

**Manual de**  
**Mecánica Clásica**

Artemio González López

Madrid, 24 de diciembre de 2019

Editor:

Artemio González López

Departamento de Física Teórica

Facultad de Ciencias Físicas

Plaza de Ciencias s/n

28040 Madrid

© El autor

ISBN-10: 84-695-2651-0

ISBN-13: 978-84-695-2651-4

Impreso en Madrid

# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Mecánica newtoniana</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1 Sistemas de coordenadas. Cinemática   | 1         |
| 1.2 Leyes de Newton. Sistemas de referencia inerciales. Principio de relatividad de Galileo | 6         |
| 1.2.1 Leyes de Newton   | 6         |
| 1.2.2 Sistemas de referencia inerciales   | 8         |
| 1.2.3 Principio de relatividad de Galileo   | 9         |
| 1.3 Leyes de conservación. Fuerzas conservativas. Fuerza electromagnética                   | 12        |
| 1.3.1 Leyes de conservación   | 12        |
| 1.3.2 Fuerzas conservativas   | 13        |
| 1.3.3 Fuerzas gravitatoria y electrostática   | 15        |
| 1.3.4 Fuerza electromagnética   | 17        |
| 1.4 Movimiento de una partícula en un potencial unidimensional                              | 21        |
| 1.4.1 Estabilidad de los equilibrios. Período de las pequeñas oscilaciones                  | 31        |
| 1.5 Dinámica de un sistema de partículas. Leyes de conservación                             | 34        |
| 1.5.1 Dinámica de un sistema de partículas  | 34        |
| 1.5.2 Leyes de conservación   | 35        |
| <b>2 Movimiento en un campo de fuerzas central</b>  | <b>41</b> |
| 2.1 Problema de dos cuerpos. Reducción al problema equivalente de un cuerpo                 | 41        |
| 2.2 Constantes del movimiento. Ley horaria y ecuación de la trayectoria. Órbitas acotadas   | 42        |
| 2.2.1 Constantes del movimiento   | 42        |
| 2.2.2 Ley horaria y ecuación de la trayectoria  | 43        |
| 2.2.3 Órbitas acotadas  | 50        |
| 2.3 El problema de Kepler. Movimiento planetario  | 55        |
| 2.3.1 El problema de Kepler   | 55        |
| 2.3.2 Movimiento planetario   | 57        |
| 2.4 Dispersión en un campo de fuerzas central. Fórmula de Rutherford                        | 59        |
| 2.4.1 Sección eficaz diferencial de dispersión  | 59        |
| 2.4.2 Dispersión por un potencial central   | 62        |
| 2.4.3 Fórmula de Rutherford   | 67        |
| <b>3 Formulaciones lagrangiana y hamiltoniana de la mecánica</b>                            | <b>73</b> |
| 3.1 Introducción al cálculo variacional   | 73        |
| 3.1.1 Problema fundamental del cálculo de variaciones                                       | 73        |
| 3.1.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange  | 75        |
| 3.2 Principio de Hamilton en sistemas sin ligaduras   | 81        |
| 3.2.1 Principio de Hamilton para una partícula  | 81        |
| 3.2.2 Principio de Hamilton para un sistema de partículas                                   | 82        |
| 3.2.3 Covariancia de la formulación lagrangiana   | 84        |
| 3.2.4 Lagrangiano de una partícula cargada en un campo electromagnético                     | 86        |
| 3.3 Sistemas con ligaduras  | 87        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.3.1    | Movimiento de una partícula sobre una superficie lisa                | 87         |
| 3.3.2    | Sistema de $N$ partículas con ligaduras                              | 90         |
| 3.4      | Leyes de conservación  | 94         |
| 3.5      | Formulación hamiltoniana de la mecánica                              | 99         |
| 3.5.1    | Ecuaciones canónicas de Hamilton                                     | 99         |
| 3.5.2    | Leyes de conservación  | 101        |
| 3.5.3    | Corchetes de Poisson   | 104        |
| <b>4</b> | <b>Movimiento en un sistema de referencia no inercial</b>            | <b>109</b> |
| 4.1      | Velocidad angular de un sistema de ejes respecto de otro             | 109        |
| 4.2      | Derivada temporal en los sistemas fijo y móvil                       | 112        |
| 4.3      | Dinámica en un sistema de referencia no inercial                     | 113        |
| 4.4      | Movimiento con respecto a la superficie terrestre                    | 114        |
| 4.5      | El péndulo de Foucault   | 121        |
| <b>5</b> | <b>El sólido rígido</b>  | <b>125</b> |
| 5.1      | Momento angular y energía cinética de un sólido rígido               | 125        |
| 5.1.1    | Grados de libertad   | 125        |
| 5.1.2    | Momento angular y energía cinética                                   | 127        |
| 5.2      | Tensor de inercia  | 129        |
| 5.2.1    | Definición y propiedades elementales                                 | 129        |
| 5.2.2    | Teorema de Steiner   | 132        |
| 5.2.3    | Ejes principales de inercia  | 133        |
| 5.3      | Ecuaciones del movimiento de un sólido rígido                        | 137        |
| 5.3.1    | Ecuaciones del movimiento de un sólido rígido en un sistema inercial | 137        |
| 5.3.2    | Ecuaciones de Euler  | 140        |
| 5.4      | Movimiento inercial de un trompo simétrico                           | 141        |
| 5.5      | Ángulos de Euler   | 146        |
| 5.6      | El trompo de Lagrange  | 148        |
| <b>6</b> | <b>Relatividad especial</b>  | <b>155</b> |
| 6.1      | Principios de la relatividad especial                                | 155        |
| 6.2      | Transformaciones de Lorentz  | 158        |
| 6.2.1    | Deducción de las ecuaciones de la transformación                     | 158        |
| 6.2.2    | Ley de adición de velocidades relativista                            | 162        |
| 6.2.3    | Intervalo  | 162        |
| 6.2.4    | Producto de Minkowski  | 165        |
| 6.2.5    | Grupo de Lorentz   | 166        |
| 6.3      | Consecuencias físicas de las transformaciones de Lorentz             | 168        |
| 6.3.1    | Dilatación del tiempo  | 168        |
| 6.3.2    | Contracción de Lorentz-Fitzgerald                                    | 173        |
| 6.4      | Cuadrivelocidad y cuádrimomento. Energía cinética relativista        | 174        |
| 6.5      | Conservación del cuádrimomento. Energía relativista                  | 177        |
| 6.6      | Partículas de masa nula  | 180        |
| 6.6.1    | Efecto Doppler relativista   | 181        |
| 6.6.2    | Efecto Compton   | 183        |
| 6.7      | Colisiones relativistas  | 184        |
| 6.7.1    | Sistema centro de momentos   | 184        |
| 6.7.2    | Energía umbral   | 185        |
| 6.8      | Dinámica relativista   | 187        |
| 6.8.1    | Movimiento hiperbólico   | 189        |

# Capítulo 1

## Mecánica newtoniana

### 1.1 Sistemas de coordenadas. Cinemática

Vector de posición de una partícula que se mueve en el espacio ordinario ( $\mathbb{R}^3$ ):

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \equiv \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i,$$

donde  $\mathbf{e}_i$  es el  $i$ -ésimo vector unitario coordenado en un sistema de coordenadas *cartesianas* ortogonales:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0) \equiv \mathbf{i}, \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0) \equiv \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1) \equiv \mathbf{k}.$$

Velocidad y aceleración:

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{a} \equiv \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}},$$

donde el punto indica derivada respecto del *tiempo*  $t$ . En coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i,$$

donde (al ser los vectores coordenados  $\mathbf{e}_i$  *constantes*)

$$v_i = \dot{x}_i, \quad a_i = \ddot{x}_i.$$

Notación:

$$r = |\mathbf{r}|, \quad v = |\mathbf{v}|.$$

*Ejercicio.* Probar que si  $\mathbf{v} \neq 0$  se tiene

$$\dot{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{v}.$$

En particular, si  $v$  es constante los vectores velocidad y aceleración son ortogonales.

*Ejercicio.* Probar que  $\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} = r\dot{r}$ .

*Coordenadas esféricas* (cf. Fig. 1.1):

$$\mathbf{r} = r(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta),$$

donde

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Ahora los vectores unitarios coordenados *no* son constantes, sino que dependen de la *posición*

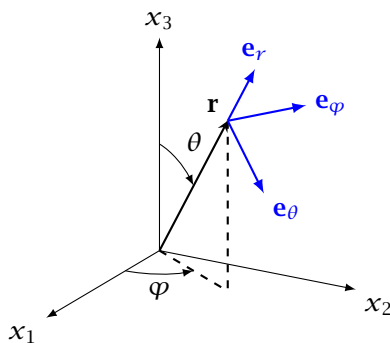


Figura 1.1. Sistema de coordenadas esféricas.

de la partícula (i.e., de las coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right|^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) = \frac{\mathbf{r}}{r}, \\ \mathbf{e}_\theta &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right|^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta), \\ \mathbf{e}_\varphi &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right|^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Las coordenadas esféricas son *ortogonales*, pues se comprueba fácilmente que

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0.$$

De estas relaciones se sigue también que los vectores  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$  forman un *sistema ortonormal* en cada punto. Este sistema está *positivamente orientado*, ya que

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\varphi,$$

o, equivalentemente,

$$(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta) \cdot \mathbf{e}_\varphi = 1.$$

*Velocidad y aceleración en coordenadas esféricas.*

Calculemos en primer lugar las derivadas temporales de los vectores coordenados unitarios. Nótese que, al ser

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha = 1 \quad (\alpha = r, \theta, \varphi),$$

derivando respecto del tiempo se obtiene

$$\dot{\mathbf{e}}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha = 0.$$

Al ser los vectores  $\mathbf{e}_\alpha$  mutuamente ortogonales,  $\dot{\mathbf{e}}_r$  ha de ser una combinación lineal de  $\mathbf{e}_\theta$  y  $\mathbf{e}_\varphi$ , y así sucesivamente para las restantes coordenadas. Más precisamente, aplicando la *regla de la cadena* se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_r &= \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \sin \theta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta &= \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r + \cos \theta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi &= \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = -(\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \dot{\varphi} = -\dot{\varphi} (\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Teniendo en cuenta las relaciones anteriores se obtiene sin dificultad:

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi \equiv v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta + v_\varphi\mathbf{e}_\varphi, \quad (1.3)$$

siendo

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r\sin\theta\dot{\varphi} \quad (1.4)$$

las componentes del vector velocidad en coordenadas esféricas. Nótese que, al ser los vectores unitarios coordenados *ortonormales*,

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2 = \dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2). \quad (1.5)$$

Del mismo modo, derivando la ecuación (1.3) respecto de  $t$  y aplicando las relaciones (1.2) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}(\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \sin\theta\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi) + (r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\mathbf{e}_r + \cos\theta\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi) \\ &\quad + (r\sin\theta\ddot{\varphi} + \sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi - r\sin\theta\dot{\varphi}^2(\sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta) \\ &= a_r\mathbf{e}_r + a_\theta\mathbf{e}_\theta + a_\varphi\mathbf{e}_\varphi, \end{aligned}$$

donde las componentes de la aceleración en coordenadas esféricas están dadas por

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2, \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2, \\ a_\varphi &= r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

*Coordenadas cilíndricas* (cf. Fig. 1.2):

$$\mathbf{r} = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z),$$

siendo

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Repitiendo el cálculo anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right|^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \\ \mathbf{e}_\varphi &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right|^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \\ \mathbf{e}_z &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right|^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Nótese que de nuevo

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_z,$$

y por tanto las coordenadas cilíndricas  $(\rho, \varphi, z)$  son también ortonormales y están positivamente orientadas. Derivando respecto de  $t$  las ecuaciones de los vectores unitarios coordenados se obtiene inmediatamente

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\mathbf{e}_\rho, \quad \dot{\mathbf{e}}_z = 0.$$

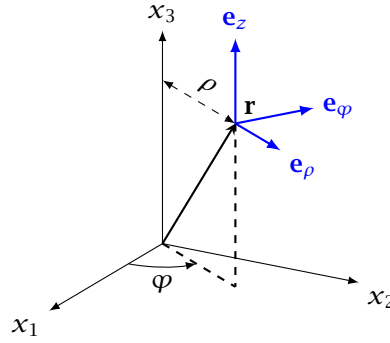


Figura 1.2. Sistema de coordenadas cilíndricas.

Al ser ahora

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z, \quad (1.7)$$

derivando dos veces respecto de  $t$  y procediendo como antes se obtienen fácilmente las siguientes fórmulas para las componentes de la velocidad y la aceleración en coordenadas cilíndricas:

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho \dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}; \quad a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = \rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}, \quad a_z = \ddot{z}. \quad (1.8)$$

De nuevo, de la ortonormalidad de los vectores  $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$  se sigue que

$$v^2 = v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2.$$

*Ejercicio.* Probar que si los vectores  $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$  forman un sistema ortonormal positivamente orientado entonces se tiene

$$\mathbf{n}_\alpha \times \mathbf{n}_\beta = \varepsilon(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{n}_\gamma,$$

donde  $(\alpha, \beta, \gamma)$  es una permutación de  $(1, 2, 3)$  y  $\varepsilon(\alpha, \beta, \gamma)$  es su signo. Introduciendo el *tensor completamente antisimétrico de Levi-Civita*

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 1, & (\alpha, \beta, \gamma) \text{ permutación par de } (1, 2, 3) \\ -1, & (\alpha, \beta, \gamma) \text{ permutación impar de } (1, 2, 3) \\ 0, & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

las relaciones anteriores se pueden escribir en la forma equivalente

$$\mathbf{n}_\alpha \times \mathbf{n}_\beta = \sum_{\gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{n}_\gamma.$$

*Ejercicio.* Consideremos el sistema de coordenadas curvilíneas  $\mathbf{q} \equiv (q_1, q_2, q_3)$  definido por una transformación biyectiva  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{q})$  con jacobiano no nulo. Los vectores unitarios coordenados son en este caso

$$\mathbf{e}_{q_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \quad \text{con } h_i \equiv \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right|.$$

Este sistema de coordenadas es *ortogonal* si

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = 0, \quad \forall i \neq j,$$

y *positivamente orientado* si el jacobiano  $\det \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 3}$  es positivo.



- i) Probar que  $h_i(\mathbf{q}) \neq 0$ .
- ii) Demostrar que  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 h_i \dot{q}_i \mathbf{e}_{q_i}$ , y por tanto  $v_{q_i} = h_i \dot{q}_i$ .
- iii) Si  $f$  es una función escalar suave, probar que

$$\nabla f = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \mathbf{e}_{q_i} \implies (\nabla f)_{q_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

*Ayuda:* por definición de gradiente  $\nabla f \cdot d\mathbf{r} = df$  en cualquier sistema de coordenadas, y  $d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 h_i dq_i \mathbf{e}_{q_i}$  (¿por qué?).

**Comentario.** Aplicando el teorema de Gauss al sólido infinitesimal cuyas coordenadas curvilíneas están comprendidas entre  $q_i$  y  $q_i + dq_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), se demuestra que la *divergencia* de un campo vectorial suave

$$\mathbf{F} \equiv \sum_{i=1}^3 F_{q_i}(\mathbf{q}) \mathbf{e}_{q_i}$$

en un sistema *ortogonal* de coordenadas curvilíneas  $\mathbf{q}$  se puede expresar como

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} (h_j h_k F_i),$$

donde  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ . Del apartado iii) del ejercicio anterior se sigue entonces que el *laplaciano* de una función escalar  $f$  está dado por

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{h_j h_k}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right).$$

Si el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales  $\mathbf{q}$  está *positivamente orientado*, aplicando el teorema de Stokes a superficies infinitesimales adecuadas perpendiculares a los vectores unitarios coordenados  $\mathbf{e}_{q_i}$  en un punto cualquiera obtenemos

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_{q_1} & h_2 \mathbf{e}_{q_2} & h_3 \mathbf{e}_{q_3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}.$$

**Ejemplo 1.1.** *Movimiento plano en coordenadas polares.*

Supongamos que la partícula se mueve en un plano, que tomaremos como el plano  $z = 0$ , de modo que  $z(t) = 0$  para todo  $t$ . En tal caso  $\dot{z} = \ddot{z} = v_z = a_z = 0$ ,  $\rho = r$  (distancia de la partícula al origen) y  $(r, \varphi)$  son *coordenadas polares* en el plano del movimiento (cf. la Fig. 1.3). Llamando (como es habitual)  $\theta$  a la coordenada angular en lugar de  $\varphi$ , las fórmulas (1.8) se reducen a las siguientes:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r \dot{\theta}, \quad a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}. \tag{1.9}$$

En particular, si  $r(t) = R$  para todo  $t$  (movimiento *circular*) se obtienen las fórmulas familiares

$$v_r = 0, \quad v_\theta = R \dot{\theta}, \quad a_r = -R \dot{\theta}^2, \quad a_\theta = R \ddot{\theta}. \tag{1.10}$$

Nótese, en particular, que, aunque la componente radial de la velocidad es idénticamente nula, incluso si  $\ddot{\theta} = 0$  hay una aceleración radial negativa  $-R \dot{\theta}^2 = -v^2/R$  (*aceleración centrípeta*). ■

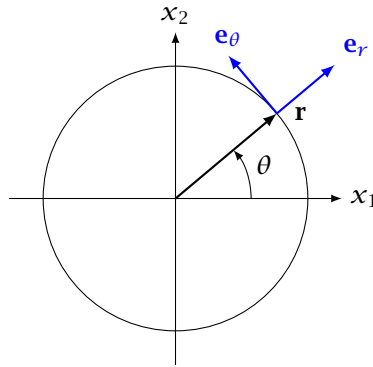


Figura 1.3. Coordenadas polares.

**Ejemplo 1.2. Velocidad angular.**

Consideremos de nuevo una partícula que se mueve en una circunferencia de radio  $R$ , es decir rotando alrededor del eje perpendicular al plano de la circunferencia que pasa por su centro. Tomando el origen de coordenadas en el centro de la circunferencia y el plano  $z = 0$  como el plano del movimiento, el movimiento de la partícula está descrito en coordenadas polares por las ecs. (1.10). De estas ecuaciones se sigue que

$$\mathbf{v} = R\dot{\theta}(t) \mathbf{e}_\theta,$$

y de la ec. (1.7) se deduce que

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{r} = \mathbf{e}_z \times (R\mathbf{e}_\rho) = R\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho = R\mathbf{e}_\theta.$$

Por tanto en este caso

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

donde el vector

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\theta}(t)\mathbf{e}_z$$

se denomina **velocidad angular** de la partícula. La velocidad angular es por tanto un *vector* cuya dirección es la del eje de giro, y cuyo módulo es el *valor absoluto*  $|\dot{\theta}(t)|$  de la velocidad angular de rotación. La rotación alrededor del eje  $z$  es “a izquierdas” (resp. “a derechas”) si  $\dot{\theta}(t) > 0$  (resp.  $\dot{\theta}(t) < 0$ ). ■

## 1.2 Leyes de Newton. Sistemas de referencia inerciales. Principio de relatividad de Galileo

### 1.2.1 Leyes de Newton

El **momento** (o cantidad de movimiento) de una partícula se define por

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}}, \quad (1.11)$$

donde  $m$  es la **masa** de la partícula. En mecánica clásica la masa es un parámetro positivo *constante* (en particular, independiente de la velocidad) característico de cada partícula. En la notación y terminología actuales, las dos primeras **leyes de Newton** afirman que:

I. En ausencia de fuerzas, el momento (y, por tanto, la velocidad) de la partícula permanece constante.

II. Si sobre la partícula actúa una fuerza  $\mathbf{F}$  el ritmo de variación del momento está dado por

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (1.12)$$

Al ser la masa de la partícula independiente de la velocidad, esta última ecuación es equivalente a

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \equiv m\ddot{\mathbf{r}}. \quad (1.13)$$

Esta es la *ecuación del movimiento* de la partícula.

### Comentarios.

- Tal como las hemos formulado, la primera ley es un caso particular de la segunda, ya que si  $\mathbf{F} = 0$  entonces  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$  implica que  $\mathbf{p}$ , y por tanto  $\mathbf{v}$ , han de ser constantes.
- Las dos primeras leyes de Newton (o, por lo que acabamos de comentar, las ecs. (1.12)-(1.13)) constituyen el fundamento de la mecánica clásica. Estas leyes se cumplen con gran exactitud para movimientos con *velocidades pequeñas* en comparación con la velocidad de la luz, y a *escala macroscópica*<sup>1</sup>. Es decir, *no* rigen las interacciones a escala atómica y subatómica (entre partículas elementales, átomos, núcleos atómicos, moléculas, etc.), gobernadas por la *mecánica cuántica*. Tampoco son válidas para el movimiento en campos gravitatorios intensos, regido por la teoría de la *relatividad general* de Einstein. En realidad, tanto la mecánica cuántica (o incluso la *teoría cuántica de campos*, que combina la mecánica cuántica con la teoría especial de la relatividad) como la Relatividad general tampoco son universalmente válidas, sino que más bien se aplican a situaciones físicas distintas. De hecho, no existe hoy en día una teoría consistente, aplicable a *todos* los fenómenos físicos, que unifique la mecánica cuántica con la teoría general de la relatividad.
- La segunda ley de Newton proporciona una definición operacional de la masa. En efecto, si sometemos a dos partículas distintas (denotadas por 1 y 2) a la misma fuerza  $\mathbf{F}$ , según (1.13) sus aceleraciones tienen la misma dirección y sentido, y el cociente de sus módulos verifica:

$$\frac{|\mathbf{a}_1|}{|\mathbf{a}_2|} = \frac{m_2}{m_1}.$$

De esta forma se puede medir en principio el cociente  $m_2/m_1$  para cualquier par de partículas. De la discusión anterior debería también quedar claro que la masa de una partícula es una medida cuantitativa de su *inercia*, es decir, su resistencia a ser acelerada por cualquier fuerza que se le aplique.

- La práctica totalidad de las fuerzas que aparecen en mecánica clásica dependen a lo sumo del tiempo, la posición y la velocidad, y son por tanto *independientes de la aceleración* (y de las derivadas de la posición de orden superior a 2)<sup>2</sup>. La segunda ley de Newton (1.13) puede escribirse por tanto en la forma

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \quad (1.14)$$

<sup>1</sup>Más precisamente, si la *acción* típica del sistema en estudio, definida como el producto de la energía por el tiempo típicos, es mucho mayor que la constante de Planck  $h = 6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$  J s.

<sup>2</sup>La única excepción de cierta importancia es la fuerza ejercida sobre una partícula cargada acelerada por su propio campo electromagnético, denominada *fuerza de Abraham-Lorentz-Dirac*, proporcional a  $\dot{\mathbf{a}}$ .

siendo  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  la fuerza ejercida sobre la partícula. Esta ecuación es en realidad un *sistema de 3 ecuaciones diferenciales de 2º orden*

$$\ddot{x}_i = \frac{1}{m} F_i(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.15)$$

para las tres coordenadas de la partícula  $x_i(t)$ . Si la función  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  es de clase  $C^1$ , las ecuaciones (1.15) (o (1.14)) con condiciones iniciales arbitrarias

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}_0 \quad (1.16)$$

tienen (localmente) una *solución única*. En otras palabras, *la posición y la velocidad de la partícula en un cierto instante  $t_0$  determinan su trayectoria  $\mathbf{r}(t)$  en cualquier otro instante  $t$* . La mecánica clásica es por tanto una teoría esencialmente *determinista*.

- La *tercera ley de Newton* (o **ley de la acción y la reacción**) afirma que si la partícula 2 ejerce sobre la partícula 1 una fuerza  $\mathbf{F}_{12}$ , entonces la partícula 1 ejerce sobre la 2 una fuerza  $\mathbf{F}_{21}$  igual y de signo contrario:

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}. \quad (1.17)$$

Una versión más restrictiva de la tercera ley de Newton establece que, además, la fuerza  $\mathbf{F}_{12}$  (y, por tanto,  $\mathbf{F}_{21}$ ) ha de ser paralela al vector  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , es decir a la recta que une ambas partículas:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \parallel \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (1.18)$$

Es importante tener en cuenta que la tercera ley de Newton —en cualquiera de sus dos versiones (1.17) y (1.18)— *no* tiene carácter fundamental, ya que (por ejemplo) *no* la verifica en general la fuerza electromagnética entre dos cargas en movimiento. Sí la cumplen —de hecho, en su versión más restrictiva (1.18)— las fuerzas gravitatoria y electrostática (ver más adelante), así como la mayor parte de las fuerzas macroscópicas de naturaleza no electromagnética que ocurren en problemas mecánicos ordinarios, como por ejemplo la tensión.

### 1.2.2 Sistemas de referencia inerciales

Es evidente que la primera ley de Newton *no* puede cumplirse en *todos* los sistemas de referencia. En efecto, sean  $S$  y  $S'$  dos sistemas de referencia con los ejes paralelos, y denotemos por  $\mathbf{R}(t)$  las coordenadas del origen de  $S'$  respecto del sistema de referencia  $S$  en el tiempo  $t$ . Supongamos que las coordenadas de una partícula respecto del sistema de referencia  $S$  en cada instante  $t$  están dadas por un cierto vector  $\mathbf{r}(t)$ , de forma que la velocidad de la partícula (respecto de  $S$ ) es  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ . *En mecánica newtoniana se supone que el tiempo tiene carácter universal*<sup>3</sup>, de modo que (una vez fijada la unidad de tiempo) la relación entre los tiempos  $t$  y  $t'$  de un mismo suceso medidos en los sistemas  $S$  y  $S'$  es simplemente

$$t' = t - t_0,$$

con  $t_0$  constante. Desde el punto de vista del sistema  $S'$ , por tanto, en el instante  $t' = t - t_0$  las coordenadas de la partícula estarán dadas por el vector

$$\mathbf{r}'(t') = \mathbf{r}(t) - \mathbf{R}(t) \equiv \mathbf{r}(t' + t_0) - \mathbf{R}(t' + t_0).$$

Por tanto la velocidad de dicha partícula respecto del sistema de referencia  $S'$  en el instante  $t'$  está dada por

$$\mathbf{v}'(t') \equiv \frac{d\mathbf{r}'(t')}{dt'} = \dot{\mathbf{r}}(t' + t_0) - \dot{\mathbf{R}}(t' + t_0) \equiv \mathbf{v}(t' + t_0) - \dot{\mathbf{R}}(t' + t_0),$$

<sup>3</sup>Veremos al final del curso que este postulado *no* se cumple en la teoría especial de la Relatividad.

donde como siempre el punto denota derivada respecto de  $t$ . Supongamos que la partícula es **libre**, es decir que no está sometida a fuerza alguna. Si en el sistema  $S$  se cumple la primera ley de Newton, entonces  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0$  para todo  $t$ . Pero, en virtud de la ecuación anterior, en el sistema  $S'$  se tendrá

$$\mathbf{v}'(t') = \mathbf{v}_0 - \dot{\mathbf{R}}(t' + t_0),$$

que *no* es constante a menos que  $\dot{\mathbf{R}}$  lo sea. Nótese que  $\dot{\mathbf{R}}$  es constante si y solo si  $\ddot{\mathbf{R}} = 0$ ; por tanto, la primera ley de Newton se cumplirá en el sistema de referencia  $S'$  (suponiendo que se cumple en  $S$ , y que los ejes de  $S$  y  $S'$  son paralelos) si y solo si su origen de coordenadas se mueve *sin aceleración* con respecto al de  $S$ .

**Definición 1.3.** Un sistema de referencia es **inercial** si en dicho sistema se cumple la primera ley de Newton.

Por lo visto anteriormente, las dos primeras leyes de Newton pueden formularse de manera más precisa y lógicamente satisfactoria de la forma siguiente:

- I. Existe una clase de sistemas de referencia (los sistemas inerciales) respecto de los cuales las partículas libres se mueven siempre con velocidad constante.
- II. En un sistema inercial, la fuerza  $\mathbf{F}$  ejercida sobre una partícula es igual a la variación de su momento  $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ .

Queda por tanto claro que:

1. Las dos primeras leyes de Newton son lógicamente independientes (en particular, la primera *define* la clase de sistemas de referencia para los que la segunda es válida).
2. Ambas leyes no son *axiomas* más o menos arbitrarios, sino hechos *comprobables* (y *comprobados*) *experimentalmente* (de hecho, válidos solo *aproximadamente* en un cierto rango de velocidades y fuerzas).
3. La relación (1.13) entre la fuerza y la aceleración (en general) **solo es válida en un sistema inercial**.

- ¿Qué sistemas de referencia conocidos son inerciales? Galileo y Newton observaron que un sistema de referencia para el cual las galaxias lejanas están en reposo es (con gran aproximación) inercial. Más recientemente, se ha comprobado que un sistema de referencia respecto del cual la radiación de fondo cósmica de microondas (reliquia del *big bang*) aparece isótropa es inercial.

### 1.2.3 Principio de relatividad de Galileo

Sea  $S$  un sistema inercial, y consideremos otro sistema de referencia  $S'$  cuyo origen tiene coordenadas  $\mathbf{R}(t)$  respecto de  $S$  en cada instante  $t$  (siendo  $t$  el tiempo medido en  $S$ ). Supondremos también que en el instante  $t$  los ejes de  $S$  están relacionados con los de  $S'$  por una transformación lineal (invertible)  $A(t)$ , es decir

$$\mathbf{e}_i = A(t)\mathbf{e}'_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Nos preguntamos entonces cómo deben ser  $A(t)$  y  $\mathbf{R}(t)$  para que el sistema  $S'$  sea también inercial.

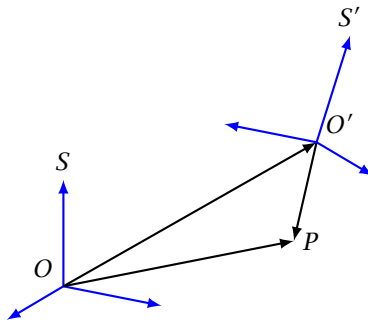


Figura 1.4. Sistemas de referencia  $S$  y  $S'$ . Las coordenadas de los vectores  $\overrightarrow{OO'}$  y  $\overrightarrow{OP}$  respecto de  $S$  se han denotado en el texto por  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{r}$  respectivamente, de modo que las coordenadas de  $\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}$  respecto de  $S'$  están dadas por  $\mathbf{r}' = A \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R})$ .

Para responder a esta pregunta, nótese que si  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t$  denota las coordenadas respecto de  $S$  de una partícula libre en el instante  $t$ , las coordenadas de dicha partícula respecto de  $S'$  en  $t' = t - t_0$  están dadas por<sup>4</sup>

$$\mathbf{r}'(t') = A(t) \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}(t)) = A(t) \cdot (\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t - \mathbf{R}(t)), \quad t \equiv t' + t_0.$$

Derivando dos veces respecto de  $t'$  se obtiene

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'(t')}{dt'^2} = \ddot{A}(t) \mathbf{r}_0 + [t \ddot{A}(t) + 2 \dot{A}(t)] \mathbf{v}_0 - [\ddot{A}(t) \mathbf{R}(t) + 2 \dot{A}(t) \dot{\mathbf{R}}(t) + A(t) \ddot{\mathbf{R}}(t)].$$

Si el sistema de referencia  $S'$  es también inercial, el miembro derecho de esta igualdad ha de anularse idénticamente para todo  $t \in \mathbb{R}$  y para todo  $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^3$ , lo que conduce a las relaciones

$$\ddot{A}(t) = t \ddot{A}(t) + 2 \dot{A}(t) = 0, \quad \ddot{A}(t) \mathbf{R}(t) + 2 \dot{A}(t) \dot{\mathbf{R}}(t) + A(t) \ddot{\mathbf{R}}(t) = 0$$

o, equivalentemente,

$$\boxed{\dot{A}(t) = 0, \quad \ddot{\mathbf{R}}(t) = 0.}$$

En otras palabras, para que  $S'$  sea un sistema inercial la transformación lineal  $A(t)$  que relaciona los ejes de  $S$  y  $S'$  ha de ser *constante*, y el origen de  $S'$  debe moverse con *velocidad constante* respecto de  $S$ , es decir

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t,$$

con  $\mathbf{R}_0, \mathbf{V}_0$  vectores constantes. De hecho, supondremos a partir de ahora que tanto las coordenadas de  $S$  como las de  $S'$  son cartesianas ortogonales (es decir, tanto los ejes de  $S$  como los de  $S'$  forman una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ ). En tal caso, la matriz  $A$  ha de ser *ortogonal*, es decir ha de verificar

$$A^T = A^{-1}.$$

El determinante de una matriz ortogonal  $A$  es igual a  $\pm 1$ , ya que

$$A^T A = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad (\det A)^2 = 1.$$

<sup>4</sup>En efecto, sean  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$  las coordenadas de un punto respecto de los ejes  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  de  $S$  en el instante  $t$ , y denotemos por  $\mathbf{c}' = (c'_1, c'_2, c'_3)$  las coordenadas del *mismo* punto respecto de los ejes  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  de  $S'$  en dicho instante. Entonces

$$\sum_{i=1}^3 c_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 c_i A(t) \cdot \mathbf{e}'_i = \sum_{i,k=1}^3 c_i A_{ki}(t) \mathbf{e}'_k \quad \Rightarrow \quad c'_k = \sum_{i=1}^3 A_{ki}(t) c_i,$$

o, en notación matricial,  $\mathbf{c}' = A(t) \mathbf{c}$ .

Normalmente (y así lo haremos nosotros) solo se consideran sistemas de referencia *positivamente orientados*, en que  $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = 1$  (es decir,  $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ ). En tal caso  $\det A = 1$ , ya que

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = \det A (\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2) \cdot \mathbf{e}'_3.$$

La transformación que relaciona las coordenadas espacio-temporales  $(t, \mathbf{r})$  y  $(t', \mathbf{r}')$  de un mismo suceso en los dos sistemas inerciales  $S$  y  $S'$  es por tanto

$$t' = t - t_0, \quad \mathbf{r}' = A \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_0 - \mathbf{V}_0 t); \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{R}_0, \mathbf{V}_0 \in \mathbb{R}^3, \quad A \in \text{SO}(3, \mathbb{R}), \quad (1.19)$$

donde  $\text{SO}(3, \mathbb{R})$  denota el conjunto (grupo<sup>5</sup>) de las matrices ortogonales de orden 3 con elementos de matriz reales y determinante igual a 1.

**Definición 1.4.** El cambio de coordenadas  $(t, \mathbf{r}) \mapsto (t', \mathbf{r}')$  definido por la ec. (1.19) se denomina **transformación de Galileo**.

*Nota.* Un **boost de Galileo** es una transformación (1.19) con  $t_0 = 0$ ,  $\mathbf{R}_0 = 0$ ,  $A = \mathbb{1}$ .

Las coordenadas espacio-temporales  $(t, \mathbf{r})$  y  $(t', \mathbf{r}')$  de un mismo suceso en dos sistemas inerciales  $S$  y  $S'$  cualesquiera han de estar relacionados por una transformación de Galileo (1.19) apropiada.

- Es fácil comprobar que la composición de dos transformaciones de Galileo y el inverso de una transformación de Galileo son transformaciones de Galileo. Desde el punto de vista matemático, esto significa que el conjunto de todas las transformaciones de Galileo forma un *grupo*, llamado **grupo de Galileo**.

- Por lo que acabamos de ver, dado un sistema de referencia inercial  $S$  cualquier otro sistema inercial  $S'$  se obtiene a partir de  $S$  desplazando el origen con velocidad constante y aplicando a los ejes una rotación constante (independiente de  $t$ ).

En virtud de la ec. (1.19), la aceleración en el sistema de referencia  $S'$  está dada por

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2}(t') = A \cdot \ddot{\mathbf{r}},$$

y de (1.13) se sigue entonces que

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2} = \mathbf{F}'(t', \mathbf{r}', \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}), \quad (1.20)$$

siendo

$$\mathbf{F}'(t', \mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}') = A \cdot \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \quad \dot{\mathbf{r}}' \equiv \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}. \quad (1.21)$$

En otras palabras, si  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  es la fuerza, medida en el sistema inercial  $S$ , que actúa en el instante  $t$  sobre una partícula situada en el punto de coordenadas  $\mathbf{r}$  con velocidad  $\dot{\mathbf{r}}$ , la correspondiente fuerza medida en el sistema inercial  $S'$  está dada por la ec. (1.21). Esta ecuación es por tanto la *ley de transformación de la fuerza* bajo la transformación de Galileo (1.19). Nótese, en particular, que dicha ley depende solo de la relación entre los dos sistemas inerciales  $S$  y  $S'$ , y es por tanto

<sup>5</sup>Recuérdese que un *grupo* es un conjunto  $G$  provisto de un producto (aplicación  $G \times G \rightarrow G$ ) asociativo, con elemento unidad y tal que todo elemento de  $G$  posee inverso.

*independiente de las propiedades de la partícula considerada* (es decir de su masa, carga eléctrica, etc.).

Por otra parte, de las ecs. (1.20)-(1.21) se deduce que la segunda ley de Newton —que, como hemos visto, es la ley fundamental de la mecánica— mantiene en el sistema inercial  $S'$  la misma *forma* que en el sistema inercial original  $S$ . En otras palabras, *las leyes de la mecánica tienen la misma forma en todos los sistemas inerciales* (**principio de relatividad de Galileo**).

- ¿Qué ocurre con la segunda ley de Newton en un sistema *no* inercial? Veremos más adelante que la fuerza medida en un sistema no inercial difiere de la medida en un sistema inercial en varios términos *proporcionales a la masa de la partícula considerada*, llamados **fuerzas ficticias** o **inerciales**<sup>6</sup>. En otras palabras, las leyes de la Física asumen su forma más sencilla (es decir, *sin* fuerzas ficticias) solo en los sistemas inerciales.

## 1.3 Leyes de conservación. Fuerzas conservativas. Fuerza electromagnética

### 1.3.1 Leyes de conservación

La primera ley de Newton (1.11) puede interpretarse como una **ley de conservación del momento**: en ausencia de fuerzas, el momento lineal  $\mathbf{p}$  de la partícula se conserva (es decir, permanece constante). Definamos a continuación el **momento angular** respecto del origen de coordenadas

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}, \quad (1.22)$$

y el **par** de la fuerza  $\mathbf{F}$  (también respecto del origen de coordenadas)

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (1.23)$$

Derivando respecto de  $t$  la definición del momento angular y aplicando la segunda ley de Newton se obtiene fácilmente la importante identidad

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}.$$

De esta ecuación se deduce inmediatamente la **ley de conservación del momento angular**: si el par de la fuerza que actúa sobre una partícula es nulo, su momento angular se conserva. Nótese que en tal caso, al ser  $\mathbf{r}$  perpendicular al vector constante  $\mathbf{L}$ , *el movimiento de la partícula tiene lugar en el plano normal a  $\mathbf{L}$  que pasa por el origen*.

- De la definición (1.23) se sigue que  $\mathbf{N} = 0$  si y solo si la fuerza  $\mathbf{F}$  es paralela al vector de posición de la partícula, es decir (suponiendo que  $\mathbf{F}$  solo depende de  $t$ ,  $\mathbf{r}$  y  $\dot{\mathbf{r}}$ ):

$$\mathbf{F} = g(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r}, \quad (1.24)$$

siendo  $g$  una función escalar arbitraria. Este tipo de fuerza se denomina **central**.

Consideremos a continuación la **energía cinética** de la partícula, definida por

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2. \quad (1.25)$$

<sup>6</sup>Un ejemplo de tales fuerzas es la *fuerza centrífuga* que aparece en un sistema cuyos ejes están en rotación respecto de los de un sistema inercial.



Multiplicando escalarmente la segunda ley de Newton (1.13) por el vector  $\dot{\mathbf{r}}$  se obtiene:

$$\frac{dT}{dt} = m\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}}. \quad (1.26)$$

En particular, *la energía cinética se conserva si la fuerza  $\mathbf{F}$  es perpendicular a la velocidad  $\dot{\mathbf{r}}$  en todo instante*. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, con la *fuerza magnética* que actúa sobre una partícula cargada (cf. la ec. (1.40)).

Supongamos que la fuerza que actúa sobre la partícula es **conservativa**, es decir se obtiene a partir de un **potencial**  $V(\mathbf{r})$  mediante la fórmula

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \equiv -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \equiv -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}. \quad (1.27)$$

En tal caso

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}} \equiv -\frac{d}{dt}V(\mathbf{r}),$$

y la ecuación (1.26) se escribe

$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0.$$

La ecuación anterior es la **ley de conservación de la energía**: *si la fuerza que actúa sobre la partícula es conservativa* (es decir, deriva de un potencial  $V(\mathbf{r})$  a través de la ecuación (1.27)) *se conserva la energía total*

$$E \equiv T + V = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}). \quad (1.28)$$

• Diremos que una fuerza *dependiente del tiempo*  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r})$  es **irrotacional** si  $\nabla \times \mathbf{F}(t, \mathbf{r}) = 0$  para todo  $(t, \mathbf{r})$ , donde  $\nabla \times \mathbf{F}$  es el **rotacional** de  $\mathbf{F}$ , cuyas componentes en coordenadas cartesianas están dadas por

$$(\nabla \times \mathbf{F})_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial F_j}{\partial x_k} - \frac{\partial F_k}{\partial x_j}, \quad (i, j, k) \text{ perm. cíclica de } (1, 2, 3).$$

Puede probarse que  $\mathbf{F}$  es irrotacional si y solo si existe (localmente) una función *dependiente del tiempo*  $V(t, \mathbf{r})$  tal que  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}) = -\frac{\partial V(t, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}$ . Si  $\mathbf{F}$  es irrotacional, derivando la definición (1.28) de la energía se obtiene

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = m\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Vemos, por tanto, que si la fuerza es irrotacional pero depende explícitamente del tiempo *no* se conserva la energía.

### 1.3.2 Fuerzas conservativas

Como ya vimos en el apartado anterior, una fuerza  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  es conservativa si es el gradiente de una función  $-V(\mathbf{r})$ . Nótese que (en un abierto *conexo*) el potencial  $V(\mathbf{r})$  está determinado por la fuerza  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  a menos de una constante arbitraria, ya que

$$\nabla V_1 = \nabla V_2 \iff \nabla(V_1 - V_2) = 0 \implies V_1 - V_2 = \text{const.}$$

Se puede probar que el carácter conservativo de una fuerza  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  (independiente del tiempo y la velocidad) es *equivalente* a cualquiera de las tres condiciones siguientes<sup>7</sup>:

I. La fuerza  $\mathbf{F}$  es **irrotacional**:

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0.$$

II. El **trabajo** realizado por la fuerza  $\mathbf{F}$  a lo largo de una curva cerrada *cualquiera*  $C$  es nulo:

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

III. El trabajo realizado por la fuerza  $\mathbf{F}$  a lo largo de *cualquier* curva que une dos puntos fijos  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  es *independiente de la curva*:

$$\int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r},$$

siendo  $C_1$  y  $C_2$  dos curvas cualesquiera con los mismos extremos  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ .

• La *necesidad* de las condiciones (I)-(III) anteriores es evidente. En efecto, la condición (I) es consecuencia de la identidad

$$\nabla \times \nabla V(\mathbf{r}) = 0.$$

Por otra parte, el trabajo realizado por una fuerza *conservativa*  $\mathbf{F} = -\nabla V$  a lo largo de una curva cualquiera  $C$  con extremos  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  está dado por

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C dV = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2), \quad (1.29)$$

y es por tanto independiente de la curva considerada (condición (III)). En particular, si la curva es cerrada entonces  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ , y por tanto el trabajo se anula en este caso (condición (II)).

• De la ec. (1.29) se sigue que el trabajo realizado por una fuerza conservativa es igual a la *disminución* de la energía potencial de la partícula al pasar del punto inicial  $\mathbf{r}_1$  al punto final  $\mathbf{r}_2$ . En virtud de la ley conservación de la energía total, dicho trabajo es también igual al *aumento* de la energía cinética de la partícula al moverse de  $\mathbf{r}_1$  a  $\mathbf{r}_2$ .

• Un caso particular de fuerza conservativa de enorme interés en la práctica es el de una *fuerza central* de la forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (1.30)$$

En efecto, teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial V(r)}{\partial \mathbf{r}} = V'(r) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}} = V'(r) \frac{\mathbf{r}}{r},$$

es claro que la fuerza (1.30) deriva del potencial

$$V(r) = - \int f(r) dr, \quad (1.31)$$

dependiente solo del módulo de  $\mathbf{r}$ .

<sup>7</sup>Con más propiedad, si la fuerza es conservativa se verifican automáticamente las condiciones I-III). Recíprocamente, dichas condiciones implican que la fuerza  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  es conservativa si es de clase  $C^1$  en un abierto *simplemente conexo* de  $\mathbb{R}^3$ . (Por definición, un abierto conexo  $U \subset \mathbb{R}^3$  es simplemente conexo si toda curva cerrada continua contenida en  $U$  se puede contraer de manera continua a un punto sin salirse de  $U$ . Por ejemplo,  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^3$  menos un punto, el interior de una esfera, de un paralelepípedo, de un cilindro, etc., son conjuntos simplemente conexos, mientras que  $\mathbb{R}^3$  menos una recta no lo es.

*Ejercicio.* Probar que la fuerza central (1.24) es conservativa si y solo si la función  $g(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  depende solo de  $r$ . *Ayuda:* el rotacional de  $\mathbf{F}$  en coordenadas esféricas está dado por

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & rF_\theta & r \sin \theta F_\varphi \end{vmatrix}. \quad (1.32)$$

Alternativamente, usar la siguiente fórmula para el rotacional de una función escalar  $V(r, \theta, \varphi)$  en coordenadas esféricas:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi.$$

### 1.3.3 Fuerzas gravitatoria y electrostática

Según la **ley de la gravitación universal** de Newton la fuerza gravitatoria ejercida por una partícula de masa  $M$  fija en el origen de coordenadas sobre otra partícula de masa  $m$  situada en el punto  $\mathbf{r}$  es de la forma (1.30), con  $f$  inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al origen:

$$f(r) = -\frac{GMm}{r^2}, \quad (1.33)$$

siendo<sup>8</sup>

$$G \simeq 6.674\,30(15) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ Kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

la llamada *constante de la gravitación universal*. En virtud de la ec. (1.31), el potencial correspondiente a la fuerza gravitatoria está dado (salvo una constante arbitraria) por

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}. \quad (1.34)$$

Nótese que, al ser  $GMm > 0$ , la fuerza gravitatoria es siempre *atractiva*.

• La aceleración de la partícula de masa  $m$  causada por la fuerza de atracción gravitatoria (1.30)-(1.33) es

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r},$$

*independiente* de la masa  $m$ . Este hecho no trivial, observado por primera vez por Galileo Galilei, se debe a que la masa que aparece en la ley de la gravitación universal de Newton (**masa gravitatoria**) coincide<sup>9</sup> con la masa que aparece en la segunda ley de Newton (**masa inercial**). La igualdad entre ambas masas (el llamado **principio de equivalencia**, en el que se fundamenta la teoría general de la relatividad) se ha comprobado con gran exactitud (menos de una parte en  $10^{12}$ ) en distintos experimentos.

Análogamente, la fuerza eléctrica ejercida por una carga  $Q$  fija en el origen sobre una partícula de carga  $q$  situada en el punto  $\mathbf{r}$  es también de la forma (1.30), donde ahora

$$f(r) = k \frac{qQ}{r^2}. \quad (1.35)$$

<sup>8</sup>En estas notas utilizamos los valores de las constantes físicas fundamentales recomendados internacionalmente por CODATA en 2018, disponibles en el sitio web <https://physics.nist.gov>.

<sup>9</sup>Evidentemente, basta con que ambas masas sean proporcionales, siendo la constante de proporcionalidad universal (es decir, la misma para todas las partículas).

En el sistema SI de unidades, la constante  $k$  tiene el valor

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 8.98755 \cdot 10^9 \text{ mF}^{-1},$$

siendo

$$\epsilon_0 = 8.854\,187\,8128(13) \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$$

la *permitividad del vacío*. De la ecuación (1.35) se sigue que la fuerza eléctrica es atractiva si las cargas  $q$  y  $Q$  son de signos opuestos, y repulsiva en caso contrario. De nuevo, la fuerza eléctrica es conservativa, siendo su potencial (a menos de una constante aditiva)

$$V(r) = k \frac{qQ}{r}$$

inversamente proporcional a la distancia entre las cargas.

Más generalmente, la fuerza gravitatoria ejercida sobre una partícula de masa  $m$  situada en el punto  $\mathbf{r}$  por una distribución continua de masas en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^3$  está dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -Gm \int_U \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' = -m \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}, \quad (1.36)$$

siendo  $\rho(\mathbf{r}')$  la densidad de masa en el punto  $\mathbf{r}' \in U$  y

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \int_U \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (1.37)$$

el llamado **potencial gravitatorio**. Por tanto la fuerza gravitatoria sigue siendo conservativa en esta situación más general, con potencial  $V(\mathbf{r}) = m\Phi(\mathbf{r})$ . De nuevo, en este caso la aceleración de la partícula es

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{m} = -\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}},$$

independiente de su masa  $m$ . Nótese, sin embargo, que en general (a menos que la distribución de carga sea esféricamente simétrica alrededor del origen), la fuerza (1.36) *no* es central.

Análogamente, la fuerza ejercida por una distribución *estática* de cargas contenida en el abierto  $U$  sobre una carga puntual  $q$  situada en el punto  $\mathbf{r}$  está dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = kq \int_U \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' \equiv q\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -q \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}, \quad (1.38)$$

donde ahora  $\rho(\mathbf{r}')$  es la densidad de carga eléctrica en el punto  $\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  es el **campo eléctrico** creado por la distribución de cargas en el punto  $\mathbf{r}$  y

$$\Phi(\mathbf{r}) = k \int_U \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (1.39)$$

el potencial electrostático. De nuevo, la fuerza electrostática (1.38) es evidentemente conservativa, con potencial  $V(\mathbf{r}) = q\Phi(\mathbf{r})$ , pero en general no central.

*Ejercicio.* Aplicando el teorema de Gauss a una esfera centrada en el origen, probar la identidad

$$\Delta \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}),$$

siendo  $\delta(\mathbf{r})$  la **delta de Dirac**<sup>10</sup>. Utilizando la ec. (1.37), deducir que tanto el potencial gravitatorio como el electrostático verifican la **ecuación de Poisson**

$$\Delta\Phi = 4\pi\alpha\rho,$$

donde  $\alpha = G$  para el potencial gravitatorio y  $\alpha = -k$  para el electrostático. En particular, el potencial gravitatorio (resp. electrostático) verifica la **ecuación de Laplace**  $\Delta\Phi = 0$  en cualquier región del espacio en que no haya masas (resp. cargas).

### 1.3.4 Fuerza electromagnética

Consideremos una partícula de carga  $q$  que se mueve en el seno de un campo eléctrico  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$  y magnético  $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ . En tal caso la **fuerza electromagnética** (llamada también **fuerza de Lorentz**) que actúa sobre la partícula está dada por

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = q(\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r})). \quad (1.40)$$

Como es sabido, los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  verifican las **ecuaciones de Maxwell**

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{aligned}$$

siendo  $\mathbf{J}$  la densidad de corriente,

$$c = 2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

la velocidad de la luz en el vacío y

$$\mu_0 = 1.256\,637\,062\,12(19) \cdot 10^{-6} \text{ NA}^{-2}$$

la *permeabilidad del vacío*. De la segunda y la tercera ecuaciones de Maxwell se sigue que podemos expresar  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  a través de una **potencial escalar**  $\Phi(t, \mathbf{r})$  y un **potencial vector**  $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$  mediante las ecuaciones

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Es importante observar que los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  *no* determinan unívocamente los potenciales  $\Phi$  y  $\mathbf{A}$ . En efecto, es fácil ver que los potenciales

$$\hat{\Phi} = \Phi - \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}, \quad (1.41)$$

<sup>10</sup>La función delta de Dirac  $\delta(\mathbf{r})$  se define informalmente por las condiciones  $\delta(\mathbf{r}) = 0$  para todo  $\mathbf{r} \neq 0$  e  $\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 1$ . Puede considerarse intuitivamente, por tanto, como la densidad de masa de una masa puntual situada en el origen. De hecho, ninguna función ordinaria puede verificar las dos condiciones anteriores, ya que para una función ordinaria la condición  $\delta(\mathbf{r}) = 0$  para todo  $\mathbf{r} \neq 0$  implica que  $\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 0$ . Podemos pensar en  $\delta(\mathbf{r})$  como el "límite" cuando  $\epsilon \rightarrow 0+$  de cualquier familia de funciones  $\delta_\epsilon(\mathbf{r})$  que verifica  $\int_{\mathbb{R}^3} \delta_\epsilon(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 1$  para todo  $\epsilon > 0$  y tal que  $\delta_\epsilon(\mathbf{r})$  está concentrada en una esfera centrada en el origen cuyo radio tiende a cero cuando  $\epsilon \rightarrow 0+$ . (Una tal familia es, por ejemplo,  $\delta_\epsilon(\mathbf{r}) = (\pi\epsilon)^{-3/2} e^{-r^2/\epsilon}$ .) De esta definición heurística se sigue la importante propiedad  $\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = f(0)$ , para cualquier función suficientemente regular  $f(\mathbf{r})$ . De hecho, un tratamiento matemático riguroso de la función delta de Dirac requiere el uso de la teoría de *distribuciones* (funcionales lineales definidos en espacios de funciones suaves que tienden a cero suficientemente rápido en el infinito).

donde  $f(t, \mathbf{r})$  es una función escalar arbitraria<sup>11</sup>, generan exactamente el mismo campo electromagnético que los potenciales  $\Phi$  y  $\mathbf{A}$  de partida. Se puede demostrar que siempre es posible elegir la función  $f$  de modo que los nuevos potenciales  $\hat{\Phi}$  y  $\hat{\mathbf{A}}$  verifiquen la condición

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{A}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} = 0, \quad (1.42)$$

llamada *gauge de Lorenz*<sup>12</sup>. Si los potenciales electromagnéticos satisfacen el gauge de Lorenz, es inmediato comprobar que las ecuaciones de Maxwell son equivalentes a las dos ecuaciones siguientes para  $\Phi$  y  $\mathbf{A}$ :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta \Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

En particular, el potencial escalar y cada componente del potencial vector verifican la **ecuación de ondas**

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad (1.43)$$

en el vacío (es decir, en cualquier región del espacio que no contenga cargas eléctricas ni corrientes).

Si tanto el campo eléctrico como el magnético son *estáticos*, es decir si

$$\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B} \equiv \mathbf{B}(\mathbf{r}).$$

la segunda ecuación de Maxwell se reduce a  $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ , de donde se sigue que

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}.$$

Utilizando esta ecuación y la expresión (1.40) de la fuerza de Lorentz se obtiene

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} = -q \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -q \frac{d\Phi}{dt} \implies \frac{d}{dt}(T + q\Phi) = 0.$$

Por tanto en este caso, aun cuando la fuerza de Lorentz *no* es conservativa a menos que  $\mathbf{B} = 0$ , se conserva la función

$$T + q\Phi(\mathbf{r}),$$

que podemos considerar como la *energía electro-mecánica* de la partícula. Para interpretar físicamente este resultado basta notar que la fuerza magnética *no* realiza trabajo, al ser perpendicular a la velocidad y por tanto al desplazamiento  $d\mathbf{r}$ , por lo que no contribuye a la energía de la partícula.

*Ejercicio.* Utilizando la identidad

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F},$$

demostrar que en el vacío las componentes de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  verifican la ecuación de ondas (1.43).

<sup>11</sup>La ecuación (1.41) se denomina *transformación de gauge* de los potenciales electromagnéticos. Puede probarse que si los potenciales  $(\Phi, \mathbf{A})$  y  $(\hat{\Phi}, \hat{\mathbf{A}})$  generan el mismo campo electromagnético (en un abierto simplemente conexo del espacio-tiempo) entonces están relacionados por una transformación de gauge.

<sup>12</sup>En efecto, basta con que la función  $f$  sea solución de la ecuación en derivadas parciales

$$\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Se demuestra en los cursos de ecuaciones diferenciales que esta ecuación tiene localmente solución (dependiente de dos funciones arbitrarias de la variable  $\mathbf{r}$ ) si los potenciales  $\mathbf{A}$  y  $\Phi$  son funciones analíticas (teorema de Cauchy-Kovalevskaya).

*Ejercicio.* Probar que la fuerza de Lorentz (1.40) es conservativa si y solo si  $\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$  (es decir, si el campo electromagnético es de tipo puramente electrostático).

**Ejemplo 1.5.** Un electrón de masa  $m$  y carga  $-e$  se mueve en un campo eléctrico uniforme  $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_2$  y un campo magnético también uniforme  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_3$  (con  $E > 0$ ,  $B > 0$ ). Calculemos la trayectoria del electrón suponiendo que  $\mathbf{r}(0) = 0$  y  $\mathbf{v}(0) = v_0\mathbf{e}_1$ , con  $v_0 > 0$ .

Teniendo en cuenta la ec. (1.40), las ecuaciones del movimiento son en este caso

$$\boxed{m\ddot{x}_1 = -eB\dot{x}_2, \quad m\ddot{x}_2 = -eE + eB\dot{x}_1, \quad m\ddot{x}_3 = 0.} \quad (1.44)$$

De la última ecuación y el dato inicial  $x_3(0) = \dot{x}_3(0) = 0$  se sigue inmediatamente que  $x_3(t) = 0$  para todo  $t$ . Por tanto el movimiento tiene lugar en el plano  $x_3 = 0$ . Las ecuaciones para  $x_1$  y  $x_2$  se pueden expresar en forma más sencilla utilizando las variables adimensionales<sup>13</sup>

$$\boxed{\tau = \frac{eB}{m} t, \quad x = \frac{eB^2}{mE} x_1, \quad y = \frac{eB^2}{mE} x_2.}$$

En efecto, sustituyendo en (1.44) se obtiene

$$\boxed{x'' = -y', \quad y'' = x' - 1,}$$

donde la prima denota derivada respecto de  $\tau$ . Las condiciones iniciales en términos de las nuevas variables son

$$x(0) = y(0) = 0, \quad x'(0) = \frac{eB^2}{mE} \dot{x}_1(0) \frac{dt}{d\tau} = \frac{Bv_0}{E} \equiv 1 + a, \quad y'(0) = 0.$$

La integración de las ecuaciones del movimiento no ofrece dificultad, al tratarse de un sistema lineal de segundo orden en  $(x, y)$  con coeficientes constantes. En este caso, lo más sencillo es introducir la variable compleja  $z = x + iy$ , en términos de la cual las ecuaciones del movimiento se reducen a la ecuación diferencial ordinaria

$$z'' = x'' + iy'' = -y' + ix' - i = i(z' - 1),$$

o equivalentemente

$$w'' = iw', \quad w \equiv z - \tau.$$

La solución de esta ecuación diferencial lineal de primer orden en  $w'$ , con la condición inicial

$$w'(0) = z'(0) - 1 = x'(0) + iy'(0) - 1 = a$$

es inmediata:

$$w' = ae^{i\tau}.$$

Integrando una vez más y teniendo en cuenta la condición inicial

$$w(0) = z(0) = 0$$

se obtiene inmediatamente

$$w = ia(1 - e^{i\tau}) \quad \Rightarrow \quad z = \tau + ia(1 - e^{i\tau}).$$

Separando la parte real e imaginaria de  $z$  se obtiene finalmente

$$\boxed{x = \operatorname{Re} z = \tau + a \sin \tau, \quad y = \operatorname{Im} z = a(1 - \cos \tau).} \quad (1.45)$$

<sup>13</sup>De la ley de fuerza de Lorentz (1.40) se sigue que tanto  $eE/m$  como  $evB/m$  tienen dimensiones de aceleración. Por tanto  $eB/m$  tiene dimensiones de  $a/v = t^{-1}$ , y  $(eE/m)/(e^2B^2/m^2) = mE/(eB^2)$  tiene dimensiones de  $at^2 =$  longitud.

En términos de las variables originales (con dimensiones),

$$x_1 = \frac{Et}{B} + \frac{1}{\omega} \left( v_0 - \frac{E}{B} \right) \sin(\omega t), \quad x_2 = \frac{1}{\omega} \left( v_0 - \frac{E}{B} \right) [1 - \cos(\omega t)], \quad \omega \equiv \frac{eB}{m}.$$

Las ecs. (1.45) son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del electrón. Las propiedades cualitativas de dicha trayectoria dependen del parámetro adimensional

$$a \equiv \frac{Bv_0}{E} - 1;$$

nótese que  $a > -1$ , al ser  $E$ ,  $B$  y  $v_0$  positivos por hipótesis.

i) Si  $|a| < 1$ , es decir

$$0 < v_0 < \frac{2E}{B},$$

se tiene

$$x' = 1 + a \cos \tau > 0,$$

y por tanto  $x$  es una función creciente de  $\tau$ . En particular, si  $a = 0$ , es decir si

$$v_0 = \frac{E}{B},$$

la trayectoria es el eje  $x$  recorrido con velocidad constante ( $x(\tau) = \tau$  ó, en las coordenadas iniciales,  $x_1(t) = Et/B = v_0 t$ ). En general,  $0 \leq y \leq 2a$  (si  $a > 0$ ) ó  $2a \leq y \leq 0$  (si  $a < 0$ ) para todo  $\tau$ , con

$$y = 0 \iff \tau = 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \implies x = 2n\pi,$$

mientras que

$$y = 2a \iff \tau = (2n+1)\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \implies x = (2n+1)\pi.$$

En los puntos en que  $y$  alcanza sus valores extremos 0 y  $2a$  la velocidad del electrón está dirigida en la dirección del eje  $x$ , ya que para  $\tau = k\pi$  (con  $k \in \mathbb{Z}$ ) se tiene

$$x'(k\pi) = 1 + (-1)^k a > 0, \quad y'(k\pi) = a \sin(k\pi) = 0.$$

En particular, en dichos puntos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = 0.$$

La trayectoria del electrón tiene por tanto el aspecto cualitativo de la Fig. 1.5 (arriba).

ii) Por otro lado, si  $a = 1$ , es decir si

$$v_0 = \frac{2E}{B},$$

entonces  $x'(\tau) = 1 + \cos \tau \geq 0$ , con

$$x'(\tau) = 0 \iff \tau = (2n+1)\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \implies x = (2n+1)\pi, \quad y = 2.$$

Nótese que para  $\tau = (2n+1)\pi$  (con  $n \in \mathbb{Z}$ ) se anula también  $y' = \sin \tau$ . Como puede observarse en la Fig. 1.5 (centro), la trayectoria presenta una cúspide en los puntos  $((2n+1)\pi, 2)$  (con  $n \in \mathbb{Z}$ ), correspondientes a  $\tau = (2n+1)\pi$ , ya que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{\sin \tau}{1 + \cos \tau} = \frac{2 \sin(\tau/2) \cos(\tau/2)}{2 \cos^2(\tau/2)} = \tan(\tau/2) \xrightarrow{\tau \rightarrow (2n+1)\pi^\mp} \pm \infty.$$



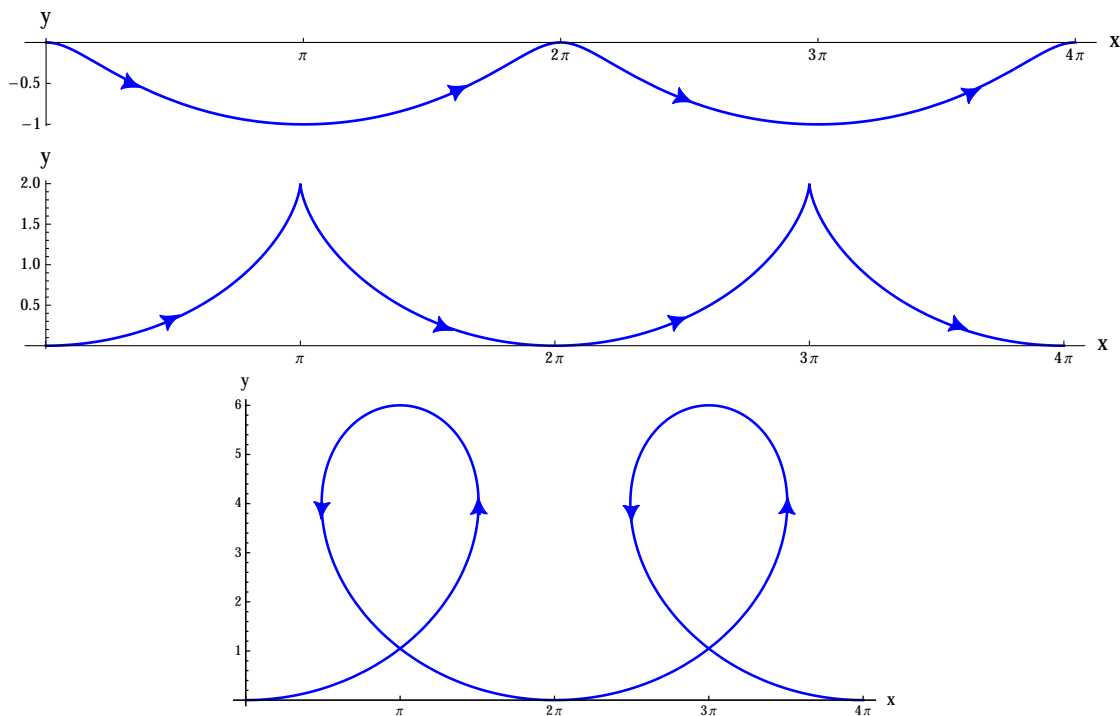


Figura 1.5. De arriba a abajo: trayectoria del electrón del Ejemplo 1.5 para  $v_0 = E/(2B)$ ,  $v_0 = 2E/B$  y  $v_0 = 4E/B$ .

En estos puntos de cúspide la velocidad del electrón se anula, ya que (como acabamos de ver) en este caso

$$x'((2n + 1)\pi) = y'((2n + 1)\pi) = 0.$$

La trayectoria en este caso es una *cicloide*.

iii) Finalmente, si  $a > 1$ , es decir si

$$v_0 > \frac{2E}{B},$$

entonces  $x$  ya no es una función monótona de  $\tau$ . Más precisamente,

$$x'(\tau) \geq 0 \iff [2n\pi - \arccos(-1/a), 2n\pi + \arccos(-1/a)], \quad n \in \mathbb{Z},$$

mientras que

$$x'(\tau) < 0 \iff (2n\pi + \arccos(-1/a), 2(n + 1)\pi - \arccos(-1/a)], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

También es inmediato comprobar que la trayectoria es simétrica respecto de las rectas verticales  $x = (2k + 1)\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$  (cf. la Fig. (1.5) (abajo)). ■

*Ejercicio.* Repetir el problema anterior suponiendo que el campo es puramente magnético ( $E = 0$ ). Probar que la partícula recorre una circunferencia con frecuencia constante  $\omega = eB/m$ , llamada *frecuencia de ciclotrón*.

### 1.4 Movimiento de una partícula en un potencial unidimensional

En esta sección estudiaremos el movimiento de una partícula en una dimensión, sometida a una fuerza independiente del tiempo y la velocidad  $F(x)$ . Una fuerza de este tipo es *siempre conservativa*, ya que  $F(x) = -V'(x)$  con

$$V(x) = - \int F(x) dx.$$

En este caso, la ley de conservación de la energía (1.28) se reduce a la ecuación

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = E, \quad (1.46)$$

siendo la constante  $E \in \mathbb{R}$  el valor de la energía de la partícula. Recíprocamente, derivando la ec. (1.46) respecto de  $t$  se obtiene

$$\dot{x}(m\ddot{x} - F(x)) = 0.$$

Por tanto, si  $\dot{x} \neq 0$  la ec. (1.46) es equivalente a la ecuación del movimiento de la partícula  $m\ddot{x} = F(x)$ .

• Las **posiciones de equilibrio** (o **equilibrios**) del potencial  $V(x)$  son los puntos  $x_0 \in \mathbb{R}$  tales que la ecuación del movimiento posee la solución constante  $x(t) = x_0$ . En tal caso  $\ddot{x}(t) = 0$  para todo  $t$ , por lo que sustituyendo en la ecuación del movimiento se obtiene

$$F(x(t)) = F(x_0) = -V'(x_0) = 0.$$

Por tanto *los equilibrios son los puntos en que la fuerza que actúa sobre la partícula es nula*. Desde el punto de vista matemático, *las posiciones de equilibrio son los puntos críticos del potencial  $V(x)$* , es decir las soluciones de la ecuación

$$V'(x) = 0.$$

Nótese que, en virtud del *teorema de existencia y unicidad* de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, si  $x_0$  es un equilibrio la *única* solución de la ecuación del movimiento que satisface las condiciones iniciales  $x(t_0) = x_0$ ,  $\dot{x}(t_0) = 0$  es la solución constante  $x(t) = x_0$ . En otras palabras, si en un cierto instante la partícula se halla en un equilibrio *con velocidad nula* permanece en dicho equilibrio indefinidamente.

• De la ec. (1.46) se sigue inmediatamente que *para una dada energía  $E$  el movimiento de la partícula solo puede tener lugar en la región definida por la desigualdad*

$$V(x) \leq E,$$

que denominaremos **región accesible** (para esa energía  $E$ ). En general, dicha región es una *unión de intervalos cerrados disjuntos*, algunos de los cuales pueden ser infinitos por la derecha o por la izquierda (incluido el caso límite en que la región accesible es toda la recta real), o incluso reducirse a puntos aislados (necesariamente equilibrios). De particular interés son los puntos  $x_i$  que limitan dichos intervalos, que han de satisfacer la ecuación  $V(x) = E$ . Cuando la partícula pasa por uno de dichos puntos su velocidad se anula, ya que

$$x(t) = x_i \iff V(x_i) = E = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 + V(x_i) \iff \dot{x}(t) = 0 \quad (1.47)$$

en virtud de la ley de conservación de la energía (1.46). Diremos que el punto  $x_i$  es un **punto de retroceso** de la trayectoria si no es un equilibrio, es decir si

$$V(x_i) = E, \quad V'(x_i) \neq 0.$$

En otras palabras, los puntos de retroceso son los extremos de los intervalos cerrados disjuntos en que se subdivide la región accesible, *excluyendo los equilibrios*.

• La ec. (1.46) —o, equivalentemente, la ecuación del movimiento— es *invariante* bajo la *traslación temporal*  $t \mapsto t + t_0$ , para todo  $t_0 \in \mathbb{R}$ , ya que el tiempo  $t$  no aparece explícitamente en ella. Por este motivo, *si  $x(t)$  es una solución de (1.46) también lo será  $x(t + t_0)$ , para todo  $t_0 \in \mathbb{R}$* .

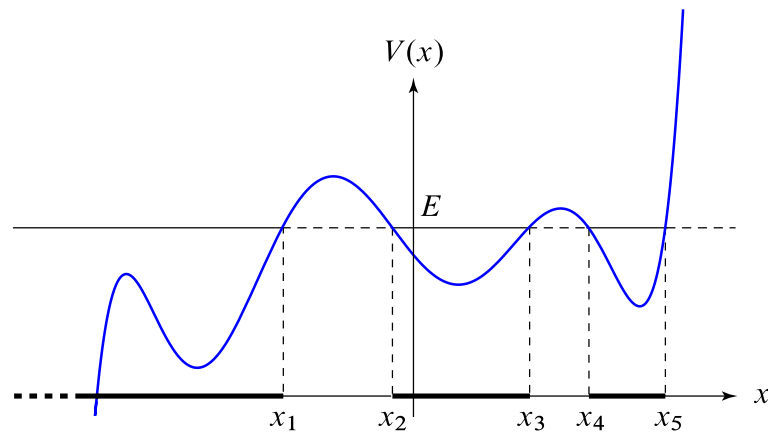


Figura 1.6. Potencial unidimensional  $V(x)$  con 5 puntos de retroceso  $x_i$  para la energía  $E$  mostrada. La región accesible consta en este caso de los tres intervalos  $(-\infty, x_1]$ ,  $[x_2, x_3]$  y  $[x_4, x_5]$ . Nótese también que el potencial de la figura tiene exactamente 6 puntos de equilibrio.

• La ec. (1.46) (así como la ecuación del movimiento) es también invariante bajo la *inversión temporal*  $t \rightarrow -t$ . Por tanto, si  $x(t)$  es una solución de (1.46) también lo será  $x(-t)$ . Combinando esta observación con la anterior se deduce también que  $x(t_0 - t)$  es solución de (1.46) (o de la ecuación del movimiento) si  $x(t)$  lo es.

La ley de conservación de la energía (1.46) permite hallar fácilmente la solución general de la ecuación del movimiento en forma implícita. En efecto, despejando  $\dot{x}$  en (1.46) se obtiene

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}. \quad (1.48)$$

Cada una de estas *dos* ecuaciones (correspondientes a los dos signos delante del radical) es una ecuación diferencial de primer orden de *variables separables*, que se resuelve fácilmente separando variables e integrando:

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}, \quad (1.49)$$

con  $t_0$  una constante arbitraria (que sin pérdida de generalidad se puede tomar igual a cero, en virtud del penúltimo comentario anterior). El comportamiento de las soluciones depende crucialmente de la región accesible, como estudiaremos con más detalle a continuación.

I) Consideremos en primer lugar el caso en que uno de los intervalos cerrados disjuntos en que se subdivide la región accesible es el intervalo acotado  $[x_0, x_1]$ , de modo que

$$E = V(x_0) = V(x_1).$$

Supondremos además que los extremos de dicho intervalo son puntos de retroceso, es decir

$$V'(x_i) \neq 0, \quad i = 0, 1$$

(cf. la Fig. 1.7). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $x_0 = x(0)$ , de modo que  $\dot{x}(0) = 0$ . En tal caso  $\dot{x} > 0$  para  $t > 0$  suficientemente pequeño, ya que en caso contrario la partícula entraría en la región prohibida a la izquierda de  $x_0$ . Por ello debemos tomar el signo “+” en (1.49),

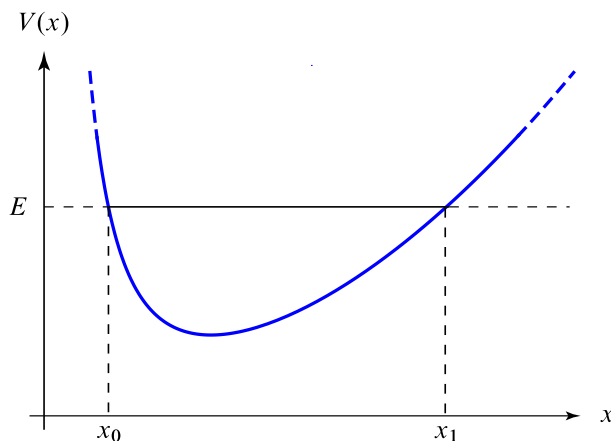


Figura 1.7. Potencial unidimensional con dos puntos de retroceso consecutivos  $x_0, x_1$  que delimitan un intervalo accesible  $[x_0, x_1]$  (para una cierta energía  $E$ ).

obteniendo<sup>14</sup>

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{ds}{\sqrt{E - V(s)}} \equiv \theta(x) \quad (1.50)$$

(cf. la Fig. 1.8). Por tanto la partícula llegará al punto  $x_1$  en un tiempo  $\tau/2$ , donde por definición<sup>15</sup>

$$\tau = 2\theta(x_1) = \sqrt{2m} \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{\sqrt{E - V(s)}}. \quad (1.51)$$

Nótese que, al ser

$$\theta'(x) = \frac{\sqrt{m/2}}{\sqrt{E - V(x)}} > 0, \quad x_0 < x < x_1,$$

la función  $\theta$  es monótona creciente, y por consiguiente invertible, en el intervalo  $[x_0, x_1]$ . Por tanto la ley del movimiento de la partícula para  $0 \leq t \leq \tau/2$  está dada por

$$x = \theta^{-1}(t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2}.$$

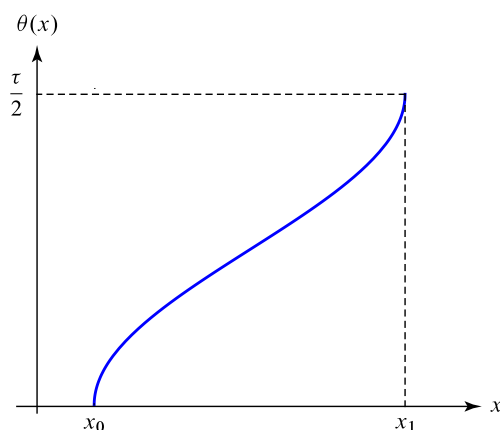


Figura 1.8. Función  $\theta(x)$  definida por la ec. (1.50).

<sup>14</sup>La integral que aparece en la fórmula siguiente es impropia en el límite inferior  $s = x_0$ . Sin embargo, al ser  $V'(x_0) \neq 0$  por hipótesis, el integrando se comporta como  $(s - x_0)^{-1/2}$  en las proximidades de  $s = x_0$ , y la integral es por tanto convergente.

<sup>15</sup>La integral (1.51) es también impropia en el límite superior, pero es también convergente en dicho punto ya que cerca de él el integrando se comporta como  $(x_1 - s)^{-1/2}$ .

