[n]{v^m}\right)^1 = \left(v^{\frac{m}{n}}\right)^1 = \frac{n}{m} \cdot v^{\frac{m}{n}-1} \cdot v^1$	$\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^1 = \left[(x^2+1)^{\frac{1}{3}}\right]^1 = \frac{1}{3} \cdot (x^2+1)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (x^2+1)^1$ $= \frac{1}{3} (x^2+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$
9. $(a^v)^1 = a^v \cdot \ln v \cdot v^1$	$(10^{x^2-5x})^1 = 10^{x^2-5x} \cdot \ln 10 \cdot (x^2-5x)^1 = 10^{x^2-5x} \cdot \ln 10 \cdot (2x-5)$
10. $(e^v)^1 = e^v \cdot \ln e \cdot v^1$; Nota: $\ln a = \log_e^a$;	$(e^{\sqrt{x}})^1 = e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})^1 = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$
11. $(\log_a^v)^1 = \frac{1}{v \cdot \ln a} \cdot v^1$	$[\log_2(3x+7)]^1 = \frac{1}{(3x+7) \cdot \ln 2} \cdot (3x+7)^1 = \frac{3}{(3x+7) \ln 2}$
12. $(\ln v)^1 = \frac{1}{v \cdot \ln e} \cdot v^1$; Ex.:	$[\ln(x^2+2)]^1 = \frac{1}{(x^2+2) \cdot \ln e} (x^2+2)^1 = \frac{2x}{x^2+2}$
13. $(\text{sen } v)^1 = \cos v \cdot v^1$	$(\text{sen } 2x)^1 = \cos 2x \cdot (2x)^1 = 2 \cdot \cos 2x$
14. $(\cos v)^1 = -\text{sen } v \cdot v^1$	$\left(\cos \frac{x}{x+1}\right)^1 = -\text{sen } \frac{x}{x+1} \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)^1$ $= -\text{sen } \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x^1 \cdot (x+1) - x(x+1)^1}{(x+1)^2}$ $= -\text{sen } \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2}$ $= -\frac{1}{(x+1)^2} \cdot \text{sen } \frac{x}{x+1}$
15. $(\text{tg } v)^1 = \frac{1}{\cos^2 v} \cdot v^1$	$[\text{tg}(3-x)]^1 = \frac{1}{\cos^2(3-x)} \cdot (3-x)^1 = -\frac{1}{\cos^2(3-x)}$
16. $(\cot g v)^1 = -\frac{1}{\text{sen}^2 v} \cdot v^1$	
17. $(\text{arcsen } v)^1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot v^1$	
18. $(\arccos v)^1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot v^1$	
19. $(\text{arctg } v)^1 = \frac{1}{1+v^2} \cdot v^1$	
20. $(\text{arc cot } g v)^1 = -\frac{1}{1+v^2} \cdot v^1$	
21.	

1.5. Esboço de funções pela derivada

1.5.1. Relação entre a derivada e a função inicial

A derivada ajuda o estudo de funções.

Todas as funções do grau superior facilmente podem ser esboçadas a partir da derivada. A derivada ajuda fundamentalmente na determinação de extremos (*máximos e mínimos*), a variação da função (*monotonia*) e pontos de inflexão.

- Se $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ é crescente;
- Se $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ é decrescente;
- Se $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x)$ tem um extremo (máximo ou mínimo).

Agora vamos observar os procedimentos principais para o estudo completo de funções.

Procedimento:

1º - Achar a derivada: $f'(x)$

2º - Achar os zeros da derivada: $f'(x) = 0$

3º - Substituir zeros da $f'(x)$ em $f(x)$

4º - Tabela de variação e extremos:

x	→ Colocam-se zeros da $f'(x)$ ou assíntotas verticais
$f'(x)$	→ Estuda-se o sinal da derivada
$f(x)$	→ Estuda-se a variação da função $f(x)$ inicial

Exemplos:

1. Dadas funções reais de variável real a baixo, determina os intervalos de monotonia, o esboço de cada gráfico e o respectivo estudo completo.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2$

Determinação dos pontos de intersecção da função com os eixos das coordenadas:

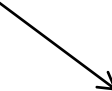
- $\cap 0x: y = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x - 6) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x - 6 = 0 \Rightarrow x_{12} = 0 \wedge x_3 = 6$
- $\cap 0y: x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 = 0$

Veja que, para esboçar qualquer função, é necessário determinar alguns pontos principais, as

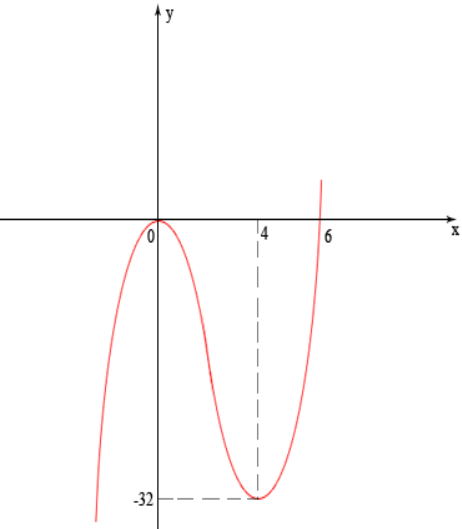
intersecções com o eixo dos xx (zeros da função) ou o eixo dos yy (ordenada na origem) e posteriormente assíntotas e coordenadas de vértices (*extremos*).

