Matemáticas Básicas

Libro interactivo

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
PASCUAL BRAVO

DESCARTES
matemáticas interactivas

Matemáticas Básicas

Carlos Alberto Rojas Hincapié
Red Educativa Digital Descartes, Colombia

Fondo Editorial Pascual Bravo
Medellín

Título de la obra:
Matemáticas Básicas

Autor:
Carlos Alberto Rojas Hincapié

Actualización: Joel Espinosa Longi
Imagen portada: Education cartoon vector created by pch.vector - www.freepik.com
Código JavaScript para el libro: Joel Espinosa Longi, IMATE, UNAM.
Recursos interactivos: DescartesJS
Fuentes: Nunito y UbuntuMono
Fórmulas matemáticas: KaTeX
Actualización: Joel Espinosa Longi
Núcleo del libro interactivo: julio 2022

Fondo Editorial Pascual Bravo
Calle 73 73A-226
PBX: (574) 4480520
Apartado 6564
Medellín, Colombia
www.pascualbravo.edu.co

ISBN: 978-958-56476-1-9

Esta obra está bajo una licencia Creative Commons 4.0 internacional: Reconocimiento-No Comercial-Compartir Igual.

Tabla de contenido

Introducción **6**

1. Conceptos preliminares **7**

1.1 El conjunto de los Números Naturales ($\mathbb{N}$) 8

1.2 El conjunto de los Números Enteros ($\mathbb{Z}$) 8

1.3 El conjunto de los Números Racionales ($\mathbb{Q}$) 9

1.4 Conjunto de Números Irracionales ($\mathbb{Q}^*$) 11

1.5 El conjunto de Números Reales ($\mathbb{R}$) 11

1.6 Practiquemos 12

2. Potenciación **15**

2.1 Propiedades de la potenciación 18

2.2 Practiquemos 20

3. Radicación **22**

3.1 Propiedades de los Radicales 24

3.2 Operaciones con expresiones Radicales 25

3.3 Simplificar expresiones radicales 26

3.4 Practiquemos 27

4. Expresiones Algebraicas **29**

4.1 Definiciones preliminares 30

4.1.1 Expresión algebraica 30

4.1.2 Términos en una expresión algebraica 30

4.1.3 Términos semejantes 32

4.2 Polinomios 35

4.3 Suma y resta de polinomios 36
4.4 Producto de monomios entre sí 39
4.5 Producto de polinomios 40
4.6 Productos notables 42
4.6.1 Cuadrado de la suma de dos términos 42
4.6.2 Cuadrado de la diferencia de dos términos 42
4.6.3 Potencias de binomios 45
4.7 División de polinomios 47
4.7.1 División de monomios 47
4.7.2 División de un polinomio por un monomio 48
4.7.3 División de un polinomio por un polinomio 48
4.8 Practiquemos 51
5. Factorización 53
5.1 Factor común 54
5.2 Diferencia de cuadrados 56
5.3 Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ 59
5.4 Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ 61
5.5 Suma de cubos 64
5.6 Diferencia de cubos 65
5.7 Factorización por agrupación 66
5.8 Practiquemos 67
6. Fracciones Algebraicas 68
6.1 Simplificación de fracciones aritméticas 69
6.2 Simplificación de fracciones racionales 70
6.3 Suma y diferencia de fracciones racionales 72

6.4 Producto de fracciones racionales 74
6.5 División de fracciones racionales 76
6.6 Practiquemos 78
7. Bibliografía 79

Introducción

De la colección iCartesiLibri surge este libro digital interactivo, diseñado de tal forma que permita el aprendizaje significativo a través de la intervención directa y personal del usuario, el cual se convierte en el protagonista del libro, en tanto que podrá interactuar con algunos objetos de aprendizaje. Estos objetos de aprendizaje interactivos fueron diseñados con el editor DescartesJS.

> La herramienta Descartes se caracteriza por una innata interactividad, por permitir realizar representaciones de objetos bi y tridimensionales, por gestionar expresiones de texto y de fórmulas, por integrar objetos multimedia como imágenes, audios y vídeos, por tener la posibilidad de reflejar casos concretos y también potenciar la conceptualización de tareas y procedimientos mediante la utilización de semillas aleatorias y controles numéricos, gráficos y de texto, y con ellos poder abordar la evaluación de manera automática, tanto la correctiva como la formativa. Con Descartes es posible el diseño y desarrollo de objetos educativos que promueven el aprendizaje significativo, posibilitando esa deseada construcción del conocimiento.[1]

Todos los recursos incluidos en este libro se basan en el estándar HTML y consecuentemente son plenamente accesibles y operativos en cualquier ordenador, tableta o smartphone sin más que utilizar un navegador compatible con dicho estándar. Diseñar en HTML, significa que usaremos:

1. Lenguaje HTML
2. Hojas de estilo CSS
3. Programación en JavaScript

[1] Véase http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/descripcion.htm.

Conceptos preliminares

Capítulo 1

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA PASCUAL BRAVO

1. Concepto preliminares

El sistema de los Números Reales lo conforman los siguientes conjuntos numéricos:

1.1 El conjunto de los Números Naturales (N)

$$\mathrm{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$$

Se denomina el conjunto de los Números Naturales o enteros positivos. Están definidas las siguientes operaciones básicas: adición y multiplicación. El conjunto de los Números Naturales surgió de la necesidad de contar, lo cual se manifiesta en el ser humano desde sus inicios. Este conjunto se caracteriza porque tiene un número ilimitado de elementos

1.2 El conjunto de los Números Enteros (Z)

$$\mathrm{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

El Conjunto de los Números Enteros surge de la necesidad de dar solución general a la sustracción, pues cuando el sustraendo es mayor que el minuendo, esta sustracción no tiene solución en los Números Naturales (por ejemplo: $5 - 20 = ¿?$). Debido a esto, la recta numérica se extiende hacia la izquierda, de modo que a cada punto que representa un número natural le corresponda un punto simétrico, situado a la izquierda del cero. Punto simétrico es aquel que está ubicado a igual distancia del cero (uno a la derecha y el otro a la izquierda de él). Se dividen en:

Enteros Negativos: Z^-, Enteros Positivos: Z^+ y el Cero: $\{0\}$

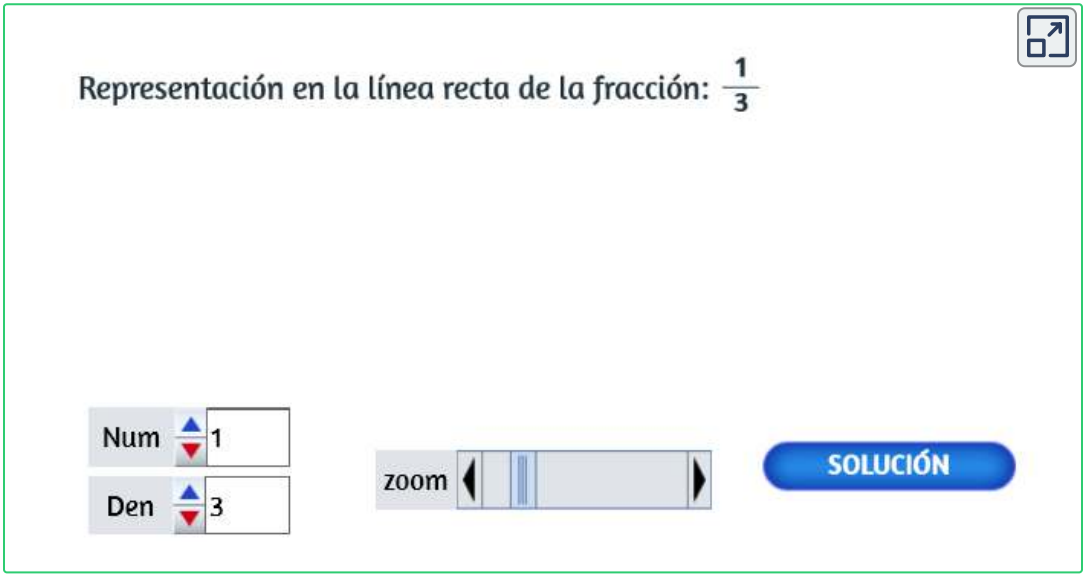
Por lo tanto, el conjunto de los Números Enteros es la unión de los tres subconjuntos mencionados: $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}^{-} \cup \{0\} \cup \mathrm{Z}^{+}$

1.3 El conjunto de los Números Racionales (Q)

$$\mathrm{Q} = \{\ldots, -\tfrac{3}{4}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}, 0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, \ldots\}$$

El conjunto de los Números Racionales se creó debido a las limitaciones de cálculo que se presentaban en el conjunto de los Números Naturales y Números Enteros. Para solucionar esta dificultad, se creó este conjunto, el cual está formado por todos los números de la forma $\frac{a}{b}$. Esta fracción en la cual el numerador es a y el denominador b donde a, b son números enteros con b distinto de cero.

Este conjunto se representa gráficamente, dividiendo cada intervalo de una recta numérica en espacios iguales, que representen números enteros.



Observa la representación en la recta de fracciones propias e impropias.

Representación en la recta de una fracción propia: $\frac{8}{9}$

zoom

OTRA FRACCIÓN

Representación en la recta de una fracción impropia: $-\frac{75}{6} = -12\frac{3}{6}$

zoom

OTRA FRACCIÓN

Cada una de estas subdivisiones representa una fracción con denominador igual al número de partes de la subdivisión. Cada fracción es un número racional y cada número racional consta de infinitas fracciones equivalentes.

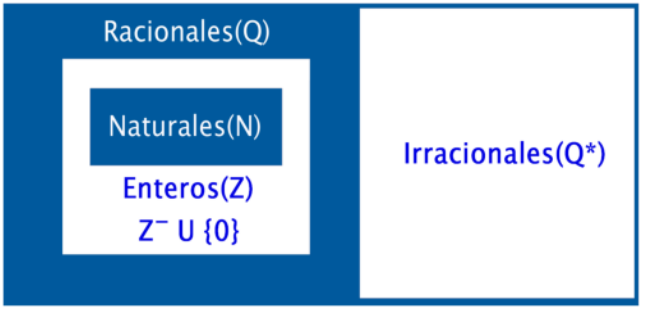
1.4 Conjunto de Números Irracionales (Q^*)

Conjunto de Números Decimales Infinitos no Periódicos. Este conjunto surgió de la necesidad de reunir a ciertos números que no pertenecen a los conjuntos anteriores; entre ellos se pueden citar a las raíces inexactas, el número Pi (π), etc. A él pertenecen todos los números decimales infinitos puros, es decir aquellos números que no pueden transformarse en una fracción.

No deben confundirse con los números racionales, porque éstos son números decimales finitos, infinitos periódicos e infinitos semi periódicos que sí pueden transformarse en una fracción.

1.5 El conjunto de Números Reales (R)

El sistema de los números reales esta conformado por la unión del conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales: $\mathrm{R} = \mathrm{Q} \cup \mathrm{Q}^*$.

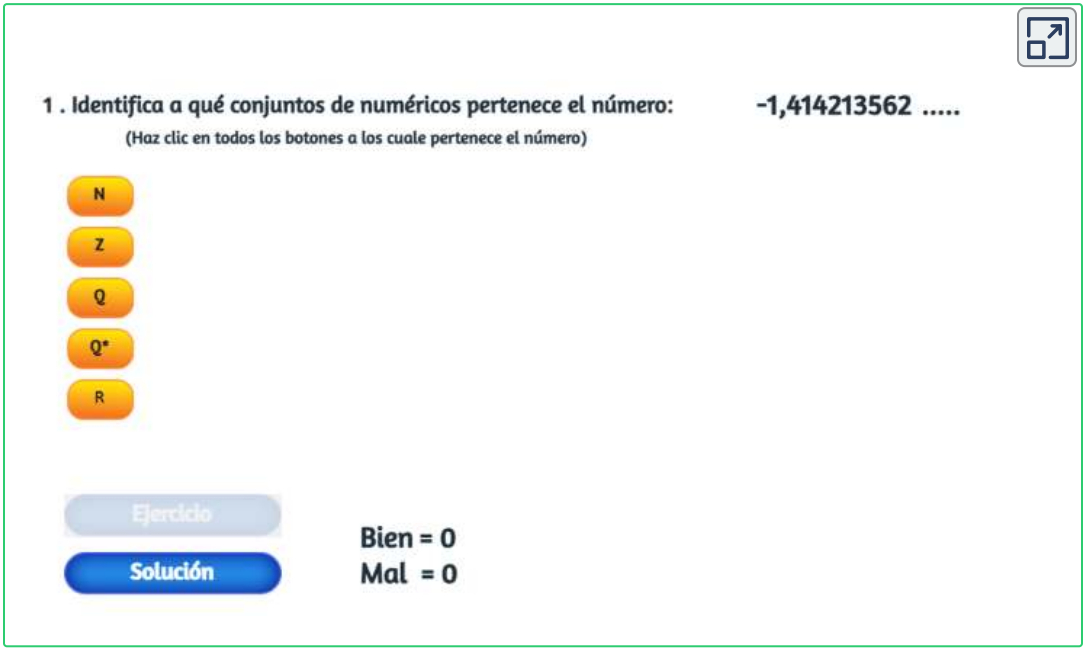


Representación gráfica del conjunto de los números reales.

Todos los conjuntos numéricos pueden ser representados en la recta numérica.

