

SEMAINE DU 18/5 AU 24/5

RAPPELS : ALGÈBRE LINÉAIRE

Avec E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

- ① **Révision.** Matrices, applications linéaires. Les étudiants doivent revoir et être à l'aise avec le passage de d'une matrice A à l'application linéaire associée à la matrice A , et du passage d'une application linéaire f à sa matrice dans deux bases de l'espace vectoriel de départ et d'arrivée.
- ② **Rang d'une matrice.** Liens entre rang d'une matrice, rang d'une application linéaire, rang d'une famille de vecteurs.
 $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si A est de rang maximal.
- ③ **Changement de base pour un endomorphisme $f : E \rightarrow E$.** Définition d'une matrice de passage et propriétés. Formule de changement de base.
Définition des matrices semblables et lien avec le changement de bases.
Définition de la trace, Commutativité du produit matriciel sous l'application trace.
La trace est un invariant des matrices semblables : A, B semblables $\Rightarrow \text{trace}(A) = \text{trace}(B)$.
- ④ **Changement de base pour une application linéaire quelconque $f : E \rightarrow F$.** Formule de changement de base.
Définition des matrices équivalentes et lien avec le changement de bases.
Le rang est un invariant des matrices équivalentes : A, B équivalentes $\Leftrightarrow A$ et B ont le même rang $\Leftrightarrow$ On peut passer de A à B avec des opérations sur les lignes et les colonnes.
 $\text{rg } A = r \iff A \text{ est équivalente à } J_{m,n,r} = \begin{pmatrix} O_{r,n-r} & I_r \\ O_{m-r,n-r} & O_{m-r,r} \end{pmatrix}.$

Remarque : Dans le cours, on note $P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} := \text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{C}, \mathcal{B})$ la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$.

GROUPE SYMÉTRIQUE

- ① **Révision.** Définition du groupe symétrique, Permutations. Cardinal de S_n
- ② **Cycles.** Définitions d'orbite, l -cycle, support d'une permutation, Conjugaison dans S_n .
Décomposition en cycles à supports disjoints, S_n est engendré par les transpositions, Ordre d'une permutation,
- ③ **Signature.** Définition du nombre d'inversion, définition de la signature, $\varepsilon(\sigma) = \prod_{\{i,j\}} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$, La signature est l'unique morphisme de groupes de $(S_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$

DÉTERMINANT

- ① **Formes n -linéaires.** Définition, exemples de formes bilinéaires, trinéaires.
Définition de symétrie, antisymétrie, alternée. Alternée $\Leftrightarrow$ Antisymétrique
- ② **Déterminant d'une famille de vecteurs.** Existence et unicité de la forme n -linéaire qui envoie une base fixée sur 1. Formule explicite du Déterminant. Déterminant des matrices triangulaires. Caractérisation d'une base par le déterminant.

- ③ **Déterminant d'un endomorphisme** Définition. Invariance du Déterminant par changement de base. Lien avec le déterminant d'une famille de vecteurs.
 $\det(u \circ v) = \det u \cdot \det v$ et $\det(u^{-1}) = \det(u)^{-1}$
- ④ **Déterminant d'une matrice carrée.** Définition. Propriétés issues des endomorphismes.
 $\det(M^T) = \det({}^tM)$
- ⑤ **Application.** Définition de la comatrice. Formule de la comatrice. Calcul d'inverse.

Je n'ai pas eu le temps de faire beaucoup de calculs pratique de déterminants avec les élèves. Il est important de noter leur manque de recul sur les notions, en particulier pour les colles en début de semaine.

PREUVES

Seules les preuves dans cette section sont à savoir par coeur par les étudiants. Les autres preuves peuvent être demandées, en proposant une méthode et/ou en aidant l'étudiant durant la réalisation de la preuve.

La question de cours sera composée d'un énoncé rapide (définition, propriété ou théorème), suivi d'une démonstration (ou exemple) de cours choisie parmi :

- ① Définition d'une forme n -linéaire. Preuve qu'une forme n -linéaire est alternée, si et seulement si, elle est antisymétrique.
- ② Définition du déterminant d'une famille de vecteurs. Preuve de la caractérisation d'une base.
- ③ Définition du déterminant d'un endomorphisme et preuve que celui ci est indépendant de la base choisie.
- ④ Quelques exemples clés (En plus, ou à la place d'une question de cours) :

- Déterminant tridiagonal : Calculer
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$
- Somme sur une ligne ou une colonne : Calculer
$$\begin{vmatrix} a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$
- Vandermonde : Montrer que $V_n(a_1, \dots, a_n) := \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} S28 = \prod_{j>i} (a_j - a_i).$