Determinação dos extremos:

- $f'(x) = (x^3 - 6x^2)' = 3x^2 - 12x$
- $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x = 0 \xrightarrow{3} x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 4 = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge x_2 = 4$
- Para $x = 0$; $f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 = 0$; Para $x = 4$; $f(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 = 46 - 96 = -32$

x		0		4	
Sinal $f'(x)$	+	0	-	0	+
Monotonia de $f(x)$		0		-32	
		Máx.		Min.	

- Tabela de variação de extremos

Esboço do Gráfico	Estudo Completo
	a) $Df: x \in \mathbb{R}$; b) $D'f: y \in \mathbb{R}$ c) Bijetividade: i) Não é injectiva porque tem coordenadas de vértice. ii) É sobrejectiva porque o contradomínio coincide com o conjunto de chegada d) Paridade: $\begin{cases} f(x) = x^3 - 6x^2 \\ f(-x) = -x^3 - 6x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{---} \\ f(-x) = -(x^3 + 6x^2) \end{cases}$ Não é igual a função inicial logo não é par nem ímpar e) Extremos: M (0;0); m (4;-32)

2. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$

$$\cap 0x: y=0 \Rightarrow 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7 = 0 \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{7}{2} \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\cap 0y: x=0 \Rightarrow y = f(0) = 7$$

Extremos

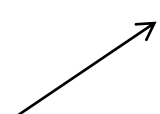
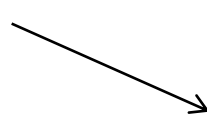
$$f'(x) = (2x^3 + 3x^2 - 12x + 7)' = 6x^2 + 6x - 12$$

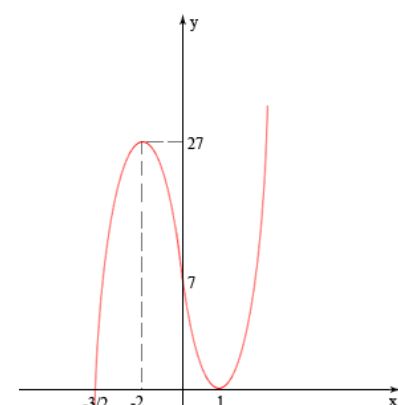
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \xrightarrow{:2} x^2 + x - 2 = 0 \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Para } x = -2 \Rightarrow f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 7 = -16 + 12 + 24 + 7 = 27$$

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow f(1) = 0$$

• Tabela de variação de extremos

x		-2		1	
Sinal $f'(x)$	+		-		+
Monotonia de $f(x)$		27 Máx.		0 Min	

Esboço do Gráfico	Estudo Completo
	a) $Df: x \in \mathbb{R}; D'f: y \in \mathbb{R}$ b) Bijetividade: ▪ não é injectiva ▪ é sobrejectiva c) Paridade: não é par nem ímpar d) Zeros ($\cap 0x$): $x_1 = -\frac{7}{2} \wedge x_2 = x_3 = 1$ e) Ordenada na origem: $y=7$ f) Extremos: Max (-2;27) e min (1;0)

$$3. f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

$$\cap 0x: y=0 \Rightarrow \frac{x+2}{x-1} = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\cap 0y: x=0 \Rightarrow y = f(0) = \frac{0+2}{0-1} = -2$$

- Assíntotas:
$$\left\{ \begin{array}{l} AV.: \text{Deno min } ador = 0; x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ AH.: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)} = 1 \end{array} \right.$$

- Extremos

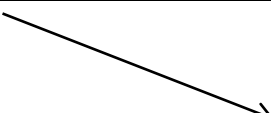
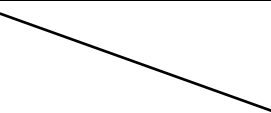
- $f'(x) = \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^1 = \frac{(x+2)^1(x-1) - (x+2)(x-1)^1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$

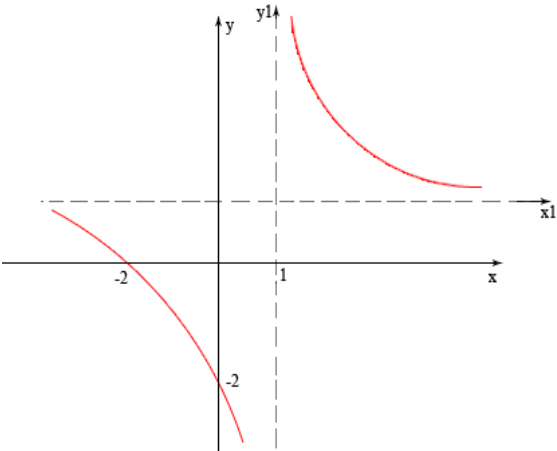
- $f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{3}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow \boxed{-3=0}$ — Impossível.

- Atenção: A impossibilidade está na determinação de zeros da derivada, logo a função não tem extremos e vai-se directamente à tabela levando a AV.

Nota: Quando a derivada não tem zeros o sinal da derivada depende inteiramente do sinal que precede a expressão ou ainda depende do sinal do x de maior expoente no numerador.