1.6 Practiquemos

Ejercicio 1: Identifica a que conjunto numérico pertenece el número dado. Oprime el botón correspondiente al conjunto numérico al cual pertenece el numero dado, N (Naturales), Z (Enteros), Q (Racional), Q^* (Irracional) o R (Real) y verifica tu respuesta.



Ejercicio 2: Clasifica cada uno de los siguientes números en el recuadro correspondiente al conjunto numérico, ubicándolos en el conjunto más pequeño al que pertenezcan:

Clasifica los siguientes números:

-39	-89	23/5	-32/4
3.141516...	π	-101	38
0.123581...	5	-10031	19

Naturales (N)	Enteros (Z)	Racional (Q)	Irracional (Q*)

1 / 4

Ejercicio 3: Resuelve los siguientes ejercicios con su debido procedimiento.

1. $1,517 - 2,304 + 9,379$

2. $4,224 - 6,293 - 1,611$

3. $2,818 + 9,006 + 7,423$

4. $2 + \pi - 5$

5. $\frac{1}{3} + 3,121 - 5,465$

6. $4,399 \times (1,283 - 5,915)$

7. $2,247 \times (0,035 + 3,247)$

8. $6,744 \times (7,163 - 2,872)$

Potenciación

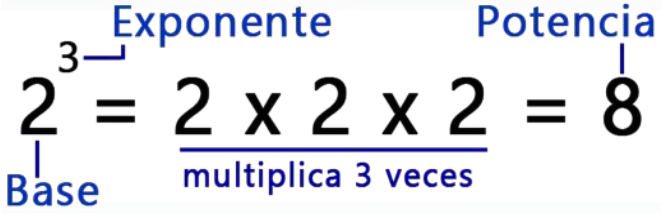
Capítulo 2

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
PASCUAL BRAVO

2. Potenciación

En la nomenclatura de la potenciación se diferencian tres partes, la base, el exponente y la potencia.

Una potencia es el resultado de multiplicar un número por sí mismo varias veces. El número que multiplicamos se llama base, el número de veces que multiplicamos la base se llama exponente.



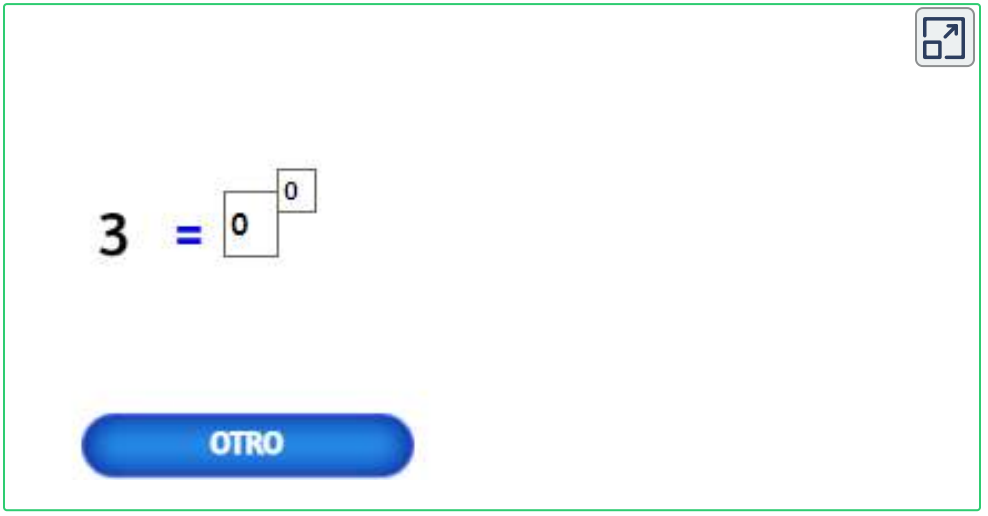
El exponente determina la cantidad de veces que la base se multiplica por sí misma:

Ejemplos:

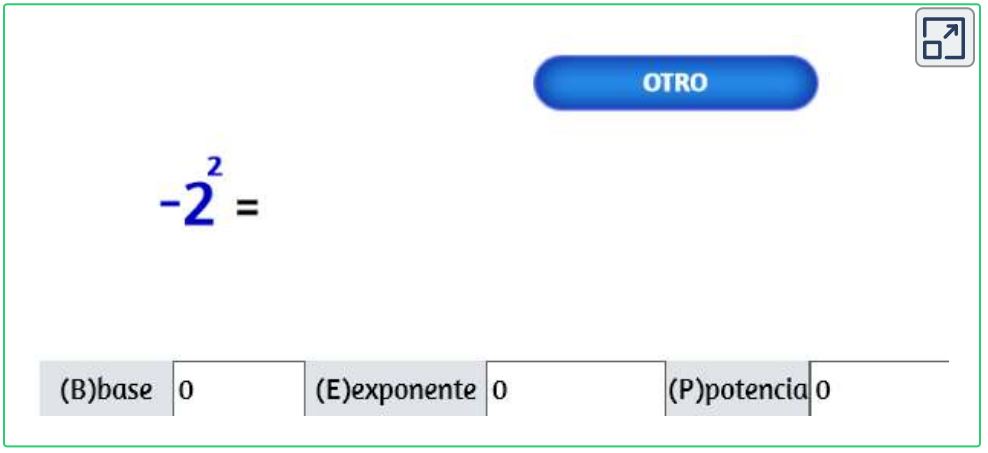
- $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5$
- $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^7$
- $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^3$
- $(-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) = (-7)^4$

Exploremos

1. Ingresa la base y el exponente indicado, oprime la tecla “intro” y verifica.



2. Verifica ingresando la base y el exponente del ejercicio propuesto y escribe la potencia, (recuerda $(B)^E = P$), oprime la tecla “intro” para verificar.



2.1 Propiedades de la potenciación

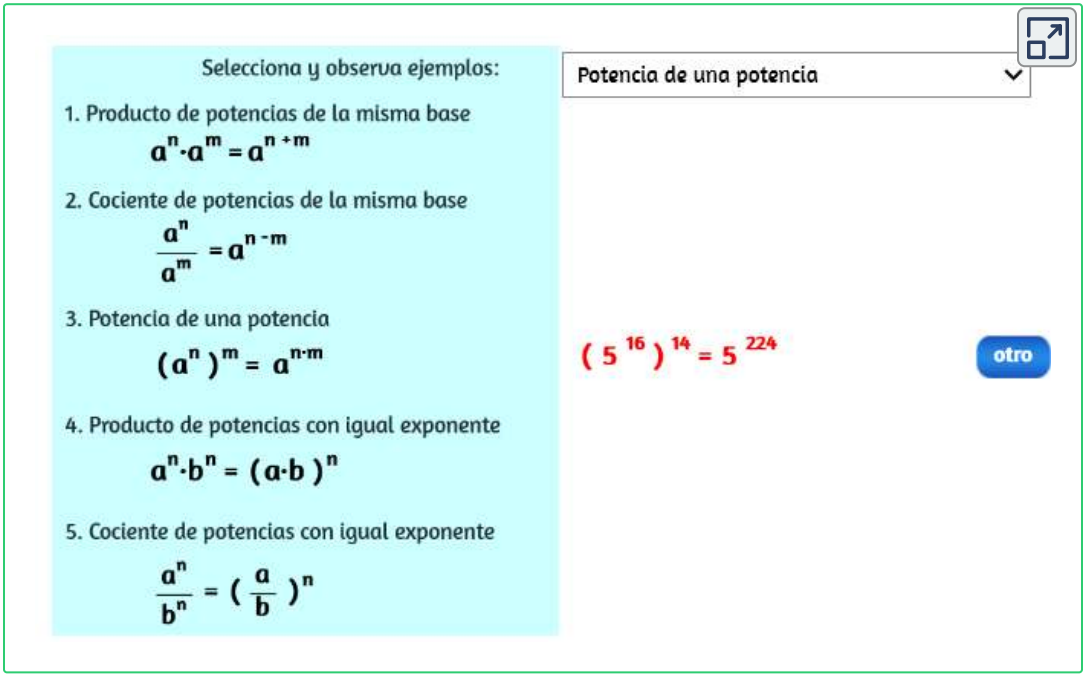
Las propiedades de la potenciación son válidas para todos los conjuntos numéricos.

Todo número diferente de cero, elevado al exponente cero, es igual a uno:

$$a^0 = 1$$

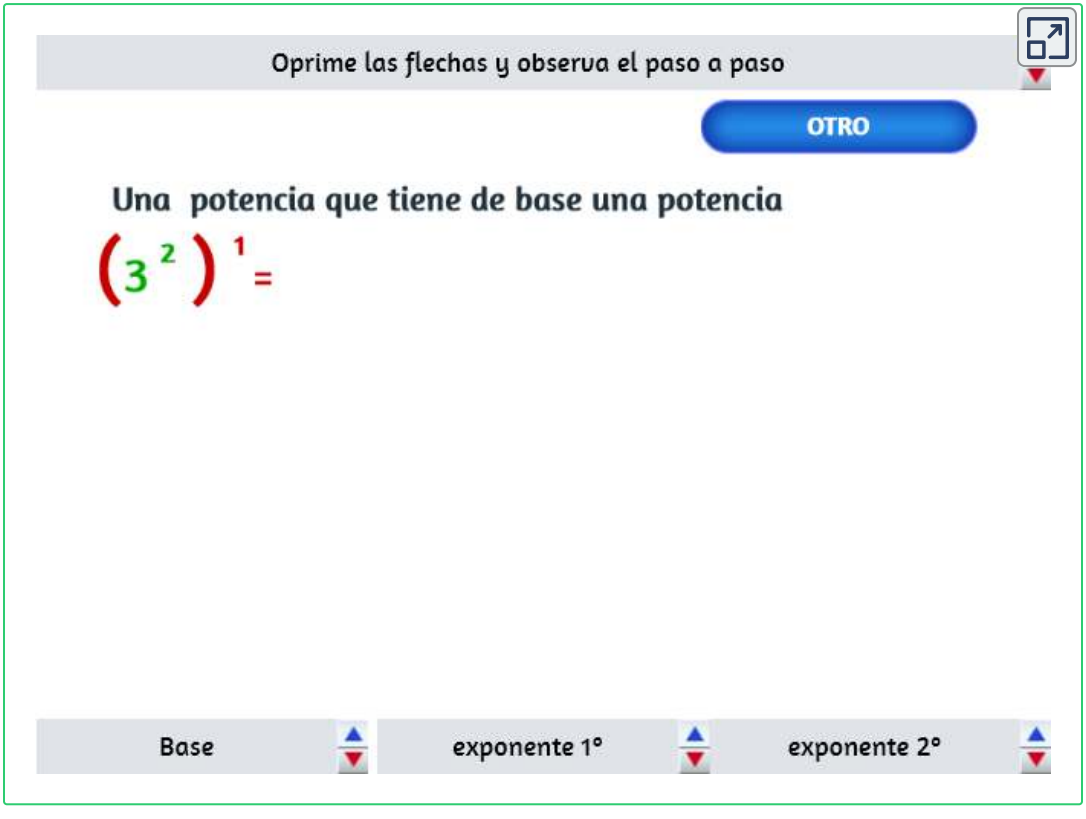
Todo número diferente de cero, elevado al exponente uno, es igual a el mismo:

$$a^1 = a$$



Exploremos

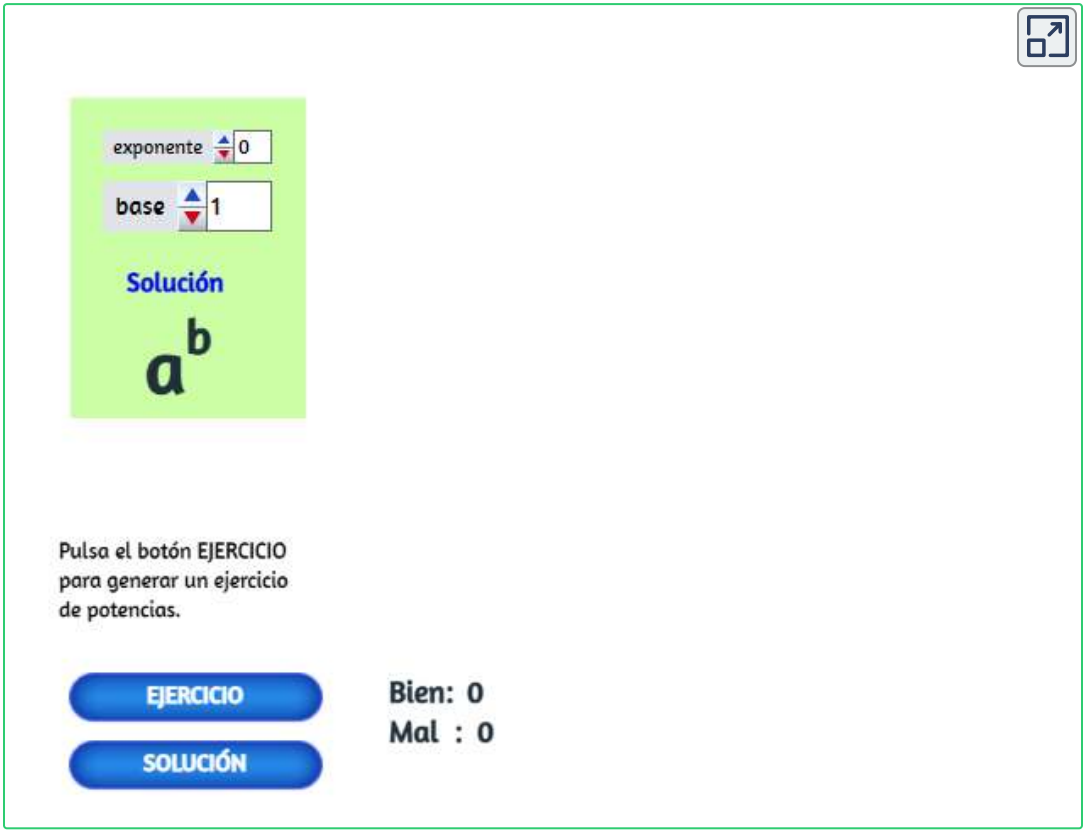
Verifica lo aprendido en esta sección por medio de un paso a paso.