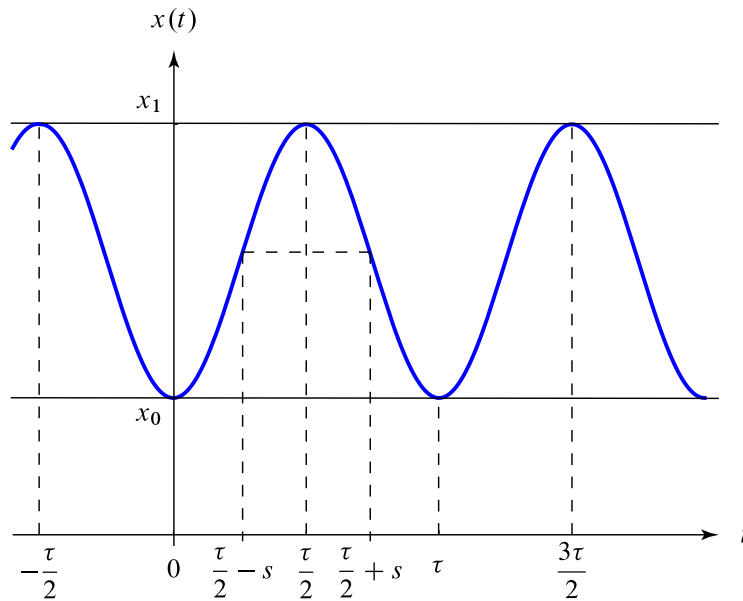


Figura 1.9. Movimiento de una partícula en un potencial unidimensional entre dos puntos de retroceso consecutivos  $x_0, x_1$  que delimitan un intervalo accesible.

Para  $t > \tau/2$  (con  $t - (\tau/2)$  suficientemente pequeño), la velocidad pasa a ser negativa, ya que de lo contrario la partícula alcanzaría la región prohibida a la derecha de  $x_1$ . Utilizando de nuevo la ec. (1.49), esta vez con el signo “-”, y la condición inicial  $x(\tau/2) = x_1$  obtenemos

$$t = \frac{\tau}{2} - \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^x \frac{ds}{\sqrt{E - V(s)}} = \tau - \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{ds}{\sqrt{E - V(s)}} = \tau - \theta(x). \quad (1.52)$$

En particular, la partícula alcanzará de nuevo el punto  $x_0$  en el tiempo  $\tau$  (ya que  $\theta(x_0) = 0$ ). Nótese que de la ec. (1.52) se sigue que<sup>16</sup>

$$x = \theta^{-1}(\tau - t), \quad \frac{\tau}{2} \leq t \leq \tau.$$

Por tanto la ley del movimiento de la partícula en el intervalo  $0 \leq t \leq \tau$ , dada implícitamente por las ecs. (1.50)-(1.52), puede expresarse por medio de la función inversa  $\theta^{-1}$  mediante las ecuaciones

$$x(t) = \begin{cases} \theta^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2}; \\ \theta^{-1}(\tau - t), & \frac{\tau}{2} \leq t \leq \tau. \end{cases} \quad (1.53)$$

En particular, nótese que la función  $x(t)$  es simétrica respecto del instante  $t = \tau/2$ , ya que

$$x\left(\frac{\tau}{2} - s\right) = \theta^{-1}\left(\frac{\tau}{2} - s\right) = x\left(\frac{\tau}{2} + s\right), \quad 0 \leq s \leq \frac{\tau}{2}.$$

La solución de las ecuaciones del movimiento válida para todo  $t$  es la *extensión periódica con período  $\tau$*  de la función  $x(t)$  definida en  $[0, \tau]$  por la ecuación (1.53) (cf. la Fig. 1.9). En otras palabras, si  $k\tau \leq t \leq (k+1)\tau$  con  $k \in \mathbb{Z}$  entonces

$$x(t) = x(t - k\tau), \quad (1.54)$$

<sup>16</sup>Esto también se podía haber deducido directamente de los dos comentarios de la pág. 23, en virtud de los cuales  $x = \theta^{-1}(\tau - t)$  es solución de la ecuación del movimiento en el intervalo  $[\tau/2, \tau]$  (al serlo  $x = \theta^{-1}(t)$  en el intervalo  $[0, \tau/2]$ ), y verifica las condiciones iniciales  $x(\tau/2) = \theta^{-1}(\tau/2) = x_1$  y  $x'(\tau/2) = -(\theta^{-1})'(\tau/2) - x'(\tau/2) = 0$ . Por el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales de segundo orden,  $x(t) = \theta^{-1}(\tau - t)$  para  $\tau/2 \leq t \leq \tau$ .

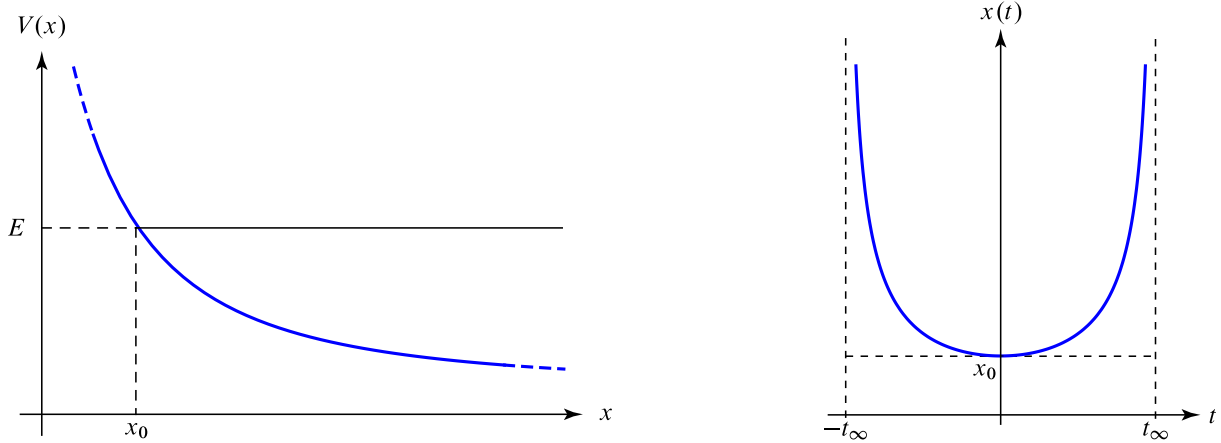


Figura 1.10. Izda.: potencial unidimensional con punto de retroceso  $x_0$  que limita un intervalo accesible semiinfinito por la derecha  $[x_0, \infty)$  para la energía  $E$  mostrada. Drcha.: ley del movimiento  $x(t)$  (suponiendo que  $t_\infty$  es finito).

donde el miembro derecho se calcula utilizando (1.53). En efecto, esta función es solución de la ecuación del movimiento por la invariancia de dicha ecuación bajo traslaciones temporales, satisface las condiciones iniciales  $x(0) = x_0$ ,  $x'(0) = 0$  por construcción y es de clase  $C^2$  en los puntos  $k\tau$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Por tanto en este caso *el movimiento es periódico, con período  $\tau$  dado por la ec. (1.51)*.

*Ejercicio.* Probar que la ley del movimiento  $x(t)$  dada por las ecs. (1.53)-(1.54) es invariante bajo inversión temporal, es decir que  $x(t) = x(-t)$ .

*Solución.* La función  $f(t) \equiv x(-t)$  es solución de la ecuación del movimiento, por la invariancia de dicha ecuación bajo inversión temporal. En  $t = 0$ , la solución  $f(t)$  satisface las *mismas* condiciones iniciales que  $x(t)$ , ya que

$$f(0) = x(0) = x_0, \quad f'(0) = -x'(0) = 0.$$

Por el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales de segundo orden,  $f(t) \equiv x(-t) = x(t)$  para todo  $t$ . ■

II) Consideremos a continuación el caso en que uno de los intervalos disjuntos en que se subdivide la región accesible es el intervalo semiinfinito por la derecha<sup>17</sup>  $[x_0, \infty)$ . Supondremos de nuevo que el extremo de dicho intervalo es un punto de retroceso, es decir que  $V'(x_0) \neq 0$  (cf. la Fig. 1.10). Si la partícula se encuentra en el punto  $x_0$  para  $t = 0$  entonces  $\dot{x}(t) > 0$  para  $t > 0$ , y la relación entre el tiempo  $t$  y la posición  $x$  está dada por la ecuación (1.50) para  $t > 0$ . De hecho, la partícula alcanza el infinito (por la derecha) en el tiempo

$$t_\infty = \theta(\infty) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{E - V(s)}},$$

que es finito o infinito según que la integral del miembro derecho sea convergente o divergente en  $+\infty$ . Por ejemplo, si  $V(x) \sim -x^a$  con  $a \geq 0$  para  $x \rightarrow \infty$  entonces  $t_\infty$  es finito si  $a > 2$ , e infinito si  $0 \leq a \leq 2$ . Teniendo en cuenta la definición (1.50) de la función  $\theta(x)$ , el movimiento de la partícula para  $0 \leq t \leq t_\infty$  puede expresarse por la ecuación

$$x = \theta^{-1}(t), \quad 0 \leq t \leq t_\infty,$$

<sup>17</sup>El caso en que la región accesible contiene el intervalo semiinfinito por la izquierda  $(-\infty, x_0]$  se trata de forma análoga.

siendo  $x(t_\infty) = \infty$ . Por otra parte, para  $-t_\infty \leq t \leq 0$  se tiene

$$x = \theta^{-1}(-t), \quad -t_\infty \leq t \leq 0,$$

siendo de nuevo  $x(-t_\infty) = \infty$ . En efecto, la función anterior es solución de la ecuación del movimiento (por la invariancia de dicha ecuación bajo la inversión temporal  $t \mapsto -t$ ), y satisface las condiciones iniciales correctas en  $t = 0$ :

$$x(0) = \theta^{-1}(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

(esta última es consecuencia de la primera, al ser  $x_0$  un punto de retroceso). (Otra forma de llegar a la misma conclusión es observar que si  $t < 0$  es suficientemente pequeño entonces  $\dot{x}(t) < 0$  para que la partícula alcance el punto  $x_0$  para  $t = 0$ . Por tanto debemos tomar el signo “-” en la solución general (1.48), lo que conduce inmediatamente a la ecuación

$$t = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{ds}{\sqrt{E - V(s)}} = -\theta(x) \iff x = \theta^{-1}(-t)$$

en virtud de la condición inicial  $x(0) = x_0$ .) En otras palabras, en este caso la ley del movimiento es

$$x = \theta^{-1}(|t|), \quad -t_\infty \leq t \leq t_\infty.$$

Nótese, en particular, que (como ya ocurría en el caso anterior)  $x(t) = x(-t)$ .

III) Estudiemos, finalmente, el caso en que para una cierta energía  $E$  la región accesible es toda la recta real. (Evidentemente, esto solo puede ocurrir si el potencial  $V$  está acotado superiormente.) Supondremos, además, que  $E > V(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , de modo que no hay puntos de equilibrio con energía  $E$  (cf. la Fig. 1.11). Si  $x(0) = x_0$  y (por ejemplo)  $\dot{x}(0) > 0$ , entonces  $\dot{x}(t) > 0$  para todo  $t$ , dado que la velocidad no puede anularse en este caso en virtud de la ley de conservación de la energía. Por tanto debe tomarse el signo “+” en (1.48) para todo  $t$ , lo que conduce a la relación

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{ds}{\sqrt{E - V(s)}} = \theta(x).$$

La partícula alcanza  $\pm\infty$  en los instantes

$$t_{\pm\infty} = \theta(\pm\infty) = \int_{x_0}^{\pm\infty} \frac{ds}{\sqrt{E - V(s)}}$$

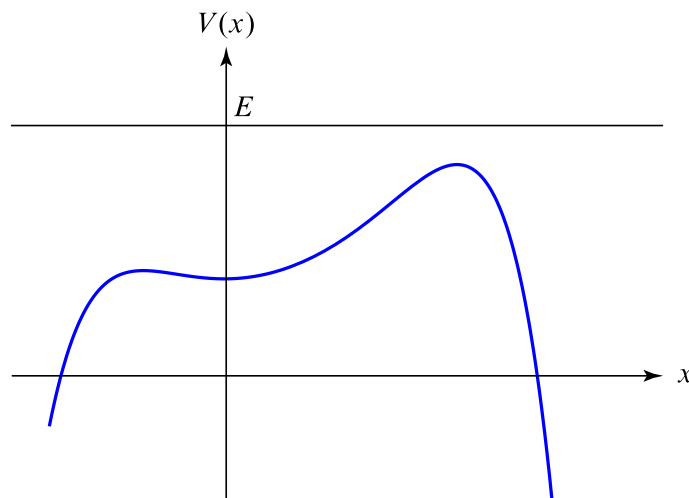


Figura 1.11. Potencial unidimensional con  $E > V(x)$  para todo  $x$  (para la energía  $E$  mostrada).

(que, de nuevo, pueden ser finitos o infinitos según la integral correspondiente converja o diverja en  $\pm\infty$ ), y la ley horaria del movimiento es por tanto

$$x = \theta^{-1}(t), \quad t_{-\infty} \leq t \leq t_{\infty}.$$

Análogamente, si  $\dot{x}(0) < 0$  entonces

$$x = \theta^{-1}(-t), \quad -t_{\infty} \leq t \leq -t_{-\infty},$$

donde ahora  $x(-t_{\pm\infty}) = \pm\infty$  (cf. la Fig. 1.12).

**Ejemplo 1.6.** Consideremos el potencial

$$V(x) = k \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4a^2} \right), \quad k, a > 0,$$

representado en la Fig. 1.13. Derivando respecto de  $x$  se obtiene

$$V'(x) = kx \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) = 0 \iff x = 0, \pm a.$$

Por tanto los equilibrios son en este caso los puntos  $x = 0$  (mínimo relativo de  $V$ ) y  $x = \pm a$  (máximos de  $V$ ). La región accesible, y por tanto el tipo de trayectoria, depende del valor de la energía  $E$  de la forma siguiente:

i)  $E < 0$

La región accesible es la unión de los dos intervalos semiinfinitos  $(-\infty, -c]$  y  $[c, \infty)$ , siendo  $c$  la única raíz positiva de la ecuación  $V(x) = E$ . Por tanto en este caso la trayectoria es *no acotada* (por la derecha si  $x(0) > c$ , por la izquierda si  $x(0) < -c$ ).

ii)  $E = 0$

La región accesible es ahora la unión de los intervalos semiinfinitos  $(-\infty, -\sqrt{2}a]$  y  $[\sqrt{2}a, \infty)$  junto con el origen, que como sabemos es uno de los equilibrios. En particular, si  $x(0) = 0$  entonces  $x(t) = 0$  para todo  $t$  (solución de equilibrio), mientras que si  $|x(0)| \geq \sqrt{2}a$  la trayectoria es *no acotada*.

iii)  $0 < E < ka^2/4$

Al ser  $ka^2/4 = V(\pm a)$  el valor máximo del potencial, la región accesible es la unión de los tres intervalos  $(-\infty, -c_2]$ ,  $[-c_1, c_1]$  y  $[c_2, \infty)$ , siendo  $c_1 < c_2$  las dos raíces positivas de la ecuación

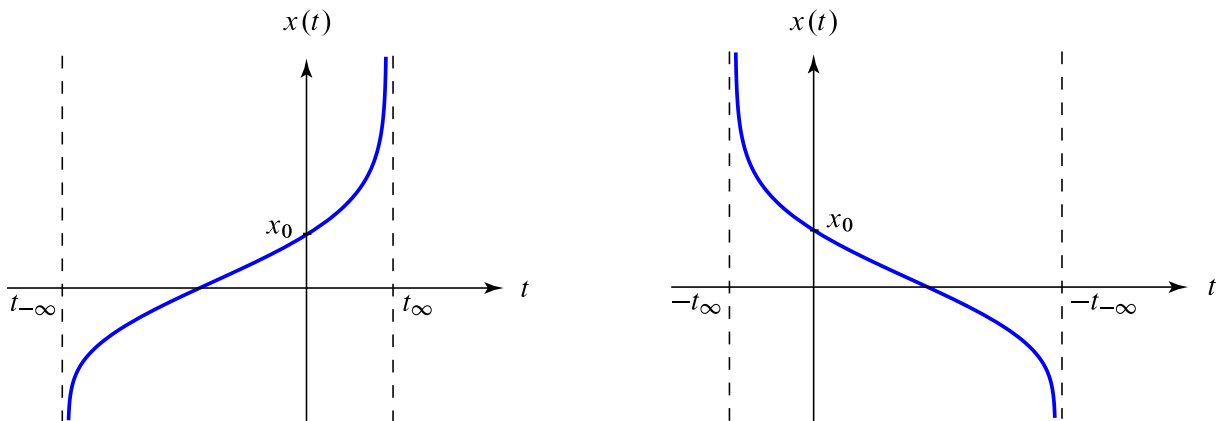


Figura 1.12. Ley del movimiento para el potencial  $V(x)$  y la energía  $E$  de la Fig. 1.11 en los casos  $\dot{x}(0) > 0$  (izda.) o  $\dot{x}(0) < 0$  (drcha.), suponiendo que  $t_{\pm\infty}$  son finitos.



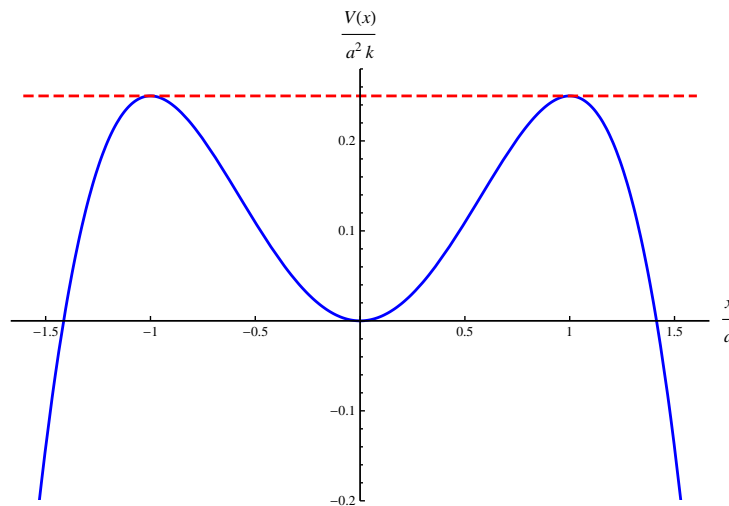


Figura 1.13. Potencial del Ejemplo 1.6 (línea azul) y energía  $E = ka^2/4$  (línea roja de trazo discontinuo).

$V(x) = E$ . Por tanto en este caso la trayectoria de la partícula es *no acotada* (por la izquierda o la derecha) si  $|x(0)| \geq c_2$ , mientras que si  $|x(0)| \leq c_1$  el movimiento es *periódico*, con amplitud  $c_1$ .

iv)  $E > ka^2/4$

En este caso  $V(x) < E$  para todo  $x$ , y por tanto la región accesible (y la trayectoria) es *toda la recta real*. Nótese que en este caso el tiempo que tarda la partícula en alcanzar  $\pm\infty$  es *finito*, ya que para  $|x| \rightarrow \infty$  la integral

$$\int^{\pm\infty} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \sim \int^{\pm\infty} \frac{dx}{x^2}$$

es convergente.

v)  $E = ka^2/4$

Hemos dejado para el final el caso más interesante, en que  $E = ka^2/4$ . Al ser  $V(x) \leq ka^2/4$  para todo  $x$  la región accesible es toda la recta real, y por tanto podría parecer que la trayectoria de la partícula es también toda la recta real. Sin embargo esta conclusión es *errónea*, ya que la región accesible contiene en este caso los dos *equilibrios*  $x = \pm a$ . Si (por ejemplo) la partícula parte de un punto  $x_0 \neq \pm a$  en  $t = 0$  *no* puede alcanzar el punto  $\pm a$  en un tiempo *finito*. En efecto, si  $x(t_0) = \pm a$  para un cierto tiempo  $t_0 \in \mathbb{R}$ , sustituyendo en la ec. (1.46) y teniendo en cuenta que  $V(\pm a) = ka^2/4 = E$  se obtiene  $\dot{x}(t_0) = 0$ . Pero, por el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias de 2º orden, la *única* solución de la ecuación del movimiento que cumple las condiciones iniciales  $x(t_0) = \pm a$  y  $\dot{x}(t_0) = 0$  es la solución constante  $x(t) = \pm a$  para todo  $t$ . Por tanto en este caso las posibles trayectorias de la partícula son los intervalos *abiertos*  $(-\infty, a)$ ,  $(-a, a)$  y  $(a, \infty)$ , junto con los dos equilibrios  $\pm a$ . En particular, si  $|x(0)| < a$  la trayectoria de la partícula permanece en el intervalo  $(-a, a)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  (y, por tanto, es *acotada*), pero *no* es periódica, sino que verifica  $x(\pm\infty) = \pm a$  si  $\dot{x}(0) > 0$  ó  $x(\pm\infty) = \mp a$  si  $\dot{x}(0) < 0$ . (¿Por qué no puede ser  $\dot{x}(0) = 0$ ?)

En este caso concreto, es posible integrar explícitamente la ecuación del movimiento para  $E = ka^2/4$ . En efecto, sustituyendo este valor de la energía en la ec. (1.48) se obtiene

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{k}{2ma^2}} (x^2 - a^2).$$

Separando variables e integrando se obtiene

$$\pm \sqrt{\frac{2k}{m}} t = \int \frac{2a}{x^2 - a^2} dx = \log \left| \frac{x - a}{x + a} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{x - a}{x + a} \right| = e^{\pm 2\omega t}, \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{2m}},$$

donde sin pérdida de generalidad hemos tomado la constante de integración igual a cero. Si en el instante inicial la partícula se halla en uno de los intervalos  $(-\infty, -a)$  ó  $(a, \infty)$  entonces

$$\left| \frac{x-a}{x+a} \right| = \frac{x-a}{x+a},$$

y por tanto

$$x = a \frac{1 + e^{\pm 2\omega t}}{1 - e^{\pm 2\omega t}} = \mp a \coth(\omega t).$$

La expresión anterior define, en realidad, varias soluciones. Por ejemplo, si inicialmente la partícula se haya en la región  $x > a$  con velocidad positiva (resp. negativa) entonces debemos tomar el signo “-” (resp. “+”) en dicha expresión, y la solución asociada está por tanto definida para  $t < 0$  (resp.  $t > 0$ ). Esta solución corresponde a un movimiento que alcanza el infinito positivo (resp. llega del infinito positivo) en un tiempo finito y tiende al punto  $x = a$  para  $t \rightarrow -\infty$  (resp.  $t \rightarrow +\infty$ ).

Análogamente, si la partícula se encuentra inicialmente en el intervalo  $(-a, a)$  entonces

$$\left| \frac{x-a}{x+a} \right| = \frac{a-x}{a+x},$$

y por tanto

$$x = a \frac{1 - e^{\pm 2\omega t}}{1 + e^{\pm 2\omega t}} = \mp a \tanh(\omega t).$$

La solución correspondiente al signo “+” (resp. “-”) tiene siempre velocidad positiva (resp. negativa), y tiende a  $\pm a$  para  $t \rightarrow \pm\infty$  (resp.  $t \rightarrow \mp\infty$ ).

Para visualizar los distintos tipos de trayectorias descritas por la partícula y entender cualitativamente sus propiedades, es útil representar el momento  $p = m\dot{x}$  como función de la posición para distintos valores de la energía  $E$ , lo que se conoce como el **mapa de fases** del sistema. De la ley de conservación de la energía se sigue que la ecuación de las trayectorias en el mapa de fases es

$$\frac{p^2}{2m} + V(x) = E,$$

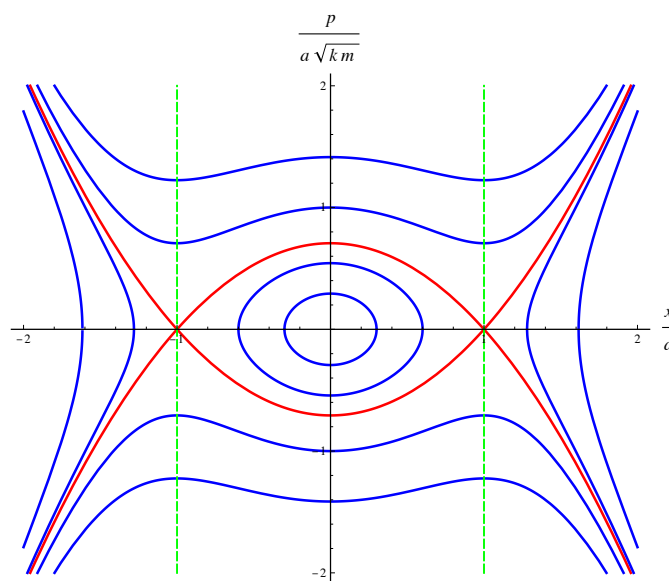


Figura 1.14. Mapa de fases para el potencial del Ejemplo 1.6 (la línea roja está formada por las trayectorias de energía  $E = ka^2/4$ ).

que en este problema se reduce a

$$\frac{p^2}{2m} + k \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4a^2} \right) = E.$$

Las correspondientes trayectorias (que evidentemente son simétricas respecto de ambos ejes) se representan en la Fig. 1.14. Nótese que la(s) trayectoria(s) de energía igual a la energía crítica  $E = ka^2/4$  tiene(n) por ecuación

$$p = \pm \sqrt{\frac{mk}{2a^2}} \sqrt{x^4 - 2a^2 x^2 + a^4} = \pm \sqrt{\frac{mk}{2a^2}} (x^2 - a^2); \quad (1.55)$$

se trata, por tanto, de dos parábolas cuyo eje es la recta  $x = 0$  que se cortan en los equilibrios  $(\pm a, 0)$ . Estas trayectorias separan el mapa de fases en 5 regiones conexas disjuntas, de forma que las trayectorias tienen propiedades cualitativamente distintas (están o no acotadas, llegan o no a  $x = \pm\infty$ , etc.) según la región en que están contenidas. Por esta motivo, las trayectorias (1.55) se denominan *separatrices*. ■

#### 1.4.1 Estabilidad de los equilibrios. Período de las pequeñas oscilaciones

Intuitivamente, un equilibrio  $x_0$  es **estable** si perturbaciones suficientemente pequeñas de las condiciones iniciales  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  conduce a una solución  $x(t)$  de la ecuación del movimiento que permanecen arbitrariamente próximas a  $x_0$  (y con velocidad arbitrariamente próxima a 0) en todo instante  $t > 0$ . En el ejemplo anterior, es claro que el equilibrio  $x = 0$  es *estable*, mientras que los equilibrios  $x = \pm a$  son ambos *inestables*. En efecto, es evidente que si perturbamos ligeramente la condición inicial  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$  asociada al primero de dichos equilibrios, es decir, consideramos movimientos de la partícula con  $|x(0)|$  y  $|\dot{x}(0)|$  suficientemente pequeños, la energía será ligeramente positiva pero mucho menor que el valor límite  $ka^2/4$ , y por tanto el movimiento de la partícula será periódico y con amplitud próxima a cero. Por el contrario, una pequeña perturbación del dato inicial  $x(0) = \pm a$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  tal que (por ejemplo)  $x(0) = \pm a$  y  $|\dot{x}(0)| = \varepsilon > 0$  conduce a un movimiento de energía superior a la energía crítica  $ka^2/4$  por pequeño que sea  $\varepsilon$ , y por tanto  $x(t) \rightarrow \pm\infty$  para  $t \rightarrow \infty$ .

En general, un equilibrio es *estable* si y solo si es un *mínimo relativo* del potencial.

Para justificar heurísticamente esta afirmación, supongamos que  $x_0$  es un punto crítico del potencial, es decir  $V'(x_0) = 0$ , y que el desarrollo en serie de Taylor de  $V$  alrededor de  $x_0$  es de la forma

$$V(x) = V(x_0) + a(x - x_0)^n + O((x - x_0)^{n+1}),$$

con  $a = V^{(n)}(x_0)/n! \neq 0$ , de modo que

$$F(x) = -na(x - x_0)^{n-1} + O((x - x_0)^n).$$

Entonces  $V$  tiene un mínimo relativo en  $x_0$  si y solo si  $n$  es par y  $a > 0$ . En tal caso  $F(x)$  tiene signo opuesto a  $x - x_0$  —es decir, *apunta siempre hacia el equilibrio*  $x_0$ — en las proximidades de dicho punto. Por el contrario, si  $n$  es par y  $a < 0$  (en cuyo caso  $x_0$  es un *máximo relativo* del potencial) en las proximidades de  $x_0$  la fuerza  $F(x)$  apunta en dirección *contraria* a  $x_0$ . Por último, si  $n$  es impar (es decir, si  $x_0$  es un *punto de inflexión* del potencial) entonces  $F(x)$  apunta en dirección contraria a  $x_0$  si  $a(x - x_0) < 0$ , por lo que el equilibrio es de nuevo inestable.

Supongamos que el equilibrio  $x_0$  es estable y que  $n = 2$  en la discusión anterior, o equivalentemente (al ser  $a = V''(x_0)/2$ )

$$V'(x_0) = 0, \quad V''(x_0) > 0.$$

Si  $|x - x_0| \ll 1$  la ecuación del movimiento es aproximadamente

$$\ddot{x} = \frac{F(x)}{m} = -\frac{V'(x)}{m} \simeq -\frac{V''(x_0)}{m} (x - x_0),$$

que puede escribirse como

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0,$$

siendo

$$\xi \equiv x - x_0, \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}}.$$

Como es sabido, la solución general de esta ecuación es

$$\xi = A \cos(\omega t + \alpha),$$

con  $\alpha \in [0, 2\pi)$  y  $A \geq 0$  constantes arbitrarias (con  $A \ll 1$  para que esté justificada la hipótesis de que  $|x - x_0| = |\xi| \ll 1$ ). Por tanto el movimiento de la partícula cerca del equilibrio  $x_0$  verifica

$$\boxed{x(t) \simeq x_0 + A \cos(\omega t + \alpha)}.$$

En otras palabras, la partícula realiza *pequeñas oscilaciones* de amplitud  $A$  alrededor de  $x_0$ , con período

$$\boxed{\tau \simeq \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{V''(x_0)}}.$$

En particular, de la fórmula anterior se deduce que el período de las *pequeñas oscilaciones* alrededor del equilibrio  $x_0$  es aproximadamente *independiente de la amplitud*. Evidentemente, esto es exactamente cierto *cualquiera* que sea la amplitud para el potencial armónico  $V(x) = kx^2/2$ . Para un potencial arbitrario, el período de las oscilaciones de cualquier amplitud está dado exactamente por la ecuación (1.51), y es por tanto en general *dependiente de la amplitud*. Más precisamente,

$$\tau = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}, \quad (1.56)$$

donde  $x_1 < x_2 = x_1 + 2A$  son los dos puntos de retroceso (soluciones de la ecuación  $V(x) = E$ ) más próximos al equilibrio  $x_0$ . Por ejemplo, el período de las pequeñas oscilaciones de la partícula del Ejemplo 1.6 alrededor del origen es

$$\tau \simeq 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (1.57)$$

Nótese, sin embargo, que esta aproximación solo es correcta si la amplitud de las oscilaciones es pequeña (cf. el ejemplo siguiente).

**Ejemplo 1.7.** En el Ejemplo 1.6, el período de las oscilaciones de amplitud  $0 < A < a$  alrededor del origen es

$$\tau = \sqrt{2m} \int_{-A}^A \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}},$$

siendo

$$E = V(A) = \frac{kA^2}{4a^2} (2a^2 - A^2).$$

Sustituyendo este valor de  $E$  en la expresión anterior para  $\tau$  y operando se obtiene

$$\tau = 4\sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2) \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}(1+s^2)\right)}}, \quad \varepsilon \equiv \frac{A}{a} \in (0, 1). \quad (1.58)$$

Nótese que cuando  $\varepsilon$  tiende a 1, es decir  $A$  tiende a  $a$ , el período ha de tender a infinito, ya que para  $A = a$  la partícula emplea un tiempo infinito en alcanzar los equilibrios  $x = \pm a$ . Si  $\varepsilon$  es pequeño, teniendo en cuenta que

$$\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}(1 + s^2)\right)^{-1/2} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{4}(1 + s^2) + O(\varepsilon^4)$$

y sustituyendo en la fórmula para el período  $\tau$  se obtiene el desarrollo más preciso

$$\begin{aligned} \tau &= 4\sqrt{\frac{m}{k}} \left( \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} + \frac{\varepsilon^2}{4} \int_0^1 \frac{1+s^2}{\sqrt{1-s^2}} ds + O(\varepsilon^4) \right) \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}} \left[ 2\pi + \varepsilon^2 \left( 2 \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} - \int_0^1 \sqrt{1-s^2} ds \right) + O(\varepsilon^4) \right] \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \left( 1 + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \right). \end{aligned} \quad (1.59)$$

*Nota:* este caso, el valor *exacto* del período se puede expresar a través de la *integral elíptica completa de primera especie*

$$K(\alpha) \equiv \int_0^{\pi/2} (1 - \alpha \sin^2 s)^{-1/2} ds$$

sin más que efectuar el cambio de variable  $x = \sin t$  en la integral (1.58):

$$\tau = 4\sqrt{\frac{m}{k}} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)^{-1/2} K\left(\frac{\varepsilon^2}{2 - \varepsilon^2}\right). \quad \blacksquare$$

*Ejercicio.* Hallar la relación entre la energía  $E$  y la amplitud  $A$  de las pequeñas oscilaciones alrededor de un equilibrio estable  $x_0$  con  $V''(x_0) > 0$ .

*Solución.* Los puntos de retroceso (puntos de la trayectoria de mínima y máxima distancia al equilibrio  $x_0$ ) son las dos raíces  $x_{1,2}$  de la ecuación  $E = V(x)$  a la izquierda y a la derecha de  $x_0$ . Utilizando la aproximación

$$V(x) \simeq V(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0)(x - x_0)^2$$

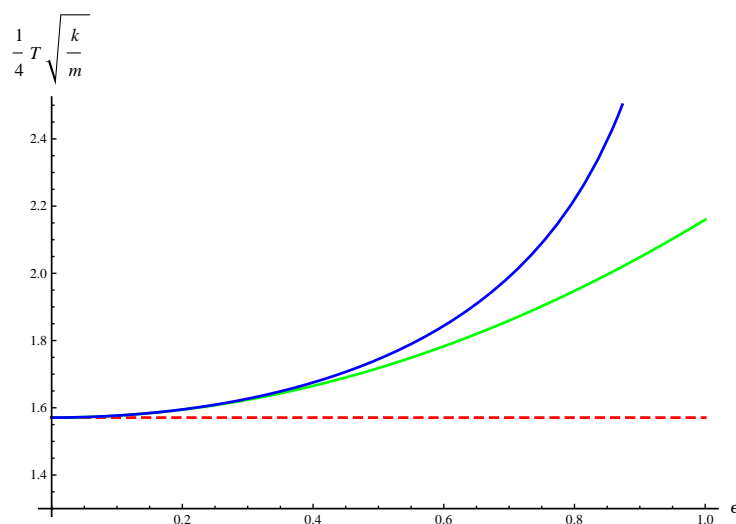


Figura 1.15. Período de las oscilaciones alrededor del origen para el potencial del Ejemplo 1.6 en función del parámetro  $\varepsilon = A/a$  (línea azul) frente a sus aproximaciones (1.57) (línea roja de trazo discontinuo) y (1.59) (línea verde).

dicha ecuación proporciona

$$E = V(x_{1,2}) \simeq V(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0)(x_{1,2} - x_0)^2$$

$$\Rightarrow A \equiv \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \simeq |x_{1,2} - x_0| \simeq \sqrt{\frac{2(E - V(x_0))}{V''(x_0)}}. \quad \blacksquare$$

*Ejercicio.* Hallar la dependencia en la amplitud del período de las oscilaciones alrededor de  $x = 0$  de una partícula de masa  $m$  que se mueve sometida al potencial  $V(x) = k|x|^n$ , con  $k > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ .

## 1.5 Dinámica de un sistema de partículas. Leyes de conservación

### 1.5.1 Dinámica de un sistema de partículas

Estudiaremos en este apartado el movimiento de un sistema de  $N$  partículas, denotando por  $m_i$  la masa de la  $i$ -ésima partícula y por  $\mathbf{r}_i$  sus coordenadas en un cierto sistema inercial. Sea  $\mathbf{F}_{ij}$  la fuerza que ejerce la partícula  $j$  sobre la partícula  $i$  (en particular,  $\mathbf{F}_{ii} = 0$ ), y  $\mathbf{F}_i^{(e)}$  la fuerza externa que actúa sobre la partícula  $i$ . La segunda ley de Newton aplicada al movimiento de la  $i$ -ésima partícula del sistema afirma que

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{(e)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.60)$$

donde el sumatorio del miembro derecho representa la fuerza interna ejercida sobre la partícula  $i$  por las restantes partículas del sistema. Estas  $N$  ecuaciones *vectoriales* son en realidad un sistema de  $3N$  ecuaciones diferenciales ordinarias *escalares* de segundo orden en las incógnitas  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ . Por el teorema de existencia y unicidad para este tipo de sistemas, si el miembro derecho de (1.60) es una función de clase  $C^1$  en las variables  $(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N)$  en un cierto abierto  $A \subset \mathbb{R}^{6N+1}$  entonces las ecuaciones del movimiento del sistema (1.60) tienen (localmente) una *única* solución que verifica cualquier condición inicial de la forma

$$\mathbf{r}_1(t_0) = \mathbf{r}_{10}, \dots, \mathbf{r}_N(t_0) = \mathbf{r}_{N0}; \quad \dot{\mathbf{r}}_1(t_0) = \mathbf{v}_{10}, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N(t_0) = \mathbf{v}_{N0},$$

con  $(t_0, \mathbf{r}_{10}, \dots, \mathbf{r}_{N0}, \mathbf{v}_{10}, \dots, \mathbf{v}_{N0}) \in A$ . En otras palabras, *las trayectorias de las partículas del sistema quedan determinadas por sus posiciones y velocidades en cualquier instante*. En este sentido, la mecánica newtoniana es *completamente determinista*.

Sumando respecto de  $i$  la ec. (1.60) se obtiene

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i,j=1}^N \mathbf{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)}. \quad (1.61)$$

Si se cumple (como supondremos en toda esta sección) la *tercera ley de Newton*, las fuerzas internas verifican la condición

$$\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0,$$

que sumada respecto de  $i, j$  proporciona inmediatamente

$$0 = \sum_{i,j=1}^N \mathbf{F}_{ij} + \sum_{i,j=1}^N \mathbf{F}_{ji} = 2 \sum_{i,j=1}^N \mathbf{F}_{ij},$$

donde en el último paso hemos tenido en cuenta que los índices de suma son mudos (i.e.,  $\sum_{i,j=1}^N \mathbf{F}_{ji} = \sum_{i,j=1}^N \mathbf{F}_{ij}$ ). Denotando por

$$\mathbf{F}^{(e)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)}$$

la **fuerza externa** total que actúa sobre el sistema, la ec. (1.61) se puede escribir en la forma más concisa

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}^{(e)}. \quad (1.62)$$

Definamos a continuación el **centro de masas** del sistema como el punto de coordenadas

$$\mathbf{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i, \quad (1.63)$$

siendo

$$M = \sum_{i=1}^N m_i$$

la masa total del sistema. En otras palabras, el centro de masas (que generalmente abreviaremos por CM) es la media de las coordenadas de las partículas ponderadas por sus masas. En términos del CM, la ec. (1.62) adopta la forma sencilla

$$M \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{(e)}. \quad (1.64)$$

Por tanto *el centro de masas se mueve como una partícula de masa  $M$  sobre la que actúa la fuerza externa total ejercida sobre el sistema*. Nótese, por consiguiente, que *el movimiento del centro de masas es independiente de las fuerzas internas del sistema*. En particular, si la fuerza externa es nula entonces  $\ddot{\mathbf{R}} = 0$ , y por tanto *en ausencia de fuerzas externas el centro de masas se mueve con velocidad constante*.

## 1.5.2 Leyes de conservación

Consideremos en primer lugar el **momento** total del sistema, definido como la suma de los momentos de cada una de las partículas que lo componen:

$$\mathbf{P} \equiv \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i = M \dot{\mathbf{R}}. \quad (1.65)$$

De esta igualdad se sigue que *el momento total del sistema coincide con el momento de su centro de masas considerado como una partícula de masa  $M$* . La ec. (1.64) puede entonces escribirse en la forma

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^{(e)}.$$

Vemos, por tanto, que *en ausencia de fuerzas externas se conserva el momento total del sistema*.

Consideremos a continuación el **momento angular** del sistema respecto del origen de coordenadas, definido como la suma de los momentos angulares de las  $N$  partículas que lo componen:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (1.66)$$

Si  $\mathbf{r}'_i$  denota el vector de posición de la partícula  $i$  respecto del centro de masas, es decir

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i, \quad (1.67)$$

sustituyendo en la ecuación (1.66) se obtiene

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i) = M\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \times \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}'_i + \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \dot{\mathbf{R}} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{r}}'_i. \quad (1.68)$$

Por otra parte, de la ec. (1.67) y la definición (1.63) del centro de masas se sigue fácilmente que

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \equiv M\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = M\mathbf{R} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \implies \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = 0, \quad (1.69)$$

y por tanto el segundo y el tercer término del miembro derecho de (1.68) se anulan idénticamente. En definitiva,

$$\mathbf{L} = M\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{r}}'_i. \quad (1.70)$$

En otras palabras, *el momento angular del sistema es la suma del momento angular de su centro de masas y el momento angular interno* (último término del miembro derecho de la ec. (1.70)) debido al movimiento de las partículas del sistema alrededor del centro de masas.

**Ejemplo 1.8.** Supongamos que el sistema se desplaza como un todo con velocidad (no necesariamente uniforme)  $\mathbf{v}(t)$ , es decir

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}(t), \quad i = 1, \dots, N.$$

En este caso

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}(t),$$

y por tanto el momento angular interno es nulo:

$$\dot{\mathbf{r}}'_i = \dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{R}} = 0, \quad i = 1, \dots, N \implies \mathbf{L} = M\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} \equiv M\mathbf{R} \times \mathbf{v}. \quad \blacksquare$$

En virtud de la ec. (1.66), la derivada temporal del momento angular está dada por

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i,j=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}.$$

De nuevo, es fácil ver que el último término se anula si se cumple la tercera ley de Newton *en sentido fuerte*, es decir si

$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij} \parallel \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \quad i \neq j, \quad (1.71)$$



ya que

$$0 = \sum_{i,j=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i,j=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} - \sum_{i,j=1}^N \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i,j=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \sum_{i,j=1}^N \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = 2 \sum_{i,j=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}.$$

Por tanto en este caso se obtiene

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} \equiv \mathbf{N}^{(e)}, \quad (1.72)$$

siendo por definición  $\mathbf{N}^{(e)}$  el **par total de las fuerzas externas**. En otras palabras, si se cumple la tercera ley de Newton en sentido fuerte (1.71) *la derivada temporal del momento angular del sistema es igual al par total de las fuerzas externas que actúan sobre él*. En particular (cuando se verifica (1.71)), *si el par total de las fuerzas externas es nulo el momento angular del sistema se conserva*.

- El par total de las fuerzas externas *no* coincide en general con el par de la fuerza externa aplicada en el centro de masas, ya que en general

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} \neq \mathbf{R} \times \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)}. \quad \blacksquare$$

Estudiemos, a continuación, la **energía cinética** del sistema

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2. \quad (1.73)$$

Utilizando de nuevo la descomposición (1.67) y la identidad (1.69) se obtiene fácilmente:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2, \quad (1.74)$$

donde el último término es la energía cinética del sistema debida a su movimiento respecto del centro de masas. Por tanto *la energía cinética del sistema es la suma de la energía cinética del centro de masas y la energía cinética debida al movimiento respecto del centro de masas*.

Diremos que las fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas son **conservativas** (o, equivalentemente, que el sistema es conservativo) si existe una función escalar  $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  tal que

$$\mathbf{F}_i \equiv \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.75)$$

Al igual que en el caso de una partícula tratado en la Sección 1.3.2, *si las fuerzas que actúan sobre el sistema son conservativas se conserva la energía total del sistema*

$$E = T + V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N).$$

En efecto, si las fuerzas que actúan sobre el sistema son conservativas se verifica

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i + \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{F}_i + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \right) \dot{\mathbf{r}}_i = 0.$$

Supongamos que existen ciertas funciones  $V_i(\mathbf{r}_i)$ ,  $V_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$  (con  $i \neq j$ ,  $1 \leq i, j \leq N$ ) tales que  $V_{ij} = V_{ji}$  y

$$\mathbf{F}_i^{(e)} = -\frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad \mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i}; \quad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq N. \quad (1.76a)$$

Entonces el sistema es conservativo, y el potencial (a menos de una constante) está dado por

$$V = \sum_{i=1}^N V_i(\mathbf{r}_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} V_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \quad (1.76b)$$

En efecto, es inmediato comprobar que las ecuaciones (1.76) implican la relación más general (1.75):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} &= \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \sum_{1 \leq j < k \leq N} V_{jk}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} + \sum_{k=i+1}^N \frac{\partial V_{ik}}{\partial \mathbf{r}_i} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial V_{ji}}{\partial \mathbf{r}_i} \\ &\equiv \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} + \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left( \mathbf{F}_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} \right) = 0, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que por definición  $\mathbf{F}_{ii} = 0$  y  $V_{ji} = V_{ij}$ .

- Nótese que, en virtud de la tercera ley de Newton,

$$\mathbf{F}_{ji} = -\frac{\partial V_{ji}}{\partial \mathbf{r}_j} \equiv -\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_j} = -\mathbf{F}_{ij} = \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i},$$

por lo que la función  $V_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$  ha de verificar el sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_j} = 0.$$

Puede probarse (ejercicio) que la solución general de este sistema es una función arbitraria de la diferencia  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ , y por tanto

$$V_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = U_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad \text{con } U_{ij} = U_{ji}. \quad (1.77)$$

Sustituyendo en (1.76b) se obtiene la siguiente fórmula más explícita para el potencial  $V$ :

$$V = \sum_{i=1}^N V_i(\mathbf{r}_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} U_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (1.78)$$

De hecho, en la mayor parte de los sistemas físicos conservativos de interés el potencial es de la forma (1.78).

*Ejercicio.* Estudiar qué condiciones han de cumplir las funciones  $U_{ij}$  para que se verifique la tercera ley de Newton en sentido fuerte.

*Solución.* Si  $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ , la tercera ley de Newton en sentido fuerte se cumplirá si y solo si

$$0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{r} \times \frac{\partial U_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} = -\mathbf{r} \times \frac{\partial U_{ij}}{\partial \mathbf{r}},$$

es decir si el gradiente de la función  $U_{ij}$  solo tiene componente radial. En virtud de la fórmula para el gradiente en coordenadas esféricas

$$\nabla f(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi,$$

esto solo ocurrirá si  $U_{ij}$  es función únicamente de  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ , es decir si existe una función de una variable  $u_{ij}$  tal que  $U_{ij} = u_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ . De nuevo, esto es lo que ocurre en la mayoría de los sistemas físicos de interés práctico. ■

*Ejercicio.* Escribir el potencial para un sistema de partículas cargadas de masa  $m_i$  y carga  $q_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) que se mueve en un campo eléctrico externo generado por un potencial electrostático  $\Phi(\mathbf{r})$ .

*Solución.* La fuerza externa que actúa sobre la  $i$ -ésima partícula es la debida a su interacción con el campo eléctrico externo  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r})$  generado por el potencial electrostático  $\Phi(\mathbf{r})$ , es decir

$$\mathbf{F}_i^{(e)} = q_i \mathbf{E}(\mathbf{r}_i) = -q_i \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_i)}{\partial \mathbf{r}_i} \equiv -\frac{\partial V_i(\mathbf{r}_i)}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad \text{with } V_i(\mathbf{r}_i) = q_i \Phi(\mathbf{r}_i).$$

Por otra parte, la fuerza ejercida por la partícula  $j$  sobre la  $i$  es la suma de las fuerzas electrostática y gravitacional entre ambas partículas, dada por

$$\mathbf{F}_{ij} = \left( \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} - Gm_i m_j \right) \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} - Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \equiv -\frac{\partial V_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)}{\partial \mathbf{r}_i},$$

con

$$V_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \frac{\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} - Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = V_{ji}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j).$$

Por tanto el sistema es conservativo, con potencial

$$V = \sum_{i=1}^N q_i \Phi(\mathbf{r}_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} - Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.$$

En la práctica, la constante de acoplo electrostática  $q_i q_j / (4\pi\epsilon_0)$  es normalmente mucho mayor que la gravitacional  $Gm_i m_j$ . Por ejemplo, para protones

$$q_i = q_j = 1.602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad m_i = m_j = 1.672\,621\,923\,69(51) \cdot 10^{-27} \text{ kg},$$

y por tanto

$$\frac{Gm_i m_j}{q_i q_j / (4\pi\epsilon_0)} \simeq 8.09355 \cdot 10^{-37}.$$

Por este motivo, la interacción gravitacional entre las cargas usualmente se desprecia, y por consiguiente la expresión anterior para el potencial se reduce a

$$V = \sum_{i=1}^N q_i \Phi(\mathbf{r}_i) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad \text{qed}$$



## Capítulo 2

# Movimiento en un campo de fuerzas central

### 2.1 Problema de dos cuerpos. Reducción al problema equivalente de un cuerpo

Estudiaremos en esta sección el movimiento de dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  no sometidas a fuerzas externas. Si  $F_{12}$  denota la fuerza que ejerce la segunda partícula sobre la primera, en virtud de la tercera ley de Newton la primera partícula ejerce sobre la segunda una fuerza  $-F_{12}$ , y las ecuaciones del movimiento del sistema son por tanto

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= F_{12}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2) \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -F_{12}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Es conveniente reescribir estas ecuaciones en términos de las variables

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad (2.2)$$

(cf. Fig. 2.1) siendo  $M \equiv m_1 + m_2$  la masa total del sistema. Como vimos en la Sección 1.5.1, al no haber fuerzas externas el centro de masas  $\mathbf{R}$  se mueve sin aceleración, es decir  $\ddot{\mathbf{R}} = 0$ . En cuanto a la **coordenada relativa**  $\mathbf{r}$ , utilizando las ecs. (2.1) se obtiene inmediatamente la ec.

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = F_{12},$$

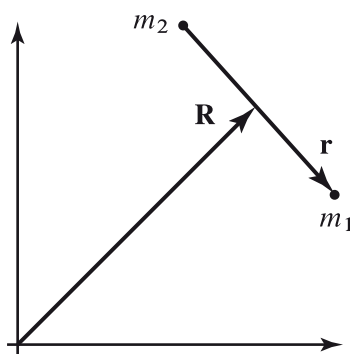


Figura 2.1. Coordenadas  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{r}$  en el problema de dos cuerpos.

siendo

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.3)$$

la llamada **masa reducida** del sistema. Si la fuerza entre las dos partículas satisface la condición

$$\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2), \quad (2.4)$$

es decir, si  $\mathbf{F}_{12}$  depende solo de las coordenadas y velocidades *relativas* de las partículas (y posiblemente del tiempo), la ecuación del movimiento de la coordenada  $\mathbf{r}$  se convierte en

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \quad (2.5)$$

En otras palabras, si la fuerza  $\mathbf{F}_{12}$  es de la forma (2.4) la coordenada relativa  $\mathbf{r}$  se mueve como una partícula de masa  $\mu$  sometida a la fuerza  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ . En particular, en este caso la solución de las ecuaciones del movimiento (2.1) se reduce a la integración de la ecuación (2.5). Por tanto *si  $\mathbf{F}_{12}$  es de la forma (2.4) el problema de dos cuerpos (2.1) es equivalente al problema de un cuerpo (2.5)*.

• Una vez resuelta la ec. (2.5), el movimiento de las coordenadas  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  se obtiene despejando estas variables en la ec. (2.2), es decir

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M} \mathbf{r}.$$

Al ser  $\ddot{\mathbf{R}} = 0$ , si trasladamos el origen de coordenadas al centro de masas el sistema de referencia resultante, llamado **sistema centro de masas**, sigue siendo inercial. En dicho sistema las ecuaciones anteriores se reducen a las más sencillas

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{M} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{M} \mathbf{r}.$$

En muchas aplicaciones, la masa  $m_2$  es mucho mayor que  $m_1$ . En tal caso,  $m_1/M \simeq 0$ ,  $m_2/M \simeq 1$ , y por tanto (en el sistema centro de masas)

$$\mathbf{r}_1 \simeq \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 \simeq 0.$$

En otras palabras, en este caso la partícula masiva está aproximadamente fija en el origen (que coincide con el CM), y la coordenada relativa  $\mathbf{r}$  coincide aproximadamente con el radio vector de la partícula ligera.

## 2.2 Constantes del movimiento. Ley horaria y ecuación de la trayectoria. Órbitas acotadas

### 2.2.1 Constantes del movimiento

El ejemplo más importante de una fuerza que satisface la condición (2.4) es el de una *fuerza central* de la forma

$$\mathbf{F}_{12} = f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$

En tal caso, la ecuación (2.5) se convierte en

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (2.6)$$

que es la ecuación del movimiento de una partícula de masa  $\mu$  sometida a la fuerza central

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{2.7}$$

Estudiaremos en esta sección cómo hallar la solución general de la ec. (2.6), y analizaremos las propiedades cualitativas de sus trayectorias.

Como se vio en la Sección 1.3.2, la fuerza (2.7) es *conservativa*, ya que se cumple

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V(r)}{\partial \mathbf{r}}, \quad \text{con} \quad V(r) = -\int f(r) dr.$$

Por tanto la energía total de la partícula

$$\frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 + V(r) = E$$

se conserva, es decir se mantiene constante en el movimiento. Además, al ser la fuerza (2.7) *central* se conserva también el momento angular  $\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ , y *el movimiento tiene lugar en el plano perpendicular a  $\mathbf{L}$  que pasa por el origen de coordenadas*<sup>1</sup> (centro de la fuerza). Escojamos las coordenadas de modo que dicho plano sea el plano  $z = 0$ , e introduzcamos coordenadas polares  $(r, \theta)$  en dicho plano mediante la ecuación

$$\mathbf{r} = r(\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad (r > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi).$$

Los vectores unitarios coordenados son

$$\mathbf{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0) = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0),$$

y por tanto

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r,$$

de donde se siguen fácilmente las fórmulas (cf. el Ejemplo 1.1)

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}; \quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}.$$

Las ecuaciones del movimiento en coordenadas polares son por tanto

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= \frac{f(r)}{\mu} \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} &= 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

### 2.2.2 Ley horaria y ecuación de las trayectoria

Para determinar la **trayectoria** descrita por la partícula (i.e.,  $r$  como función de  $\theta$ ) y la **ley horaria** del movimiento (i.e.,  $r$  y  $\theta$  como funciones de  $t$ ) resulta más sencillo recurrir a las leyes de conservación de la energía y el momento angular, como veremos a continuación. En efecto, el momento angular de la partícula está dado por

$$\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mu r \mathbf{e}_r \times (\dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta) = \mu r^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z,$$

<sup>1</sup>*Stricto sensu*, esto solo es cierto si  $\mathbf{L} \neq 0$ . Si  $\mathbf{L} = 0$ , la trayectoria es una recta que pasa por el origen, que es un caso particular (degenerado) de movimiento en un plano por el origen. En efecto, si  $\mathbf{r} \neq 0$  el vector velocidad es paralelo a  $\mathbf{r}$ , y en consecuencia  $v_\theta = r\dot{\theta}$  y  $v_\varphi = r \sin \theta \dot{\varphi}$  son nulas. Por tanto o bien la partícula permanece en el origen para todo  $t$  (caso degenerado de una recta por el origen), o bien los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$  son constantes, y por lo tanto la trayectoria es una línea recta que pasa por el origen.

de modo que

$$\mu r^2 \dot{\theta} = L_z = \text{const.}$$

Si  $L \neq 0$ , orientando el eje  $z$  de modo que tenga el mismo sentido que el momento angular  $L$  podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$L_z = |\mathbf{L}| \equiv L, \quad (2.9)$$

de donde se sigue que

$$\mu r^2 \dot{\theta} = L > 0. \quad (2.10)$$

Obsérvese que este convenio para la elección del eje  $z$  (que seguiremos implícitamente en lo que sigue, salvo indicación expresa en contrario) es equivalente a la condición

$$\dot{\theta}(t) > 0 \quad \forall t.$$

Nótese también que la segunda ecuación del movimiento (2.8) no es más que la derivada respecto de  $t$  de la ecuación (2.10) (dividida por  $r$ ).

Una consecuencia inmediata de la conservación del momento angular es la llamada *ley de las áreas*, formulada por primera vez por Johannes Kepler a principios del siglo XVII. En efecto, el área  $A(\theta)$  barrida por el vector de posición de la partícula al moverse entre dos puntos de su trayectoria con coordenadas polares  $(r(\theta_0), \theta_0)$  y  $(r(\theta), \theta)$  está dada por

$$A(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} r^2(\alpha) d\alpha$$

(cf. la Fig. 2.2). Como

$$\dot{A} = \frac{dA}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{2\mu} \quad (2.11)$$

es constante, *la partícula barre al moverse áreas iguales en tiempos iguales (ley de las áreas)*. Nótese que esta propiedad es válida para *cualquier* fuerza central  $f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})\mathbf{e}_r$ , más general incluso que (2.7), ya que es consecuencia directa de la conservación del momento angular.

Podemos utilizar la ley de conservación del momento angular para expresar  $\dot{\theta}$  en términos de  $r$  y el momento angular  $L$  mediante la fórmula

$$\dot{\theta} = L/(\mu r^2). \quad (2.12)$$

Sustituyendo esta expresión en la ley de conservación de la energía se obtiene inmediatamente

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 + V(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\theta}^2 + V(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r), \quad (2.13)$$

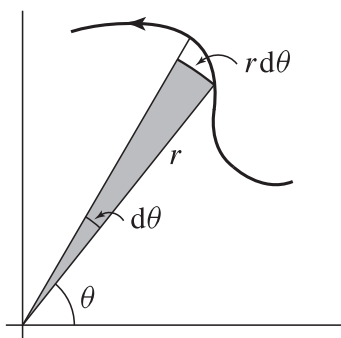


Figura 2.2. Área infinitesimal barrida por el radio vector.



o equivalentemente

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U(r) = E, \quad (2.14)$$

donde el **potencial efectivo**  $U(r)$  está dado por

$$U(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}, \quad (2.15)$$

y depende por tanto del momento angular (constante). Nótese que la fuerza efectiva generada por el último término de (2.15) es

$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \frac{L^2}{2\mu r^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{L^2}{2\mu r^2} \right) \mathbf{e}_r = \frac{L^2}{\mu r^3} \mathbf{e}_r = \mu r \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_r = \frac{\mu v_\theta^2}{r} \mathbf{e}_r,$$

que puede interpretarse como una *fuerza centrífuga*. De nuevo, es fácil ver que la primera ecuación del movimiento (2.8) es la derivada respecto de  $t$  de (2.13) (dividida por  $\dot{r}$ ). En otras palabras, *las leyes de conservación de la energía y del momento angular se obtienen al integrar una vez respecto de  $t$  las ecuaciones del movimiento (2.8)*.

Las ecs. (2.10)-(2.14) proporcionan inmediatamente la ecuación de la trayectoria y la ley horaria del movimiento *en forma implícita*. En efecto, la ley horaria del movimiento se halla sin más que integrar la ec. (2.14) (después de separar variables) y utilizar la conservación del momento angular:

$$t = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U(r)}}, \quad \theta = \frac{L}{\mu} \int \frac{dt}{r^2(t)}, \quad (2.16)$$

donde se entiende que en la segunda ecuación ha de sustituirse el valor de  $r(t)$  obtenido de la primera. (Veremos más adelante, sin embargo, que estas ecuaciones *no* son casi nunca la forma más sencilla de calcular la ley horaria del movimiento.)

En cuanto a ecuación de la trayectoria, de la ec. (2.14) se sigue que

$$\frac{\mu}{2} \dot{\theta}^2 r'^2(\theta) + U(r) = E,$$

donde hemos indicado con una prima la derivada respecto de  $\theta$ . Sustituyendo en esta ecuación el valor de  $\dot{\theta}$  obtenido de (2.12) se obtiene<sup>2</sup>

$$\frac{L^2}{2\mu} \left( \frac{r'}{r^2} \right)^2 + U(r) = E,$$

ecuación que se simplifica considerablemente introduciendo la variable dependiente

$$u = \frac{1}{r}.$$

En efecto, en términos de la variable  $u$  la ecuación anterior se reduce a

$$u'^2 = \frac{2\mu}{L^2} (E - U(1/u)), \quad (2.17)$$

cuya integración proporciona la ecuación de la trayectoria<sup>3</sup>:

$$\theta = \pm \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int^{1/r} \frac{du}{\sqrt{E - U(1/u)}}. \quad (2.18)$$

<sup>2</sup>Salvo indicación en contrario, en esta sección la prima denota derivada respecto de  $\theta$ .

<sup>3</sup>Si  $L = 0$  la ecuación (2.17) no es válida. Sin embargo, en este caso de (2.10) se deduce que la trayectoria es la recta por el origen  $\theta = \text{const.}$ , de acuerdo con la ec. (2.18). Por tanto, esta última ecuación es válida también para  $L = 0$ .

En la práctica, para hallar la ecuación de la trayectoria algunas veces es más sencillo derivar la ec. (2.17) respecto de  $\theta$ , obteniendo así una ecuación de segundo orden que puede ser más fácil de integrar que (2.17). En efecto, procediendo de esta forma se obtiene

$$2u'u'' = \frac{2\mu}{L^2 u^2} \frac{dU}{dr} u', \quad (2.19)$$

y por tanto, teniendo en cuenta la definición de  $U$  (ec. (2.15)),

$$u'' = \frac{\mu}{L^2 u^2} \frac{dU}{dr} = \frac{\mu}{L^2 u^2} \left( \frac{dV}{dr} - \frac{L^2}{\mu} u^3 \right),$$

es decir

$$u'' + u = -\frac{\mu}{L^2 u^2} f(1/u). \quad (2.20)$$

La ecuación anterior se conoce como **ecuación de Binet**. Esta ecuación, escrita en la forma,

$$f(r) = -\frac{L^2}{\mu r^2} (u'' + u),$$

se usa frecuentemente para calcular la ley de fuerzas  $f(r)$  si se conoce la ecuación de la trayectoria  $r = r(\theta)$ .

**Ejemplo 2.1.** Hallemos la ecuación de las trayectorias de una partícula de masa  $\mu$  que se mueve sometida a la fuerza central

$$\mathbf{F} = \frac{k}{r^3} \mathbf{e}_r.$$

En este caso  $f(1/u) = ku^3$ , y por tanto la ecuación de Binet se reduce a

$$u'' + Cu = 0, \quad C \equiv 1 + \frac{k\mu}{L^2}.$$

Las soluciones de esta ecuación dependen del signo de la constante adimensional  $C$ . En efecto:

I)  $C < 0$

En este —que solo puede ocurrir si  $k < 0$ , es decir si la fuerza es *atractiva*— la solución general de la ecuación de Binet es

$$u = a e^{\gamma\theta} + b e^{-\gamma\theta} \iff r = (a e^{\gamma\theta} + b e^{-\gamma\theta})^{-1} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

donde

$$\gamma \equiv \sqrt{|C|} > 0.$$

Es fácil ver que si  $a$  y  $b$  son ambos positivos la solución anterior se puede expresar en la forma

$$r = A \operatorname{sech}(\gamma(\theta - \theta_0)) \quad (A > 0), \quad (2.21)$$

si  $a$  ó  $b$  se anula entonces

$$r = e^{\pm\gamma(\theta - \theta_0)}, \quad (2.22)$$

mientras que si  $a$  y  $b$  tienen signos opuestos se tiene<sup>4</sup>

$$r = A \operatorname{csch}(\gamma(\theta - \theta_0)) \quad (A \neq 0). \quad (2.23)$$

<sup>4</sup>Más concretamente, en cualquiera de los dos casos (2.21) o (2.23) los parámetros  $A$  y  $\theta_0$  están dados por

$$\theta_0 = \frac{\log |b/a|}{2\gamma}, \quad A = \frac{\operatorname{sgn} a}{2\sqrt{|ab|}}.$$

Las trayectorias (2.21) son *acotadas* ( $r \leq A$ ), mientras que las de tipo (2.22) y (2.23) no lo son (en el primer caso  $r \rightarrow \infty$  para  $\theta \rightarrow \pm\infty$ , mientras que en el segundo  $r \rightarrow \infty$  para  $\theta \rightarrow \theta_0$ ). También es fácil comprobar que cualquiera de estas tres trayectorias es de tipo *espiral*, ya que el ángulo  $\theta$  puede tomar valores arbitrariamente grandes en valor absoluto, y  $r$  no es una función periódica de  $\theta$ .

II)  $C = 0$

En este caso  $k = -L^2/\mu < 0$ , y la solución de la ecuación de Binet es

$$u = a + b\theta \iff \boxed{r = \frac{1}{a + b\theta}} \quad (a, b \in \mathbb{R}). \quad (2.24)$$

Si  $b \neq 0$  estas trayectorias son *no acotadas* ( $r \rightarrow \infty$  para  $\theta \rightarrow -a/b$ ) y de tipo *espiral*, mientras que si  $b = 0$  la trayectoria es una *circunferencia* centrada en el origen.

III)  $C > 0$

En este caso (que se verifica, en particular, si  $k > 0$ ) la ecuación de la trayectoria es

$$u = \frac{1}{A} \cos(\gamma(\theta - \theta_0)) \iff \boxed{r = A \sec(\gamma(\theta - \theta_0))} \quad (A > 0, 0 \leq \theta_0 < 2\pi). \quad (2.25)$$

Estas trayectorias son *no acotadas* pero *no son de tipo espiral*, ya que (al ser  $r > 0$ ) el ángulo  $\theta$  varía entre  $\theta_0 - \frac{\pi}{2\gamma}$  y  $\theta_0 + \frac{\pi}{2\gamma}$ . ■

• Si  $C \leq 0$  (y, por tanto,  $k < 0$ ), las trayectorias que acabamos de calcular se denominan genéricamente *espirales de Cotes*.

Nótese que la energía de la partícula puede obtenerse de la ec. (2.17), que utilizando la definición (2.15) de  $U$  se convierte en

$$E = \frac{L^2}{2\mu} (u'^2 + u^2) + V(1/u). \quad (2.26)$$

Al ser  $E = \mu v^2/2 + V(1/u)$ , la velocidad está dada por

$$v = \frac{L}{\mu} \sqrt{u'^2 + u^2}. \quad (2.27)$$

Ambas fórmulas pueden también obtenerse directamente, teniendo en cuenta que

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = \dot{\theta}^2 (r'^2 + r^2) = \frac{L^2}{\mu^2 r^4} \left( \frac{u'^2}{u^4} + \frac{1}{u^2} \right) = \frac{L^2}{\mu^2} (u'^2 + u^2).$$

En el Ejemplo 2.1 podemos tomar

$$V(r) = - \int f(r) dr = -k \int \frac{dr}{r^3} = \frac{k}{2r^2},$$

y por tanto

$$E = \frac{L^2}{2\mu} (u'^2 + u^2) + \frac{k}{2} u^2 = \frac{L^2}{2\mu} (u'^2 + C u^2).$$

Por ejemplo, para las trayectorias (2.21) se comprueba fácilmente que

$$E = -\frac{L^2|C|}{2\mu A^2} < 0,$$

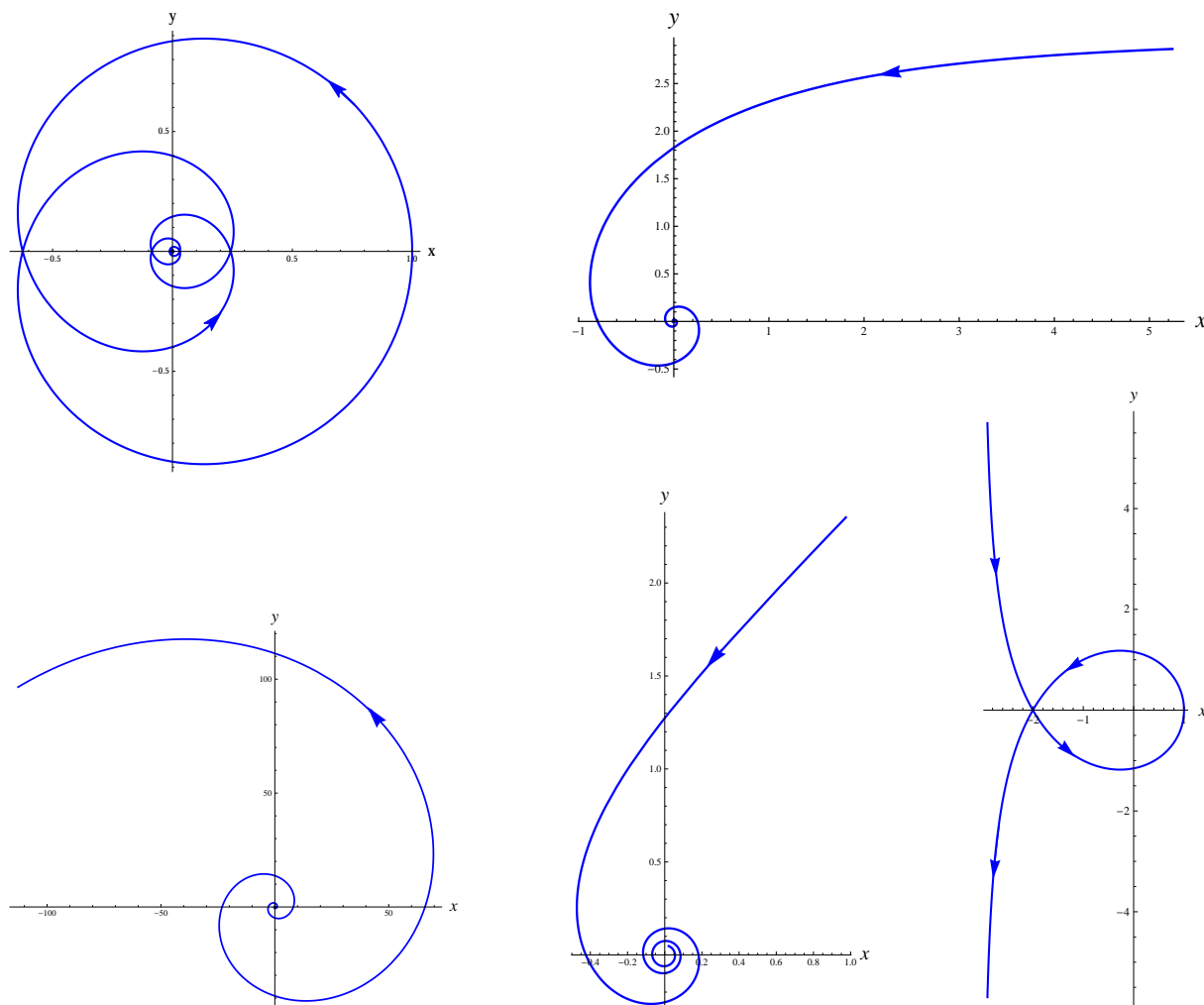


Figura 2.3. Trayectorias de una partícula en el campo central  $F = ke_r/r^3$ : de izquierda a derecha y de arriba a abajo,  $r = \text{sech}(\theta/3)$ ,  $r = \text{csch}(\theta/3)$ ,  $r = e^{\theta/3}$ ,  $r = (\theta - \frac{\pi}{4})^{-1}$ ,  $r = \sec(\theta/3)$ . (El sentido de recorrido indicado corresponde al caso en que  $L_z > 0$ , y por tanto  $\dot{\theta} > 0$ .)

mientras que para las de tipos (2.23) y (2.25) se tiene

$$E = \frac{L^2|C|}{2\mu A^2} > 0.$$

También es inmediato comprobar que la energía de las trayectorias (2.24) es

$$E = \frac{L^2 b^2}{2\mu} \geq 0,$$

mientras que las trayectorias (2.22) tienen energía  $E = 0$ . Estos resultados concuerdan con el hecho de que las trayectorias (2.21) son acotadas, mientras que (2.23), (2.24) (si  $b \neq 0$ ) y (2.25) no lo son. En efecto, nótese que, al ser en este caso

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0,$$

si la partícula alcanza el infinito necesariamente ha de cumplirse que

$$E = \frac{1}{2} \mu v_\infty^2 \geq 0.$$

• En general, si se conoce la ecuación de la trayectoria de la partícula es posible hallar la ley horaria del movimiento en forma implícita. En efecto, supongamos que la ecuación de la trayectoria es  $r = r(\theta)$ . De la ley de conservación del momento angular se deduce entonces que

$$t = \frac{\mu}{L} \int r^2(\theta) d\theta, \quad (2.28)$$

ecuación que proporciona  $t$  como función de  $\theta$ . Invertiendo esta relación se obtiene  $\theta(t)$ , mientras que el movimiento de la coordenada radial se halla sustituyendo  $\theta(t)$  en la ecuación de la trayectoria:

$$r = r(\theta(t)).$$

**Ejemplo 2.2.** Hallemos cuál es la fuerza central necesaria para que una partícula describa la espiral  $r = a\theta$ . Para ello basta introducir  $u = 1/(a\theta)$  en la ecuación de Binet, obteniéndose así

$$f(r) = -\frac{L^2}{\mu r^2} (u'' + u) = -\frac{L^2}{\mu a r^2} \left( \frac{2}{\theta^3} + \frac{1}{\theta} \right) = -\frac{L^2}{\mu a r^2} \left( \frac{2a^3}{r^3} + \frac{a}{r} \right) = \boxed{-\frac{L^2}{\mu a^3} \left( \frac{2a^5}{r^5} + \frac{a^3}{r^3} \right)}.$$

El movimiento de la coordenada  $\theta$  se determina fácilmente utilizando la ec. (2.28):

$$t = \frac{\mu}{L} \int a^2 \theta^2 d\theta = \frac{\mu a^2}{3L} (\theta^3 - \theta_0^3) \Rightarrow \boxed{\theta = \left( \frac{3L}{\mu a^2} t + \theta_0^3 \right)^{1/3}},$$

con  $\theta_0 = \theta(0)$  de donde se sigue que

$$\boxed{r = a\theta = a \left( \frac{3L}{\mu a^2} t + \theta_0^3 \right)^{1/3}}.$$

La energía de esta trayectoria se calcula sin dificultad utilizando la ec. (2.26). Para ello es necesario hallar primero el potencial, dado por

$$V(r) = \frac{L^2}{\mu a^3} \int \left( \frac{2a^5}{r^5} + \frac{a^3}{r^3} \right) dr = -\frac{L^2}{2\mu a^2} \left( \frac{a^4}{r^4} + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

a menos de una constante arbitraria que hemos tomado igual a cero para que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0.$$

Sustituyendo en la ec. (2.26) se obtiene

$$E = \frac{L^2}{2\mu} (u'^2 + u^2) - \frac{L^2}{2\mu} (a^2 u^4 + u^2) = \frac{L^2}{2\mu} (u'^2 - a^2 u^4) = 0.$$

Por la ley de conservación de la energía, la partícula llega al infinito con velocidad nula. La velocidad de la partícula en cualquier punto de su trayectoria se puede calcular utilizando la ec. (2.27), pero como en este caso son conocidos el potencial  $V$  y la energía  $E$  se puede obtener más directamente de la ley de conservación de la energía:

$$E = 0 = \frac{1}{2} \mu v^2 + V(r) = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{L^2}{2\mu a^2} \left( \frac{a^4}{r^4} + \frac{a^2}{r^2} \right) \Rightarrow \boxed{v = \frac{L}{\mu r^2} \sqrt{r^2 + a^2}}.$$

De esta última ecuación también se sigue que, como ya sabemos,  $v \rightarrow 0$  para  $r \rightarrow \infty$ . ■

*Ejercicio.* Si aplicamos la ecuación de Binet a una circunferencia de radio  $a$  centrada en el origen obtenemos que la fuerza ha de ser inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al origen:

$$f(r) = -\frac{L^2}{a\mu} \frac{1}{r^2}.$$

¿Es correcto este resultado?