Extremos

x		1	
Sinal $f'(x)$	-	$\nexists$	-
Monotonia de $f(x)$		$\nexists$	

Esboço do Gráfico	Estudo Completo
	Domínio: $x \in \mathbb{R} \setminus \{AV\}$ ou seja $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ Contradomínio: $y \in \mathbb{R} \setminus \{AH\}$ ou seja $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ Bijectividade: É injectiva porque objectos diferentes correspondem a imagens também diferentes; não é sobrejectiva porque o contradomínio exclui valor da assíntota horizontal. Paridade: Não é par nem ímpar porque a função acima não é simétrica em relação ao eixo dos yy nem é simétrica em relação à origem do sistema cartesiano ortogonal. Zeros: $x = -2$ Ordenada na origem: $y = -2$.

1.6. Problemas de optimização

A aplicação da derivada é ampliada aos problemas de optimização, isto é, problemas que abordam os conectores máximos ou mínimos (*extremos*).

No nosso quotidiano é usual ouvir-se dizer que se pretende determinar máximos ou mínimos de variações funcionais (*aplicações*).

O emprego da palavra máxima ou mínima ilustra directamente a aplicação da derivada.

Como foi abordado anteriormente, a determinação de máximos ou mínimos (*extremos* = pontos críticos) é feita pela substituição dos zeros da derivada na função primitiva. Este estudo é feito na tabela de variação e extremos.

Exemplo:

Um agricultor na província de Gaza produz milho usando fertilizantes (*adubos*). A relação da quantidade de milho em toneladas por hectare e o adubo aplicado em quilogramas por hectare é dada pela expressão $y = 1000 + 20x - \frac{1}{10}x^2$. Determina a quantidade de adubo para que a produção seja máxima.

Resolução:

1º Passo: Determinar a derivada:

$$y' = \left(1000 + 20x - \frac{1}{10}x^2 \right)' = 20 - \frac{1}{5}x$$

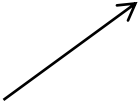
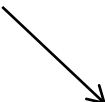
2º Passo: Determinar zeros da derivada:

$$20 - \frac{1}{5}x = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{5}x = -20 \Rightarrow x = 100$$

3º Passo: Substituir zero da derivada na função primitiva:

$$f(100) = 1000 + 20 \cdot 100 - \frac{1}{10}100^2 = 1000 + 2000 - 1000 = 2000$$

4º Passo: Tabela de variação e extremos:

x		100	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		2000	
		máx.	

R: O agricultor em destaque para produzir um máximo de 2000 toneladas por hectare aplicou 100 quilogramas por hectare de fertilizantes.



II. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Determina as variações Δx e Δy nas funções indicadas abaixo e nas abcissas dadas:

a) $x_0 = 1$ e $x_1 = 3$; $f(x) = x^2 - 3x$

b) $x_0 = 0,3$ e $x_1 = 0,6$; $f(x) = \log_2(x)$

c) $x_0 = 0,3$ e $x_1 = 0,6$; $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

2. Calcula a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = 12$

b) $f(x) = \frac{3}{4}x$

c) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3$

d) $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

e) $f(x) = (2 - 3x) \cdot x^3$

f) $f(x) = \frac{x}{2x+1}$

g) $f(x) = \frac{x^2+3}{1-2x}$

h) $f(x) = (2x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$

i) $f(x) = e^{2x-3}$

j) $f(x) = 3^{x^2+2x}$

k) $f(x) = \ln(x^2 - 3)$

l) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln \sqrt{x}$

m) $f(x) = \log_2(2x - 3)$

n) $f(x) = \sin(3x)$

o) $f(x) = \sin^2(5x - 1)$

p) $f(x) = \cos(x^2 - 3x)$

3. Considera a seguinte função $f(x) = x^3 + x^2$:

- Determina os zeros da função.
- Faz o estudo da variação e extremos da função.
- Estuda a paridade.
- Estuda a bijetividade.

4. Considera a seguinte função $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
- Determina os zeros da função.
 - Faz o estudo da variação e extremos da função.
 - Estuda a paridade.
 - Estuda a bijectividade.
 - Escreve a equação da recta tangente à curva no ponto de abcissa $x=2$.
5. Da função $f(x) = \frac{2x-2}{x-3}$, determina:
- O domínio e o contradomínio da função.
 - As equações das assíptotas caso existam.
 - Determina os intervalos de variação e extremos.
6. Considera a função $f(x) = \frac{4x}{x^2-4}$
- O domínio e o contradomínio da função.
 - As equações das assíptotas caso existam.
 - Determina os intervalos de variação e extremos.
 - Determina a equação da recta à curva no ponto $x=-2$.
7. Da função $f(x) = \frac{10x}{x^2+1}$, determina:
- O domínio e o contradomínio da função.
 - As equações das assíptotas caso existam.
 - Determina os intervalos de variação e extremos.
8. O Sr. Fernando deseja ter um jardim de forma rectangular no seu quintal. Ele tem 500 metros do material para cercar o seu jardim. Encontra as dimensões do maior jardim que o Sr. Fernando pode ter se usar todo o material.
9. Cortando quadradinhos idênticos de cada canto de um pedaço rectangular de papelão e dobrando as abas resultantes, o papelão pode ser transformado numa caixa aberta. Se o papelão tem 16 metros de comprimento e 10 de largura, encontra as dimensões da caixa com o máximo volume.
10. Uma companhia exige que os recipientes tenham uma capacidade de $50m^3$ e tenha uma forma cilíndrica e cobertos de estanho. Determina o raio e a altura do recipiente que requer menor quantidade de metal.
11. Uma caixa sem tampa, de base quadrada, deve ser construída de forma que o seu volume

seja $25000m^3$. O material da base vai custar 1200,00MT por m^2 e o material dos lados 980,00MT por m^2 . Encontra as dimensões da caixa de modo que o custo do material seja mínimo.