Recuerda, una potencia que tiene de base una potencia, se coloca la misma base y se multiplican los exponentes.

2.2 Practiquemos

Ejercicio 1: Da clic en el botón “Ejercicio”, soluciona en tu cuaderno, escribe el exponente, la base y pulsa la tecla “intro” y verifica tu respuesta.



Ejercicio 2: Mide tus conocimientos de lo aprendido en esta sección y responde las siguientes preguntas seleccionando la respuesta correcta.

Radicación

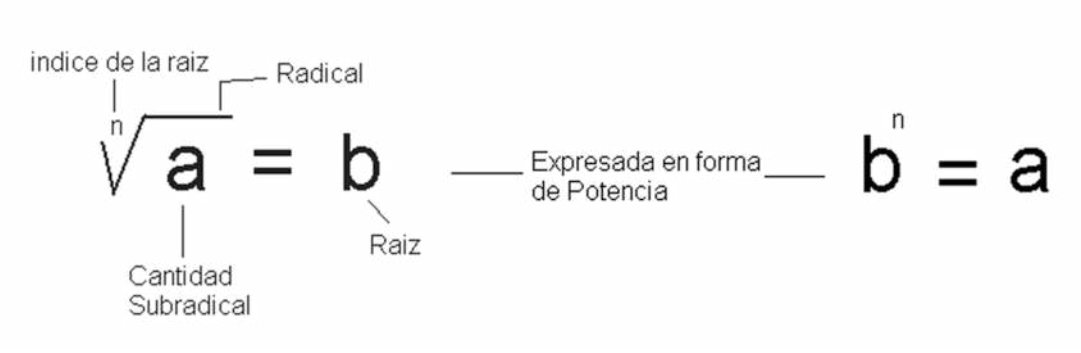
Capítulo 3

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
PASCUAL BRAVO

3. Radicación

Las expresiones radicales son expresiones que incluyen un radical, el cual es el símbolo de calcular una raíz.

En la nomenclatura de la radicación se tienen las siguientes partes:



La radicación es la operación inversa de la potenciación, porque se expresa en forma de potencia:

$\sqrt[2]{25} = 5$ porque $5^2 = 25$ $\sqrt[4]{16} = 2$ porque $2^4 = 16$

$\sqrt[3]{343} = 7$ porque $7^3 = 343$ $\sqrt[5]{243} = 3$ porque $3^5 = 243$

Nota:

Una expresión radical se puede expresar como una potencia de exponente fraccionario:

$\sqrt[n]{x^m}$ se puede expresar como $x^{\frac{m}{n}}$ donde el denominador es el indice del radical.

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

otro ejemplo

3.1 Propiedades de los Radicales

Selecciona y observa el ejemplo:

Seleccione para ver ejemplos

1. Producto de raices de igual indice.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

2. Cociente de raices de igual indice.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

3. Potencia de una raiz.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

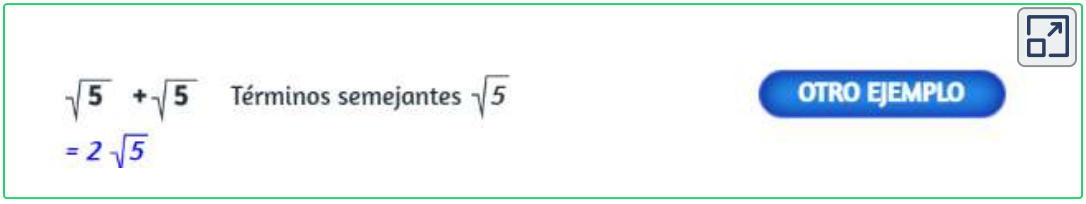
4. Raiz de una raiz.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$$

$$\sqrt[14]{\sqrt{18}} = \sqrt[14]{18}$$

3.2 Operaciones con expresiones Radicales

Para operar sumas o restas de expresiones radicales, deben tener el mismo índice y el mismo radicando, o sea radicandos semejantes.



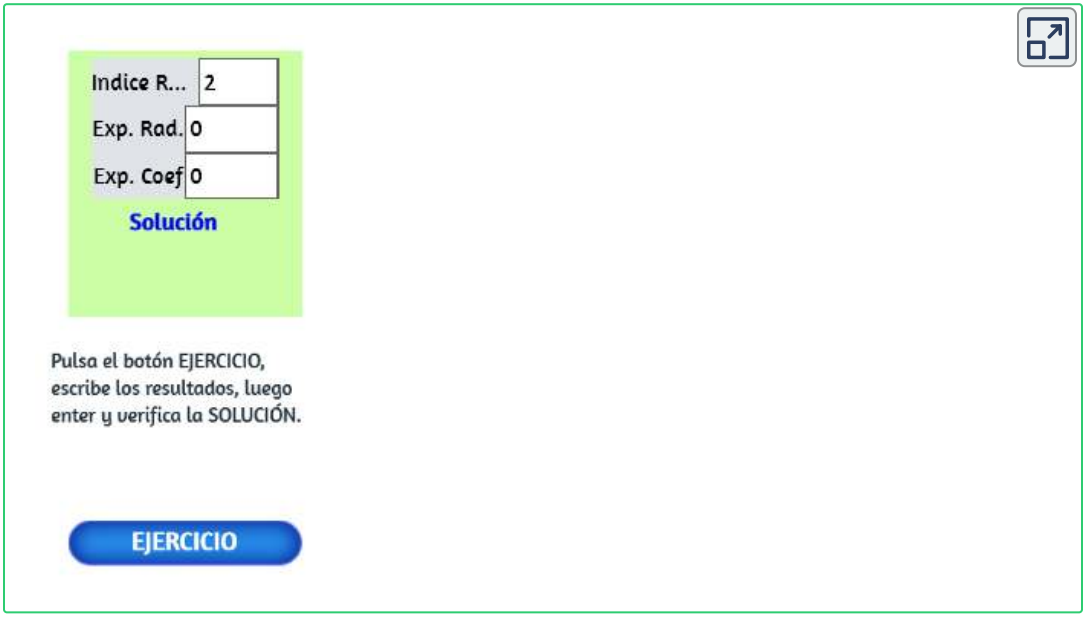
Resuelva expresiones radicales de suma y resta. ingresa el coeficiente numérico y el valor del radical, pulsa la tecla “intro” y observa la solución.

3.3 Simplificar expresiones radicales

Para simplificar expresiones radicales, buscamos términos exponenciales dentro del radical, donde usamos la factorización o descomposición en factores primos y aplicamos las reglas de los exponentes.

Se debe llevar a un índice común (m.c.m.) y se expresa en una sola raíz, simplificando la expresión si es posible, por ejemplo:

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3\times 2]{4^2}}{\sqrt[2\times 3]{2^3}} = \frac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3}} = \frac{\sqrt[6]{2^4}}{\sqrt[6]{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2}$$



3.4 Practiquemos

Ejercicios

1. Resuelve y simplifica en tu cuaderno aplicando las propiedades vistas en el capítulo.

1. $3 \cdot \sqrt[3]{2} + 4 \cdot \sqrt[3]{2} - 2 \cdot \sqrt[3]{2}$
2. $2 \cdot \sqrt{3} + 9 \cdot \sqrt{3} \div 3 \cdot \sqrt{3}$
3. $\sqrt{50} - \sqrt{72} - 2 \cdot \sqrt{2}$
4. $\sqrt{8} - 3 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{18}$
5. $\sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{12} + 5 \cdot \sqrt{27}$
6. $\sqrt{12} + 5 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{27}$
7. $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{3}$
8. $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{8} \div \sqrt{2}$
9. $\sqrt{45} \cdot \sqrt{20} + \sqrt{80}$

2. Resuelve y simplifica en tu cuaderno aplicando las propiedades vistas en el capítulo.

1. $\dfrac{\sqrt{8a^3b}}{\sqrt{2ab}}$
2. $\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{ab}}$
3. $\dfrac{\sqrt{3a^2b}}{\sqrt{2ab}}$
4. $\dfrac{\sqrt[3]{ab^2c^2}}{\sqrt[3]{a^2bc}}$
5. $\dfrac{\sqrt{2ab}}{\sqrt[3]{2ab}}$
6. $\dfrac{\sqrt[4]{2a^2b}}{\sqrt{2a}}$
7. $\dfrac{\sqrt[3]{2a^3b^4c}}{\sqrt{2abc^2}}$
8. $\dfrac{\sqrt{2ab} \cdot \sqrt[3]{2a^2b}}{\sqrt[6]{2ab}}$

3. Mide tus conocimientos de lo aprendido en esta sección y responde las siguientes preguntas tipo ICFES:

Expresiones Algebraicas

Capítulo 4

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA PASCUAL BRAVO

4. Expresiones algebraicas

4.1 Definiciones preliminares

4.1.1 Expresión algebraica

Combinación de números, letras, signos de agrupación, con operaciones indicadas. Por ejemplo:

$$\frac{3a-5}{a+4}, \quad x^2-5x+2, \quad 2b+3, \quad 8y-3xy+2x$$

4.1.2 Términos en una expresión algebraica

Se llama término en una expresión algebraica, a cada parte de ella que viene a ser separada por el signo mas (+) ó el signo menos (−), los términos están formados por números y letras o expresiones combinadas multiplicadas entre sí (llamados factores). Por ejemplo:

$x^2-5x+2 \longrightarrow$ Expresión de tres términos

$2b+3 \longrightarrow$ Expresión de dos términos

$8y-3xy+2x-5 \longrightarrow$ Expresión de cuatro términos

El término puede tener factor literal y factor numérico o coeficiente numérico o coeficiente del término.

Exploremos

Observa y explora las diferentes expresiones algebraicas.

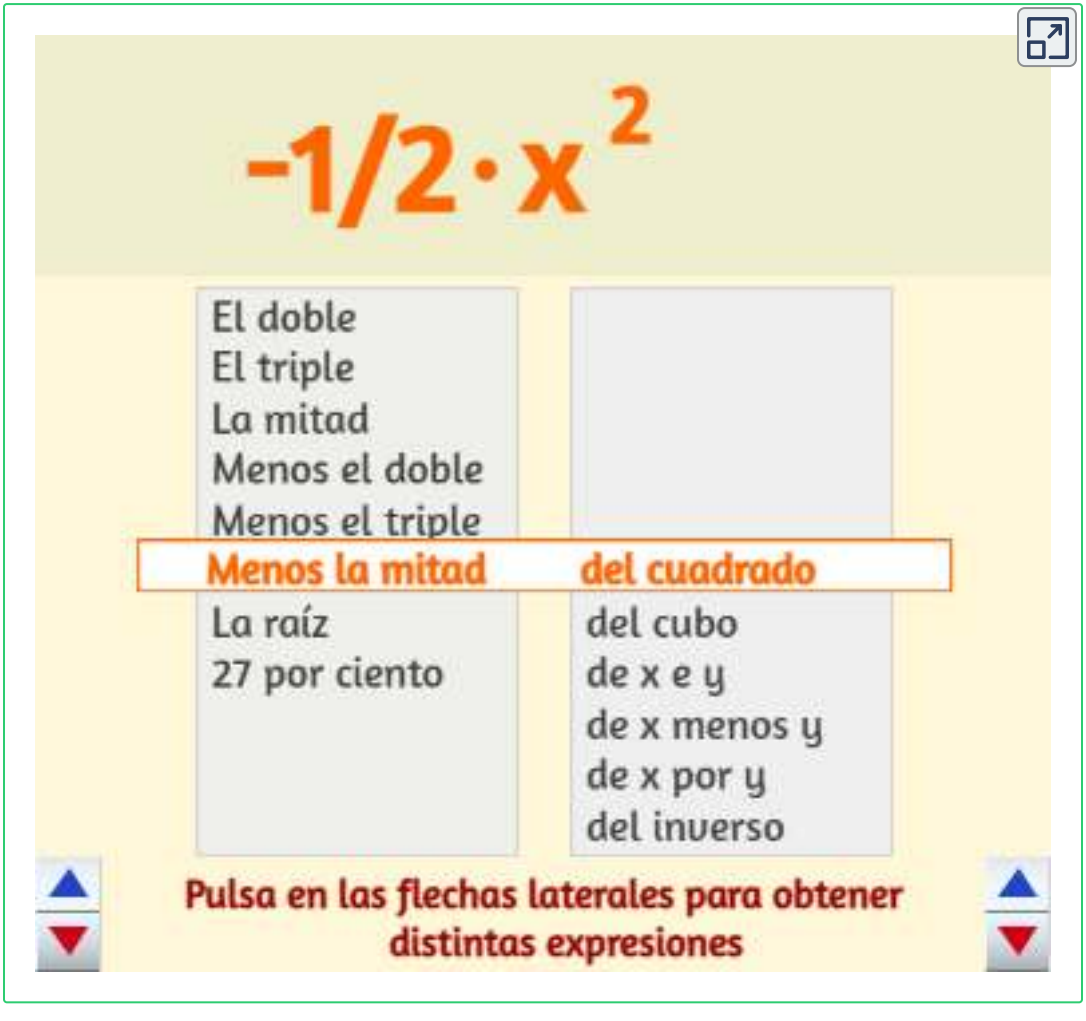
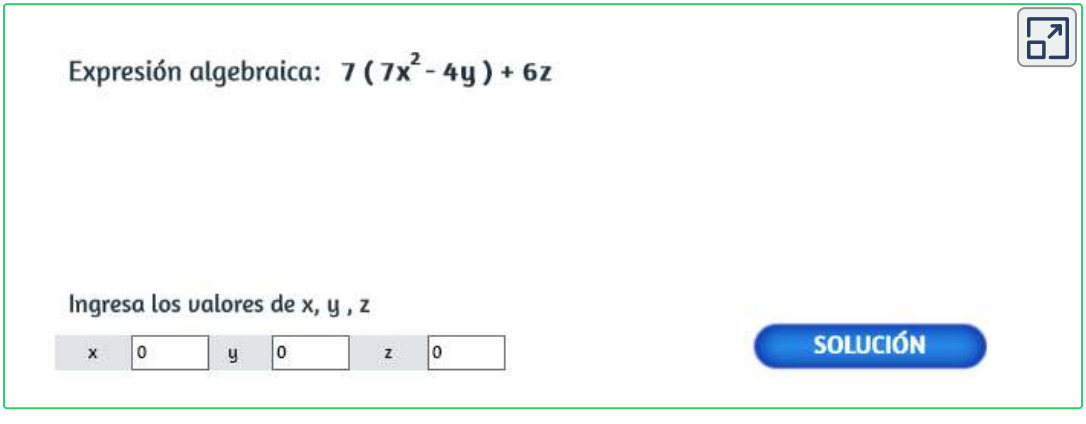