*Solución.* El resultado es claramente *falso* tal como está enunciado, ya que cualquier potencial  $V$  cuyo correspondiente potencial efectivo  $U$  tenga algún punto crítico  $r_0$  admite una órbita circular  $r = r_0$  con energía  $U(r_0)$  (cf. la ec. (2.14)). Por tanto la ecuación de Binet *no* es aplicable a órbitas circulares centradas en el origen. Este resultado no es sorprendente, ya que para pasar de la ecuación (2.19) a la ecuación de Binet es necesario dividir por  $u'$ , lo que no es lícito si  $u \equiv 1/r$  es constante. La ec. (2.29) es sin embargo *correcta* si la interpretamos adecuadamente. En efecto, teniendo en cuenta que en la órbita circular  $r = a$  lo que en realidad afirma dicha ecuación es que

$$f(a) = -\frac{L^2}{\mu a^3} = -\mu a \dot{\theta}^2 = -\frac{\mu v^2}{a}, \quad (2.29)$$

es decir que la fuerza central  $f(a)$  a lo largo de la órbita genera la aceleración centrípeta  $-\mu v^2/a$ . (Equivalentemente, (2.29) es la condición necesaria y suficiente para que el potencial  $V(r)$  tenga un punto crítico en  $r = a$ .) Por tanto en el caso de una órbita circular centrada en el origen la ecuación de Binet es simplemente la condición para la existencia de dicha órbita, y no proporciona información alguna sobre la ley de fuerzas. ■

### 2.2.3 Órbitas acotadas

Como acabamos de ver en el apartado anterior, el movimiento de la coordenada radial  $r$  está determinado por la ley de conservación de la energía (2.14)-(2.15). Formalmente, esta es la ecuación del movimiento de una partícula de masa  $\mu$  sometida al potencial unidimensional  $U(r)$ . Son por tanto válidas la mayor parte de las consideraciones hechas en la Sección 1.4. Por ejemplo, de la ec. (2.14) se deduce que el movimiento solo puede tener lugar en la región del plano definida por la desigualdad

$$U(r) \equiv V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} \leq E. \quad (2.30)$$

Es sin embargo importante notar que, a diferencia de la variable  $x$  en la Sección 1.4, la coordenada  $r$  *solo puede tomar valores no negativos*.

**Ejemplo 2.3.** Para el **potencial de Kepler**

$$V(r) = -k/r, \quad \text{con } k > 0,$$

el potencial efectivo

$$U(r) = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

tiene el aspecto de la Fig. 2.4. En efecto,  $U(r)$  diverge como  $L^2/(2\mu r^2)$  para  $r \rightarrow 0$  y tiende a cero como  $-k/r$  para  $r \rightarrow \infty$ , siendo

$$U'(r) = \frac{k}{r^2} - \frac{L^2}{\mu r^3} = 0 \iff r = \frac{L^2}{k\mu} \equiv a.$$

Por tanto  $U$  es decreciente para  $0 < r < a$  y creciente para  $r > a$ , y alcanza su valor mínimo en  $r = a$ . La energía de la partícula ha de ser mayor o igual que el valor mínimo de  $U$ , dado por

$$U(a) = -\frac{k^2\mu}{2L^2} \equiv E_{\min}.$$

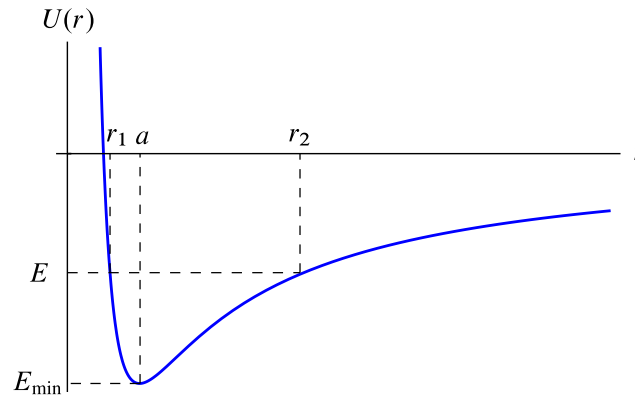


Figura 2.4. Potencial efectivo  $U(r)$  para el potencial de Kepler  $V(r) = -k/r$  (con  $k > 0$ ).

De la Fig. 2.4 se sigue que las trayectorias de energía  $E \geq 0$  son *no acotadas*, ya que en este caso la desigualdad (2.30) implica que  $r \in [r_0, \infty)$ , donde  $r_0 > 0$  es la única raíz de la ecuación  $U(r) = E$ . Por tanto en este caso la partícula “llega” del infinito, alcanza una distancia mínima al origen igual a  $r_0$  (que es un punto de retroceso) y vuelve al infinito. Por el contrario, si  $E_{\min} < E < 0$  entonces  $r_1 \leq r \leq r_2$ , siendo  $r_1 < r_2$  las dos raíces de la ecuación  $U(r) = E$  (cf. la Fig. 2.4), que de nuevo son puntos de retroceso. Por tanto en este caso la trayectoria es *acotada*. Por último, si  $E = E_{\min}$  entonces la trayectoria es la *circunferencia*  $r = a$  (cf. la Fig. 2.4). ■

*Ejercicio.* Repetir la discusión anterior para el potencial  $V(r) = k/(2r^2)$  del Ejemplo 2.1.

De particular interés son las *órbitas acotadas*, en las que la coordenada radial se mueve entre dos puntos de retroceso consecutivos  $0 < r_1 < r_2$  del potencial efectivo  $U(r)$ . En este caso, los puntos de la trayectoria que están a la distancia mínima  $r_1$  del origen reciben el nombre de **periápsides** (**perigeos**, **perihelios** o **periastrós** si el centro de la fuerza es respectivamente la Tierra, el Sol o un astro cualquiera), mientras que aquellos en que la distancia al origen alcanza su valor máximo  $r_2$  se denominan **apoápsides** (**apogeos**, **afelios** o **apoastrós**, si el centro de atracción es la Tierra, el Sol o un astro). Ambos tipos de puntos reciben conjuntamente el nombre de **ápsides** (o *puntos apsidales*).

Como se vio en el apartado 1.4, el movimiento de la coordenada radial es en este caso *periódico* en el tiempo, con período (dependiente en general de la energía y del momento angular)

$$\tau_r = \sqrt{2\mu} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{E - U(r)}}. \quad (2.31)$$

Sin embargo, *esto no quiere decir que el movimiento de la partícula sea periódico*. En efecto, cuando la coordenada radial varía entre  $r_1$  y  $r_2$  disminuye  $u = 1/r$ , y por tanto  $\frac{d\theta}{du} < 0$  (al ser  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{du} \dot{u} > 0$ ), por lo que debemos tomar el signo “-” en la ec. (2.18). Suponiendo (sin pérdida de generalidad) que  $\theta(r_1) = 0$  se obtiene

$$\theta = -\frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{1/r_1}^{1/r} \frac{du}{\sqrt{E - U(1/u)}} = \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{1/r}^{1/r_1} \frac{du}{\sqrt{E - U(1/u)}} \equiv \theta_1(r). \quad (2.32)$$

En particular, cuando  $r = r_2$  la coordenada  $\theta$  ha aumentado en

$$\Delta\theta_{12} = \theta_1(r_2) = \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{1/r_2}^{1/r_1} \frac{du}{\sqrt{E - U(1/u)}}. \quad (2.33)$$

Por el contrario, cuando  $r$  varía entre  $r_2$  y  $r_1$  aumenta  $u$ , y por tanto hay que tomar el signo “+” en la ec. (2.18). En otras palabras,

$$\theta = \Delta\theta_{12} + \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{1/r_2}^{1/r} \frac{du}{\sqrt{E - U(1/u)}} \equiv \theta_2(r) \quad (2.34)$$

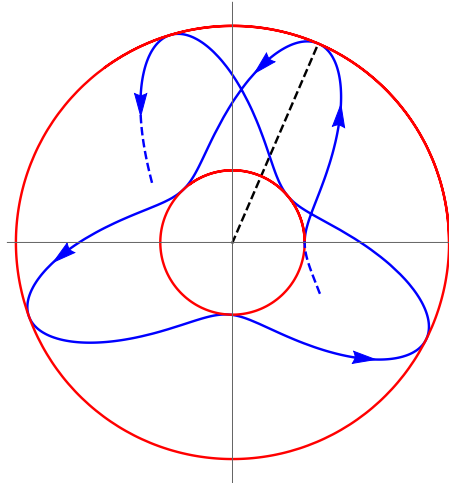


Figura 2.5. Desplazamiento del periápside en una órbita acotada. Se han representado en rojo las circunferencias  $r = r_1$  y  $r = r_2$  (valores mínimo y máximo de la coordenada radial), y en negro con línea de trazos la recta  $\theta = \Delta\theta_{12}$  que une el origen con un apoápside.

Cuando la coordenada  $r$  vuelve de nuevo a tomar el valor  $r_1$  la variación de la coordenada angular  $\theta$  es

$$\Delta\theta = \theta_2(r_1) = 2\Delta\theta_{12}.$$

El **desplazamiento del periápside**  $\Delta\theta$  es por tanto igual a

$$\Delta\theta = \sqrt{\frac{2L^2}{\mu}} \int_{1/r_2}^{1/r_1} \frac{du}{\sqrt{E - U(1/u)}}. \quad (2.35)$$

En general,  $\Delta\theta$  no es un múltiplo entero de  $2\pi$ , y por tanto la partícula *no* regresa al punto de partida (es decir, el punto de coordenadas polares  $r = r_1, \theta = 0$ ) cuando la coordenada  $r$  vuelve a tomar el valor  $r_1$  (cf. la Fig. (2.5)). La condición necesaria y suficiente para que el movimiento sea *periódico* es que tras  $n$  periodos completos de la coordenada  $r$  el incremento de la coordenada  $\theta$ , que evidentemente es igual a  $n\Delta\theta$ , sea igual a un múltiplo entero  $2m\pi$  de  $2\pi$ . En otras palabras, *una órbita acotada en que la coordenada  $r$  varía entre dos puntos de retroceso consecutivos  $r_1 < r_2$  del potencial efectivo  $U$  es periódica si y solo si el desplazamiento del periápside (2.35) es un múltiplo racional de  $2\pi$* . Obsérvese también que, según la discusión anterior, *una órbita acotada del tipo que estamos considerando corresponde a un movimiento periódico si y solo si es cerrada*.

- Los únicos potenciales centrales para los que *todas* las órbitas acotadas son cerradas son el armónico ( $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$ ) y el de Kepler ( $V(r) = k/r$ ) (*teorema de Bertrand*).

*Ejercicio.* Comprobar que la ecuación (2.35) también proporciona el *desplazamiento del apoápside* (incremento del ángulo  $\theta$  entre dos apoápsides consecutivos).

*Ejercicio.* Probar que las órbitas en un campo de fuerzas central son simétricas respecto de la línea que une el origen con un ápside.

*Solución.* La función  $u(\theta)$  es solución de la ecuación de Binet, que es invariante bajo las transformaciones  $\theta \mapsto -\theta$  y  $\theta \mapsto \theta + \theta_0$ , con  $\theta_0$  constante arbitraria. Por tanto si  $u(\theta)$  es solución también lo serán  $u(-\theta)$ ,  $u(\theta + \theta_0)$  y  $u(\theta_0 - \theta)$ , para todo  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ . Como el ángulo  $\theta$  no aparece explícitamente en la ecuación de Binet, podemos suponer sin pérdida de generalidad que el ápside considerado se alcanza cuando  $\theta = 0$ . La órbita será entonces simétrica respecto de este ápside si  $u(\theta) = u(-\theta)$ . Al ser también  $u(-\theta)$  solución de la ecuación de Binet, para probar esta última



igualdad basta comprobar que  $u(\theta)$  y  $g(\theta) \equiv u(-\theta)$  verifican las mismas condiciones iniciales en  $\theta = 0$ , es decir que  $u(0) = g(0)$  y  $u'(0) = g'(0)$ . La primera de estas igualdades es obvia, y la segunda se demuestra fácilmente teniendo en cuenta que  $u'(0) = 0$ , ya que por definición de ápside  $u$  tiene un extremo en  $\theta = 0$ . ■

*Ejercicio.* Probar que las órbitas circulares en un potencial central son siempre periódicas, y hallar su período.

*Solución.* En efecto, si  $r = a$  es constante y  $L = 0$  la ley de conservación del momento angular implica que  $\theta$  es constante, y por tanto la órbita circular es de hecho un equilibrio (caso degenerado de movimiento periódico). Por otro lado, si  $r = a$  y  $L \neq 0$  la conservación del momento angular implica que

$$\theta(t) = \theta(0) + \frac{Lt}{\mu a^2}.$$

Por tanto el movimiento es periódico, con período  $\tau = 2\pi\mu a^2/L$ . ■

**Ejemplo 2.4.** Para el potencial armónico  $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$ , con  $k > 0$ , el potencial efectivo  $U(r)$  tiene el aspecto de la Fig. 2.6. Por tanto en este caso todas las órbitas son acotadas. El desplazamiento del periápside de una cualquiera de estas órbitas está dado por

$$\Delta\theta = \sqrt{\frac{2L^2}{\mu}} \int_{1/r_2}^{1/r_1} \frac{du}{\sqrt{E - \frac{L^2}{2\mu}u^2 - \frac{k}{2u^2}}} = \sqrt{\frac{2L^2}{\mu}} \int_{u_2}^{u_1} \frac{u du}{\sqrt{-\frac{L^2}{2\mu}u^4 + Eu^2 - \frac{k}{2}}},$$

siendo  $u_1 > u_2$  las dos raíces de la ecuación  $-\frac{L^2}{2\mu}u^4 + Eu^2 - \frac{k}{2} = 0$ . Efectuando el cambio de variable  $s = u^2$  la integral se puede expresar en la forma

$$\Delta\theta = \int_{s_2}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{p(s)}},$$

donde

$$p(s) = -s^2 + \frac{2\mu E}{L^2}s - \frac{k\mu}{L^2} = -\left(s - \frac{\mu E}{L^2}\right)^2 + \frac{\mu^2 E^2}{L^4}\left(1 - \frac{kL^2}{\mu E^2}\right) \quad (2.36)$$

y  $s_1 > s_2$  son las dos raíces de la ecuación  $p(s) = 0$  (evidentemente,  $s_i = u_i^2$ ). Efectuando a continuación el cambio de variable

$$s = \frac{\mu E}{L^2} + \frac{\mu E}{L^2}\left(1 - \frac{kL^2}{\mu E^2}\right)^{1/2} \sin \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (2.37)$$

se obtiene finalmente

$$\Delta\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi = \pi.$$

Al ser  $\Delta\theta$  un múltiplo racional de  $2\pi$ , todas las órbitas son cerradas en este caso (en concordancia con el teorema de Bertrand). ■

*Ejercicio.* Probar que todas las órbitas del potencial armónico  $V(r) = kr^2/2$  (con  $k > 0$ ) son elipses centradas en el origen de coordenadas, y calcular el período del movimiento.

*Solución.* La ecuación de las órbitas es en este caso

$$\theta = \sqrt{\frac{L^2}{2\mu}} \int^{1/r} \frac{du}{\sqrt{E - \frac{L^2}{2\mu}u^2 - \frac{k}{2u^2}}} = \int^{1/r} \frac{u du}{\sqrt{-u^4 + \frac{2\mu E}{L^2}u^2 - \frac{k\mu}{L^2}}} = \frac{1}{2} \int^{1/r^2} \frac{ds}{\sqrt{p(s)}},$$

con  $p(s)$  definido por la ec. (2.36). Efectuando el cambio de variables (2.37) (nótese que, como se vio en el Ejemplo 2.4, en este caso  $E^2 \geq kL^2/\mu$ ) se obtiene

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{\frac{L^2}{\mu E r^2} - 1}{\sqrt{1 - \frac{L^2 k}{\mu E^2}}} \right) \Rightarrow \frac{L^2}{\mu E r^2} = 1 + \sqrt{1 - \frac{L^2 k}{\mu E^2}} \sin(2(\theta - \theta_0)).$$

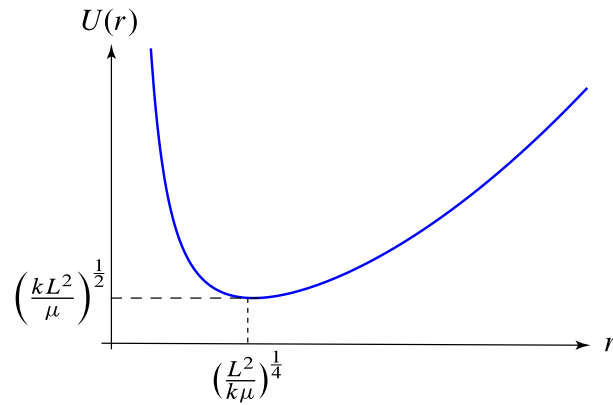


Figura 2.6. Potencial efectivo  $U(r)$  para el potencial armónico  $V(r) = kr^2/2$  (con  $k > 0$ ).

Tomando, sin pérdida de generalidad,  $\theta_0 = \pi/4$ , la ecuación anterior se puede escribir en la forma

$$r^2 = \frac{\alpha}{1 - e \cos 2\theta}, \quad \text{con } \alpha = \frac{L^2}{\mu E}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{L^2 k}{\mu E^2}} \leq 1$$

(y  $e = 1$  si y solo si  $L = 0$ ). En coordenadas cartesianas,

$$r^2 - er^2 \cos 2\theta = x^2 + y^2 - e(x^2 - y^2) = \boxed{(1 - e)x^2 + (1 + e)y^2 = \alpha},$$

que es la ecuación de una *elipse centrada en el origen* de semiejes

$$a = \sqrt{\frac{\alpha}{1 - e}}, \quad b = \sqrt{\frac{\alpha}{1 + e}}.$$

El período  $\tau$  se calcula fácilmente utilizando la ley de las áreas:

$$\frac{L\tau}{2\mu} = \pi ab = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{\pi L^2/\mu E}{\sqrt{L^2 k/\mu E^2}} = \frac{\pi L}{\sqrt{k\mu}} \Rightarrow \boxed{\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}}.$$

Nótese, en particular, que en este caso el período del movimiento *no* depende de  $E$  ni de  $L$ , y es por tanto el mismo para todas las órbitas. ■

*Nota.* En este caso, la ecuación de las órbitas se puede obtener más fácilmente resolviendo las ecuaciones del movimiento en coordenadas cartesianas:

$$\ddot{x} + \frac{k}{\mu} x = 0, \quad \ddot{y} + \frac{k}{\mu} y = 0.$$

En efecto, llamando  $\omega = \sqrt{k/\mu}$  y tomando sin pérdida de generalidad  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$  (es decir, tomando el eje  $x$  en la dirección de un ápside) se obtiene

$$x = a \cos(\omega t), \quad y = b \sin(\omega t),$$

con  $a$  y  $b$  constantes arbitrarias, que es la ecuación de una elipse de semiejes  $|a|$  y  $|b|$  centrada en el origen. De las ecuaciones anteriores también se deduce la fórmula para el período:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}.$$

*Ejercicio.* Hallar el desplazamiento del periápside para el potencial central  $V(r) = -k/r + h/r^2$ , con  $k, h > 0$ .

*Solución.* El potencial efectivo es

$$U(r) = -\frac{k}{r} + \frac{y^2}{r^2}, \quad \text{con } y \equiv \sqrt{\frac{L^2}{2\mu} + h},$$

y se comporta por tanto cualitativamente como el de Kepler (cf. la Fig. 2.4). Como el valor mínimo de  $U$  es ahora  $-k^2/(4y^2)$ , si  $-k^2/(4y^2) < E < 0$  las órbitas son acotadas y el desplazamiento del periápside está dado por

$$\Delta\theta = \sqrt{\frac{2L^2}{\mu}} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{E + ku - y^2u^2}},$$

donde  $u_1 < u_2$  son las dos raíces de la ecuación  $E + ku - y^2u^2 = 0$ . Al ser

$$E + ku - y^2u^2 = E + \frac{k^2}{4y^2} - y^2\left(u - \frac{k}{2y^2}\right)^2$$

con  $E + k^2/(4y^2) > 0$ , efectuando el cambio de variable

$$u = \frac{k}{2y^2} + \frac{1}{y} \sqrt{E + \frac{k^2}{4y^2}} \sin \varphi$$

se obtiene

$$\Delta\theta = \sqrt{\frac{2L^2}{\mu y^2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi = \pi \sqrt{\frac{2L^2}{\mu y^2}} = \pi \sqrt{\frac{2L^2}{\frac{L^2}{2} + \mu h}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \frac{2\mu h}{L^2}}}.$$

En particular, para el potencial de Kepler ( $h = 0$ ) se obtiene  $\Delta\theta = 2\pi$ , de modo que todas las órbitas acotadas son cerradas (de nuevo de acuerdo con el teorema de Bertrand). Obsérvese, por último, que en el caso genérico  $h \neq 0$  las órbitas cerradas (y por tanto periódicas) son aquellas que cumplen la condición

$$\frac{2\mu h}{L^2} = q^2 - 1, \quad \text{con } q \in \mathbb{Q}. \quad \text{qed}$$

## 2.3 El problema de Kepler. Movimiento planetario

### 2.3.1 El problema de Kepler

Estudiaremos en esta sección el **problema de Kepler**, es decir el movimiento de dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  sometidos a su atracción gravitatoria mutua

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = -\frac{k(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3},$$

donde la constante  $k$  es igual a

$$k = Gm_1m_2 \equiv GM\mu > 0.$$

Por tanto en este caso

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{k}{r^2} \mathbf{e}_r \quad \Rightarrow \quad f(r) = -\frac{k}{r^2}, \quad V(r) = -\frac{k}{r},$$

y el problema equivalente de un cuerpo es

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -k \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

o bien

$$\ddot{\mathbf{r}} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

La ecuación de las órbitas se determina fácilmente a partir de la ecuación de Binet, que para este potencial es particularmente simple:

$$u'' + u = \frac{\mu k}{L^2}.$$

La solución general de esta ecuación se puede expresar en la forma

$$u = \frac{\mu k}{L^2} (1 + e \cos(\theta - \theta_0)),$$

con  $e$  y  $\theta_0$  constantes de integración; nótese que podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $e \geq 0$ , ya que si  $e < 0$  bastaría sustituir  $\theta_0$  por  $\pi + \theta_0$  en la ecuación anterior. Además, escogiendo a continuación el eje  $x$  adecuadamente puede tomarse la constante  $\theta_0$  igual a 0. En tal caso la ecuación de las órbitas del problema de Kepler se reduce a

$$r = \frac{\alpha}{1 + e \cos \theta}, \quad \text{con } \alpha = \frac{L^2}{\mu k}. \quad (2.38)$$

El parámetro  $e$  se puede relacionar con la energía de la órbita utilizando la ecuación (2.26):

$$E = \frac{L^2}{2\mu} (u'^2 + u^2) - ku = \frac{\mu k^2}{2L^2} [e^2 \sin^2 \theta + (1 + e \cos \theta)^2 - 2(1 + e \cos \theta)] = \frac{\mu k^2}{2L^2} (e^2 - 1).$$

Por tanto (al ser  $e \geq 0$ )

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}. \quad (2.39)$$

• Las órbitas del problema de Kepler son **secciones cónicas**. En efecto, a partir de la ecuación (2.38) se obtiene

$$r = \alpha - ex \implies x^2 + y^2 = \alpha^2 - 2\alpha ex + e^2 x^2 \implies (1 - e^2)x^2 + y^2 + 2\alpha ex = \alpha^2,$$

que es una ecuación de segundo grado en  $(x, y)$ . El tipo de cónica depende del valor de  $1 - e^2$ :

$$\begin{aligned} e > 1 &\implies \text{hipérbola} \\ e = 1 &\implies \text{parábola} \\ 0 < e < 1 &\implies \text{elipse} \\ e = 0 &\implies \text{circunferencia.} \end{aligned}$$

En términos de la energía (cf. la ec. (2.39)),

$$\begin{aligned} E > 0 &\implies \text{hipérbola} \\ E = 0 &\implies \text{parábola} \\ -\frac{\mu k^2}{2L^2} < E < 0 &\implies \text{elipse} \\ E = -\frac{\mu k^2}{2L^2} &\implies \text{circunferencia,} \end{aligned}$$

donde  $-\mu k^2/(2L^2)$  es la mínima energía que puede tener una partícula de masa  $\mu$  que describe la órbita (2.38). Nótese, en particular, que este resultado concuerda con la discusión cualitativa del ejemplo 2.3. Obsérvese también que en el potencial de Kepler *todas las órbitas acotadas son cerradas* (y, por tanto, *periódicas*), como afirmaba el teorema de Bertrand.

### 2.3.2 Movimiento planetario

El caso más interesante es el de las órbitas elípticas (incluyendo, como caso particular, la circunferencia) en que  $0 \leq e < 1$  ó  $E < 0$ , pues es el que se da en el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Reescribamos en este caso la ecuación cartesiana de la órbita como

$$(1 - e^2) \left( x + \frac{\alpha e}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = \alpha^2 + \frac{\alpha^2 e^2}{1 - e^2} = \frac{\alpha^2}{1 - e^2},$$

que es la ecuación de una elipse con centro en el punto

$$\left( -\frac{\alpha e}{1 - e^2}, 0 \right) \tag{2.40}$$

y semiejes mayor y menor respectivamente dados por

$$a = \frac{\alpha}{1 - e^2}, \quad b = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - e^2}}. \tag{2.41}$$

Recordemos que la *distancia focal*  $c$  y la *excentricidad*  $\varepsilon$  de una elipse de semiejes  $a > b$  están dadas por

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{2.42}$$

Utilizando las expresiones anteriores de  $a$  y  $b$  se obtiene fácilmente

$$c = \frac{\alpha}{1 - e^2} \sqrt{1 - (1 - e^2)} = \frac{\alpha e}{1 - e^2} = ea \implies e = \varepsilon.$$

Por tanto la constante  $e$  que aparece al integrar la ecuación de las órbitas es la *excentricidad* de la elipse, y la ec. (2.39) relaciona la energía de la partícula con la excentricidad de su órbita. Las ecuaciones anteriores también determinan la posición de los *focos* de la elipse, que por definición son los dos puntos en el semieje mayor (es decir, en el eje  $x$ ) a distancia  $c$  del centro. En efecto, de las ecs. (2.40)-(2.42) se sigue que el centro de la elipse tiene coordenadas  $(-c, 0)$ , y por tanto los focos son los puntos  $(-2c, 0)$  y  $(0, 0)$ . En particular, esto prueba que uno de los focos de la elipse está en el origen de coordenadas, es decir en el centro de atracción gravitatorio. Por tanto *las órbitas acotadas en el movimiento planetario son elipses, uno de cuyos focos es el Sol* (primera ley de Kepler).

- De la ec. (2.41) y de la expresión de la excentricidad en función de la energía se sigue que la energía de una órbita elíptica es

$$E = -\frac{\mu k^2}{2L^2} (1 - e^2) = -\frac{k(1 - e^2)}{2\alpha} = -\frac{k}{2a}.$$

Vemos, por tanto, que *la energía solo depende del semieje mayor de la órbita* (es decir, es independiente de la excentricidad).

- El período  $\tau$  de las órbitas elípticas en el movimiento planetario se determina fácilmente utilizando la ley de las áreas (2.11), teniendo en cuenta que el área de la elipse es igual a  $\pi ab$ :

$$\frac{L\tau}{2\mu} = \pi ab = \pi \sqrt{\alpha} a^{3/2} \implies \tau = \frac{2\pi\mu}{L} \sqrt{\alpha} a^{3/2} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} a^{3/2}. \tag{2.43}$$

En función de la energía, el período está dado por

$$\tau = \pi k \sqrt{\frac{\mu}{2}} |E|^{-3/2}.$$

Nótese que en el movimiento planetario la fórmula para el período puede expresarse en la forma

$$\tau = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \simeq \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM_{\odot}}},$$

siendo  $M_{\odot}$  la masa del Sol. Por tanto, el período de los planetas solo depende del semieje mayor de sus órbitas, y es proporcional a la potencia 3/2 de dicho semieje (*tercera ley de Kepler*).

• Denotemos por  $p$  y  $p'$  respectivamente la distancia del perihelio y del afelio de la elipse al origen de coordenadas. De la ecuación de la órbita (2.38) se sigue fácilmente que la partícula se halla en el perihelio (resp. en el afelio) para  $\theta = 0$  (resp.  $\theta = \pi$ ), y por tanto

$$p = \frac{\alpha}{1+e} = a(1-e), \quad p' = \frac{\alpha}{1-e} = a(1+e).$$

• También se calcula fácilmente la velocidad en cualquier punto de la órbita, sin más que aplicar la ley de conservación de la energía:

$$v^2 = \frac{2}{\mu} (E - V(r)) = \frac{k}{\mu} \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) = \frac{k^2}{L^2} (1 + e^2 + 2e \cos \theta).$$

Nótese que la velocidad es máxima en el perihelio ( $\theta = 0$ ) y mínima en el afelio ( $\theta = \pi$ ), siendo sus valores respectivamente

$$v_p = \frac{k}{L} (1+e), \quad v_{p'} = \frac{k}{L} (1-e).$$

En particular, el cociente

$$\frac{v_p}{v_{p'}} = \frac{1+e}{1-e}$$

solo depende de la excentricidad. Es también interesante muchas veces expresar la velocidad  $v_p$  y  $v_{p'}$  en términos de  $p$ , en lugar de  $L$ . Para ello basta tener en cuenta que

$$\alpha = \frac{L^2}{k\mu} = p(1+e) \implies L = \sqrt{k\mu p(1+e)} = \sqrt{k\mu p'(1-e)},$$

y por tanto

$$v_p = \sqrt{\frac{k}{\mu p}} (1+e), \quad v_{p'} = \sqrt{\frac{k}{\mu p'}} (1-e).$$

**Ejemplo 2.5.** ¿Cuál es la distancia media de un planeta al Sol? Por definición, dicha distancia es igual a

$$\langle r \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} r(t) dt.$$

Teniendo en cuenta que

$$dt = \frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \frac{\mu}{L} r^2 d\theta,$$

la distancia buscada es

$$\langle r \rangle = \frac{\mu}{\tau L} \int_0^{2\pi} r^3 d\theta = \frac{\mu \alpha^3}{\tau L} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+e \cos \theta)^3}.$$

Utilizando las ecs. (2.38), (2.41) y (2.43) se obtiene

$$\frac{\mu\alpha^3}{\tau L} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k\mu}{L^2}} (1 - e^2)^3 a^{3/2} = \frac{(1 - e^2)^3 a^{3/2}}{2\pi\sqrt{\alpha}} = \frac{a(1 - e^2)^{5/2}}{2\pi}$$

y por tanto

$$\langle r \rangle = a(1 - e^2)^{5/2} I(e), \quad I(e) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^3}.$$

La integral  $I(e)$  se puede calcular utilizando el teorema de los residuos, siendo su valor

$$I(e) = \frac{e^2 + 2}{2(1 - e^2)^{5/2}}.$$

En definitiva, la distancia media pedida es igual a

$$\boxed{\langle r \rangle = \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) a.}$$

■

## 2.4 Dispersión en un campo de fuerzas central. Fórmula de Rutherford

### 2.4.1 Sección eficaz diferencial de dispersión

En un experimento ideal de **dispersión** (*scattering*, en inglés), se lanza una partícula de masa  $m_1$  (proyectil) contra un blanco de masa  $m_2$ . Se supone que el proyectil y el blanco forman un *sistema aislado*, y que la fuerza  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$  es *conservativa*<sup>5</sup>, i.e.,

$$\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1},$$

y tiende a cero si  $r \equiv |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow \infty$ . En otras palabras, el potencial de interacción  $V$  es aproximadamente constante si  $r \gg 1$ , y por tanto podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.44)$$

Se supone que el proyectil está inicialmente (es decir, para  $t \rightarrow -\infty$ ) a una distancia muy grande del blanco, por lo que  $\mathbf{F}_{12} \approx 0$  y tanto el blanco como el proyectil se mueven con velocidad aproximadamente constante. En el **sistema del laboratorio** el blanco está (inicialmente) en reposo en

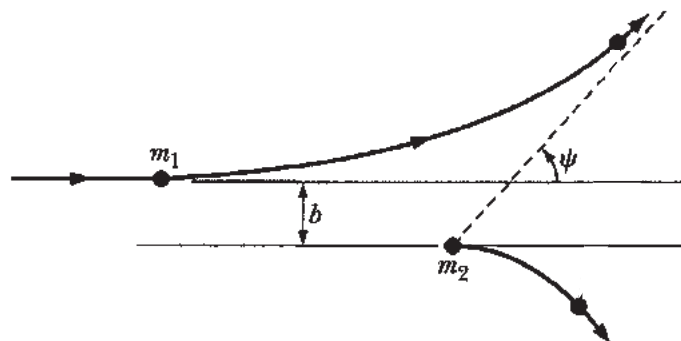
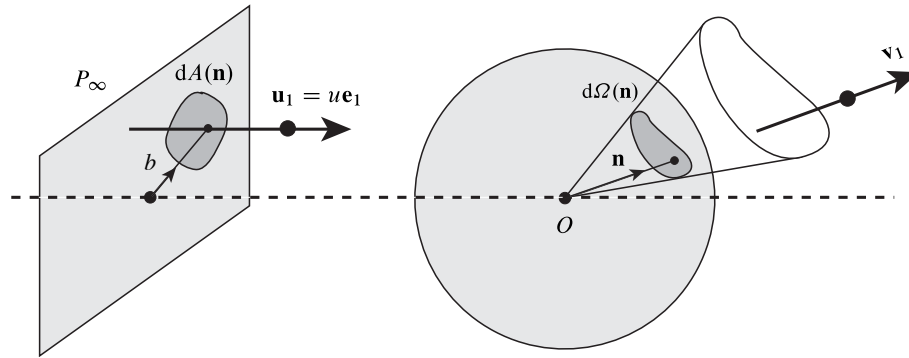


Figura 2.7. Experimento ideal de dispersión de una partícula de masa  $m_1$  por un blanco de masa  $m_2$ .

<sup>5</sup>Como se demostró en la Sección 1.5.2, si  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$  el potencial  $V$  solo puede depender de  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  a través de  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ .

Figura 2.8. Definición de  $\sigma(\mathbf{n})$ .

el origen de coordenadas, mientras que el proyectil se mueve con velocidad  $\mathbf{u}_1 = u\mathbf{e}_1$  con  $u > 0$ . Conforme  $t$  aumenta el proyectil interactúa con el blanco y es desviado por éste, hasta que para  $t \rightarrow \infty$  la separación entre el proyectil y el blanco tiende a infinito,  $\mathbf{F}_{12}$  es de nuevo aproximadamente nula, y ambas partículas se mueven de nuevo con velocidades aproximadamente constantes (cf. la Fig. 2.7).

Sea  $\psi$  el ángulo que forma la velocidad final  $\mathbf{v}_1$  del proyectil con la velocidad inicial  $\mathbf{u}_1$  (es decir, con el eje  $x$ ), que se denomina **ángulo de deflexión**. Para una cierta velocidad inicial  $u$ , la velocidad final  $\mathbf{v}_1$  depende únicamente de la posición inicial del proyectil en un plano  $P_\infty$  perpendicular al eje  $x$  a distancia muy grande (idealmente infinita) del origen de coordenadas. Dicha posición quedará determinada por sus *coordenadas polares* en  $P_\infty$ , es decir por la distancia inicial  $b$  del proyectil al eje  $x$ , llamada **parámetro de impacto**, y por su *ángulo azimutal*  $\beta$  alrededor de este eje. En particular, si el potencial de interacción es *central* el ángulo  $\psi$  solo puede depender del parámetro de impacto  $b$ . Recíprocamente, de la velocidad final  $\mathbf{v}_1$  podemos inferir la posición inicial del proyectil en el plano  $P_\infty$ , es decir los valores del parámetro de impacto  $b$  y el ángulo azimutal  $\beta$ . En realidad, en un experimento de dispersión lo que se observa no es la velocidad final  $\mathbf{v}_1$  sino solo su *dirección*  $\mathbf{v}_1/v_1 \equiv \mathbf{n}$ . Dicha dirección es un vector *unitario* adimensional, es decir un punto de la *esfera unidad*  $S^2$ , determinado por el ángulo  $\psi$  que forma el vector  $\mathbf{v}_1$  con el eje  $x$  y por su ángulo azimutal  $\phi$  alrededor de este eje. De hecho, si la masa del blanco es mucho mayor que la del proyectil entonces el blanco se mueve con velocidad aproximadamente constante para todo  $t$ , y por tanto el sistema del laboratorio es un *sistema inercial*. En dicho sistema la ley de conservación de la energía aplicada en  $t = \pm\infty$  implica que

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_1 = u}.$$

Supongamos que la dirección de la velocidad final del proyectil está en un diferencial de superficie (denominado *diferencial de ángulo sólido*)  $d\Omega(\mathbf{n})(\mathbf{n}) \subset S^2$  centrado en el vector unitario  $\mathbf{n}$ . Sea  $dA(\mathbf{n})$  el área de la región infinitesimal del plano  $P_\infty$  correspondiente a las posiciones iniciales del proyectil que dan como resultado una velocidad  $\mathbf{v}_1$  cuya dirección está en  $d\Omega(\mathbf{n})(\mathbf{n})$  (cf. la Fig. 2.8). Por definición, el cociente

$$\boxed{\sigma(\mathbf{n}) = \frac{dA(\mathbf{n})}{d\Omega(\mathbf{n})}} \quad (2.45)$$

se denomina **sección eficaz diferencial de dispersión** (*differential scattering cross section*, en inglés) para esa dirección  $\mathbf{n}$ . Nótese, en particular, que  $\sigma(\mathbf{n})$  *tiene dimensiones de área*, al ser  $d\Omega(\mathbf{n})$  adimensional.

En la práctica, se lanza un **haz de partículas** de la misma masa  $m$  y velocidad inicial  $u\mathbf{e}_1$ , y se mide el número de partículas dispersadas en un determinado ángulo sólido. Si denotamos por



$\nu$  la densidad del haz, es decir el número de proyectiles por unidad de superficie transversal a la velocidad inicial  $\mathbf{u}_1$ , entonces el número de partículas  $dN(\mathbf{n})$  dispersadas en el ángulo sólido  $d\Omega(\mathbf{n})$  centrado en  $\mathbf{n}$  es igual al número de partículas del haz que salen de la superficie  $dA(\mathbf{n})$  en  $P_\infty$ , es decir

$$dN(\mathbf{n}) = \nu dA(\mathbf{n}) \equiv \nu \sigma(\mathbf{n}) d\Omega(\mathbf{n}), \quad (2.46)$$

y por tanto

$$\sigma(\mathbf{n}) = \frac{1}{\nu} \frac{dN(\mathbf{n})}{d\Omega(\mathbf{n})}. \quad (2.47)$$

Nótese que la fórmula anterior sigue siendo cierta si (como es habitual) se interpreta  $N(\mathbf{n})$  como el número de partículas dispersadas en el diferencial de ángulo sólido  $d\Omega(\mathbf{n})$  *por unidad de tiempo* y  $\nu$  como el número de proyectiles que atraviesan  $P_\infty$  por unidad de área y de tiempo (el llamado *flujo incidente*). Como  $dN(\mathbf{n})$  es medible en un experimento de dispersión, la ecuación anterior permite calcular *experimentalmente*  $\sigma(\mathbf{n})$ . Por otra parte, dado un potencial  $V(\mathbf{r})$  se puede calcular en principio el miembro derecho de la ecuación (2.45), lo que proporciona un valor *teórico* de la sección eficaz diferencial de dispersión  $\sigma(\mathbf{n})$ . La comparación de este valor teórico con el obtenido en un experimento de dispersión permite entonces comprobar experimentalmente si el potencial de interacción entre los proyectiles y el blanco es igual a  $V(\mathbf{r})$ .

Teniendo en cuenta que  $dA = b db d\beta$  y  $d\Omega(\mathbf{n}) = \sin \psi d\psi d\phi$ , la ec. (2.45) se puede escribir en la forma

$$b |db| d\beta = \sigma(\psi, \phi) \sin \psi |d\psi| d\phi,$$

donde el valor absoluto se introduce para tener en cuenta que  $db/d\psi$  suele ser *negativo* si (como es habitual) el potencial es *repulsivo*. Cuando el potencial de interacción es *central* los ángulos azimutales  $\phi$  y  $\beta$  son *iguales* (ya que el movimiento tiene lugar en el plano determinado por la velocidad inicial  $\mathbf{u}_1$  y el vector de posición inicial de la partícula  $\mathbf{r}_1$  en el plano  $P_\infty$ , y por tanto el ángulo azimutal permanece constante), y  $dA$ , y por tanto  $\sigma$ , solo depende de  $\psi$  (por la simetría de rotación alrededor del vector  $\mathbf{u}_1$ ). Integrando la ecuación anterior respecto de  $\phi$  y  $\beta$  entre 0 y  $2\pi$  se obtiene entonces

$$2\pi b |db| = 2\pi \sigma(\psi) \sin \psi |d\psi| \implies \sigma(\psi) = \frac{b}{\sin \psi} \left| \frac{db}{d\psi} \right|. \quad (2.48)$$

En particular, al ser  $\sigma$  independiente de  $\phi$  la ec. (2.46) se puede escribir en la forma

$$dN(\psi, \phi) = \nu \sigma(\psi) \sin \psi d\psi d\phi.$$

Integrando esta ecuación respecto  $\phi$  entre 0 y  $2\pi$  se deduce que *el número de partículas dispersadas con ángulos de deflexión en el intervalo  $(\psi, \psi + d\psi)$  y cualquier ángulo  $\phi \in [0, 2\pi)$  es igual*

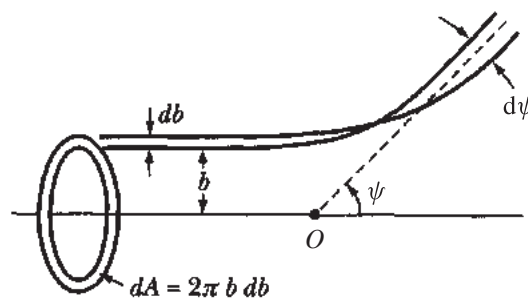


Figura 2.9. Sección eficaz de dispersión cuando la fuerza de interacción entre la partícula y el blanco es central.

a

$$2\pi v \sin \psi \sigma(\psi) d\psi.$$

En general, se define la **sección eficaz total de dispersión** mediante

$$\sigma_{\text{tot}} = \int_{S^2} \sigma(\mathbf{n}) d\Omega(\mathbf{n}) = \int_0^\pi d\psi \sin \psi \int_0^{2\pi} d\phi \sigma(\psi, \phi),$$

donde la integral está extendida a la superficie de la esfera unidad  $S^2$  (es decir, a todas las posibles direcciones de la velocidad final de las partículas dispersadas). Si  $\sigma(\mathbf{n})$  no depende del ángulo azimutal  $\phi$  (como ocurre, por ejemplo, cuando el potencial de interacción es central), la expresión anterior se reduce a

$$\sigma_{\text{tot}} = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\psi) \sin \psi d\psi.$$

De la definición (2.45) de sección eficaz de dispersión se sigue que  $\sigma_{\text{tot}}$  es el área total en el plano  $P_\infty$  transversal a la dirección de la velocidad inicial  $\mathbf{u}_1$  atravesada por los proyectiles que son dispersados en *cualquier* dirección. En otras palabras, el número total de proyectiles dispersados por el blanco es igual a  $v\sigma_{\text{tot}}$ . Para potenciales con alcance infinito, es evidente que  $\sigma_{\text{tot}}$  es infinita, ya que todo proyectil es dispersado en alguna medida por el blanco.

## 2.4.2 Dispersión por un potencial central

Estudiaremos en esta subsección la dispersión de una partícula de masa  $m$  por un campo de fuerzas central *repulsivo* con potencial  $V(r)$  (cf. la Fig. 2.10). Por lo visto anteriormente, el problema estudiado es equivalente al de la dispersión de una partícula de masa  $m$  por un blanco de masa  $m_2 = \infty$  situado en el origen de coordenadas (centro de la fuerza), siendo la fuerza  $\mathbf{F}_{12}$  igual a

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{\partial V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{\partial \mathbf{r}_1}.$$

En la Fig. 2.10 se observa que los ángulos  $\chi$  y  $\chi'$  son iguales, ya que la órbita es *simétrica* respecto de la línea que une el centro de la fuerza con el periápside  $A$ . Por tanto, el ángulo de deflexión está dado por

$$\psi = \pi - 2\chi. \quad (2.49)$$

Por otra parte, el ángulo  $\chi$  es la diferencia entre las coordenadas angulares del punto de la órbita con  $x \rightarrow -\infty$  ( $\theta = \pi$ ) y el periápside  $A$  ( $\theta = \pi - \chi$ ). Si denotamos por  $r_0$  la distancia

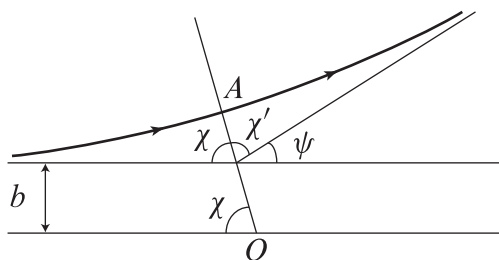


Figura 2.10. Dispersión de una partícula por un potencial central repulsivo ( $O$  es el origen de coordenadas, y  $A$  el periápside).

del periápside  $A$  al origen, de la ecuación (2.18) (con el signo “-”, ya que en este caso  $s = 1/r$  disminuye al aumentar el ángulo  $\theta$ ) se sigue que<sup>6</sup>

$$\chi = \int_0^{1/r_0} \frac{ds}{\sqrt{\frac{2m}{L^2}(E - V(1/s)) - s^2}}.$$

Nótese que el periápside es un punto de retroceso, y por tanto  $r_0$  es la (única) raíz de la ecuación

$$\frac{2m}{L^2}(E - V(r)) - \frac{1}{r^2} = 0.$$

Por otra parte, de la ec. (2.44) y de la ley de conservación de la energía se obtiene

$$E = \frac{1}{2} mu^2, \tag{2.50}$$

mientras que la ley de conservación del momento angular proporciona

$$\mathbf{L} = (b\mathbf{e}_2) \times (m\mathbf{u}\mathbf{e}_1) \implies L = mub = \sqrt{2mE} b. \tag{2.51}$$

Efectuando el cambio de variable  $x = bs$  en la ecuación para  $\chi$  se obtiene por tanto la expresión más compacta

$$\chi = \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 - \frac{V(b/x)}{E}}}, \tag{2.52}$$

donde  $x_0 = b/r_0$  es la raíz positiva de la ecuación

$$1 - x^2 - \frac{V(b/x)}{E} = 0.$$

También es interesante observar que la integral (2.52) está extendida a todos los valores de  $x$  tales que

$$1 - x^2 - \frac{V(b/x)}{E} \geq 0.$$

*Nota.* Para un potencial central *atractivo*  $V(r)$  el ángulo de deflexión está dado por  $\psi = 2\chi - \pi$ , donde  $\chi$  se calcula de nuevo mediante la ec. (2.52). En efecto, de la Fig. 2.11 se sigue que en este caso

$$\psi = \pi - 2\theta = \pi - 2(\pi - \chi) = 2\chi - \pi.$$

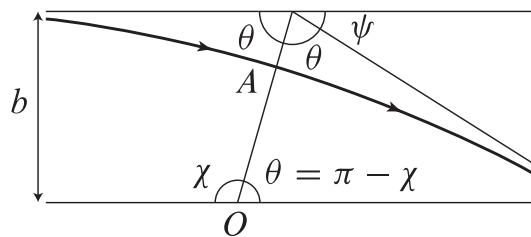


Figura 2.11. Dispersión por un potencial central atractivo ( $O$  es el origen de coordenadas y  $A$  un periápside).

<sup>6</sup>En la mayor parte de los libros de texto se adopta el convenio de que el proyectil se mueva de izquierda a derecha en el sistema del laboratorio, como se ha hecho en estas notas (cf. la Fig. (2.10)). En tal caso es evidente que  $L_z$  y  $\dot{\theta}$  son negativos, y por tanto no se cumple el convenio de la Sección 2.2.2 (cf. la ec. (2.10)). Siguen siendo válidas, sin embargo, todas las fórmulas obtenidas en las secciones anteriores, sin más que cambiar  $L$  (que con el convenio usado anteriormente es igual a  $L_z$ ) por  $-L$ . De hecho, como las ecuaciones que utilizaremos en esta sección solo dependen de  $L^2$ , no será preciso realizar modificación alguna.

Es importante observar que cuando el potencial es atractivo el valor de  $\psi$  puede ser superior a  $\pi$ , ya que las órbitas pueden rodear una o varias veces el origen. Cuando esto ocurre, el cálculo de la sección eficaz diferencial de dispersión se vuelve considerablemente más complicado. Este es el caso, por ejemplo, del potencial  $-k/(2r^2)$  con  $k > 0$  (para ciertos valores del parámetro de impacto). Por el contrario, para el potencial kepleriano atractivo  $-k/r$  (con  $k > 0$ ) el ángulo de deflexión siempre está comprendido entre 0 y  $\pi$ , ya que las órbitas de energía positiva son en este caso ramas de hipérbola.

*Ejercicio.* Calcular la distancia mínima al origen alcanzada por partículas con una energía fija  $E$  dispersadas por un potencial central *repulsivo*  $V(r)$ .

*Solución.* La mínima distancia al origen  $r_0$  alcanzada por una partícula con una dada energía  $E = mu^2/2$  y parámetro de impacto  $b$  es la coordenada del único punto de retroceso de su órbita, determinada por la ecuación

$$U(r_0) = E \iff V(r_0) + \frac{L^2}{2mr_0^2} = V(r_0) + \frac{mu^2b^2}{2r_0^2} = \frac{1}{2}mu^2.$$

Si el potencial es repulsivo, es intuitivamente claro que el mínimo valor de  $r_0$  lo alcanzan las partículas con parámetro de impacto  $b = 0$ . Esto también se comprueba fácilmente utilizando la fórmula anterior, ya que si  $d$  es el valor de  $r_0$  correspondiente a  $b = 0$  se tiene

$$V(d) = \frac{1}{2}mu^2 > V(r_0) \implies d < r_0,$$

al ser  $V$  decreciente (repulsivo). Por tanto la mínima distancia al origen para un potencial central repulsivo  $V(r)$  se determina por la ecuación

$$\boxed{V(d) = \frac{1}{2}mu^2}. \quad (2.53)$$

Dicha distancia depende solo de  $u$  —es decir, de la energía del haz dispersado— y, de nuevo por el carácter repulsivo del potencial, disminuye al aumentar dicha energía.

**Ejemplo 2.6.** Hallemos la sección eficaz de dispersión por el campo central  $f(r) = k/r^3$ , con  $k > 0$ .

En este caso  $V(r) = k/(2r^2)$ , y por tanto el ángulo  $\chi$  está dado por

$$\chi = \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1 - y^2x^2}},$$

donde

$$y = \sqrt{1 + \frac{k}{2b^2E}} = \sqrt{1 + \frac{k}{mu^2b^2}}, \quad x_0 = 1/y.$$

Efectuando el cambio de variable  $yx = \xi$  se obtiene

$$\chi = \frac{1}{y} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi}{2y} \implies \psi = \pi - 2\chi = \pi \left(1 - \frac{1}{y}\right). \quad (2.54)$$

La sección eficaz de dispersión  $\sigma(\psi)$  se calcula fácilmente utilizando la fórmula (2.48). En efecto, de la ecuación anterior para  $\psi$  se obtiene

$$y^2 = \frac{\pi^2}{(\pi - \psi)^2} = 1 + \frac{k}{mu^2b^2} \implies b^2 = \frac{k}{mu^2} \frac{(\pi - \psi)^2}{\psi(2\pi - \psi)}, \quad (2.55)$$

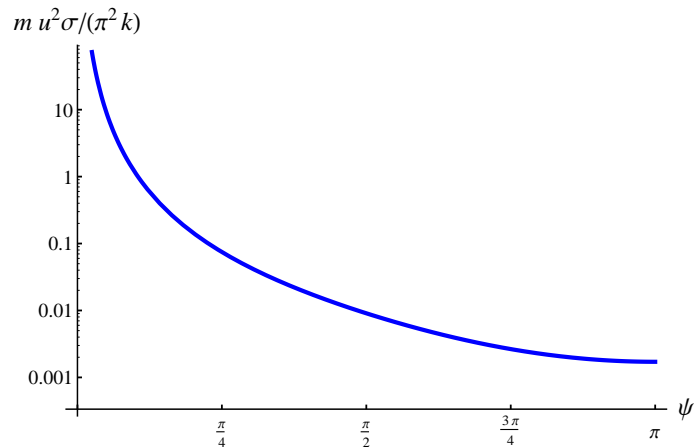


Figura 2.12. Sección eficaz de dispersión por el potencial central  $V(r) = k/(2r^2)$  (nótese que la escala del eje vertical es logarítmica).

y por tanto

$$\begin{aligned} \sigma(\psi) &= \frac{1}{2} \csc \psi \left| \frac{db^2}{d\psi} \right| = \frac{k}{2mu^2} \csc \psi \left| \frac{-2\psi(2\pi - \psi)(\pi - \psi) - 2(\pi - \psi)^3}{\psi^2(2\pi - \psi)^2} \right| \\ &= \boxed{\frac{\pi^2 k}{mu^2} \frac{(\pi - \psi) \csc \psi}{\psi^2(2\pi - \psi)^2}} \end{aligned}$$

(cf. la Fig. 2.12). En este caso la distancia mínima al origen se determina por la ecuación

$$\frac{1}{2} mu^2 = V(d) = \frac{k}{2d^2} \implies d = \sqrt{\frac{k}{mu^2}},$$

y por tanto

$$\boxed{\sigma(\psi) = (\pi d)^2 \frac{(\pi - \psi) \csc \psi}{\psi^2(2\pi - \psi)^2}}.$$

Nótese que para  $\psi \rightarrow 0$  la sección eficaz diferencial de dispersión es divergente, ya que

$$\sigma(\psi) \underset{\psi \rightarrow 0}{\simeq} \frac{\pi d^2}{4\psi^3},$$

mientras que para  $\psi \rightarrow \pi$  se tiene

$$\sigma(\psi) \underset{\psi \rightarrow \pi}{\simeq} \frac{d^2}{\pi^2}. \quad \blacksquare$$

*Nota.* En general, en un potencial central repulsivo de alcance infinito  $\sigma(\psi)$  ha de tender a infinito cuando  $\psi \rightarrow 0$  como  $1/\psi^\alpha$ , con  $\alpha \geq 2$ . En efecto, sea  $\psi(b)$  el ángulo de deflexión correspondiente a un parámetro de impacto  $b$ . Si el potencial  $V(r)$  es repulsivo y de alcance infinito,  $\psi(b)$  es una función decreciente de  $b$  que cumple  $\lim_{b \rightarrow \infty} \psi(b) = 0$  (cf. la Fig. 2.13). Si  $\varepsilon > 0$  es un ángulo arbitrariamente pequeño, los proyectiles que parten de  $P_\infty$  con parámetro de impacto mayor que  $b_\varepsilon = \psi^{-1}(\varepsilon)$  son dispersados con ángulo de deflexión menor que  $\varepsilon$ . Por tanto el área de la región de  $P_\infty$  de la que parten dichos proyectiles (es decir, el exterior del círculo de centro el origen y radio  $b_\varepsilon$ ) es infinita. Por definición de  $\sigma$ , dicha área es igual a la integral

$$2\pi \int_0^\varepsilon \sigma(\psi) \sin \psi \, d\psi.$$

Por tanto la integral anterior ha de ser divergente en  $\psi = 0$ , lo que implica que  $\psi$  tiende a infinito al menos como  $1/\psi^2$  cuando  $\psi$  tiende a 0 (recuérdese que  $\int_0^\varepsilon \psi^{-\alpha} \, d\psi$  diverge si  $\alpha \geq 1$ ).

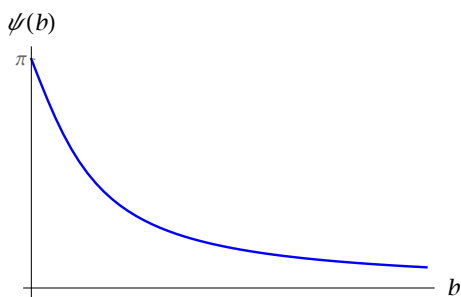


Figura 2.13. Ángulo de deflexión  $\psi$  en función del parámetro de impacto  $b$  para un potencial central repulsivo de alcance infinito.

*Ejercicio.* Hallar  $\sigma(\psi)$  para el potencial del ejemplo anterior utilizando la ecuación de sus órbitas (cf. el Ejemplo 2.1).

*Solución.* Si  $k > 0$ , la ecuación de las órbitas en el potencial  $V = k/(2r^2)$  está dada por (2.25), es decir (llamando  $A = r_0$  y tomando  $\theta_0 = 0$  sin pérdida de generalidad)

$$r = r_0 \sec(\gamma\theta), \quad \text{con } \gamma = \sqrt{1 + \frac{km}{L^2}} = \sqrt{1 + \frac{k}{mu^2b^2}} > 1.$$

Como el ángulo  $\theta$  varía entre  $-\pi/(2\gamma)$  y  $\pi/(2\gamma)$ , esta curva tiene dos asíntotas cada una de las cuales forma un ángulo de  $\pi/(2\gamma) < \pi/2$  con el eje  $x$  positivo (cf. la Fig. 2.14). Por otra parte, de la Fig. 2.10 se deduce que el ángulo formado por las asíntotas de la trayectoria en un potencial central repulsivo es  $2\chi$ . Por tanto en este caso  $\chi = \pi/(2\gamma)$ , que es la ecuación (2.54).

**Ejemplo 2.7.** Calculemos la sección eficaz de dispersión de una partícula de masa  $m$  por una esfera impenetrable de radio  $a$ , cuyo centro está fijo en el origen de coordenadas.

Evidentemente, si  $b > a$  las partículas no son dispersadas, por lo que supondremos que  $b \leq a$ . En tal caso el potencial está dado formalmente por

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r < a \\ 0, & r > a, \end{cases}$$

y por tanto

$$V(b/x) = \begin{cases} \infty, & x > b/a \\ 0, & x < b/a. \end{cases}$$

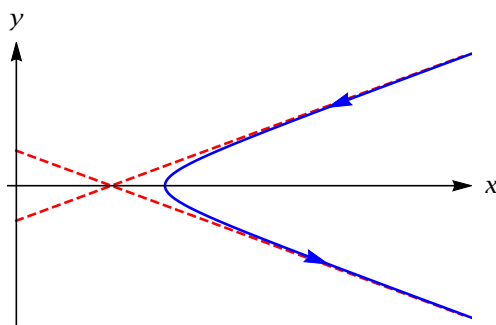


Figura 2.14. Órbita de ecuación  $r = r_0 \sec(\gamma\theta)$  para el potencial  $V(r) = k/(2r^2)$  con  $k > 0$  y sus asíntotas (líneas rojas discontinuas).

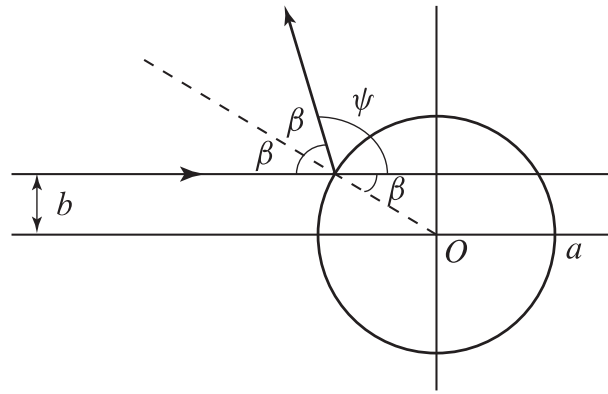


Figura 2.15. Dispersión de una partícula por una esfera impenetrable de masa infinita.

Al ser  $b \leq a$ , teniendo en cuenta que la distancia mínima al origen es obviamente  $r_0 = a$  y que  $V(b/x) = 0$  para  $0 \leq x < b/a$ , la ecuación (2.52) proporciona

$$\chi = \int_0^{b/a} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(b/a) \quad \Rightarrow \quad b = a \sin \chi = a \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2} \right) = a \cos(\psi/2).$$

De la ec. (2.48) se sigue entonces que

$$\sigma(\psi) = \frac{a \cos(\psi/2)}{\sin \psi} \cdot \frac{a}{2} \sin(\psi/2) = \frac{a^2}{4},$$

independiente de  $\psi$ . Por tanto en este caso la sección total de dispersión está dada por

$$\sigma_{\text{tot}} = 2\pi \frac{a^2}{4} \int_0^\pi \sin \psi \, d\psi = \pi a^2,$$

de acuerdo con el hecho de que los proyectiles que viajan a distancia mayor que  $a$  del eje  $x$  no son dispersados.

Otro método: De la Fig. 2.15 se sigue que<sup>7</sup>

$$\psi = \pi - 2\beta, \quad b = a \sin \beta = a \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2} \right) = a \cos(\psi/2),$$

que es la ecuación hallada anteriormente para  $b$  en función del ángulo de deflexión  $\psi$ . ■

### 2.4.3 Fórmula de Rutherford

Consideremos a continuación la dispersión de una partícula de masa  $m$  por un potencial kepleriano repulsivo  $V(r) = k/r$ , con  $k > 0$ . Este es también el potencial de interacción entre dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  del mismo signo, siendo en tal caso  $k = q_1 q_2 / (4\pi\epsilon_0)$ . La trayectoria seguida por la partícula se puede obtener a partir de la ecuación (2.38), cambiando  $k$  por  $-k$ :

$$r = \frac{-\alpha}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}; \quad \alpha = \frac{L^2}{mk}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} > 1,$$

<sup>7</sup>En efecto, al ser central el potencial la fuerza ejercida por la esfera cuando la partícula choca contra ella está dirigida según la normal a dicha esfera en el punto en que tiene lugar la colisión. Por tanto la única componente de la velocidad del proyectil  $\mathbf{v}$  que cambia tras la colisión es la normal a la esfera. Además, por la ley de conservación de la energía se conserva  $\mathbf{v}^2 = v_\perp^2 + v_\parallel^2$ , y por tanto  $v_\perp^2$ . De esto se sigue que  $v_\perp$  cambia de signo tras la colisión, lo cual es equivalente a la igualdad de los ángulos formados por la velocidad del proyectil con la normal a la esfera antes y después de la colisión.

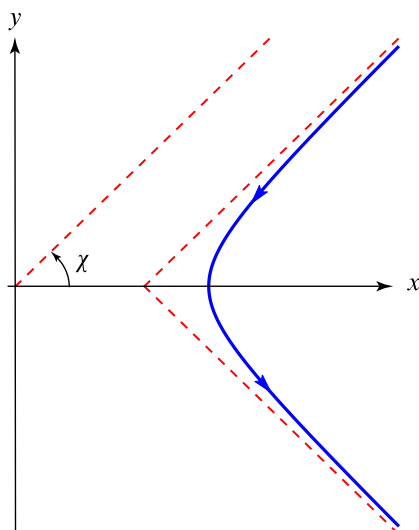


Figura 2.16. Trayectoria de una partícula en el potencial kepleriano  $V(r) = k/r$ , con  $k > 0$ .

donde la energía y el momento angular están dados en función de  $m$  y  $b$  por las ecs. (2.50) y (2.51). Tomando, sin pérdida de generalidad,  $\theta_0 = \pi$  se obtiene la expresión más sencilla

$$r = \frac{\alpha}{e \cos \theta - 1}.$$

En coordenadas cartesianas se tiene

$$x^2 + y^2 = e^2 x^2 - 2e\alpha x + \alpha^2 \Rightarrow (e^2 - 1)\left(x - \frac{e\alpha}{e^2 - 1}\right)^2 - y^2 = -\alpha^2 + \frac{\alpha^2 e^2}{e^2 - 1} = \frac{\alpha^2}{e^2 - 1},$$

que es una rama<sup>8</sup> de *hipérbola* cuyo eje es la recta  $y = 0$ . Como  $r \geq 0$ , el ángulo  $\theta$  en la ecuación anterior ha de variar entre  $-\arccos(1/e)$  y  $\arccos(1/e)$ . Por tanto las asíntotas de la hipérbola forman un ángulo  $\arccos(1/e)$  con el eje  $x$ , que en este caso es la línea que une el origen con el periápside (el punto  $(\beta/(e-1), 0)$ , correspondiente a  $\theta = 0$ ); cf. la Fig. 2.16. Por consiguiente

$$\boxed{\chi = \arccos(1/e)} \Rightarrow \frac{1}{e} = \cos \chi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}\right) = \sin(\psi/2),$$

de donde se sigue que

$$e^2 - 1 = \csc^2(\psi/2) - 1 = \cot^2(\psi/2) = \frac{2EL^2}{mk^2}.$$

De las expresiones (2.50) y (2.51) se obtiene

$$\frac{2EL^2}{mk^2} = \frac{m^2 u^4 b^2}{k^2} \Rightarrow b^2 = \frac{k^2}{m^2 u^4} \cot^2(\psi/2).$$

Al ser  $\cot(\psi/2) \geq 0$  (ya que  $0 \leq \psi \leq \pi$ ), de la expresión anterior se sigue finalmente la relación

$$\boxed{b = \frac{k}{mu^2} \cot(\psi/2)}. \quad (2.56)$$

Sustituyendo esta expresión en la ec. (2.48) se obtiene fácilmente

$$\sigma(\psi) = \frac{k^2}{m^2 u^4} \frac{\cot(\psi/2)}{\sin \psi} \cdot \frac{1}{2} \csc^2(\psi/2) = \boxed{\frac{k^2}{4m^2 u^4} \csc^4(\psi/2)}, \quad (2.57)$$

<sup>8</sup>En efecto, de la ecuación de la trayectoria en coordenadas polares se sigue que  $\cos \theta > 1/e > 0$ , y por tanto  $x > 0$ .



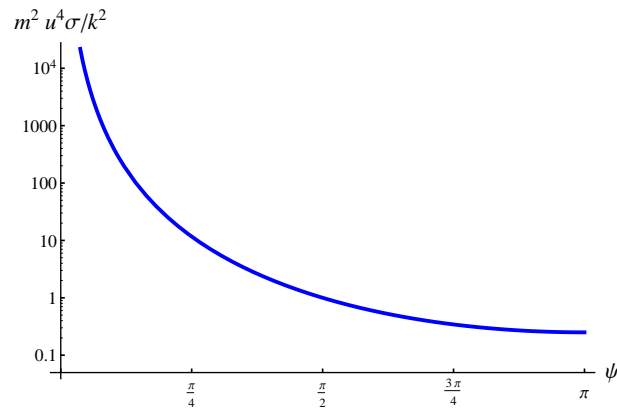


Figura 2.17. Sección eficaz de dispersión por el potencial  $V(r) = k/r$ , con  $k > 0$  (la escala del eje vertical es logarítmica).

que es la famosa **fórmula de Rutherford** (cf. la Fig. 2.17). La distancia mínima al origen alcanzada por las partículas dispersadas por el potencial kepleriano repulsivo está dada por la ecuación (2.53), es decir

$$\frac{k}{d} = \frac{1}{2} m u^2 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{2k}{m u^2}.$$

En función de esta distancia, la sección eficaz diferencial de dispersión se expresa mediante la fórmula

$$\sigma(\psi) = \frac{d^2}{16} \csc^4(\psi/2).$$

El comportamiento asintótico de  $\sigma(\psi)$  está dado en este caso por

$$\sigma(\psi) \underset{\psi \rightarrow 0}{\simeq} \frac{d^2}{\psi^4}, \quad \sigma(\psi) \underset{\psi \rightarrow \pi}{\simeq} \frac{d^2}{16}.$$

*Ejercicio.* Deducir la relación (2.56) utilizando las ecs. (2.49)-(2.52).

*Solución.* En este caso

$$1 - x^2 - \frac{V(b/x)}{E} = 1 - \frac{kx}{bE} - x^2 = 1 - \frac{2kx}{m u^2 b} - x^2 = 1 + \frac{k^2}{m^2 u^4 b^2} - \left(x + \frac{k}{m u^2 b}\right)^2,$$

por lo que es conveniente efectuar el cambio de variable

$$x + \frac{k}{m u^2 b} = \sqrt{1 + \frac{k^2}{m^2 u^4 b^2}} \xi$$

en la integral (2.52). Entonces

$$1 - x^2 - \frac{V(b/x)}{E} = \left(1 + \frac{k^2}{m^2 u^4 b^2}\right) (1 - \xi^2),$$

y por tanto

$$X = \int_{\xi_0}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \xi_0,$$

siendo  $\xi_0$  el valor de  $\xi$  para  $x = 0$ :

$$\xi_0 = \frac{k/(m u^2 b)}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{m^2 u^4 b^2}}}.$$

(Nótese que el límite superior de la integral, correspondiente al valor  $x = x_0$ , no es más que la raíz positiva de la ecuación  $1 - \xi^2 = 0$ .) Utilizando ahora la ec. (2.49) se obtiene

$$\begin{aligned} \psi = 2 \arcsin \xi_0 &\Rightarrow \xi_0 = \sin(\psi/2) \Rightarrow \frac{k^2}{m^2 u^4 b^2} = \left(1 + \frac{k^2}{m^2 u^4 b^2}\right) \sin^2(\psi/2) \\ &\Rightarrow \frac{k^2}{m^2 u^4 b^2} = \tan^2(\psi/2) \Rightarrow b = \frac{k}{m u^2} \cot(\psi/2), \end{aligned}$$

al ser  $\psi \in [0, \pi]$ .

*Ejercicio.* Probar que para el potencial kepleriano *atractivo*  $V(r) = -k/r$ , con  $k > 0$ , la sección eficaz diferencial de dispersión también está dada por la fórmula de Rutherford (2.57).

*Solución.* En primer lugar, para el potencial kepleriano atractivo las órbitas de energía positiva son ramas de hipérbola (cf. la Sección 2.3.1), y por tanto no rodean el origen. Por consiguiente podemos aplicar las ecs. (2.48)-(2.52), teniendo en cuenta que, al ser el potencial atractivo, el ángulo de deflexión  $\psi$  es igual a  $2\chi - \pi$ . De la ecuación de la órbita (2.38) se sigue que este caso  $\chi = \arccos(-1/e)$ , y por tanto

$$-\frac{1}{e} = \cos \chi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\psi}{2}\right) = -\sin(\psi/2) \Rightarrow \frac{1}{e} = \sin(\psi/2),$$

como en el caso repulsivo. El resto del cálculo es idéntico, ya que la fórmula para la excentricidad depende de  $k^2$ , y por tanto

$$\cot^2(\psi/2) = e^2 - 1 = \frac{m^2 u^4 b^2}{k^2} \Rightarrow b = \frac{k}{m u^2} \cot(\psi/2),$$

que es la ec. (2.56).

**Ejemplo 2.8.** ¿Cuál es la sección total de dispersión *hacia atrás*  $\sigma_b$  en la dispersión de una partícula por el potencial  $V(r) = k/r$  (con  $k > 0$ )?

Por definición de sección eficaz de dispersión,  $\sigma_b$  es el área de la región del plano  $P_\infty$  de donde proceden los proyectiles que son dispersados hacia atrás, es decir con un ángulo de deflexión  $\psi$  entre  $\pi/2$  y  $\pi$ . De la ec. (2.56) se sigue entonces que el parámetro de impacto  $b$  de los proyectiles dispersados hacia atrás está comprendido entre 0 (correspondiente a  $\psi = \pi$  y  $k/mu^2$  (correspondiente a  $\psi = \pi/2$ ). En otras palabras, son dispersados hacia atrás los proyectiles que parten a distancia menor o igual que  $k/mu^2$  del eje  $x$  en el plano  $P_\infty$ . Por tanto la sección eficaz pedida será igual al área de un círculo de radio  $k/mu^2$ , es decir a

$$\sigma_b = \frac{\pi k^2}{m^2 u^4} = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Evidentemente, el mismo resultado se obtiene utilizando la fórmula de Rutherford:

$$\begin{aligned} \sigma_b &= 2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \psi \sigma(\psi) d\psi = \frac{\pi k^2}{m^2 u^4} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos(\psi/2)}{\sin^3(\psi/2)} d\psi = \frac{2\pi k^2}{m^2 u^4} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha} d\alpha \\ &= -\frac{\pi k^2}{m^2 u^4} \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi k^2}{m^2 u^4}. \end{aligned}$$

El resultado anterior fue de gran importancia en la historia de la física. En efecto, a principios del siglo XX se creía que la carga positiva del núcleo atómico estaba distribuida uniformemente (este es el llamado “modelo del pudding de pasas” de J. J. Thomson). Para comprobar esta hipótesis, Ernest Rutherford ideó un experimento que consistía en lanzar un haz de partículas  $\alpha$  (núcleos de  $\text{He}^{++}$ ) contra una lámina muy fina (para evitar colisiones múltiples) de átomos de oro. Al ser la masa de las partículas  $\alpha$  mucho mayor que la de los electrones —que, según el modelo de Thomson, se moverían en el fondo uniforme de la carga positiva de los núcleos—,

dichas partículas no deberían ser apenas dispersadas. En 1909 Hans Geiger y Ernest Marsden realizaron este experimento bajo la dirección de Ernest Rutherford, y para su sorpresa hallaron que un número pequeño pero no nulo de partículas  $\alpha$  eran dispersadas incluso en ángulos próximos a  $180^\circ$ . Rutherford, Geiger y Marsden dedujeron correctamente que este hecho era debido a las colisiones individuales de las partículas  $\alpha$  con las cargas positivas de los núcleos de Au, que, al contrario de lo predicho por el modelo de Thomson, deberían estar concentradas en una región muy pequeña. De hecho, el valor teórico hallado anteriormente para  $\sigma_b$  permite hallar una cota superior al radio  $a$  del núcleo de Au. En efecto, si  $\nu$  es la densidad de partículas  $\alpha$  del haz por unidad de superficie transversal entonces el número de partículas  $\alpha$  dispersadas hacia atrás está dado por

$$N_b = \nu \sigma_b = \frac{\pi \nu}{4} d^2 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{4N_b}{\pi \nu}}.$$

Como la distancia  $d$  de máximo acercamiento de las partículas  $\alpha$  al núcleo de Au ha de ser mayor o igual que su radio  $a$ , de la fórmula anterior obtenemos la acotación

$$a \leq \sqrt{\frac{4N_b}{\pi \nu}}. \quad \blacksquare$$

*Ejercicio.* Calcular la sección eficaz de dispersión hacia atrás en el potencial  $V(r) = k/(2r^2)$  con  $k > 0$ .

*Solución.* En este potencial, la relación entre el ángulo de deflexión  $\psi$  y el parámetro de impacto  $b$  está dada por la ec. (2.55). Por tanto los proyectiles se dispersarán en ángulos iguales o superiores a  $\pi/2$  si

$$b^2 \leq \frac{k}{mu^2} \frac{\pi^2/4}{\pi/2(2\pi - \pi/2)} = \frac{k}{3mu^2}.$$

En consecuencia la sección eficaz de dispersión hacia atrás es igual en este caso a

$$\sigma_b = \frac{\pi k}{3mu^2} = \frac{\pi d^2}{3}. \quad \blacksquare$$



## Capítulo 3

# Formulaciones lagrangiana y hamiltoniana de la mecánica

### 3.1 Introducción al cálculo variacional

#### 3.1.1 Problema fundamental del cálculo de variaciones

El problema fundamental del **cálculo de variaciones** (en su versión más sencilla) es el de hallar los extremos de una función de la forma

$$F[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x)) dx \quad \left( ' = \frac{d}{dx} \right), \quad (3.1)$$

donde  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^2$  (derivables dos veces con continuidad) y la función  $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  debe cumplir las condiciones de contorno

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 \quad (3.2)$$

con  $y_1, y_2$  *fijos*. Desde el punto de vista matemático,

$$F : C^2([x_1, x_2]) \rightarrow \mathbb{R}$$

es una función cuyo dominio es el espacio  $C^2([x_1, x_2])$  de funciones escalares  $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  en el intervalo  $[x_1, x_2]$  que satisfacen la condición (3.2). En otras palabras, a cada función  $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ , que podemos identificar con su **gráfica**

$$\{(x, y(x)) : x_1 \leq x \leq x_2\} \subset \mathbb{R}^2,$$

la aplicación  $F$  le asocia el número dado por el miembro derecho de (3.1). Una función de este tipo, cuyo dominio es un conjunto de funciones, recibe el nombre de **funcional**. A la función  $f$  que aparece en la ec. (3.1) se le denomina **densidad** del correspondiente funcional  $F$ .

**Ejemplo 3.1.** ¿Cuál es la curva plana de menor longitud que une dos puntos dados?

Denotemos dichos puntos por  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2$ ), y supongamos que  $x_1 \neq x_2$  (lo que siempre es posible escogiendo adecuadamente los ejes). Si nos restringimos, por sencillez, a curvas que sean la gráfica de funciones  $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  entonces el problema propuesto es el de hallar el mínimo del *funcional longitud*

$$F[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

con la condición (3.2). ■

**Ejemplo 3.2.** *Problema de la braquistócrona.* Una partícula de masa  $m$  se mueve en un plano vertical a lo largo de una curva de extremos fijos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , con  $x_1 < x_2$  e  $y_1 > y_2$ . ¿Para qué curva es *mínimo* el tiempo que emplea la partícula en recorrer la distancia entre ambos puntos?

Si se desprecia el rozamiento, la fuerza de reacción de la curva sobre la partícula es perpendicular a dicha curva, y por tanto no realiza trabajo, se conserva la energía:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = E.$$

Si la curva es la gráfica de una función  $y(x)$ , el diferencial de tiempo a lo largo de dicha curva está dado por

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2g\left(\frac{E}{mg} - y(x)\right)}} dx.$$

Por tanto el problema propuesto es el de hallar el mínimo del funcional (proporcional al tiempo de recorrido)

$$F[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{y_0 - y(x)}} dx \quad \left(y_0 \equiv \frac{E}{mg}\right) \quad (3.3)$$

con la condición (3.2). Nótese que de la conservación de la energía se sigue que  $y \leq y_0$ , y que  $y_0 = y_1$  si la partícula está inicialmente en reposo. ■

**Ejemplo 3.3.** *Principio de Fermat.* ¿Cuál es la trayectoria seguida por un rayo luminoso al pasar de un punto  $(x_1, y_1)$  a otro punto  $(x_2, y_2)$  en un medio óptico plano con índice de refracción  $n(x, y)$ ?