I. RESUMO

1.1. Conjunto dos números complexos

Os números complexos são **números compostos por uma parte real e uma imaginária**.

Eles representam o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) , cujos elementos pertencem ao conjunto dos números reais $(\mathbb{R})$.

O conjunto dos números complexos é indicado por $\mathbb{C}$ e definido pelas operações:

- **Igualdade:** $(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$;
- **Adição:** $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;
- **Multiplicação:** $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

1.2. Unidade Imaginária (i)

Indicado pela letra i , a unidade imaginária é o par ordenado $(0, 1)$. Logo:

$$i \cdot i = -1 \leftrightarrow i^2 = -1$$

Assim, i é a raiz quadrada de -1 .

1.3. Forma Algébrica de Z

A forma algébrica de Z é utilizada para representar um número complexo através da fórmula:

$$Z = x + yi$$

Em que:

- x é um número real indicado por $x = \text{Re}(Z)$, sendo chamado de **parte real de Z**.
- y é um número real indicado por $y = \text{Im}(Z)$, sendo chamado de **parte imaginária de Z**.

1.4. Conjugado de um Número Complexo

O conjugado de um número complexo é indicado por $\bar{z}$, definido por $\bar{z} = a - bi$. Assim, troca-se o sinal de sua parte imaginária.

Então, se $z = a + bi$, logo $\bar{z} = a - bi$

Quando multiplicamos um número complexo por seu conjugado, o resultado será um número real.

1.5. Igualdade entre Números Complexos

Sendo dois números complexos $Z_1 = (a, b)$ e $Z_2 = (c, d)$, eles são iguais quando $a = c$ e

$b = d$. Isso porque eles possuem partes reais e imaginárias idênticas. Assim:

$$a + bi = c + di \text{ quando } a = c \text{ e } b = d$$

1.6. Operações com Números Complexos

Com os números complexos é possível realizar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Confere abaixo as definições e exemplos:

1.6.1. Adição

$$Z_1 + Z_2 = (a + c, b + d)$$

Na forma algébrica, temos:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d)$$

Exemplo:

$$(2 + 3i) + (-4 + 5i)$$

$$(2 - 4) + i(3 + 5)$$

$$-2 + 8i$$

1.6.2. Subtração

$$Z_1 - Z_2 = (a - c, b - d)$$

Na forma algébrica, temos:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + i(b - d)$$

Exemplo:

$$(4 - 5i) - (2 + i)$$

$$(4 - 2) + i(-5 - 1)$$

$$2 - 6i$$

1.6.3. Multiplicação

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Na forma algébrica, usamos a propriedade distributiva:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 \quad (i^2 = -1)$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci - bd$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Exemplo:

$$(4 + 3i) \cdot (2 - 5i)$$

$$8 - 20i + 6i - 15i^2$$

$$8 - 14i + 15$$

$$23 - 14i$$

1.7. Plano Complexo

Quando apresentamos o plano cartesiano vimos que o mesmo pode ser utilizado na localização

gráfica de pontos em um determinado plano.

Ao estudarmos as **funções** utilizamos o plano cartesiano na representação gráfica da sua curva.

Neste tópico veremos uma outra aplicação do **plano cartesiano** que é denominada **Plano Complexo**.

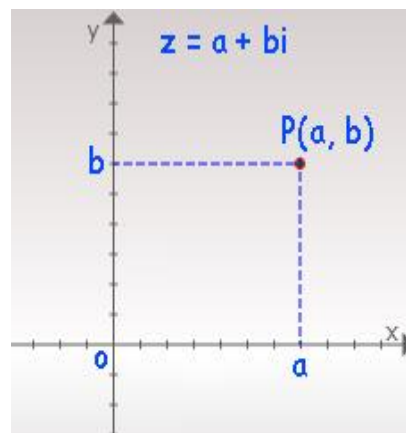
No **Plano Complexo** ou **Plano de Argand-Gauss** o eixo das abscissas é chamado **eixo real** e o eixo das ordenadas chamamos de **eixo imaginário**.

Veja a figura ao lado.

Nela o ponto P representa graficamente o número complexo $z = a + bi$.

Observa que o valor a da abscissa representa a sua parte real e o valor b da ordenada representa a sua parte imaginária.

Denominamos o ponto P de **afixo** ou **imagem do número complexo**.



1.8. Exemplos de Afixos

1.8.1. Afixos Reais

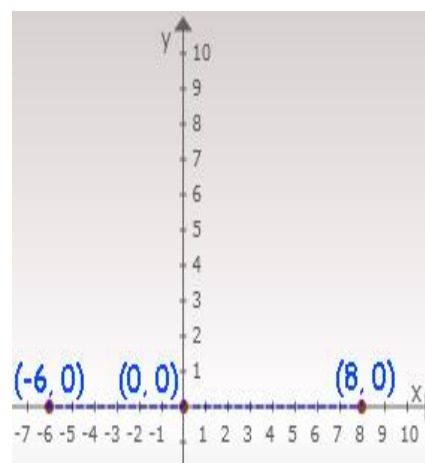
Se um afixo pertence ao **eixo das abscissas** temos a representação de um número real, pois a sua parte imaginária é nula.