Figura 4.1. Escena de Consolación Ruiz Gil con licencia CC by-nc-sa

Cuando un término en apariencia no presenta coeficiente numérico, como en la expresión algebraica $b - 4c$ en donde b es el término que en apariencia no presenta el coeficiente numérico, se asume a la unidad (1) como su coeficiente numérico. Luego el término $1b = b$.

Para conocer el valor numérico de una expresión algebraica, se sustituyen las letras por números reales y se efectúan operaciones.

Por ejemplo:



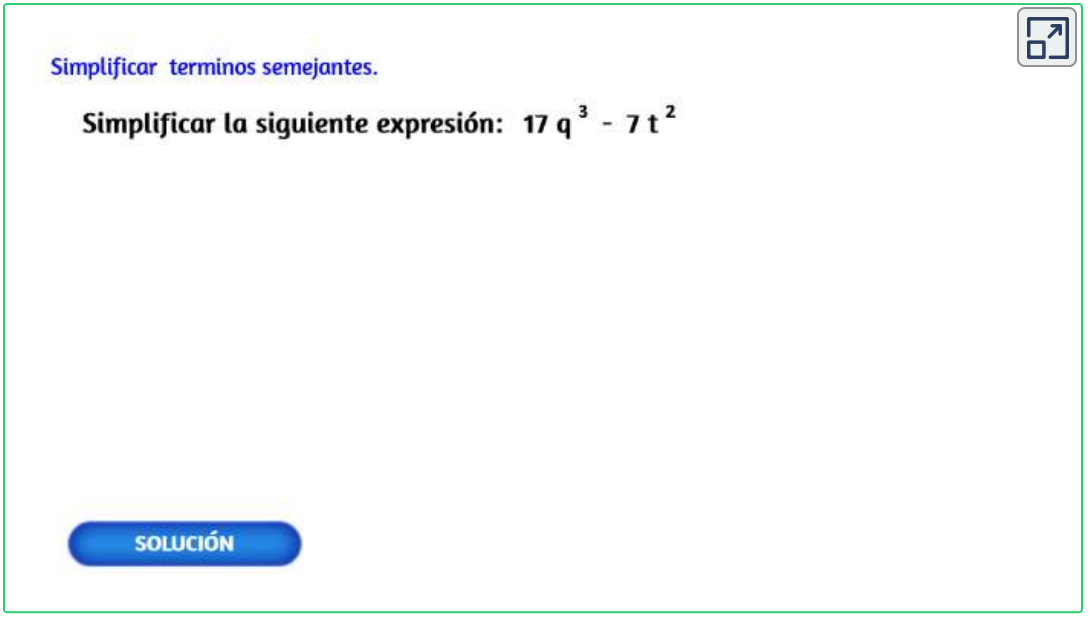
4.1.3 Términos semejantes

Aquéllas expresiones que poseen una misma parte, bien sea literal (letras) o radical (raíces). Por ejemplo:

$ab - 2ab \longrightarrow$ Términos semejantes, poseen la misma parte literal: ab

$\sqrt[3]{x}, 5\sqrt[3]{x} \longrightarrow$ Términos semejantes, poseen la misma parte radical: $\sqrt[3]{x}$

Los términos semejantes pueden sumarse o restarse. Por ejemplo:



Ejercicio: Simplificar términos semejantes en expresiones algebraicas cuando sea posible.

1. $8t + 7t =$

2. $5a^2b + 13a^2b =$

3. $55z^2 - 21z^2 =$

4. $21a + 14b =$

5. $25wxy + 13xyz =$

6. $23mp - 29mp =$

7. $300r^3 - 153r^2 =$

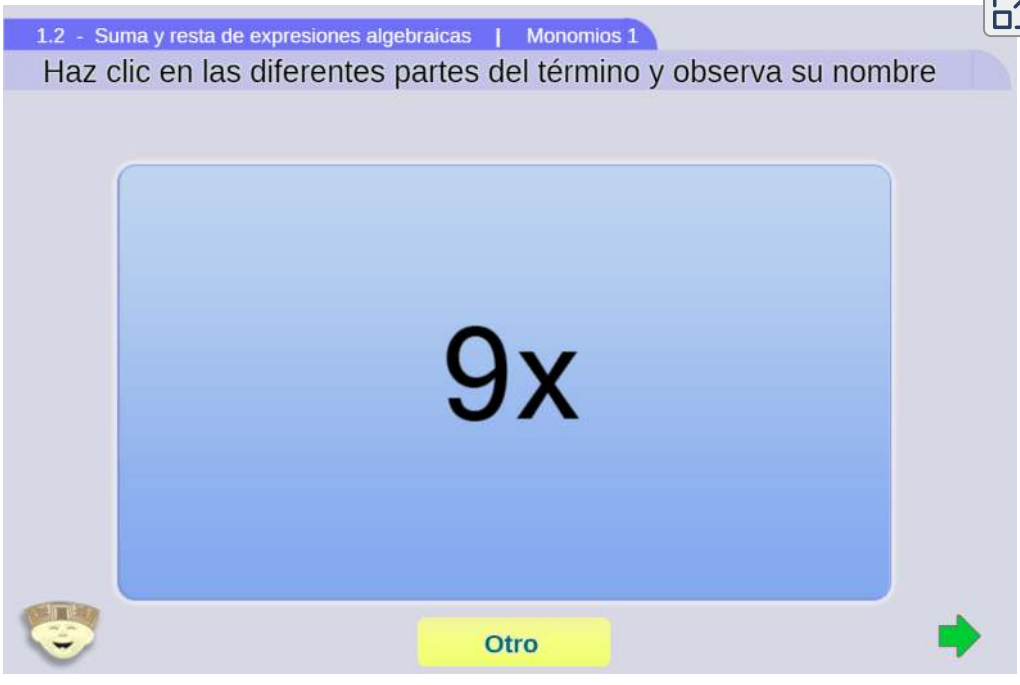
8. $76t - 37t =$

9. $66m - 36m =$

10. $104 - 104m^2 =$

Exploremos

Verifica los conocimientos de lo visto en esta sección:



Véase
http://proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/2m_b01_t02_s01_descartes-JS/index.html

4.2 Polinomios

Son expresiones algebraicas con características especiales, así por ejemplo un polinomio en la variable x, es una expresión algebraica de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

- n es un entero no negativo.
- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales.
- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1$ son coeficientes del polinomio.
- a_n es el coeficiente principal.
- a_0 es el término independiente.
- El mayor exponente de x se denomina grado del polinomio.

OTRO EJEMPLO

Sea $P(x) = 3x^2 + 3x^2 - x + 10$

- El grado del polinomio es 2
- El coeficiente principal es 3
- El término independiente es 10

Algunos polinomios reciben nombres especiales de acuerdo con el número de términos que posean:

$5x^2 \longrightarrow$ Monomio (un término)

$2b + 3 \longrightarrow$ Binomio (dos términos)

$8x^2 + 2x - 5 \longrightarrow$ Trinomio (tres términos)

4.3 Suma y resta de polinomios

Sean los polinomios: $P1 = x^3 + 2x^2 - 5x + 7$ y $P2 = 4x^3 - 5x^2 + 3$

1. Se coloca el primer polinomio y a continuación se le suma o adiciona el segundo polinomio.

$$P1 + P2 = (x^3 + 2x^2 - 5x + 7) + (4x^3 - 5x^2 + 3)$$

2. Se eliminan signos de agrupación (paréntesis, llaves, corchetes)

$$P1 + P2 = x^3 + 2x^2 - 5x + 7 + 4x^3 - 5x^2 + 3$$

   Si a un signo de agrupación (paréntesis, llaves, corchetes) lo antecede un signo mas (+), al eliminar el signo de agrupación, todos los términos que haya dentro de él quedarán con los mismos signos, para el caso, que el signo de agrupación lo antecede un signo menos (−), o sea una resta, al eliminar el signo de agrupación todos los términos dentro de éste cambian de signo.

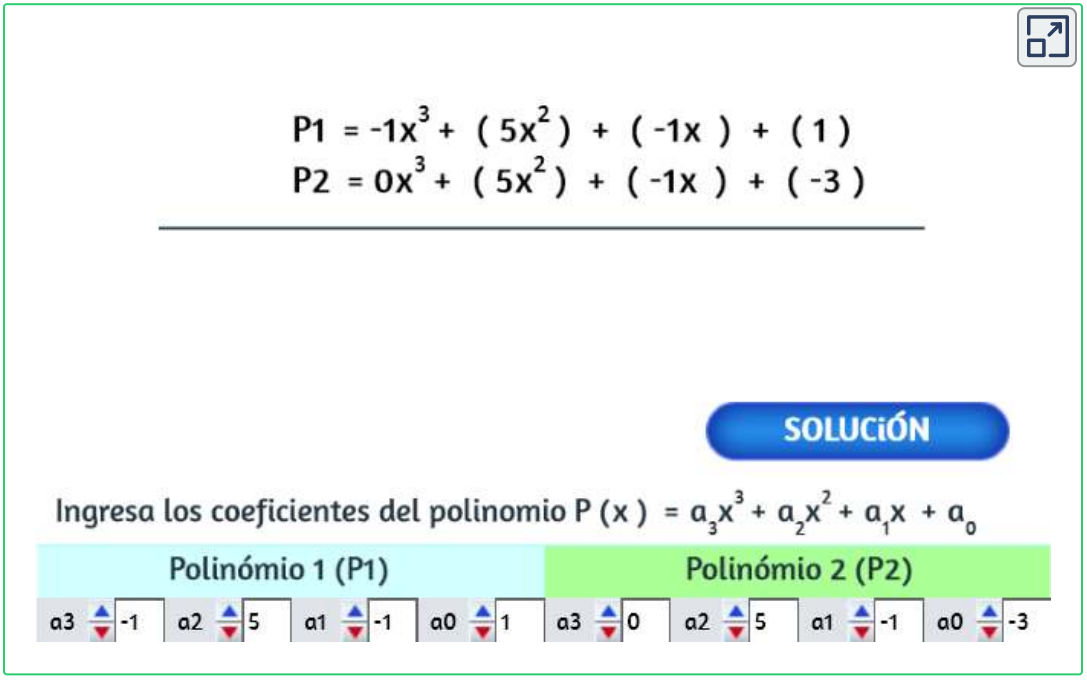
3. Se realizan las operaciones de sumas o restas de términos semejantes, los que no son semejantes se dejan igual, después de realizar las operaciones con los términos semejantes se organizan en orden creciente o decreciente para la variable si es el caso.

$$P1 + P2 = (x^3 + 4x^3) + (2x^2 - 5x^2) - 5x + (7 + 3)$$

$$P1 + P2 = 5x^3 - 3x^2 - 5x + 10$$

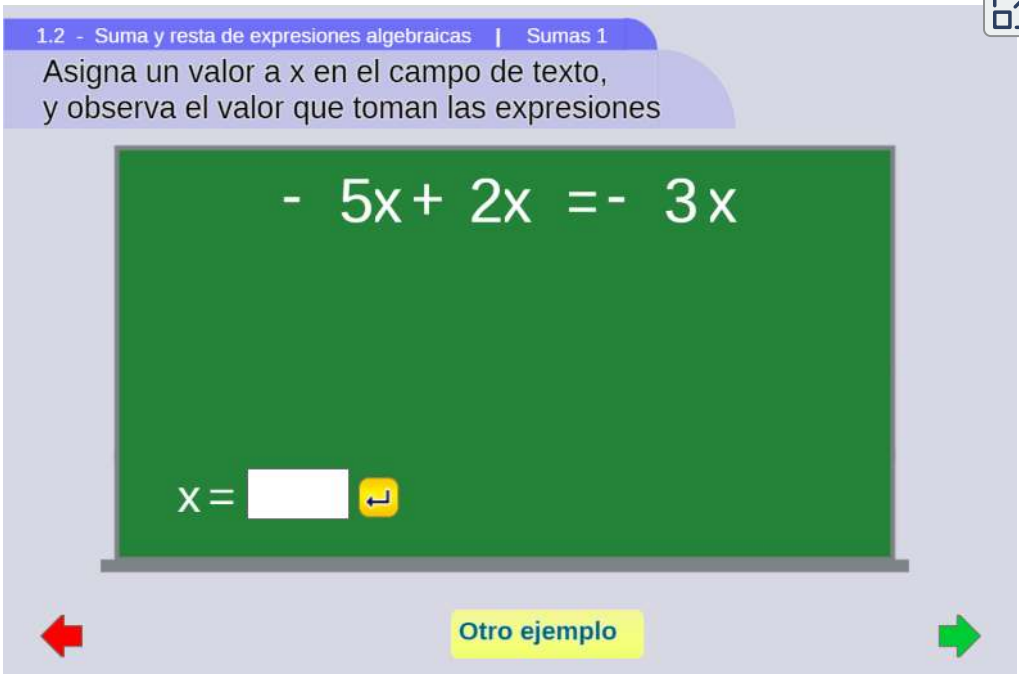
> **Nota**: Al sumar o restar dos o más polinomios, se suman los términos semejantes de cada polinomio.