Según el **principio de Fermat** (en la aproximación de la Óptica geométrica), la trayectoria del rayo luminoso que une los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  es la curva para la cual el tiempo empleado por la luz en recorrer la distancia entre ambos puntos es *mínimo*. Supongamos, de nuevo, que  $x_1 \neq x_2$  y que la trayectoria es la gráfica de una función  $y(x)$ . Por definición de índice de refracción, la velocidad de la luz en un punto  $(x, y)$  del medio está dada por

$$v(x, y) = \frac{c}{n(x, y)},$$

siendo  $c$  la velocidad de la luz en el vacío. Como

$$dt = \frac{ds}{v(x, y)} = n(x, y) \frac{ds}{c},$$

el problema propuesto es equivalente al de determinar el mínimo del funcional (proporcional al tiempo de recorrido)

$$F[y] = \int_{x_1}^{x_2} n(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx, \quad (3.4)$$

de nuevo con la condición (3.2). El funcional (3.4), que tiene dimensiones de longitud, se denomina *longitud óptica*. Obsérvese que si el índice de refracción es *constante*  $F$  es proporcional al funcional longitud del primer ejemplo, y por tanto el camino seguido por la luz es la curva de menor longitud que une los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ . Nótese también que si el índice de refracción es proporcional a  $(y_0 - y)^{-1/2}$  la trayectoria seguida por la luz es la braquistócrona del ejemplo anterior. ■

### 3.1.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Para resolver el problema fundamental del cálculo de variaciones formulado en la subsección anterior procederemos esencialmente del mismo modo que se hace en Análisis real para determinar los extremos de una función ordinaria de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ . La idea es que en ambos casos los extremos son los puntos (funciones en este caso) para los cuales se anula en primer orden la *variación* sufrida por la función cuando incrementamos infinitesimalmente su argumento.

Más precisamente, supongamos que  $y(x)$  es un extremo (máximo o mínimo) del funcional (3.1) con la condición (3.2). Sea  $\eta(x)$  una función cualquiera (de clase  $C^2$ ) que cumple

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0, \quad (3.5)$$

de modo que para todo  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  la función  $y_\varepsilon \equiv y + \varepsilon\eta$  satisface las condiciones (3.2). Las funciones  $y_\varepsilon(x)$  (con  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ) forman una **familia uniparamétrica** que contiene al extremo  $y(x)$  para  $\varepsilon = 0$ . Más informalmente, si  $\varepsilon$  es pequeño podemos pensar en las funciones  $y_\varepsilon(x)$  como pequeñas *variaciones* del extremo  $y(x)$ . En cualquier caso, si restringimos el funcional  $F$  a estas funciones obtenemos una *función de una variable*

$$g(\varepsilon) \equiv F[y_\varepsilon] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x) + \varepsilon\eta(x), y'(x) + \varepsilon\eta'(x)) dx$$

que tiene un extremo en  $\varepsilon = 0$ . Sabemos que una condición *necesaria* (aunque en general no suficiente) para que esto ocurra es que  $g'(0) = 0$ . Calculando la derivada  $g'(\varepsilon)$  se obtiene:

$$\begin{aligned} g'(\varepsilon) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(x, y(x) + \varepsilon\eta(x), y'(x) + \varepsilon\eta'(x)) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x) + \varepsilon\eta(x), y'(x) + \varepsilon\eta'(x)) \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x) + \varepsilon\eta(x), y'(x) + \varepsilon\eta'(x)) \eta'(x) \right] dx \end{aligned}$$

y por tanto

$$g'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \eta'(x) \right] dx.$$

Por consiguiente, si la función  $y(x)$  es un extremo del funcional  $F$  con las condiciones (3.2) debe satisfacer

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \eta'(x) \right] dx = 0 \quad (3.6)$$

para *cualquier* función  $\eta(x)$  que cumpla (3.5). La ecuación (3.6) se puede simplificar integrando por partes el último sumando, ya que

$$\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \eta'(x) dx \\ &= \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \right) dx \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \right) dx, \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta la condición (3.5). Utilizando esta última ecuación en (3.6) se obtiene finalmente

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \right) \right] \eta(x) dx = 0. \quad (3.7)$$

Como dicha condición ha de verificarse para *cualquier* función  $\eta$  que cumpla (3.5), el término entre paréntesis ha de anularse idénticamente en el intervalo  $[x_1, x_2]$ , y por tanto *el extremo*  $y(x)$  *ha de satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \right) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad \forall x \in [x_1, x_2]. \quad (3.8)$$

- Es importante recordar que la ecuación de Euler-Lagrange (3.8) es una condición *necesaria*, pero en general *no suficiente*, para que  $y(x)$  sea un extremo del funcional  $F$ . Hablando con más precisión, las soluciones de dicha ecuación son los *puntos críticos* de  $F$  (del mismo modo que los puntos en que se anula la derivada de una función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  son los puntos críticos de dicha función). Por este motivo, a las funciones  $y(x)$  que satisfacen la ec. (3.8) se les denomina **extremales** del funcional (3.1).

- Si (como estamos suponiendo) la función  $f$  es de clase  $C^2$ , la ec. (3.8) se puede escribir en la forma equivalente

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

En particular, si se cumple la condición

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \neq 0$$

la ecuación anterior es una *ecuación diferencial ordinaria de 2º orden* en la función incógnita  $y$ . Para hallar los extremales del funcional  $F$ , se deben añadir a dicha ecuación las *condiciones de contorno* (3.2).

- Multiplicando el miembro izquierdo de la ecuación de Euler-Lagrange (3.8) por  $y'$  se obtiene

$$y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - y' \frac{\partial f}{\partial y} - y'' \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f \right) + \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Por tanto, la ecuación de Euler-Lagrange se puede escribir en la forma equivalente

$$\frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f \right) + \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (3.9)$$

En particular, si  $f$  no depende explícitamente de  $x$  (es decir, si es función únicamente de  $y$  y  $y'$ ), se conserva la función entre paréntesis en el miembro izquierdo de (3.9):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad h \equiv y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = \text{const.} \quad (3.10)$$

Se dice en tal caso que la función  $h$  es una **integral primera** de la ecuación de Euler-Lagrange (3.8), ya que cuando  $h$  se conserva dicha ecuación de *segundo* orden es equivalente a la ecuación de *primer* orden (3.10).

- Del mismo modo, si  $f$  no depende de  $y$  de la ec. de Euler-Lagrange se sigue que se conserva la derivada de  $f$  respecto de  $y'$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{const.} \quad (3.11)$$



**Ejemplo 3.4.** Los problemas enunciados en los Ejemplos 3.1-3.2 se resuelven fácilmente utilizando la ecuación de Euler-Lagrange y las leyes de conservación (3.10)-(3.11). En efecto, en el caso del funcional longitud la ec. (3.11) proporciona

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const.} \implies y' = \text{const.}$$

Por tanto  $y(x) = ax + b$ , donde las constantes  $a$  y  $b$  han de elegirse de modo que se cumplan las condiciones (3.2). En consecuencia, la curva de mínima<sup>1</sup> longitud es la línea recta.

En cuanto al funcional (3.3), la ec. (3.10) proporciona

$$\left( \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - \sqrt{1+y'^2} \right) (y_0 - y)^{-1/2} = -(1+y'^2)^{-1/2} (y_0 - y)^{-1/2} = \text{const.}$$

$$\rightarrow (y_0 - y)(1 + y'^2) = 2k,$$

con  $k > 0$  constante. Por tanto

$$y' = \pm \sqrt{\frac{2k}{y_0 - y} - 1} = \pm \sqrt{\frac{2k - y_0 + y}{y_0 - y}},$$

de donde se sigue que

$$x - x_0 = \pm \int \sqrt{\frac{y_0 - y}{2k - y_0 + y}} dy$$

con  $x_0$  constante. Efectuando el cambio de variable

$$y_0 - y = 2k \sin^2 \theta$$

se obtiene

$$x - x_0 = \mp 4k \int \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{\cos \theta} d\theta = \mp 4k \int \sin^2 \theta d\theta = \mp 2k \int (1 - \cos 2\theta) d\theta = \mp k (2\theta - \sin 2\theta).$$

Las ecuaciones paramétricas de la curva buscada son por tanto

$$\boxed{x = x_0 \mp k(2\theta - \sin 2\theta), \quad y = y_0 - 2k \sin^2 \theta = y_0 - k(1 - \cos 2\theta).}$$

Estas son las ecuaciones de una *cicloide*<sup>2</sup> invertida descrita por una circunferencia de radio  $k$ , donde las constantes  $x_0$  y  $k$  deben de nuevo determinarse imponiendo que se cumplan las condiciones (3.2). ■

**Ejemplo 3.5.** La ecuación de Euler-Lagrange para el funcional (3.4) se escribe

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{n(x, y) y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) - \sqrt{1+y'^2} \frac{\partial n(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Esta ecuación se puede expresar en una forma más compacta teniendo en cuenta que si  $s$  es la longitud de arco a lo largo de la trayectoria del rayo luminoso entonces

$$\frac{d}{ds} = \left( \frac{ds}{dx} \right)^{-1} \frac{d}{dx} = (1+y'^2)^{-1/2} \frac{d}{dx}.$$

<sup>1</sup> *Stricto sensu*, solo hemos probado que la línea recta es un *extremal* del funcional longitud.

<sup>2</sup> Nótese que el doble signo se puede omitir, ya que los puntos de la curva correspondiente al signo “-” se obtienen a partir de los de la curva con el signo “+” cambiando  $\theta$  en  $-\theta$ .

De esta forma se obtiene la ecuación

$$\boxed{\frac{d}{ds} \left( n(x, y) \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial n(x, y)}{\partial y}}.$$

Por ejemplo, si el índice de refracción no depende de la coordenada  $y$  la ecuación anterior proporciona

$$n(x) \frac{dy}{ds} = k \implies \frac{n^2(x) y'^2}{1 + y'^2} = k^2 \implies y' = \pm \frac{k}{\sqrt{n^2(x) - k^2}},$$

con  $k$  constante. Por tanto en este caso la ecuación de la trayectoria es

$$\boxed{y = y_0 \pm k \int \frac{dx}{\sqrt{n^2(x) - k^2}}}.$$

En particular, si

$$n(x) = \frac{n_0}{x} \quad (n_0 > 0, \quad x > 0)$$

entonces

$$y - y_0 = \pm k \int \frac{x \, dx}{\sqrt{n_0^2 - k^2 x^2}} = \mp \frac{1}{k} \sqrt{n_0^2 - k^2 x^2} \implies x^2 + (y - y_0)^2 = \frac{n_0^2}{k^2}.$$

Por tanto las trayectorias de los rayos de luz son en este caso arcos de *circunferencia* con centro en el eje  $y$ . ■

Estudiaremos a continuación una versión más general del problema fundamental del cálculo de variaciones, en que el funcional  $F$  depende de  $n$  funciones escalares  $y_1, \dots, y_n$  de una variable real  $x$ . Equivalentemente (y más ventajosamente desde el punto de vista notacional), podemos considerar  $F$  depende de una única *función vectorial*  $\mathbf{y} \equiv (y_1, \dots, y_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Más precisamente, consideremos el funcional

$$\boxed{F[\mathbf{y}] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x)) \, dx}, \quad (3.12)$$

cuyo dominio son las funciones  $\mathbf{y} : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^2$  en el intervalo  $[x_1, x_2]$  que satisfacen las condiciones análogas a (3.2):

$$\boxed{\mathbf{y}(x_1) = \mathbf{y}_1, \quad \mathbf{y}(x_2) = \mathbf{y}_2}, \quad (3.13)$$

para ciertos vectores fijos  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^n$ .

Al igual que antes, para determinar los extremos de dicho funcional con las condiciones iniciales (3.13) efectuamos una variación

$$\mathbf{y}_\varepsilon(x) = \mathbf{y}(x) + \varepsilon \boldsymbol{\eta}(x)$$

alrededor de un extremo  $\mathbf{y}(x)$ , donde la función vectorial  $\boldsymbol{\eta} \equiv (\eta_1, \dots, \eta_n)$  ha de satisfacer

$$\boldsymbol{\eta}(x_1) = \boldsymbol{\eta}(x_2) = 0 \quad (3.14)$$

para que  $\mathbf{y}_\varepsilon$  cumpla las condiciones (3.13) para todo  $\varepsilon$ . Restringiendo el funcional  $F$  a la función variada  $\mathbf{y}_\varepsilon$  obtenemos, como antes, la función de una variable

$$g(\varepsilon) \equiv F[\mathbf{y}_\varepsilon] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \mathbf{y}_\varepsilon(x), \mathbf{y}'_\varepsilon(x)) \, dx,$$

cuya derivada en  $\varepsilon = 0$  debe anularse. Calculando dicha derivada e integrando por partes teniendo en cuenta las condiciones (3.14) se obtiene fácilmente la expresión

$$g'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x)) - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x)) \right] \eta_i(x). \quad (3.15)$$

Como esta expresión debe anularse cualesquiera que sean las funciones  $\eta_i$  que cumplan las condiciones (3.14), concluimos que los extremos del funcional (3.12) deben satisfacer las  $n$  **ecuaciones de Euler-Lagrange**

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.16)$$

De nuevo, dichas ecuaciones son solo condiciones *necesarias* para que la función  $\mathbf{y}(x)$  sea un extremo del funcional  $F$ . Por este motivo a las soluciones de (3.16), que son los *puntos críticos* del funcional (3.12), se les denomina de nuevo **extremales** de dicho funcional.

- Desarrollando las ecuaciones (3.16) se obtiene

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial y'_i \partial y'_j} y''_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y'_i} y'_j + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Por tanto, si el *hessiano* de la función  $f$  respecto de las variables  $y'_i$  no se anula idénticamente, es decir si

$$\det \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y'_i \partial y'_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0,$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.16) son un *sistema de  $n$  ecuaciones de 2º orden en las  $n$  funciones  $y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )*, al que deben añadirse las  $2n$  condiciones de contorno (3.13).

- Multiplicando el miembro izquierdo de la ec. de Euler-Lagrange (3.16) por  $y'_i$  y sumando en  $i$  se obtiene

$$\sum_{i=1}^n y'_i \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} - \sum_{i=1}^n y'_i \frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{d}{dx} \left( \sum_{i=1}^n y'_i \frac{\partial f}{\partial y'_i} - f \right) + \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Por tanto, si  $f$  no depende explícitamente de  $x$  se conserva la función

$$h \equiv \sum_{i=1}^n y'_i \frac{\partial f}{\partial y'_i} - f.$$

También es evidente que si  $f$  es independiente de la variable  $y_i$  se conserva la derivada de  $f$  respecto de  $y'_i$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial y'_i} = \text{const.}$$

- Llamemos

$$\delta \mathbf{y}(x) \equiv \mathbf{y}_\varepsilon(x) - \mathbf{y}(x) = \varepsilon \boldsymbol{\eta}(x)$$

a la **variación** de la función  $\mathbf{y}(x)$ , donde la función vectorial  $\boldsymbol{\eta}$  cumple las condiciones (3.14). Entonces el cambio (o variación)  $F[\mathbf{y}_\varepsilon] - F[\mathbf{y}] = g(\varepsilon) - g(0)$  del funcional  $F$  a primer orden en  $\varepsilon$  está dado por

$$\delta F[\mathbf{y}] \equiv \varepsilon \left. \frac{d}{d\varepsilon} F[\mathbf{y}_\varepsilon] \right|_{\varepsilon=0} = \varepsilon g'(0).$$

De la ec. (3.15) se deduce que podemos escribir dicha variación en la forma compacta

$$\delta F[\mathbf{y}] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta f}{\delta \mathbf{y}}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x)) \cdot \delta \mathbf{y}(x) dx, \quad (3.17)$$

siendo por definición

$$\frac{\delta f}{\delta \mathbf{y}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}'}. \quad (3.18)$$

La función (vectorial, de  $n$  componentes)  $\frac{\delta f}{\delta \mathbf{y}}(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}')$  se denomina **derivada variacional** de la densidad  $f$  respecto de la función  $\mathbf{y}(x)$ . En particular, con esta notación las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.16) del funcional (3.12) expresan simplemente la anulación de la derivada variacional de su densidad  $f$ :

$$\delta F[\mathbf{y}] = 0 \iff \frac{\delta f}{\delta \mathbf{y}} = 0. \quad (3.19)$$

• Consideremos dos funcionales de la forma (3.12)-(3.13) con densidades  $f_1$  y  $f_2$  que difieren en la **derivada total** respecto de  $x$  de una función  $g(x, \mathbf{y})$ :

$$f_2(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') = f_1(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') + \frac{d}{dx} g(x, \mathbf{y}), \quad \frac{d}{dx} g(x, \mathbf{y}) \equiv \frac{\partial g(x, \mathbf{y})}{\partial x} + \frac{\partial g(x, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{y}'.$$

Entonces

$$F_2[\mathbf{y}] - F_1[\mathbf{y}] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dg(x, \mathbf{y})}{dx} dx = g(x_2, \mathbf{y}(x_2)) - g(x_1, \mathbf{y}(x_1)) = g(x_2, \mathbf{y}_2) - g(x_1, \mathbf{y}_1),$$

en virtud de las condiciones (3.13) que deben satisfacer las funciones  $\mathbf{y}(x)$  en el dominio de los funcionales  $F_1$  y  $F_2$ . Por tanto dichos funcionales *difieren en una constante*, y en consecuencia *tienen los mismos extremales*. Por consiguiente las ecuaciones de Euler-Lagrange de las densidades  $f_1$  y  $f_2$  han de ser *equivalentes*, ya que tienen las mismas soluciones. De hecho, dichas ecuaciones son *idénticas*, ya que

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}'_i} \frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}_i} \implies \frac{\delta}{\delta \mathbf{y}'_i} \frac{dg}{dx} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_i} \frac{dg}{dx} - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}'_i} \left( \frac{dg}{dx} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_i} \frac{dg}{dx} - \frac{d}{dx} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}'_i} = 0,$$

y por tanto (al ser la derivada variacional obviamente *lineal*)

$$\frac{\delta f_2}{\delta \mathbf{y}} = \frac{\delta f_1}{\delta \mathbf{y}} + \frac{\delta}{\delta \mathbf{y}} \frac{dg}{dx} = \frac{\delta f_1}{\delta \mathbf{y}}.$$

En otras palabras:

Dos densidades que difieren en una derivada total dan lugar a las *mismas* ecuaciones de Euler-Lagrange.

**Ejemplo 3.6.** Hallemos la ecuación de las trayectorias seguidas por la luz en un medio óptico de índice de refracción  $n(\mathbf{r})$ .

Según el principio de Fermat, la trayectoria  $\mathbf{r}(u)$  del rayo luminoso que une dos puntos  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathbb{R}^3$  (donde  $u$  es un parámetro cualquiera a lo largo de dicha trayectoria) ha de minimizar el tiempo empleado por la luz en recorrer la distancia entre ambos puntos. Al ser

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{\mathbf{r}'^2(u)},$$

donde la prima indica derivada respecto de  $u$ , la trayectoria buscada ha de minimizar el funcional longitud óptica (proporcional al tiempo de recorrido)

$$F[\mathbf{r}] = \int_{u_1}^{u_2} n(\mathbf{r}(u)) \sqrt{\mathbf{r}'^2(u)} \, du$$

con las condiciones

$$\mathbf{r}(u_1) = \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r}(u_2) = \mathbf{r}_2$$

(nótese que en este ejemplo  $u$  juega el papel de  $x$  y  $\mathbf{r}$  el de  $\mathbf{y}$ ). Las ecuaciones de Euler-Lagrange de este funcional son por tanto

$$\frac{d}{du} \left( \frac{\partial}{\partial x'_i} (n \sqrt{\mathbf{r}'^2}) \right) - \sqrt{\mathbf{r}'^2} \frac{\partial n}{\partial x_i} = \frac{d}{du} \left( \frac{n x'_i}{\sqrt{\mathbf{r}'^2}} \right) - \sqrt{\mathbf{r}'^2} \frac{\partial n}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

donde  $\mathbf{r} \equiv (x_1, x_2, x_3)$ . Teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}'^2}} \frac{d}{du} = \frac{d}{ds},$$

las ecuaciones anteriores se pueden escribir en la forma más geométrica siguiente:

$$\boxed{\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}.}$$

Esta es la ecuación fundamental de la Óptica geométrica. Por ejemplo, si el índice de refracción depende solo de  $r$  (es decir, si el medio óptico es *esféricamente simétrico*) entonces

$$\frac{d}{ds} \left( \mathbf{r} \times n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \mathbf{r} \times \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} = n'(r) \mathbf{r} \times \frac{\mathbf{r}}{r} = 0,$$

y por tanto *la trayectoria del rayo luminoso está contenida en un plano que pasa por el origen de coordenadas.* ■

## 3.2 Principio de Hamilton en sistemas sin ligaduras

### 3.2.1 Principio de Hamilton para una partícula

Consideremos, en primer lugar, el movimiento de una partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza *irrotacional*

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}) = - \frac{\partial V(t, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}. \quad (3.20)$$

Las ecuaciones de Newton son en este caso

$$m \ddot{x}_i = - \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.21)$$

donde de nuevo hemos denotado por  $x_i$  a la  $i$ -ésima componente del vector de posición. Nos preguntamos si las ecs. (3.21) son las ecuaciones de Euler-Lagrange de algún funcional

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) \, dt.$$

(Nótese, de nuevo, que en este caso  $t$  juega el papel de  $x$ ,  $\mathbf{r}$  el de  $\mathbf{y}$  y  $L$  el de  $f$ .) Aunque es fácil responder afirmativamente a esta pregunta simplemente por inspección, se puede proceder del siguiente modo. Escribiendo las ecuaciones (3.21) en la forma

$$\frac{d}{dt} (m \dot{x}_i) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

vemos que basta hallar una función  $L(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  que verifique las ecuaciones

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}; \quad i = 1, 2, 3.$$

Integrando primero las tres ecuaciones para  $\frac{\partial L}{\partial x_i}$  se obtiene

$$L = -V + g(t, \dot{\mathbf{r}}),$$

y sustituyendo a continuación en las restantes ecuaciones queda

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

lo que determina la función  $g$ :

$$g = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 + h(t).$$

Por tanto la función más sencilla con la propiedad buscada es

$$L = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 - V(t, \mathbf{r}) \equiv T - V(t, \mathbf{r}). \quad (3.22)$$

La función  $L$  recibe el nombre de **lagrangiano** del sistema. Hemos probado por tanto el llamado **principio de Hamilton** en su versión más sencilla:

La trayectoria seguida por una partícula de masa  $m$  sometida a la fuerza (3.20) al desplazarse de un punto  $\mathbf{r}_1$  en el instante  $t_1$  a otro punto  $\mathbf{r}_2$  en el instante  $t_2$  es un **extremal** del funcional

$$S[\mathbf{r}] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) dt \quad (3.23)$$

con las condiciones

$$\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}_2.$$

El funcional (3.23) recibe el nombre de **acción**. Nótese que la acción tiene dimensiones de energía  $\times$  tiempo o de longitud  $\times$  momento, ya que  $L$  (al igual que  $T$  o  $V$ ) tiene dimensiones de energía.

### 3.2.2 Principio de Hamilton para un sistema de partículas

El principio de Hamilton se extiende sin dificultad a un sistema de  $N$  partículas, siempre que la fuerza total  $\mathbf{F}_i$  que actúe sobre cada partícula sea irrotacional:

$$\mathbf{F}_i(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = -\frac{\partial V(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.24)$$

En otras palabras, es fácil comprobar que las ecuaciones de Newton del sistema:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\frac{\partial V(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad i = 1, \dots, N,$$

son las ecuaciones de Euler-Lagrange de la acción

$$S[\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t), \dot{\mathbf{r}}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{r}}_N(t)) dt, \quad (3.25)$$

siendo en este caso el lagrangiano

$$L(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) = T - V(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (3.26)$$

En efecto, agrupando las tres ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a la coordenada  $\mathbf{r}_i$  se obtiene

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i) + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i,$$

que es la ecuación del movimiento de la  $i$ -ésima partícula. Se verifica por tanto la siguiente versión más general del principio de Hamilton:

La trayectoria seguida por un sistema de  $N$  partículas sometidas a la fuerza irrotacional (3.24) es un *extremal* de la acción (3.25) con las condiciones

$$\mathbf{r}_1(t_1) = \mathbf{r}_{1,1}, \dots, \mathbf{r}_N(t_1) = \mathbf{r}_{N,1}, \quad \mathbf{r}_1(t_2) = \mathbf{r}_{1,2}, \dots, \mathbf{r}_N(t_2) = \mathbf{r}_{N,2}.$$

- El principio variacional de Hamilton se suele denominar también **principio de mínima acción**, ya que en la práctica totalidad de los casos de interés las trayectorias de un sistema mecánico resultan ser *mínimas* de la acción (al menos *localmente*). Con más propiedad, dicho principio recibe el nombre de **principio de acción estacionaria**, ya que como sabemos las ecuaciones de Euler-Lagrange solo garantizan el carácter estacionario de la acción.

- Del principio de Hamilton y de las leyes de conservación de las ecuaciones de Euler-Lagrange deducidas en la subsección anterior se deduce que si el lagrangiano (3.26) no depende explícitamente del tiempo se conserva la función

$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - L = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - L = 2T - (T - V) = T + V,$$

que no es otra cosa que la *energía* del sistema. Este resultado concuerda con el obtenido en la Sección 1.5.2, ya que  $L$  es independiente del tiempo si y solo si el potencial  $V$  no depende de  $t$ , en cuyo caso la fuerza (3.24) que actúa sobre el sistema es no solo irrotacional sino, de hecho, *conservativa*.

- Del mismo modo, si el lagrangiano  $L$  no depende (por ejemplo) de la coordenada  $x$  de la partícula  $i$ , es decir si  $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$ , entonces se conserva  $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$ :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \text{const.}$$

Nótese que este resultado no es más que la ley de conservación de la componente  $x$  del momento de la partícula  $i$ , ya que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i.$$

Esto concuerda con lo visto en la Sección 1.5.2, ya que

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = (\mathbf{F}_i)_x.$$

Evidentemente, el mismo resultado es válido para las coordenadas  $y_i$  o  $z_i$ .

### 3.2.3 Covariancia de la formulación lagrangiana

Una de las grandes ventajas de la formulación lagrangiana de la mecánica es su *covariancia bajo cambios de coordenadas*. Más concretamente, consideremos de nuevo el movimiento de una partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza irrotacional, cuyas trayectorias son los extremales de la acción (3.23). Sea  $(q_1, q_2, q_3) \equiv \mathbf{q}$  un sistema de *coordenadas curvilíneas*, y denotemos (con un ligero abuso de notación) por  $\mathbf{r}(\mathbf{q})$  la función que expresa las coordenadas cartesianas  $\mathbf{r}$  en términos de las curvilíneas  $\mathbf{q}$ . El lagrangiano  $L(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  se expresa a su vez en términos de  $\mathbf{q}$  y su derivada  $\dot{\mathbf{q}}$  utilizando la fórmula del cambio de coordenadas  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q})$  y su derivada respecto de  $t$

$$\dot{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \dot{q}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}},$$

obteniéndose así una función  $L_q(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  que verifica

$$L(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = L_q(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

La *acción* de una trayectoria cualquiera  $\mathbf{r}(t)$  de la partícula, que en las coordenadas  $q_i$  estará dada por una cierta función  $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t))$ , se puede por tanto calcular mediante la fórmula

$$S[\mathbf{r}] = \int_{t_1}^{t_2} L_q(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt,$$

que a partir de ahora escribiremos abreviadamente como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L_q(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt.$$

Por el principio de Hamilton, las ecuaciones del movimiento son equivalentes a la condición  $\delta S = 0$ . En otras palabras:

Las ecuaciones del movimiento en el sistema de coordenadas curvilíneas  $(q_1, q_2, q_3)$  son las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes al lagrangiano  $L_q$ , es decir

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_q}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L_q}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Normalmente el subíndice  $q$  se suele suprimir, y las ecuaciones anteriores se escriben simplemente

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.27)$$

**Ejemplo 3.7.** *Ecuaciones del movimiento en coordenadas esféricas.*

La energía cinética de una partícula de masa  $m$  en coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$  es

$$\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$$

(cf. la ec. (1.5)). Por tanto el lagrangiano en dichas coordenadas está dado por

$$L = T - V(t, r, \theta, \varphi) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - V(t, r, \theta, \varphi).$$



Las ecuaciones del movimiento de la partícula en coordenadas esféricas son por consiguiente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= m\ddot{r} - mr(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + \frac{\partial V}{\partial r} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= m \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) - mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= m \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Si el potencial  $V$  no depende de la coordenada azimutal  $\varphi$  entonces se conserva

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi},$$

que es la componente  $z$  del momento angular  $\mathbf{J}$ . En efecto<sup>3</sup>,

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= r\mathbf{e}_r \times m(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi) = mr^2\dot{\theta}\mathbf{e}_\varphi - mr^2\sin\theta\dot{\varphi}\mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{e}_z = \cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta \\ \Rightarrow J_z &= \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_z = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Si, además, el potencial tampoco depende de  $\theta$ , entonces la fuerza es *central* (aunque no necesariamente conservativa), y por lo tanto el movimiento tiene lugar en un plano que pasa por el origen. Para deducir este resultado a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.28), supongamos, por sencillez, que el momento angular de la partícula no es nulo, y tomemos el eje  $z$  perpendicular a los vectores  $\mathbf{r}(0)$  y  $\dot{\mathbf{r}}(0)$ . Entonces  $\theta(0) = \pi/2$ , y

$$z = r \cos \theta \Rightarrow \dot{z} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \Rightarrow \dot{z}(0) = 0 = -r(0)\dot{\theta}(0) \Rightarrow \dot{\theta}(0) = 0.$$

Por tanto

$$\theta(0) = \pi/2, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad (3.29)$$

lo que implica que  $\theta(t) = \pi/2$  para todo  $t$ , es decir que *el movimiento tiene lugar en el plano*  $\theta = \pi/2$ . En efecto, sustituyendo  $\theta = \pi/2$  en las ecuaciones del movimiento quedan sendas ecuaciones en  $r$  y  $\varphi$  únicamente:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V(t, r)}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\varphi}) = 0. \quad (3.30)$$

Por el teorema de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, la solución de las ecuaciones del movimiento que satisface las condiciones iniciales (3.29) junto con

$$r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = \dot{r}_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0 \quad (3.31)$$

es  $\theta = \pi/2$ , junto con la solución  $(r(t), \varphi(t))$  de (3.30)–(3.31). Nótese también que utilizando la conservación de la componente  $z$  del momento angular las ecuaciones (3.30) se reducen a<sup>4</sup>

$$mr^2\dot{\varphi} = \text{const.} \equiv J, \quad m\ddot{r} - \frac{J^2}{mr^3} + \frac{\partial V(t, r)}{\partial r} = 0.$$

Por último, si el potencial  $V$  no depende de  $t$ , es decir si  $V$  es función solo de  $(r, \theta, \varphi)$ , se conserva la función

$$H = \dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - L = 2T - (T - V) = T + V,$$

que no es otra cosa que la *energía* del sistema. ■

<sup>3</sup>En esta sección, para evitar la confusión con el lagrangiano  $L$  denotaremos por  $\mathbf{J}$  el momento angular

<sup>4</sup>Como en el capítulo anterior, hemos escogido el eje  $z$  en la dirección del vector  $\mathbf{J}$ , de modo que  $J_z = J$ .

*Ejercicio.* Comparar las ecuaciones (3.28) con la 2ª ley de Newton escrita en coordenadas esféricas (cf. las ecs. (1.6)).

*Solución.* Basta tener en cuenta que

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad \blacksquare$$

### 3.2.4 Lagrangiano de una partícula cargada en un campo electromagnético

Deduciremos a continuación la formulación lagrangiana de las ecuaciones del movimiento de una partícula de masa  $m$  y carga  $e$  en un campo electromagnético de potenciales  $\Phi(t, \mathbf{r})$  y  $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ . Como vimos en el Capítulo 1, las ecuaciones del movimiento son

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + e\dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A}).$$

Como<sup>5</sup>

$$-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) - \frac{d\mathbf{A}}{dt},$$

podemos reescribir las ecuaciones del movimiento en la forma

$$\frac{d}{dt} (m\dot{\mathbf{r}} + e\mathbf{A}) + e \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\Phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) = 0$$

Estas ecuaciones son las ecuaciones de Euler-Lagrange de un lagrangiano  $L(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  si

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} + e\mathbf{A}, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = e \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - \Phi).$$

Integrando la segunda ecuación obtenemos

$$L = e(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - \Phi) + g(t, \dot{\mathbf{r}}),$$

y sustituyendo en la primera queda

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2,$$

a menos de una función arbitraria de  $t$ . Hemos obtenido por tanto el siguiente resultado:

Las ecuaciones del movimiento de una partícula de masa  $m$  y carga  $e$  en un campo electromagnético de potenciales  $\Phi(t, \mathbf{r})$  y  $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$  son las ecuaciones de Euler-Lagrange del lagrangiano

$$L(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 - e\Phi(t, \mathbf{r}) + e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{r}). \quad (3.32)$$

<sup>5</sup>Por definición,  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$  es el *vector* definido por

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} \dot{x}_i = \left( \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{A},$$

donde el operador  $\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \equiv \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla$  está dado por

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \equiv \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Nótese que podemos escribir el lagrangiano anterior como

$$L = T - U,$$

donde el potencial  $U$  está dado por

$$U(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = e[\Phi(t, \mathbf{r}) - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{r})] \quad (3.33)$$

y por tanto *depende de la velocidad*. Si los campos son *estáticos*, es decir si

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0,$$

entonces  $L$  no depende de  $t$  y se conserva por tanto

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - L = m\dot{\mathbf{r}}^2 + e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - L = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 + e\Phi(\mathbf{r}),$$

que como sabemos no es otra cosa que la energía electromecánica de la partícula.

### 3.3 Sistemas con ligaduras

#### 3.3.1 Movimiento de una partícula sobre una superficie lisa

El caso más sencillo de sistema mecánico con ligaduras es el de una partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza externa irrotacional con potencial  $V(t, \mathbf{r})$  cuyas coordenadas  $\mathbf{r}$  satisfacen en cada instante la **ligadura** (restricción)

$$\boxed{\phi(t, \mathbf{r}) = 0.} \quad (3.34)$$

En particular, si  $\phi$  no depende de  $t$  entonces la partícula está obligada a moverse en la *superficie* de ecuación  $\phi(\mathbf{r}) = 0$ . (En general, (3.34) es la ecuación de una superficie móvil.) A pesar de que la fuerza externa es irrotacional, es preciso tener en cuenta la **fuerza de reacción** (o de **ligadura**)  $\mathbf{F}^{(c)}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  que ejerce sobre la partícula la superficie de ligadura (3.34) en cada instante, por lo que las ecuaciones de Newton son en este caso

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\partial V(t, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{F}^{(c)}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}).} \quad (3.35)$$

¿Son estas ecuaciones del movimiento las ecuaciones de Euler-Lagrange de algún funcional acción?

Para responder a esta pregunta, introduzcamos dos *coordenadas independientes*  $(q_1, q_2) = \mathbf{q}$  que parametricen la superficie (3.34). Por ejemplo, si

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \mathbf{r}^2 - a(t)^2, \quad (3.36)$$

que es la ecuación de una esfera de centro el origen y radio variable  $a(t) \geq 0$ , podemos utilizar las coordenadas esféricas  $q_1 = \theta$ ,  $q_2 = \varphi$ . De esta forma se puede especificar la posición de la partícula en cada instante  $t$  mediante el valor  $\mathbf{q}(t)$  que toman las **coordenadas generalizadas**  $q_i$  en dicho instante. Indicaremos (con un ligero abuso de notación) la relación entre las coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$  y las coordenadas cartesianas  $\mathbf{r}$  en la forma general

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t, \mathbf{q}); \quad (3.37)$$

por ejemplo, en el caso de la ligadura (3.36) la función  $\mathbf{r}(t, \mathbf{q}) \equiv \mathbf{r}(t, \theta, \varphi)$  está dada por

$$\mathbf{r}(t, \theta, \varphi) = a(t)(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).$$

Es importante notar que, mientras que las tres coordenadas cartesianas  $x_i$  *no* son independientes, puesto que están ligadas por la relación (3.34), las dos coordenadas generalizadas  $q_i$  sí lo son (es decir, pueden tomar valores *arbitrarios* en un cierto abierto). Por este motivo, es fácil convencerse de que solo dos de las tres ecuaciones (escalares) (3.35) pueden ser de hecho independientes.

Vamos a suponer que la superficie de ligadura (3.34) es *lisa*, es decir que no hay *fricción*. En tal caso la fuerza de ligadura en cada instante  $t$  es perpendicular a la correspondiente superficie instantánea de ligadura  $\phi(t, \mathbf{r}) = 0$ . Cuando esto ocurre diremos que las ligaduras son **ideales**. Para formular analíticamente esta condición, nótese que los dos vectores

$$\frac{\partial \mathbf{r}(t, \mathbf{q})}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \quad (3.38)$$

son *tangentes a la superficie de ligadura* en el punto de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$  en cada instante  $t$ , y de hecho forman una *base* de dicho plano tangente. Por tanto *la ligadura es ideal si la fuerza de ligadura verifica la condición*

$$\mathbf{F}^{(c)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (3.39)$$

en cada punto. Proyectando la ecuación del movimiento (3.35) sobre el plano tangente a la superficie de ligadura (es decir, multiplicando dicha ecuación escalarmente por cada uno de los vectores (3.38)) se obtienen entonces las dos ecuaciones *independientes*

$$m\ddot{\mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

o equivalentemente

$$m\ddot{\mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.40)$$

Derivando la relación (3.37) respecto de  $t$ ,  $q_i$  y  $\dot{q}_i$  se obtienen las identidades<sup>6</sup>

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \Rightarrow \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial q_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \quad (3.41)$$

y por tanto

$$\ddot{\mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) - \dot{\mathbf{r}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{\mathbf{r}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 \right). \quad (3.42)$$

Por consiguiente las ecuaciones (3.40) se pueden escribir en la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} (T - V) = 0, \quad i = 1, 2,$$

o bien, teniendo en cuenta que  $V$  no depende de  $\dot{\mathbf{q}}$ ,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (T - V) - \frac{\partial}{\partial q_i} (T - V) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.43)$$

Estas son las dos ecuaciones de Euler-Lagrange del lagrangiano  $L = T - V$ , donde *se sobreentiende que la energía cinética  $T$  y la potencial  $V$  han de expresarse en función de  $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  utilizando la relación (3.37) y su derivada respecto de  $t$  (cf. la ec. (3.41))*. El cálculo anterior demuestra por tanto el siguiente resultado fundamental:

<sup>6</sup>Utilizamos de nuevo la notación

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \equiv \sum_{j=1,2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \equiv \sum_{j=1,2} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j.$$

La trayectoria  $\mathbf{q}(t)$  seguida por la partícula entre dos puntos de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}_1$  (en el instante  $t_1$ ) y  $\mathbf{q}_2$  (en el instante  $t_2$ ) sujeta a la ligadura (3.34) es un *extremal* de la acción

$$S[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt$$

sujeta a las condiciones de contorno  $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{q}(t_2) = \mathbf{q}_2$ , donde el lagrangiano  $L$  es igual a  $T - V$  expresado en términos de las variables independientes  $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ .

En otras palabras:

El principio de Hamilton sigue siendo válido en este caso si la ligadura es *ideal* —i.e., si la fuerza de ligadura  $\mathbf{F}^{(c)}$  satisface la condición (3.39)— y el lagrangiano  $L$  es igual a  $T - V$  expresado en función de las coordenadas generalizadas  $q_i$  y sus derivadas temporales  $\dot{q}_i$ .

• Un **desplazamiento virtual** es una curva  $\mathbf{r}(u)$  (con  $u \in [u_1, u_2]$ ) enteramente contenida en la superficie *instantánea* de ligadura  $\phi(t, \mathbf{r}) = 0$  en un cierto instante *fijo*  $t$ , es decir tal que

$$\phi(t, \mathbf{r}(u)) = 0, \quad \forall u \in [u_1, u_2].$$

En otras palabras, un desplazamiento virtual es una sucesión de *posibles* posiciones de la partícula en un *mismo* instante  $t$ . Nótese que si la ligadura depende explícitamente del tiempo las trayectorias de la partícula *no* son desplazamientos virtuales, ya que para  $t' \neq t$  el vector  $\mathbf{r}(t')$  pertenece a la superficie  $\phi(t', \mathbf{r}) = 0$ , distinta de  $\phi(t, \mathbf{r}) = 0$ . Por otra parte, como el desplazamiento virtual  $\mathbf{r}(u)$  está contenido en la superficie instantánea de ligadura  $\phi(t, \mathbf{r}) = 0$  para todo  $u \in [u_1, u_2]$  su vector tangente  $\mathbf{r}'(u)$  es *tangente* a dicha superficie en el punto  $\mathbf{r}(u)$ . Por tanto la condición de ligadura ideal implica en este caso que

$$\mathbf{F}^{(c)}(t, \mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) = 0, \quad \forall u \in [u_1, u_2] \quad (3.44)$$

donde la prima indica derivada respecto de  $u$  y hemos supuesto por sencillez que la fuerza de ligadura no depende de la velocidad. En consecuencia *el trabajo  $W_{12}$  realizado por la fuerza de ligadura a lo largo del desplazamiento virtual  $\mathbf{r}(u)$  es nulo:*

$$W_{12} \equiv \int_{u_1}^{u_2} \mathbf{F}^{(c)}(t, \mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) du = 0. \quad (3.45)$$

Recíprocamente, si la fuerza de ligadura cumple esta última condición para *todo* desplazamiento virtual  $\mathbf{r}(u)$  entonces se verifica la ec. (3.44), lo que implica que la fuerza de ligadura es perpendicular a la superficie  $\phi(t, \mathbf{r}) = 0$  en cada punto (ya que cualquier vector tangente a dicha superficie puede obtenerse como el vector tangente de una curva contenida en ella). En resumen, hemos demostrado el siguiente resultado, conocido como el **principio de los trabajos virtuales**:

La ligadura es ideal —y, por tanto, se verifica el *principio de Hamilton*— si y solo si la fuerza de ligadura no realiza trabajo a lo largo de *cualquier* desplazamiento virtual de la partícula.

Si la condición de ligadura (3.34) es *independiente de  $t$*  —que es el caso más común en la práctica—, entonces las trayectorias son desplazamientos virtuales, y el principio de los trabajos virtuales afirma simplemente que *la ligadura es ideal si y solo si la fuerza de ligadura no realiza trabajo a lo largo de cualquier trayectoria de la partícula.*

### 3.3.2 Sistema de $N$ partículas con ligaduras

Consideremos a continuación el caso más general de un sistema de  $N$  partículas sobre las que actúan las fuerzas irrotacionales (3.24), sujetas además a las  $l < 3N$  ligaduras independientes<sup>7</sup>

$$\boxed{\phi_i(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = 0, \quad i = 1, \dots, l.} \quad (3.46)$$

Este tipo de ligaduras, en las que no intervienen las *velocidades* de las partículas, se denominan *holónomas*. El vector

$$\mathbf{x} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$$

que representa el estado del sistema ha de moverse por tanto en cada instante  $t$  sobre la superficie de  $\mathbb{R}^{3N}$ —*variedad*, en lenguaje más matemático— especificada por las ecuaciones (3.46). Como dicha variedad tiene dimensión  $3N - l \equiv n$ , se pueden introducir en ella  $n$  coordenadas independientes  $(q_1, \dots, q_n) \equiv \mathbf{q}$ , en términos de las cuales las coordenadas cartesianas  $\mathbf{x}$  se expresarán mediante una cierta función  $\mathbf{x}(t, \mathbf{q})$ :

$$\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(t, \mathbf{q}).$$

En otras palabras, *el estado del sistema en cada instante está unívocamente determinado por el valor de las  $n$  coordenadas  $q_i$  en dicho instante, que reciben el nombre de **coordenadas generalizadas***. Se dice entonces que el sistema posee  $n$  **grados de libertad**. En particular, la trayectoria del sistema queda especificada por una curva  $\mathbf{q}(t)$  en el espacio  $\mathbb{R}^n$  en que varían las coordenadas generalizadas  $q_i$ , llamado **espacio de configuración** del sistema. Es importante notar que, mientras que las coordenadas *cartesianas*  $\mathbf{x}$  de las partículas no son independientes (ya que están ligadas por las relaciones (3.46)), las coordenadas *generalizadas*  $\mathbf{q}$  sí lo son.

De nuevo, *supondremos que las ligaduras son **ideales***, es decir que la fuerza de ligadura que actúa sobre el vector  $\mathbf{x}$  que representa la posición del sistema en el espacio de configuración  $\mathbb{R}^{3N}$ ,

$$\mathbf{F}^{(c)}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \equiv (\mathbf{F}_1^{(c)}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \dots, \mathbf{F}_N^{(c)}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})) \in \mathbb{R}^{3N},$$

es *ortogonal a la variedad de ligadura en cada instante*. Matemáticamente, al ser los  $n$  vectores

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t, \mathbf{q})}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

una base del espacio tangente a la variedad de ligadura en cada punto, la condición anterior se expresa mediante las relaciones

$$\boxed{\mathbf{F}^{(c)} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \equiv \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^{(c)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.} \quad (3.47)$$

Como en el caso de una partícula tratado en la subsección anterior, es fácil ver que la condición anterior es equivalente al **principio de los trabajos virtuales**, según el cual *las fuerzas de ligadura no realizan trabajo a lo largo de cualquier desplazamiento virtual del sistema*, que por definición es una curva  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u)$  (con  $u \in [u_1, u_2]$ ) enteramente contenida en una superficie instantánea de ligadura  $\phi_i(t, \mathbf{x}) = 0$  ( $i = 1, \dots, l$ ) en un instante *fijo*  $t$ . En efecto, el principio de los trabajos virtuales es equivalente a exigir que

$$\mathbf{F}^{(c)} \cdot \mathbf{x}'(u) \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(c)} \cdot \mathbf{r}'_i(u) = 0$$

<sup>7</sup>Matemáticamente, la independencia de las ligaduras (3.46) es equivalente a la condición de que el rango de la matriz jacobiana de la función  $\boldsymbol{\phi} \equiv (\phi_1, \dots, \phi_l)$  respecto de las  $3N$  variables  $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  tenga rango máximo (igual a  $l$ ) en todo punto.

para todo vector tangente a la variedad instantánea de ligadura  $\mathbf{x}'(u)$ .

En estas condiciones —es decir, si las ligaduras son *ideales* y las restantes fuerzas que actúan sobre el sistema son *irrotacionales*—, procediendo como en la subsección anterior se puede demostrar que *sigue siendo válido el principio de Hamilton*:

La trayectoria  $\mathbf{q}(t)$  de un sistema de partículas sujeto a fuerzas irrotacionales y ligaduras holónomas *ideales* entre dos estados  $\mathbf{q}_1$  (en  $t = t_1$ ) y  $\mathbf{q}_2$  (en  $t = t_2$ ) es un *extremal* de la acción

$$S[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt$$

con las condiciones de contorno  $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{q}(t_2) = \mathbf{q}_2$ , donde el lagrangiano  $L$  es igual a  $T - V$  expresado en términos de las coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$  y sus derivadas temporales  $\dot{\mathbf{q}}$ .

*Ejercicio.* Demostrar en detalle el resultado anterior.

*Demostración.* Las ecuaciones del movimiento del sistema se pueden escribir en forma vectorial como sigue:

$$(m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1, \dots, m_N \ddot{\mathbf{r}}_N) + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{F}^{(c)}.$$

Proyectando en la dirección del vector  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}$  y teniendo en cuenta (3.47) se obtiene

$$(m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1, \dots, m_N \ddot{\mathbf{r}}_N) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^N m_j \ddot{\mathbf{r}}_j \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

De las ecuaciones (3.42) (con  $\mathbf{r}_j$  en lugar de  $\mathbf{r}$ ) se sigue entonces que

$$\sum_{j=1}^N m_j \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_j^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_j^2 \right) \right] + \frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} (T - V) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Como  $V$  no depende de  $\dot{\mathbf{q}}$ , las ecuaciones anteriores se pueden escribir en la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

que son las ecuaciones de Euler-Lagrange del lagrangiano  $L = T - V$ . ■

Por lo que acabamos de ver, para hallar las ecuaciones del movimiento de un sistema mecánico de  $N$  partículas sujeto a  $l$  ligaduras holónomas ideales, siendo las fuerzas restantes irrotacionales, basta proceder de la forma siguiente:

1. Introducir  $n = 3N - l$  coordenadas generalizadas independientes  $(q_1, \dots, q_n) \equiv \mathbf{q}$  en la variedad de las ligaduras (3.46).

2. Expresar la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$$

y la potencial  $V$  en términos de  $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , obteniendo así dos funciones  $T(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y  $V(t, \mathbf{q})$ .

3. Las ecuaciones del movimiento del sistema en las coordenadas generalizadas  $q_i$  son las ecuaciones de Euler-Lagrange del lagrangiano

$$L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(t, \mathbf{q}),$$

es decir

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.48)$$

*Notación.* En mecánica clásica, las ecuaciones (3.48) se suelen llamar las **ecuaciones de Lagrange** del lagrangiano  $L$ .

• Una de las ventajas de la formulación lagrangiana en sistemas con ligaduras es que, como acabamos de ver, *no es necesario conocer las fuerzas de ligadura para hallar las ecuaciones del movimiento*. De hecho, *una vez halladas estas ecuaciones* las fuerzas de ligadura pueden calcularse mediante la fórmula

$$\mathbf{F}_i^{(c)} = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (3.49)$$

que no es otra cosa que la segunda ley de Newton aplicada a la partícula  $i$ .

**Ejemplo 3.8.** *Péndulo esférico.* Consideremos un péndulo esférico, es decir una partícula de masa  $m$  que pende de un cable rígido y sin masa de longitud  $l$  cuyo otro extremo está fijo, sometida únicamente al campo gravitatorio terrestre  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_3$ . En este caso hay una única ligadura (independiente del tiempo)

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \mathbf{r}^2 - l^2 = 0, \quad (3.50)$$

(si situamos el origen en el punto de anclaje del péndulo), y hay por tanto  $3N - 1 = 2$  grados de libertad. Tomaremos como coordenadas generalizadas los ángulos polar  $\theta \in [0, \pi]$  y azimutal  $\varphi \in [0, 2\pi)$  de las coordenadas esféricas, en términos de los cuales

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = l (\sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3).$$

La fuerza de ligadura  $\mathbf{F}^{(c)}$  (en este caso, la tensión del cable) está dirigida hacia el origen, y es por tanto perpendicular a superficie de ligadura (3.50). Por consiguiente la ligadura es ideal, y podemos aplicar el formalismo lagrangiano. El potencial de la fuerza externa  $-mg\mathbf{e}_3$  es simplemente

$$V = mgz = mgl \cos \theta,$$

y la energía cinética está dada por

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2).$$

Por tanto

$$L = ml^2 \left[ \frac{1}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - k \cos \theta \right], \quad k \equiv \frac{g}{l},$$

y las ecuaciones de Lagrange se escriben

$$\ddot{\theta} = \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + k \sin \theta, \quad \frac{d}{dt} (\sin^2 \theta \dot{\varphi}) = 0.$$

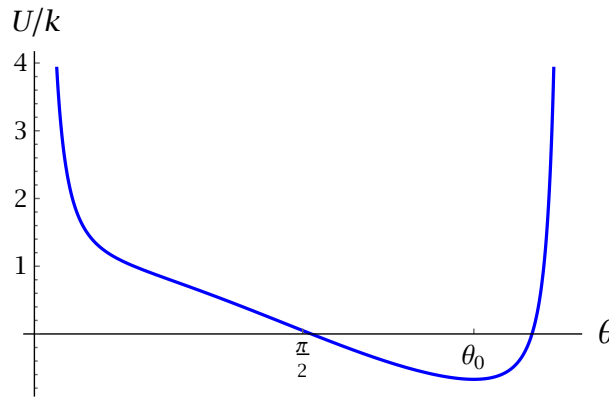
De la segunda ecuación se obtiene

$$\sin^2 \theta \dot{\varphi} = \frac{J_z}{ml^2} \equiv c = \text{const.},$$

siendo  $\mathbf{J}$  el momento angular de la partícula. Esto era de esperar, ya que

$$\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{N} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F} + \mathbf{F}^{(c)}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = -mg\mathbf{r} \times \mathbf{e}_z \Rightarrow \dot{J}_z = 0.$$



Figura 3.1. Potencial efectivo  $U(\theta)$  para  $k = 10c^2$ .

Sustituyendo en la primera ecuación se obtiene la siguiente ecuación diferencial de segundo orden para  $\theta$ :

$$\ddot{\theta} = c^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} + k \sin \theta. \quad (3.51)$$

Si  $c = 0$  (es decir,  $J_z = 0$ ) entonces la partícula se mueve en un meridiano  $\varphi = \text{const.}$  (ya que  $\dot{\varphi} = 0$ ) y la ec. (3.51) se convierte en la ecuación del péndulo simple  $\ddot{\alpha} + k \sin \alpha = 0$ , siendo  $\alpha = \pi - \theta$ . Veamos a continuación qué ocurre si  $c \neq 0$ .

La ec. (3.51) es formalmente la ecuación del movimiento en una dimensión de una partícula de masa unidad sometida al potencial efectivo

$$U(\theta) = - \int \left( c^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} + k \sin \theta \right) d\theta = k \cos \theta + \frac{c^2}{2 \sin^2 \theta}$$

representado en la Fig. 3.1. De hecho, como  $L$  no depende del tiempo se conserva

$$\dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = T + V = ml^2 \left[ \frac{1}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + k \cos \theta \right],$$

es decir la energía de la partícula, que utilizando la conservación de  $J_z$  se puede expresar en la forma

$$ml^2 \left( \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + U(\theta) \right) = E.$$

El movimiento de la coordenada  $\theta$  se obtiene fácilmente integrando la ecuación anterior:

$$t = \pm \int \frac{d\theta}{\sqrt{2 \left( \frac{E}{ml^2} - U(\theta) \right)}},$$

mientras que el de la coordenada  $\varphi$  se sigue de la ley de conservación de  $J_z$ :

$$\varphi = c \int \frac{dt}{\sin^2 \theta(t)}.$$

Por último, la ecuación de la trayectoria ( $\theta$  en función de  $\varphi$ , o viceversa) se obtiene combinando las ecuaciones anteriores:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{c}{\sin^2 \theta} \frac{d\theta}{d\varphi} = \pm \sqrt{2 \left( \frac{E}{ml^2} - U(\theta) \right)} \Rightarrow \varphi = \pm c \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{2 \left( \frac{E}{ml^2} - U(\theta) \right)}}.$$

De la forma del potencial efectivo  $U(\theta)$  se sigue que el movimiento de la coordenada  $\theta$  es siempre *periódico*. En efecto, el período de este movimiento está dado por

$$\tau = 2 \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{2 \left( \frac{E}{ml^2} - U(\theta) \right)}},$$

donde  $\theta_{\min} < \theta_{\max}$  son las dos raíces de la ecuación  $E/(ml^2) - U(\theta) = 0$  en el intervalo  $(0, \pi)$ . El movimiento del péndulo, sin embargo, *no* es en general periódico, ya que cuando la coordenada  $\theta$  vuelve a su valor inicial tras un período el ángulo  $\varphi$  no necesariamente aumenta en un múltiplo de  $2\pi$ . Más concretamente, de la ecuación de la trayectoria se sigue que en un período de  $\theta$  el ángulo  $\varphi$  avanza en

$$\Delta\varphi = 2c \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{2 \left( \frac{E}{ml^2} - U(\theta) \right)}} = \sqrt{2} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{\frac{E}{mlc^2} - \frac{k}{c^2} \cos \theta - \frac{1}{2 \sin^2 \theta}}}.$$

Por tanto *el movimiento es periódico si  $\Delta\varphi$  es un múltiplo racional de  $2\pi$* .

La ec. (3.51) posee una *solución constante*  $\theta = \theta_0$ , con

$$c^2 \cos \theta_0 + k \sin^4 \theta_0 = 0,$$

correspondiente a una rotación alrededor del eje  $z$  con velocidad angular constante  $\dot{\varphi} = c / \sin^2 \theta_0$ . Nótese que  $\theta_0 > \pi/2$ , al ser el miembro izquierdo de la ecuación anterior positivo para  $\theta \in [0, \pi/2]$ . Es fácil probar que esta ecuación tiene una solución única en el intervalo  $(\pi/2, \pi)$ . En efecto, si  $\lambda > 0$  la función  $f(\theta) = \lambda \cos \theta + \sin^4 \theta$  es monótona decreciente en el intervalo  $[\pi/2, \pi]$ , al ser  $f'(\theta) = -\lambda \sin \theta + 4 \sin^3 \theta \cos \theta \leq 0$  en dicho intervalo, y cumple  $f(\pi/2) = 1 > 0$ ,  $f(\pi) = -\lambda < 0$ . La frecuencia  $\omega$  de las pequeñas oscilaciones del ángulo  $\theta$  alrededor de la solución  $\theta = \theta_0$  está dado por

$$\begin{aligned} \omega^2 = U''(\theta_0) &= -k \cos \theta_0 + \frac{c^2}{\sin^2 \theta_0} + 3c^2 \frac{\cos^2 \theta_0}{\sin^4 \theta_0} = -k \cos \theta_0 - k \frac{1 - \cos^2 \theta_0 + 3 \cos^2 \theta_0}{\cos \theta_0} \\ &= k \frac{1 + 3 \cos^2 \theta_0}{|\cos \theta_0|}, \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que  $c^2 / \sin^4 \theta_0 = -k / \cos \theta_0$ .

Por último, la fuerza de ligadura se calcula fácilmente utilizando la ec. (3.49) y teniendo en cuenta que en este caso  $\mathbf{F}^{(c)}$  está dirigida en la dirección de  $\mathbf{e}_r$  (perpendicular a la superficie de ligadura). Por tanto  $\mathbf{F}^{(c)} = R \mathbf{e}_r$ , siendo

$$R = m \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_r - m \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_r = m a_r + m g \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_r = m g \cos \theta - m l (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2),$$

donde hemos aplicado la ec. (1.6) con  $\dot{r} = 0$  y  $r = l$ . Utilizando la ley de conservación de la energía se obtiene finalmente

$$R = 3mg \cos \theta - \frac{2E}{l}. \quad \blacksquare$$

### 3.4 Leyes de conservación

Consideremos a continuación un sistema mecánico de lagrangiano  $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , siendo  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$   $n$  coordenadas generalizadas. Llamaremos **momento canónico conjugado** de la coordenada  $q_i$  a la derivada parcial de  $L$  respecto de la correspondiente **velocidad generalizada**  $\dot{q}_i$ :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (3.52)$$

La ecuación de Lagrange de la coordenada  $q_i$  es entonces

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (3.53)$$

Diremos que la coordenada  $q_i$  es **cíclica** (o **ignorable**) si  $L$  no depende de dicha coordenada, es decir si

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

De la ec. (3.53) se sigue entonces la siguiente ley de conservación: *si la coordenada  $q_i$  es cíclica, se conserva el momento canónico conjugado correspondiente a dicha coordenada.*

Por otra parte, si  $L$  no depende de  $t$  hemos visto en la Sección 3.1.2 que se conserva la función

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \equiv H. \quad (3.54)$$

La función  $H$  recibe el nombre de **hamiltoniano** del sistema. En muchos sistemas mecánicos la energía cinética es una *forma cuadrática* en las velocidades generalizadas, es decir es de la forma

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, \mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad \text{con } a_{ij} = a_{ji},$$

y  $L = T - V(t, \mathbf{q})$ . Un sistema mecánico de este tipo se denomina **natural**. La mayor parte de los sistemas vistos hasta ahora —con la importante excepción del lagrangiano de una partícula cargada en un campo electromagnético (3.32)— son naturales. En un sistema mecánico natural, los momentos generalizados están dados por

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t, \mathbf{q}) \dot{q}_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

y el hamiltoniano del sistema es simplemente

$$H = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, \mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j - L = 2T - (T - V) = T + V.$$

Por tanto *en un sistema mecánico natural, el hamiltoniano es igual a la energía del sistema.* En particular, en este tipo de sistemas la conservación de  $H$  —que ocurrirá si los coeficientes  $a_{ij}$  y  $V$  son independientes de  $t$ — no es otra cosa que la ley de conservación de la energía.

**Ejemplo 3.9.** Consideremos, en primer lugar, el lagrangiano de una partícula de masa  $m$  en coordenadas cartesianas  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ , dado por

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - V(t, \mathbf{r}).$$

En este caso

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i,$$

y por tanto el momento canónico conjugado de la coordenada  $x_i$  es la componente  $i$  del momento lineal.

Consideremos a continuación el lagrangiano de una partícula de masa  $m$  en coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$ , dado por

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - V(t, r, \theta, \varphi), \quad (3.55)$$

para el cual

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\varphi = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}. \quad (3.56)$$

En este caso la energía cinética (el término entre paréntesis) depende de  $r$  y de  $\theta$ , por lo que  $p_r$  y  $p_\theta$  *no* se conservan aunque  $V$  sea independiente de  $r$  o  $\theta$ . Sin embargo, si  $V$  no depende de  $\varphi$  entonces  $L$  es independiente de dicha coordenada, y por tanto en este caso se conserva  $p_\varphi$ :

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\varphi = \text{const.}$$

Como sabemos,  $p_\varphi$  es la componente  $z$  del momento angular de la partícula. Por otra parte, al ser la energía cinética cuadrática en las velocidades generalizadas el hamiltoniano del sistema coincide con la energía  $T + V$ , como vimos en el Ejemplo 3.7. Por tanto, si  $L$  no depende de  $t$  —o, lo que es lo mismo, si el potencial  $V$  es independiente del tiempo—, se conserva la energía.

Consideremos, por último, el lagrangiano (3.32) de una partícula de masa  $m$  y carga  $e$  que se mueve en el seno de un campo electromagnético de potenciales  $\Phi(t, \mathbf{r})$  y  $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ . El momento canónico conjugado correspondiente a la coordenada  $x_i$  es ahora

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + eA_i(t, \mathbf{r}).$$

Nótese, por tanto, que en este caso *el momento canónico y el lineal son en general distintos*. En particular, si  $L$  no depende de la coordenada  $x_i$ , es decir si

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} = 0,$$

se conserva  $p_i$  pero no necesariamente  $m\dot{x}_i$ . El hamiltoniano del sistema está dado por

$$H = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{x}_i - L = (m\dot{\mathbf{r}} + e\mathbf{A}) \cdot \dot{\mathbf{r}} - L = m\dot{\mathbf{r}}^2 + e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - L = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 + e\Phi.$$

Por tanto en este caso  $H$  es la suma de la energía cinética y la electrostática de la partícula. Si  $L$  no depende de  $t$ , es decir si

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0,$$

entonces se conserva  $H$ . Aunque el sistema *no* es natural, podemos interpretar también en este caso  $H$  como la energía total. En efecto, si  $\Phi$  y  $\mathbf{A}$  no dependen de  $t$  la fuerza eléctrica es *conservativa* con potencial  $e\Phi(\mathbf{r})$ , y por tanto  $H$  es la suma de la energía cinética y la energía potencial de la fuerza eléctrica. Pero esta es la energía total de la partícula, ya que la fuerza magnética no realiza trabajo al ser siempre perpendicular a la velocidad de la partícula. ■

Las leyes de conservación que hemos estudiado en esta sección son todas ellas un caso particular de un resultado general conocido como **teorema de Nöther**:

Supongamos que la *acción* de un sistema mecánico con lagrangiano  $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es *invariante* bajo la familia a un parámetro de transformaciones

$$\tilde{t} = t + \varepsilon \delta t(t, \mathbf{q}) + O(\varepsilon^2), \quad \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \varepsilon \delta \mathbf{q}(t, \mathbf{q}) + O(\varepsilon^2),$$

es decir que

$$L\left(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{d\tilde{t}}\right) d\tilde{t} = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt.$$

Entonces se conserva la función

$$I(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{p} \delta \mathbf{q} - H \delta t,$$

donde  $\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ .

*Demostración.* Escribiendo la condición de invariancia de la acción en la forma equivalente

$$L\left(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{d\tilde{t}}\right) \frac{d\tilde{t}}{dt} = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),$$

derivando respecto de  $\varepsilon$  y haciendo  $\varepsilon = 0$  se obtiene

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} L\left(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{d\tilde{t}}\right) + L \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \frac{d\tilde{t}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{d\tilde{t}} + L \frac{d}{dt} \delta t = 0, \quad (3.57)$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$\frac{d\tilde{t}}{dt} = 1 + \varepsilon \frac{d}{dt} \delta t + O(\varepsilon^2) \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{d\tilde{t}}{dt} \right|_{\varepsilon=0} = 1, \quad \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \frac{d\tilde{t}}{dt} = \frac{d}{dt} \delta t.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{d\tilde{t}} &= \left(\frac{d\tilde{t}}{dt}\right)^{-1} \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} = \left(\frac{d\tilde{t}}{dt}\right)^{-1} \left(\dot{\mathbf{q}} + \varepsilon \frac{d}{dt} \delta \mathbf{q} + O(\varepsilon^2)\right) \\ &\Rightarrow \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{d\tilde{t}} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{q} - \dot{\mathbf{q}} \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \frac{d\tilde{t}}{dt} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{q} - \dot{\mathbf{q}} \frac{d}{dt} \delta t. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ec. (3.57) y utilizando las ecuaciones de Lagrange se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \dot{\mathbf{p}} \delta \mathbf{q} + \mathbf{p} \frac{d}{dt} \delta \mathbf{q} - \mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} \frac{d}{dt} \delta t + L \frac{d}{dt} \delta t = \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{d}{dt} (\mathbf{p} \delta \mathbf{q}) - H \frac{d}{dt} \delta t \\ &= \frac{d}{dt} (\mathbf{p} \delta \mathbf{q} - H \delta t) + \left(\frac{dH}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}\right) \delta t. \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que el último término es nulo en virtud de las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{dH}{dt} = \dot{\mathbf{p}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{p} \ddot{\mathbf{q}} - \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{p} \ddot{\mathbf{q}} = \left(\dot{\mathbf{p}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 3.10.** Consideremos un sistema de  $N$  partículas sometidas a una fuerza irrotacional generada por un potencial  $V(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  invariante bajo rotaciones alrededor de un eje  $\mathbf{n}$ . Si tomamos el eje  $z$  en la dirección del vector  $\mathbf{n}$ , el potencial  $V$  verifica

$$V(t, \tilde{\mathbf{r}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{r}}_N) = V(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N),$$

siendo

$$\tilde{\mathbf{r}}_i = R(\varepsilon) \mathbf{r}_i, \quad R(\varepsilon) \equiv \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon & 0 \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces el lagrangiano  $L = T - V$  del sistema es invariante bajo la transformación

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{\mathbf{r}}_i = R(\varepsilon) \mathbf{r}_i; \quad 1 \leq i \leq N, \quad (3.58)$$

ya que la energía cinética es obviamente invariante bajo cualquier rotación. Como  $\tilde{t} = t$ , también la acción es invariante bajo la transformación (3.58) ¿Cuál es la cantidad conservada asociada a esta invariancia de la acción? Para responder a esta pregunta, desarrollamos (3.58) respecto de  $\varepsilon$  obteniendo

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i + \varepsilon A \mathbf{r}_i + O(\varepsilon^2); \quad 1 \leq i \leq N, \quad (3.59)$$

donde

$$A = R'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como

$$\mathbf{A}\mathbf{r}_i = (-y_i, x_i, 0) \equiv \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}_i \equiv \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i,$$

podemos reescribir las ecuaciones (3.59) en forma vectorial como sigue:

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i + \varepsilon \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i + O(\varepsilon^2); \quad 1 \leq i \leq N.$$

Luego en este caso

$$\delta t = 0, \quad \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i, \quad 1 \leq i \leq N,$$

y la cantidad conservada asociada a la invariancia de la acción bajo rotaciones alrededor del eje  $\mathbf{n}$  es por tanto

$$I = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \delta \mathbf{r}_i - 0 \cdot H = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i) = \mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \equiv \boxed{\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}},$$

siendo  $\mathbf{J}$  el momento angular total del sistema. ■

*Ejercicio.* Calcular la cantidad conservada  $I(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  asociada a la invariancia de la acción bajo las dilataciones espacio-temporales

$$\tilde{t} = \lambda^\alpha t, \quad \tilde{\mathbf{q}} = \lambda \mathbf{q} \quad (\lambda > 0, \alpha \in \mathbb{R}). \quad (3.60)$$

*Solución.* Como en la formulación del teorema de Nöther el parámetro  $\varepsilon = 0$  corresponde a la transformación identidad, hacemos  $\lambda = e^\varepsilon$  en las ecuaciones (3.60). Desarrollando a primer orden en  $\varepsilon$  se obtiene entonces

$$\tilde{t} = e^{\alpha\varepsilon} t = t + \varepsilon \alpha t + O(\varepsilon^2), \quad \tilde{\mathbf{q}} = e^\varepsilon \mathbf{q} = \mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{q} + O(\varepsilon)^2.$$

Por tanto

$$\delta t = \alpha t, \quad \delta \mathbf{q} = \mathbf{q},$$

y la cantidad conservada asociada a la invariancia de la acción bajo las transformaciones (3.60) está dada por

$$I(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \alpha t H.$$

Nótese que la acción es invariante bajo las dilataciones (3.60) si el lagrangiano  $L$  verifica la condición

$$L\left(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{d\tilde{t}}\right) d\tilde{t} = L(\lambda^\alpha t, \lambda \mathbf{q}, \lambda^{1-\alpha} \dot{\mathbf{q}}) \lambda^\alpha dt = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt,$$

es decir si se transforma bajo dilataciones como

$$L(\lambda^\alpha t, \lambda \mathbf{q}, \lambda^{1-\alpha} \dot{\mathbf{q}}) = \lambda^{-\alpha} L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

Supongamos, por ejemplo, que el sistema es *natural*. En tal caso la condición anterior se escribe

$$\frac{1}{2} \lambda^{2-2\alpha} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\lambda^\alpha t, \lambda \mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(\lambda^\alpha t, \lambda \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \lambda^{-\alpha} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, \mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j - \lambda^{-\alpha} V(t, \mathbf{q}).$$

Igualando el coeficiente de  $\dot{q}_i \dot{q}_j$  en ambos miembros se obtiene

$$\lambda^{2-2\alpha} a_{ij}(\lambda^\alpha t, \lambda \mathbf{q}) = \lambda^{-\alpha} a_{ij}(t, \mathbf{q}) \iff a_{ij}(\lambda^\alpha t, \lambda \mathbf{q}) = \lambda^{\alpha-2} a_{ij}(t, \mathbf{q}),$$

y por tanto

$$V(\lambda^\alpha t, \lambda \mathbf{q}) = \lambda^{-\alpha} V(t, \mathbf{q}).$$

Por ejemplo, si la matriz  $a_{ij}$  es constante entonces  $\alpha = 2$ , y por tanto

$$V(\lambda^2 t, \lambda \mathbf{q}) = \lambda^{-2} V(t, \mathbf{q}).$$

Consideremos, por ejemplo, el caso de una partícula de masa  $m$  que se mueve bajo el potencial central  $V(r) = k/(2r^2)$ , con  $k \neq 0$ . En este ejemplo se conservan la energía  $T + V = E$  y la función

$$I = m r \dot{r} - 2Ht \equiv m r \dot{r} - 2Et = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m r^2 - E t^2 \right). \quad (3.61)$$

La cantidad conservada  $I$  se puede expresar fácilmente en términos de los datos iniciales  $r_0 \equiv r(0)$  y  $\dot{r}_0 \equiv \dot{r}(0)$  evaluándola en  $t = 0$ :

$$I = m r \dot{r} - 2Et \Big|_{t=0} = m r_0 \dot{r}_0.$$

Integrando respecto de  $t$  la ec. (3.61) se obtiene la ley del movimiento de la coordenada  $r$ :

$$\frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} m r_0^2 + m r_0 \dot{r}_0 t + E t^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{r_0^2 + 2 r_0 \dot{r}_0 t + \frac{2E}{m} t^2}.$$

El movimiento de la coordenada angular  $\theta$  (en el plano del movimiento) se determina integrando la ley de conservación del momento angular  $m r^2 \dot{\theta} = J$ :

$$\theta = \theta_0 + \frac{J}{m} \int_0^t \frac{dt}{r^2} = \theta_0 + \frac{J}{m} \int_0^t \frac{ds}{r_0^2 + 2 r_0 \dot{r}_0 s + \frac{2E}{m} s^2}, \quad \theta_0 \equiv \theta(0).$$

De hecho, esta integral se puede evaluar en términos de funciones trigonométricas, racionales o hiperbólicas, según el discriminante del polinomio que figura en el denominador (igual a  $\dot{r}_0^2 - 2E/m$  por una constante positiva) sea positivo, cero o negativo (ejercicio). ■

## 3.5 Formulación hamiltoniana de la mecánica

### 3.5.1 Ecuaciones canónicas de Hamilton

Las ecuaciones de Lagrange de un sistema mecánico:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad (3.62)$$

aún cuando son más versátiles que las ecuaciones de Newton, adolecen de dos inconvenientes. En primer lugar, *no están en forma normal*, es decir las derivadas segundas  $\ddot{q}_i$  no aparecen despejadas en función de  $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ . En segundo lugar, son ecuaciones de *segundo orden*, por lo que dos soluciones  $\mathbf{q}_1(t)$  y  $\mathbf{q}_2(t)$  —es decir, dos trayectorias del sistema— pueden intersectarse en el espacio de configuración extendido  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  de las variables  $(t, \mathbf{q})$  sin violar el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Ambos inconvenientes se pueden resolver si se consigue expresar las ecuaciones (3.62) como un *sistema de primer orden en forma normal*. Dado que dichas ecuaciones son de primer orden en los momentos canónicos conjugados  $p_i$ , la forma más natural de conseguir este objetivo es utilizar como variables dependientes  $\mathbf{q} \equiv (q_1, \dots, q_n)$  y  $\mathbf{p} \equiv (p_1, \dots, p_n)$ , en términos de las cuales las ecuaciones de Lagrange se escriben

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \dot{\mathbf{q}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (3.63)$$

El problema es que en el miembro derecho de estas ecuaciones aparece  $\dot{\mathbf{q}}$ , que ha de expresarse como una función de  $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  utilizando la relación

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (3.64)$$

Nótese que, por el teorema de la función inversa, para que esto sea posible (al menos localmente) debe cumplirse la condición

$$\det \left( \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0. \quad (3.65)$$

Por ejemplo, puede probarse que dicha condición se cumple automáticamente para un sistema mecánico natural si la matriz  $(a_{ij}(t, \mathbf{q}))_{1 \leq i, j \leq n}$  es invertible (cf. la Sección 3.4).

Para escribir las ecuaciones (3.63) en una forma más simétrica es esencial estudiar cómo depende el lagrangiano  $L$  de las variables  $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ . La diferencial de  $L$ , considerada como función de dichas variables, está dada por

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} d\dot{\mathbf{q}} \equiv \frac{\partial L}{\partial t} dt + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \mathbf{p} d\dot{\mathbf{q}}. \quad (3.66)$$

Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{p} d\dot{\mathbf{q}} = d(\mathbf{p} \dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}} d\mathbf{p},$$

de (3.66) se obtiene

$$d(\mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} - L) \equiv dH = -\frac{\partial L}{\partial t} dt - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}} d\mathbf{p}. \quad (3.67)$$

Si en la fórmula anterior sustituimos  $\dot{\mathbf{q}}$  por su expresión en términos de las variables  $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  el hamiltoniano  $H$  se convierte en una función  $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ , cuya diferencial es el miembro derecho de (3.67). Las derivadas parciales de  $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  respecto de las variables  $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  son entonces los coeficientes de  $dt$ ,  $d\mathbf{q}$  y  $d\mathbf{p}$  en (3.67), es decir:

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \dot{\mathbf{q}}}. \quad (3.68)$$

Se sobreentiende que en el miembro derecho hay que expresar  $\dot{\mathbf{q}}$  en función de  $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  invirtiendo la relación (3.64). De las ecs. (3.68) se deduce que las ecuaciones de Lagrange (3.63) son equivalentes al siguiente sistema de primer orden en las *variables independientes*  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ :

$$\boxed{\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})}. \quad (3.69)$$

Las ecuaciones (3.69) son las llamadas **ecuaciones canónicas de Hamilton**.