Na figura ao lado temos os seguintes afixos:

- $(-6, 0) = -6 + 0i = -6$
- $(0, 0) = 0 + 0i = 0$
- $(8, 0) = 8 + 0i = 8$

Veja que todos os três afixos pertencem ao eixo das abscissas, por isto a ordenada é zero, o que indica que a parte imaginária do número complexo é nula, ou seja, temos a representação de três números reais.

Os **números reais** não precisam de um plano para serem representados graficamente. Eles podem ser representados em uma **recta real**.



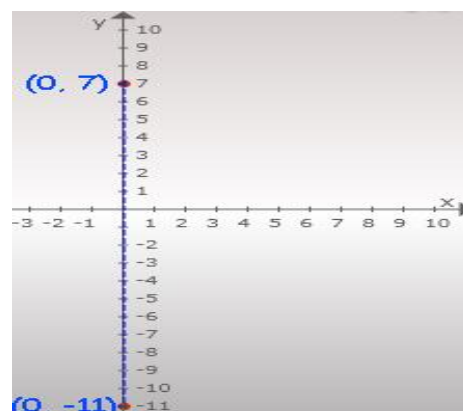
1.8.2. Afixos Imaginários Puros

Nesta outra figura temos afixos pertencentes ao eixo das ordenadas.

Nela temos os afixos de dois números imaginários puros:

- $(0, 7) = 0 + 7i = 7i$
- $(0, -11) = 0 - 11i = -11i$

Por pertencerem ao eixo das ordenadas, a parte real dos números complexos representados por estes afixos é nula, por



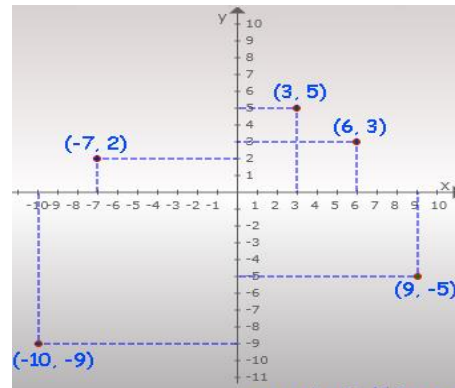
isto temos um número imaginário puro.

Nota que o afixo $(0, 0)$ embora tenha abcissa nula é **real**, pois a sua ordenada também é nula. Este afixo foi visto acima, já que se trata de um afixo real.

1.8.3. Afixos Imaginários

Na figura ao lado, temos cinco afixos representando os seguintes números complexos:

- $(3, 5) = 3 + 5i$
- $(6, 3) = 6 + 3i$
- $(-7, 2) = -7 + 2i$
- $(-10, -9) = -10 - 9i$
- $(9, -5) = 9 - 5i$



Todos estes cinco afixos representam números imaginários quem contêm uma parte real e uma parte imaginária.



II. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Determina a soma de:

a) $z_1 = (3 - 2i)$ e $z_2 = (5 - 6i)$

b) $z_1 = (3 + i)$ e $z_2 = (1 + 2i)$

2. Determina a diferença de:

a) $z_1 = (4 - 3i)$ e $z_2 = (7 + 2i)$

b) $z_1 = (3 + i)$ e $z_2 = (1 + 2i)$

3. Determina o produto de:

a) $z_1 = (8 + 2i)$ e $z_2 = (7 + i)$

b) $z_1 = (3 + i)$ e $z_2 = (5 - 3i)$

4. Calcula o conjugado de: $Z = (3 + i) - (2 + 5i)$

5. Determina a expressão equivalente a:

a) i^{13} Res i

b) i^{13} Res i

Tópicos de correcção/Resolução dos exercícios propostos

Unidade Temática 1: Módulos

1. a) 65 b) 9 c) 65
2. a) $x+5$ b) $5-x$ c) 3
3. a) $\{0\}$ b) $\{ \}$ c) $\{ \frac{1}{36} ; \frac{17}{12} \}$ d) $\{6\}$ e) $\{ \frac{3}{5} \}$
4. a) 13 b) 5 c) $\sqrt{2}$
5. a) $x \in \mathcal{R}:]-10; 10[$ b) $]2; 6[$ c) $] \frac{3}{5}; 5[$ d) $] -\infty; 2] \cup [4; +\infty[$ e) $x \in \mathcal{R}$ f) $] -\infty; -\frac{9}{4}] \cup [\frac{11}{4}; +\infty[$

Unidade Temática 2: CÁLCULO COMBINATÓRIO E PROBABILIDADES

Soluções dos Exercícios Propostos 01

- | | | | | | |
|---|----------------------|--------------------------|----------------------------|---------------------|-------------|
| 1. Sol. 6 | 2. Sol. 30240 | 3. Sol. 3 | 4. Sol. 720 | 5. Sol. 60 | 6. Sol. 35 |
| 7. Sol. 6930 | 8. Sol. 45 | 9. Sol. 10 | 10. Sol. a) $\frac{55}{7}$ | b) $n^2 + 2n$ | 11. Sol. 67 |
| 12. Sol. 30 | 13. Sol. 120 | 14. Sol. 4620 | 15. Sol. 120 | 16. Sol. a) 5 b) 10 | |
| 17. Sol. $16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$ | 18. Sol. $-67500x^3$ | 19. Sol. a) 9801 b) 9261 | | | |
- c) 9733