Modifica los coeficientes de cada polinomio y observa los resultados.



Exploremos

Verifica los conocimientos de lo visto en esta sección:



Véase http://proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/2m_b01_t02_s01_descartes-JS/index.html.

4.4 Producto de monomios entre sí

1. Se multiplican los coeficientes numéricos de los términos, aplicando las reglas de los signos:

Signos iguales: (+)	Signos diferentes: (−)
$(+) \cdot (+) = (+)$	$(+) \cdot (-) = (-)$
$(-) \cdot (-) = (+)$	$(-) \cdot (+) = (-)$

2. Se aplica a la parte literal, el producto de potencias de igual base:

$$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$$

Simplifica el siguiente producto de monomios.

Simplificar la siguiente expresión: $3\,t^{19} \cdot 8\,t \cdot 6\,t^{12}$

SOLUCIÓN

4.5 Producto de polinomios

Para multiplicar polinomios entre sí, se aplica la propiedad distributiva, multiplicando cada término del primer polinomio por todo el segundo polinomio, ejemplo:

$$(3x + 4) \cdot (5x - 7) = 3x \cdot (5x - 7) + 4 \cdot (5x - 7)$$

Se aplica a la parte literal, el producto de potencias de igual base:

$$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$$

Se aplica la propiedad distributiva.

$$((3x) \cdot (5x) - (3x) \cdot 7) + (4 \cdot (5x) - 4 \cdot 7)$$

Suma de términos semejantes.

$$15x^2 - 21x + 20x - 28$$

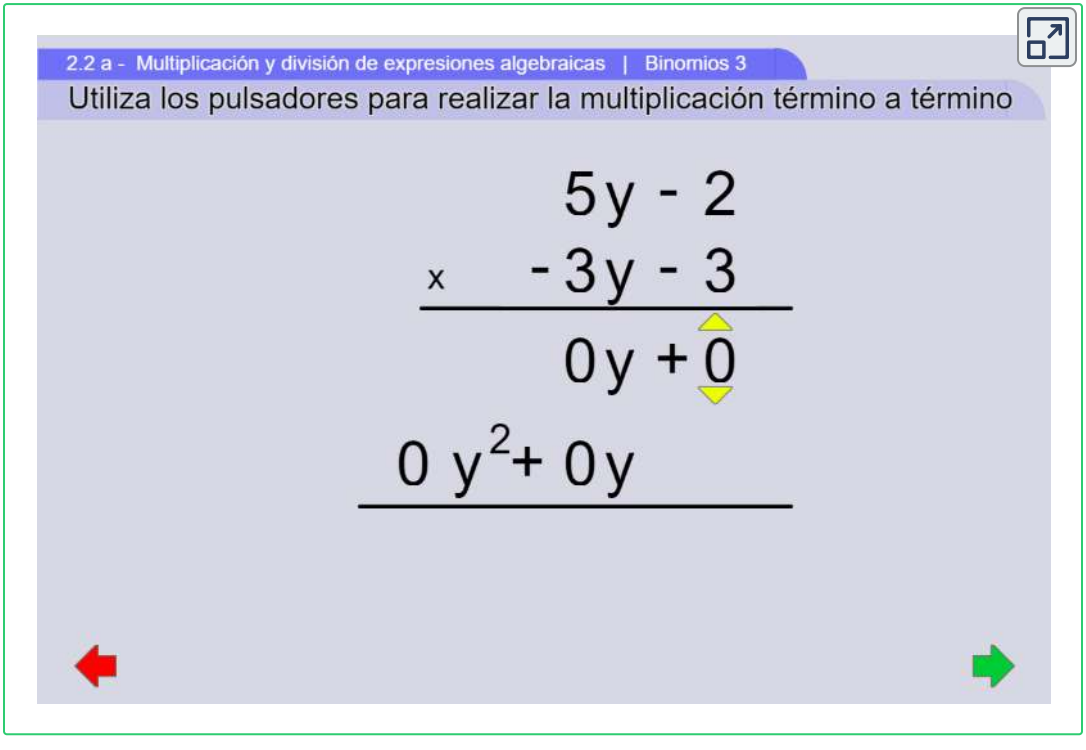
por lo tanto, tenemos que:

$$(3x + 4) \cdot (5x - 7) = 15x^2 - 1x - 28$$

Se debe tener en cuenta la ley de los signos entre los términos a multiplicar, donde los positivos son aquéllos términos que los antecede un signo mas (+) ó aquéllos términos que en apariencia no poseen signo que los anteceda; y los negativos son aquéllos términos que los antecede un signo menos (−).

Exploremos

Verifica los conocimientos de lo visto en esta sección:



Véase http://proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/2m_b02_t02_s01_descartes-JS/index.html.

4.6 Productos notables

Corresponden a productos especiales, destacables en operaciones matemáticas y que tienen su base en la potenciación de polinomios.

4.6.1 Cuadrado de la suma de dos términos

Corresponde al cuadrado del primer término, mas el doble producto del primer término por el segundo término, mas el cuadrado del segundo término, veamos como se genera:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) \text{ ———— Definición de potencia}$$

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Ejemplo:

$$(2m+3)^2 = (2m)^2 + 2\cdot(2m)\cdot(3) + (3)^2 = 4m^2 + 12m + 9$$

4.6.2 Cuadrado de la diferencia de dos términos

Corresponde al cuadrado del primer término, menos el doble producto del primer término por el segundo término, mas el cuadrado del segundo término, veamos como se genera:

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) \text{ ———— Definición de potencia}$$

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

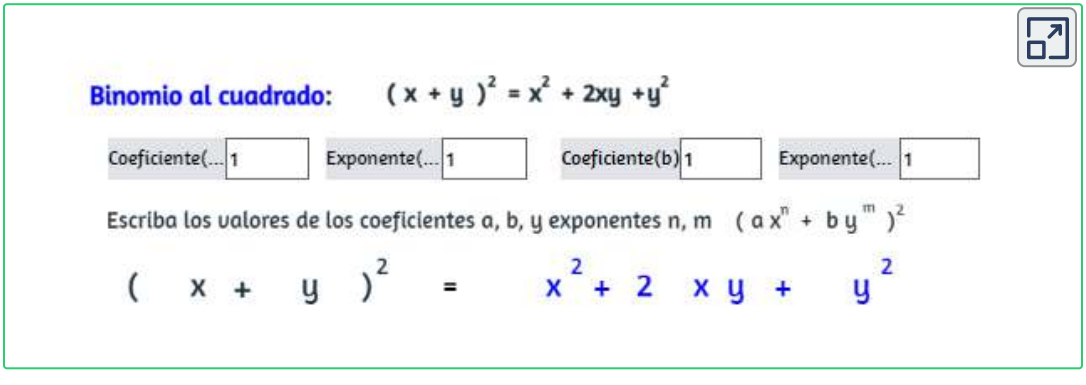
Ejemplo:

$$\begin{aligned}(y-5x)^2 &= (y)^2 - 2\cdot(y)\cdot(5x) + (5x)^2 \\ &= y^2 - 10xy + 25x^2\end{aligned}$$

Si se tienen tres o más términos, se agrupan y se aplica la misma definición:

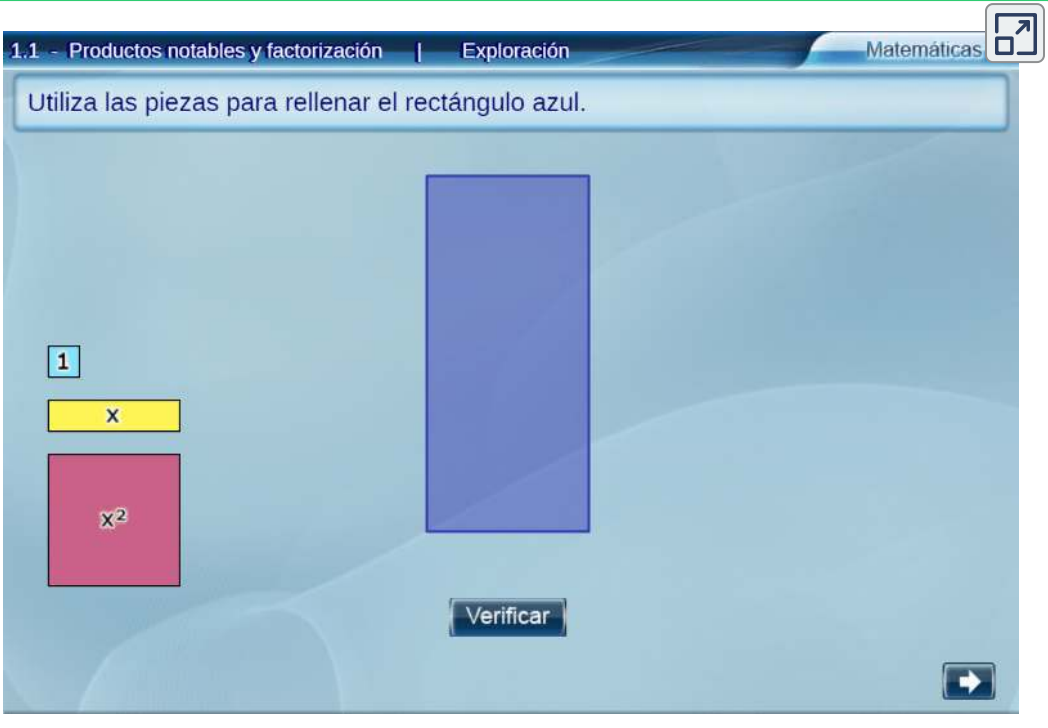
$$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2b$$

Escribe los valores de los coeficientes y exponente, pulsa la tecla "intro" y observa el resultado cuando tienen diferentes exponentes dentro de los términos del binomio.



Exploremos

Verifica los conocimientos de lo visto en esta sección:



Véase http://proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/3m_b01_t01_s01-JS/index.html.

4.6.3 Potencias de binomios

Los binomios se desarrollan de la siguiente forma:

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Detallando el desarrollo de los binomios se tiene que:

1. El número de términos del resultado es uno más que el exponente del binomio.
2. El exponente del primer y último término del binomio, son iguales al exponente del binomio.
3. El exponente de a disminuye de uno en uno en cada término y en cambio b aumenta de uno en uno para cada término.
4. Todos los términos del desarrollo de cada binomio son positivos, pero sí fueran de la forma $(a-b)^2, (a-b)^3, (a-b)^4, \ldots$, los signos alternarían : $(+), (-), (+), (-), \ldots$
5. Al analizar los coeficientes numéricos para cada término del desarrollo de un binomio se observa que son simétricos.

Los términos simétricos tienen los mismos coeficientes, la simetría de los términos permite disponer los coeficientes de cada binomio en forma de un triángulo conocido como:

Triángulo de Pascal

$(a+b)^0$ = ——————————— 1
$(a+b)^1$ = ——————————— 1 1
$(a+b)^2$ = ——————————— 1 2 1
$(a+b)^3$ = ——————————— 1 3 3 1
$(a+b)^4$ = ——————————— 1 4 6 4 1
$(a+b)^5$ = ——————————— 1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$ = ——————————— 1 6 15 20 15 6 1

Con este triángulo se puede deducir que:

1. Los coeficientes de los términos de los extremos son iguales a uno.
2. Sumando dos coeficientes seguidos de una fila, se obtiene un coeficiente de la fila siguiente.