**Comentario.** En matemáticas, el paso de las coordenadas y velocidades generalizadas  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  a las variables canónicas  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , donde  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\mathbf{p}$  están relacionadas a través de (3.64), recibe el nombre de **transformación de Legendre**. Este tipo de transformaciones son muy usadas, entre otras áreas de la física, en termodinámica.

• Para escribir las ecuaciones canónicas de Hamilton de un sistema mecánico con lagrangiano  $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  se puede proceder de la siguiente forma:

1. Hallar los momentos canónicos conjugados

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad i = 1, \dots, n.$$

2. Utilizar las ecuaciones anteriores para despejar las velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$  en función de los momentos canónicos  $p_j$ :

$$\dot{q}_i \equiv \dot{q}_i(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.70)$$



3. Calcular el hamiltoniano del sistema

$$H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L,$$

donde se han de utilizar las ecs. (3.70) para expresar  $\dot{\mathbf{q}}$  en términos de  $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ .

4. Las ecuaciones canónicas de Hamilton se obtienen entonces a partir de las derivadas parciales de  $H$  mediante la ec. (3.69). De hecho, las primeras  $n$  ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

son en realidad las ecuaciones (3.70), por lo que solo es necesario hallar las  $n$  restantes ecuaciones

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Recuérdese que en un sistema mecánico *natural*

$$\dot{\mathbf{q}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L = T + V.$$

Por tanto, el hamiltoniano de un sistema mecánico natural es la energía  $T + V$  expresada en términos de las variables  $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ .

### 3.5.2 Leyes de conservación

De las ecuaciones de Hamilton se sigue que si el Hamiltoniano  $H$  es independiente de alguna coordenada  $q_i$  se conserva el correspondiente momento conjugado  $p_i$ :

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i = \text{const.}$$

Del mismo modo, si  $H$  es independiente del momento  $p_i$  se conserva la coordenada  $q_i$ :

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_i = \text{const.}$$

En este ejemplo se observa ya la gran *simetría* entre las coordenadas generalizadas  $q_i$  y sus momentos  $p_i$ , que es de hecho una de las importantes ventajas de la formulación hamiltoniana de la mecánica.

Por otra parte, de las ecuaciones de Hamilton se deduce que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Por tanto, si el hamiltoniano no depende explícitamente de  $t$  entonces se conserva:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad H = \text{const.}$$

Nótese que, de la primera ecuación (3.68):

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

se sigue que  $H$  se conserva si y solo si  $L$  es independiente de  $t$ , que es la ley de conservación ya deducida en la formulación lagrangiana (cf. la Sección 3.4).

• Otra ventaja de la formulación hamiltoniana de la mecánica sobre la lagrangiana consiste en el hecho siguiente: *si la coordenada  $q_i$  es cíclica, es posible eliminar de las ecuaciones de Hamilton el grado de libertad correspondiente a dicha coordenada y a su momento conjugado  $p_i$ , reduciendo dichas ecuaciones a un sistema de  $2(n - 1)$  ecuaciones canónicas de Hamilton.*

Supongamos, en efecto, que

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0,$$

de modo que  $p_i(t) = c$  para todo  $t$ . Entonces es inmediato comprobar que *las ecuaciones de Hamilton de las restantes coordenadas y momentos son las ecuaciones canónicas del hamiltoniano*

$$H|_{p_i=c} \equiv H(t, q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n, p_1, \dots, p_{i-1}, c, p_{i+1}, \dots, p_n),$$

dependiente solo de las  $2(n - 1)$  variables canónicas conjugadas  $(q_j, p_j)$  con  $j \neq i$ . En efecto, si  $j \neq i$  se tiene

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \Big|_{p_i=c} = \frac{\partial}{\partial p_j} (H|_{p_i=c}), \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \Big|_{p_i=c} = -\frac{\partial}{\partial q_j} (H|_{p_i=c}).$$

Una vez resueltas dichas ecuaciones, el movimiento de la coordenada cíclica  $q_i$  se determina sin más que integrar su correspondiente ecuación de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \Big|_{p_i=c},$$

es decir

$$q_i(t) = \int \frac{\partial H}{\partial p_i} (t, q_1(t), \dots, q_{i-1}(t), q_{i+1}(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_{i-1}(t), c, p_{i+1}(t), \dots, p_n(t)) dt.$$

**Ejemplo 3.11.** *Hamiltoniano de una partícula en coordenadas cartesianas.* Como vimos en la Sección 3.2.1, en este caso el lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - V(t, \mathbf{r}),$$

y el momento canónico coincide con el lineal:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m \dot{\mathbf{r}}.$$

Al ser el lagrangiano natural, el hamiltoniano es la energía total  $T + V$  expresada en términos de  $(t, \mathbf{r}$

$\mathbf{p})$ :

$$H = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + V(t, \mathbf{r}) = \boxed{\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(t, \mathbf{r})}.$$

Si  $H$  no depende de la coordenada  $x_i$  (es decir, si  $V$  es independiente de dicha coordenada) se conserva  $p_i = m \dot{x}_i$ , mientras que si  $H$  es independiente del tiempo (equivalentemente, si  $V$  no depende de  $t$ ) se conserva el propio  $H$ . Estas son obviamente las leyes de conservación de la componente  $i$  del momento lineal y de la energía ya conocidas. ■

**Ejemplo 3.12.** *Hamiltoniano de una partícula en coordenadas esféricas.*

Como vimos en el Ejemplo 3.7, el lagrangiano de una partícula de masa  $m$  en coordenadas esféricas está dado por la ec. (3.55), es decir

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - V(t, r, \theta, \varphi).$$

Este lagrangiano es claramente *natural*, por lo que su hamiltoniano es simplemente la energía total

$$T + V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + V(t, r, \theta, \varphi),$$

expresada en términos de los momentos canónicos (3.56):

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\varphi = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}.$$

De estas ecuaciones se obtiene

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \theta}, \quad (3.71)$$

de donde se deduce la siguiente expresión para el hamiltoniano:

$$H(t, r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi) = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(t, r, \theta, \varphi). \quad (3.72)$$

Las ecuaciones de Hamilton son en este caso las tres ecuaciones (3.71), junto con las restantes tres ecuaciones para las derivadas de los momentos:

$$\begin{aligned} \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{mr^3} \left( p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right), \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{p_\varphi^2}{mr^2} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta}, \\ \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Como ya sabíamos, de la última de estas ecuaciones se deduce que  $p_\varphi$  (igual a la componente  $z$  del momento angular) se conserva si el potencial no depende de  $\varphi$ . Análogamente, al ser

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t},$$

si  $V$  es independiente de  $t$  se conserva  $H$ , que coincide con la energía del sistema. ■

### Ejemplo 3.13. Hamiltoniano de una partícula cargada en un campo electromagnético.

Como vimos en el Ejemplo 3.9, en este caso el lagrangiano (en coordenadas cartesianas  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ ) es

$$L = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 - e\Phi(t, \mathbf{r}) + e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{r}),$$

los momentos canónicos están dados por

$$p_i = m\dot{x}_i + eA_i(t, \mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.73)$$

y el hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 + e\Phi(t, \mathbf{r}),$$

donde se entiende que hay que expresar las velocidades en términos de los momentos conjugados. Como

$$\dot{x}_i = \frac{1}{m} (p_i - eA_i(t, \mathbf{r})), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.74)$$

sustituyendo en la fórmula para  $H$  se obtiene la expresión

$$H(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}(t, \mathbf{r}))^2 + e\Phi(t, \mathbf{r}).$$

Nótese que en esta fórmula  $\mathbf{p}$  no denota el momento *lineal* de la partícula, sino el vector cuyas tres componentes son los momentos *canónicos*  $p_i$  dados por la ec. (3.73). Las ecuaciones de Hamilton son las tres ecuaciones (3.74), junto con

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -e \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(t, \mathbf{r}) + \frac{e}{m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}(t, \mathbf{r})) \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i}(t, \mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3.$$

El hamiltoniano anterior también se puede calcular fácilmente en *coordenadas esféricas*. En efecto, sabemos que el lagrangiano es *covariante* bajo cambios de coordenadas, por lo que para obtener el lagrangiano de una partícula cargada en coordenadas esféricas basta expresar (3.32) en dichas coordenadas. Como

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} = (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi) \cdot (A_r\mathbf{e}_r + A_\theta\mathbf{e}_\theta + A_\phi\mathbf{e}_\phi) = \dot{r}A_r + r\dot{\theta}A_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}A_\phi,$$

sustituyendo en (3.32) se obtiene

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) - e\Phi + e(\dot{r}A_r + r\dot{\theta}A_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}A_\phi).$$

Los momentos canónicos son ahora

$$p_r = m\dot{r} + eA_r, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta} + eA_\theta, \quad p_\phi = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi} + eA_\phi,$$

y por tanto

$$\dot{r} = \frac{1}{m}(p_r - eA_r), \quad r\dot{\theta} = \frac{1}{mr}(p_\theta - eA_\theta), \quad r\sin\theta\dot{\phi} = \frac{1}{mr\sin\theta}(p_\phi - eA_\phi).$$

Sustituyendo en la definición de  $H$  obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} H &= \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\phi}p_\phi - \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) + e\Phi - e(\dot{r}A_r + r\dot{\theta}A_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}A_\phi) \\ &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) + e\Phi \\ &= \frac{1}{2m} \left[ (p_r - eA_r)^2 + \frac{(p_\theta - eA_\theta)^2}{r^2} + \frac{(p_\phi - eA_\phi)^2}{r^2\sin^2\theta} \right] + e\Phi. \end{aligned} \quad (3.75)$$

*Ejercicio.* Escribir las ecuaciones canónicas de Hamilton del hamiltoniano (3.75).

### 3.5.3 Corchetes de Poisson

Llamaremos a partir de ahora **espacio de fases** (o **espacio fásico**) al espacio  $\mathbb{R}^{2n}$  de las variables canónicas  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . Dado un punto cualquiera  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$  en dicho espacio fásico y un instante inicial  $t_0$ , por el teorema de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden (si el hamiltoniano  $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  es de clase  $C^2$  en las variables  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  para todo  $t$ ) hay una *única* trayectoria  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  del sistema que pasa por dicho punto, es decir que verifica las condiciones  $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$ ,  $\mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_0$ . Consideremos una función cualquiera  $f(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ , y estudiemos como varía dicha función cuando  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{p}$  evolucionan con el tiempo obedeciendo las ecuaciones de Hamilton (3.69) del hamiltoniano  $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ . Para ello, basta observar que

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}.$$

Esto sugiere definir el llamado **corchete de Poisson** de dos funciones  $f(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  y  $g(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  mediante la expresión

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \equiv \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (3.76)$$

Utilizando esta definición, la expresión anterior para  $\dot{f}$  se escribe

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}; \quad (3.77)$$

en particular, si  $f$  no depende explícitamente de  $t$  obtenemos la expresión más sencilla

$$\dot{f} = \{f, H\}.$$

Aplicando la expresión anterior a las coordenadas  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  en el espacio fásico obtenemos la siguiente formulación de las ecuaciones de Hamilton en términos del corchete de Poisson:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Los corchetes de Poisson de las coordenadas y momentos canónicos entre sí son particularmente sencillos:

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.78)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker.

Las siguientes propiedades del corchete de Poisson se obtienen de forma inmediata a partir de su definición:

1. *Antisimetría:*  $\{f, g\} = -\{g, f\}$ . En particular,  $\{f, f\} = 0$ .
2. *Bilinealidad:*  $\{\lambda f + \mu g, h\} = \lambda\{f, h\} + \mu\{g, h\}$ , donde  $\lambda, \mu$  son constantes (o, más generalmente, funciones de  $t$ ). (En virtud de la antisimetría, una propiedad análoga vale para el corchete  $\{f, \lambda g + \mu h\}$ .)
3. *Regla de Leibniz:*  $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$  (y análogamente para  $\{f, gh\}$ ).

Por otra parte, un cálculo largo pero sencillo demuestra que el corchete de Poisson verifica la llamada *identidad de Jacobi*

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0. \quad (3.79)$$

Es inmediato probar (utilizando las propiedades elementales de las derivadas parciales) que

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}.$$

Utilizando esta relación y la identidad de Jacobi se demuestra una importante generalización de este resultado, conocida como *identidad de Jacobi-Poisson*:

$$\frac{d}{dt} \{f, g\} = \{\dot{f}, g\} + \{f, \dot{g}\}. \quad (3.80)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{f, g\} &= \frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} + \{\{f, g\}, H\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} - \{\{g, H\}, f\} - \{\{H, f\}, g\} \\ &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \{\{f, H\}, g\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} + \{f, \{g, H\}\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} + \{g, H\} \right\} \\ &= \{\dot{f}, g\} + \{f, \dot{g}\}. \end{aligned}$$

De la identidad de Jacobi-Poisson se sigue inmediatamente el **teorema de Jacobi-Poisson**, de fundamental importancia a la hora de obtener integrales primeras de sistemas hamiltonianos:

Si  $f(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  y  $g(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  son dos integrales primeras de las ecuaciones de Hamilton (3.69), también lo es su corchete de Poisson  $\{f, g\}$ .

**Ejemplo 3.14.** El hamiltoniano de una partícula de masa  $m$  en coordenadas cartesianas es

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(t, \mathbf{r}),$$

donde  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$  juega el papel de  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$  es el momento lineal. Hallaremos a continuación el corchete de Poisson de dos componentes cualesquiera del momento angular

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (x_2 p_3 - x_3 p_2, x_3 p_1 - x_1 p_3, x_1 p_2 - x_2 p_1)$$

aplicando las distintas propiedades del corchete de Poisson que acabamos de enumerar y los corchetes básicos (3.78). Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \{J_1, J_2\} &= \{x_2 p_3 - x_3 p_2, x_3 p_1 - x_1 p_3\} = \{x_2 p_3, x_3 p_1\} - \{x_2 p_3, x_1 p_3\} - \{x_3 p_2, x_3 p_1\} + \{x_3 p_2, x_1 p_3\} \\ &= -x_2 p_1 + p_2 x_1 \equiv J_3. \end{aligned}$$

Procediendo de esta forma se obtienen las importantes identidades

$$\{J_i, J_j\} = J_k, \quad (i, j, k) \equiv \text{permutación cíclica de } (1, 2, 3).$$

Supongamos que se conservan dos componentes cualesquiera del momento angular, por ejemplo  $J_1$  y  $J_2$ . Por el teorema de Jacobi-Poisson se conservará entonces la restante componente  $J_3 = \{J_1, J_2\}$ . En otras palabras, *si se conservan dos componentes cualesquiera del momento angular  $\mathbf{J}$  se conserva el vector  $\mathbf{J}$* . Supongamos a continuación que se conservan la proyección del momento lineal  $\mathbf{p}$  (que en este caso coincide con el canónico) a lo largo de una dirección  $\mathbf{n}$  y el momento angular. Escogiendo adecuadamente las coordenadas, podemos suponer que se conservan  $p_1$  y  $J$ . Pero entonces la identidad

$$\{p_1, J_2\} = \{p_1, x_3 p_1 - x_1 p_3\} = -\{p_1, x_1 p_3\} = p_3$$

implica (por el teorema de Jacobi-Poisson) que también se conserva  $p_3$ . Análogamente, del corchete de Poisson

$$\{p_1, J_3\} = \{p_1, x_1 p_2 - x_2 p_1\} = \{p_1, x_1 p_2\} = -p_2$$

se sigue que se conserva  $p_2$ . Por tanto en este caso se conserva el momento lineal  $\mathbf{p}$ . ■

• Ya hemos visto en la subsección anterior que en la formulación hamiltoniana las variables canónicas  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{p}$  tienen un estatus idéntico. Es por ello razonable el intentar simplificar las ecuaciones de Hamilton (3.69) mediante cambios de variable generales de la forma

$$\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{p}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}). \quad (3.81)$$

El problema es que, en general, una transformación de este tipo convierte el sistema (3.69) en un sistema de primer orden que *no* es de tipo hamiltoniano, es decir de la forma

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\mathbf{p}}}, \quad \dot{\tilde{\mathbf{p}}} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \quad (3.82)$$

para una cierta función  $\tilde{H}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$ . Se dice por ello que la transformación (3.81) es **canónica** si transforma las ecuaciones de Hamilton de *cualquier* hamiltoniano  $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  en las ecuaciones canónicas de otro hamiltoniano  $\tilde{H}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$ .

**Ejemplo 3.15.** La transformación

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{p}, \quad \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{q}$$

es canónica, ya que es fácil comprobar que transforma las ecuaciones de Hamilton de cualquier hamiltoniano  $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  en las de  $\tilde{H}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}) = -H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ . En efecto,

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\mathbf{p}}}, \quad \dot{\tilde{\mathbf{p}}} = \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}.$$

También es canónica la transformación

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{p}, \quad \tilde{\mathbf{p}} = -\mathbf{q},$$

para la que  $\tilde{H}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}) = H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ . ■

• Un importante resultado en mecánica hamiltoniana afirma que *la transformación (3.81) es canónica si y solo si los corchetes de Poisson de las variables  $\tilde{\mathbf{q}}$  y  $\tilde{\mathbf{p}}$  verifican*

$$\{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\} = \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} = 0, \quad \{\tilde{q}_i, \tilde{p}_j\} = \lambda \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

con  $\lambda \neq 0$  constante<sup>8</sup>. En particular, si  $\lambda = 1$  se dice que  $\tilde{\mathbf{q}}$  y  $\tilde{\mathbf{p}}$  son variables **canónicamente conjugadas**.

• Se demuestra también que siempre es posible encontrar una transformación canónica (3.81) que convierta las ecuaciones de Hamilton (3.69) de *cualquier* hamiltoniano  $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  en las ecuaciones de Hamilton del hamiltoniano  $\tilde{H} = 0$ , es decir en el sistema trivial

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = 0, \quad \dot{\tilde{\mathbf{p}}} = 0.$$

La solución de este sistema es evidentemente

$$\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}_0, \quad \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{p}}_0,$$

con  $\tilde{\mathbf{q}}_0, \tilde{\mathbf{p}}_0$  vectores constantes. La solución general de las ecuaciones de Hamilton originales se obtiene entonces invirtiendo las ecuaciones

$$\tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \tilde{\mathbf{q}}_0, \quad \tilde{\mathbf{p}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \tilde{\mathbf{p}}_0$$

para expresar  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{p}$  en función del tiempo y las  $2n$  constantes  $(\tilde{\mathbf{q}}_0, \tilde{\mathbf{p}}_0)$ . De hecho, en este es uno de los métodos más efectivos que se conocen para hallar la solución de las ecuaciones de Hamilton, utilizando la llamada *teoría de Hamilton-Jacobi* para encontrar la transformación canónica que convierte el hamiltoniano original  $H$  en  $\tilde{H} = 0$ .

• Los corchetes de Poisson fundamentales (3.78) permiten establecer una analogía muy clara entre la mecánica clásica y la cuántica. En efecto, en mecánica cuántica las variables dinámicas  $(q_j, p_j)$  se reemplazan (en la imagen de Schrödinger) por los *operadores autoadjuntos*

$$Q_j = q_j, \quad P_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_j}$$

cuya actuación sobre una *función de onda*  $\psi(\mathbf{q})$  está dada por

$$(Q_j \psi)(\mathbf{q}) = q_j \psi(\mathbf{q}), \quad (P_j \psi)(\mathbf{q}) = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial q_j}(\mathbf{q}).$$

<sup>8</sup>Normalmente solo se consideran transformaciones canónicas *propias*, para las que  $\lambda = 1$ . Esto no supone en realidad ninguna restricción, ya que si (3.81) es una transformación canónica con  $\lambda \neq 1$  la transformación  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}/\lambda)$  es otra transformación canónica con  $\lambda = 1$

Los operadores  $(Q_i, P_j)$  satisfacen *relaciones de conmutación* totalmente análogas a (3.78):

$$\boxed{[Q_i, Q_j] = [P_i, P_j] = 0, \quad [Q_i, P_j] = i\hbar \left[ \frac{\partial}{\partial q_j}, q_i \right] = i\hbar \delta_{ij},} \quad (3.83)$$

donde el *conmutador* de dos operadores  $A, B$  se define por

$$[A, B] = AB - BA.$$

Cualquier otra función  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  está representada en mecánica cuántica por un operador autoadjunto  $F(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  tal que

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

Este es el llamado *principio de correspondencia* de Bohr. Es importante observar a este respecto que, al ser en general el producto de operadores no conmutativo, el operador  $F$  determina la función  $f$ , pero no a la inversa. Por ejemplo, es fácil comprobar que

$$F_1(Q, P) = PQ^2P \neq F_2(Q, P) = \frac{1}{2}(Q^2P^2 + P^2Q^2)$$

(de hecho,  $F_1 - F_2 = \hbar^2$ ), y sin embargo  $f_1(q, p) = f_2(q, p) = q^2p^2$ .

El conmutador  $[A, B]$  de dos operadores  $A$  y  $B$  tiene propiedades algebraicas análogas a las del corchete de Poisson. En efecto, es obviamente antisimétrico y lineal en cada uno de sus argumentos. Además, si  $A, B$  y  $C$  son tres operadores entonces es inmediato probar que

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B. \quad (3.84)$$

Esta identidad es análoga a la regla de Leibniz satisfecha por el corchete de Poisson, con la única diferencia de que el *orden* en que aparecen los operadores en (3.84) es esencial para su validez. Por último, es inmediato comprobar que el conmutador verifica también la *identidad de Jacobi*

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0.$$

Si  $F(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  y  $G(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  son dos operadores autoadjuntos que dependen *polinómicamente* de  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  (y no dependen explícitamente de  $\hbar$ ), aplicando repetidas veces la ecuación (3.84) y utilizando al final las relaciones (3.83) se puede expresar el conmutador  $[F, G]$  en la forma

$$[F, G] = i\hbar K,$$

siendo  $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  un polinomio independiente de  $\hbar$ . De la regla de Leibniz satisfecha por el corchete de Poisson se sigue entonces que las correspondientes funciones clásicas  $f \equiv F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ,  $g \equiv G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  y  $k \equiv K(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  satisfacen

$$\{f, g\} = k.$$

En otras palabras, *el conmutador en mecánica cuántica determina el corchete de Poisson en mecánica clásica via la relación*

$$\frac{1}{i\hbar} [F, G] \rightarrow \{f, g\}.$$

El paso inverso (de los corchete de Poisson en mecánica clásica a los conmutadores en mecánica cuántica) *no es unívoco en general*, ya que como hemos visto distintos operadores autoadjuntos  $F(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  pueden dar lugar a la misma función  $f$ . Esto es lógico, ya que la mecánica clásica es el límite (cuando  $\hbar \rightarrow 0$ ) de la mecánica cuántica, por lo que ésta debe determinar a aquella. Lo contrario, sin embargo, no tiene por qué ocurrir, ya que puede haber teorías distintas con el mismo límite para  $\hbar \rightarrow 0$ .



## Capítulo 4

# Movimiento en un sistema de referencia no inercial

### 4.1 Velocidad angular de un sistema de ejes respecto de otro

Estudiaremos en este capítulo la descripción del movimiento de una partícula en un sistema de referencia no inercial. Consideremos, en primer lugar, dos sistemas de referencia  $S$  y  $S'$  con el mismo origen de coordenadas, y sean respectivamente  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  y  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  los vectores unitarios en la dirección de los ejes de ambos sistemas. Supondremos en este capítulo que el sistema  $S'$  es *inercial*, y denotaremos por  $O(t)$  la aplicación lineal que relaciona los vectores  $\mathbf{e}'_i$  (ejes fijos) con los vectores  $\mathbf{e}_i$  (ejes móviles):

$$\mathbf{e}_i(t) = O(t) \mathbf{e}'_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.1)$$

En lo que sigue identificaremos frecuentemente el operador  $O(t)$  con su *matriz* en la base  $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1}^3$ , cuyas *columnas* son las coordenadas de los vectores  $\mathbf{e}_i(t)$  en dicha base. Dado que el operador  $O(t)$  transforma un sistema ortonormal de vectores positivamente orientado en otro sistema de este tipo, dicho operador es un elemento del **grupo ortogonal especial**  $SO(3)$  de las aplicaciones lineales  $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (o, equivalentemente, matrices  $3 \times 3$  reales  $M$ ) definido por las condiciones

$$M^T M = M M^T = \mathbb{1}, \quad \det M = 1.$$

Un teorema probado por primera vez por Euler afirma que *todo elemento  $M$  de  $SO(3)$  es una rotación alrededor de un cierto eje  $\mathbf{n}$* . El teorema de Euler se demuestra como sigue. En primer lugar, tomando el determinante de ambos miembros de la identidad

$$M^T(M - \mathbb{1}) = \mathbb{1} - M^T$$

y teniendo en cuenta que

$$\det M = \det M^T = 1, \quad \det(\mathbb{1} - M^T) = \det((\mathbb{1} - M)^T) = \det(\mathbb{1} - M)$$

se obtiene

$$\det(M - \mathbb{1}) = \det(\mathbb{1} - M) = -\det(M - \mathbb{1}) \implies \det(M - \mathbb{1}) = 0.$$

Por tanto  $\lambda = 1$  es un *autovalor* de la matriz  $M$ . En otras palabras, existe un vector no nulo  $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$  tal que  $M\mathbf{n} = \mathbf{n}$ . Veamos a continuación que  $M$  es una rotación alrededor del eje  $\mathbf{n}$ . En efecto, tomando  $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{n}$ , la matriz  $M$  es de la forma

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con  $A \equiv (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$  una matriz ortogonal  $2 \times 2$  (recuérdese que las columnas de una matriz ortogonal son perpendiculares entre sí y de norma 1). Como  $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$ , podemos tomar

$$a_{11} = \cos \theta, \quad a_{21} = \sin \theta, \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi).$$

Análogamente,

$$a_{12} = \cos \psi, \quad a_{22} = \sin \psi, \quad \text{con } \psi \in [0, 2\pi).$$

Imponiendo la ortogonalidad de las columnas de  $A$  se obtiene

$$\cos \theta \cos \psi + \sin \theta \sin \psi = \cos(\theta - \psi) = 0.$$

Por tanto  $\psi = \theta \pm \frac{\pi}{2}$  (a menos de un múltiplo entero de  $2\pi$ ), y

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \mp \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \pm \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De hecho, la solución  $\psi = \theta - \frac{\pi}{2}$  no es aceptable, pues en tal caso  $\det M = -1$ . En definitiva,  $\psi = \theta + \pi/2$  y

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv R_3(\theta)$$

es una rotación de ángulo  $\theta$  (en sentido antihorario) alrededor del eje  $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{n}$ .

*Ejercicio.* Si  $M \in SO(3)$ , demostrar que el ángulo  $\theta$  de rotación de  $M$  está determinado por la ecuación  $1 + 2 \cos \theta = \text{tr } M$ , donde  $\text{tr } M \equiv \sum_{i=1}^3 M_{ii}$  es la **traza** de la matriz  $M$ .

*Solución.* Acabamos de ver que si  $M \in SO(3)$  y  $\mathbf{n}$  es un autovector de  $M$  de autovalor 1 (con  $|\mathbf{n}| = 1$ ) entonces  $M$  es una rotación alrededor del eje  $\mathbf{n}$ . Para determinar el ángulo de rotación  $\theta$ , nótese que  $M = UR_3(\theta)U^{-1}$ , siendo  $U$  la matriz del cambio de base de la base  $\{\mathbf{e}'_i\}$  a la base en que  $\mathbf{n} = \mathbf{e}'_3$ . Tomando la traza de esta igualdad y teniendo en cuenta que  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  se obtiene:

$$\text{tr } M = \text{tr}(UR_3(\theta)U^{-1}) = \text{tr}(U^{-1}UR_3(\theta)) = \text{tr } R_3(\theta) = 1 + 2 \cos \theta. \quad \blacksquare$$

Consideremos de nuevo la matriz de rotación  $R_3(\theta)$  alrededor del eje  $\mathbf{e}'_3$ . Un cálculo directo demuestra que

$$\frac{dR_3}{d\theta}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

por tanto, si  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  es un vector arbitrario se tiene

$$\left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} R_3(\theta)\mathbf{c} = \frac{dR_3}{d\theta}(0)\mathbf{c} = -c_2\mathbf{e}'_1 + c_1\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}'_3 \times \mathbf{c}.$$

En general, si  $R_{\mathbf{n}}(\theta)$  denota la matriz de rotación alrededor del eje  $\mathbf{n}$  en un ángulo  $\theta$  entonces se tiene

$$\left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} R_{\mathbf{n}}(\theta)\mathbf{c} = \frac{dR_{\mathbf{n}}}{d\theta}(0)\mathbf{c} = \mathbf{n} \times \mathbf{c}.$$

Simbólicamente, podemos escribir

$$\frac{dR_{\mathbf{n}}}{d\theta}(0) = \mathbf{n} \times, \quad (4.2)$$

entendiendo que ambos miembros son iguales cuando se aplican a cualquier vector  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ . Otra forma de interpretar el resultado anterior es que para  $\theta$  pequeño se tiene (al ser  $R_{\mathbf{n}}(0) = \mathbb{1}$ )

$$R_{\mathbf{n}}(\theta)\mathbf{c} = \mathbf{c} + \theta \mathbf{n} \times \mathbf{c} + O(\theta^2). \quad (4.3)$$

**Ejercicio.** Probar que  $R_{\mathbf{n}}(\theta)\mathbf{r} = \cos \theta \mathbf{r} + (1 - \cos \theta)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + \sin \theta \mathbf{n} \times \mathbf{r}$ .

**Solución.** Los vectores  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$  y  $\mathbf{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}$  son mutuamente ortogonales. Además, los dos últimos vectores tienen la misma longitud  $l$ , ya que

$$|\mathbf{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}|^2 = \mathbf{r}^2 - |(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}|^2.$$

Por tanto

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{l}(\mathbf{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}), \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{l}\mathbf{n} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{n}$$

forman un triedro ortonormal positivamente orientado. Usando esta base y la ecuación de la rotación  $R_3(\theta)$  se obtiene

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{n}}(\theta)\mathbf{r} &= R_{\mathbf{n}}(\theta)(l\mathbf{e}_1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}) = lR_{\mathbf{n}}(\theta)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} = l \cos \theta \mathbf{e}_1 + l \sin \theta \mathbf{e}_2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} \\ &= \cos \theta(\mathbf{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}) + \sin \theta \mathbf{n} \times \mathbf{r} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}, \end{aligned}$$

que conduce a la fórmula propuesta. ■

Sea ahora  $O(t) \in SO(3)$  para todo  $t$ , y supongamos que  $O$  es de clase  $C^1$  (es decir, que los elementos de matriz de  $O$  son funciones derivables con continuidad). Nos planteamos entonces el problema de calcular la derivada  $\dot{O}(t)$  en todo instante  $t$ . Para ello derivamos respecto de  $t$  la identidad

$$O(t)O(t)^T = \mathbb{1},$$

obteniendo

$$0 = \dot{O}(t)O(t)^T + O(t)\dot{O}(t)^T = \dot{O}(t)O(t)^T + [\dot{O}(t)O(t)^T]^T.$$

Por tanto

$$\Omega(t) \equiv \dot{O}(t)O(t)^T$$

es una matriz *antisimétrica* de orden 3. Como  $O(t)^T = O(t)^{-1}$ , de esta relación se sigue que

$$\boxed{\dot{O}(t) = \Omega(t)O(t)}. \tag{4.4}$$

La matriz antisimétrica  $\Omega(t)$  puede escribirse como

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{pmatrix}$$

para ciertos números reales  $\omega_i(t)$ . Es entonces inmediato comprobar que si  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  se tiene

$$\Omega(t)\mathbf{c} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{c},$$

donde  $\boldsymbol{\omega}(t) \in \mathbb{R}^3$  es el vector de componentes  $\omega_i(t)$ . De la ec. (4.4) y la identidad anterior (con  $O(t)\mathbf{c}$  en lugar de  $\mathbf{c}$ ) se deduce finalmente que

$$\boxed{\dot{O}(t)\mathbf{c} = \boldsymbol{\omega}(t) \times O(t)\mathbf{c}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.} \tag{4.5}$$

El vector  $\boldsymbol{\omega}(t) \in \mathbb{R}^3$ , que en general depende del tiempo, está determinado por la relación

$$\boldsymbol{\omega}(t) \times = \Omega(t) = \dot{O}(t)O(t)^T = \dot{O}(t)O(t)^{-1},$$

o, equivalentemente,

$$\boldsymbol{\omega}(t_0) \times = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} O(t)O(t_0)^{-1}. \tag{4.6}$$

**Ejemplo 4.1.** Si  $O(t)$  es una rotación alrededor de un eje fijo  $\mathbf{n}$  en un ángulo variable con el tiempo  $\alpha(t)$  entonces

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\alpha}(t)\mathbf{n}.$$

En efecto, utilizando la ecuación (4.6) se obtiene

$$O(t) = R_{\mathbf{n}}(\alpha(t)) \implies O(t)O(t_0)^{-1} = R_{\mathbf{n}}(\alpha(t))R_{\mathbf{n}}(\alpha(t_0))^{-1} = R_{\mathbf{n}}(\alpha(t) - \alpha(t_0)),$$

y por tanto, en virtud de la ec. (4.2),

$$\boldsymbol{\omega}(t_0) \times = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} R_{\mathbf{n}}(\alpha(t) - \alpha(t_0)) = \dot{\alpha}(t_0) \frac{dR_{\mathbf{n}}}{d\theta}(0) = \dot{\alpha}(t_0)\mathbf{n} \times \implies \boldsymbol{\omega}(t_0) = \dot{\alpha}(t_0)\mathbf{n}. \quad \blacksquare$$

Aplicando (4.5) a la ec. (4.1) que relaciona los ejes móviles  $\mathbf{e}_i \equiv \mathbf{e}_i(t)$  con los fijos  $\mathbf{e}'_i$  obtenemos la importante fórmula

$$\dot{\mathbf{e}}_i(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times O(t)\mathbf{e}'_i = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_i(t), \quad (4.7)$$

donde  $\dot{\mathbf{e}}_i(t)$  denota la derivada del vector  $\mathbf{e}_i(t)$  respecto del sistema inercial (fijo)  $S'$ . En general, si  $\mathbf{c}$  es un vector constante en el sistema inercial  $S'$  (es decir, si  $\mathbf{c} = \sum_{i=1}^3 c_i \mathbf{e}'_i$  con  $c_i$  constante) y  $\mathbf{c}(t) \equiv O(t)\mathbf{c}$ , de (4.3) se sigue que

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \dot{O}(t)\mathbf{c}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times O(t)\mathbf{c} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{c}(t),$$

y por tanto

$$\Delta\mathbf{c}(t) = \boldsymbol{\omega}(t)\Delta t \times \mathbf{c}(t) + O(\Delta t^2).$$

Comparando con la ec. (4.3) deducimos que el paso de  $\mathbf{c}(t)$  a  $\mathbf{c}(t + \Delta t)$  equivale (a primer orden en  $\Delta t$ ) a efectuar en el vector  $\mathbf{c}(t)$  una *rotación instantánea* de ángulo  $\Delta\theta$  y eje  $\mathbf{n}(t)$  dados por

$$\Delta\theta \mathbf{n}(t) = \Delta t \boldsymbol{\omega}(t).$$

Haciendo  $\Delta t$  tender a cero se obtiene la relación

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\theta}(t) \mathbf{n}(t).$$

En otras palabras:

La dirección y el módulo del vector  $\boldsymbol{\omega}(t)$  son respectivamente iguales al **eje instantáneo de rotación** y a la **velocidad angular instantánea de rotación** de los ejes móviles  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$  respecto de los ejes fijos  $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1}^3$ .

Por este motivo, el vector  $\boldsymbol{\omega}(t)$  se denomina **velocidad angular instantánea** del sistema de ejes móviles  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$  respecto del sistema de ejes fijos  $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1}^3$ .

## 4.2 Derivada temporal en los sistemas fijo y móvil

Para estudiar la relación entre el sistema inercial  $S'$  (**sistema fijo**) y el no inercial  $S$  (**sistema móvil**), consideremos cómo se expresa la derivada temporal de un vector variable cualquiera  $\mathbf{A}(t)$  en cada uno de estos sistemas. Desarrollemos, para ello, el vector  $\mathbf{A}(t)$  en el sistema *móvil*  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$ :

$$\mathbf{A}(t) = \sum_{i=1}^3 A_i(t) \mathbf{e}_i.$$

Para evitar confusiones, denotaremos a partir de ahora por  $\left(\frac{d}{dt}\right)_f$  y  $\left(\frac{d}{dt}\right)_m$  la derivada temporal respecto de los sistemas fijo y móvil, respectivamente. Derivando la relación anterior *en el sistema fijo* y utilizando esta última notación se obtiene la identidad

$$\left(\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\right)_f = \sum_{i=1}^3 \dot{A}_i(t) \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^3 A_i(t) \left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}\right)_f, \quad (4.8)$$

donde hemos tenido en cuenta que las funciones  $A_i(t)$  son *escalares*, y por lo tanto su derivada respecto de  $t$  es la misma en ambos sistemas. Utilizando la ec. (4.7), que en la notación que acabamos de introducir se escribe

$$\left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}\right)_f = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_i, \quad (4.9)$$

la ec. (4.8) se convierte en

$$\left(\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\right)_f = \sum_{i=1}^3 \dot{A}_i(t) \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{A}(t). \quad (4.10)$$

Por otra parte, en el sistema móvil los vectores  $\mathbf{e}_i$  se consideran *constantes*, por lo que  $\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_m$  está dado simplemente por

$$\left(\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\right)_m = \sum_{i=1}^3 \dot{A}_i(t) \mathbf{e}_i.$$

Comparando esta expresión con la anterior se obtiene la importante relación

$$\left(\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\right)_f = \left(\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\right)_m + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{A}(t). \quad (4.11)$$

La expresión anterior es válida para *cualquier* vector  $\mathbf{A}(t)$  función del tiempo; en particular, si la aplicamos a la velocidad angular instantánea  $\boldsymbol{\omega}(t)$  obtenemos

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}(t)}{dt}\right)_f = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}(t)}{dt}\right)_m \equiv \dot{\boldsymbol{\omega}}(t). \quad (4.12)$$

### 4.3 Dinámica en un sistema de referencia no inercial

Consideremos a continuación el caso más general en que el origen de  $S$  está desplazado respecto del de  $S'$  en un vector  $\mathbf{R}(t)$  dependiente de  $t$ . Si  $\mathbf{r}$  es el vector de posición de una partícula en el sistema no inercial  $S$ , su vector de posición en el sistema inercial  $S'$  estará dado por

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{R}.$$

Derivando esta relación respecto del sistema fijo (inercial) obtenemos

$$\left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_f = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_m + \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (4.13)$$

donde

$$\mathbf{V} \equiv \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_f \quad (4.14)$$

es la velocidad del origen de  $S$  medida en el sistema inercial  $S'$ . Denotando por  $\mathbf{v}_f$  y  $\mathbf{v}_m$  la velocidad de la partícula en los sistemas fijo y móvil, respectivamente, es decir

$$\mathbf{v}_f = \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_f, \quad \mathbf{v}_m = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_m, \quad (4.15)$$

podemos reescribir la ec. (4.13) en la forma más compacta

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_m + \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (4.16)$$

Derivando de nuevo la relación anterior en el sistema fijo obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{v}_f}{dt}\right)_f &= \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_f + \left(\frac{d\mathbf{v}_m}{dt}\right)_m + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_m + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_m + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_f + \left(\frac{d\mathbf{v}_m}{dt}\right)_m + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_m + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_f}{dt}\right)_f \equiv \left(\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}\right)_f = \mathbf{a}_f, \quad \left(\frac{d\mathbf{v}_m}{dt}\right)_m \equiv \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_m = \mathbf{a}_m$$

son respectivamente la *aceleración* de la partícula en los sistemas fijo y móvil, y llamando

$$\mathbf{A} \equiv \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_f = \left(\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\right)_f$$

a la aceleración del origen del sistema móvil  $S$  respecto del fijo  $S'$ , obtenemos finalmente la importante relación

$$\mathbf{a}_f = \mathbf{a}_m + \mathbf{A} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_m + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}. \quad (4.17)$$

Teniendo en cuenta esta relación, si la partícula está sometida a una fuerza  $\mathbf{F}$  (medida en el sistema *inercial*  $S'$ ), la ecuación del movimiento de dicha partícula en el sistema *móvil*  $S$  es

$$m\mathbf{a}_m = \mathbf{F} - m\mathbf{A} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_m - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} \equiv \mathbf{F} + \mathbf{F}_i. \quad (4.18)$$

Por tanto en el sistema móvil la segunda ley de Newton ha de ser modificada añadiendo a la *fuerza real*  $\mathbf{F}$  la *fuerza ficticia*

$$\mathbf{F}_i = -m\mathbf{A} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_m - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}. \quad (4.19)$$

Es importante notar que esta fuerza ficticia es de tipo *inercial*, al ser proporcional a la *masa* de la partícula.

El primer término de la fuerza ficticia  $\mathbf{F}_i$  es debido a la *aceleración* del origen del sistema no inercial  $S$  respecto del sistema inercial  $S'$ , y por tanto desaparece si dicho punto se mueve con *velocidad constante* respecto de  $S'$ . Los restantes términos de  $\mathbf{F}_i$  se deben a la *rotación de los ejes* del sistema móvil. Mientras que el último de dichos términos desaparece si la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  es *constante*, el segundo y el tercer término han de ser tenidos en cuenta aun cuando  $\boldsymbol{\omega}$  sea constante. El término  $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$  es la llamada **fuerza centrífuga**, ya que es un vector contenido en el plano determinado por  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\mathbf{r}$ , perpendicular a  $\boldsymbol{\omega}$  y dirigido “hacia fuera” del eje determinado por el vector  $\boldsymbol{\omega}$  (cf. la Fig. 4.1). El término  $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_m$ , que depende de la velocidad de la partícula, es la denominada **fuerza de Coriolis** (véase de nuevo la Fig. 4.1).

#### 4.4 Movimiento con respecto a la superficie terrestre

Aplicaremos en esta sección la ecuación del movimiento (4.18) obtenida en la sección anterior para estudiar la dinámica de una partícula que se mueve cerca de la superficie terrestre. Despreciaremos el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, y supondremos que la Tierra gira

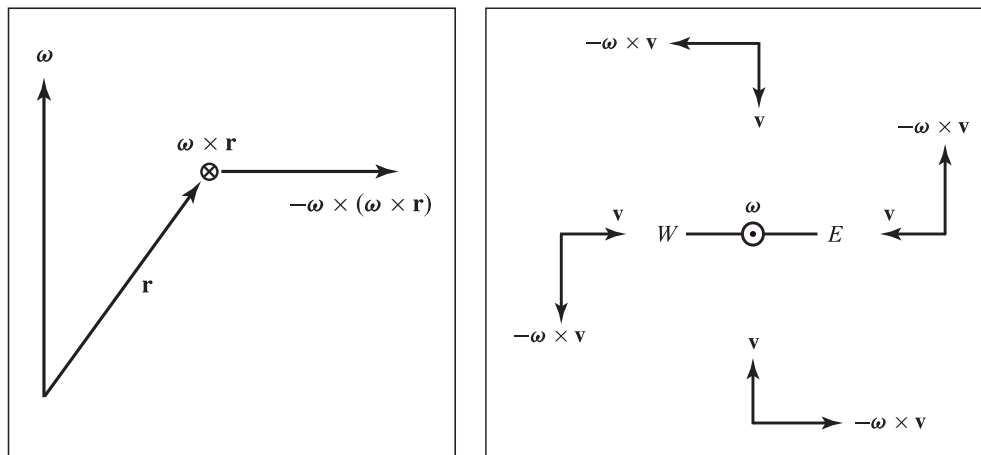


Figura 4.1. Fuerzas centrífuga (izquierda) y de Coriolis (derecha).

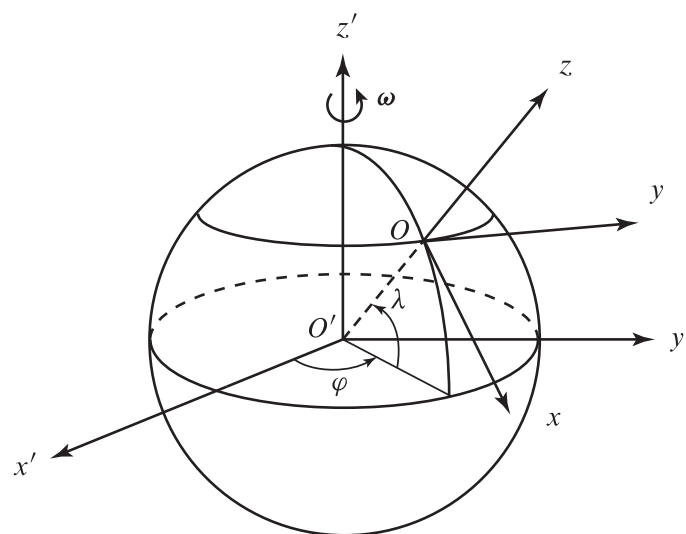


Figura 4.2. Sistema de ejes terrestre.

alrededor de su eje norte-sur con velocidad angular constante de módulo<sup>1</sup>

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ día sidéreo}} \approx \frac{2\pi \text{ rad}}{86164.1 \text{ s}} \approx 7.29212 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

en sentido oeste-este.

Escojamos un **sistema de ejes terrestre** en la forma indicada en la Fig. 4.2. Más precisamente, el origen de coordenadas  $O$  del sistema móvil  $S$  está en un punto de la superficie terrestre de *latitud*  $\lambda$  y *longitud*  $\varphi$ , el vector  $\mathbf{e}_3$  (eje  $z$ ) lleva la dirección del vector  $\mathbf{R}$  que une el centro de la Tierra con el punto  $O$ , el vector  $\mathbf{e}_1$  (eje  $x$ ) es tangente al *meridiano* que pasa por  $O$  (en dirección sur), y el vector  $\mathbf{e}_2$  (eje  $y$ ) es entonces tangente al *paralelo* que pasa por  $O$  (en dirección este). En otras palabras:

El eje  $x$  está dirigido hacia el *sur*, el eje  $y$  hacia el *este* y el eje  $z$  en la dirección de la *vertical*.

Como ejes fijos tomamos un sistema de ejes con origen  $O'$  en el centro de la Tierra, siendo el vector  $\mathbf{e}'_3$  un vector unitario en la dirección sur-norte, de modo que la velocidad angular de la

<sup>1</sup>Por definición, un *día sidéreo* es el tiempo que tarda la Tierra en efectuar una rotación completa alrededor de su eje, mientras que un *día solar* (igual a 24 horas) es el intervalo entre dos pasos consecutivos del Sol por el meridiano de un punto cualquiera de la superficie terrestre. Debido a la rotación de la Tierra alrededor del Sol, el día sidéreo es unos 4 minutos más corto que el día solar.

Tierra es

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}'_3.$$

Nótese que los vectores  $\mathbf{e}_i$  son (por este orden) los vectores  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  y  $\mathbf{e}_r$  del sistema de coordenadas esféricas, siendo  $\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$ . Utilizando las ecuaciones (1.1) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \sin \lambda \cos \varphi \mathbf{e}'_1 + \sin \lambda \sin \varphi \mathbf{e}'_2 - \cos \lambda \mathbf{e}'_3, \\ \mathbf{e}_2 &= -\sin \varphi \mathbf{e}'_1 + \cos \varphi \mathbf{e}'_2, \\ \mathbf{e}_3 &= \cos \lambda \cos \varphi \mathbf{e}'_1 + \cos \lambda \sin \varphi \mathbf{e}'_2 + \sin \lambda \mathbf{e}'_3. \end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores (o simplemente de la Fig. 4.2) se deduce que en el sistema terrestre la velocidad angular de la Tierra está dada por

$$\boldsymbol{\omega} = \omega(-\cos \lambda \mathbf{e}_1 + \sin \lambda \mathbf{e}_3). \quad (4.20)$$

Escribamos a continuación las ecuaciones del movimiento (4.18) en el sistema de ejes terrestre para una partícula de masa  $m$  que se mueve en las proximidades del punto  $O$ . Supondremos, por el momento, que la única fuerza que actúa sobre dicha partícula es la atracción de la gravedad terrestre  $m\mathbf{g}_0$ , donde

$$\mathbf{g}_0 = -\frac{GM}{r'^3} \mathbf{r}'$$

y  $\mathbf{r}' = \mathbf{R} + \mathbf{r}$  es el vector de posición de la partícula en el sistema fijo. Si la partícula permanece próxima al punto  $O$ , podemos sustituir el vector  $\mathbf{r}'$  por  $\mathbf{R}$ , y por tanto tomar

$$\mathbf{g}_0 = -\frac{GM}{R^3} \mathbf{R} = -\frac{GM}{R^2} \mathbf{e}_3 \equiv -g_0 \mathbf{e}_3,$$

siendo

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} \simeq 9.80665 \text{ m s}^{-2}.$$

En el resto de este capítulo escribiremos, por sencillez,

$$\mathbf{v}_m = \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{a}_m = \ddot{\mathbf{r}}.$$

Las ecuaciones del movimiento de la partícula en el sistema de ejes terrestre son por tanto

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}_0 - \mathbf{A} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

Esta expresión se puede simplificar teniendo en cuenta que en este caso

$$\mathbf{V} = \left( \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_f = \left( \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_m + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R},$$

ya que  $\mathbf{R} = R\mathbf{e}_3$  es constante en el sistema de ejes terrestre. Derivando respecto de  $t$  (y teniendo en cuenta que  $\boldsymbol{\omega}$  es constante) se tiene

$$\mathbf{A} = \left( \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_f = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}).$$

En consecuencia, las ecuaciones del movimiento de la partícula se reducen a

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \quad (4.21a)$$



donde el vector

$$\mathbf{g} \equiv \mathbf{g}_0 - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}), \quad (4.21b)$$

constante en el sistema de ejes terrestre, es la **gravedad efectiva** en el punto  $O$  (es decir, la aceleración experimentada por una partícula instantáneamente en reposo en el sistema de ejes terrestres situada en el punto  $O$  de la superficie terrestre). Evidentemente, si además de la gravedad actúa una fuerza externa  $\mathbf{F}$  la ecuación del movimiento de la partícula es

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{F}}{m} + \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (4.22)$$

*Ejercicio.* Demostrar que en un punto de la superficie terrestre de latitud  $\lambda$  la plomada se desvía de la vertical en un ángulo  $\delta(\lambda)$  dado aproximadamente por

$$\tan \delta(\lambda) = \frac{\omega^2 R \sin \lambda \cos \lambda}{g_0 - \omega^2 R \cos^2 \lambda}. \quad (4.23)$$

Hallar la latitud  $\lambda$  para la que  $\delta(\lambda)$  es máximo y el valor máximo de  $\delta(\lambda)$ .

*Solución.* Por definición, la dirección de la plomada es la dirección de la que pende una masa en reposo suspendida de un hilo, es decir la dirección opuesta a la tensión  $\mathbf{T}$  del hilo. Para hallar dicha dirección basta observar que la ecuación del movimiento de la masa se obtiene sustituyendo  $\mathbf{F} = \mathbf{T}$  en la ec. (4.22), es decir

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{\mathbf{T}}{m}.$$

Cuando la masa está en reposo  $\dot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}} = 0$ , y por tanto

$$\frac{\mathbf{T}}{m} = -\mathbf{g} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \simeq -\mathbf{g}, \quad (4.24)$$

donde hemos despreciado el término  $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$  al ser

$$|\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})| \leq \omega^2 r \ll |\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})| = \omega^2 R \cos \lambda$$

excepto en las proximidades de los polos ( $\lambda = \pm\pi/2$ ). De la ec. (4.24) se sigue que la dirección de la plomada coincide aproximadamente con la de la gravedad efectiva  $\mathbf{g}$ . Teniendo en cuenta que  $\mathbf{g}_0 = -g_0 \mathbf{e}_3$  y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R})\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{R} = \omega^2 R \sin \lambda (-\cos \lambda \mathbf{e}_1 + \sin \lambda \mathbf{e}_3) - \omega^2 R \mathbf{e}_3 \\ &= -\omega^2 R \cos \lambda (\sin \lambda \mathbf{e}_1 + \cos \lambda \mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

se obtiene

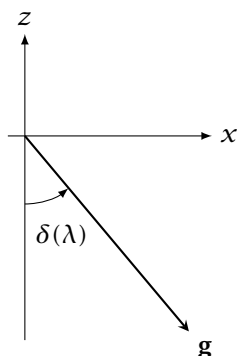
$$\mathbf{g} = g_0 \left( y \sin \lambda \cos \lambda \mathbf{e}_1 - (1 - y \cos^2 \lambda) \mathbf{e}_3 \right), \quad \text{con } y \equiv \frac{\omega^2 R}{g_0} \simeq 3.458 \cdot 10^{-3}.$$

El vector  $\mathbf{g}$  tiene una componente

$$g_1 = y g_0 \sin \lambda \cos \lambda = \frac{\omega^2 R}{2} \sin 2\lambda$$

en la dirección del vector  $\mathbf{e}_1$  (cf. la Fig. 4.3). Por tanto  $\mathbf{g}$  se desvía de la vertical (dirección del eje  $z$ ) hacia el sur en el hemisferio norte ( $\lambda > 0$ ) y hacia el norte en el hemisferio sur ( $\lambda < 0$ ). El ángulo  $\delta(\lambda)$  formado por el vector  $\mathbf{g}$  con la vertical tiene tangente

$$\tan \delta(\lambda) = \frac{g_1}{|g_3|} = \frac{y \sin \lambda \cos \lambda}{1 - y \cos^2 \lambda} = \frac{y \sin 2\lambda}{2 - y - y \cos 2\lambda},$$

Figura 4.3. Gravedad efectiva  $\mathbf{g}$  (en el hemisferio norte).

que coincide con la ec. (4.23) en virtud de la definición de  $\gamma$ . Derivando la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{1}{2\gamma} \frac{d}{d\lambda} \tan \delta(\lambda) = \frac{(2 - \gamma - \gamma \cos 2\lambda) \cos 2\lambda - \gamma \sin^2 2\lambda}{(2 - \gamma - \gamma \cos 2\lambda)^2} = \frac{(2 - \gamma) \cos 2\lambda - \gamma}{(2 - \gamma - \gamma \cos 2\lambda)^2}.$$

La desviación  $\delta(\lambda)$  será máxima (en valor absoluto) por tanto cuando

$$\boxed{\cos 2\lambda = \frac{\gamma}{2 - \gamma}}, \quad (4.25)$$

y la desviación máxima  $\delta_{\max}$  está dada por

$$\tan \delta_{\max} = \operatorname{sgn} \lambda \frac{\gamma \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{(2 - \gamma)^2}}}{2 - \gamma - \frac{\gamma^2}{2 - \gamma}} = \frac{\gamma \operatorname{sgn} \lambda}{\sqrt{(2 - \gamma)^2 - \gamma^2}} = \boxed{\frac{\gamma \operatorname{sgn} \lambda}{2\sqrt{1 - \gamma}}} \approx 1.732 \cdot 10^{-3} \operatorname{sgn} \lambda,$$

es decir

$$\delta_{\max} \approx 5.955' \operatorname{sgn} \lambda.$$

Al ser  $\gamma$  del orden de  $10^{-3}$ , de la ec. (4.25) se sigue que el valor de la latitud  $\lambda_{\max}$  para el que  $\delta(\lambda)$  es máximo se puede expresar como  $\lambda_{\max} = \pm(\frac{\pi}{4} - \varepsilon)$ , con  $\varepsilon > 0$  pequeño. El valor de  $\varepsilon$  se puede calcular de forma aproximada desarrollando  $\cos 2\lambda_{\max}$  a primer orden en  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \cos 2\lambda_{\max} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\varepsilon\right) = \sin 2\varepsilon \approx 2\varepsilon = \frac{\gamma}{2 - \gamma} \approx \frac{\gamma}{2} \\ \Rightarrow \varepsilon &\approx \frac{\gamma}{4} \approx 8.646 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 2.972'. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

La ecuación del movimiento (4.21) es *exacta*. De hecho, dicha ecuación es un sistema (inhomogéneo) de ecuaciones diferenciales *lineales* de segundo orden con *coeficientes constantes* en las componentes del vector  $\mathbf{r}$ . Como se verá en el curso de *Métodos Matemáticos I*, este tipo de sistemas en principio se pueden resolver exactamente (por ejemplo, escribiéndolos como un sistema de primer orden en  $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  y utilizando la exponencial matricial). En la práctica, es preferible simplificar primero la ec. (4.21) teniendo en cuenta el orden de magnitud de sus distintos sumandos. Más precisamente, el segundo término de (4.21b) es a lo sumo de orden  $\gamma \sim 10^{-3}$  respecto del primero, mientras que el último término de (4.21a) es a lo sumo de orden  $\gamma r/R$  respecto del primer término de dicha ecuación. Por tanto, si  $r \ll R$  la ecuación del movimiento se puede aproximar por

$$\boxed{\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}_0 - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}}. \quad (4.26)$$

Integrando una vez respecto de  $t$  obtenemos

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}_0 t - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{c},$$

donde  $\mathbf{c}$  es un vector constante en el sistema de ejes terrestre. Aunque de nuevo el sistema anterior se puede resolver *exactamente* (se trata de un sistema lineal inhomogéneo de primer orden con coeficientes constantes), resulta ventajoso en la práctica aprovechar el hecho de que si la velocidad  $|\dot{\mathbf{r}}|$  no es muy grande el primer término del miembro derecho de (4.26) es mucho mayor que el segundo, ya que

$$\frac{g_0}{\omega} \simeq 1.34483 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1}.$$

Esto permite hallar una solución aproximada de (4.26), escrita como una ecuación de primer orden en la velocidad:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g}_0 - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (4.27)$$

y desarrollando  $\mathbf{v}$  en potencias de  $\omega$ :

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_1(t) + \omega \mathbf{v}_2(t) + O(\omega^2),$$

con

$$\mathbf{v}(0) \equiv \mathbf{v}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1(0) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}_2(0) = \mathbf{0}.$$

Sustituyendo en (4.27) se obtiene

$$\dot{\mathbf{v}}_1 + \omega \dot{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{g}_0 - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_1 + O(\omega^2),$$

de donde, igualando a cero por separado los términos  $O(1)$  y  $O(\omega)$ , se sigue que

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{g}_0, \quad \omega \dot{\mathbf{v}}_2 = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_1.$$

Resolviendo este sistema primero respecto de  $\mathbf{v}_1$  y a continuación respecto de  $\mathbf{v}_2$  se obtiene fácilmente

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{g}_0 t + \mathbf{v}_0, \quad \omega \dot{\mathbf{v}}_2 = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 - 2t\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}_0 \quad \Rightarrow \quad \omega \mathbf{v}_2 = -2t\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 - t^2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}_0.$$

Por tanto

$$\mathbf{v} \simeq \mathbf{v}_1 + \omega \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}_0 t - 2t\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 - t^2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}_0,$$

e integrando respecto de  $t$  queda finalmente

$$\mathbf{r} \simeq \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{g}_0 \frac{t^2}{2} - t^2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 - \frac{t^3}{3}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}_0. \quad (4.28)$$

*Ejercicio.* Una partícula se lanza verticalmente desde un punto de la superficie terrestre de latitud  $\lambda$  hasta alcanzar una altura  $h$ . Demostrar que la partícula toca tierra en un punto situado  $\frac{4}{3}\sqrt{8h^3/g_0}\omega \cos \lambda$  al oeste del punto inicial. (Considérense solamente alturas  $h$  pequeñas y desprecíese la resistencia del aire.)

*Solución.* Aplicando la ec. (4.28), con

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_3 \quad \Rightarrow \quad -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 = \omega v_0 (\cos \lambda \mathbf{e}_1 - \sin \lambda \mathbf{e}_3) \times \mathbf{e}_3 = -\omega v_0 \cos \lambda \mathbf{e}_2$$

y, análogamente,

$$-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}_0 = \omega g_0 \cos \lambda \mathbf{e}_2,$$

se obtiene (aproximadamente)

$$\mathbf{r} = v_0 t \mathbf{e}_3 - \frac{g_0}{2} t^2 \mathbf{e}_3 + \left( -\omega v_0 \cos \lambda t^2 + \frac{\omega g_0}{3} t^3 \cos \lambda \right) \mathbf{e}_2.$$

Por tanto la ley horaria de la trayectoria es

$$x = 0, \quad y = \omega v_0 \cos \lambda t^2 \left( \frac{g_0 t}{3v_0} - 1 \right), \quad z = v_0 t - \frac{g_0}{2} t^2.$$

La partícula toma tierra en el instante  $t_0 > 0$  en que  $z = 0$ , es decir

$$t_0 = \frac{2v_0}{g_0},$$

y el valor de la coordenada  $y$  en dicho instante es por tanto

$$y(t_0) = -\frac{4}{3} \frac{\omega v_0^3}{g_0^2} \cos \lambda \leq 0.$$

Vemos, pues, que la partícula se desvía al *oeste*, tanto en el hemisferio norte como en el sur, siendo la desviación máxima en el ecuador ( $\lambda = 0$ ). Para expresar la desviación hallada en función de la altura máxima  $h$  alcanzada por la partícula, basta tener en cuenta que dicha altura se obtiene imponiendo que  $\dot{z} = 0$ :

$$\dot{z} = v_0 - g_0 t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0}{g_0} \quad \Rightarrow \quad z \equiv h = \frac{v_0^2}{2g_0}.$$

Por tanto

$$y(t_0) = -\frac{4\omega}{3g_0^2} (2g_0 h)^{3/2} \cos \lambda = -\frac{4}{3} \omega \cos \lambda \sqrt{\frac{8h^3}{g_0}}.$$

A título de ejemplo,

$$h = 100 \text{ m}, \quad \lambda = 40^\circ 25' \text{ (latitud de Madrid)} \quad \Rightarrow \quad y(t_0) = -6.686 \text{ cm.} \quad \blacksquare$$

*Ejercicio.* Repetir el problema anterior suponiendo que la partícula se deja caer desde una altura  $h$  sobre la vertical.

*Solución.* En este caso

$$\mathbf{r}_0 = h\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{v}_0 = 0,$$

y sustituyendo en (4.28) se obtiene

$$x = 0, \quad y = \frac{\omega g_0}{3} t^3 \cos \lambda, \quad z = h - \frac{g_0}{2} t^2.$$

Por tanto la partícula toca Tierra en el instante

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g_0}},$$

y su desviación en la dirección del eje  $y$  es

$$\boxed{y(t_0) = \frac{\omega}{3} \cos \lambda \sqrt{\frac{8h^3}{g_0}}.}$$

Nótese que en este caso  $y(t_0) \geq 0$ , y por tanto la desviación es hacia el *este*. ■

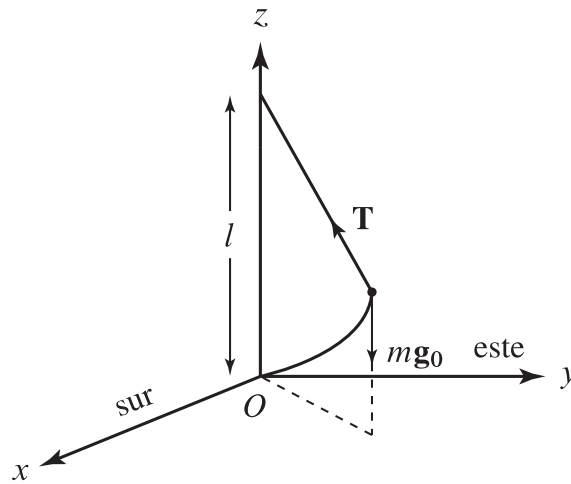


Figura 4.4. Péndulo de Foucault.

### 4.5 El péndulo de Foucault

En 1851 J.B.L. Foucault demostró experimentalmente la rotación de la Tierra utilizando el péndulo que hoy lleva su nombre, representado en la Fig. 4.4. Se estudian las pequeñas oscilaciones, y se supone por tanto que la longitud  $l$  del péndulo es muy grande frente a  $x, y, z$ . En este caso la fuerza total que actúa sobre la masa del péndulo es

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}_0 + \mathbf{T},$$

donde la tensión  $\mathbf{T}$  del hilo del péndulo está dada por

$$\mathbf{T} = T \frac{l\mathbf{e}_3 - \mathbf{r}}{|l\mathbf{e}_3 - \mathbf{r}|} \approx T \left( \mathbf{e}_3 - \frac{\mathbf{r}}{l} \right).$$

La ecuación (aproximada) del movimiento es por tanto

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}_0 + \frac{T}{m} \left( \mathbf{e}_3 - \frac{\mathbf{r}}{l} \right) - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}},$$

donde

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \omega \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -\cos \lambda & 0 & \sin \lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \omega [ -\dot{y} \sin \lambda \mathbf{e}_1 + (\dot{x} \sin \lambda + \dot{z} \cos \lambda) \mathbf{e}_2 - \dot{y} \cos \lambda \mathbf{e}_3 ],$$

y por tanto

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{Tx}{lm} + 2\omega \dot{y} \sin \lambda \\ \ddot{y} = -\frac{T y}{lm} - 2\omega (\dot{x} \sin \lambda + \dot{z} \cos \lambda) \\ \ddot{z} = -g_0 + \frac{T}{m} \left( 1 - \frac{z}{l} \right) + 2\omega \dot{y} \cos \lambda. \end{cases} \quad (4.29)$$

Nótese que  $z \ll \sqrt{x^2 + y^2}$ , ya que si  $\theta$  es el ángulo que forma el péndulo con la vertical se tiene

$$\sqrt{x^2 + y^2} = l \sin \theta \approx l\theta, \quad z = l(1 - \cos \theta) \approx \frac{l\theta^2}{2}.$$

Podemos por tanto despreciar en las ecs. (4.29) las cantidades  $z, \dot{z}$  y  $\ddot{z}$  frente a  $x, y$  y sus derivadas. En particular, de la última de estas ecuaciones se sigue que

$$\frac{T}{m} \approx g_0 - 2\omega \dot{y} \cos \lambda \approx g_0,$$

ya que  $g_0/\omega$  es del orden de  $10^5 \text{ m s}^{-1}$ . Sustituyendo en las dos primeras ecuaciones de (4.29) y despreciando el término proporcional a  $\dot{z}$  se llega finalmente al siguiente sistema en las coordenadas  $(x, y)$ :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha^2 x = 2\omega \dot{y} \sin \lambda \\ \ddot{y} + \alpha^2 y = -2\omega \dot{x} \sin \lambda, \end{cases} \quad (4.30)$$

donde

$$\alpha \equiv \sqrt{\frac{g_0}{l}}$$

es la frecuencia natural del péndulo.

Las ecuaciones anteriores se resuelven fácilmente introduciendo la variable compleja

$$u = x + iy,$$

en términos de la cual adoptan la forma sencilla

$$\ddot{u} + 2i\Omega \dot{u} + \alpha^2 u = 0, \quad \text{con } \Omega \equiv \omega \sin \lambda. \quad (4.31)$$

Se trata de una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes y polinomio característico

$$p(s) = s^2 + 2i\Omega s + \alpha^2,$$

cuyas raíces son los números complejos

$$s_{\pm} = -i\Omega \pm i\sqrt{\Omega^2 + \alpha^2}.$$

A todos los efectos prácticos, puede despreciarse el término  $\Omega^2$  en el radical frente a  $\alpha^2$ , ya que<sup>2</sup>

$$\frac{\Omega^2}{\alpha^2} \leq \frac{\omega^2 l}{g_0} = \frac{l}{1.84422 \cdot 10^9 \text{ m}}.$$

Por tanto

$$s_{\pm} \simeq -i\Omega \pm i\alpha,$$

y la solución general de (4.31) está dada en excelente aproximación por

$$u = e^{-i\Omega t} (c_1 e^{i\alpha t} + c_2 e^{-i\alpha t}), \quad (4.32)$$

con  $c_1, c_2$  constantes en general *complejas*.

Hallemos, por ejemplo, la solución de las ecs. (4.30) que verifica las condiciones iniciales

$$x(0) = x_0 > 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0, \quad (4.33)$$

es decir cuando la masa del péndulo se suelta sin velocidad a una distancia  $x_0$  de la vertical en el plano  $Oxz$ . Si no existiera la rotación de la Tierra, las ecuaciones del movimiento (4.30) con las condiciones iniciales (4.33) tendrían la solución

$$x = x_0 \cos(\alpha t), \quad y = 0.$$

<sup>2</sup>Más precisamente,

$$s_{\pm} = -i\Omega \pm i\alpha \sqrt{1 + \frac{\Omega^2}{\alpha^2}} = i\alpha \left( \pm 1 - \frac{\Omega}{\alpha} + O\left(\frac{\Omega^2}{\alpha^2}\right) \right),$$

por lo que el término despreciado es de orden  $O(\Omega/\alpha)$  frente al término más pequeño retenido ( $-i\Omega$ ).

En otras palabras, el péndulo oscilaría con frecuencia  $\alpha$  y amplitud  $x_0$  alrededor de la vertical en el plano  $Oxz$ . Cuando  $\omega > 0$ , la solución (4.32) que verifica las condiciones (4.33) se calcula fácilmente teniendo en cuenta que

$$u(0) = x(0) + iy(0) = x_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{x}(0) + i\dot{y}(0) = 0. \quad (4.34)$$

Imponiendo estas condiciones se obtiene

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_0, \\ i\alpha(c_1 - c_2) - i\Omega(c_1 + c_2) = i\alpha(c_1 - c_2) - i\Omega x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 - c_2 = \frac{\Omega}{\alpha} x_0 \simeq 0,$$

cuya solución aproximada es

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2} x_0.$$

Por tanto la solución de la ec. (4.31) buscada es aproximadamente

$$u = x_0 e^{-i\Omega t} \cos(\alpha t). \quad (4.35)$$

Tomando la parte real y la imaginaria se obtiene la solución de las ecuaciones (4.30) con las condiciones iniciales (4.34):

$$x = \text{Re } u = x_0 \cos(\Omega t) \cos(\alpha t), \quad y = \text{Im } u = -x_0 \sin(\Omega t) \cos(\alpha t). \quad (4.36)$$

La proyección del vector  $\mathbf{r}$  sobre el plano  $Oxy$  es por tanto el vector

$$x_0 \cos(\alpha t) [\cos(\Omega t) \mathbf{e}_1 - \sin(\Omega t) \mathbf{e}_2] \equiv x_0 \cos(\alpha t) \mathbf{n}(t),$$

siendo

$$\mathbf{n}(t) = \cos(\Omega t) \mathbf{e}_1 - \sin(\Omega t) \mathbf{e}_2 \equiv R_3(-\Omega t) \mathbf{e}_1.$$

El plano del péndulo está determinada por los vectores  $\mathbf{e}_3$  y  $\mathbf{n}(t)$ . De la ecuación anterior se sigue que dicho plano forma un ángulo de  $-\Omega t$  con el plano  $Oxz$ , y por tanto:

En el hemisferio norte, el plano del péndulo gira en sentido *horario*, es decir, *este-sur* (ya que  $\dot{\theta} = -\Omega = -\omega \sin \lambda < 0$ ) con velocidad angular  $\Omega = \omega \sin \lambda$ . En el hemisferio sur la rotación del plano del péndulo es en sentido *antihorario* (ya que  $\sin \lambda < 0$ ), y en el ecuador ( $\lambda = 0$ ) no se observa.

Nótese que en cada período  $2\pi/\alpha$  del péndulo (tiempo en que  $\cos(\alpha t)$  efectúa una oscilación completa) el ángulo que forma el plano del péndulo con el plano  $Oxz$  avanza en  $-2\pi\Omega/\alpha$ , que por lo visto anteriormente es una cantidad muy pequeña. El período de la rotación del plano del péndulo está dado por

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega} \csc \lambda = \csc \lambda \text{ días sidéreos.}$$

Por ejemplo, a una latitud de  $30^\circ$  el período es de 2 días sidéreos, mientras que en Madrid ( $\lambda = 40^\circ 25'$ ) dicho período es de 1.5424 días sidéreos. Obsérvese, por último, que (con las aproximaciones realizadas) el movimiento de la masa del péndulo no es exactamente periódico a menos que la razón  $\alpha/\Omega$  sea un número racional (cf. la Fig. 4.5).

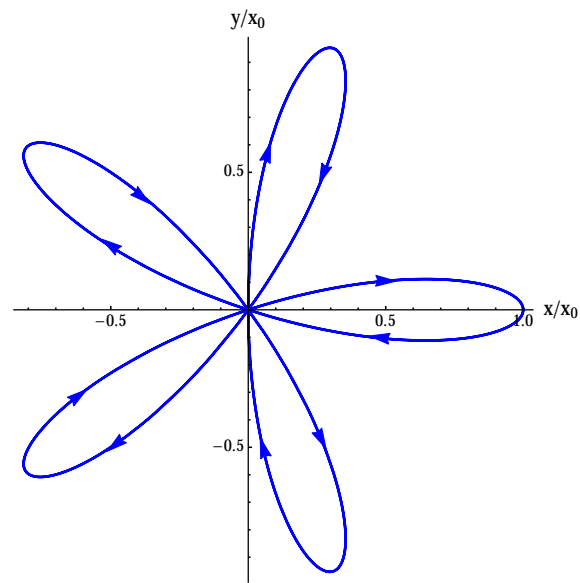


Figura 4.5. Proyección sobre el plano  $Oxy$  de la trayectoria seguida por la masa del péndulo si  $\alpha/\Omega = 5$ .



## Capítulo 5

# El sólido rígido

### 5.1 Momento angular y energía cinética de un sólido rígido

#### 5.1.1 Grados de libertad

Un **sólido rígido** es un sistema de partículas de masa  $m_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, N$ ) en que la *distancia*  $|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|$  entre dos partículas cualesquiera es constante. En otras palabras, un sólido rígido es un sistema mecánico de  $N$  partículas sujeto a las  $N(N-1)/2$  ligaduras holónomas independientes del tiempo (¡no todas ellas independientes entre sí!)

$$\boxed{(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta)^2 \equiv l_{\alpha\beta}^2 = \text{const.}, \quad 1 \leq \alpha < \beta \leq N.} \quad (5.1)$$

• Supondremos en lo que sigue que se cumple la tercera ley de Newton *en sentido fuerte*, es decir que la fuerza de ligadura  $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$  que ejerce la partícula  $\beta$  sobre la  $\alpha$  satisface

$$\boxed{\mathbf{F}_{\alpha\beta} = -\mathbf{F}_{\beta\alpha} \parallel \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta.}$$

Es fácil ver que en tal caso las ligaduras (5.1) son *ideales*, es decir se cumple el *principio de los trabajos virtuales*. En efecto, el trabajo realizado por las fuerzas de ligadura en un desplazamiento infinitesimal  $d\mathbf{r}_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, N$ ) de las partículas del sistema está dado por<sup>1</sup>

$$\sum_{\alpha \neq \beta} \mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} (\mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_\alpha + \mathbf{F}_{\beta\alpha} \cdot d\mathbf{r}_\beta) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot (d\mathbf{r}_\alpha - d\mathbf{r}_\beta). \quad (5.2)$$

Por otra parte, derivando las ecuaciones de ligadura se obtiene

$$(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) \cdot (d\mathbf{r}_\alpha - d\mathbf{r}_\beta) = 0, \quad 1 \leq \alpha < \beta \leq N,$$

de donde se sigue (al ser  $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$  paralela al vector  $\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta$ ) que

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot (d\mathbf{r}_\alpha - d\mathbf{r}_\beta) = 0, \quad 1 \leq \alpha < \beta \leq N.$$

Vemos por tanto que todos los sumandos en la última suma de (5.2) se anulan, y en consecuencia el trabajo realizado por las fuerzas de ligadura es efectivamente cero.

• Se dice que un sólido rígido es **genérico** si contiene tres partículas no colineales<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>En lo que sigue, las sumas sobre índices *griegos*  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  se supondrán extendidas de 1 a  $N$ , mientras que los índices de suma *latinos*  $i, j, k, \dots$  tomarán los valores de 1, 2, 3.

<sup>2</sup>Es fácil ver que si tres pun de un sólido rígido son no colineales en un cierto instante seguirán siéndolo en cualquier otro instante

En un sólido rígido genérico, siempre es posible construir un sistema de ejes móviles respecto del cual todas las partículas que componen el sólido están *fijas* (es decir, *en reposo*). Un sistema de ejes con esta propiedad se denomina **sistema de ejes del cuerpo** (*body axes* en inglés).