Soluções dos Exercícios Propostos 02

1. a) 0,40 b) 0,84
2. 0, 33...
3. $\frac{1}{9}$
4. a) 0,5 b) 0,75 c) 0,25
5. a) 0,5 b) 0,333... c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{6}$
6. a) $\frac{1}{4}$ b) 0,333... c) $\frac{2}{3}$
7. $\frac{1}{6}$
8. a) 0,4 b) 0,6 c) 0,402 d) 0,12
9. 0,21
10. 0,15
11. 30

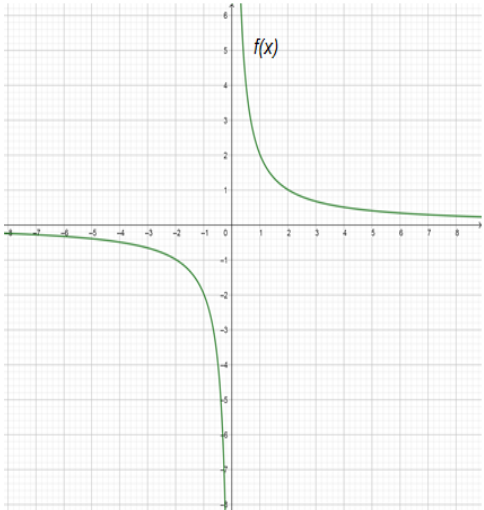
12. 0,333...

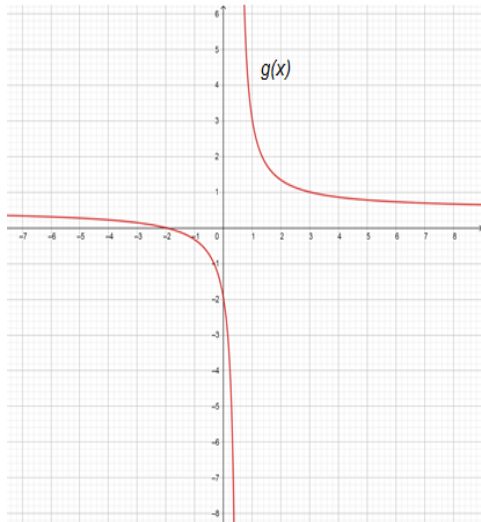
13. 0,6

Unidade Temática 3: Funções Reais de Variáveis Reais

Soluções dos exercícios propostos 01

1. **A** não é função; **B** não é função **C** é função **D** é função **E** não é função **F** é função **G** é função **H** é função **I** não é função **J** não é função **K** é função **L** é função
2. $B = \{-2, 7, 1, 10\}$
3. $(0, -4); (1, -3)$ e $(-1, -3)$
4. a) $D =]-1; +\infty[\setminus \{1\}$ b) $D =]-1; 1]$ c) $D = x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ d) $D =]2; +\infty[$
5. a) é crescente em $\mathbb{R}$ b) $] - \infty; 0[$ é decrescente ; $] 0; + \infty [$ é crescente ; c) é decrescente em $\mathbb{R}$
6. Para $x \in] - \infty; -1[\cup] 0; 1 [$ é decrescente
7. a) Bijectiva b) Bijectiva c) Bijectiva d) não é injectiva e) Bijectiva f) não injectiva
8. **A** não bijectiva **B** não bijectiva **C** é bijectiva
9. $a = -3$ $b = -5$ $c = -4$
10. $a = 12$ $c = 3$
- 11.

Gráfico	Estudo completo
	2. $f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}; Df = \mathbb{R} \setminus \{0\};$ 3. Zeros: A função não tem zeros; 4. Ordenada na origem: A função não intersecta o eixo dos yy; 5. Variação do sinal: $f(x) < 0$ se $x \in]-\infty; 0[$ $f(x) > 0$ se $x \in]0; +\infty[$ 6. Paridade: f é ímpar; 7. Injectividade: f é injectiva; 8. Monotonia: Decrescente para todo domínio $\mathbb{R}$; 9. Assíntotas: AV: $x = 0$; AH: $y = 0$



1. $f = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{1}{2}\right\}; Df = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\};$

2. Zeros da função: $x = -2;$

3. Ordenada na origem: $y = -2$

4. Variação do sinal:

$$f(x) < 0 \text{ se } x \in \left]-2; \frac{1}{2}\right[$$

$$f(x) > 0 \text{ se } x \in \left]-\infty; -2\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

5. Paridade: f não é ímpar;

6. Injectividade: f é injectiva;

7. Monotonia: Decrescente para todo domínio $\mathbb{R};$

Assíntotas: AV: $x = \frac{1}{2}$; AH: $y = -2$

12. a) $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}$ b) $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ c) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x+2} - 4$ d) $f^{-1}(x) = \log_2(x+2)$ e) $f^{-1}(x) = \log_2 x + 4$ f) $f^{-1}(x) = 2^{x+1} + 2$ g) $f^{-1}(x) = 10^{\frac{x}{2}}$

13. a) 1 b) 0 c) 0 d) 4

14. a) $\sqrt[4]{5}$ b) 5 c) 3 d) 3 e) $\sqrt[4]{x}$

15. a) $g \circ f(-2) = -3$ e $(f \circ g)(3) = 2$ b) $g \circ f(-2) = \frac{5}{3}$ e $(f \circ g)(3) = \frac{1}{4}$ c) $g \circ f(-2) = 11$ e $(f \circ g)(3) = 120$ d) $g \circ f(-2) = -\sqrt[3]{4}$ e $(f \circ g)(3) = \sqrt[3]{6}$