Ejemplo:

$$(m-2n)^5 = (m)^5 - 5(m)^4(2n) + 10(m)^3(2n)^2 - 10(m)^2(2n)^3 + 5(m)(2n)^4 - (2n)^5$$

$$(m-2n)^5 = m^5 - 10m^4n + 40m^3n^2 - 80m^2n^3 + 80mn^4 - 32n^5$$

4.7 División de polinomios

4.7.1 División de monomios

Para dividir dos monomios:

1. Se dividen los coeficientes, aplicando la ley de los signos.
2. En la parte literal, se le aplica la propiedad de división de potencias de igual base:

Siendo $m > n$	Siendo $m < n$	Siendo $m = n$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$	$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}};$	$\frac{a^m}{a^n} = 1;$

Simplifica la siguiente división de monomios y luego observa la solución.

Simplificar la siguiente expresión: $\frac{42\,p^{23}}{-6\,p^{18}}$

SOLUCIÓN

4.7.2 División de un polinomio por un monomio

Para dividir un polinomio por un monomio, se divide cada término del polinomio por el monomio, teniendo en cuenta la ley de signos y las propiedades de la potencia de bases iguales, ejemplo:

$$\frac{18x^5 - 9x^3 + 24x^4}{-3x^2} = \frac{18x^5}{-3x^2} - \frac{9x^3}{-3x^2} + \frac{24x^4}{-3x^2}$$

$$= -6x^{5-2} + 3x^{3-2} - 8x^{4-2}$$

$$= -6x^3 + 3x - 8x^2$$

4.7.3 División de un polinomio por un polinomio

1. Ordenamos los polinomios en orden decreciente.
2. Dividimos el primer término del dividendo por el primer término del divisor, para obtener el primer término del cociente.
3. Multiplicamos este primer término del cociente por cada uno de los términos del divisor y el resultado lo restamos del dividendo, así obtenemos un dividendo parcial.
4. Continuamos a partir de este dividendo parcial, conforme lo indicamos en el paso 2 hasta obtener un residuo de menor exponente que el divisor.
5. Si el resultado es CERO la división es EXACTA.

Exploremos

Observa varios ejercicios, verás que para hacer la división siempre **se dividen** los monomios de mayor grado, **se multiplica** y se cambia de signo, y **se suma**. Este proceso se repite hasta obtener un resto de grado menor que el del divisor. La división de polinomios debe cumplir dos condiciones. La primera, que el **Dividendo = divisor · cociente + resto** y, la segunda, que **gr(resto) < gr(divisor)**

El grado del cociente es la diferencia de los grados del dividendo y del divisor. Cuando el resto es cero, se dice que el dividendo es divisible entre el divisor.

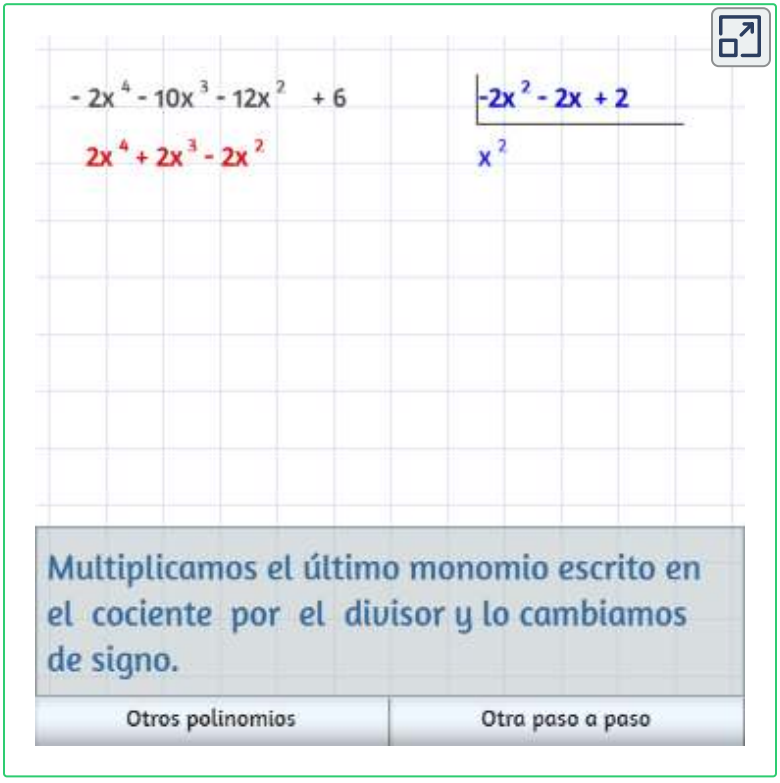


Figura 4.2. Escena de Consolación Ruiz Gil con licencia CC by-nc-sa

En la siguiente escena se ven divisiones de polinomios con la expresión en coeficientes, cuyo procedimiento es el mismo: **División** de coeficientes, **Multiplicación** del último coeficiente por el divisor **cambiando de signo** el resultado y, **Suma** de este resultado con lo que resta en el dividendo.

Observa varios ejercicios en cada uno de los tres niveles de la escena.

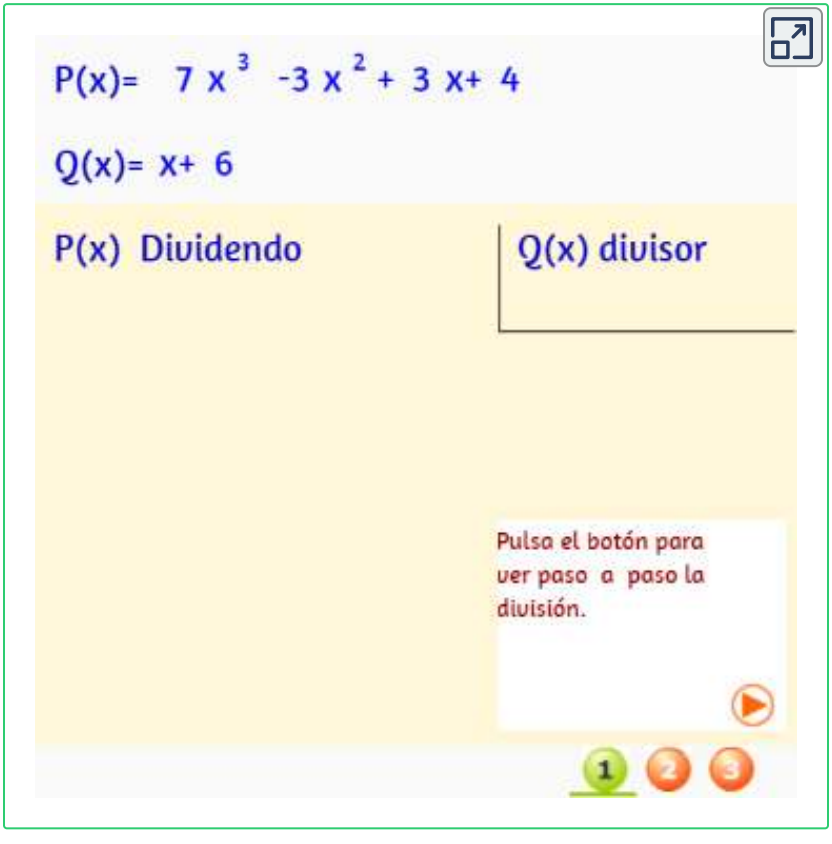
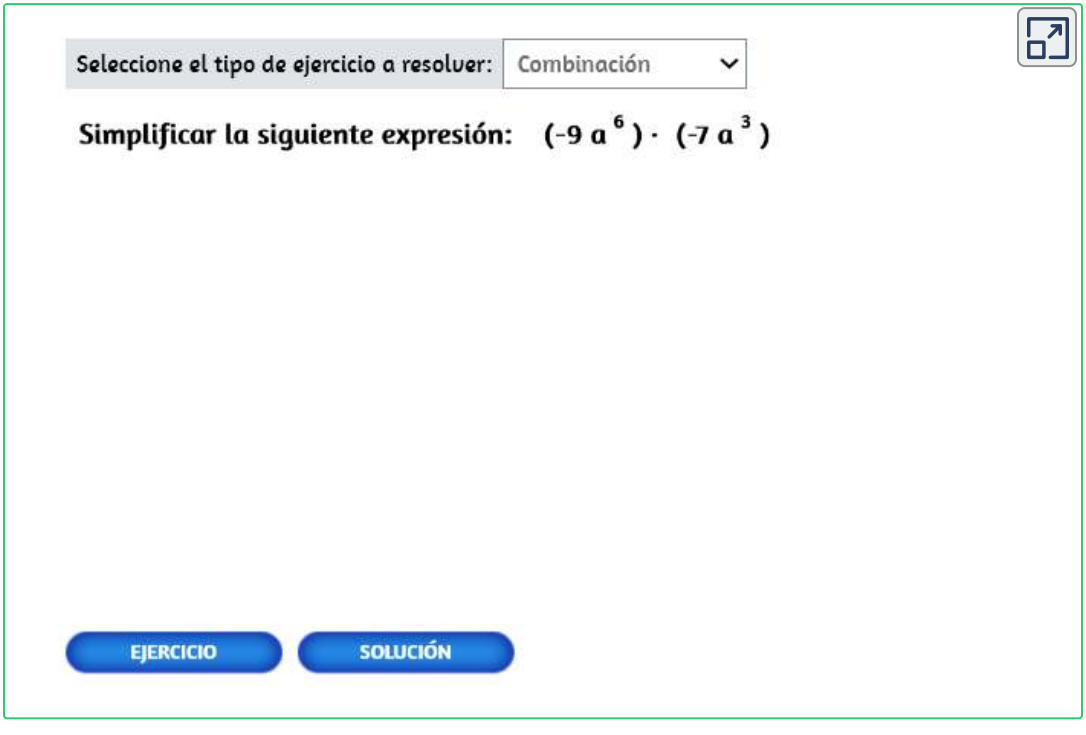


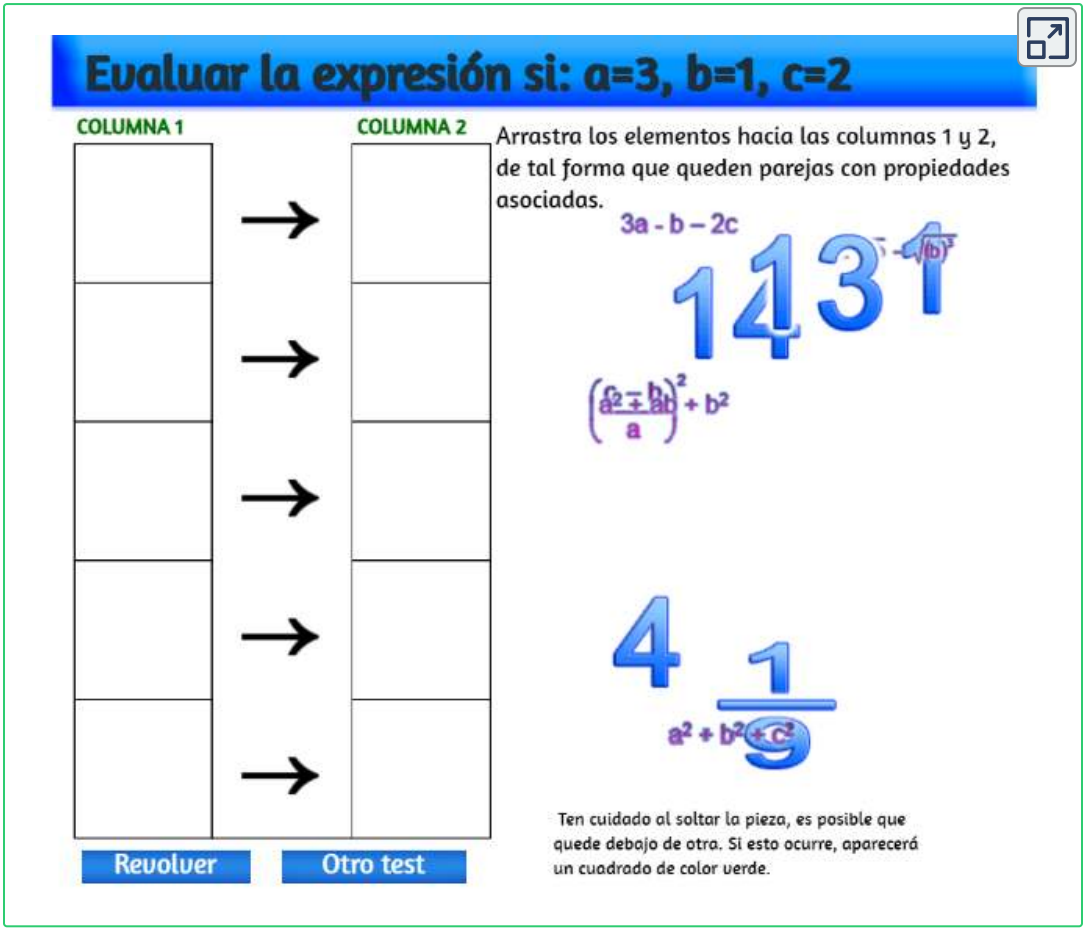
Figura 4.3. Escena de Consolación Ruiz Gil con licencia CC by-nc-sa

4.8 Practiquemos

Ejercicio 1: Simplifique la siguiente expresión algebraica de (sumas, restas, productos, cocientes, potencias), resuelve primero en tu cuaderno y luego verifica la solución.