*Demostración.* Sean  $P, Q, R$  tres puntos del sólido no colineales. Un sistema de ejes del cuerpo se obtiene, por ejemplo, tomando como origen el punto  $P$ , el eje  $x$  en la dirección del vector  $\overrightarrow{PQ}$ , el eje  $y$  en la dirección de la recta del plano  $PQR$  perpendicular a  $\overrightarrow{PQ}$ , orientada de forma que la coordenada  $y$  del punto  $R$  sea (por ejemplo) positiva, y el eje  $z$  en la dirección de  $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ . En efecto, en este sistema de ejes los puntos  $P, Q$  y  $R$  están fijos por construcción (ejercicio). Veamos a continuación que las coordenadas  $(x, y, z)$  de cualquier otro punto  $S$  del sólido respecto de este sistema de ejes son constantes. En efecto, sean respectivamente  $(a, 0, 0)$  y  $(b, c, 0)$  las coordenadas de  $Q$  y  $R$  en el sistema de ejes que acabamos de describir (donde  $a, c > 0$  por construcción). Si  $r_1, r_2$  y  $r_3$  son las distancias (fijas) de  $S$  a los puntos  $P, Q, R$  del sólido se tiene

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2, \quad (x - a)^2 + y^2 + z^2 = r_2^2, \quad (x - b)^2 + (y - c)^2 + z^2 = r_3^2. \quad (5.3)$$

Restando la segunda ecuación de la primera se obtiene:

$$2ax = r_1^2 - r_2^2 + a^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{2} + \frac{r_1^2 - r_2^2}{2a}.$$

Por tanto la coordenada  $x$  es constante. Análogamente, restando la tercera ecuación de la segunda se deduce que

$$y = \frac{c}{2} + \frac{1}{2c} [r_2^2 - r_3^2 + (a - b)(2x - a - b)]$$

también es constante. Finalmente, de lo anterior y de cualquiera de las tres ecuaciones (5.3) se deduce que  $z^2$  es constante, lo que implica (por continuidad) que también  $z$  lo es. ■

- Evidentemente, hay infinitos sistemas de ejes con esta propiedad, obtenidos a partir del que acabamos de construir situando el origen en cualquier punto fijo en el sólido, como por ejemplo el CM, y aplicando a los ejes una rotación *constante*.

Un sólido rígido *genérico* tiene 6 grados de libertad.

En efecto, por lo visto anteriormente para determinar las coordenadas de cualquier partícula del sólido en un instante arbitrario  $t$  (dadas sus coordenadas en el instante inicial  $t_0$ ) basta conocer la posición del origen  $P$  de un sistema de ejes del cuerpo junto con la matriz de rotación  $O(t)$  que relaciona dichos ejes con los del sistema inercial (fijo) considerado. Para determinar la posición de  $P$  necesitamos 3 coordenadas (por ejemplo, sus coordenadas cartesianas), mientras que la matriz  $O(t) \in SO(3)$  se puede determinar mediante otras tres coordenadas independientes (por ejemplo, las dos coordenadas esféricas del eje de rotación  $\mathbf{n}$  y el ángulo de rotación  $\theta \in [0, \pi]$ ). En la práctica, la forma más extendida de determinar la matriz  $O(t)$  es a través de tres ángulos (los llamados *ángulos de Euler*), que definiremos más adelante. ■

- Las consideraciones anteriores son más intuitivas si las aplicamos a la *versión continua* de un sólido rígido, que consiste en una distribución continua de masa de densidad  $\rho(\mathbf{r})$  en un volumen  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  cuya *forma* no varía con el tiempo. Para determinar el estado del sistema basta especificar como se pasa de su posición inicial  $\Omega(0)$  a su posición final  $\Omega(t)$ . Para ello necesitamos una traslación  $\mathbf{X}(t)$  que lleve un punto cualquiera  $C(0)$  fijo en  $\Omega(0)$  (por ejemplo, su centro de masas) a su posición  $C(t)$  en el instante  $t$ , junto con una rotación  $O(t)$  alrededor de un eje que pase por  $C(t)$  que lleve  $\Omega(0) + \mathbf{X}(t)$  a  $\Omega(t)$ . Dicha rotación, a su vez, queda determinada por la orientación de un sistema de ejes  $\mathbf{e}_i(t) \equiv O(t)\mathbf{e}'_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , fijo en el cuerpo (siendo  $\mathbf{e}'_i$  el  $i$ -ésimo vector unitario del sistema inercial). Por tanto para fijar la posición del sólido en cada

instante  $t$  podemos utilizar las tres coordenadas cartesianas del desplazamiento  $\mathbf{X}(t)$ , junto con los tres parámetros necesarios para especificar la rotación  $O(t)$ . Como en el caso discreto, esto implica que *un sólido rígido continuo posee 6 grados de libertad*. Nótese, por último, que en un sólido continuo el centro de masas  $\mathbf{R}$  está dado por

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3\mathbf{r},$$

donde

$$M = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$$

es la masa total del sólido. En particular, si la densidad  $\rho$  del sólido es constante entonces

$$\mathbf{R} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \mathbf{r} d^3\mathbf{r},$$

siendo  $V$  el volumen del sólido.

*Ejercicio.* ¿Cuántos grados de libertad posee un *rotor* (sólido rígido cuyas partículas están en una recta)?

### 5.1.2 Momento angular y energía cinética

Calculemos a continuación el momento angular del sólido respecto de un sistema inercial cualquiera, al que continuaremos denominando (como en el capítulo anterior) *sistema de ejes fijos*.

A partir de ahora, tomaremos como origen del sistema de ejes del cuerpo  $S$  el *centro de masas* del sólido.

Sea, como de costumbre,  $\mathbf{R}(t)$  el vector que une el origen  $O'$  del sistema fijo con el centro de masas  $O$ . Si llamamos  $\mathbf{r}_{\alpha}$  y  $\mathbf{r}'_{\alpha}$  a las coordenadas de la partícula  $\alpha$  del sólido respecto del sistema de ejes del cuerpo con origen en el CM (el *sistema móvil* del capítulo anterior) y del sistema fijo, respectivamente, se tiene

$$\mathbf{r}'_{\alpha} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{\alpha}.$$

Como en este caso  $\dot{\mathbf{r}}_{\alpha} = 0$  (ya que en el sistema del cuerpo las partículas que constituyen el sólido se hallan en reposo), la ec. (4.16) se convierte en

$$\mathbf{v}'_{\alpha} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}, \quad (5.4)$$

donde  $\boldsymbol{\omega}$  es la velocidad angular instantánea de los ejes del cuerpo respecto de los ejes fijos, y hemos utilizado la notación

$$\mathbf{v}'_{\alpha} = \left( \frac{d\mathbf{r}'_{\alpha}}{dt} \right)_f, \quad \mathbf{V} = \left( \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_f.$$

- Como el sólido está en reposo en el sistema de ejes del cuerpo, por lo visto en la Sección 4.1 se tiene:

El vector  $\boldsymbol{\omega}(t)$  marca la dirección del **eje instantáneo de rotación** del sólido alrededor de su CM en el instante  $t$ , visto desde el sistema de ejes fijos.

Esta última afirmación se comprueba también fácilmente teniendo en cuenta que la variación del vector de posición respecto del CM de cualquier partícula del sólido,  $\mathbf{r}_\alpha$ , medida en el sistema fijo, es

$$\left(\frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt}\right)_f = \dot{\mathbf{r}}_\alpha + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}_\alpha = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}_\alpha. \quad (5.5)$$

Por tanto las partículas del sólido giran *instantáneamente* con la *misma* velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}(t)$  alrededor del eje paralelo al vector  $\mathbf{n}(t) = \boldsymbol{\omega}(t)/\omega(t)$  que pasa por el CM. ■

El momento lineal del sólido está dado por

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} = M\mathbf{V}, \quad (5.6)$$

donde

$$M = \sum_{\alpha} m_{\alpha}$$

es la masa del sólido, y hemos utilizado la identidad

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} = 0 \quad (5.7)$$

(ya que el miembro izquierdo es el vector de posición del CM respecto del propio CM). Nótese que la expresión (5.6) coincide con la ec. (1.65) obtenida en el Capítulo 1.

Hallemos a continuación el momento angular del sólido respecto del origen  $O'$  del sistema fijo (calculado en dicho sistema), dado por

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \times \mathbf{v}'_{\alpha}.$$

Sustituyendo la fórmula deducida anteriormente para  $\mathbf{v}'_{\alpha}$  y utilizando la identidad (5.7) obtenemos fácilmente

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{R} + \mathbf{r}_{\alpha}) \times (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) = M\mathbf{R} \times \mathbf{V} + \mathbf{R} \times \left( \boldsymbol{\omega} \times \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \right) + \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \right) \times \mathbf{V} \\ &+ \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) = \boxed{M\mathbf{R} \times \mathbf{V} + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Nótese que esta expresión es esencialmente la ec. (1.70) obtenida anteriormente, en virtud de la ec. (5.5). El primer término de (5.8) es simplemente el momento angular de una partícula situada en el CM y de masa igual a la del sólido. Para interpretar el segundo término, nótese en primer lugar que el momento angular del sólido respecto de un punto cualquiera  $P$ , medido en el sistema fijo, es por definición

$$\mathbf{L}_P = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{r}'_{\alpha} - \overrightarrow{O'P}) \times \mathbf{v}'_{\alpha},$$

donde  $\mathbf{r}'_{\alpha} - \overrightarrow{O'P}$  es el vector de posición de la partícula  $\alpha$  respecto del punto  $P$ . En particular, tomando  $P$  como el CM del sólido se tiene

$$\mathbf{L}_{\text{CM}} \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{v}'_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}), \quad (5.9)$$

donde hemos usado la fórmula para  $\mathbf{v}'_{\alpha}$  y la identidad (5.7). De la ec. (5.8) se sigue entonces que

$$\mathbf{L} = M\mathbf{R} \times \mathbf{V} + \mathbf{L}_{\text{CM}}. \quad (5.10)$$

Es importante advertir que, aunque  $\mathbf{L}_{\text{CM}}$  es el momento angular del sólido respecto del centro de masas, *está calculado en el sistema fijo  $S'$* , ya que las velocidades  $\mathbf{v}'_{\alpha}$  de las partículas en la ec. (5.9) están referidas a dicho sistema.

Procediendo del mismo modo podemos calcular la energía cinética del sólido (respecto del sistema inercial)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha}{}^2.$$

Sustituyendo de nuevo la fórmula para  $\mathbf{v}'_{\alpha}$  y utilizando la identidad (5.7) se obtiene la expresión

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2 = \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2, \quad (5.11)$$

que coincide con (1.74) en virtud de (5.5). En definitiva

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + T_{\text{rot}}, \quad T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2, \quad (5.12)$$

donde el primer término es la energía de traslación del CM, mientras que el segundo es la **energía rotacional** del sólido alrededor del CM, ya que

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( \frac{d\mathbf{r}_{\alpha}}{dt} \right)_f^2.$$

Utilizando las identidades vectoriales

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2,$$

las ecuaciones (5.10) y (5.12) se pueden escribir en la forma alternativa

$$\mathbf{L}_{\text{CM}} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [r_{\alpha}^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{\alpha}) \mathbf{r}_{\alpha}], \quad T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\omega^2 r_{\alpha}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{\alpha})^2], \quad (5.13)$$

de donde se deduce la importante identidad

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_{\text{CM}}. \quad (5.14)$$

Nótese que en todas las expresiones anteriores los vectores  $\mathbf{L}_{\text{CM}}$  y  $\boldsymbol{\omega}$ , y por tanto la energía rotacional  $T_{\text{rot}}$ , son en general funciones del tiempo.

## 5.2 Tensor de inercia

### 5.2.1 Definición y propiedades elementales

Las expresiones obtenidas en la sección anterior para el momento angular respecto del CM y la energía rotacional de un sólido rígido se pueden simplificar considerablemente mediante la introducción del llamado *tensor de inercia*. Dado que la energía rotacional se expresa en términos de  $\mathbf{L}_{\text{CM}}$  mediante la ec. (5.14), basta restringirnos al momento angular. La observación fundamental es que la ec. (5.13) para  $\mathbf{L}_{\text{CM}}$  indica claramente que, aunque en general  $\mathbf{L}_{\text{CM}}$  *no* es paralelo a la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ , es una *función lineal* de dicho vector. En otras palabras, podemos escribir

$$\mathbf{L}_{\text{CM}} = I \boldsymbol{\omega}, \quad (5.15)$$

donde  $I: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una aplicación lineal, que podemos representar por una matriz  $3 \times 3$  cuyos elementos de matriz calcularemos a continuación. Para ello basta notar que, si  $x_{\alpha i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) denota la  $i$ -ésima componente del vector  $\mathbf{r}_\alpha$  (en una base cualquiera), la componente  $i$  de  $\mathbf{L}_{CM}$  está dada por

$$L_{CM,i} = \omega_i \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha}^2 - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha i} \sum_j \omega_j x_{\alpha j} = \omega_i \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha}^2 - \sum_j \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha i} x_{\alpha j} \\ \sum_j \omega_j \delta_{ij} \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha}^2 - \sum_j \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha i} x_{\alpha j} = \sum_j \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\delta_{ij} r_{\alpha}^2 - x_{\alpha i} x_{\alpha j}).$$

Se tiene por tanto

$$L_{CM,i} = \sum_j I_{ij} \omega_j, \quad (5.16a)$$

donde el elemento de matriz  $I_{ij}$  está dado por

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\delta_{ij} r_{\alpha}^2 - x_{\alpha i} x_{\alpha j}). \quad (5.16b)$$

La aplicación lineal  $I$  cuyos elementos de matriz están dados por (5.16b) se denomina **tensor de inercia** del sólido<sup>3</sup>. Es importante observar que, aunque tanto  $\mathbf{L}_{CM}$  como  $\boldsymbol{\omega}$  en general dependen de  $t$ , los elementos de matriz (5.16b) del tensor de inercia son *constantes en el sistema de ejes del cuerpo*. En efecto, en el sistema de ejes del cuerpo las coordenadas cartesianas  $x_{\alpha i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) de las partículas del sólido no dependen del tiempo. En otras palabras:

*En el sistema de ejes del cuerpo, el tensor de inercia es una matriz constante característica del sólido, que solo depende de la elección inicial de dichos ejes.*

- De la expresión (5.16b) se sigue inmediatamente que el tensor de inercia es *simétrico*:

$$I_{ij} = I_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Los elementos de matriz diagonales del tensor de inercia están dados por

$$I_{ii} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha j}^2 + x_{\alpha k}^2), \quad i = 1, 2, 3,$$

con  $(i, j, k)$  distintos entre sí. En otras palabras,

$$I_{ii} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha i}^2,$$

donde  $d_{\alpha i}$  es la distancia de la partícula  $\alpha$  al eje  $i$ . Por tanto el elemento de matriz  $I_{ii}$  es el llamado **momento de inercia** del sólido respecto del eje  $\mathbf{e}_i$ . Los elementos extradiagonales de  $I$  están dados simplemente por

$$I_{ij} = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha i} x_{\alpha j}, \quad 1 \leq i \neq j \leq 3,$$

es decir son los **productos de inercia** del sólido (con signo negativo). En el caso de un sólido continuo  $\Omega$  de densidad  $\rho(\mathbf{r})$ , hay que reemplazar las expresiones anteriores por sus análogas continuas:

$$I_{ij} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) (\delta_{ij} r^2 - x_i x_j) d^3 \mathbf{r}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (5.17)$$

<sup>3</sup>La denominación es debida a que en general una aplicación lineal es un tensor una vez covariante y otra contravariante, aunque en coordenadas cartesianas *ortogonales* no hay distinción entre índices covariantes y contravariantes.

o, más detalladamente,

$$I_{ii} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) (x_j^2 + x_k^2) d^3\mathbf{r}, \quad i = 1, 2, 3,$$

(con  $(i, j, k)$  distintos entre sí) junto con

$$I_{ij} = - \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) x_i x_j d^3\mathbf{r}, \quad 1 \leq i \neq j \leq 3.$$

• En virtud de la identidad (5.14), la energía rotacional del sólido se expresa en términos de la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  y del tensor de inercia  $I$  mediante la fórmula

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot (I\boldsymbol{\omega}). \quad (5.18)$$

En otras palabras,  $T_{\text{rot}}$  es una *forma cuadrática* en las componentes de  $\boldsymbol{\omega}$ , cuya matriz está dada de nuevo por las expresiones (5.16b). Como  $T_{\text{rot}} \geq 0$  para todo  $\boldsymbol{\omega}$ , dicha forma cuadrática —o, equivalentemente, el tensor de inercia  $I$ — es *semidefinida positiva*. Nótese también que, utilizando la notación matricial habitual, podemos escribir la expresión anterior en la forma

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T I \boldsymbol{\omega},$$

si interpretamos  $\boldsymbol{\omega}$  como el vector *columna* cuyo  $i$ -ésima componente es  $\omega_i$  e  $I$  como la matriz real  $3 \times 3$  con elementos de matriz  $I_{ij}$ .

• De la ec. (5.18) se deduce que la energía rotacional del sólido se puede expresar también en la forma

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega^2 \mathbf{n} \cdot I \mathbf{n},$$

donde  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\omega}/\omega$  es la dirección del eje instantáneo de rotación alrededor del CM. Comparando con la ecuación (5.12) se obtiene

$$\mathbf{n} \cdot I \mathbf{n} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2.$$

Si  $\theta_{\alpha}$  es el ángulo formado por los vectores  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{r}_{\alpha}$  se tiene

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2 = r_{\alpha}^2 \sin^2 \theta_{\alpha} = d_{\alpha}^2(\mathbf{n}),$$

donde  $d_{\alpha}(\mathbf{n})$  denota la distancia de  $\mathbf{r}_{\alpha}$  al eje  $\mathbf{n}$ . Por tanto

$$\mathbf{n} \cdot I \mathbf{n} = \sum_{\alpha} d_{\alpha}^2(\mathbf{n})$$

es el momento de inercia del sólido respecto de su eje instantáneo de rotación  $\mathbf{n}$ , que denotaremos por  $I_{\mathbf{n}}$ , en términos del cual la energía rotacional  $T_{\text{rot}}$  está dada por

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{\mathbf{n}} \omega^2.$$

### 5.2.2 Teorema de Steiner

Veamos a continuación como varía el tensor de inercia cuando lo calculamos respecto de un punto cualquiera  $P$  que no necesariamente coincide con el centro de masas  $C$ . Si denotamos por  $\tilde{\mathbf{r}}_\alpha$  el vector de posición de la partícula  $\alpha$  respecto del punto  $P$ , el tensor de inercia  $I_P$  tomando  $P$  como origen está dado por

$$(I_P)_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\delta_{ij} \tilde{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 - \tilde{x}_{\alpha i} \tilde{x}_{\alpha j}). \quad (5.19)$$

Teniendo en cuenta que

$$\tilde{\mathbf{r}}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{a},$$

donde  $\mathbf{a} = \overrightarrow{CP}$ , y sustituyendo en la expresión anterior para  $I_P$  se obtiene

$$(I_P)_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\delta_{ij} (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{a})^2 - (x_{\alpha i} - a_i)(x_{\alpha j} - a_j)] = I_{ij} + M(\mathbf{a}^2 \delta_{ij} - a_i a_j) \\ - 2\delta_{ij} \mathbf{a} \cdot \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_\alpha + a_i \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha j} + a_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha i}.$$

Los últimos tres términos se anulan en virtud de la identidad (5.7), por lo que finalmente queda

$$(I_P)_{ij} = I_{ij} + M(\mathbf{a}^2 \delta_{ij} - a_i a_j), \quad (5.20)$$

identidad conocida como *teorema de Steiner*. Nótese que el segundo sumando de (5.20) no es otra cosa que el tensor de inercia respecto del CM de una partícula de masa  $M$  situada en el nuevo origen  $P$ .

Si un punto  $P$  fijo en el sólido está fijo también en algún sistema inercial, es posible (y de hecho suele ser muy ventajoso) situar el origen  $O'$  de dicho sistema en  $P$ . En tal caso el vector  $\mathbf{R} = \overrightarrow{O'C} \equiv \overrightarrow{PC}$  es constante en el sistema de ejes del cuerpo, ya que sus extremos  $P$  y  $C$  están ambos fijos en el sólido. Por tanto en este caso la velocidad del CM en el sistema fijo se puede expresar en la forma

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R},$$

y en consecuencia

$$\mathbf{v}'_{\alpha} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{\alpha} + \mathbf{R}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{\alpha}.$$

El momento angular  $\mathbf{L}$  del sólido respecto de  $P \equiv O'$  está dado por

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \times \mathbf{v}'_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{\alpha}),$$

es decir se obtiene reemplazando  $\mathbf{r}_{\alpha}$  por  $\mathbf{r}'_{\alpha}$  en la expresión (5.10) de  $\mathbf{L}_{CM}$ . En otras palabras,

$$\mathbf{L} = I' \boldsymbol{\omega},$$

donde  $I'$  se obtiene a partir de  $I$  reemplazando  $\mathbf{r}_{\alpha}$  por  $\mathbf{r}'_{\alpha}$ . La aplicación lineal  $I'$  no es otra cosa que el tensor de inercia (5.19) respecto del origen  $P = O'$  del sistema de ejes fijos, y por tanto

$$\mathbf{L} = I' \boldsymbol{\omega}, \quad I' \equiv I_P. \quad (5.21)$$

Del mismo modo,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha}{}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{\alpha})^2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I' \boldsymbol{\omega}. \quad (5.22)$$



Nótese que  $I'$  se puede calcular a partir de  $I$  aplicando el teorema de Steiner (5.20), teniendo en cuenta que en este caso  $\mathbf{a} = \overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{PC} = -\overrightarrow{O'O} = -\mathbf{R}$ :

$$I'_{ij} = I_{ij} + M(\mathbf{R}^2 \delta_{ij} - X_i X_j),$$

donde  $X_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) son las componentes del vector  $\mathbf{R}$ . Obsérvese también que, al igual que  $I$ , la matriz  $I'$  es *constante* (independiente del tiempo) si las coordenadas de los vectores se calculan respecto del sistema de ejes del cuerpo.

*Nota:* a partir de ahora normalmente *omitiremos la prima* cuando quede claro por el contexto respecto de qué punto se calcula el tensor de inercia.

### 5.2.3 Ejes principales de inercia

Veamos a continuación cómo cambian las componentes del tensor de inercia (5.16b) (respecto del centro de masas  $o$ , en general, de cualquier punto  $P$  fijo en el sólido) cuando efectuamos una rotación de los ejes del sistema del cuerpo. Más concretamente, sea

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_j a_{ji} \mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, 3, \tag{5.23}$$

un segundo triedro positivamente orientado fijo en el cuerpo. Entonces la *matriz de cambio de base*

$$A \equiv (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$$

es una matriz ortogonal propia *constante* (es decir,  $A \in \text{SO}(3)$  es independiente de  $t$ ). Como es bien sabido, la transformación de las coordenadas ( $o$ , en general, de las componentes de cualquier vector) está dada por

$$x_i = \sum_j a_{ij} \tilde{x}_j;$$

en efecto,

$$\sum_j \tilde{x}_j \tilde{\mathbf{e}}_j = \sum_j \tilde{x}_j \sum_i a_{ij} \mathbf{e}_i = \sum_{i,j} a_{ij} \tilde{x}_j \mathbf{e}_i \equiv \sum_i x_i \mathbf{e}_i \implies x_i = \sum_j a_{ij} \tilde{x}_j.$$

Si denotamos por  $x$  al vector columna cuyas componentes son las coordenadas  $x_i$ , y análogamente  $\tilde{x} = (\tilde{x}_i)$ , entonces podemos escribir la relación anterior en la forma matricial

$$x = A \tilde{x}.$$

Utilizando esta notación, y denotando por  $I$  la matriz del tensor de inercia respecto del sistema de ejes  $\mathbf{e}_i$ , se tiene

$$L_{\text{CM}} = I\omega = IA\tilde{\omega} = A\tilde{L}_{\text{CM}} \implies \tilde{L}_{\text{CM}} = A^{-1}IA\tilde{\omega} \equiv \tilde{I}\tilde{\omega}.$$

Por tanto la matriz del tensor de inercia en el nuevo sistema de ejes está dada por

$$\tilde{I} = A^{-1}IA = A^TIA,$$

ya que la matriz  $A$  es ortogonal. Nótese que la energía rotacional en el nuevo sistema de ejes del cuerpo está dada por

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega^T I \omega = \frac{1}{2} \tilde{\omega}^T A^T I A \tilde{\omega} \equiv \frac{1}{2} \tilde{\omega}^T \tilde{I} \tilde{\omega},$$

lo que concuerda con la expresión que acabamos de obtener para la matriz  $\tilde{I}$ .

Es bien conocido que *una matriz simétrica real se puede diagonalizar mediante una transformación ortogonal propia*<sup>4</sup>. En otras palabras, es posible escoger la matriz  $A \in \text{SO}(3)$  de forma que en el nuevo sistema de ejes del cuerpo (5.23) se tenga

$$\tilde{I}_{ij} = \delta_{ij}I_i, \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

siendo  $I_1, I_2$  e  $I_3$  los *autovalores* del tensor de inercia  $I$ . Nótese que la matriz  $A$  es *constante* (es decir, independiente del tiempo), ya que los elementos de matriz del tensor de inercia son constantes en un sistema de ejes del cuerpo. Si los vectores  $\tilde{\mathbf{e}}_i$  están definidos por (5.23), siendo  $A \in \text{SO}(3)$  la matriz que diagonaliza  $I$ , entonces

$$I\tilde{\mathbf{e}}_i = I_i\tilde{\mathbf{e}}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.24)$$

En otras palabras, el vector  $\tilde{\mathbf{e}}_i$ , cuyas componentes respecto de la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  forman la  $i$ -ésima columna de la matriz de cambio de base  $A$ , es un autovector de  $I$  de autovalor  $I_i$ . Al ser  $A$  una matriz ortogonal propia, los vectores  $\tilde{\mathbf{e}}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) son una base ortonormal positivamente orientada de  $\mathbb{R}^3$ . Estos vectores están *fijos en el cuerpo*, ya que sus componentes respecto del sistema de ejes del cuerpo de partida  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  son los elementos de matriz de la matriz constante  $A$ . Por tanto:

Siempre es posible encontrar un sistema de ejes del cuerpo cada uno de cuyos vectores  $\tilde{\mathbf{e}}_i$  sea un *autovector* de la aplicación lineal  $I$ . En dicho sistema de ejes, la matriz del tensor de inercia  $I$  adopta la forma diagonal

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{pmatrix},$$

donde  $I_i$  es el autovalor correspondiente al autovector  $\tilde{\mathbf{e}}_i$ .

Los vectores  $\tilde{\mathbf{e}}_i$  que satisfacen las relaciones (5.24) se denominan **ejes principales de inercia** del sólido, y sus correspondientes autovalores  $I_i$  son los **momentos principales de inercia**. Como es bien sabido, los autovalores de la matriz  $(I_{ij})$ , es decir los momentos principales de inercia, son las raíces de la **ecuación secular**

$$\det(I_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0.$$

Nótese que los ejes principales de inercia, es decir los autovectores de la matriz  $(I_{ij})$ , solo están unívocamente determinados (salvo un signo) si todos los autovalores del tensor de inercia son distintos ente sí (es decir, son raíces *simples* de la ecuación secular).

• Si el sistema de ejes del cuerpo  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  es un sistema de ejes principales de inercia, las expresiones (5.15) y (5.18) adoptan la forma más sencilla

$$\mathbf{L}_{\text{CM}} = \sum_i I_i \omega_i \mathbf{e}_i, \quad T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2. \quad (5.25)$$

En particular, si el sólido gira alrededor del  $i$ -ésimo eje principal entonces

$$\mathbf{L}_{\text{CM}} = I_i \boldsymbol{\omega}, \quad T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_i \omega^2.$$

<sup>4</sup>Esencialmente, esto se debe a que: i) toda matriz simétrica real es diagonalizable; ii) sus autovalores son todos reales, y iii) dos autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales entre sí. De estas afirmaciones se sigue fácilmente que siempre es posible encontrar una base ortonormal (positivamente orientada) formada por autovectores de la matriz.

Si el origen del sistema de ejes fijo es también un punto fijo en el sólido, expresiones análogas a las anteriores son válidas para  $L$  y  $T$  sin más que reemplazar  $I$  por el tensor de inercia  $I'$  respecto del punto  $O'$ .

• Atendiendo a la multiplicidad de los autovalores de su tensor de inercia, los sólidos rígidos se pueden clasificar en las tres categorías siguientes:

1. *Trompo asimétrico:*  $I_i \neq I_j$  si  $i \neq j$
2. *Trompo axialmente simétrico:*  $I_i = I_j \neq I_k$  (con  $(i, j, k)$  distintos)
3. *Trompo esféricamente simétrico:*  $I_1 = I_2 = I_3$ .

*Ejemplo 5.1.* Estudiaremos en este ejemplo las implicaciones que determinadas *simetrías* de un sólido continuo  $\Omega$  tienen en relación con su tensor de inercia.

1) Si  $\Omega$  y  $\rho$  son invariantes bajo la reflexión  $x_i \mapsto -x_i$ , entonces

$$I_{ij} = 0, \quad \forall j \neq i.$$

En efecto, supongamos que (por ejemplo)  $\Omega$  es invariante bajo la reflexión de la coordenada  $x_1$  y  $\rho(-x_1, x_2, x_3) = \rho(x_1, x_2, x_3)$ . En tal caso, si efectuamos el cambio de variable

$$x_1 = -x'_1, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3$$

en la integral que proporciona la componente  $I_{1j}$  del tensor de inercia (con  $j \neq 1$ ), que por hipótesis transforma  $\Omega$  en sí mismo, obtenemos

$$\begin{aligned} -I_{1j} &= \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) x_1 x_j d^3\mathbf{r} = - \int_{\Omega'} \rho(-x'_1, x'_2, x'_3) x'_1 x'_j d^3\mathbf{r}' = - \int_{\Omega} \rho(x'_1, x'_2, x'_3) x'_1 x'_j d^3\mathbf{r}' = I_{1j} \\ &\Rightarrow I_{1j} = 0, \quad j \neq 1. \end{aligned}$$

2) Si  $\Omega$  y  $\rho$  son invariantes bajo el intercambio  $x_i \mapsto x_j$ , entonces

$$I_{ii} = I_{jj}, \quad I_{ik} = I_{jk} \quad (k \neq i, j).$$

En efecto, si (por ejemplo)  $\Omega$  es invariante bajo  $x_1 \mapsto x_2$  y  $\rho(x_2, x_1, x_3) = \rho(x_1, x_2, x_3)$  efectuando el cambio de variable

$$x_1 = x'_2, \quad x_2 = x'_1, \quad x_3 = x'_3$$

en la integral de  $I_{11}$  obtenemos

$$I_{11} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) (x_2^2 + x_3^2) d^3\mathbf{r} = \int_{\Omega'} \rho(x'_2, x'_1, x'_3) (x_1'^2 + x_3'^2) d^3\mathbf{r}' = \int_{\Omega} \rho(x'_1, x'_2, x'_3) (x_1'^2 + x_3'^2) d^3\mathbf{r}' = I_{22}.$$

Análogamente,

$$-I_{13} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) x_1 x_3 d^3\mathbf{r} = \int_{\Omega'} \rho(x'_2, x'_1, x'_3) x'_2 x'_3 d^3\mathbf{r}' = \int_{\Omega} \rho(x'_1, x'_2, x'_3) x'_2 x'_3 d^3\mathbf{r}' = -I_{23}.$$

Observaciones análogas pueden hacerse acerca de las coordenadas del *centro de masas*. Por ejemplo, si  $\Omega$  y  $\rho$  son invariantes bajo la reflexión  $x_i \mapsto -x_i$  entonces la coordenada  $i$  del centro de masas se anula, ya que (tomando, por sencillez,  $i = 1$ )

$$\begin{aligned} MX_1 &= \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) x_1 d^3\mathbf{r} = - \int_{\Omega'} \rho(-x'_1, x'_2, x'_3) x'_1 d^3\mathbf{r}' = - \int_{\Omega} \rho(x'_1, x'_2, x'_3) x'_1 d^3\mathbf{r}' = -MX_1 \\ &\Rightarrow X_1 = 0. \end{aligned}$$

Análogamente, si  $\Omega$  y  $\rho$  son invariantes bajo la transformación  $x_i \mapsto x_j$  entonces  $X_i = X_j$ . ■

*Ejemplo 5.2.* Supongamos que el sólido es un *sólido de revolución homogéneo* ( $\rho = \text{constante}$ ). Tomemos, en primer lugar, el eje  $e_3$  del sistema de ejes del cuerpo en la dirección del eje de revolución del sólido. En coordenadas cilíndricas  $(r, \varphi, z)$ , el sólido está dado por una ecuación de la forma

$$0 \leq r \leq f(z), \quad z_1 \leq z \leq z_2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

La simetría de rotación alrededor del eje  $z$  implica la invariancia del sólido bajo las transformaciones

$$x_1 \mapsto -x_1, \quad x_2 \mapsto -x_2, \quad x_3 \mapsto x_3.$$

Por tanto, el centro de masas del sólido es un punto del eje  $z$ , que tomaremos como el origen de coordenadas si queremos calcular el momento de inercia respecto del CM. Por el mismo motivo, las componentes del tensor de inercia satisfacen

$$I_{11} = I_{22}, \quad I_{ij} = 0 \quad (i \neq j).$$

Esto prueba que el tensor de inercia del sólido es diagonal, con momentos principales de inercia  $I_i = I_{ii}$  dados por

$$\begin{aligned} I_1 = I_2 &= \rho \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^{f(z)} dr \int_0^{2\pi} r d\varphi \cdot (z^2 + r^2 \sin^2 \varphi) \\ &= \boxed{\pi\rho \int_{z_1}^{z_2} z^2 f^2(z) dz + \frac{\pi\rho}{4} \int_{z_1}^{z_2} f^4(z) dz}, \\ I_3 &= \rho \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^{f(z)} dr \int_0^{2\pi} r d\varphi \cdot r^2 = \boxed{\frac{\pi\rho}{2} \int_{z_1}^{z_2} f^4(z) dz}. \end{aligned}$$

La densidad  $\rho$  se puede expresar en términos de la masa  $M$  del sólido mediante la fórmula

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi \int_{z_1}^{z_2} f^2(z) dz}.$$

Nótese que, en general,  $I_1 = I_2$  es distinto de  $I_3$ . Más precisamente, se verifica la relación

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_3 + \pi\rho \int_{z_1}^{z_2} z^2 f^2(z) dz.$$

Por tanto un sólido de revolución es en general un trompo axialmente simétrico. Obsérvese, además, que en este caso el eje de simetría es un eje principal de inercia, y también lo es cualquier eje perpendicular a él.

Por ejemplo, en el caso de un *cilindro* de radio  $a$  y altura  $h$  podemos tomar  $f(z) = a$ ,  $z_1 = -h/2$  y  $z_2 = h/2$ , ya que por simetría el centro de masas del cilindro es equidistante de sus bases. Por tanto

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{\pi}{2} \rho a^4 h = \frac{1}{2} M a^2, \\ I_1 = I_2 &= \frac{1}{2} I_3 + \pi\rho a^2 \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{1}{4} M a^2 + 2\pi\rho a^2 \int_0^{h/2} z^2 dz = \frac{1}{4} M a^2 + \frac{1}{12} \pi\rho a^2 h^3 \\ &= \frac{1}{4} M \left( a^2 + \frac{h^2}{3} \right). \end{aligned}$$

Nótese, en particular, que el cilindro es un trompo esféricamente simétrico si  $h = \sqrt{3} a$ . ■

### 5.3 Ecuaciones del movimiento de un sólido rígido

#### 5.3.1 Ecuaciones del movimiento de un sólido rígido en un sistema inercial

Dado que (en general) un sólido rígido tiene 6 grados de libertad, es de esperar que se necesiten 6 ecuaciones diferenciales para determinar su movimiento. Las tres primeras de estas ecuaciones son obviamente las ecuaciones del movimiento del centro de masas del sólido, que, como vimos en el Capítulo 1, son simplemente

$$M \left( \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \right)_f = \mathbf{F}. \quad (5.26)$$

En el miembro derecho

$$\mathbf{F} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}$$

denota la suma de las fuerzas *externas* que actúan sobre las partículas del sólido (recuérdese que, en virtud de la tercera ley de Newton, la suma de las fuerzas internas es nula). Las restantes tres ecuaciones son las ecuaciones del movimiento del momento angular del sólido respecto del origen  $O'$  del sistema fijo, es decir

$$\left( \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_f = \mathbf{N}. \quad (5.27)$$

De nuevo, en el miembro derecho  $\mathbf{N}$  denota el par total (respecto de  $O'$ ) de las fuerzas *externas* que actúan sobre cada partícula del sólido:

$$\mathbf{N} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha},$$

ya que las fuerzas internas no contribuyen a la suma si se cumple la tercera ley de Newton en sentido fuerte.

En la ecuación (5.27) tanto el momento angular como el par total de las fuerzas externas están calculados respecto del origen  $O'$  del sistema fijo. De hecho, *dicha ecuación también es válida si sustituimos  $\mathbf{L}$  por  $\mathbf{L}_{CM}$  y  $\mathbf{N}$  por el par de las fuerzas externas respecto del CM*, dado por

$$\mathbf{N}_{CM} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}. \quad (5.28)$$

En efecto, de la relación  $\mathbf{L} = M\mathbf{R} \times \mathbf{V} + \mathbf{L}_{CM}$  y de la ecuación del movimiento del CM se sigue que

$$\left( \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_f = \left( \frac{d\mathbf{L}_{CM}}{dt} \right)_f + \mathbf{R} \times \mathbf{F} = \mathbf{N} = \sum_{\alpha} (\mathbf{R} + \mathbf{r}_{\alpha}) \times \mathbf{F}_{\alpha} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \mathbf{N}_{CM},$$

y por tanto

$$\left( \frac{d\mathbf{L}_{CM}}{dt} \right)_f = \mathbf{N}_{CM}. \quad (5.29)$$

En general, si la fuerza total que actúa sobre el sistema es *nula* el par  $\mathbf{N}$  no depende del punto respecto del cuál se calcula.

En efecto, si  $\mathbf{F} \equiv \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} = 0$  y  $\mathbf{a}$  es un vector fijo se tiene

$$\sum_{\alpha} (\mathbf{r}'_{\alpha} + \mathbf{a}) \times \mathbf{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha} + \mathbf{a} \times \mathbf{F} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}.$$

*Ejercicio.* Probar que la condición para que un sólido rígido esté en equilibrio en un sistema inercial es que<sup>5</sup>  $\mathbf{F} = \mathbf{N} = 0$ .

<sup>5</sup>Supondremos, por sencillez, que el sólido es *genérico*. Para un sólido lineal, el resultado sigue siendo válido pero hay que cambiar ligeramente la definición de equilibrio y algunos pasos de la demostración (cf. el ejercicio siguiente).

*Demostración.* En general, el sólido está en equilibrio en un sistema inercial —es decir  $\mathbf{v}'_\alpha = 0$  para todo  $t$  y para todo  $\alpha$ — si y solo si  $\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} = 0$ , ya que<sup>6</sup>

$$\mathbf{v}'_\alpha = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha.$$

Supongamos, en primer lugar, que el sólido está en equilibrio. Entonces  $\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} = 0$ , y por tanto  $\mathbf{L} = M\mathbf{R} \times \mathbf{V} + I\boldsymbol{\omega} = 0$ . Sustituyendo en las ecuaciones del movimiento (5.26)-(5.27) se obtiene inmediatamente  $\mathbf{F} = \mathbf{N} = 0$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\mathbf{F} = \mathbf{N} = 0$  y que inicialmente las partículas del sólido están instantáneamente en reposo en un sistema inercial, es decir  $\mathbf{V}(0) = \boldsymbol{\omega}(0) = 0$  para todo  $t$ . Veamos entonces que el sólido está en equilibrio, es decir que  $\mathbf{V}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) = 0$ . En efecto, si  $\mathbf{F} = 0$  la ecuación del movimiento de  $\mathbf{R}$  implica que  $\mathbf{V}$  es constante en el sistema fijo. Como inicialmente  $\mathbf{V}(0) = 0$  se tiene  $\mathbf{V}(t) = 0$  para todo  $t$ . Además,  $\mathbf{F} = 0$  implica que  $\mathbf{N}_{\text{CM}} = \mathbf{N} = 0$ , y por tanto

$$\left(\frac{d\mathbf{L}_{\text{CM}}}{dt}\right)_f = \mathbf{N}_{\text{CM}} = 0 \implies \mathbf{L}_{\text{CM}} = \mathbf{L}_{\text{CM}}(0) = I\boldsymbol{\omega}(0) = 0 \quad \forall t.$$

Si el sólido es genérico el tensor de inercia  $I$  es invertible<sup>7</sup>, y por tanto

$$\mathbf{L}_{\text{CM}} = I\boldsymbol{\omega} = 0 \implies \boldsymbol{\omega} = 0 \quad \forall t. \quad \blacksquare$$

*Ejercicio.* Repetir el ejercicio anterior para un sólido *lineal*.

*Solución.* Si el sólido está contenido en una recta paralela al vector unitario  $\mathbf{n}$ , una rotación alrededor de esta recta actúa como la identidad. Es fácil probar entonces que el sólido está en equilibrio si y solo si  $\mathbf{V} = 0$  y  $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{n}$ . Si se cumplen estas dos condiciones entonces  $\mathbf{F} = 0$  y

$$\mathbf{L} = M\mathbf{R} \times \mathbf{V} + \mathbf{L}_{\text{CM}} = \mathbf{L}_{\text{CM}} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_\alpha \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha) = 0,$$

ya que  $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{n}$  es paralelo a  $\mathbf{r}_\alpha$  para todo  $\alpha$ . Recíprocamente, si  $\mathbf{F} = \mathbf{N} = 0$  y suponemos que inicialmente  $\mathbf{V}(0) = 0$ ,  $\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_0\mathbf{n}$ , procediendo como antes se obtiene

$$\mathbf{L}_{\text{CM}} = I\boldsymbol{\omega} = 0 \implies \boldsymbol{\omega} = \omega(t)\mathbf{n}.$$

Por tanto el cuerpo está en equilibrio. ■

*Ejercicio.* Probar que la condición de equilibrio de un sólido rígido hallada anteriormente es equivalente a  $\mathbf{F} = \mathbf{N}_{\text{CM}} = 0$ .

*Solución.* Si  $\mathbf{F} = 0$  el par de las fuerzas externas no depende del punto respecto del cual se calcula, y por tanto en este caso  $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{\text{CM}}$ . ■

Un caso particular que se presenta frecuentemente en la práctica es aquél en que la fuerza  $\mathbf{F}_\alpha$  que actúa sobre cada partícula del sólido se debe a un campo externo constante, al que las partículas se acoplan vía la “carga” correspondiente  $\lambda$ . En tal caso

$$\mathbf{F}_\alpha = \lambda_\alpha \mathbf{f}, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (5.30)$$

donde  $\mathbf{f}$  es independiente de  $\alpha$  y  $\lambda_\alpha$  es la carga de la partícula  $\alpha$ . Por ejemplo, este es el caso de la *fuerza gravitatoria terrestre* si la extensión del sólido es pequeña en comparación con su distancia al centro de la Tierra, de modo que el campo gravitatorio es aproximadamente uniforme

<sup>6</sup>En efecto,

$$\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha, \quad \forall \alpha \implies \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) = 0, \quad \forall \alpha \neq \beta.$$

De esto se sigue que  $\boldsymbol{\omega} = 0$ , y por tanto  $\mathbf{V} = 0$ . En efecto, si  $\boldsymbol{\omega} \neq 0$  entonces  $\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta$  sería paralelo a  $\boldsymbol{\omega}$  para  $\beta$  fijo y  $\alpha \neq \beta$ , por lo que el sólido estaría contenido en la recta que pasa por  $\mathbf{r}_\beta$  paralela al vector  $\boldsymbol{\omega}$ .

<sup>7</sup>Es fácil probar que un sólido rígido está contenido en la recta paralela al vector  $\mathbf{n}$  si y solo si  $I\mathbf{n} = 0$  (ejercicio).

en el sólido ( $\lambda_\alpha = m_\alpha$ ,  $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ ), y de la fuerza eléctrica en un *campo eléctrico uniforme* ( $\lambda_\alpha = e_\alpha$ ,  $\mathbf{f} = \mathbf{E}$ ). En tal caso

$$\mathbf{F} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} = \mathbf{f} \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = \Lambda \mathbf{f}, \quad \mathbf{N} = \left( \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \right) \times \mathbf{f},$$

siendo  $\Lambda \equiv \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}$  la carga total del sólido. Si (como ocurre en el caso de la fuerza gravitatoria)  $\Lambda \neq 0$ , definimos el *centro de cargas* del sólido mediante la ecuación

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\Lambda} \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} = \frac{1}{\Lambda} \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} (\mathbf{R} + \mathbf{r}_{\alpha}) = \mathbf{R} + \frac{1}{\Lambda} \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}. \quad (5.31)$$

Nótese que  $\mathbf{X}$  es un punto *fijo* en el sólido, ya que su vector de posición respecto del CM (también fijo en el sólido)

$$\mathbf{X} - \mathbf{R} = \frac{1}{\Lambda} \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \equiv \mathbf{X}_{\text{CM}}$$

es un vector constante en un sistema de ejes del cuerpo. En términos del vector  $\mathbf{X}$ , el par  $\mathbf{N}$  está simplemente dado por

$$\mathbf{N} = \mathbf{X} \times \mathbf{F}. \quad (5.32)$$

En otras palabras:

Si la carga total no se anula, para calcular el par total de las fuerzas externas podemos suponer que dichas fuerzas se aplican en el *centro de cargas*. En particular, para calcular el par total de las fuerzas gravitatorias que actúan sobre un sólido puede suponerse que dichas fuerzas están aplicadas en su *centro de masas*.

Análogamente, el par de las fuerzas externas respecto del CM está dado por

$$\mathbf{N}_{\text{CM}} = \left( \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \right) \times \mathbf{f} = \mathbf{X}_{\text{CM}} \times \mathbf{F} = (\mathbf{X} - \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F},$$

En el caso de la fuerza gravitatoria  $\mathbf{X} = \mathbf{R}$ , y por tanto  $\mathbf{N}_{\text{CM}} = 0$ . En otras palabras:

El par respecto del CM de las fuerzas gravitatorias  $\mathbf{F}_{\alpha} = m_{\alpha} \mathbf{g}$  es *nulo* (suponiendo la extensión del sólido despreciable frente a su distancia al centro de la Tierra).

Nótese, finalmente, que las fuerzas (5.30) son claramente *conservativas*, con potencial

$$V = -\mathbf{f} \cdot \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} = -\Lambda \mathbf{f} \cdot \mathbf{X} = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{X};$$

en otras palabras, también *a los efectos de calcular la energía potencial podemos considerar en este caso que la fuerza externa constante  $\mathbf{F}$  actúa en el punto  $\mathbf{X}$* . En particular, la energía potencial de un sólido rígido en el campo gravitatorio terrestre está dada por

$$V = -M \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}.$$

*Nota.* Si la carga total  $\Lambda$  se anula, obviamente no podemos definir el centro de cargas. En este caso la ec. (5.32) ha de ser reemplazada simplemente por

$$\mathbf{N} = \left( \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \right) \times \mathbf{f}.$$

Obsérvese también que en este caso el par total de las fuerzas externas es claramente independiente del punto respecto del cual se toma, ya que la fuerza externa total  $\mathbf{F} = \Lambda \mathbf{f}$  es nula.

### 5.3.2 Ecuaciones de Euler

Dado que la relación entre el momento angular y la velocidad angular es particularmente sencilla en un sistema de ejes principales de inercia fijo en el cuerpo, resulta muy útil formular la ecuación del movimiento del momento angular en este sistema. Supondremos, para ello, que el punto respecto del cual se calculan  $\mathbf{L}$ ,  $I$  y  $\mathbf{N}$  es, o bien el CM, o bien un punto *fijo* simultáneamente en el sólido y en el sistema de ejes fijo, que tomaremos como origen  $O'$  de este último sistema. En ambos casos,

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_f = \mathbf{N}, \quad \mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega},$$

con  $I$  constante en el sistema de ejes del cuerpo, ya que el punto respecto del cual se calculan  $\mathbf{L}$  e  $I$  está fijo en dicho sistema. Desarrollando la derivada temporal de  $\mathbf{L}$  en la ecuación (5.27) se obtiene entonces la fórmula

$$\dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N},$$

donde el punto denota derivación respecto del sistema de ejes del cuerpo. Utilizando la relación entre  $\mathbf{L}$  y  $\boldsymbol{\omega}$ , y teniendo en cuenta que  $I_{ij}$  es constante en el sistema de ejes del cuerpo, se llega inmediatamente a la ecuación

$$\boxed{I\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (I\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{N}.} \quad (5.33)$$

Si los ejes del cuerpo son ejes principales de inercia, la  $i$ -ésima componente de esta relación es

$$I_i \dot{\omega}_i + \omega_j (I_k \omega_k) - \omega_k (I_j \omega_j) = N_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

o bien

$$I_i \dot{\omega}_i - (I_j - I_k) \omega_j \omega_k = N_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.34a)$$

donde

$$(i, j, k) = \text{permutación cíclica de } (1, 2, 3). \quad (5.34b)$$

Las ecuaciones (5.34), es decir el sistema

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 &= N_1, \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 &= N_2, \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 &= N_3, \end{aligned}} \quad (5.35)$$

se conocen como **ecuaciones de Euler**. Recuérdese que estas ecuaciones son válidas si  $\mathbf{N}$  e  $I$  se calculan, o bien respecto del CM, o bien respecto de un punto fijo simultáneamente en el sólido y en el sistema inercial. Además, las cantidades  $\omega_i$  y  $N_i$  que aparecen en dichas ecuaciones son las componentes de los vectores  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\mathbf{N}$  en un sistema de ejes principales de inercia (en general *no* inercial).

Si el par total de las fuerzas externas es nulo y el origen  $O'$  del sistema inercial es un punto fijo en el sólido, se conservan  $\mathbf{L}_{O'} \equiv \mathbf{L}$  y  $T$ . Análogamente, si  $\mathbf{N}_{\text{CM}}$  es nulo se conservan  $\mathbf{L}_{\text{CM}}$  y la energía rotacional  $T_{\text{rot}}$ .

En el primer caso la conservación de  $\mathbf{L}$  es inmediata a partir de la ecuación del movimiento (5.27), mientras que la de  $T$  se deduce derivando la relación (5.22) en el sistema de ejes del cuerpo (lo cual es correcto, ya que  $T$  es un *escalar*). En efecto, al ser  $I$  una matriz simétrica se tiene

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \cdot I\boldsymbol{\omega}) = \frac{d}{dt} \sum_{i,j} I_{ij} \omega_i \omega_j = \sum_{i,j} I_{ij} (\dot{\omega}_i \omega_j + \omega_i \dot{\omega}_j) = 2 \sum_{i,j} \omega_i I_{ij} \dot{\omega}_j = 2\boldsymbol{\omega} \cdot I\dot{\boldsymbol{\omega}},$$



y por tanto (utilizando las ecuaciones de Euler en forma vectorial (5.33) con  $\mathbf{N} = 0$ )

$$\dot{T} = \boldsymbol{\omega} \cdot I\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times (I\boldsymbol{\omega})) = 0$$

(ya que  $\boldsymbol{\omega} \times (I\boldsymbol{\omega})$  es perpendicular a  $\boldsymbol{\omega}$ ). Del mismo modo, si  $\mathbf{N}_{\text{CM}}$  es nulo se conserva  $\mathbf{L}_{\text{CM}}$  en virtud de la ec. (5.29), junto con la energía rotacional  $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot (I\boldsymbol{\omega})$  (donde ahora  $I$  representa el tensor de inercia respecto del CM).

## 5.4 Movimiento inercial de un trompo simétrico

Estudiaremos en esta sección el movimiento de rotación de un sólido *axialmente simétrico* cuando se anula el par total de las fuerzas externas o bien respecto del CM, o bien respecto de un punto fijo simultáneamente en el sólido y en el sistema de ejes fijos. Esto ocurrirá evidentemente (en ambos casos) si el sólido es *libre*, es decir si sobre él no actúan fuerzas externas. Más generalmente, como vimos al final de la Sección 5.3.1, el par  $\mathbf{N}_{\text{CM}}$  es nulo si la única fuerza externa que actúa sobre el sólido es la gravedad terrestre (suponiendo la extensión del sólido despreciable frente a la distancia de sus puntos al centro de la Tierra). Antes de empezar nuestro estudio, es conveniente hacer una observación relacionada con la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ :

La velocidad angular instantánea  $\boldsymbol{\omega}$  de un sistema de ejes respecto de otro es *aditiva*.

En otras palabras, sean  $S_0$ ,  $S_1$  y  $S_2$  tres sistemas de ejes, y supongamos que en un cierto instante  $t$  el sistema de ejes  $S_1$  tiene velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}_1$  respecto de  $S_0$ , y a su vez  $S_2$  tiene velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}_2$  respecto de  $S_1$ . Entonces la velocidad angular de  $S_2$  respecto de  $S_0$  es

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2. \quad (5.36)$$

En efecto, sean  $\{\mathbf{e}'_i\}_{1 \leq i \leq 3}$ ,  $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq 3}$  y  $\{\mathbf{e}''_i\}_{1 \leq i \leq 3}$  respectivamente los ejes de los sistemas  $S_0$ ,  $S_1$  y  $S_2$ . Por definición de velocidad angular,

$$\left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}\right)_0 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}_i, \quad \left(\frac{d\mathbf{e}''_i}{dt}\right)_1 = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{e}''_i, \quad \left(\frac{d\mathbf{e}''_i}{dt}\right)_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}''_i.$$

Pero entonces

$$\left(\frac{d\mathbf{e}''_i}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\mathbf{e}''_i}{dt}\right)_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}''_i = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{e}''_i + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}''_i = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{e}''_i,$$

de donde se sigue la ec. (5.36).

*Nota.* En el resto de esta sección denotaremos por  $\mathbf{L}$  e  $I$  el momento angular y el tensor de inercia respecto de  $O'$  o del CM, según sea  $\mathbf{N} = 0$  o  $\mathbf{N}_{\text{CM}} = 0$  (en el primer caso, se supone que  $O'$  es un punto simultáneamente fijo en el sólido y en el sistema de ejes fijos).

Por lo visto en el Ejemplo 5.2, el eje de simetría del sólido es un eje principal de inercia, que tomaremos como eje  $\mathbf{e}_3$ . Además, por la simetría del sólido alrededor de dicho eje, los momentos principales de inercia  $I_1$  e  $I_2$  son iguales. Sustituyendo  $\mathbf{N} = 0$  e  $I_1 = I_2$  en las ecuaciones de Euler (5.35) se obtiene el sistema más sencillo

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3 &= 0, \\ I_1 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 &= 0, \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= 0, \end{aligned} \quad (5.37)$$

de donde se deduce inmediatamente (suponiendo que  $I_3 \neq 0$ , es decir que el sólido no es lineal) que

$$\omega_3 = \text{const.}$$

Llamando

$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3,$$

las dos primeras ecuaciones se escriben

$$\dot{\omega}_1 = -\Omega \omega_2, \quad \dot{\omega}_2 = \Omega \omega_1$$

o, utilizando notación compleja,

$$\dot{\omega}_1 + i\dot{\omega}_2 = i\Omega(\omega_1 + i\omega_2).$$

La solución de esta ecuación lineal de primer orden es

$$\omega_1 + i\omega_2 = (\omega_1(0) + i\omega_2(0))e^{i\Omega t}. \quad (5.38)$$

De (5.38) se sigue que

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = |\omega_1 + i\omega_2|^2 = \omega_1(0)^2 + \omega_2(0)^2 \equiv \omega_0^2$$

es constante, y por tanto también lo son  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_3^2}$  y el ángulo  $\alpha = \arctan(\omega_0/\omega_3)$  que forman los vectores  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\mathbf{e}_3$ . Hemos probado por tanto lo siguiente:

El módulo de la proyección de  $\boldsymbol{\omega}$  sobre el plano perpendicular a  $\mathbf{e}_3$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega$  y el ángulo  $\alpha$  que forman los vectores  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\mathbf{e}_3$  son constantes.

En términos del ángulo  $\alpha$  se tiene

$$\omega_3 = \omega \cos \alpha, \quad \omega_0 = \omega \sin \alpha, \quad \omega_1 + i\omega_2 = \omega \sin \alpha e^{i(\Omega t + \beta)}, \quad (5.39)$$

siendo  $\beta$  el ángulo que forma el vector  $\omega_1(0)\mathbf{e}_1 + \omega_2(0)\mathbf{e}_2$  con el eje  $\mathbf{e}_1$  (que podría tomarse igual a cero escogiendo adecuadamente el origen de tiempos). En otras palabras<sup>8</sup>:

En el *sistema de ejes del cuerpo* el vector  $\boldsymbol{\omega}$  gira alrededor del eje  $\mathbf{e}_3$  con velocidad angular constante  $\Omega$  (cf. la Fig. 5.1). La velocidad angular  $\Omega$  es positiva para  $I_3 > I_1$  (sólido “achatado”), mientras que es negativa para  $I_3 < I_1$  (sólido “alargado”).

Nótese que esto también se podía haber deducido directamente de las ecuaciones de Euler, ya que

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\omega}_1\mathbf{e}_1 + \dot{\omega}_2\mathbf{e}_2 = \Omega(-\omega_2\mathbf{e}_1 + \omega_1\mathbf{e}_2) = \Omega\mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\omega}.$$

Geoméricamente:

<sup>8</sup>Supondremos a partir de ahora que  $\omega$  y  $\alpha$  no se anulan. Si  $\omega \neq 0$  pero  $\alpha = 0$ ,  $\boldsymbol{\omega} = \omega_3\mathbf{e}_3$  es constante —tanto en el sistema de ejes del cuerpo como en el sistema fijo, ya que la derivada temporal de  $\boldsymbol{\omega}$  coincide en ambos sistemas en virtud de la ec. (4.12)— y por tanto el sólido gira con velocidad angular constante alrededor de su eje de simetría. Dicho eje está también fijo en el espacio, al ser en este caso  $\mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\omega}/\omega_3$  con  $\boldsymbol{\omega}$  constante. Supondremos también a partir de ahora que hemos escogido el sentido del eje  $\mathbf{e}_3$  de modo que  $\omega_3 \geq 0$ . De hecho, podemos tomar  $\omega_3 > 0$ , ya que si  $\omega_3 = 0$  entonces  $\Omega = 0$ ,  $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2$  es constante y el sólido gira de nuevo alrededor de un eje principal de inercia (perpendicular al eje de simetría) con velocidad angular constante.

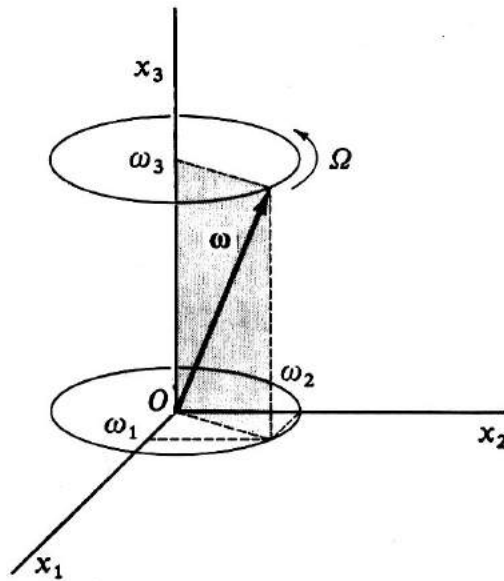


Figura 5.1. Precesión del vector  $\omega$  alrededor del eje fijo  $e_3$ .

Desde el punto de vista del *sistema de ejes del cuerpo*, el vector  $\omega$  se mueve trazando un cono de eje  $e_3$  y semiángulo  $\alpha$  con velocidad angular constante  $\Omega$ . Este cono se denomina **cono del cuerpo** o, más correctamente, *cono fijo en el cuerpo*.

El movimiento del momento angular  $L$  respecto del sistema del cuerpo se determina también fácilmente teniendo en cuenta la relación (5.25), que podemos escribir como sigue:

$$L_3 = I_3 \omega_3 = I_3 \omega \cos \alpha = \text{const.}, \quad L_1 + iL_2 = I_1(\omega_1 + i\omega_2) = I_1 \omega \sin \alpha e^{i(\Omega t + \beta)}. \quad (5.40)$$

En otras palabras, el vector  $L$  está en el plano formado por los vectores  $e_3$  y  $\omega$ , siendo  $L_3, L_1^2 + L_2^2, L$  y el ángulo  $\theta$  que forman  $L$  y  $\omega$  constantes en el sistema del cuerpo. Nótese que la constancia de  $L$  se sigue también de su constancia en el sistema de ejes fijo (ya que  $L$  es constante en dicho sistema, al ser  $N = 0$ ), y el carácter coplanario de los vectores  $e_3, \omega$  y  $L$  se podría haber probado directamente observando que

$$e_3 \cdot (\omega \times L) = (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = 0.$$

De la discusión anterior se sigue que:

Desde el punto de vista del sistema de ejes del cuerpo, el momento angular  $L$  rota con velocidad angular constante  $\Omega$  alrededor del eje  $e_3$ .

El ángulo  $\theta$  formado por los vectores  $L$  y  $e_3$  se puede calcular fácilmente observando que

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}}{L_3} = \frac{|L_1 + iL_2|}{I_3 \omega \cos \alpha} = \frac{I_1}{I_3} \tan \alpha;$$

nótese, en particular, que  $\theta > \alpha$  para un sólido alargado.

Desde el punto de vista del *sistema de ejes fijos*, el vector  $L$  es *constante* al ser nulo por hipótesis el par de las fuerzas externas. La dirección de  $L$ , que es por tanto constante en el sistema fijo, se denomina **dirección invariante** y se suele tomar como eje  $e'_3$ :

$$e'_3 = \frac{L}{L}.$$

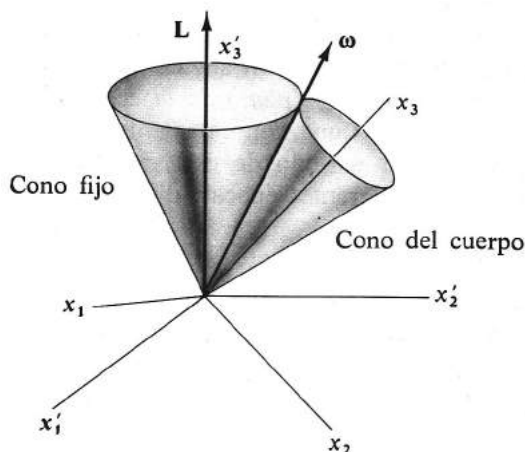


Figura 5.2. Cono fijo y cono del cuerpo (en el caso  $I_1 > I_3$ ).

Los vectores  $\omega$  y  $e_3$  giran ambos alrededor de  $L$  ya que, como acabamos de ver, el ángulo formado por los vectores  $\omega$  y  $e_3$  con el momento angular y el módulo de dichos vectores son constantes. Además, la velocidad angular  $\Omega_p$  con la que giran  $\omega$  y  $e_3$  alrededor de  $L$  es la misma, ya que estos tres vectores están en el mismo plano. Por tanto:

Desde el punto de vista del *sistema fijo* el vector  $\omega$  describe al moverse un cono de eje  $L$  y semiángulo  $|\theta - \alpha|$ , con una cierta velocidad angular que denotaremos  $\Omega_p$ . Este cono se denomina **cono del espacio** (más precisamente, *cono fijo en el espacio*, o simplemente **cono fijo**).

Nótese que el cono del cuerpo y el del espacio son tangentes en todo instante a lo largo de la generatriz paralela a  $\omega$  (cf. la Fig. 5.2). La situación es totalmente análoga para el vector  $e_3$ , ya que  $L$ ,  $\omega$  y  $e_3$  están en el mismo plano.

Para calcular la velocidad angular  $\Omega_p$ , consideremos un tercer sistema de ejes  $e''_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) formado por los vectores

$$e''_3 = e_3, \quad e''_1 = \frac{L_1 e_1 + L_2 e_2}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}}, \quad e''_2 = e''_3 \times e''_1 = \frac{e_3 \times L}{|e_3 \times L|}.$$

Nótese que  $L_1 e_1 + L_2 e_2$  es la proyección del momento angular  $L$  sobre el plano  $x_3 = 0$ . De esto se sigue que los vectores  $e''_1$  y  $e''_3$  generan el mismo plano que  $L$  y  $e_3$ , es decir

$$\text{lin}\{e''_1, e''_3\} = \text{lin}\{L, e_3\}.$$

La velocidad angular  $\omega'$  de los ejes  $\{e''_i\}_{1 \leq i \leq 3}$  respecto de los ejes fijos  $\{e'_i\}_{1 \leq i \leq 3}$  es igual a la velocidad angular  $\Omega_p e'_3$  con la cual gira el plano determinado por  $e_3$  y  $L$  alrededor de  $e'_3 \equiv L/L$ , ya que como acabamos de ver este plano coincide con el generado por los vectores  $e''_1$  y  $e''_3$ . Por otra parte, la velocidad angular  $\omega''$  del sistema de ejes del cuerpo  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq 3}$  respecto del los ejes  $\{e''_i\}_{1 \leq i \leq 3}$  es igual a  $-\Omega e_3$ , ya que hemos visto anteriormente que el plano  $\text{lin}\{L, e_3\} = \text{lin}\{e''_1, e''_3\}$  gira con velocidad angular  $\Omega$  alrededor de  $e_3$  respecto del sistema de ejes del cuerpo  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq 3}$ . Por la aditividad de las velocidades angulares, la velocidad angular de los ejes del cuerpo  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq 3}$  respecto del sistema de ejes fijos  $\{e'_i\}_{1 \leq i \leq 3}$ , que por definición es igual a  $\omega$ , está dada por

$$\omega = \omega' + \omega'' = \Omega_p \frac{L}{L} - \Omega e_3. \tag{5.41}$$

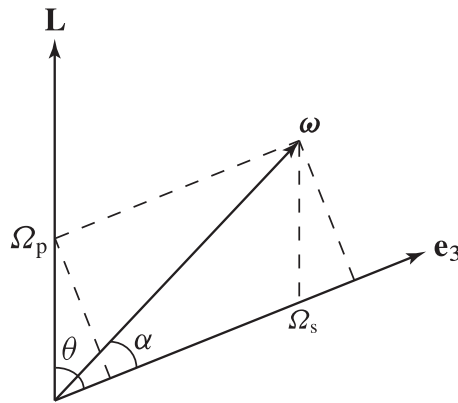


Figura 5.3. Vectores  $\mathbf{L}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\mathbf{e}_3$  en el movimiento inercial de un sólido rígido simétrico alrededor del eje  $\mathbf{e}_3$  (en el caso en que  $I_1 > I_3$ ).

La ecuación anterior, junto con el razonamiento que conduce a su demostración, pone de manifiesto que el movimiento del sólido puede describirse como la composición de una *precesión* de su eje de simetría  $\mathbf{e}_3$  alrededor de la dirección invariante (i.e., la dirección de  $\mathbf{L}$ ) con velocidad angular  $\Omega_p$  y una *rotación* alrededor de su eje de simetría con velocidad angular  $\Omega_s \equiv -\Omega$ .

De la Fig. 5.3 se sigue que

$$\omega \sin \alpha = \Omega_p \sin \theta,$$

y por tanto

$$\Omega_p = \omega \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} = \omega \sin \alpha \frac{L}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}} = \frac{L}{I_1}. \tag{5.42}$$

Teniendo en cuenta las ecs. (5.40) se obtiene

$$\Omega_p = \frac{\omega}{I_1} \sqrt{I_1^2 \sin^2 \alpha + I_3^2 \cos^2 \alpha} = \omega \sqrt{1 + \frac{I_3^2 - I_1^2}{I_1^2} \cos^2 \alpha}.$$

En particular,  $\Omega_p < \omega$  para un sólido alargado, mientras que  $\Omega_p > \omega$  para un sólido achatado.

*Ejercicio.* Deducir la ec. (5.42) directamente a partir de (5.41).

*Solución.* Tomando el producto escalar de (5.41) con el vector  $\mathbf{e}_3$  se obtiene

$$\Omega_p \frac{L_3}{L} = \Omega_p \frac{\omega_3 I_3}{L} = \omega_3 + \Omega = \omega_3 + \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 = \frac{I_3 \omega_3}{I_1} \implies \Omega_p = \frac{L}{I_1},$$

como antes. ■

*Ejercicio.* Estudiar la estabilidad de la rotación de un sólido asimétrico (i.e.,  $I_i \neq I_j$  si  $i \neq j$ ) alrededor de uno de sus ejes principales de inercia en el movimiento inercial.

*Solución.* Supongamos, por ejemplo, que el sólido gira alrededor de su eje principal de inercia  $\mathbf{e}_3$  con velocidad angular  $\boldsymbol{\omega} = \omega_3 \mathbf{e}_3$ . Nótese, en primer lugar, que  $\omega_3$  ha de ser *constante*, como se deduce fácilmente de las ecuaciones de Euler con  $\mathbf{N} = 0$  al ser  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ . Veamos a continuación qué ocurre si variamos ligeramente las condiciones iniciales

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0, \quad \omega_3(0) = \omega_3$$

que conducen a la solución anterior. A primer orden en  $\omega_1$  y  $\omega_2$  el producto  $\omega_1\omega_2$  se puede tomar como cero, por lo que la última ecuación de Euler implica que  $\omega_3$  sigue siendo aproximadamente constante. Derivando respecto de  $t$  las otras dos ecuaciones de Euler (con  $\omega_3$  constante) se obtiene fácilmente

$$\ddot{\omega}_i + \frac{\omega_3^2}{I_1 I_2} (I_1 - I_3)(I_2 - I_3)\omega_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

La solución  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ,  $\omega_3 = \text{const.}$  será estable si las soluciones de la ecuación anterior son *oscilantes*, e inestable en caso contrario. Por tanto la condición de estabilidad es que el producto  $(I_1 - I_3)(I_2 - I_3)$  sea *positivo*, es decir que o bien  $I_3 < I_{1,2}$ , o bien  $I_3 > I_{1,2}$ . Por tanto:

La rotación inercial alrededor de un eje principal de inercia es *estable* si y solo si dicho eje es el de *máximo* o *mínimo* momento principal de inercia.

## 5.5 Ángulos de Euler

Las ecuaciones de Euler deducidas en la Sección 5.3.2 tienen dos importantes desventajas, a saber: i) están escritas en términos de las componentes de la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}(t)$  en el sistema de ejes del cuerpo, cuyo movimiento no se conoce a priori, y ii) en el mejor de los casos, permiten calcular la velocidad angular, pero no proporcionan directamente la orientación del sistema de ejes del cuerpo respecto del sistema de ejes fijos en función del tiempo. Para evitar ambos inconvenientes, en esta sección vamos a describir una forma muy útil de caracterizar dicha orientación (o, en general, la orientación relativa de dos sistemas de ejes) en términos de tres ángulos apropiados. Una vez obtenida esta caracterización, expresaremos la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  en función de estos ángulos, lo que, en virtud de las ecuaciones de Euler, conduce a un sistema de segundo orden en dichos ángulos. Resolviendo este sistema se obtendrá finalmente la orientación de los ejes fijos en el sólido en cada instante, lo que determina el movimiento rotacional del sólido.

Para ello, veremos primero cómo llevar los ejes fijos  $\mathbf{e}'_i$  a los ejes del cuerpo  $\mathbf{e}_i$  mediante tres rotaciones sucesivas. En primer lugar, efectuemos una rotación de ángulo  $\phi \in [0, 2\pi)$  alrededor del eje  $x'_3$ , hasta llevar el eje  $x'_1$  a la dirección del vector  $\mathbf{e}'_3 \times \mathbf{e}_3$ . Si llamamos  $\mathbf{e}''_i$  a los nuevos ejes así obtenidos, entonces

$$\mathbf{e}''_i = R_{\mathbf{e}'_3}(\phi) \mathbf{e}'_i;$$

nótese, en particular, que

$$\mathbf{e}''_3 = \mathbf{e}'_3.$$

En notación matricial, si  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$  y  $\mathbf{x}'' = (x''_1, x''_2, x''_3)$  denotan respectivamente las coordenadas de un mismo vector respecto de los ejes  $\mathbf{e}'_i$  y  $\mathbf{e}''_i$  (consideradas como vectores columna) se tiene

$$\mathbf{x}' = R_3(\phi) \mathbf{x}''.$$

Como el nuevo eje  $x''_1$ , denominado **línea de nodos**, es perpendicular a los ejes  $x_3$  y  $x'_3$ , mediante una rotación de ángulo  $\theta \in [0, \pi]$  alrededor de  $x''_1$  podemos llevar el eje  $x'_3$  al eje  $x_3$ . Denotando por  $\mathbf{e}'''_i$  a los ejes así obtenidos se tiene

$$\mathbf{e}'''_i = R_{\mathbf{e}''_1}(\theta) \mathbf{e}''_i;$$

en particular,

$$\mathbf{e}'''_1 = \mathbf{e}''_1, \quad \mathbf{e}'''_3 = \mathbf{e}_3.$$

En términos de las coordenadas,

$$\mathbf{x}'' = R_1(\theta) \mathbf{x}''', \quad R_1(\theta) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

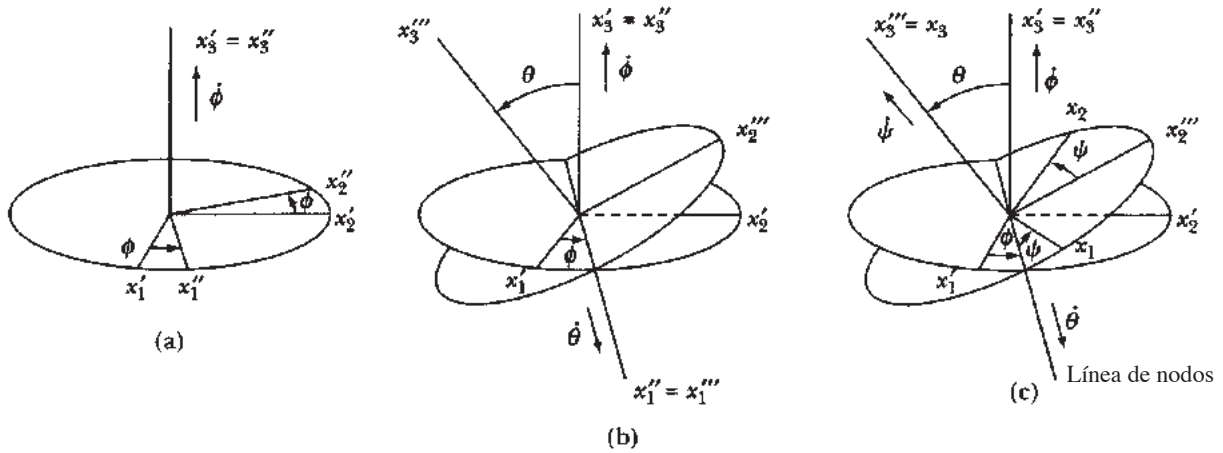


Figura 5.4. Ángulos de Euler.

Los nuevos ejes  $x_1''' \equiv x_1''$  y  $x_2'''$  están en el plano perpendicular a  $e_3$ , por lo que podemos hacerlos coincidir con los ejes  $x_1$  y  $x_2$  del sistema del cuerpo mediante una rotación de ángulo  $\psi \in [0, 2\pi)$  alrededor de  $x_3$ , sin variar este último eje. Por tanto,

$$e_i = R_{e_3}(\psi) e_i''',$$

que en términos de las coordenadas se escribe

$$\mathbf{x}''' = R_3(\psi) \mathbf{x}.$$

En definitiva,

$$\mathbf{x}' = R(\phi, \theta, \psi) \mathbf{x}, \tag{5.43}$$

siendo

$$R(\phi, \theta, \psi) = R_3(\phi)R_1(\theta)R_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \psi \sin \phi & -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \cos \psi \sin \phi & \sin \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \sin \psi \cos \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \psi \cos \phi & -\sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Nótese que

$$\mathbf{x} = R_3(\psi)^{-1}R_1(\theta)^{-1}R_3(\phi)^{-1}\mathbf{x}' = R_3(-\psi)R_1(-\theta)R_3(-\phi)\mathbf{x}' \equiv R(-\psi, -\theta, -\phi)\mathbf{x}'.$$

Los ángulos

$$\phi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in [0, \pi], \quad \psi \in [0, 2\pi), \tag{5.44}$$

que como hemos visto caracterizan completamente la orientación del sistema de ejes del cuerpo respecto del sistema de ejes fijos, reciben el nombre de **ángulos de Euler**. Nótese que estos ángulos tienen la siguiente interpretación geométrica (cf. la Fig. 5.4):

$\phi$  = ángulo entre el eje  $x_1'$  y la línea de nodos  
 $\theta$  = ángulo entre el eje  $x_3'$  y el eje  $x_3$   
 $\psi$  = ángulo entre la línea de nodos y el eje  $x_1$ .