Unidade temática 4: Funções Reais de Variável Natural

Soluções dos exercícios propostos 01

1. a) $a_n = (2n-1)$ b) $a_n = (4n-2)$ c) $a_n = (3n-1)x(-1)^n$

2. $b_n = (-2, 3, -4, 5, -6, \dots)$

3. $C_{13} = 5/3$

4. $n = 14$

5. a) Monótona decrescente b) monótona crescente c) decrescente em sentido lato

d) Monótona crescente e) monótona crescente

Soluções dos exercícios propostos 02

1. a) Não é P. A b) É P.A de $r = -4$ c) É P.A de $r = -0,3$ d) É P.A de $r = x$ e) É P.A de $r = 1$ f) É P.A de $r = 2$ g) Não é P.A. h) Não é P.A
2. a) $x = \frac{7}{5}$ b) $x = -\frac{7}{4}$
3. $a_{14} = 41$
4. $r = 7$
5. $x = 119$
6. $a_1 = 3$
7. $n = 11$
8. Existem 81 múltiplos
9. $a_1 = 3$
10. $a_1 = 3$ e $r = 5$
11. O menor número positivo da P.A é 1.
12. $n = 13$
13. O Perímetro é 24

Soluções dos exercícios propostos 03

1. $S_{10} = 410$
2. $S_{100} = 10000$
3. $S_{22} = 847$
4. $S_{10} = 335$
5. $n = 7$
6. $S_{100} = -7325$
7. 1581
8. $a = 5$
9. $n = 33$
10. n^2
11. A soma é de 14662
12. A soma é de 60
13. (2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38)
14. Após quatro anos terá 31200,00mt

Soluções dos exercícios propostos 04

1. a) É PG de razão - 6 b) É PG de razão $-\frac{2}{3}$
2. a) $x = 4$ b) $x = 3$
3. A P.G : (2; 8, 32, ...)
4. $x = -5$

5. $a_4 = -54$
6. $a_n = 10240$
7. $a_1 = 5$
8. $a_n = 320$
9. $q = 3$
10. $n = 5$
11. $a_1 = 3$
12. A P.G é (2, 6, 18, 54, 162 e 486)
13. A P.G é (4, 8, 16,)
14. $q = \frac{2}{3}$

Soluções dos exercícios propostos 05

1. $S_{12} = 265720$
2. $S_8 = \frac{15}{4}$
3. $S_8 = \frac{-2550}{3}$
4. $S_3 = \frac{3}{8}$
5. $n = 7$
6. $n = 1024$
7. $S_{10} = 2046$
8. $S_5 = 93$

Soluções dos exercícios propostos 06

1. a) $S = 8$ b) $S = 4$ c) $S = \frac{4}{5}$ d) $S = \frac{1}{1-2x}$
2. $32 m^2$
3. 48
4. a) $\frac{31}{99}$ b) $\frac{85}{9}$ c) $\frac{28}{225}$
5. a) $x = 2$ b) $x = -6$ e $x = 6$
6. É verdadeiro
7. a) $x = 20$ b) $x = \sqrt{30}$ c) $x = 10$
8. $x = \frac{5}{2}$

Soluções dos exercícios propostos 07

- 1.

- a) ∞
- b) 0
- c) $\frac{5}{2}$
- d) $2/5$
- e) 0
- f) ∞
- g) $1/6$
- h) $1/4$
- i) 2
- j) 128
- k) ∞
- l) 0
- m) $3/2$
- n) e^4
- o) e^6
- p) $e^{\frac{7}{3}}$
- q) $e^{4\pi}$
- r) 1

UNIDADE TEMÁTICA 5: LIMITES E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES

Soluções dos exercícios propostos 01

1. a) 27 b) -1 c) $5/2$ d) 0 e) ∞ f) 1 g) 9 h) 0 i) 0 j) ∞ k) $1/10$ l) 9
 m) 6 n) $1/4$ o) 7 p) $1/6$ q) $-3/4$ r) $9/8$ s) e^2 t) $1/e^2$ u) $e^{\frac{4}{3}}$ v) $+$
 ∞ w) $1/3$ x) e y) $5/2$ z) 2 aa) 1
2. 9
3. 2
4. a) Contínua b) Descontínua

Soluções dos exercícios propostos 02

1. a) Descontínua, descontinuidade não eliminável.
- b) Contínua
- c) Contínua
- d) Contínua

2. $k = 3$

3. $m = -2$

4. $a = -5$

5. a) $a = 6$ b) $a = -1$

Unidade temática 6: Cálculo Diferencial

Soluções dos exercícios propostos

1. a) $\Delta x = 2 \quad \Delta y = 2$ b) $\Delta x = 0,3 \quad \Delta y = 1$ c) $\Delta x = 0,3 \quad \Delta y \approx 0,6$

2. a) 0 b) $\frac{3}{4}$ c) $-2x^2 + 4x$ d) $-\frac{2}{3x^3\sqrt{x}}$ e) $x^2 - 2x^3$ f) $\frac{1}{(2x+1)^2}$ g) $\frac{-2x^3+2x+6}{(1-2x)^2}$

h) $\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$ i) $2e^{2x-3}$ j) $(2x-2)3^{x^2-2x} \cdot \ln 3$ k) $\frac{2x}{x^2-3}$ l) $\frac{1+\ln\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

m) $\frac{2}{(2x-3) \cdot \ln 2}$ n) $3\cos(3x)$ o) $5\sin(10x-2)$ p) $(-2x+3)\sin(x^2+3x)$

3. a) $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$

b)

x		$-\frac{2}{3}$		0	
$f'(x)$	+		—		+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

O ponto mínimo é 0

O ponto máximo é $\frac{4}{27}$

c) $f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2 = -(x^3 - x^2) \rightarrow$ não é par nem ímpar.

d) A função não injectiva mas é sobrejectiva então ela não bijectiva.