Ejercicio 2: Mide tus conocimientos de lo aprendido en esta sección y resuelve la actividad:



Factorización

Capítulo 5

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
PASCUAL BRAVO

5. Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio es expresarlo como el producto de otros polinomios que tengan menor grado que éste. Casos de factorización:

5.1 Factor común

Hace referencia al término común de un polinomio, pueden ser factores numéricos o factores literales. Para encontrar el factor común, se realiza lo siguiente:

1. Encontrar el factor común numérico que corresponde al M.C.D. de los coeficientes del polinomio común (M.C.D. = Factores comunes elevados a su menor exponente).
2. El factor común literal está conformado por aquellas letras que están elevadas a su menor exponente.
3. El factor común para el polinomio corresponde a la multiplicación del factor común numérico con el factor común literal.

La expresión, presenta un polinomio al lado izquierdo de la igualdad y a la derecha la factorización del polinomio.

$$4x^5 + 24x^4 + 8x^5 = 4x^4 (1x^1 + 6x^0 + 2x^1)$$

FACTOR COMÚN $4x^4$

Factor Numérico: 4

Factor Literal: x^4

OTRO EJEMPLO

Si aparecen expresiones con exponente cero, se han dejado sólo por ilustración.

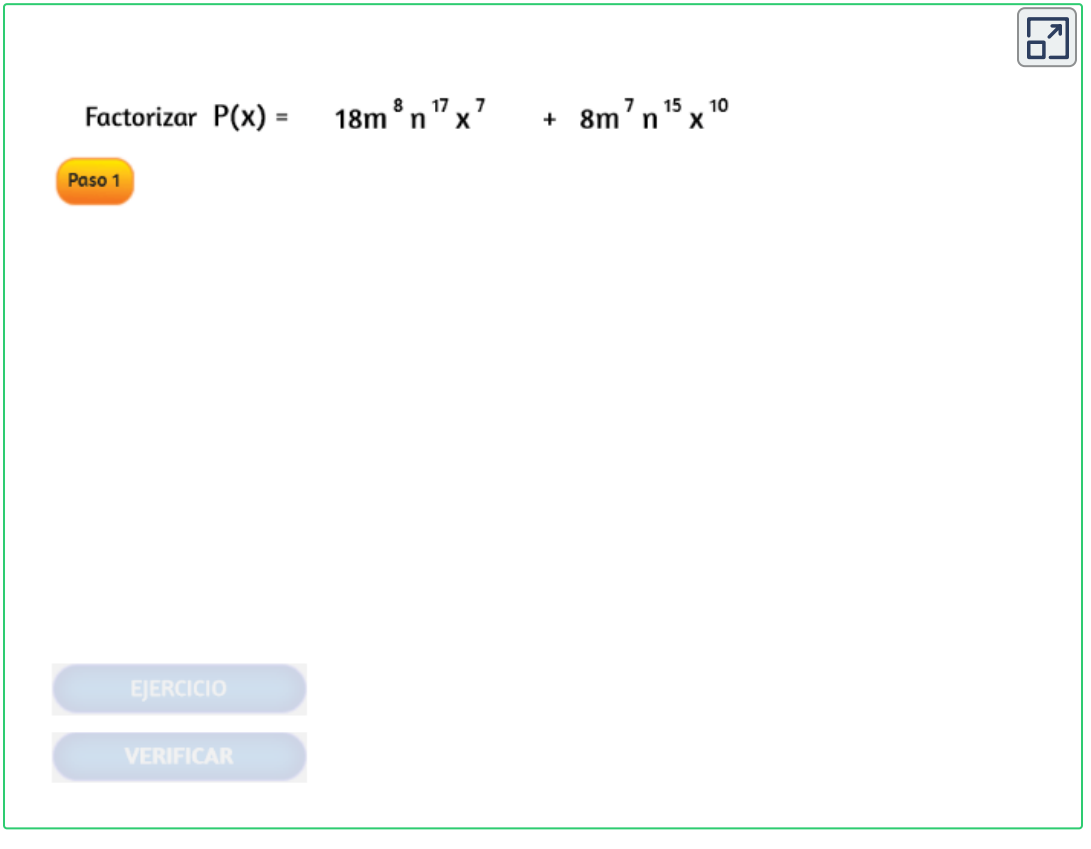
Ejemplo: Encontrar el factor común para el polinomio: $3m^3 - 6m^2n$

Factor común numérico de 3 y 6 es 3

Factor común literal de m^3 y m^2n es m^2

Por lo tanto, el factor común del polinomio $= 3m^3 - 6m^2n = 3m^2$

Ahora, veamos por medio de un paso a paso como hallar el factor común de un polinomio, pulsa en botón "Paso1" y sigue las instrucciones.



Una vez encontrado el factor común para un determinado polinomio, se procede a encontrar el otro factor que multiplica al factor común, dividiendo cada término del polinomio dado por el factor común. Quedando en ésta forma factorizado completamente el polinomio dado.

Ejemplo:

$5p^2q^3 + 10p^2q^2 + 20p^3q^4$

el factor común del polinomio es $5p^2q^2$ ahora dividimos cada termino por el factor común:

$$\begin{aligned}\frac{5p^2q^3}{5p^2q^2} + \frac{10p^2q^2}{5p^2q^2} + \frac{20p^3q^4}{5p^2q^2} &= p^{2-2}q^{3-2} + 2p^{2-2}q^{2-2} + 4p^{3-2}q^{4-2} \\ &= q + 2 + 4pq^2\end{aligned}$$

division de coeficientes numéricos, propiedad de división de potencias de igual base, por lo tanto,

$5p^2q^3 + 10p^2q^2 + 20p^3q^4 = 5p^2q^2 \cdot (q + 2 + 4pq^2)$

5.2 Diferencia de cuadrados

Se caracteriza por ser una diferencia (resta) entre dos términos que poseen raíz cuadrada exacta.

Ejemplo: $9a^2 - b^2$

raíz cuadrada del primer término $\longrightarrow 3a$

raíz cuadrada del segundo término $\longrightarrow b$

Una diferencia de cuadrados se factoriza como la suma de las raíces cuadradas, multiplicada por la diferencia de las mismas, simbólicamente se tiene:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Ejemplo 1:

$$\begin{array}{ccccc} 25p^2 & - & 4p^2 & = (5p+2p)\cdot(5p-2p) \\ \downarrow & & \downarrow & \\ \sqrt{25p^2} & & \sqrt{4p^2} & \\ \downarrow & & \downarrow & \\ 5p & & 2p & \end{array}$$

Ejemplo 2:

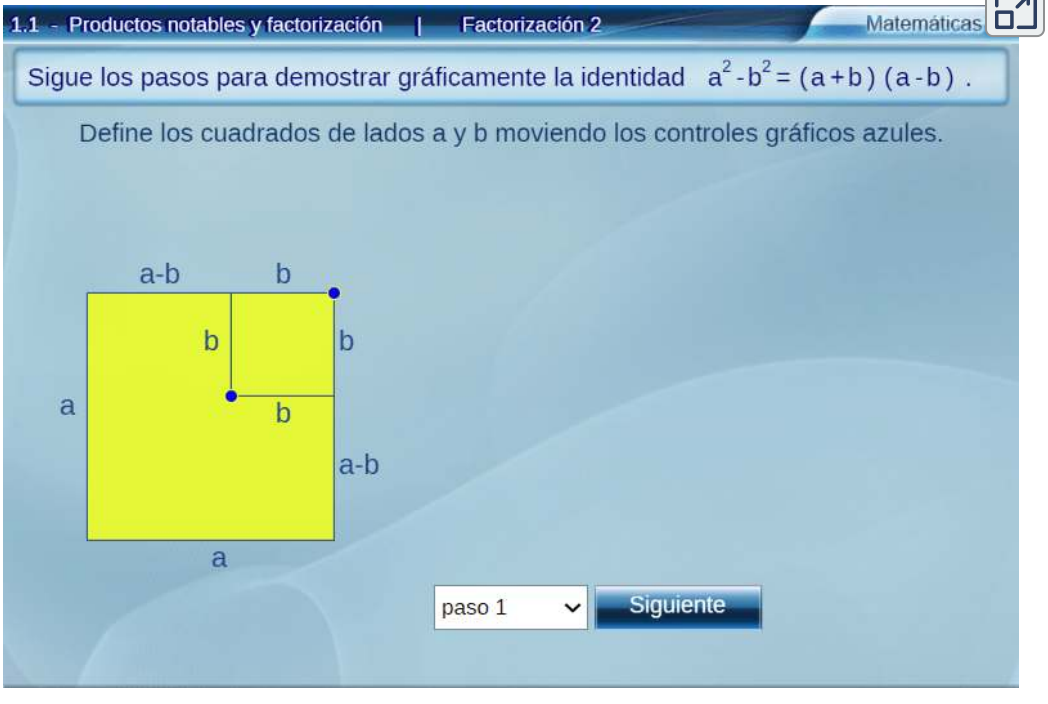
$$\begin{aligned} k^2 - (1+v)^2 &= (k+(1+v))\cdot(k-(1+v)) \\ &= (k+v+1)\cdot(k-v-1) \end{aligned}$$

Ejercicio: Factorizar los siguientes polinomios si es posible.

1. $a^2x^2 - 169 =$
2. $a^2 - \frac{1}{25} =$
3. $16y^4 - 36 =$
4. $x^{2a} - y^{2b} =$
5. $25 - 19y^2 =$
6. (3 factores) $x^4 - 81 =$
7. (4 factores) $a^4x^2 - 81x^6 =$
8. $(2x-5)^2 - (3x-5)^2 =$
9. $(y^2 - 6y + 9) - x^2 =$
10. $(x^2 + 8x + 16) - (y^2 + 2y + 1) =$
11. $4a^2 - (b^2 - 2bx + x^2) =$
12. (3 factores) $16t^4 - x^4 =$

Exploremos

Verifica los conocimientos de lo visto en esta sección:



Véase http://proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/3m_b01_t01_s01-JS/index.html.

5.3 Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Estos trinomios se factorizan de la siguiente forma:

Todo trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, siempre que $x^2 + bx + c = 0$ tenga solución, equivale al producto de dos binomios o factores.

$$x^2 + bx + c = (x + p)(x + q)$$

Donde el primer término de cada binomio, es la raíz cuadrada del primer término del trinomio x y los segundos términos de cada binomio son los números p y q, cuya suma $p + q = b$ y el producto $p \cdot q = c$.

Simbólicamente se tiene:

$$\begin{array}{ccccccc} x^2 & + & bx & + & c & = (x+p)\cdot(x+q) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \sqrt{x^2} & & b = p + q & & c = p \cdot q & \\ \downarrow & & & & & \\ x & & & & & \end{array}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{ccccccc} x^2 & + & 8x & + & 15 & = (x+3)\cdot(x+5) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \sqrt{x^2} & & b = 3 + 5 & & c = 3 \cdot 5 & \\ \downarrow & & & & & \\ x & & & & & \end{array}$$

Se puede presentar que el trinomio tenga la forma $x^{2n} + bx^n + c$, el cual se factoriza de igual forma.

Ejemplo:

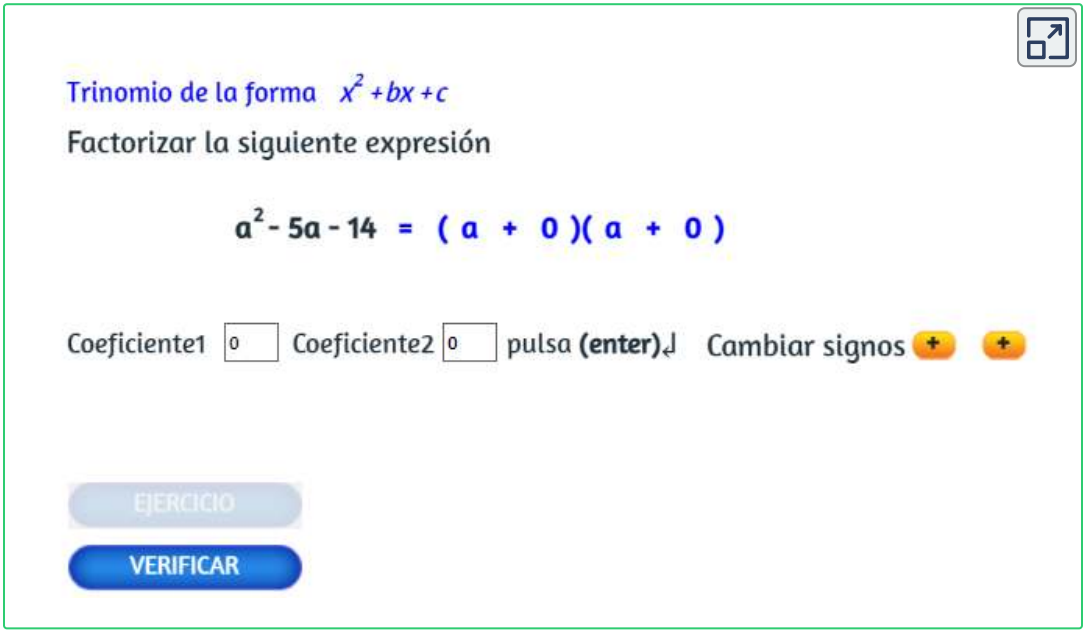
$$x^4 - x^2 - 6 = (x^2 - 3)(x^2 + 2)$$

donde,

$$b = (-3 + 2) = -1$$

$$c = (-3)(2) = -6$$

Ejercicio: Practiquemos factorizando algunos trinomios, si es posible.