En virtud del resultado sobre la aditividad de las velocidades angulares probado al principio de la Sección 5.4, la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}(t)$  se expresa en función de los ángulos de Euler mediante la fórmula

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{e}'_3 + \dot{\theta} \mathbf{e}''_1 + \dot{\psi} \mathbf{e}_3. \quad (5.45)$$

Es de interés expresar la velocidad angular en el sistema de ejes del cuerpo, ya que son las componentes de  $\boldsymbol{\omega}$  en este sistema las que intervienen en las ecuaciones de Euler. Para ello, nótese en primer lugar que

$$\mathbf{e}''_1 \equiv \mathbf{e}'''_1 = R_{\mathbf{e}_3}(\psi)^{-1} \mathbf{e}_1 = R_{\mathbf{e}_3}(-\psi) \mathbf{e}_1 = \cos \psi \mathbf{e}_1 - \sin \psi \mathbf{e}_2.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_3 \equiv \mathbf{e}''_3 &= R_{\mathbf{e}'_1}(-\theta) \mathbf{e}'''_3 = \sin \theta \mathbf{e}'''_2 + \cos \theta \mathbf{e}'''_3 = \sin \theta \mathbf{e}''_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3 = \sin \theta R_{\mathbf{e}_3}(-\psi) \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3 \\ &= \sin \theta (\sin \psi \mathbf{e}_1 + \cos \psi \mathbf{e}_2) + \cos \theta \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Utilizando las dos fórmulas anteriores en la ecuación (5.45) se obtiene finalmente la siguiente expresión para las componentes  $\omega_i$  de  $\boldsymbol{\omega}$  en el sistema de ejes del cuerpo:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta. \end{aligned} \quad (5.47)$$

## 5.6 El trompo de Lagrange

En esta sección estudiaremos el movimiento del denominado **trompo de Lagrange**, que consiste en un sólido axisimétrico con un punto fijo sometido únicamente a la gravedad terrestre (cf. la Fig. 5.5). Tomando el origen de coordenadas del sistema de ejes fijos en dicho punto, la energía cinética del trompo es

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot (I \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2,$$

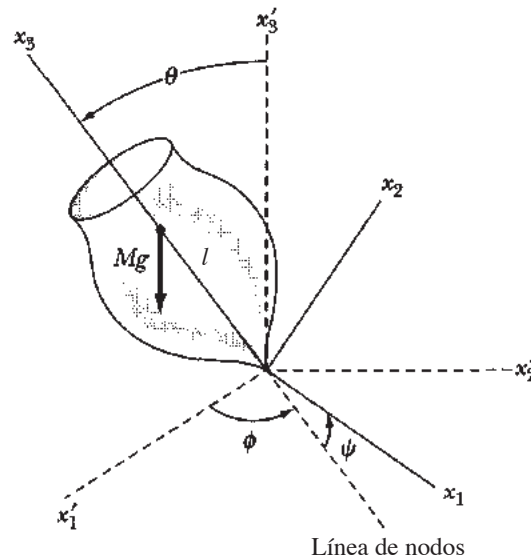


Figura 5.5. Trompo de Lagrange.



donde  $I_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) es el  $i$ -ésimo momento principal de inercia del trompo *respecto del origen*, y el eje  $x_3$  se toma en la dirección de su eje de simetría. Utilizando las expresiones (5.47) para las componentes de  $\boldsymbol{\omega}$  se obtiene fácilmente

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2.$$

La energía potencial del trompo es el potencial de la fuerza externa  $\mathbf{F} = -Mg\mathbf{e}'_3$  aplicada en el CM, es decir

$$V = MgX'_3.$$

Por simetría, el CM del trompo está en el eje de simetría  $x_3$ , a una distancia  $l$  del origen. Por tanto

$$V = Mgl \cos \theta,$$

y el lagrangiano del sistema está dado por

$$L = T - V = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta. \quad (5.48)$$

Los momentos canónicos asociados a las coordenadas generalizadas  $(\theta, \phi, \psi)$  son

$$\begin{aligned} p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_1 \dot{\theta}, \\ p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1 \sin^2 \theta \dot{\phi} + I_3 \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta), \\ p_\psi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Al ser  $L$  independiente de los ángulos  $\phi$  y  $\psi$  y del tiempo  $t$ , se conservan los momentos  $p_\phi$  y  $p_\psi$  y el hamiltoniano, que es igual a la energía  $T + V$  al ser  $L$  cuadrático en las velocidades generalizadas:

$$H = T + V = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + Mgl \cos \theta = E. \quad (5.50)$$

La existencia de estas tres leyes de conservación permite expresar el movimiento de la coordenada  $\theta$  mediante una integral, lo que a su vez determina el movimiento de los otros dos ángulos utilizando la conservación de  $p_\phi$  y  $p_\psi$ .

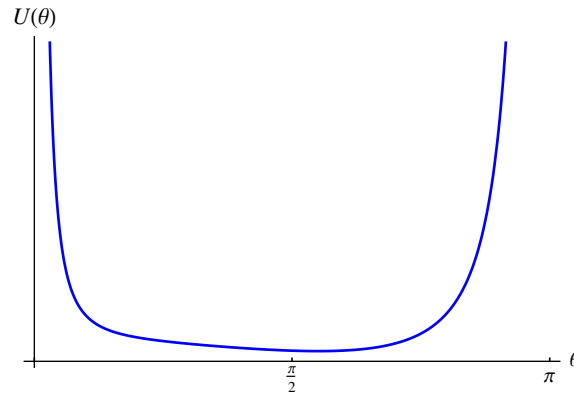
• En virtud de la tercera ecuación (5.47), el momento canónico  $p_\psi$  es igual a  $I_3 \omega_3$ , es decir a la componente del momento angular  $\mathbf{L}$  en la dirección del eje  $\mathbf{e}_3$ , que denotaremos por  $L_3$ . Análogamente, de las ecuaciones (5.46) y (5.47) se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}'_3 &\equiv L'_3 = \sin \theta (L_1 \sin \psi + L_2 \cos \psi) + \cos \theta L_3 = I_1 \sin \theta (\omega_1 \sin \psi + \omega_2 \cos \psi) + I_3 \omega_3 \cos \theta \\ &= I_1 \sin^2 \theta \dot{\phi} + I_3 \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = p_\phi. \end{aligned}$$

Por otra parte, el par de la fuerza gravitatoria está dirigido en la dirección de la línea de nodos, y por tanto es perpendicular a los vectores  $\mathbf{e}_3$  y  $\mathbf{e}'_3$ . Aplicando las ecuaciones del movimiento del momento angular en el sistema *fijo* con  $N'_3 \equiv \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}'_3 = 0$  se deduce inmediatamente que  $L'_3$  se conserva. La conservación de  $L_3 = I_3 \omega_3$  se deduce teniendo en cuenta que<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_3 \cdot \left( \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_f + \mathbf{L} \cdot \left( \frac{d\mathbf{e}_3}{dt} \right)_f = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{N} + \mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3) = N_3 + \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{L} \times \boldsymbol{\omega}) \\ &= \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{L} \times \boldsymbol{\omega}) = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = 0. \end{aligned}$$

<sup>9</sup>Alternativamente, de la tercera ecuación de Euler (5.35) con  $N_3 = 0$  se deduce que  $\omega_3$ , y por tanto  $L_3 = I_3 \omega_3$ , es constante en el sistema del cuerpo. Como  $L_3$  es un escalar, ha de ser también constante en el sistema de ejes fijo.

Figura 5.6. Potencial efectivo  $U(\theta)$ .

Para obtener la ecuación del movimiento del ángulo  $\theta$ , basta sustituir las relaciones

$$\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = \frac{p_\psi}{I_3}, \quad I_1 \sin^2 \theta \dot{\phi} = p_\phi - p_\psi \cos \theta \quad (5.51)$$

en la ec. (5.50), lo que conduce a una ecuación de primer orden en  $\theta$  de variables separadas:

$$\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta = E - \frac{p_\psi^2}{2I_3}. \quad (5.52)$$

Formalmente, esta es la ecuación del movimiento de una partícula de masa unidad y energía

$$\varepsilon = \frac{1}{I_1} \left( E - \frac{p_\psi^2}{2I_3} \right) \quad (5.53)$$

en el potencial unidimensional efectivo<sup>10</sup>

$$U(\theta) = \frac{(a - b \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} + c \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (5.54a)$$

siendo

$$a = \frac{p_\phi}{I_1}, \quad b = \frac{p_\psi}{I_1}, \quad c = \frac{Mgl}{I_1} > 0 \quad (5.54b)$$

(cf. la Fig. 5.6). El potencial anterior es singular para  $\theta = 0$  o  $\theta = \pi$ . Sin embargo, de la ley de conservación de  $p_\psi$  se sigue que si en algún instante  $\theta = 0$  (respectivamente  $\theta = \pi$ ) entonces  $a = b$  (resp.  $a = -b$ ). Probaremos más adelante que en tal caso  $U$  es, de hecho, regular en  $\theta = 0$  (resp.  $\theta = \pi$ ), y que además  $U'(0) = 0$  (resp.  $U'(\pi) = 0$ ).

Supondremos, por el momento, que

$$a \neq \pm b,$$

y por tanto que  $\theta \neq 0, \pi$ . En términos de la variable  $u = \cos \theta \in (-1, 1)$ , la ley de conservación de la energía se expresa en la forma

$$\dot{u}^2 = f(u), \quad (5.55a)$$

donde  $f(u)$  es el polinomio de grado 3 dado por

$$f(u) = 2(\varepsilon - cu)(1 - u^2) - (a - bu)^2. \quad (5.55b)$$

<sup>10</sup>Para que el ángulo  $\theta$  pueda variar entre  $\pi/2$  y  $\pi$  el trompo debe ser en realidad un giróscopo, no una peonza.

Formalmente, la ecuación anterior se puede utilizar para expresar el movimiento de la coordenada  $\theta$  mediante una integral:

$$t - t_0 = \pm \int^{\cos \theta} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} \equiv \pm \int^{\cos \theta} \frac{du}{\sqrt{2(\varepsilon - cu)(1 - u^2) - (a - bu)^2}}.$$

En la práctica, esta expresión no es de mucha utilidad, ya que para evaluar la integral es necesario utilizar funciones elípticas. Sin embargo, la ec. (5.55) proporciona una sencilla descripción cualitativa del movimiento que estudiaremos a continuación.

En primer lugar, como  $a \neq \pm b$  los puntos  $u = \pm 1$  no son raíces de  $f$ . Al ser  $c > 0$ , el polinomio  $f(u)$  es positivo para  $u \rightarrow \infty$  y negativo para  $u \rightarrow -\infty$ . Por otra parte, dicho polinomio ha de tener o bien una o bien tres raíces reales (contando multiplicidades), alguna de las cuales ha de pertenecer al intervalo físico  $(-1, 1)$ . En efecto, en caso contrario  $f$  no cambiaría de signo en dicho intervalo y por tanto sería negativa en él, al ser  $f(\pm 1) < 0$ . Además, en  $(-1, 1)$  ha de haber *dos* raíces de  $f$  (contando multiplicidades), pues si hubiera un número impar de raíces  $f(-1)$  y  $f(1)$  tendrían signos opuestos. Esto implica que  $f$  tiene necesariamente tres raíces reales, estando dos de ellas (contando multiplicidades) en el intervalo  $(-1, 1)$  y la restante en  $(1, \infty)$ . Por tanto la gráfica de  $f$  tiene el aspecto representado en la Fig. 5.7.

Si llamamos  $u_2 < u_1$  a las raíces de  $f$  en  $(-1, 1)$ , el movimiento tiene lugar en la región  $u_2 \leq u \leq u_1$ , o equivalentemente  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , siendo  $\theta_i = \arccos u_i$ . En otras palabras, el eje del trompo oscila entre los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , efectuando un movimiento denominado **nutación** (del latín “nutatio”, cabeceo). Si

$$\sin^2 \theta \dot{\phi} = a - b \cos \theta \equiv a - bu$$

no cambia de signo cuando  $\cos \theta$  varía entre  $u_1$  y  $u_2$ , la trayectoria trazada por eje del trompo en la esfera unidad es semejante a la de la Fig. 5.8 (izda.), mientras que si  $a - bu$  cambia de signo en el intervalo  $(u_2, u_1)$  entonces dicha trayectoria es análoga a la mostrada en la Fig. 5.8 (centro).

- Consideremos a continuación el caso limite en que  $a - bu$  se anula en uno de los extremos del intervalo  $[u_2, u_1]$ , que por el momento denotaremos por  $u_0$ , y mantiene por tanto el mismo signo para los demás valores de  $u$ . En tal caso, llamando  $u_0 = \cos \theta_0$  se tiene (al ser  $u_0$  uno de los puntos de retroceso)

$$a = bu_0 \implies f(u) = 2(\varepsilon - cu)(1 - u^2) - b^2(u - u_0)^2, \quad f(u_0) = 0 \implies \varepsilon = cu_0,$$

y por tanto

$$f(u) = (u - u_0)[2c(u^2 - 1) - b^2(u - u_0)].$$

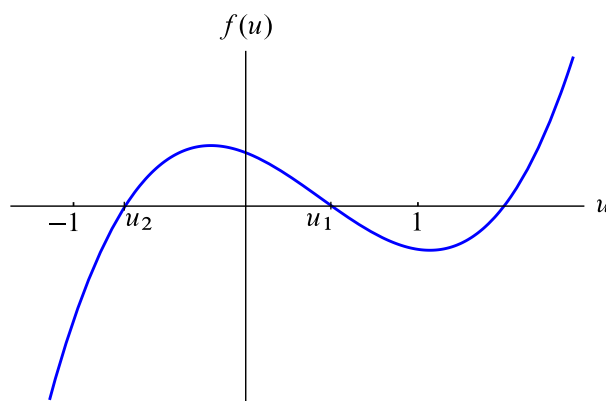


Figura 5.7. Polinomio  $f(u)$  (caso genérico).

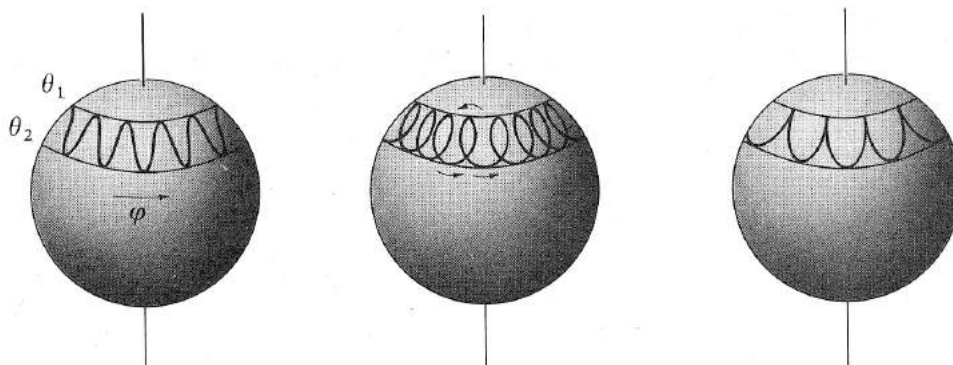


Figura 5.8. Trayectoria trazada por el eje del trompo de Lagrange en la esfera unidad.

Al ser

$$f'(u_0) = 2c(u_0^2 - 1) < 0$$

(ya que  $u_0 = \cos \theta_0 < 1$  y  $c > 0$ ),  $u_0$  es entonces igual a la raíz *mayor*  $u_1$ , y por tanto  $\theta_0 = \theta_1$ . La velocidad de precesión

$$\dot{\phi} = b(u_0 - u)$$

verifica por tanto  $b\dot{\phi} > 0$  para  $\theta_1 < \theta \leq \theta_2$  y  $\dot{\phi} = 0$  para  $\theta = \theta_1$ . En otras palabras, la trayectoria del eje del trompo presenta una *cúspide* en  $\theta = \theta_1$  (cf. la Fig. 5.8, drcha.). Nótese, por último, que el caso en que  $\dot{\phi}$  se anula para  $\theta = \theta_1$  se produce precisamente cuando el trompo se lanza en la forma habitual, es decir cuando inicialmente  $\dot{\theta}(0) = \dot{\phi}(0) = 0$ , ya que en tal caso (llamando de nuevo  $u_0 = \cos \theta_0 \neq \pm 1$  al valor inicial de  $u$ )

$$\dot{\phi}(0) = 0 \Rightarrow a - bu_0 = 0, \quad \dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow \dot{u}(0) = f(u_0) = -\sin \theta_0 \dot{\theta}(0) = 0.$$

Veamos a continuación bajo qué condiciones es posible que el trompo tenga precesión pero no nutación, es decir que las ecuaciones del movimiento tengan una solución constante  $\theta = \theta_0$ . (Por el momento, seguiremos suponiendo que  $a \neq \pm b$  y por tanto  $0 < \theta_0 < \pi$ .) En este caso la ecuación (5.55a) ha de tener una solución de equilibrio  $u = u_0$ , y por tanto

$$f(u_0) = f'(u_0) = 0. \quad (5.56)$$

Nótese que si  $\theta$  es constante también lo será la velocidad de precesión

$$\dot{\phi} = \frac{a - bu_0}{1 - u_0^2} \equiv \Omega_p$$

(recuérdese que  $\theta_0 \neq 0, \pi$ , y por tanto  $u \neq \pm 1$ ). Utilizando las condiciones (5.56) se obtiene

$$2(\varepsilon - cu_0) = \frac{(a - bu_0)^2}{1 - u_0^2} = (1 - u_0^2)\Omega_p^2,$$

y por tanto

$$\frac{1}{2}f'(u_0) = -2u_0(\varepsilon - cu_0) - c(1 - u_0^2) + b(a - bu_0) = -(1 - u_0^2)(u_0\Omega_p^2 - b\Omega_p + c).$$

En consecuencia, la velocidad de precesión  $\Omega_p$  ha de verificar la ecuación cuadrática

$$u_0\Omega_p^2 - b\Omega_p + c = 0.$$

Esta ecuación tiene soluciones reales si y solo si su discriminante es no negativo, es decir si

$$b^2 - 4cu_0 \geq 0,$$

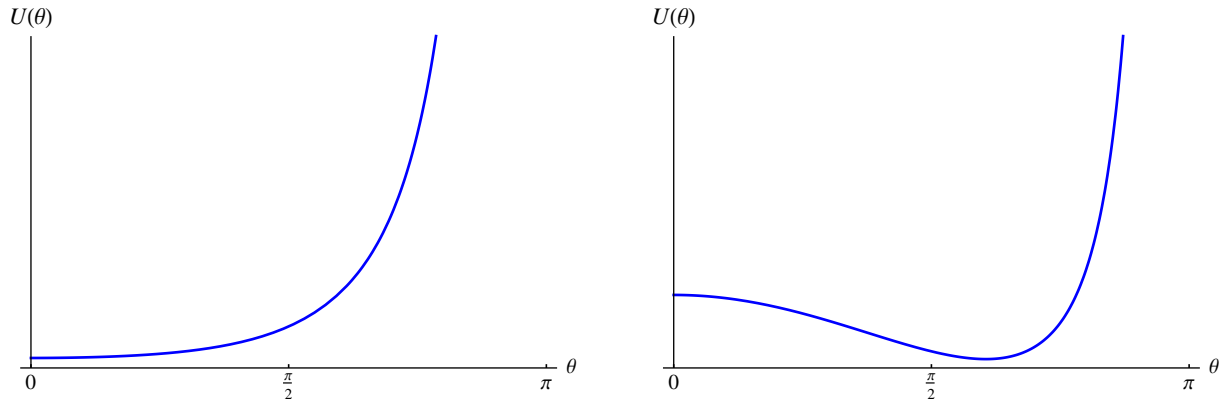


Figura 5.9. Potencial efectivo  $U(\theta)$  para  $a = b \geq 2\sqrt{c}$  (izda.) y  $a = b < 2\sqrt{c}$  (drcha.).

o equivalentemente

$$p_\psi^2 \equiv I_3^2 \omega_3^2 \geq 4MglI_1 \cos \theta_0. \quad (5.57)$$

Nótese que la condición anterior se cumple automáticamente si  $\theta_0 \geq \pi/2$ . Si se verifica (5.57), en general existirán *dos* frecuencias de precesión dadas por<sup>11</sup>

$$\Omega_{p,\pm} = \frac{1}{2u_0} \left( b \pm \sqrt{b^2 - 4cu_0} \right) = \frac{b}{2u_0} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4cu_0}{b^2}} \right) \equiv \frac{I_3 \omega_3}{2I_1 \cos \theta_0} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4MglI_1 \cos \theta_0}{I_3^2 \omega_3^2}} \right).$$

Si la frecuencia  $\omega_3$  es muy grande frente al término  $(MglI_1 \cos \theta_0)^{1/2}/I_3$ , el radical se puede aproximar por

$$1 - \frac{2MglI_1 \cos \theta_0}{I_3^2 \omega_3^2},$$

y por tanto

$$\Omega_{p,+} \approx \frac{I_3 \omega_3}{I_1 \cos \theta_0}, \quad \Omega_{p,-} \approx \frac{Mgl}{I_3 \omega_3}.$$

En la práctica, el rozamiento hace que  $\omega_3$  disminuya lentamente hasta que la condición (5.57) deja de cumplirse, momento en el cual el trompo comienza a cabecear.

• Estudiemos a continuación cómo es el movimiento del trompo cuando  $a = b$  (el caso en que  $a = -b$  se trata de forma análoga). En tal caso, el potencial efectivo  $U(\theta)$  está dado por

$$U(\theta) = \frac{a^2}{2} \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + c \cos \theta = \frac{a^2}{2} \tan^2(\theta/2) + c \cos \theta. \quad (5.58)$$

Desarrollando  $U$  hasta orden dos en  $\theta$  alrededor de  $\theta = 0$  se obtiene

$$U(\theta) = c + \frac{\theta^2}{2} \left( \frac{a^2}{4} - c \right) + O(\theta^4);$$

por tanto, si  $a^2 > 4c$ , es decir si

$$p_\psi^2 \equiv I_3^2 \omega_3^2 > 4MglI_1, \quad (5.59)$$

entonces la solución constante  $\theta = 0$  es un *equilibrio estable*. Es fácil ver que en este caso la derivada de  $U$  es positiva para  $0 < \theta < \pi$ , y por tanto el potencial tiene el aspecto de la Fig. 5.9 (izda.). En efecto,

$$\begin{aligned} U'(\theta) &= \frac{a^2}{2} \tan(\theta/2) \sec^2(\theta/2) - 2c \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \\ &= 2c \tan(\theta/2) \sec^2(\theta/2) \left( \frac{a^2}{4c} - \cos^4(\theta/2) \right) > 0, \quad 0 < \theta < \pi. \end{aligned}$$

<sup>11</sup>Si  $\theta_0 = \pi/2$  la velocidad de precesión es  $\Omega_p = c/b = Mgl/(I_3 \omega_3)$ .

Lo mismo ocurre si  $a^2 = 4c$ , es decir si

$$I_3^2 \omega_3^2 = 4MgLI_1,$$

pues en este caso

$$U'(\theta) = 2c \tan(\theta/2) \sec^2(\theta/2) (1 - \cos^4(\theta/2))$$

se anula para  $\theta = 0$  y es positivo para  $0 < \theta < \pi$ . Por el contrario, si  $a^2 < 4c$ , es decir si

$$I_3^2 \omega_3^2 < 4MgLI_1 \tag{5.60}$$

entonces  $\theta = 0$  es un *equilibrio inestable*. En este caso, la derivada de  $U$  se anula para

$$\cos(\theta/2) = \left(\frac{a^2}{4c}\right)^{1/4} \equiv \left(\frac{I_3^2 \omega_3^2}{4MgLI_1}\right)^{1/4},$$

que es de hecho un equilibrio estable, y el potencial tiene el aspecto de la Fig. 5.9 (drcha.). En la práctica, el rozamiento hace que disminuya la frecuencia  $\omega_3$  hasta que se verifica la condición (5.60), momento en el cual el trompo empieza a cabecear (“trompo dormido”).

## Capítulo 6

# Relatividad especial

### 6.1 Principios de la relatividad especial

Como vimos en el Capítulo 1, *las leyes de la mecánica tienen la misma forma en todos los sistemas inerciales*. Más concretamente, consideremos por ejemplo la transformación de Galileo

$$t' = t, \quad x'_1 = x_1 - vt, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad (6.1)$$

que relaciona las coordenadas espacio-temporales  $(t, x_1, x_2, x_3)$  de un suceso cualquiera en un sistema de referencia inercial (SRI)  $S$  con sus análogas  $(t', x'_1, x'_2, x'_3)$  en otro SRI  $S'$ , con ejes paralelos a los de  $S$ , cuyo origen  $O'$  se mueve respecto de  $S$  con velocidad *constante*  $v\mathbf{e}_1$  a lo largo del eje  $x_1$ . La segunda ley de Newton formulada en el sistema  $S$ ,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}),$$

se convierte entonces en

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}'(t', \mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}'), \quad \text{con } \mathbf{F}'(t', \mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}') = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \quad (\mathbf{r}' \equiv \mathbf{r} - vt\mathbf{e}_1, \quad \dot{\mathbf{r}}' \equiv \dot{\mathbf{r}} - v\mathbf{e}_1)$$

desde el punto de vista del sistema  $S'$ . En otras palabras, en ambos sistemas de referencia la aceleración de la partícula es igual a la fuerza que actúa sobre ella dividida por su masa, siendo la fuerza *igual* en ambos sistemas (pero expresada en términos de las coordenadas y velocidades de la partícula en cada uno de dichos sistemas). Una forma equivalente de enunciar este **principio de relatividad de Galileo** es la siguiente:

Ningún experimento *mecánico* permite distinguir entre dos sistemas de referencia inerciales.

En efecto, los experimentos mecánicos están basados en la segunda ley de Newton, que determina la *aceleración* de las partículas, y dicha aceleración es la misma en  $S$  que en  $S'$ :

$$\mathbf{a}' = \ddot{\mathbf{r}}' = \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r} - vt\mathbf{e}_1) = \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}.$$

En otras palabras:

Todos los sistemas inerciales son *equivalentes* desde el punto de vista de la mecánica newtoniana.

A finales del siglo XIX, se planteó la cuestión de si el principio de relatividad de Galileo se aplicaba también a las ecuaciones de Maxwell, que gobiernan los fenómenos electromagnéticos —en particular, la propagación de las *ondas electromagnéticas*, incluida la *luz*. Dicho de otro

modo ¿es posible distinguir entre dos sistemas inerciales mediante algún fenómeno de tipo electromagnético (en particular, luminoso)? Para responder a esta pregunta, recuérdese que en el vacío los potenciales electromagnéticos  $A_0 \equiv \Phi/c$  y  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$  obedecen la ecuación de ondas<sup>1</sup>

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_i^2} = 0, \quad \mu = 0, \dots, 3, \quad (6.2)$$

donde

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

es una constante universal (dependiente de las propiedades electromagnéticas del vacío). ¿Cómo se transforma la ecuación (6.2) bajo la transformación de Galileo (6.1)? Para responder a esta pregunta, obsérvese en primer lugar que

$$A'_\mu(t', \mathbf{r}') = A_\mu(t, \mathbf{r}),$$

ya que  $A_0 = \Phi/c$  es un escalar y, aunque  $\mathbf{A}$  es un vector, los ejes de  $S$  y  $S'$  son paralelos. Por tanto los potenciales  $A'_\mu(t', \mathbf{r}')$  verificarán también la ecuación (6.2), es decir<sup>2</sup>

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A'_\mu}{\partial t'^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 A'_\mu}{\partial x_i'^2} = 0, \quad \mu = 0, \dots, 3.$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x_1'}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i'}, \quad i = 1, 2, 3,$$

se obtiene inmediatamente

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A'_\mu}{\partial t'^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 A'_\mu}{\partial x_1'^2} - \sum_{i=2}^3 \frac{\partial^2 A'_\mu}{\partial x_i'^2} - \frac{2v}{c^2} \frac{\partial^2 A'_\mu}{\partial t' \partial x_1'} = 0, \quad \mu = 0, \dots, 3,$$

que *no* es una ecuación de ondas en las coordenadas  $(t', x_1', x_2', x_3')$  para ningún valor<sup>3</sup> de  $v \neq 0$ .

El hecho de que la ecuación (6.2) (o, equivalentemente, las ecuaciones de Maxwell) no sea invariante bajo transformaciones de Galileo plantea las siguientes tres posibilidades, que solo pueden decidirse mediante el experimento:

1. Existe un sistema de referencia inercial privilegiado, en el que son válidas las ecs. (6.2) (o, equivalentemente, las ecuaciones de Maxwell) y las ondas electromagnéticas se propagan con velocidad  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ . Por tanto, el principio de relatividad —es decir, *la equivalencia de todos los sistemas inerciales*— es válido para la mecánica pero no para el electromagnetismo.
2. El principio de relatividad es válido tanto para la mecánica como para el electromagnetismo, pero las ecuaciones de Maxwell son incorrectas.
3. El principio de relatividad es válido tanto para la mecánica como para el electromagnetismo, pero la formulación newtoniana de la mecánica es incorrecta.

<sup>1</sup>Supondremos a partir de ahora que los potenciales electromagnéticos verifican el gauge de Lorenz (1.42).

<sup>2</sup>De hecho, al ser la ecuación de ondas (6.2) *lineal* esto también ocurrirá si los potenciales se transforman linealmente entre sí, es decir si

$$A'_\mu(t', \mathbf{r}') = \sum_{\nu=0}^3 A_\nu^\nu(v) A_\nu(t, \mathbf{r}), \quad \mu = 0, \dots, 3.$$

<sup>3</sup>Nótese, sin embargo, que para  $v \ll c$  la ecuación de ondas es aproximadamente invariante.



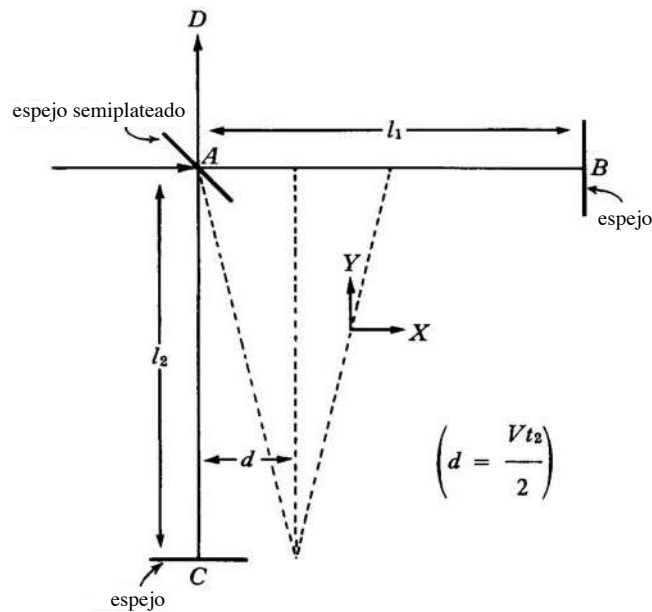


Figura 6.1. Experimento de Michelson-Morley.

A finales del siglo XIX se pensaba que la hipótesis correcta era la primera. La explicación teórica que se aducía era que las ondas electromagnéticas se propagan en un medio material denominado *éter* que llena el espacio, y por tanto las ecs. (6.2) —o, equivalentemente, las ecuaciones de Maxwell— solo son válidas en un sistema inercial que esté en reposo respecto del éter. Se creía, además, que este sistema inercial coincidía con el de las estrellas lejanas, lo que permitía identificar dicho sistema inercial privilegiado con el “espacio absoluto” de Newton. Si esto fuera cierto, sería en principio posible detectar experimentalmente el movimiento de un sistema inercial respecto del éter (“movimiento absoluto”) estudiando la propagación de las ondas electromagnética respecto de dicho sistema.

En 1887, Michelson y Morley realizaron un experimento interferométrico muy sensible para detectar la velocidad de la Tierra respecto del éter. El experimento se basa en estudiar la trayectoria de un rayo luminoso que se divide mediante un espejo semiplataado en dos rayos perpendiculares (cf. la Fig. 6.1), de modo que el tiempo empleado por cada uno de estos rayos en volver al espejo es distinto si el dispositivo está en movimiento respecto del éter. Si bien el efecto es muy pequeño (del orden de  $v^2/c^2 \sim 10^{-8}$ , siendo  $v$  la velocidad de la Tierra respecto del éter, aproximadamente igual a su velocidad respecto del Sol), es posible observarlo estudiando las franjas de interferencia producidas al recombinarse ambos rayos. Aunque el experimento se repitió numerosas veces, *siempre se obtuvo un resultado negativo*, es decir no se detectó velocidad alguna de la Tierra respecto del éter. Este resultado es totalmente inesperado y ciertamente sorprendente, ya que, aun admitiendo que en algún punto de su órbita la velocidad de la Tierra respecto del éter pudiera ser nula, dicha velocidad varía a lo largo de la órbita (así como a lo largo del día, debido a la rotación de la Tierra alrededor de su eje).

Durante casi dos décadas el experimento de Michelson-Morley permaneció sin una explicación que fuera a la vez consistente con otros fenómenos observados (como, por ejemplo, la aberración de la luz o la velocidad de la luz en medios materiales en movimiento), que descartaban que el éter fuera arrastrado por la Tierra. Finalmente, en 1905 Einstein observó que el resultado negativo de dicho experimento (así como el de los demás fenómenos citados anteriormente) puede explicarse en base a los dos postulados fundamentales siguientes:

1. Las leyes de la física son las mismas en cualquier sistema de referencia inercial (**principio**)

de relatividad).

2. La velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío es la *constante universal*  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ .

Los postulados anteriores constituyen la base de la **teoría especial de la relatividad**<sup>4</sup> (RE). El primer postulado es evidentemente una extensión del principio de relatividad galileano a *todas* las leyes de la física (incluyendo el electromagnetismo), y no solo a la mecánica. Por otra parte, combinándolo con el segundo se llega inmediatamente a la siguiente conclusión:

La velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío es igual a  $c$  en *cualquier* sistema inercial.

Por supuesto, este principio explica satisfactoriamente el resultado negativo del experimento de Michelson–Morley, ya que si es cierto los dos rayos luminosos en dicho experimento viajan a la misma velocidad ( $c$ ). Sin embargo, es profundamente anti-intuitivo desde el punto de vista de la mecánica newtoniana, ya que viola la familiar *ley de adición de velocidades*

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - v\mathbf{e}_1$$

que se deduce directamente derivando la ec. (6.1). Por consiguiente, *la transformación de Galileo (6.1) no puede ser correcta*. A esta misma conclusión se llega observando que la ecuación de ondas (6.2) para los potenciales electromagnéticos —que es equivalente a las ecuaciones de Maxwell— no es invariante bajo la transformación (6.1), en contradicción con los postulados 1 y 2.

## 6.2 Transformaciones de Lorentz

### 6.2.1 Deducción de las ecuaciones de la transformación

Como acabamos de ver, la transformación de Galileo (6.1) *no* es compatible con los postulados de la teoría especial de la relatividad. En esta sección deduciremos, aplicando dichos postulados junto con la *homogeneidad* e *isotropía* del espacio-tiempo<sup>5</sup>, las ecuaciones correctas que relacionan las coordenadas espacio-temporales  $(t, \mathbf{r})$  y  $(t', \mathbf{r}')$  de un mismo suceso en dos sistemas inerciales distintos  $S$  y  $S'$ . Supondremos, como en la sección anterior, que los ejes de ambos sistemas son paralelos, sus orígenes coinciden en algún instante y la velocidad del origen  $O'$  de  $S'$  respecto de  $S$  es<sup>6</sup>  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_1$ . Escogiendo adecuadamente el origen de tiempos, siempre podemos conseguir que  $O$  y  $O'$  coincidan en  $t = t' = 0$ , es decir que

$$x_\mu = 0, \quad \forall \mu = 0, \dots, 3 \quad \Rightarrow \quad x'_\mu = 0, \quad \forall \mu = 0, \dots, 3, \quad (6.3)$$

donde hemos introducido la notación

$$x_0 \equiv ct, \quad x'_0 \equiv ct'.$$

<sup>4</sup>La teoría general extiende el primer postulado —es decir, el principio de relatividad— a sistemas de referencia no inerciales, y desarrolla una teoría de la gravitación universal (basada en la geometría del espacio-tiempo) compatible con los postulados de la relatividad especial.

<sup>5</sup>El espacio-tiempo ha de ser *homogéneo*, es decir todos sus puntos deben ser equivalentes. Análogamente, el espacio debe ser *isótropo*, lo que significa que todas las direcciones espaciales han de ser equivalentes.

<sup>6</sup>En todo este capítulo,  $v$  denotará normalmente la componente de la velocidad relativa de los sistemas  $S$  y  $S'$  en la dirección del vector  $\mathbf{e}_1$ , pudiendo ser por tanto positiva o negativa. Para evitar confusiones, el módulo de la velocidad se denotará por  $|\mathbf{v}| = |v|$ .

A partir de ahora siempre supondremos que se cumple la condición (6.3), salvo indicación expresa en contrario.

i) En primer lugar, utilizando la *homogeneidad* del espacio-tiempo se puede demostrar que la transformación que relaciona las coordenadas  $x'_\mu$  con las  $x_\mu$  es *lineal*, es decir

$$x'_\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_{\mu\nu}(v) x_\nu, \quad \mu = 0, \dots, 3,$$

donde los coeficientes  $\Lambda_{\mu\nu}(v)$  dependen solo de la velocidad relativa entre ambos sistemas.

En efecto, consideremos un reloj que se mueve con velocidad *constante* respecto de  $S$ , y por tanto (por el primer postulado de la RE) respecto de  $S'$ . Si  $x_i(t)$  y  $x'_i(t')$  ( $i = 1, 2, 3$ ) son las coordenadas espaciales de dicho reloj en los sistemas  $S$  y  $S'$  entonces

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{d^2 x'_i}{dt'^2} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Por otra parte, por la homogeneidad del espacio-tiempo el tiempo  $\tau$  medido por el reloj en movimiento uniforme ha de verificar

$$\frac{d\tau}{dt} = \text{const.}, \quad \frac{d\tau}{dt'} = \text{const.}$$

De esto se deduce fácilmente que

$$\frac{d^2 x_i}{d\tau^2} = \frac{d^2 x'_i}{d\tau^2} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

y por tanto, llamando  $x_0 = ct$ ,  $x'_0 = ct'$ ,

$$\frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} = \frac{d^2 x'_\mu}{d\tau^2} = 0, \quad \mu = 0, \dots, 3.$$

Pero entonces

$$\frac{dx'_\mu}{d\tau} = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} \frac{dx_\nu}{d\tau}, \quad \frac{d^2 x'_\mu}{d\tau^2} = \sum_{\nu, \sigma=0}^3 \frac{\partial^2 x'_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\sigma} \frac{dx_\nu}{d\tau} \frac{dx_\sigma}{d\tau} = 0 \implies \frac{\partial^2 x'_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\sigma} = 0, \quad \forall \nu, \sigma = 0, \dots, 3,$$

al ser  $dx_\mu/d\tau$  ( $\mu = 0, \dots, 3$ ) arbitrario.

ii) En segundo lugar, es fácil comprobar que las coordenadas transversales a la velocidad  $\mathbf{v}$  son iguales en ambos sistemas, es decir

$$\boxed{x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3.}$$

En efecto (por ejemplo), al ser la transformación  $x_\mu \mapsto x'_\mu$  lineal se tendrá

$$x'_2 = \sum_{\mu} a_{\mu}(v) x_{\mu},$$

donde el índice de suma varía de 0 a 3 (en general, a partir de ahora los índices *griegos* variarán entre 0 y 3 y los *latinos* de 1 a 3). Como  $x_2 = 0$  implica  $x'_2 = 0$  (ya que los ejes de  $S$  y  $S'$  son paralelos), todos los coeficientes  $a_\mu$  se anulan excepto  $a_2$ , y por tanto

$$x'_2 = a_2(v) x_2.$$

Nótese que, por la *isotropía del espacio*, el coeficiente  $a_2$  solo pueden depender de  $|v|$ , es decir

$$a_2(v) = a_2(-v).$$

Por el principio de relatividad, la velocidad de  $O$  respecto de  $O'$  ha de ser  $-v\mathbf{e}_1$ , y por tanto

$$x_2 = a_2(-v)x'_2 = a_2(-v)a_2(v)x_2 = a_2^2(v)x_2 \implies a_2(v) = \pm 1.$$

Por continuidad (ya que  $a_2(0) = 1$ ) debemos tomar  $a_2(v) = 1$ , lo que conduce a la igualdad de  $x_2$  y  $x'_2$ . Un argumento análogo se aplica a  $x_3$  y  $x'_3$ .

iii) Teniendo en cuenta que el origen del sistema  $S'$  se mueve con velocidad  $v\mathbf{e}_1$  respecto de  $S$ , la coordenada  $x'_1$  debe anularse cuando  $x_1 - vt = 0$ , y por tanto (ya que la relación entre  $x'_\mu$  y  $x_\nu$  es *lineal*)

$$x'_1 = \gamma(v)(x_1 - vt), \quad (6.4)$$

donde  $\gamma$  es una función *par* de  $v$  en virtud de la isotropía del espacio. Por el principio de relatividad, debe cumplirse también la relación

$$x_1 = \gamma(v)(x'_1 + vt'). \quad (6.5)$$

Hasta el momento, solo hemos aplicado el principio de relatividad (primer postulado) y la homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo. Por ejemplo, si en este momento supusiéramos que  $t' = t$  (es decir, que el tiempo es *absoluto*) de las ecs. (6.4) y (6.5) se obtendría inmediatamente

$$x_1 = \gamma^2(v)(x_1 - vt) + \gamma(v)vt \implies (1 - \gamma^2(v))x_1 + \gamma(v)(\gamma(v) - 1)vt = 0 \implies \gamma(v) = 1,$$

lo que conduce a la transformación de Galileo (6.1). Sabemos, sin embargo, que esta ecuación es incorrecta, lo que implica que  $t' \neq t$ , en contradicción con uno de los axiomas fundamentales de la mecánica newtoniana. Para encontrar la relación correcta entre  $t$  y  $t'$  debemos aplicar el segundo postulado de Einstein, según el cual la ecuación  $x_1 - ct = 0$  (ecuación de propagación de una onda electromagnética plana en la dirección del eje  $x_1$  emitida en  $t = t' = 0$  desde el origen de ambos sistemas) debe implicar  $x'_1 - ct' = 0$ . Sustituyendo estas relaciones en (6.4) y (6.5) obtenemos

$$ct' = \gamma(v)(c - v)t, \quad ct = \gamma(v)(c + v)t'.$$

Multiplicando ambas ecuaciones y cancelando un factor común  $tt'$  se llega fácilmente a la relación

$$c^2 = \gamma^2(v)(c^2 - v^2) \implies \gamma(v) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

De nuevo debemos tomar, por continuidad, el signo "+", es decir

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (6.6)$$

Sustituyendo en la ec. (6.5) y despejando  $t'$  se obtiene la ley de transformación del tiempo:

$$x_1 = \gamma^2(v)(x_1 - vt) + \gamma(v)vt' \implies t' = \gamma(v) \left[ t + (\gamma(v)^{-2} - 1) \frac{x_1}{v} \right] \implies t' = \gamma(v) \left( t - \frac{vx_1}{c^2} \right).$$

Reuniendo las ecuaciones que acabamos de deducir se llega finalmente a las siguientes fórmulas que relacionan las coordenadas  $x_\mu$  y  $x'_\mu$  en ambos sistemas inerciales:

$$t' = \gamma(v) \left( t - \frac{vx_1}{c^2} \right), \quad x'_1 = \gamma(v)(x_1 - vt), \quad x'_k = x_k \quad (k = 2, 3). \quad (6.7)$$

La transformación (6.6)-(6.7) entre las coordenadas  $x_\mu$  y  $x'_\mu$ , que sustituyen a la transformación de Galileo (6.1), se denomina **transformación de Lorentz** (en la dirección del eje  $x_1$ ).

Los siguientes hechos son una consecuencia directa de la ec. (6.7) de las transformaciones de Lorentz:

- i) De la ec. (6.6) para la función  $\gamma(v)$  se deduce que *el módulo de la velocidad relativa entre dos sistemas inerciales es estrictamente menor que la velocidad  $c$  de las ondas EM en el vacío.*
- ii) En particular, *la velocidad de cualquier partícula material (con masa no nula) ha de ser inferior a  $c$ , ya que un conjunto de tales partículas define en cierto modo un sistema inercial.*
- iii) De hecho, es fácil probar que *la velocidad de transmisión de cualquier señal física no puede ser superior a  $c$ , entendiendo por “señal” física el intercambio de información entre dos observadores.*

En efecto, supongamos que se envía una señal de un punto  $P$  a otro punto  $Q$  a una velocidad  $u > c$  medida en un sistema inercial  $S$ . Escojamos los ejes de  $S$  de modo que  $P$  y  $Q$  estén en el eje  $x_1$  con una separación espacial  $\Delta x_1 > 0$ , y sea  $\Delta t > 0$  el tiempo empleado por la señal en alcanzar  $Q$  medido en  $S$  (cf. la Fig. 6.2). En virtud de (6.6)-(6.7), el tiempo correspondiente medido en el sistema  $S'$  es igual a

$$\Delta t' = \gamma(v) \left( \Delta t - \frac{v \Delta x_1}{c^2} \right) = \gamma(v) \Delta t \left( 1 - \frac{uv}{c^2} \right).$$

Si la velocidad  $v$  del origen de  $S'$  respecto de  $S$  satisface

$$\frac{c^2}{u} < v < c,$$

lo cual es posible porque  $u < c$  por hipótesis, entonces  $\Delta t' < 0$ . En otras palabras, según  $S'$  la señal se recibe en  $Q$  antes de ser emitida en  $P$ , lo que viola el principio de causalidad (la causa debe preceder siempre al efecto). ■

*Ejercicio.* Demostrar que en general la transformación de Lorentz entre dos SRI  $S$  y  $S'$  con los ejes paralelos está dada por

$$t' = \gamma(v) \left( t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{c^2} \right), \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} + (\gamma(v) - 1) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{v^2} \mathbf{v} - \gamma(v) \mathbf{v} t, \quad (6.8)$$

donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad de  $O'$  respecto de  $S$ .

*Solución.* Llamando  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 = \mathbf{v}/v$  se tiene

$$x_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{v}, \quad x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{x} - x_1 \mathbf{n} = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v}$$

y por tanto

$$t' = \gamma(v) \left( t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{c^2} \right), \quad \mathbf{x}' = \gamma(v) \left( \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{v} - vt \right) \frac{\mathbf{v}}{v} + \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v},$$

que conduce a la ec. (6.8). ■

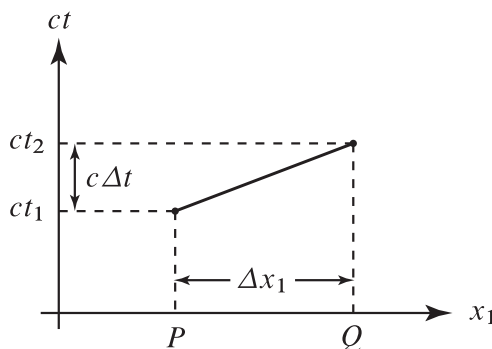


Figura 6.2. Transmisión de una señal de  $P$  a  $Q$  con velocidad  $u > c$  respecto de un sistema inercial  $S$ .

### 6.2.2 Ley de adición de velocidades relativista

Aunque acabamos de demostrar que los dos postulados de la relatividad especial conducen a las ecs. (6.6)-(6.7) de la transformación de Lorentz, debemos comprobar que esta transformación respeta dichos postulados. En cuanto al primer postulado, utilizando las ecuaciones de la transformación de Lorentz y la identidad

$$\frac{dx'_i}{dt'} = \frac{dx'_i}{dt} \bigg/ \frac{dt'}{dt}$$

se obtiene inmediatamente

$$u'_1 \equiv \frac{dx'_1}{dt'} = \frac{u_1 - v}{1 - \frac{u_1 v}{c^2}}, \quad u'_k \equiv \frac{dx'_k}{dt'} = \frac{u_k}{\gamma(v) \left(1 - \frac{u_1 v}{c^2}\right)} \quad (k = 2, 3).$$

Por tanto si una partícula se mueve con velocidad constante  $\mathbf{u}$  respecto del sistema  $S$ , es decir si

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = u_i = \text{const.}, \quad i = 1, 2, 3,$$

en el sistema  $S'$  la partícula se mueve también con velocidad constante  $\mathbf{u}'$ . Esto es consistente con la *primera ley de Newton*.

La expresión de  $\mathbf{u}$  en función de  $\mathbf{u}'$  se puede obtener despejando  $u_i$  en función de  $u'_i$  de las ecuaciones anteriores, o, más sencillamente (por el principio de relatividad), cambiando  $v$  por  $-v$  en dichas ecuaciones:

$$u_1 = \frac{u'_1 + v}{1 + \frac{u'_1 v}{c^2}}, \quad u_k = \frac{u'_k}{\gamma(v) \left(1 + \frac{u'_1 v}{c^2}\right)} \quad (k = 2, 3). \quad (6.9)$$

La ecuación anterior es la **ley de adición de velocidades** relativista, que reemplaza a su análogo galileano  $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + v\mathbf{e}_1$ . De la ec. (6.9) se obtiene fácilmente

$$\left(1 + \frac{u'_1 v}{c^2}\right)^2 (\mathbf{u}^2 - c^2) = u_1'^2 + \frac{1}{\gamma^2(v)} (u_2'^2 + u_3'^2) + v^2 - c^2 - \frac{v^2 u_1'^2}{c^2} = \frac{\mathbf{u}'^2 - c^2}{\gamma^2(v)}.$$

En particular, si  $|\mathbf{u}'| = c$  entonces  $|\mathbf{u}| = c$ , y por tanto se verifica el segundo postulado de la relatividad especial. De la ecuación anterior se deduce también que si  $|\mathbf{u}'| < c$  entonces  $|\mathbf{u}| < c$ . En otras palabras, la adición de dos velocidades menores en módulo que la velocidad de la luz produce como resultado una velocidad cuyo módulo es menor que  $c$ .

### 6.2.3 Intervalo

En relación con el segundo postulado, consideremos la ecuación de propagación de una señal luminosa (en general, de una onda electromagnética) emitida desde el origen de  $S$  en el instante  $t = 0$ , es decir

$$c^2 t^2 - \mathbf{x}^2 = 0, \quad \mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3).$$

Según el segundo postulado, la ecuación del frente de ondas en el sistema  $S'$  debería ser

$$c^2 t'^2 - \mathbf{x}'^2 = 0,$$

dado que  $t = 0$  y  $\mathbf{x} = 0$  implica que  $t' = 0$  y  $\mathbf{x}' = 0$ . Por tanto  $c^2 t^2 - \mathbf{x}^2 = 0$  debe implicar que  $c^2 t'^2 - \mathbf{x}'^2 = 0$ . De hecho, aplicando la transformación de Lorentz (6.6)-(6.7) a la expresión

$c^2t'^2 - \mathbf{x}'^2$  se obtiene fácilmente

$$\begin{aligned} c^2t'^2 - \mathbf{x}'^2 &= \gamma^2(v) \left( ct - \frac{vx_1}{c} \right)^2 - \gamma^2(v)(x_1 - vt)^2 - x_2^2 - x_3^2 \\ &= \gamma^2(v)(c^2 - v^2)t^2 - \gamma^2(v) \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = c^2t^2 - \mathbf{x}^2. \end{aligned}$$

Esto demuestra la siguiente propiedad fundamental de las transformaciones de Lorentz:

La forma cuadrática  $c^2t^2 - \mathbf{x}^2 \equiv x_0^2 - \mathbf{x}^2$  es *invariante* bajo la transformación de Lorentz (6.6)-(6.7).

En general, dados dos sucesos de coordenadas espacio-temporales  $x_\mu$  y  $x_\mu + \Delta x_\mu$  (con  $x_0 \equiv ct$ ), el cuadrado del **intervalo** entre ambos se define por

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \sum_{i=1}^3 \Delta x_i^2 = \Delta x_0^2 - \sum_{i=1}^3 \Delta x_i^2 \equiv \Delta x_0^2 - \Delta \mathbf{x}^2. \quad (6.10)$$

Nótese que, a pesar de lo que la notación utilizada sugiere,  $\Delta s^2$  puede ser negativo. Como la transformación de Lorentz (6.6)-(6.7) es *lineal*, las diferencias  $\Delta x_\mu$  se transforman igual que las propias coordenadas  $x_\mu$ , y por tanto

El intervalo entre dos sucesos es invariante bajo transformaciones de Lorentz:

$$\Delta s^2 = \Delta x_0^2 - \Delta \mathbf{x}^2 = \Delta x_0'^2 - \Delta \mathbf{x}'^2. \quad (6.11)$$

Por tanto el intervalo entre dos sucesos es una característica *intrínseca* de la relación entre ambos, independientemente de las coordenadas que utilicemos para describirlos.

Por definición, el intervalo entre dos sucesos es **temporal** si  $\Delta s^2 > 0$ , **de tipo luz** si  $\Delta s^2 = 0$ , y **espacial** si  $\Delta s^2 < 0$  (cf. la Fig. (6.3)).

Nótese que

$$\Delta s^2 > 0 \iff \Delta x_0 \neq 0, \quad \frac{|\Delta \mathbf{x}|}{|\Delta x_0|} < 1,$$

y análogamente

$$\Delta s^2 < 0 \iff |\Delta \mathbf{x}| \neq 0, \quad \frac{|\Delta x_0|}{|\Delta \mathbf{x}|} < 1.$$

Si dos sucesos están separados por un intervalo *temporal*, existe un sistema de referencia inercial en el cual ambos sucesos ocurren en el *mismo lugar*.

En efecto, escojamos los ejes de  $S$  de forma que

$$\Delta x_2 = \Delta x_3 = 0,$$

y consideremos un sistema inercial  $S'$  que se mueve con velocidad  $v\mathbf{e}_1$  respecto de  $S$ . Como

$$\Delta x'_2 = \Delta x'_3 = 0, \quad \Delta x'_1 = \gamma(\Delta x_1 - v\Delta t),$$

para conseguir que  $\Delta \mathbf{x}' = 0$  basta tomar

$$v = \frac{\Delta x_1}{\Delta t},$$

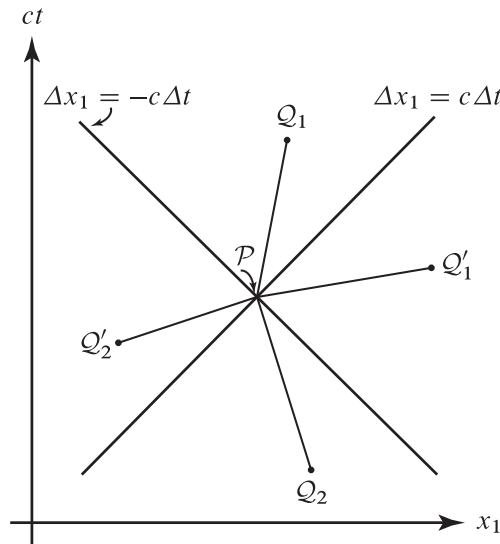


Figura 6.3. En la figura se muestran 5 sucesos  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}_i$ ,  $\mathcal{Q}'_i$  ( $i = 1, 2$ ), donde se ha tomado  $x_2 = x_3 = 0$  por sencillez. Los intervalos  $\mathcal{Q}_i - \mathcal{P}$  son temporales, siendo los restantes intervalos  $\mathcal{Q}'_i - \mathcal{P}$  espaciales. El suceso  $\mathcal{Q}_1$  está en el futuro de  $\mathcal{P}$  ( $t(\mathcal{Q}_1) - t(\mathcal{P}) > 0$ ), mientras que  $\mathcal{Q}_2$  está en su pasado ( $t(\mathcal{Q}_2) - t(\mathcal{P}) < 0$ ). El suceso  $\mathcal{Q}'_2$  no puede haber influido en  $\mathcal{P}$ , ni el suceso  $\mathcal{Q}'_1$  puede haber sido influido por  $\mathcal{P}$ .

lo cual es posible ya que

$$\frac{|v|}{c} = \left| \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \right| < 1$$

al ser  $\Delta s^2 > 0$ . El lapso de tiempo  $\Delta t'$  entre ambos sucesos medido en el sistema  $S'$  (en el que dichos sucesos coinciden espacialmente) se denomina **lapso de tiempo propio**, y se suele indicar por  $\Delta\tau$ . De la invariancia del intervalo se sigue que, en cualquier otro sistema de referencia inercial  $S$ ,

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta \mathbf{x}^2 = c^2 \Delta t'^2 \equiv c^2 \Delta \tau^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta \tau = \frac{\Delta s}{c} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{\Delta \mathbf{x}^2}{\Delta x_0^2}},$$

donde hemos utilizado que  $\Delta\tau \equiv \Delta t'$  y  $\Delta t$  tienen el mismo signo<sup>7</sup> (véase la ec. (6.12) más abajo). Por tanto *el lapso de tiempo coordinado  $\Delta t$  es siempre mayor o igual que el de tiempo propio*, y solo coincide con este último en un sistema de referencia inercial en que ambos sucesos ocurren en el mismo lugar. ■

Si dos sucesos están separados por un intervalo *espacial*, es posible encontrar un sistema de referencia inercial en el cual ambos sucesos son *simultáneos*.

En efecto (suponiendo de nuevo que  $\Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$ ), al ser

$$\Delta t' = \gamma \left( \Delta t - \frac{v \Delta x_1}{c^2} \right)$$

se puede conseguir que  $\Delta t'$  se anule sin más que tomar

$$v = \frac{c^2 \Delta t}{\Delta x_1} = \frac{c \Delta x_0}{\Delta x_1},$$

<sup>7</sup>Este hecho también se demuestra fácilmente observando que, al estar  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  separados por un intervalo temporal, es posible transmitir una señal entre ambos. Pero si  $\Delta t$  y  $\Delta t'$  tuvieran signos opuestos en uno de los dos SRI el efecto precedería a la causa, lo cual violaría el principio de causalidad.



lo que es factible dado que

$$\frac{|v|}{c} = \left| \frac{\Delta x_0}{\Delta x_1} \right| < 1$$

al ser  $\Delta s^2 < 0$  por hipótesis. Nótese también que en este caso

$$\sqrt{-\Delta s^2} = |\Delta x'_1|$$

coincide con la distancia entre ambos sucesos en el sistema de referencia en que son simultáneos, denominada **distancia propia**. Como

$$|\Delta \mathbf{x}| = \sqrt{\Delta x_0^2 - \Delta s^2} \geq \sqrt{-\Delta s^2},$$

la distancia propia es siempre *menor o igual* que la distancia espacial  $|\Delta \mathbf{x}|$  en cualquier sistema de referencia inercial, y solo coincide con esta última en un SRI en que ambos sucesos son simultáneos. ■

Por último, si dos sucesos están separados por un intervalo de tipo luz entonces

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta \mathbf{x}^2 = 0,$$

y por tanto ambos sucesos están en la trayectoria de un rayo de luz.

- Consideremos dos sucesos separados por un intervalo espacial, como  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}'_1$  en la Fig. 6.3. Como acabamos de ver, aunque en el sistema inercial  $S$  el suceso  $\mathcal{P}$  precede a  $\mathcal{Q}'_1$ , en algún sistema inercial  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}'_1$  son simultáneos<sup>8</sup>. En otras palabras:

El concepto de simultaneidad no es absoluto, sino que depende del sistema de referencia inercial utilizado.

Este fenómeno se denomina **relatividad de la simultaneidad**, y es una de las diferencias más radicales entre la teoría especial de la relatividad y la concepción newtoniana del tiempo.

- Es importante darse cuenta de que *la relatividad de la simultaneidad no viola el principio de causalidad*, ya que se aplica a sucesos separados por un intervalo *espacial*, entre los cuales no puede haber transmisión de información (pues una hipotética señal entre ambos debería viajar a una velocidad  $|\Delta \mathbf{x}|/|\Delta t|$  superior a  $c$ ), y por tanto no pueden ser causa y efecto uno del otro. Por el contrario, si dos sucesos  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  están separados por un intervalo *temporal* y  $\mathcal{P}$  precede a  $\mathcal{Q}$  en un sistema inercial  $S$ , entonces  $\mathcal{P}$  precede a  $\mathcal{Q}$  *en cualquier otro sistema inercial  $S'$*  relacionado con  $S$  mediante la transformación de Lorentz (6.6)-(6.7) (pues en caso contrario se violaría el principio de causalidad). En efecto, las diferencias de tiempo coordinado  $\Delta t$  y  $\Delta t'$  entre ambos sucesos están satisfacen<sup>9</sup>

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \left( 1 - \frac{v}{c} \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \right), \tag{6.12}$$

donde el término entre paréntesis es siempre mayor que cero si  $\Delta s^2 > 0$ .

### 6.2.4 Producto de Minkowski

Si  $x = (x_0, \mathbf{x})$  e  $y = (y_0, \mathbf{y})$  son las coordenadas de dos sucesos en un cierto SRI  $S$ , de la invariancia del intervalo y de la forma cuadrática  $x_0^2 - \mathbf{x}^2$  se sigue que

$$\begin{aligned} (y_0 - x_0)^2 - (\mathbf{y} - \mathbf{x})^2 &= y_0^2 - \mathbf{y}^2 + x_0^2 - \mathbf{x}^2 - 2(x_0 y_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \\ &= (y'_0 - x'_0)^2 - (\mathbf{y}' - \mathbf{x}')^2 = y_0'^2 - \mathbf{y}'^2 + x_0'^2 - \mathbf{x}'^2 - 2(x'_0 y'_0 - \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}') \\ &= y_0^2 - \mathbf{y}^2 + x_0^2 - \mathbf{x}^2 - 2(x'_0 y'_0 - \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}'), \end{aligned}$$

<sup>8</sup>De hecho, es fácil probar que hay sistemas inerciales  $S''$  respecto de los cuales  $\mathcal{Q}'_1$  precede a  $\mathcal{P}$  (ejercicio).

<sup>9</sup>Recuérdese que si dos sucesos están separados por un intervalo temporal entonces  $\Delta t \neq 0$  en cualquier SRI.

y por tanto

$$x_0 y_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x'_0 y'_0 - \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}' . \quad (6.13)$$

En otras palabras, *la forma bilineal*

$$x \cdot y \equiv x_0 y_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} , \quad (6.14)$$

denominada **producto de Minkowski**, es también invariante bajo transformaciones de Lorentz. Nótese que, según esta definición,

$$x \cdot x \equiv x^2 = x_0^2 - \mathbf{x}^2 , \quad \Delta s^2 = (\Delta x)^2 . \quad (6.15)$$

Por definición, se denomina **espacio de Minkowski** al espacio vectorial  $\mathbb{R}^4$  (el **espacio-tiempo**) dotado del producto de Minkowski (6.14). Nótese que, como la forma cuadrática (6.15) asociada a esta forma bilineal (esencialmente, el cuadrado del intervalo) *no* es definida positiva, la ec. (6.14) *no* define un verdadero producto escalar en el espacio de Minkowski, aunque puede utilizarse para dotar a este espacio de una estructura geométrica muy útil a la hora estudiar sus propiedades.

### 6.2.5 Grupo de Lorentz

Sean  $S$  y  $S'$  dos sistemas de referencia inerciales arbitrarios cuyos orígenes coinciden en  $t = t' = 0$ , y denotemos por  $\mathbf{v}$  la velocidad del origen de  $S'$  respecto de  $S$ . Para encontrar la relación entre las coordenadas espacio-temporales  $x$  y  $x'$  de un mismo suceso respectivamente en  $S$  y  $S'$ , podemos proceder de la forma siguiente. En primer lugar, consideremos un sistema inercial  $S''$  en reposo respecto de  $S$ , cuyo eje  $x''_1$  esté en la dirección de  $\mathbf{v}$ . En tal caso

$$x'' = R_1 x ,$$

siendo  $R_1$  una rotación de las coordenadas espaciales (es decir,  $x''_0 = x_0$  y  $\mathbf{x}'' = \mathcal{R} \mathbf{x}$ , con  $\mathcal{R} \in \text{SO}(3)$ ). En segundo lugar, sea  $S'''$  un nuevo sistema de referencia inercial que se mueve con velocidad  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}'_1$  (con  $v = |\mathbf{v}| > 0$ ) respecto de  $S''$ , con ejes paralelos a los de este último sistema y cuyo origen coincide con el de este en  $t'' = t''' = 0$ . Entonces se verifica

$$x''' = L(v)x'' ,$$

donde  $L(v)$  es la transformación de Lorentz (6.6)-(6.7) (sustituyendo  $x$  por  $x''$  y  $x'$  por  $x'''$ ). Por último, como  $S'$  y  $S'''$  se mueven con la misma velocidad  $\mathbf{v}$  respecto de  $S$ , y sus orígenes coinciden inicialmente, las coordenadas espacio-temporales  $x'$  y  $x'''$  estarán relacionadas simplemente por una rotación, es decir

$$x' = R_2 x''' .$$

Combinando estas ecuaciones se obtiene finalmente

$$x' = R_2 L(v) R_1 x \equiv \Lambda x . \quad (6.16)$$

La transformación  $\Lambda$ , que recibe el nombre de **transformación general de Lorentz**, es la transformación más general que relaciona las coordenadas de un mismo suceso en dos sistemas inerciales cuyos orígenes espacio-temporales coinciden. Si no se hace esta última suposición, se obtiene la **transformación de Poincaré**

$$x' = \Lambda x + a ,$$

con  $a \in \mathbb{R}^4$  constante.

La transformación de Lorentz (6.6)-(6.7) puede escribirse en forma matricial como

$$x' = L(v)x, \tag{6.17}$$

donde  $L(v)$  es la matriz  $4 \times 4$  dada por

$$L(v) = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\beta(v)\gamma(v) & 0 & 0 \\ -\beta(v)\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta(v) \equiv \frac{v}{c}. \tag{6.18}$$

Utilizando notación matricial, el producto de Minkowski entre dos **cuadrivectores**  $x, y \in \mathbb{R}^4$  se escribe

$$x \cdot y = x^T G y,$$

donde en el miembro derecho  $x, y$  se consideran vectores columna y  $G$  es la matriz diagonal

$$G = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.19}$$

La invariancia del producto de Minkowski bajo la transformación (6.7) se expresa entonces mediante la relación

$$x' \cdot y' = (L(v)x)^T G (L(v)y) = x^T (L(v)^T G L(v)) y = x \cdot y = x^T G y, \quad x, y \in \mathbb{R}^4,$$

o equivalentemente

$$L(v)^T G L(v) = G. \tag{6.20}$$

Por otra parte, las *rotaciones* también dejan invariante el producto de Minkowski —ya que no cambian el tiempo y dejan invariante el producto escalar de las componentes espaciales de los cuadrivectores—, es decir

$$R^T G R = G \tag{6.21}$$

para toda rotación  $R$ . Si  $\Lambda = R_2 L(v) R_1$  es una transformación general de Lorentz, de las ecs. (6.20)-(6.21) se sigue inmediatamente que

$$\Lambda^T G \Lambda = G. \tag{6.22}$$

En otras palabras:

El producto de Minkowski, y por tanto el cuadrado del intervalo, son *invariantes* bajo transformaciones generales de Lorentz.

Desde el punto de vista matemático, las matrices que satisfacen la relación (6.22) forman un grupo denominado **grupo de Lorentz**, de extraordinaria importancia en física. Se demuestra que las transformaciones generales de Lorentz (6.16) que acabamos de definir forman un subgrupo del grupo de Lorentz denominado *ortócrono propio*, definido por (6.20) junto con las dos condiciones adicionales  $\det \Lambda = 1$  y  $\Lambda_{00} > 0$ .

• Consideremos, de nuevo, la transformación de Lorentz en la dirección del eje  $x_1$  (6.6)-(6.7), que en inglés se denomina *boost* de Lorentz. Dado que  $\beta(v) \in (-1, 1)$ , existe un único  $\phi \in \mathbb{R}$  tal que

$$\beta(v) = \tanh \phi.$$

En términos de este parámetro  $\phi$ , denominado *rapidez*,  $\gamma(v)$  está dado por

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta(v)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \phi}} = \cosh \phi,$$

y por tanto la matriz  $L(v)$  adopta la siguiente expresión sencilla:

$$L(v) = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.23)$$

Supongamos que efectuamos sucesivamente dos *boosts* de Lorentz de velocidades  $v_1 = c \tanh \phi_1$  y  $v_2 = c \tanh \phi_2$ . Utilizando las fórmulas de adición satisfechas por  $\cosh$  y  $\sinh$  se prueba inmediatamente que la transformación resultante es otro *boost* de Lorentz, de rapidez  $\phi_1 + \phi_2$ . La velocidad de este *boost* es por tanto

$$v = c \tanh(\phi_1 + \phi_2) = c \frac{\tanh \phi_1 + \tanh \phi_2}{1 + \tanh \phi_1 \tanh \phi_2} \equiv \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

Se obtiene así de nuevo la ley de adición de dos velocidades paralelas  $v_1 \mathbf{e}_1$  y  $v_2 \mathbf{e}_2$  (cf. la ec. (6.9)).

## 6.3 Consecuencias físicas de las transformaciones de Lorentz

Las ecuaciones (6.6)-(6.7) tienen importantes consecuencias físicas, que pasamos a discutir a continuación.

### 6.3.1 Dilatación del tiempo

Sean, de nuevo,  $S$  y  $S'$  dos sistemas de referencia con los ejes paralelos<sup>10</sup> que se mueven con velocidad relativa  $v \mathbf{e}_1$ , y consideremos un reloj fijo en el origen de  $S'$ . Como  $\mathbf{x}' = 0$  en todo instante, cuando dicho reloj marca un tiempo  $t'$  el tiempo  $t$  registrado en  $S$  está dado por

$$t = \gamma(v) \left( t' + \frac{v x'_1}{c^2} \right) = \gamma(v) t' \equiv \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > t'. \quad (6.24)$$

En otras palabras, el reloj fijo en el origen de  $S'$  *atrassa* en relación con los relojes de  $S$ . Para velocidades  $v$  pequeñas en comparación con la velocidad de la luz  $c$  la diferencia  $t - t'$  es muy pequeña, dado que

$$t = t' \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} + O(v^4/c^4) \right).$$

Sin embargo, para velocidades próximas a las de la luz dicha diferencia puede ser muy grande, y de hecho tiende a infinito para  $v \rightarrow c$ . Por ejemplo, si  $v = 3c/5$  entonces  $t = 5t'/4$ . Es importante darse cuenta de los siguientes extremos:

- El efecto que acabamos de describir, denominado **dilatación del tiempo**, es *simétrico entre ambos sistemas de referencia*, como no podía ser menos en virtud del primer postulado de Einstein. En otras palabras, si colocamos un reloj en el origen de  $S$  la relación entre el

<sup>10</sup>A partir de ahora, supondremos tácitamente que los orígenes de los sistemas de referencia  $S$  y  $S'$  coinciden en  $t = t' = 0$ .

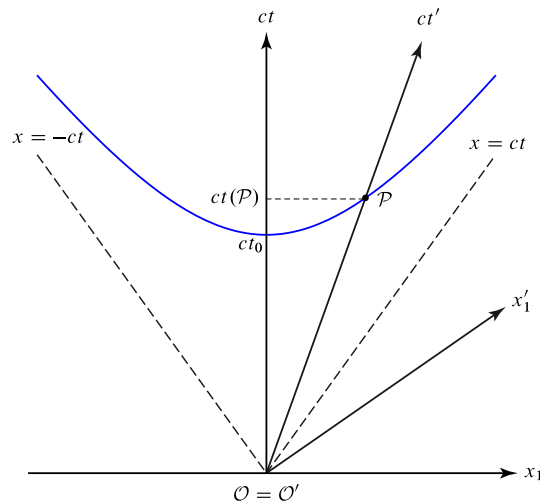


Figura 6.4. Diagrama de Minkowski ilustrando la dilatación del tiempo. El suceso  $\mathcal{P}$ , que corresponde a un “tic” del reloj fijo en el origen de su sistema propio  $S'$ , tiene coordenadas  $(ct_0, 0)$  en dicho sistema. La curva en azul es la hipérbola  $c^2t^2 - x_1^2 = c^2t'^2 - x_1'^2 = c^2t_0^2$ , es decir el lugar de todos los sucesos (en el plano  $x_2 = x_3 = 0$ ) separados del origen  $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$  por un intervalo  $ct_0$ . En particular, el punto de intersección de dicha hipérbola con el eje  $ct$  tiene coordenada temporal  $ct_0$  en  $S$ , de donde se sigue que  $t(\mathcal{P})$  es mayor que  $t_0$ .

tiempo  $t$  marcado por dicho reloj y el correspondiente tiempo  $t'$  registrado por los relojes de  $S'$  es

$$t' = \gamma(v)t, \tag{6.25}$$

ya que ahora  $\mathbf{x} = 0$  para todo  $t$ .