4. a) $x_{1;2} = \pm 1 \wedge x_{3;4} = \pm 2$

b)

x		$-\sqrt{\frac{5}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{5}{2}}$	
-----	--	-----------------------	--	---	--	----------------------	--

$f'(x)$	—		+	0	—	0	+
$f(x)$	↘	$-\frac{11}{16}$	↗	4	↘	$-\frac{11}{16}$	↗

Os pontos mínimos são $-\frac{11}{16}$

O ponto máximo é 4

a) Estudo de paridade: $f(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4 = f(x)$ então a função é par.

b) A função não é injectiva nem sobrejectiva logo não é bijectiva.

$$f'(2) = 4 \cdot 2^3 - 10 \cdot 2 = 32 - 20 = 12$$

c) $P(2;0)$

$$y - y_0 = a_t \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow y - 0 = 12(x - 2) \Rightarrow y = 12x - 24 \Leftrightarrow -12x + y + 24 = 0$$

$$y = 12x - 24$$

5.

$$f(x) = \frac{2x-2}{x-3}$$

a) $Df: x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ $D'f: y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) $Av: x = 3$; $Ah: y = 2$

$$c) f'(x) = \left(\frac{2x-2}{x-3} \right)' = \frac{(2x-2)' \cdot (x-3) - (2x-2) \cdot (x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{2(x-3) - (2x-2)}{(x-3)^2} = \frac{2x-6-2x+2}{(x-3)^2} = -\frac{4}{(x-3)^2}$$

$$-\frac{4}{(x-3)^2} = 0 \rightarrow \text{Nao tem raizes.}$$

A derivada não tem zeros

x		3	
$f'(x)$	+	≠	+
$f(x)$	↗	≠	↗

A função não tem extremos ou melhor não tem máximo nem mínimo.

6. $f(x) = \frac{4x}{x^2-4}$

a) $Df: x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ $D'f: y \in \mathbb{R}$

b) $Av: x = \{-2, 2\}$; $Ah: y = 0$

$$c) f'(x) = \frac{4(x^2-4)-4x(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{-4x^2}{(x^2-4)^2}; f'(x) = 0; \Rightarrow f'(x) = \frac{-4x^2-16}{(x^2-4)^2}$$

$$-4x^2 - 16 = 0 \rightarrow \text{A derivada não tem zero}$$

x		-2		2	
$f'(x)$	—	≠	—	≠	—
$f(x)$	↘	≠	↘	≠	↘

A função em estudo não tem extremos

$$7. f(x) = \frac{10x}{x^2+1}$$

$$a) Df: x \in \mathcal{R} \quad D'f: y \in \mathcal{R}$$

$$b) Av: x = \neq; Ah: y = 0$$

$$c) f'(x) = \frac{10(x^2+1)-10x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-10x^2+10}{(x^2+1)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-10x^2+10}{(x^2+1)^2} = 0; -10x^2 + 10 = 0$$

$$x_1 = -1 \text{ e } x_2 = 1$$

d)

x		-1		1	
$f'(x)$	—	0	+	0	—
$f(x)$	↘	-5	↗	5	↘

A função tem valor mínimo no ponto $x = -5$ e tem valor máximo no ponto $x = 5$

$$8. X = Y = 125$$

$$9. x = 2; l = 12; c = 6.$$

$$10. r = 8.9 \text{ e } h = 2.$$

$$11. x = 15.983m \text{ e } y = 9,785m.$$

Unidade temática 7: Números Complexos

Soluções dos exercícios propostos

$$1. a) 8 + 4i \quad b) 4 + 3i$$

2. a) $-3 - 5i$ b) $2 + i$

3. a) $54 + 22i$ b) $18 - 4i$

4. $1 + 4i$

5. a) i^{13} Res i b) Res i

Referências Bibliográficas

- Chilaule, A., & Machango, O. (2017). *Matemática 12^a classe – Letras*, 2^a edição, Texto Editores Moçambique.
- Gomes, F. & Viegas, C. (2005). *XEQMAT (Matemática - 12^o ano) vol. 1*, Lisboa, Texto Editora.
- Gomes, F. & Viegas, C. (2004). *XEQMAT (Matemática - 11^o ano) vol. 2*, Lisboa, Texto Editora.
- Giovanni, J. R., Bonjorno, J.R., & Giovanni JR., J. R. (1994). *Matemática Fundamental*, 2^o Grau, São Paulo, FTD.
- INDE (2008). *Programa de Matemática da 12^a classe*. Maputo-Moçambique.
- Neves, M. A. F., & Silva, J. N. (2020). *Matemática 11.^a classe*, Edição/reimpressão, Plural Editores Moçambique.
- MINED (2014). *Matemática com Certeza*, Maputo.
- Mendes, V. F. (2015). *Matemática 12^o ano de escolaridade*, Cabo Verde.
- Vuma, J. P., & Cherinda, M. (2009). *Pré-Universitário Matemática 11*, Longman.