- La aparente contradicción entre las ecuaciones (6.24) y (6.25) se resuelve teniendo en cuenta que en dichas ecuaciones tanto  $t$  como  $t'$  denotan *tiempos distintos*. Lo esencial es que en ambos casos hay una clara *asimetría* entre el **tiempo propio** medido por un *único* reloj (en reposo en un determinado sistema inercial) y el **tiempo coordenado** registrado por los *relojes* —necesariamente *más de uno*, ya que los “tics” de un reloj fijo en un sistema inercial ocurren en lugares *distintos* en el otro!— de otro sistema inercial respecto del cual dicho reloj está en movimiento. Sería incorrecto afirmar que el tiempo transcurre más lentamente en  $S$  que en  $S'$ , o viceversa, ya que *todos los sistemas inerciales son equivalentes*, y no existe el movimiento (o el reposo) *absoluto*. Sí es correcto decir que *el tiempo propio de un reloj avanza más lentamente que el tiempo coordenado medido por los relojes de un sistema inercial en movimiento respecto de dicho reloj*.
- La dilatación del tiempo se comprueba a diario en experimentos que miden la *vida media* de una partícula. En efecto, si dicha vida media es igual a  $\Delta t_0$  en un sistema de referencia inercial en que la partícula está en reposo —es decir, en el *sistema propio* de la partícula—, su vida media en el sistema del laboratorio será

$$\Delta t = \gamma(v)\Delta t_0, \tag{6.26}$$

siendo  $v$  la velocidad de la partícula respecto de este último sistema. La vida media  $\Delta t_0$  se puede calcular muchas veces de forma teórica mediante técnicas de teoría cuántica de campos, lo que permite comprobar la validez de (6.26) midiendo  $v$  y  $\Delta t$ . Todos los (extremadamente numerosos) experimentos realizados hasta la fecha han confirmado la validez de la ec. (6.26). Por ejemplo, los muones presentes en los rayos cósmicos pueden alcanzar una velocidad

$$v = 0.999c$$

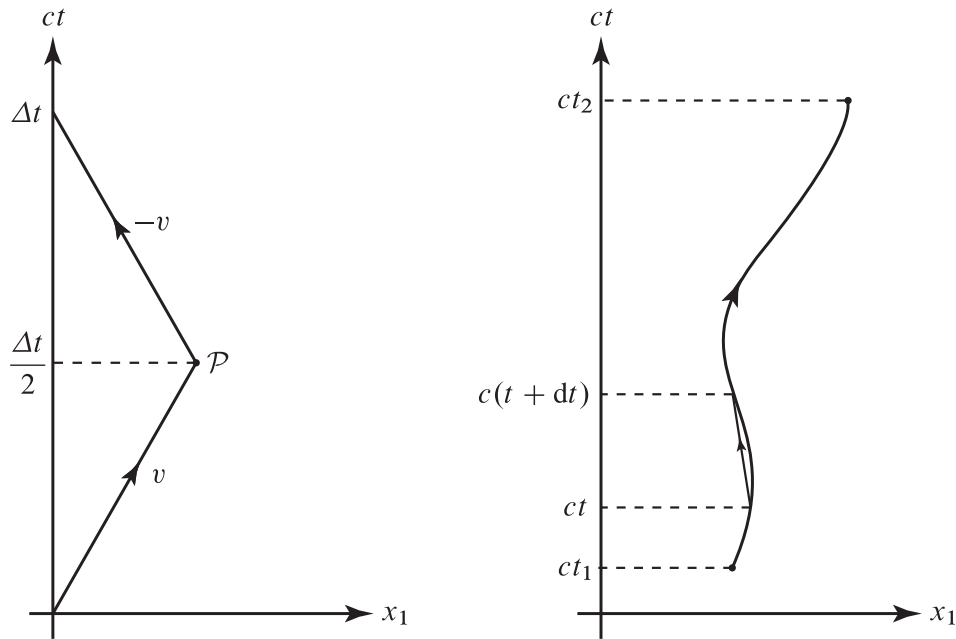


Figura 6.5. Línea de universo del viajero en la paradoja de los dos gemelos (izda.) y línea de universo de una partícula material utilizada en la definición de tiempo propio (drcha).

cuando entran en la atmósfera terrestre. Para este valor de  $v$ , la vida media medida en el sistema de referencia de la Tierra (aproximadamente inercial) es igual a

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (1 - 10^{-3})^2}} \approx 22.3663 \Delta t_0.$$

En el caso concreto de los muones,

$$\Delta t_0 \approx 1.5 \cdot 10^{-6} \text{ s} \implies \Delta t \approx 3.35 \cdot 10^{-5} \text{ s}.$$

Nótese que la distancia recorrida por el muón en el tiempo  $\Delta t$  es igual a

$$v \Delta t \sim 10 \text{ Km},$$

mientras que la distancia recorrida a esa misma velocidad durante el tiempo  $\Delta t_0$  es de apenas

$$v \Delta t_0 \sim 450 \text{ m}.$$

*Ejemplo 6.1. Paradoja de los dos gemelos.* Supongamos que un viajero parte del origen  $O$  de  $S$  con velocidad  $v\mathbf{e}_1$  y, después de un cierto tiempo  $\Delta t/2$  (medido en  $S$ ) invierte su velocidad, llegando de nuevo a  $O$  en un tiempo  $\Delta t$  (cf. la Fig. 6.5). ¿Cuál es el tiempo transcurrido según el viajero? En la primera parte del viaje (hasta llegar al suceso denotado por  $\mathcal{P}$  en la Fig. 6.5), el sistema de referencia del viajero es un sistema inercial  $S'$  que se mueve con velocidad constante  $v\mathbf{e}_1$  respecto de  $S$ . Por tanto el tiempo que asigna el viajero al suceso  $\mathcal{P}$  es

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{2\gamma(v)}$$

(cf. la ec. (6.24)). En la segunda parte del viaje (a partir de  $\mathcal{P}$ ), el sistema de referencia del viajero es *otro* sistema inercial  $S''$  cuya velocidad respecto de  $S$  es  $-v\mathbf{e}_1$ . El tiempo transcurrido en  $S$  es (por simetría) de nuevo  $\Delta t/2$ , mientras que para el viajero el lapso de tiempo correspondiente será

$$\Delta t'' = \frac{\Delta t}{2\gamma(-v)} = \frac{\Delta t}{2\gamma(v)}.$$

Por tanto, la duración del viaje según el viajero es igual a

$$\Delta t' + \Delta t'' = \frac{\Delta t}{\gamma(v)},$$

que puede ser considerablemente menor que  $\Delta t$  si  $v/c$  es próximo a 1. Este resultado puede parecer paradójico, ya que cabría pensar que desde el punto de vista del viajero es el observador en  $O$  el que se ha movido con velocidad  $\mp v \mathbf{e}_1$ , y por tanto la duración del viaje medida por dicho viajero debería ser  $\gamma(v)\Delta t > \Delta t$ . La falacia consiste en suponer que la relación entre el observador en  $O$  y el viajero es *simétrica*, lo cual está muy lejos de ser cierto. En efecto, mientras que el sistema de referencia en que dicho observador está en reposo es un sistema *inercial*, el viajero no está en reposo respecto de *ningún* sistema inercial durante *todo* el transcurso de su viaje, debido al cambio del sentido de la velocidad en  $\mathcal{P}$ . En otras palabras, mientras que el observador no ha estado sometido a aceleración alguna, el viajero ha sentido una aceleración (infinita) al cambiar de dirección. Está claro que esto ocurrirá *independientemente de la trayectoria* que describa el viajero. En efecto, como dicha trayectoria empieza y acaba en el origen del sistema inercial  $S$ , en algún momento el viajero ha de sentir una aceleración (ya que en caso contrario se alejaría del observador con velocidad constante  $\mathbf{v}$ ). ■

Supongamos, más generalmente, que una partícula material sigue una trayectoria  $C$  de ecuación

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

respecto de un sistema inercial  $S$ . Llamaremos **tiempo propio** de la partícula al lapso de tiempo entre los dos eventos  $\mathcal{P} = (ct_1, \mathbf{r}(t_1))$  y  $\mathcal{Q} = (ct_2, \mathbf{r}(t_2))$  medido por un observador que viaje con dicha partícula (es decir, respecto del cual la partícula esté en reposo en todo instante). Como dicho observador no define en general un sistema inercial —a menos que  $\mathbf{v}(t) \equiv \dot{\mathbf{r}}(t)$  sea constante—, para calcular dicho tiempo propio subdividimos la trayectoria de la partícula en el espacio de Minkowski, llamada **línea de universo**, en pequeños arcos aproximadamente rectos. En cada uno de estos arcos, en que el tiempo coordenado de  $S$  varía entre  $t$  y  $t + dt$ , la velocidad de la partícula es aproximadamente constante e igual a  $\mathbf{v}(t)$ . Por tanto el lapso de tiempo propio  $d\tau$  empleado por la partícula en recorrer dicho arco es igual al lapso de tiempo coordenado medido por un sistema inercial  $S'$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}(t)$  respecto de  $S$ , es decir

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2(t)}{c^2}} dt. \tag{6.27}$$

“Sumando” todos estos tiempos propios infinitesimales  $d\tau$  (es decir, integrando respecto de  $t$ ) obtenemos la siguiente expresión para el lapso de tiempo propio  $\Delta\tau(C)$  a lo largo de  $C$ :

$$\Delta\tau(C) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2(t)}{c^2}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}^2(t)}{c^2}} dt. \tag{6.28}$$

Nótese que  $\Delta\tau$  es invariante bajo transformaciones de Lorentz por su propia definición. Esto también puede comprobarse analíticamente, ya que en virtud de la ec. (6.27) se tiene

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2}(c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2) \equiv \frac{ds^2}{c^2}.$$

De nuevo,  $\Delta\tau(C)$  es siempre *menor o igual* que  $\Delta t \equiv t_2 - t_1$ , y  $\Delta\tau(C) = \Delta t$  si y solo si  $\mathbf{v}(t) = 0$  para todo  $t \in [t_1, t_2]$ , es decir si la partícula está en reposo respecto de  $S$ . Es también importante observar que *el lapso de tiempo propio  $\Delta\tau$  depende en general de la trayectoria seguida por la partícula*, y no solo de los sucesos inicial y final de dicha trayectoria  $(t_i, \mathbf{r}(t_i))$ ,  $i = 1, 2$  (cf. la Fig. 6.6).

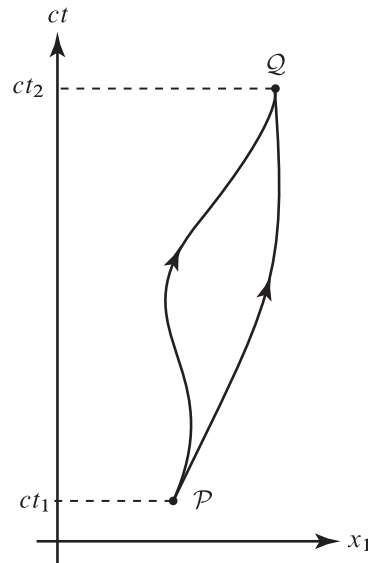


Figura 6.6. Líneas de universo que conectan dos sucesos  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$ .

*Ejercicio.* Probar que la línea de universo entre dos sucesos  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  en el espacio de Minkowski separados por un intervalo *temporal* para la cual el tiempo propio es *máximo* es una línea recta (movimiento rectilíneo con velocidad constante). ¿Qué ocurre si los dos puntos están separados por un intervalo *espacial*? ¿Y de tipo luz?

*Solución.* Supongamos, en primer lugar, que los eventos  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  están separados por un intervalo temporal, y sea  $C$  la línea de universo recta de  $\mathcal{P}$  a  $\mathcal{Q}$ . Al ser  $\Delta\tau$  invariante Lorentz, podemos calcular el tiempo propio  $\Delta\tau(C)$  en cualquier sistema de referencia inercial. En particular, en el sistema  $S$  en que  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  tienen lugar en el mismo punto del espacio (es decir, en el *sistema propio* de ambos sucesos) se tiene

$$\Delta\tau(C) = t_2 - t_1 \geq \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}^2(t)}{c^2}} dt,$$

donde la última expresión es el tiempo propio calculado a lo largo de una trayectoria arbitraria  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ . Esto demuestra que el tiempo propio  $\Delta\tau$  es máximo a lo largo de  $C$ , como habíamos anunciado. Por otra parte, si  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  están separados por un intervalo espacial o de tipo luz ninguna partícula material puede viajar de  $\mathcal{P}$  a  $\mathcal{Q}$ . En efecto, a lo largo de la línea de universo de una partícula material se tiene

$$|\Delta\mathbf{x}| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{r}}(t) dt \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt < c\Delta t \implies \Delta s^2 > 0.$$

(Nótese también que si el intervalo entre  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  es espacial entonces ambos eventos son *simultáneos* en un sistema de referencia inercial apropiado, de lo que también se sigue que ninguna partícula material o incluso onda electromagnética puede viajar de  $\mathcal{P}$  a  $\mathcal{Q}$ .) ■

*Nota.* Si  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  están separados por un intervalo *de tipo luz*, y solamente suponemos que  $v \leq c$  a lo largo de la trayectoria entre ambos eventos, es fácil probar que la única línea de universo que une  $\mathcal{P}$  con  $\mathcal{Q}$  es la de un rayo luminoso. En efecto, del argumento anterior se sigue que en este caso  $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = c$  para todo  $t$  (ejercicio). Si  $l(C)$  denota la longitud de la trayectoria  $C$  se tiene entonces

$$\Delta t = \frac{l(C)}{c} = \frac{|\Delta\mathbf{x}|}{c} \implies l(C) = |\Delta\mathbf{x}|,$$

por lo que la trayectoria es en efecto una línea recta recorrida con velocidad constante  $c$ .



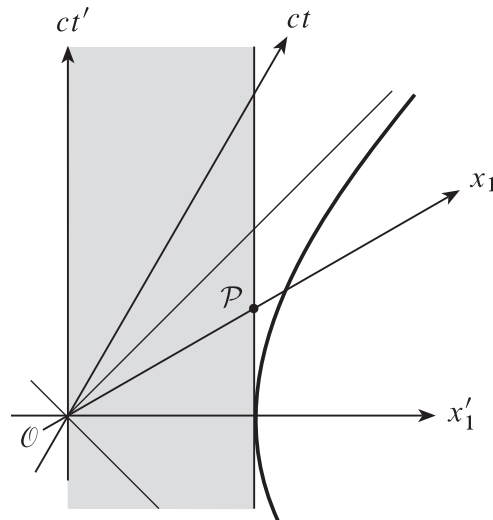


Figura 6.7. Diagrama de Minkowski ilustrando la contracción de Lorentz-Fitzgerald. La zona sombreada está formada por las líneas de universo de los puntos de la regla en su sistema propio  $S'$ . En el sistema  $S$ , los sucesos  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{P}$  representan dos posiciones *simultáneas* de los extremos de la regla. Por tanto, la distancia espacial de  $\mathcal{O}$  a  $\mathcal{P}$  medida en  $S$  es la longitud  $l$  de la regla en dicho sistema. Los puntos de la hipérbola a la derecha de la figura, de ecuación  $ct^2 - x_1^2 = ct'^2 - x_1'^2 = -l_0^2$ , son los sucesos separados del origen de coordenadas espacio-temporales  $\mathcal{O}$  por un mismo intervalo  $\Delta s^2 = -l_0^2$ . En particular, la intersección de dicha hipérbola con el eje  $x_1$  está a distancia  $l_0$  del origen respecto del sistema  $S$ , *mayor* que la distancia espacial  $l$  de  $\mathcal{O}$  a  $\mathcal{P}$ . Por tanto  $l$  es menor que  $l_0$ , como ya habíamos probado utilizando las ecuaciones de la transformación de Lorentz.

### 6.3.2 Contracción de Lorentz-Fitzgerald

Sean, una vez más,  $S$  y  $S'$  dos sistemas de referencia con los ejes paralelos que se mueven con velocidad relativa  $v\mathbf{e}_1$ . Consideremos una regla *en reposo* en  $S'$ , que podemos suponer determinada por dos marcas situadas en los puntos  $x_1'$  y  $x_1' + l_0$  del eje  $x_1'$ , con  $l_0 > 0$ . La distancia  $l_0$  es por tanto la longitud de la regla en su **sistema propio**  $S'$ , llamada **longitud en reposo**. Para determinar la longitud de dicha regla en el sistema  $S$ , es preciso medir las coordenadas  $x_1$  y  $x_1 + l$  de sus extremos *en un mismo instante*  $t$ . Utilizando las ecs. (6.6)-(6.7) de la transformación de Lorentz se obtiene

$$\Delta x_1' \equiv l_0 = \gamma(v)(\Delta x_1 - v\Delta t) = \gamma(v)\Delta x_1 \equiv \gamma(v)l \quad \Rightarrow \quad l = \frac{l_0}{\gamma(v)} = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < l_0.$$

En el sistema  $S$  la regla aparece por tanto *contraída* en un factor  $1/\gamma(v) = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$ , fenómeno conocido como **contracción de Lorentz-Fitzgerald**.

- Nótese que *esta contracción solo se produce en la dirección de la velocidad relativa entre el sistema inercial  $S$  y el sistema  $S'$*  (sistema en que la regla está *en reposo*), ya que en las direcciones transversales  $x_k = x_k'$  ( $k = 2, 3$ ).
- De nuevo, es necesario subrayar que este fenómeno es absolutamente *simétrico entre ambos sistemas de referencia*. En otras palabras, las reglas en reposo en  $S$  aparecen contraídas por el mismo factor  $1/\gamma(v)$  (en la dirección  $x_1'$ ) respecto del sistema  $S'$ .
- La *asimetría* está de nuevo entre el sistema de referencia inercial en que la regla está *en reposo* y cualquier otro sistema inercial. En efecto, en el sistema propio de dicha regla su longitud puede

determinarse *directamente* (comparándola, por ejemplo, con una regla patrón), sin necesidad de medir *simultáneamente* las coordenadas espaciales de sus dos extremos.

Más precisamente, en el sistema propio de la regla las líneas de universo de sus dos extremos son las rectas verticales

$$(t', 0, 0, 0), \quad (t', l_0, 0, 0),$$

donde hemos supuesto por sencillez, que  $x'_1 = 0$ . En otro sistema inercial  $S$  dichas líneas de universo se transforman en

$$\left(\gamma(v)t', \gamma(v)vt', 0, 0\right), \quad \left(\gamma(v)\left(t' + \frac{vl_0}{c^2}\right), \gamma(v)(l_0 + vt'), 0, 0\right).$$

Según el observador en  $S$ , cuando un observador en el sistema propio de dicha regla mide la distancia entre sus extremos lo está haciendo en tiempos *distintos*  $t = \gamma(v)t'$  y  $t + \Delta t$ , separados por un incremento

$$\Delta t = \frac{\gamma(v)vl_0}{c^2}.$$

En el incremento de tiempo  $\Delta t$  el extremo derecho de la regla se ha movido, según  $S$ , en

$$v\Delta t = \frac{v^2}{c^2}\gamma(v)l_0.$$

Por tanto según el observador en  $S$  en el instante  $t = \gamma(v)t'$  los extremos de la regla están situados en los puntos de coordenadas

$$x_1 = \gamma(v)vt', \quad x_1 + \Delta x_1 = \gamma(v)(l_0 + vt') - \frac{v^2}{c^2}\gamma(v)l_0,$$

y la longitud de la regla medida en  $S$  está dada por

$$l = \Delta x_1 = \gamma(v)l_0 - \frac{v^2}{c^2}\gamma(v)l_0 = \gamma(v)l_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{l_0}{\gamma(v)}.$$

Vemos, en particular, que la contracción de Lorentz-Fitzgerald está estrechamente relacionada con la *relatividad de la simultaneidad*.

## 6.4 Cuadrivelocidad y cuádrimomento. Energía cinética relativista

En mecánica newtoniana, la velocidad y el momento de una partícula de masa  $m$  están relacionadas por la ecuación

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (6.29)$$

y la ley del movimiento de la partícula es la segunda ley de Newton

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (6.30)$$

Las relaciones anteriores son *incompatibles con los postulados de la relatividad especial*. Por ejemplo, si  $m$  y  $\mathbf{F}$  son ambas constantes la ecuación anterior implica que

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \frac{\mathbf{F}}{m}t,$$

por lo que el módulo de la velocidad de la partícula será superior a  $c$  para  $|t|$  suficientemente grande. Está claro, por tanto, que las ecs. (6.29)-(6.30) no pueden ser válidas (al menos para velocidades comparables a las de la luz), y surge por tanto la cuestión de cuáles han de ser las ecuaciones correctas que las sustituyan. Un principio de fundamental importancia que nos debe guiar a la hora de hallar estas nuevas ecuaciones es el *principio de relatividad*, según el cual dichas

ecuaciones han de tener la *misma forma* en todos los sistemas de referencia inerciales. En otras palabras, dichas ecuaciones han de ser *covariantes Lorentz*, es decir han de mantener su forma al aplicarles *cualquier* transformación de Lorentz. En general, la forma más sencilla de conseguir que una ecuación sea covariante Lorentz es que dicha ecuación sea una relación entre escalares (como el producto de Minkowski  $x \cdot y$ , el intervalo al cuadrado  $x^2 \equiv x \cdot x$ , etc.), vectores (como las coordenadas espacio-temporales  $x$ ) o, en general, *tensores*, bajo transformaciones de Lorentz. El problema aquí es que  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{F}$  son vectores de  $\mathbb{R}^3$ , covariantes solo bajo *rotaciones*. Además, mientras que en mecánica newtoniana el tiempo  $t$  es un *escalar* (esencialmente invariante bajo cambios de coordenadas), según la teoría especial de la relatividad  $t$  depende en realidad del sistema de referencia escogido.

La generalización más sencilla de la definición newtoniana de velocidad

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3),$$

que es claramente un vector bajo transformaciones de Lorentz es la **cuadrivelocidad**

$$u = \frac{dx}{d\tau}. \quad (6.31)$$

En esta ecuación  $\tau$  es el tiempo propio de la partícula, que como sabemos está relacionado con el tiempo  $t$  en *cualquier* sistema de referencia inercial mediante

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} dt \equiv \frac{dt}{\gamma(v)}. \quad (6.32)$$

Para demostrar que  $u$  se transforma como un vector bajo una transformación de Lorentz cualquiera  $x' = \Lambda x$  basta observar que

$$dx' = \Lambda dx,$$

mientras que  $d\tau$  es un *escalar* ( $d\tau = d\tau'$ ), por lo que

$$u' = \frac{dx'}{d\tau'} = \frac{dx'}{d\tau} = \Lambda \frac{dx}{d\tau},$$

es decir

$$u' = \Lambda u.$$

Esto demuestra que  $u \in \mathbb{R}^4$  es un *vector bajo transformaciones de Lorentz*, ya que se transforma de la misma forma que las coordenadas  $x$  al pasar de un SRI a otro. Escribiremos

$$u \equiv (u_0, \mathbf{u}), \quad \text{con } \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Las coordenadas espaciales de la cuadrivelocidad en un sistema de referencia inercial cualquiera están entonces dadas por

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma(v)\mathbf{v}. \quad (6.33)$$

En particular, si la velocidad de la partícula es mucho menor que  $c$  entonces  $\gamma(v) \simeq 1$  y  $\mathbf{u} \simeq \mathbf{v}$ . En cuanto a la coordenada temporal  $u_0$ ,

$$u_0 = \frac{dx_0}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} = c\gamma(v), \quad (6.34)$$

y por tanto

$$u = \gamma(v)(c, \mathbf{v}). \quad (6.35)$$

De las ecuaciones anteriores se sigue inmediatamente la importante relación

$$u^2 = c^2. \quad (6.36)$$

Esta identidad también se puede deducir directamente de la definición de  $u$ , observando que

$$dx^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2 = c^2 d\tau^2.$$

*Nota.* El vector  $\mathbf{u}$  *no* es la velocidad de la partícula en ningún sistema de referencia inercial. Por ejemplo, al ser

$$\mathbf{u}^2 = \gamma^2(v)v^2 = \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

$|\mathbf{u}| > c$  si  $v > c/\sqrt{2}$ , y  $|\mathbf{u}| \rightarrow \infty$  para  $v \rightarrow c$ . ■

Una vez definida la cuadrivelocidad, es muy natural definir el **cuadrimomento**  $p$  mediante

$$p = m\mathbf{u}, \quad (6.37)$$

donde  $m > 0$  es la masa de la partícula. Por lo visto anteriormente —cf. las ecs. (6.35)-(6.36)—, las componentes del cuadrimomento están dadas por

$$p = m\gamma(v)(c, \mathbf{v}), \quad (6.38)$$

y su cuadrado es

$$p^2 = m^2 c^2. \quad (6.39)$$

En particular,

$$p_i = m\gamma(v)v_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6.40)$$

por lo que para velocidades pequeñas en comparación con  $c$  se tiene

$$p_i \simeq mv_i \quad (v \ll c).$$

A partir de ahora, *denotaremos por*  $\mathbf{p}$  *el vector*

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \equiv m\gamma(v)\mathbf{v}, \quad (6.41)$$

que solo coincide con el momento no relativista  $m\mathbf{v}$  en el límite  $v \rightarrow 0$ .

Por otra parte, la componente temporal de  $p$  está dada por

$$p_0 = mc\gamma(v) \geq mc > 0,$$

Utilizando la identidad (6.39), escrita en la forma

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 c^2, \quad (6.42)$$

y teniendo en cuenta que  $p_0 > 0$  se obtiene

$$p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}. \quad (6.43)$$

Como  $u$  y  $p$  son proporcionales se verifica

$$\frac{\mathbf{u}}{u_0} = \frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{\mathbf{p}}{p_0} \implies \boxed{\mathbf{v} = \frac{c\mathbf{p}}{p_0}}, \quad (6.44)$$

y por tanto, en virtud de la ec. (6.43),

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{c\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}}}. \quad (6.45)$$

También se puede utilizar la ec. (6.42) para despejar  $\gamma(v)$  en función de  $\mathbf{p}$ :

$$\gamma(v) = \frac{p_0}{mc} = \frac{1}{mc} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}. \quad (6.46)$$

Si  $v \ll c$ , desarrollando  $cp_0$  en potencias de  $v/c$  y reteniendo solamente el primero término no constante se obtiene

$$cp_0 = mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) + O(v^4/c^2) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + O(v^4/c^2), \quad (6.47)$$

que, salvo por el término constante  $mc^2$ , es en primera aproximación la energía cinética no relativista. La ecuación anterior sugiere definir la **energía cinética relativista**  $T$  mediante

$$\boxed{T = cp_0 - mc^2 \equiv mc^2(\gamma(v) - 1)}, \quad (6.48)$$

y por tanto

$$\boxed{p_0 = \frac{1}{c}(mc^2 + T)}. \quad (6.49)$$

## 6.5 Conservación del cuádrimomento. Energía relativista

La primera ley de Newton establece la conservación del (tri)momento  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  de una partícula no sometida a fuerzas externas. La generalización más natural de este principio que es *covariante Lorentz* es la *conservación del cuádrimomento* para una partícula relativista que se mueve en ausencia de fuerzas:

$$\boxed{p = \text{const.}},$$

o equivalentemente

$$cp_0 = mc^2 + T = \text{const.}, \quad p_i = m\gamma(v)v_i = \text{const.}.$$

Estas ecuaciones se reducen a la conservación de la energía cinética y el momento no relativistas en el límite  $v \ll c$ . Como en el caso newtoniano, en virtud de la ec. (6.44) ambas leyes de conservación son equivalentes a la constancia de las componentes  $v_i$  de la velocidad ordinaria (en cualquier SRI).

Consideremos a continuación la colisión de  $N$  partículas de masas  $m_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ) sobre las que no actúan fuerzas externas. El **cuádrimomento total**  $P$  se define por

$$\boxed{P = \sum_{n=1}^N p_n \equiv (P_0, \mathbf{P})}, \quad (6.50)$$

siendo  $p_n$  el cuádrimomento de la partícula  $n$ . Por tanto

$$P_0 = \sum_{n=1}^N p_{n,0} \equiv c \sum_{n=1}^N m_n \gamma(v_n), \quad \mathbf{P} = \sum_{n=1}^N \mathbf{p}_n \equiv \sum_{n=1}^N m_n \gamma(v_n) \mathbf{v}_n. \quad (6.51)$$

Según la mecánica newtoniana, incluso si la colisión no es elástica se ha de conservar el momento lineal total del sistema, que tiende a  $\mathbf{P}$  en el límite en que las velocidades  $v_n$  de las partículas son pequeñas en comparación con  $c$ . Esto hace plausible postular la conservación de  $\mathbf{P}$ , es decir

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f,$$

donde  $P_i$  y  $P_f$  denotan respectivamente el cuádrimomento total antes y después de la colisión. Sin embargo, la ecuación anterior no es *covariante Lorentz*, ya que solo depende de tres de las componentes de un cuádrivector. La ecuación covariante Lorentz más sencilla que se deduce de la anterior es evidentemente la conservación del cuádrimomento total  $P$ , es decir

$$P_i = P_f. \quad (6.52)$$

Esta **ley de conservación del momento** relativista se ha comprobado experimentalmente en múltiples situaciones para velocidades arbitrariamente próximas a  $c$ , muy especialmente en el análisis de las colisiones en aceleradores de partículas.

La conservación de la componente cero del cuádrimomento puede expresarse en la forma

$$\sum_n (m_n c^2 + T_n)_i = \sum_n (m_n c^2 + T_n)_f,$$

o equivalentemente

$$(Mc^2 + T)_i = (Mc^2 + T)_f,$$

siendo

$$M = \sum_n m_n, \quad T = \sum_n T_n$$

respectivamente la *masa total* y la *energía cinética total* del sistema. Es importante observar en este punto que en mecánica relativista *el número de partículas antes y después de la colisión no tiene por qué ser el mismo*, ya que, como veremos más adelante, pueden crearse o destruirse partículas si se dan las condiciones apropiadas. Por este motivo, a partir de ahora se entenderá que las sumas en  $n$  que aparecen en expresiones como las anteriores están extendidas a todas las partículas del sistema, sin especificar explícitamente su número  $N_i$  (antes de la colisión) o  $N_f$  (tras la colisión).

En mecánica newtoniana se conserva la masa total  $M$ , y por tanto la conservación de  $P_0$  es equivalente a la de la energía cinética del sistema:

$$T_i = T_f.$$

Según lo que acabamos de ver, sin embargo, en mecánica relativista solo es necesaria la conservación de  $P_0$ , es decir de  $Mc^2 + T$ , no de cada sumando por separado. En particular:

Puede haber procesos en que disminuya (resp. aumente) la masa total del sistema, siempre y cuando esta disminución (resp. aumento) esté compensada por un aumento (resp. disminución) correspondiente de su energía cinética.

Más cuantitativamente, si denotamos  $\Delta M = M_f - M_i$  y  $\Delta T = T_f - T_i$ , la conservación de  $P_0$  puede escribirse en la forma

$$\Delta T = -\Delta(Mc^2). \quad (6.53)$$

En otras palabras:

La energía cinética puede convertirse en masa, y viceversa, siendo el factor de conversión energía/masa el cuadrado de la velocidad de las ondas EM en el vacío.

Esta es una de las predicciones más importantes de la teoría especial de la relatividad, que hasta el momento se ha visto corroborada experimentalmente sin ninguna excepción.

En virtud de la discusión anterior, es prácticamente obligado interpretar la cantidad

$$cP_0 = \sum_n cp_{n,0} = \sum_n (m_n c^2 + T_n) \equiv Mc^2 + T$$

como la **energía total relativista**  $E$  del sistema (en ausencia de fuerzas externas). Por tanto

$$cP_0 = mc^2 + T = E, \quad (6.54)$$

y el momento total del sistema de partículas puede expresarse en la forma

$$P = (E/c, \mathbf{P})$$

En el caso de una partícula

$$p = (p_0, \mathbf{p}) = (E/c, m\gamma(v)\mathbf{v}),$$

y de la ec. (6.46) se sigue que la energía relativista se expresa en función de la velocidad mediante la fórmula

$$E = mc^2\gamma(v). \quad (6.55)$$

En particular, cuando  $v = 0$  la partícula posee una **energía en reposo**

$$E_0 = mc^2.$$

Nótese también que de las ecs. (6.42) y (6.54) se sigue la importante relación

$$E = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2} \quad (6.56)$$

entre la energía y el momento relativista. Escribiendo esta relación en la forma

$$E = mc^2\sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2c^2}}$$

y desarrollando en potencias de  $\mathbf{p}^2$  se obtiene

$$E = mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + O(|\mathbf{p}|^4/(m^3c^2)).$$

Obsérvese por último que de las ecs. (6.44) y (6.56) se sigue la siguiente relación entre la velocidad, la energía y el momento de la partícula:

$$\mathbf{v} = \frac{c^2\mathbf{p}}{E}. \quad (6.57)$$

*Nota.* Una formulación alternativa de los resultados anteriores consiste en definir una *masa dependiente de la velocidad*

$$m(v) \equiv m\gamma(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

en términos de la cual el momento y la energía relativista son simplemente

$$\mathbf{p} = m(v)\mathbf{v}, \quad E = m(v)c^2.$$

La fórmula para la energía cinética

$$T = (m(v) - m)c^2,$$

sin embargo, no se reduce a la expresión clásica reemplazando  $m$  por  $m(v)$ . En cualquier caso, nosotros no utilizaremos el concepto de masa variable en estas notas.

## 6.6 Partículas de masa nula

Como acabamos de ver, el cuadrimento  $p$  de una partícula de masa  $m > 0$  está dado por

$$p = (E/c, \mathbf{p}),$$

y su cuadrado es

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2.$$

Estas relaciones tienen sentido también si la masa de la partícula es nula. En tal caso (al ser  $E > 0$ ) la ecuación anterior proporciona

$$E = c|\mathbf{p}|, \tag{6.58}$$

y por tanto

$$p = (|\mathbf{p}|, \mathbf{p}). \tag{6.59}$$

De la ecuación (6.55) se sigue inmediatamente que *el módulo de la velocidad de una partícula de masa nula es igual a  $c$* , ya que en caso contrario  $E$  y  $\mathbf{p}$  serían ambos idénticamente nulos. Si, como en el caso de partículas materiales, se supone que la velocidad y el trimomento son proporcionales se obtiene

$$\mathbf{v} = c \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}. \tag{6.60}$$

La única partícula conocida<sup>11</sup> de masa nula es el **fotón**, que no es otra cosa que el *cuanto de energía* del campo electromagnético (i.e., la partícula que “transporta” la energía y el momento de dicho campo). Según la mecánica cuántica, la relación entre la energía de un fotón y la frecuencia  $\omega$  de la onda electromagnética asociada está dada por la célebre *ecuación de Planck*

$$E = \hbar\omega \equiv h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \tag{6.61}$$

donde  $\lambda$  es la *longitud de onda* y

$$h = 2\pi\hbar = 6.62606957 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$$

<sup>11</sup>La existencia de la partícula análoga que media las interacciones fuertes, llamada *gluón*, ha sido confirmada experimentalmente, si bien este tipo de partículas no es directamente observable al estar confinadas en el interior de los hadrones. Por razones de tipo teórico, se cree que debería también existir una partícula similar para el campo gravitatorio llamada *gravitón*.



es la constante de Planck. De las relaciones<sup>12</sup>

$$\omega = c|\mathbf{k}|, \quad \mathbf{v} = c \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \quad (6.62)$$

y de las ecs. (6.58), (6.60) y (6.61) se sigue que el vector de onda de la onda asociada al fotón está dado por

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{\omega}{c} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \frac{\omega \mathbf{p}}{E} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar} \Rightarrow \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}.$$

Esto sugiere definir un **cuadrivector de onda**  $k = (k_0, \mathbf{k})$  mediante

$$k = p/\hbar,$$

cuya componente temporal está dada por

$$k_0 = \frac{p_0}{\hbar} = \frac{E}{\hbar c} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = |\mathbf{k}|.$$

Es importante observar que  $k$  es un *vector bajo transformaciones de Lorentz*, al ser proporcional al cuadrimomento  $p$  de un fotón de la onda. En otras palabras, si  $S'$  es otro sistema inercial y  $x' = \Lambda x$  entonces

$$k' = \Lambda k. \quad (6.63)$$

Más generalmente, si dos SRI  $S$  y  $S'$  están relacionados por una *transformación de Poincaré*

$$x' = \Lambda x + a, \quad (6.64)$$

siendo  $\Lambda$  la matriz de una transformación general de Lorentz, entonces

$$u' = \frac{dx'}{d\tau} = \Lambda \frac{dx}{d\tau} \equiv \Lambda u.$$

Para  $m > 0$  el momento y la velocidad son proporcionales, y por tanto

$$p' = \Lambda p.$$

Como esta relación es independiente de la masa de la partícula, tomando el límite  $m \rightarrow 0$  se obtiene la misma ley de transformación para el cuadrimomento de una partícula de masa nula. Por último, al ser en este caso  $k$  proporcional a  $p$  la ley de transformación del cuadrivector de onda  $k$  bajo la transformación de Poincaré (6.64) sigue siendo la ec. (6.63).

### 6.6.1 Efecto Doppler relativista

La covariancia Lorentz del cuadrivector de onda  $k$  permite deducir de forma muy sencilla las ecuaciones del **efecto Doppler relativista**. Supongamos, en efecto, que desde un SRI  $S'$  que viaja con velocidad  $v\mathbf{e}_1$  respecto de otro SRI  $S$  (con ejes paralelos a los de  $S'$ , pero cuyo origen no tiene por que coincidir con el de  $S$  para  $t = 0$ ) se emite una onda electromagnética de frecuencia  $\omega_0$  y longitud de onda  $\lambda_0$  (estas son las llamadas *frecuencia propia* y *longitud de ondas propia* de la onda). Tomemos los ejes del sistema  $S$  de forma que la dirección de propagación de la onda esté en el plano  $x_2 = 0$  y forme un ángulo  $\pi + \alpha$  con el eje  $x_1$  (cf. la Fig 6.8). En el sistema  $S$  el vector

<sup>12</sup>Recuérdese que en una onda plana que se propaga con velocidad  $c$  la frecuencia angular  $\omega$ , el período  $\tau$ , el vector de onda  $\mathbf{k}$ , la longitud de onda  $\lambda$  y la velocidad de propagación  $\mathbf{v}$  están relacionados por

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}, \quad |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \mathbf{v} = \frac{c\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \quad c = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{\lambda\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}.$$

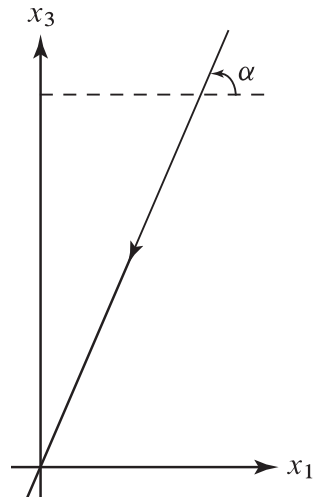


Figura 6.8. Geometría del efecto Doppler relativista.

de onda  $\mathbf{k}$  es por tanto

$$\mathbf{k} = -|\mathbf{k}|(\cos \alpha, 0, \sin \alpha).$$

(Nótese que se puede asumir sin pérdida de generalidad que  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ , cambiando si es preciso el sentido del eje  $x_1$ .) Por el comentario al final del apartado anterior, podemos hallar el cuadrivector de onda  $k'$  en el sistema  $S'$  en que se emite la onda aplicando al cuadrivector de onda  $k$  una transformación de Lorentz  $L(v)$  con velocidad  $v\mathbf{e}_1$ , es decir

$$k' = L(v)k.$$

En primer lugar, al ser  $k'_2 = k_2 = 0$  las componentes espaciales de  $k'$  son de la forma

$$\mathbf{k}' = -|\mathbf{k}'|(\cos \alpha', 0, \sin \alpha').$$

Por otra parte, la componente temporal  $k'_0$  está dada por

$$k'_0 = \frac{\omega_0}{c} = \gamma(k_0 - \beta k_1) = \gamma\left(\frac{\omega}{c} + \beta|\mathbf{k}| \cos \alpha\right) = \frac{\gamma\omega}{c}(1 + \beta \cos \alpha),$$

y por tanto

$$\boxed{\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1 + \beta \cos \alpha)} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \gamma(1 + \beta \cos \alpha) \lambda_0.} \quad (6.65)$$

La relación entre los ángulos  $\alpha$  y  $\alpha'$  también se calcula fácilmente utilizando las ecuaciones

$$k'_1 = \gamma(k_1 - \beta k_0) = \gamma(k_1 - \beta|\mathbf{k}|) = -\gamma|\mathbf{k}|(\cos \alpha + \beta), \quad k'_3 = k_3 = -|\mathbf{k}| \sin \alpha,$$

de donde se sigue que

$$\boxed{\tan \alpha' = \frac{k'_3}{k'_1} = \frac{\sin \alpha}{\gamma(\beta + \cos \alpha)}.} \quad (6.66)$$

Un caso particularmente importante es el llamado *efecto Doppler longitudinal*, en que  $\alpha' = 0$  (es decir, la onda electromagnética se propaga en la dirección del movimiento relativo entre el observador  $S$  y la fuente  $S'$ ). De las fórmulas anteriores se deduce entonces que  $\alpha = 0$  y

$$\boxed{\lambda = \gamma(1 + \beta) \lambda_0 = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \lambda_0.} \quad (6.67)$$

Vemos, por tanto, que si la fuente se *aleja* del observador, es decir si  $\beta > 0$ , entonces  $\lambda > \lambda_0$ , y por tanto el observador en  $S$  percibe un *corrimiento hacia el rojo* en la longitud de onda de la radiación electromagnética emitida por la fuente  $S'$ . Por el contrario, si la fuente se *acerca* al observador entonces  $\beta < 0$ , lo cual implica que  $\lambda < \lambda_0$ . Por tanto en este último caso el observador en  $S$  percibe un *corrimiento al azul* de la longitud de onda de la luz (o, en general, la radiación electromagnética) emitida por  $S$ . Por el contrario, si  $\alpha = \pi/2$  (es decir, cuando según el observador  $S$  el frente de ondas es transversal a la dirección de la velocidad del emisor  $S'$ ) de las ecs. (6.65)-(6.66) se sigue que

$$\tan \alpha' = \frac{1}{\gamma\beta}, \quad \lambda = \gamma\lambda_0 > \lambda_0,$$

Por tanto en este caso el observador en  $S$  percibe un *corrimiento hacia el rojo* independientemente del signo de  $v$ . Este es el llamado *efecto Doppler transversal*, que no tiene un análogo clásico.

### 6.6.2 Efecto Compton

Consideremos a continuación el llamado **efecto Compton**, que consiste en la dispersión de un fotón por un electrón. En el SRI en que el electrón está en reposo (que suele coincidir con el sistema del laboratorio) los momentos iniciales del fotón y el electrón son respectivamente

$$p_\gamma = \left(\frac{E}{c}, |\mathbf{p}|, 0, 0\right) = \frac{E}{c} (1, 1, 0, 0), \quad p_e = (mc, 0, 0, 0),$$

siendo  $m$  la masa del electrón. Tomemos los ejes de forma que la colisión tenga lugar en el plano  $x_3 = 0$ , y llamemos  $\theta$  al ángulo formado por el (tri)momento del fotón dispersado con el eje  $x_1$ . Entonces el momento del fotón tras la colisión está dado por

$$p'_\gamma = \frac{E'}{c} (1, \cos \theta, \sin \theta, 0).$$

Por la ley de conservación del momento,

$$p_\gamma + p_e = p'_\gamma + p'_e,$$

o equivalentemente

$$p_e + (p_\gamma - p'_\gamma) = p'_e.$$

Elevando al cuadrado, y teniendo en cuenta que

$$p_\gamma^2 = p'^2_\gamma = 0, \quad p_e^2 = p'^2_e = m^2c^2$$

se obtiene la relación

$$p_e(p_\gamma - p'_\gamma) = p_\gamma p'_\gamma,$$

en la que hemos eliminado el momento  $p'_e$  del electrón dispersado. Sustituyendo las expresiones halladas anteriormente para  $p_\gamma$ ,  $p'_\gamma$  y  $p_e$  se obtiene:

$$m(E - E') = \frac{EE'}{c^2} (1 - \cos \theta) \implies mc^2 \left( \frac{1}{E'} - \frac{1}{E} \right) = 1 - \cos \theta,$$

y teniendo en cuenta (6.61) se llega finalmente a la célebre **ecuación de Compton**

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta). \tag{6.68}$$

Vemos, por tanto, que la longitud de onda del fotón dispersado es siempre *mayor o igual* que la del fotón incidente.

*Ejercicio.* Probar que el ángulo  $-\theta_e$  formado por el electrón dispersado con el eje  $x_1$  y su energía cinética  $T_e$  están determinados por la ecuaciones

$$\cot \theta_e = \left(1 + \frac{E}{mc^2}\right) \tan(\theta/2), \quad T_e = \frac{E}{1 + \frac{mc^2}{2E} \csc^2(\theta/2)}.$$

## 6.7 Colisiones relativistas

La conservación del cuádrimomento de un sistema de partículas sobre las que no actúan fuerzas externas permite estudiar de forma sencilla las *colisiones* en el marco de la teoría especial de la relatividad. En efecto, como vimos en la sección anterior, en ausencia de fuerzas externas el cuádrimomento total  $P$  del sistema es constante, por lo que en particular el momento  $P_i$  inmediatamente antes de la colisión ha de coincidir con el momento  $P_f$  tras la colisión (cf. la ec. (6.52)). Esta ley de conservación es equivalente a la *conservación de la energía relativista*

$$P_0 = \sum_n p_{n,0} \equiv \sum_n \gamma(v_n) m_n c \quad (6.69)$$

junto con la *conservación del momento*

$$\mathbf{P} = \sum_n \mathbf{p}_n \equiv \sum_n \gamma(v_n) m_n \mathbf{v}_n. \quad (6.70)$$

### 6.7.1 Sistema centro de momentos

La relación (6.52) es válida en cualquier sistema de referencia inercial. En el análisis de las colisiones de un sistema de partículas ultrarelativistas (es decir, que se mueven a velocidades comparables a  $c$ ) hay, sin embargo, un SRI particularmente útil denominado **sistema centro de momentos** (CM). Este sistema, análogo al sistema centro de masas en mecánica newtoniana, es aquél en que las componentes espaciales del momento total del sistema son nulas, es decir aquél en que se verifica

$$\mathbf{P} = 0.$$

Para demostrar la existencia de tal SRI, basta comprobar que el cuádrimomento total  $P$  de un sistema de partículas es *de tipo temporal*, es decir,  $P^2 > 0$  (cf. la discusión de la pág. 163). A su vez, este hecho es consecuencia del siguiente resultado general, que probaremos a continuación:

La suma  $P = \sum_n p_n$  de un número cualquiera de cuádrivectores  $p_n$  *de tipo temporal y orientados hacia el futuro* (es decir,  $p_{n,0} > 0$  para todo  $n$ ) es también un vector de tipo tiempo orientado hacia el futuro.

En efecto, al ser  $p_n$  un vector de tipo tiempo orientado hacia el futuro se tiene

$$p_n^2 = p_{n,0}^2 - \mathbf{p}_n^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad |p_{n,0}| = p_{n,0} > |\mathbf{p}_n|.$$

Por tanto, si  $p_m$  es otro vector de este tipo se tiene

$$\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{p}_m \leq |\mathbf{p}_n| |\mathbf{p}_m| < p_{n,0} p_{m,0}$$

y en consecuencia

$$p_n \cdot p_m = p_{n,0} p_{m,0} - \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{p}_m > 0.$$

Entonces

$$P_0 = \sum_n p_{n,0} > 0,$$

y, por lo que acabamos de ver,

$$P^2 = \left( \sum_n \mathbf{p}_n \right)^2 = \sum_{n,m} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{p}_m = \sum_n p_n^2 + \sum_{n \neq m} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{p}_m > 0.$$

• De hecho, es fácil ver que el resultado anterior se extiende al caso en que algunas de las partículas del sistema (pero *no todas*) tengan masa nula, es decir es válido con tal que  $p_n^2 \geq 0$  para todo  $n$  y  $p_k^2 > 0$  para algún  $k$  (siendo, como antes,  $p_{n,0} > 0$  para todo  $n$ ).

### 6.7.2 Energía umbral

Consideremos un proceso del tipo

$$a + b \rightarrow a + b + c,$$

en que dos partículas  $a$  y  $b$  chocan, produciéndose una tercera partícula  $c$  como resultado de la colisión. En el sistema del laboratorio una de las partículas (por ejemplo, la  $b$ ) es el blanco, es decir  $\mathbf{p}_b = 0$ , y la otra (el proyectil) tiene un momento  $\mathbf{p}_a \neq 0$ . ¿Cuál es la **energía umbral** de la partícula  $a$ , es decir la energía mínima que debe tener dicha partícula para que sea posible la creación de la partícula  $c$ ? Evidentemente, la conservación de la energía relativista requiere que

$$\frac{E_a}{c^2} + m_b = m_a \gamma(v'_a) + m_b \gamma(v'_b) + m_c \gamma(v'_c),$$

donde las primas indican las velocidades tras la colisión en el sistema del laboratorio. Al ser  $\gamma(v'_i) \geq 1$ , de esta relación se sigue que

$$E_a \geq (m_a + m_c)c^2.$$

Sin embargo, para que se alcance la igualdad en la desigualdad anterior es necesario que  $\gamma(v'_a) = \gamma(v'_b) = \gamma(v'_c) = 1$ , es decir que  $v'_a = v'_b = v'_c = 0$ . Esto es, sin embargo, *imposible*, ya que en virtud de la conservación del momento  $\mathbf{p}'_a + \mathbf{p}'_b + \mathbf{p}'_c = \mathbf{p}_a \neq 0$ , por lo que las velocidades de las tres partículas tras la colisión no pueden ser todas nulas. Por tanto, la energía umbral es *mayor* que  $(m_a + m_c)c^2$ .

Veamos a continuación cómo se calcula la energía umbral  $E_{\min}$  en el caso más general

$$a + b \rightarrow c_1 + \dots + c_N, \quad (6.71)$$

en el que se admite la producción de un número arbitrario de partículas adicionales  $c_i$ , todas ellas de masa no nula. Para ello, analizaremos la colisión en el sistema centro de momentos (CM), en que el cuadrimento total (antes o después de la colisión) está dado por

$$P = \frac{E_{\text{CM}}}{c} (1, 0, 0, 0).$$

Calculando la energía  $E_{\text{CM}}$  en el sistema CM después de la colisión se obtiene

$$E_{\text{CM}} = \sum_i m_i \gamma(v_i) c^2 \geq \sum_i m_i c^2 \equiv M c^2.$$

Nótese que en este caso se puede dar la igualdad si todas las partículas están en reposo en el sistema CM —es decir si todas ellas se mueven con la misma velocidad  $\mathbf{v}$  en el sistema del laboratorio—, lo cual es evidentemente posible si ninguna de ellas tiene masa nula. Por tanto el valor mínimo de la energía en el sistema CM es simplemente  $M c^2$ :

$$E_{\text{CM}} \geq M c^2.$$

Para encontrar la energía umbral de la partícula  $a$  en el sistema del laboratorio, basta utilizar la ley de conservación del cuadrimomento y la invariancia del producto de Minkowski, que proporcionan la relación

$$P_{\text{CM}}^2 = \frac{E_{\text{CM}}^2}{c^2} = P_{\text{L}}^2 = (p_a + p_b)^2 = c^2(m_a^2 + m_b^2) + 2p_a \cdot p_b, \quad (6.72)$$

siendo  $P_{\text{L}}$  el cuadrimomento inicial en el sistema del laboratorio y  $p_a, p_b$  los momentos de las partículas  $a$  y  $b$  antes de la colisión *en el sistema del laboratorio*:

$$p_a = \left( \frac{E_a}{c}, \mathbf{p}_a \right), \quad p_b = m_b c (1, 0, 0, 0).$$

Sustituyendo en la ec. (6.72) y operando se obtiene

$$\frac{E_{\text{CM}}^2}{c^2} = c^2(m_a^2 + m_b^2) + 2E_a m_b.$$

Por tanto la energía de la partícula  $a$  en el sistema del laboratorio está dada por

$$E_a = \frac{c^2}{2m_b} \left( \frac{E_{\text{CM}}^2}{c^4} - m_a^2 - m_b^2 \right).$$

En particular, reemplazando  $E_{\text{CM}}$  por su valor mínimo  $Mc^2$  se obtiene la fórmula

$$E_{\text{min}} = \frac{c^2}{2m_b} (M^2 - m_a^2 - m_b^2). \quad (6.73)$$

Nótese que el resultado anterior es válido también si la partícula  $a$  (el proyectil) tiene masa nula.

*Ejercicio.* Un protón choca contra otro protón en reposo (en el sistema del laboratorio), produciéndose como resultado de la colisión un par protón-antiprotón ( $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$ ). ¿Cuál es la mínima energía cinética del protón incidente para que este proceso sea posible?

*Solución.* Dado que la masa de una partícula es igual a la de su antipartícula, podemos aplicar la ecuación anterior con

$$m_a = m_b \equiv m, \quad M = 4m,$$

siendo  $m \simeq 938.272046 \text{ MeV}/c^2$  la masa del protón. Sustituyendo en dicha fórmula se obtiene

$$E_{\text{min}} = \frac{c^2}{2m} (16m^2 - 2m^2) = 7mc^2.$$

Por tanto la mínima energía cinética del protón incidente es

$$T_{\text{min}} = E_{\text{min}} - mc^2 = 6mc^2 \simeq 5.63 \text{ GeV}.$$

*Ejercicio.* Demostrar que un fotón *aislado* no puede desintegrarse en un par electrón-positrón ( $\gamma \not\rightarrow e^- + e^+$ ). Probar que, sin embargo, sí es posible el proceso  $\gamma + N \rightarrow N + e^- + e^+$  (donde  $N$  es un núcleo pesado), siendo la energía umbral del fotón en este caso aproximadamente igual a  $2m_e c^2$ .

*Solución.* En primer lugar, veamos que el proceso  $\gamma \rightarrow e^- + e^+$  es imposible, independientemente de la energía del fotón. En efecto, si analizamos este proceso en el sistema centro de momentos del par  $e^- - e^+$  entonces el momento final  $\mathbf{P}$  es nulo, por lo que también habría de serlo el momento del fotón. Pero esto es imposible, ya que para una partícula de masa nula  $\mathbf{p} = 0$  implica que  $E = c|\mathbf{p}| = 0$ , es decir la partícula no tendría energía ni momento. (Según la teoría especial de la

relatividad, la energía de cualquier partícula ha de ser estrictamente positiva, incluso si la masa es nula.) En segundo lugar, consideremos el proceso

$$\gamma + N \rightarrow N + e^- + e^+$$

mediado por un núcleo pesado. Utilizando la fórmula (6.73) con

$$m_a = 0, \quad m_b = m_N, \quad M = 2m_e + m_N$$

se obtiene

$$E_{\min} = \frac{c^2}{2m_N} [(2m_e + m_N)^2 - m_N^2] = 2m_e c^2 \left( 1 + \frac{m_e}{m_N} \right) \gtrsim 2m_e c^2,$$

ya que  $m_e \ll m_N$ .

## 6.8 Dinámica relativista

En mecánica newtoniana, el movimiento de una partícula material está regido por la segunda ley de Newton

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \tag{6.74}$$

válida en cualquier SRI. Desde el punto de vista de la teoría especial de la relatividad, la generalización más natural de la ecuación anterior es

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{f}, \tag{6.75}$$

donde

$$\mathbf{f} \equiv (f_0, \mathbf{f}) \in \mathbb{R}^4 \tag{6.76}$$

es un cuadvivector denominado **cuadrifuerza**, que depende en general de las coordenadas espacio-temporales y de la velocidad de la partícula. En efecto, esta ecuación es *covariante Lorentz*, ya que  $\mathbf{p}$  es un vector bajo transformaciones de Lorentz y el tiempo propio  $\tau$  es un escalar. Además, veremos a continuación que la ecuación (6.75) se reduce esencialmente a la segunda ley de Newton para velocidades pequeñas en comparación con  $c$ .

Por analogía con la mecánica newtoniana, *definimos* la **fuerza relativista**  $\mathbf{F}$  de modo que se cumpla la segunda ley de Newton (6.74) cuando  $\mathbf{p}$  es el momento *relativista*. Como

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma(v)} \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{\mathbf{f}}{\gamma(v)},$$

la relación entre la cuadrifuerza y la fuerza relativista es

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{f}}{\gamma(v)}. \tag{6.77}$$

Nótese que la ec. (6.74) se puede escribir

$$\frac{d}{dt} (\gamma(v) m \mathbf{v}) \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \mathbf{F}. \tag{6.78}$$

Evidentemente, para una dada fuerza  $\mathbf{F}$  (por ejemplo, para  $\mathbf{F}$  constante) la ecuación anterior tiende a su homóloga newtoniana para velocidades mucho menores que  $c$ .

Veamos a continuación que la componente temporal de la cuadrifuerza está determinada por las componentes espaciales. Para ello basta derivar la identidad

$$p^2 \equiv \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m^2 c^2$$

respecto de  $\tau$ , obteniendo

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{f} = 0. \quad (6.79)$$

En otras palabras, *el cuádrimomento y la cuadrifuerza son ortogonales* (en el sentido del producto de Minkowski) *en todo instante*. Aplicando la definición del producto de Minkowski se obtiene la relación

$$f_0 = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{p}}{p_0} = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{c} = \frac{\gamma(v)}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \quad (6.80)$$

donde hemos tenido en cuenta la ec. (6.44). Por tanto

$$\mathbf{f} = \gamma(v) \left( \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c}, \mathbf{F} \right). \quad (6.81)$$

En mecánica newtoniana

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{dT}{dt}, \quad (6.82)$$

siendo

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$$

la energía cinética de la partícula. El análogo relativista de esta ecuación lo proporciona la componente temporal de la ecuación del movimiento (6.75), es decir

$$\frac{dp_0}{d\tau} = f_0.$$

En efecto, en virtud de (6.80) se tiene

$$\frac{dp_0}{d\tau} = \frac{dp_0}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma(v) \frac{dp_0}{dt} = f_0 = \frac{\gamma(v)}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v},$$

de donde se obtiene la identidad

$$\frac{d}{dt}(cp_0) = \frac{d}{dt}(mc^2 + T) = \frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (6.83)$$

Por tanto la ec. (6.82) sigue siendo válida, si interpretamos  $T$  como la energía cinética relativista y  $\mathbf{F}$  como la fuerza relativista.

Supongamos, a continuación, que *en un cierto sistema de referencia inercial  $S$*  la fuerza relativista  $\mathbf{F}$  deriva de un potencial  $V(\mathbf{r})$  independiente del tiempo, es decir

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}. \quad (6.84)$$

Este es el caso, por ejemplo, de una fuerza constante independiente del tiempo, siendo en este caso  $V = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$  una función lineal de las coordenadas espaciales. Si se cumple la ec. (6.84),

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{dV}{dt},$$

y la ecuación (6.83) se puede escribir en la forma

$$\frac{d}{dt}(cp_0 + V(\mathbf{r})) = 0. \quad (6.85)$$

En otras palabras:



Si en un cierto sistema de referencia inercial la fuerza relativista deriva de un potencial independiente del tiempo en dicho sistema se conserva la **energía total relativista**

$$E = cp_0 + V(\mathbf{r}) = mc^2 + T + V(\mathbf{r}) = mc^2\gamma(v) + V(\mathbf{r}). \quad (6.86)$$

- El ejemplo más importante de fuerza relativista es la *fuerza de Lorentz*

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (6.87)$$

donde  $\mathbf{v}$  denota la velocidad de la partícula. En efecto, se comprueba experimentalmente que la ecuación del movimiento de una partícula de carga  $q$  en un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y magnético  $\mathbf{B}$  es *exactamente* (incluso para velocidades arbitrariamente próximas a  $c$ ) la ec. (6.74) con la fuerza de Lorentz (6.87). Además, si los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  se transforman adecuadamente bajo una transformación de Lorentz, la ecuación del movimiento (6.74)-(6.87) es válida en *cualquier* sistema de referencia inercial.

### 6.8.1 Movimiento hiperbólico

El ejemplo más sencillo de fuerza relativista es el de una fuerza constante<sup>13</sup>

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

con  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  un vector constante con dimensiones de aceleración. Veremos a continuación que en este caso, al igual que en mecánica no relativista, la ecuación del movimiento de la partícula puede resolverse exactamente. Supongamos, por sencillez, que la partícula está en reposo en el origen de coordenadas para  $t = 0$ , es decir

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{p}(0) = 0.$$

Integrando la ecuación del movimiento

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\mathbf{a}$$

con la condición inicial  $\mathbf{p}(0) = 0$  queda

$$\mathbf{p} = m\mathbf{a}t.$$

Sustituyendo en la ecuación (6.45) se obtiene

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{c\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}} = \frac{m\mathbf{a}ct}{\sqrt{m^2c^2 + m^2a^2t^2}} = \frac{\mathbf{a}t}{\sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}}}. \quad (6.88)$$

Nótese que, independientemente de la magnitud de la fuerza  $\mathbf{F}$  (es decir, de la aceleración constante  $\mathbf{a}$ ), de la ecuación anterior se sigue que  $v < c$  para todo  $t$ . Integrando dicha ecuación respecto del tiempo y teniendo en cuenta que  $\mathbf{r}(0) = 0$  se obtiene la ley horaria del movimiento:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} \int_0^t \frac{s ds}{\sqrt{1 + \frac{a^2s^2}{c^2}}} = \frac{c^2\mathbf{a}}{a^2} \left( \sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}} - 1 \right). \quad (6.89)$$

<sup>13</sup>La afirmación de que la fuerza que actúa sobre la partícula es constante *no* es invariante Lorentz, sino que depende del sistema de referencia inercial considerado. En otras palabras, aunque  $\mathbf{F}$  sea constante en un determinado sistema de referencia inercial  $S$  no lo será, en general, en otro sistema inercial  $S'$  en movimiento respecto del primero. Puede probarse, sin embargo, que si  $\mathbf{F}$  es constante en un sistema inercial  $S$  también lo es en cualquier otro sistema inercial  $S'$  cuyo origen se mueve (respecto de  $S$ ) en la dirección de  $\mathbf{F}$ , y además en tal caso  $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$  (véase el ejercicio al final de esta sección).

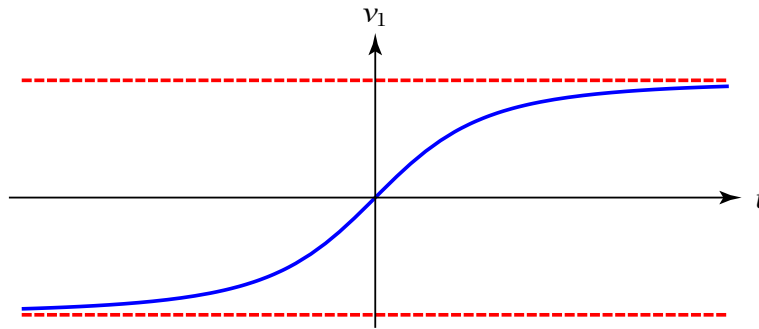


Figura 6.9. Componente en la dirección de  $\mathbf{a}$  de la velocidad de una partícula relativista de masa  $m$  sometida a una fuerza constante  $m\mathbf{a}$  en función del tiempo (curva en azul). En rojo se han representado las dos asintotas  $v_1 = \pm c$ .

Nótese que para  $a|t| \ll c$  las ecuaciones (6.88) y (6.89) se convierten aproximadamente en sus análogas en mecánica newtoniana

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}t, \quad \mathbf{r} = \frac{1}{2} \mathbf{a}t^2. \quad (6.90)$$

Por el contrario, para  $t \rightarrow \pm\infty$  la velocidad  $\mathbf{v}$  tiende a  $\pm c\mathbf{a}/a$  y, por tanto, su módulo tiende a  $c$  (cf. la Fig. 6.9), mientras que  $\mathbf{r} \sim c|t|\mathbf{a}/a$ .

Si escogemos los ejes de modo que  $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_1$ , la ley horaria del movimiento (6.89) se reduce a

$$x_1 = \frac{c^2}{a} \left( \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right) \Rightarrow \boxed{\left( x_1 + \frac{c^2}{a} \right)^2 - x_0^2 = \frac{c^4}{a^2}, \quad x_1 \geq 0}.$$

Esta es la ecuación de una (rama de) *hipérbola equilátera* (cf. la Fig. 6.10) que tiene por centro el punto  $(0, -c^2/a)$ , por eje el eje  $x_1$  y por asintotas las rectas

$$x_1 + \frac{c^2}{a} = \pm x_0.$$

Nótese que en mecánica newtoniana la línea de universo de la partícula es la *parábola*

$$x_1 = \frac{a}{2c^2} x_0^2$$

(cf. la ec. (6.90)).

De la ec. (6.88) se sigue inmediatamente que

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma} = \left( 1 + \frac{a^2 t^2}{c^2} \right)^{-1/2} \Rightarrow \tau = \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{1 + \frac{a^2 s^2}{c^2}}},$$

donde hemos tomado, por sencillez  $\tau(0) = 0$ . Efectuando el cambio de variable  $as/c = \sinh z$  en la integral se obtiene fácilmente

$$\boxed{\tau = \frac{c}{a} \operatorname{arcsinh}(at/c) = \frac{c}{a} \log \left( \frac{at}{c} + \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} \right)}. \quad (6.91)$$

Por tanto el tiempo coordenado  $t$  se expresa en función del tiempo propio  $\tau$  mediante

$$\boxed{t = \frac{c}{a} \sinh(a\tau/c)}. \quad (6.92)$$

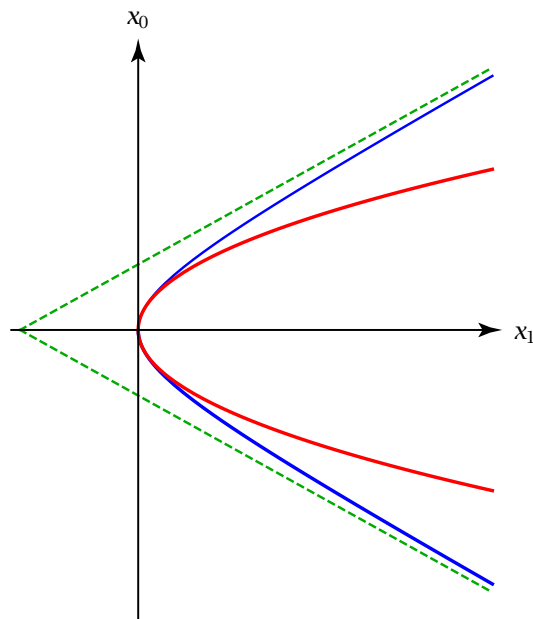


Figura 6.10. Línea de universo de una partícula relativista de masa  $m$  sometida a una fuerza constante  $ma$  en la dirección del eje  $x_1$  (en azul), junto con su análogo en mecánica newtoniana (en rojo). Se han representado en verde las rectas  $x_1 = -\frac{c^2}{a} \pm x_0$ , asintóticas a la línea de universo de la partícula relativista.

Nótese, en particular, que para  $\tau \gg c/a$  se tiene

$$t \simeq \frac{c}{2a} e^{a\tau/c} \quad (\tau \gg c/a),$$

i.e., el tiempo coordenado aumenta exponencialmente con el propio.

También puede resultar de interés calcular  $\beta(v)$  y  $\gamma(v)$  en función del tiempo propio  $\tau$ . En primer lugar (tomando, como antes,  $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_1$ ) el parámetro  $\beta(v)$  se obtiene fácilmente a partir de las ecuaciones (6.88) y (6.92):

$$\beta(v) = \frac{v_1}{c} = \frac{\sinh(a\tau/c)}{\sqrt{1 + \sinh^2(a\tau/c)}} = \tanh(a\tau/c). \tag{6.93}$$

En cuanto al parámetro  $\gamma(v)$ , se puede obtener de la ecuación anterior o más sencillamente teniendo en cuenta que es igual a la derivada del tiempo coordenado  $t$  respecto del tiempo propio:

$$\gamma(v) = \frac{dt}{d\tau} = \cosh(a\tau/c). \tag{6.94}$$

En virtud de la ecuación (6.48), la energía cinética de la partícula está dada por

$$T = mc^2(\gamma(v) - 1) = mc^2(\cosh(a\tau/c) - 1) = \boxed{2mc^2 \sinh^2(a\tau/(2c))}. \tag{6.95}$$

Esta es la energía que es necesario suministrar a la partícula para mantener su aceleración constante (igual a  $\mathbf{a}$ ) desde el instante inicial ( $\tau = 0$ ) hasta un tiempo propio  $\tau$ . Por la ley de conservación de la energía relativista (6.86), esta energía ha de ser igual al trabajo  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = m\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$  (ya que  $\mathbf{F}$  es constante) realizado por la fuerza  $\mathbf{F}$  durante ese lapso de tiempo propio. Este hecho se comprueba fácilmente utilizando las ecs. (6.89) y (6.92):

$$m\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = mc^2 \left( \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right) = mc^2(\cosh(a\tau/c) - 1). \tag{6.96}$$

De nuevo, para tiempos propios  $\tau \gg c/a$  esta energía aumenta exponencialmente con  $\tau$ :

$$T \simeq \frac{1}{2} mc^2 e^{a\tau/c} \quad (\tau \gg c/a).$$

*Ejercicio.* Probar que si  $\mathbf{F}$  es constante en un sistema inercial  $S$  también lo es en cualquier otro sistema inercial  $S'$  cuyo origen se mueve respecto de  $S$  en la dirección de  $\mathbf{F}$ , y que además  $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$ .

*Solución.* Tomemos el eje  $x_1$  de  $S$  en la dirección de la fuerza  $\mathbf{F}$  y los ejes de  $S'$  paralelos a los de  $S$ , y sea  $\mathbf{w} = w\mathbf{e}_1$  la velocidad del origen  $O'$  de  $S'$  respecto de  $S$ . Al ser  $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_1$ , la velocidad de la partícula está también dirigida según la dirección del vector  $\mathbf{e}_1$  en cada instante. En el sistema  $S$  la cuadrifuerza  $f$  tiene componentes

$$f_1 = \gamma(v)F, \quad f_0 = \frac{\gamma(v)}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \gamma(v) \frac{v}{c} F, \quad f_2 = f_3 = 0,$$

y por tanto

$$f = F\gamma(v) \left( \frac{v}{c}, 1, 0, 0 \right).$$

Las componentes de la cuadrifuerza en el sistema  $S'$  se obtienen aplicando un *boost* de Lorentz de velocidad  $w$  en la dirección del eje  $\mathbf{e}_1$ :

$$f'_0 = \gamma(w) \left( f_0 - \frac{w}{c} f_1 \right) = F\gamma(v)\gamma(w) \frac{v-w}{c}, \quad f'_1 = \gamma(w) \left( f_1 - \frac{w}{c} f_0 \right) = F\gamma(v)\gamma(w) \left( 1 - \frac{vw}{c^2} \right)$$

y por supuesto  $f'_2 = f'_3 = 0$ . Teniendo en cuenta que la velocidad de la partícula en el sistema  $S'$  está dada por la ley de adición de velocidades relativista

$$v' = \frac{v-w}{1 - \frac{vw}{c^2}}$$

se obtiene

$$f' = F\gamma(v)\gamma(w) \left( 1 - \frac{vw}{c^2} \right) \left( \frac{v'}{c}, 1, 0, 0 \right).$$

De la identidad

$$\gamma(v)\gamma(w) \left( 1 - \frac{vw}{c^2} \right) = \gamma(v')$$

se sigue entonces que

$$f' = F\gamma(v') \left( \frac{v'}{c}, 1, 0, 0 \right),$$

y en particular

$$\mathbf{F}' = \frac{f'_1}{\gamma(v')} \mathbf{e}_1 = F\mathbf{e}_1 = \mathbf{F}. \quad \blacksquare$$

*Ejercicio.* La *aceleración propia* de una partícula es su aceleración instantánea respecto de su sistema de referencia propio. i) Expresar la aceleración propia en función de la aceleración  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$  medida en un sistema de referencia inercial. ii) Demostrar que si en un cierto SRI la partícula se mueve en la dirección del eje  $\mathbf{e}_1$  para todo  $t$  entonces la aceleración propia es igual a  $d\mathbf{u}/dt$ .

*Solución.* i) Para calcular la aceleración propia en un cierto instante  $t$ , veamos en primer lugar cómo se transforma la aceleración  $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$  medida en un cierto SRI  $S$  si aplicamos una transformación especial de Lorentz con velocidad  $w\mathbf{e}_1$ . Para ello basta derivar la ley de adición de velocidades relativista, obteniéndose

$$a'_1 = \frac{dv'_1}{dt'} \bigg/ \frac{dt'}{dt} = \frac{Da_1 + (v-w) \frac{a_1 w}{c^2}}{\gamma(w)D^3} = \frac{a_1}{\gamma(w)^3 D^3}, \quad a'_k = \frac{Da_k + v_k \frac{a_1 w}{c^2}}{\gamma^2(w)D^3} \quad (k = 2, 3),$$

donde hemos definido

$$D \equiv 1 - \frac{vw}{c^2}.$$

En otras palabras, el vector  $\mathbf{a}' = (a'_1, a'_2, a'_3)$  proporciona la aceleración de la partícula medida en un SRI  $S'$  (con ejes paralelos a los de  $S$ ) cuyo origen se mueve respecto de  $S$  con una velocidad  $\mathbf{w} = w\mathbf{e}_1$ . Si suponemos que en un cierto instante  $t$  la partícula se está moviendo en la dirección del eje  $\mathbf{e}_1$ , es decir si  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_1$  en dicho instante, tomando en las ecuaciones anteriores  $w = v$  obtendremos la aceleración de la partícula en su sistema  $S'$  en dicho instante  $t$ . Sustituyendo  $w = v$ , y por tanto  $D = \gamma(v)^{-2}$  y  $v_2 = v_3 = 0$ , en dichas ecuaciones se obtiene así

$$a'_1 = \gamma(v)^3 a_1, \quad a'_k = \gamma(v)^2 a_k \quad (k = 2, 3).$$

En un SRI arbitrario (cuyo eje  $\mathbf{e}_1$  no necesariamente coincide con la dirección de la velocidad de la partícula en el instante  $t$ ) las fórmulas anteriores han de reemplazarse por las siguientes:

$$a'_{\parallel} = \gamma(v)^3 a_{\parallel}, \quad a'_{\perp} = \gamma(v)^2 a_{\perp},$$

donde  $\parallel$  y  $\perp$  indican respectivamente las componentes de un vector cualquiera en la dirección de la velocidad de la partícula en el instante  $t$  y perpendicular a dicha dirección.

ii) Si la partícula se mueve en todo momento en la dirección del eje  $x_1$  con velocidad  $v$  (no necesariamente constante) en un cierto SRI  $S$  entonces  $x_2 = x_3 = 0$  para todo  $t$ , y por tanto  $a_2 = a_3 = 0$ . De las fórmulas anteriores se sigue entonces que

$$a'_1 = \gamma(v)^3 a_1 = \gamma(v)^3 \frac{dv}{dt}, \quad a'_2 = a'_3 = 0.$$

Por otra parte,

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma(v)v) = (\gamma'(v)v + \gamma(v)) \frac{dv}{dt} = \left( \gamma(v) + \gamma(v)^3 \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{dv}{dt} = \gamma(v)^3 \frac{dv}{dt} = a'_1,$$

como queríamos demostrar. En particular, nótese que de la ecuación del movimiento bajo una fuerza constante  $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_1$  se sigue que

$$\frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{1}{m} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{a}'.$$

Por tanto en el movimiento hiperbólico estudiado en esta sección la aceleración propia de la partícula es constante y está dirigida en la dirección del eje  $x_1$ . ■



# Índice alfabético

- ángulo
  - de deflexión, 60
- ángulos de Euler, 147
- ápside, 51
- acción, 82
- aceleración, 1
  - centrípeta, 5
  - en coordenadas cilíndricas, 4
  - en coordenadas esféricas, 3
- afelio, 51
- apoápside, 51
- apoastro, 51
- apogeo, 51
  
- body axes*, véase sistema de ejes del cuerpo
- boost
  - de Galileo, 11
  - de Lorentz, 167
  
- cálculo de variaciones, 73
- campo
  - eléctrico, 16
  - electromagnético, 17, 86, 198
  - magnético, 17
- centro de masas, 35
- cono
  - del cuerpo, 143
  - del espacio, 144
  - fijo, 144
- conservación
  - de la energía, 13
  - del momento angular, 12
- coordenada
  - cíclica, 95
  - ignorable, 95
- coordenadas
  - cilíndricas, 3
  - esféricas, 1
  - generalizadas, 87, 90
- corchete de Poisson, 104
- covariancia, 84
- cuadrifuerza, 187
- cuadrimomento, 176
  - total, 177
- cuadripotencial electromagnético, 197
- cuadrivector, 167
  - de onda, 181
- cuadrivelocidad, 175
  
- delta de Dirac, 17
- derivada
  - total, 80
  - variacional, 80
- desplazamiento virtual, 89
- dirección invariante, 143
- dispersión, 59
- distancia propia, 165
  
- ecuación
  - de Binet, 46
  - de Compton, 183
  - de Euler-Lagrange, 76
  - de ondas, 18
  - de Poisson, 17
  - secular, 134
- ecuaciones
  - canónicas de Hamilton, 100
  - de Euler, 140
  - de Euler-Lagrange, 79, 91
  - de Lagrange, 92
  - de Maxwell, 17
- efecto
  - Compton, 183
  - Doppler relativista, 181
- eje instantáneo de rotación, 112, 128
- ejes
  - fijos, 109
  - móviles, 109
  - principales de inercia, 133, 134
- energía
  - cinética, 12, 37
    - de un sólido rígido, 129
    - relativista, 177
  - en reposo, 179
  - potencial, 13
  - rotacional, 129, 131

- total, 13
  - relativista, 179, 189
  - umbral, 185
- equilibrio, 22
  - estable, 31
- espacio
  - de configuración, 90
  - de fases, 104
  - de Minkowski, 166
  - fásico, 104
- extremal, 76, 79
- fórmula de Rutherford, 67, 69
- fotón, 180
- Foucault, péndulo de, 121
- fuerza
  - centrífuga, 114
  - central, 12, 14
  - conservativa, 13, 37
  - de ligadura, 87
  - de Lorentz, 17
  - de Coriolis, 114
  - de Lorentz, 193
  - de reacción, 87
  - electromagnética, 17, 193
  - externa, 35
  - ficticia, 12
  - inercial, 12
  - irrotacional, 13, 14
  - relativista, 187
- funcional, 73
- gauge de Lorenz, 18
- grados de libertad, 90
- gravedad efectiva, 117
- grupo
  - de Galileo, 11
  - de Lorentz, 167
- hamiltoniano, 95
  - de una partícula cargada, 103
  - en coordenadas esféricas, 104
  - en coordenadas esféricas, 103
- integral primera, 76
- intervalo, 163
  - de tipo luz, 163
  - espacial, 163
  - temporal, 163
- línea
  - de nodos, 146
  - de universo, 171
- lagrangiano, 82, 89
  - de una partícula cargada, 86
  - en coordenadas esféricas, 84
- ley
  - de adición de velocidades, 162
  - de conservación del momento, 178
  - de la gravitación universal, 15
  - de las áreas, 44
  - horaria, 43
- leyes
  - de conservación, 12, 35, 94, 101
  - de Newton, 6, 9
- Lienard-Wiechert, potenciales de, 199
- ligadura, 87
  - ideal, 88
- longitud
  - en reposo, 173
- Lorentz-Fitzgerald, contracción de, 173
- mapa de fases, 30
- masa, 6
  - gravitatoria, 15
  - inercial, 15
  - reducida, 42
- Minkowski
  - producto de, 167
- momento, 6
  - angular, 12, 36
  - de un sólido rígido, 128, 129
  - interno, 36
  - canónico conjugado, 94
  - de inercia, 130
  - lineal
    - de un sólido rígido, 128
  - total, 35
- momentos principales de inercia, 134
- nutación, 151
- par, 12
  - de las fuerzas externas, 37
- parámetro de impacto, 60
- período, 24
  - de las pequeñas oscilaciones, 31, 32
- periápside, 51
  - desplazamiento del, 52
- periastro, 51
- perigeo, 51
- perihelio, 51
- potencial, 13



- de Kepler, 50
- efectivo, 45
- escalar, 17
- gravitatorio, 16
- vector, 17
- potenciales de Lienard-Wiechert, 199
- principio
  - de acción estacionaria, 83
  - de equivalencia, 15
  - de Fermat, 74
  - de Hamilton, 81, 82
  - de los trabajos virtuales, 89, 90
  - de mínima acción, 83
  - de relatividad, 158
  - de relatividad de Galileo, 155
- producto de Minkowski, 166
- productos de inercia, 130
- punto de retroceso, 22
  
- región accesible, 22
- rotacional, 13
- Rutherford, fórmula de, véase fórmula de Rutherford
  
- sólido rígido, 125
- sección eficaz de dispersión
  - diferencial, 60
  - total, 62
- simultaneidad, relatividad de la, 165
- sistema
  - centro de masas, 42
  - centro de momentos, 184
  - de ejes del cuerpo, 126
  - de ejes terrestre, 115
  - de referencia inercial, 8, 9
  - del laboratorio, 59
  - fijo, 112
  - móvil, 112
  - mecánico natural, 95
  - propio, 173
  
- tensor de inercia, 129, 130
- teorema
  - de Euler, 109
  - de Jacobi-Poisson, 105
  - de Nöther, 96
  - de Steiner, 132
- tiempo
  - dilatación del, 169
  - propio, 164, 169, 171
- trabajo, 14
  
- transformación
  - canónica, 106
  - de Galileo, 11
  - de Legendre, 100
  - de Lorentz, 160, 166
  - de Poincaré, 166
  - general de Lorentz, 166
- variación, 79
- velocidad, 1
  - angular, 6
  - instantánea, 112
  - en coordenadas cilíndricas, 4
  - en coordenadas esféricas, 3
  - generalizada, 94