5.4 Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Estos trinomios se factorizan de la siguiente forma:

Se caracterizan por ser muy parecidas a la forma $x^{2n} + bx^n + c$, con la diferencia de que la variable x^{2n} ya tiene un coeficiente a diferente de cero y uno. Por ejemplo:

$$2x^2 + 7x - 15$$
$$3x^2 + 17x + 10$$
$$5x^2 - 17x + 6$$

Para factorizar trinomios de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$, lo que se hace es llevarlo a la forma $y^{2n} + by^n + c$, y luego se resuelve como en el caso anterior.

Simbólicamente se tiene: $ax^{2n} + bx^n + c$ $\longrightarrow$ Trinomio dado

$= \dfrac{a(ax^{2n} + bx^n + c)}{a}$ $\longrightarrow$ Multiplico y divido por a

$= \dfrac{a^2x^{2n} + abx^n + ac}{a}$ $\longrightarrow$ Aplico distributiva

El primer término de cada binomio será: $(ax^n + p) \cdot (ax^n + q)$

por lo tanto, $(ax^n)^2 + b(ax^n) + ac = (ax^n + p) \cdot (ax^n + q)$

donde: $p + q = b$ y $p \cdot q = a \cdot c$

Ejemplo: $3x^2 + 17x + 10 \longrightarrow$ Trinomio dado

$= \dfrac{3(3x^2 + 17x + 10)}{3} \longrightarrow$ Multiplico y divido por 3

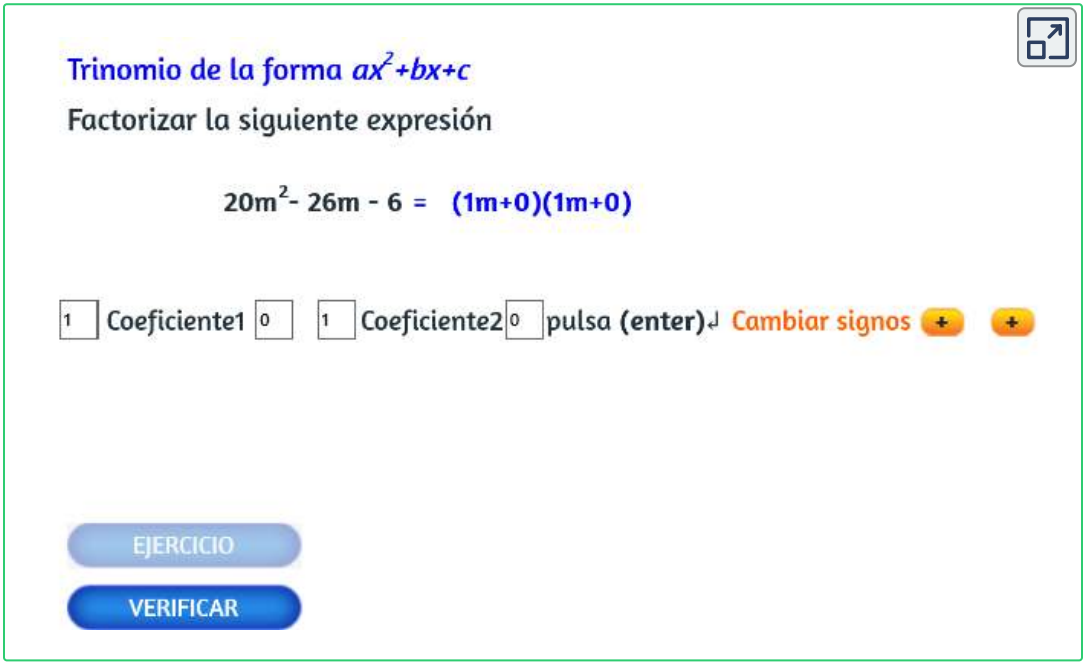
$= \dfrac{(3x)^2 + 17(3x) + 30}{3} \longrightarrow$ Aplico distributiva

donde: $15 + 2 = 17$ y $15 \cdot 2 = 30$

entonces: $= \dfrac{(3x + 15)(3x + 2)}{3} \longrightarrow$ Factor común $3(x + 5)$

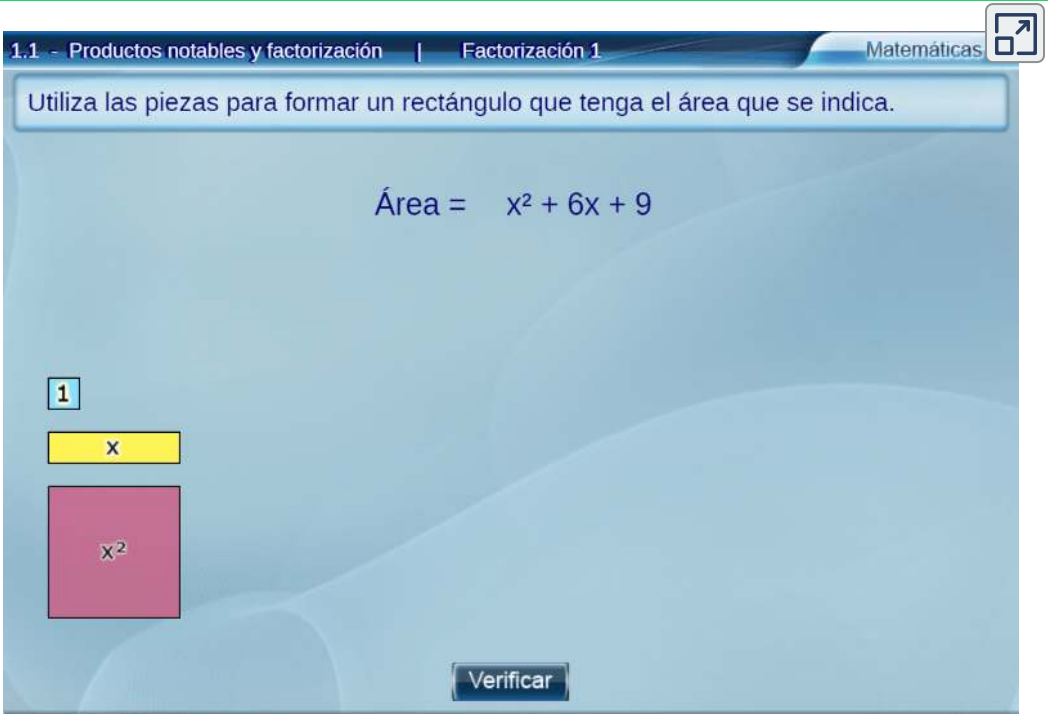
$= x^2 + 17x + 10 = (x + 5)(3x + 2) \longrightarrow$ Simplificando el 3

Ejercicio: Practiquemos factorizando algunos trinomios, si es posible.



Exploremos

Verifica los conocimientos de lo visto en esta sección:



Véase http://proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/3m_b01_t01_s01-JS/index.html.

5.5 Suma de cubos

Se trata de la suma entre dos términos cuya característica es que pueden expresarse como cantidades que se pueden elevar al cubo, por lo tanto cada término posee raíz cúbica exacta.

Ejemplo: $x^3 + 27 = x^3 + 3^3$

raíz cúbica del primer término $\longrightarrow x$

raíz cúbica del segundo término $\longrightarrow 3$

Para factorizar una suma de cubos, se tiene en cuenta lo siguiente:

1. Una suma de cubos es igual al producto de un binomio (dos términos) por un trinomio (tres términos).
2. El binomio está formado por la suma de las raíces cúbicas.
3. El trinomio consta de: cuadrado de la primera raíz, producto de las dos raíces y cuadrado de la segunda raíz.
4. Los signos del trinomio son: (+), (−), (+).

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Ejemplo:

$$y^3 + 64x^3 = (y + 4x)(y^2 - 4xy + 16y^2)$$

5.6 Diferencia de cubos

Se trata de la resta entre dos términos cuya característica es que pueden expresarse como cantidades que se pueden elevar al cubo, por lo tanto cada término posee raíz cúbica exacta.

Ejemplo: $p^3 - 8k^3 = p^3 - (2k)^3$

Raíz cúbica del primer término $\longrightarrow p$

Raíz cúbica del segundo término $\longrightarrow 2k$

Para factorizar una diferencia de cubos, se tiene en cuenta lo siguiente:

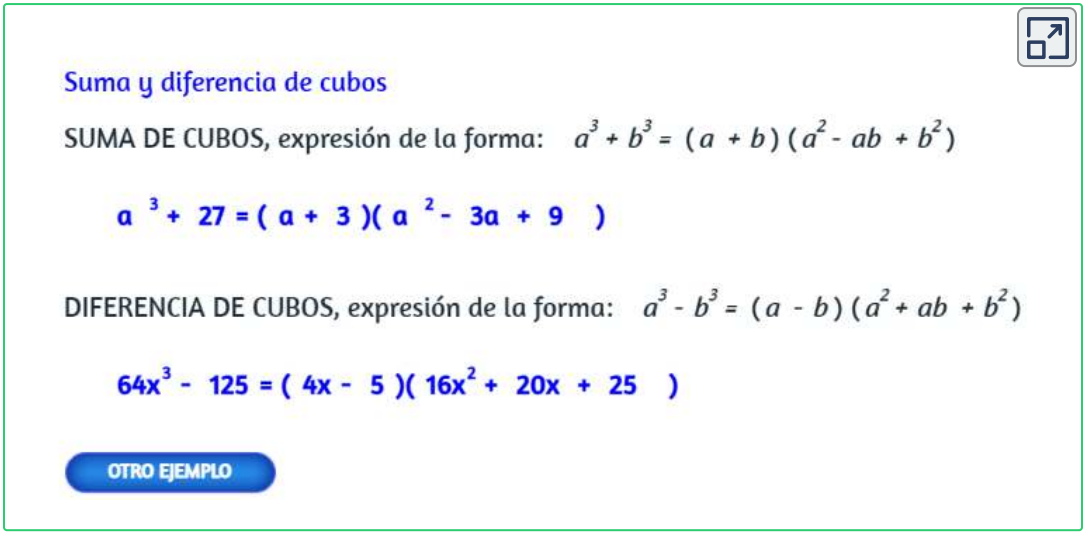
1. Una diferencia de cubos es igual al producto de un binomio (dos términos) por un trinomio (tres términos).
2. El binomio está formado por la diferencia de las raíces cúbicas.
3. El trinomio consta de: cuadrado de la primera raíz, producto de las dos raíces y cuadrado de la segunda raíz.
4. Los signos del trinomio son: (+), (+), (+).

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplo:

$$y^3 - 64x^3 = (y - 4x)(y^2 + 4xy + 16x^2)$$

Ahora, veamos algunos ejemplos de la factorización de suma y diferencia de cubos.



5.7 Factorización por agrupación

Algunos polinomios no se pueden factorizar directamente, mediante la aplicación de los casos vistos hasta ahora, sino que es necesario agrupar adecuadamente los términos antes de factorizar.

Ejemplo, factorizar el siguiente polinomio: $x^3 - 6x^2 - x + 6$

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 - x + 6 \longrightarrow \text{agrupamos} &\longrightarrow (x^3 - 6x^2) - (x - 6) \\ \text{factor común} &\longrightarrow x^2(x - 6) - (x - 6) \\ \text{factor común} &\longrightarrow (x - 6)(x^2 - 1) \\ \text{diferencia de cuadrados} &\longrightarrow (x - 6)(x - 1)(x + 1) \end{aligned}$$

5.8 Practiquemos

Ejercicio

Mide tus conocimientos de lo aprendido en esta sección y resuelve la actividad:

Fracciones Algebraicas

Capítulo 6

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA PASCUAL BRAVO

6. Fracciones Racionales

6.1 Simplificación de fracciones aritméticas

Recordemos:

> Para simplificar fracciones, escribimos el numerador y el denominador como un producto de factores y cancelamos los FACTORES COMUNES a ambos.
>
> > ¡CUIDADO! No podemos simplificar términos. Sólo factores.
>
> Una fracción aritmética está simplificada cuando el único factor común al numerador y al denominador es el número UNO.

Ejemplos:

$$\frac{4}{8} = \frac{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2}$$

$$\frac{48}{270} = \frac{1 \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{3}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot 5} = \frac{8}{45}$$

$$\boxed{\frac{4 + \cancel{3}}{\cancel{3}} = 4} \longrightarrow \text{¡Error!}$$

$$\boxed{\frac{4 + 3}{3} = \frac{7}{3}} \longrightarrow \text{¡Correcto!}$$

Para simplificar, cancelamos los FACTORES COMUNES al numerador y al denominador.

Cuando el denominador de una fracción es cero (0) se dice que la fracción no existe o no está definida.

6.2 Simplificación de fracciones racionales

Al igual que las fracciones aritméticas, decimos que una fracción algebraica está simplificada, cuando el único factor común al numerador y al denominador es el número UNO, es decir, cuando el numerador y el denominador sean primos entre sí. Para simplificar fracciones algebraicas procedemos de la siguiente forma:

1. Factorizamos el numerador y el denominador.
2. Suprimimos los FACTORES COMUNES al numerador y denominador (¡CUIDADO! No podemos cancelar sumandos).

Ejemplos:

- $$\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\frac{(x-2)^2}{(x+2)\cdot(x-2)}=\frac{(x-2)\cdot\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cdot\cancel{(x-2)}}$$
  $$=\frac{(x-2)}{(x+2)}\longrightarrow \text{Suprimiendo factores comunes}$$
- $$\frac{x^2-5x-6}{36-x^2}=\frac{(x-6)\cdot(x+1)}{(6-x)\cdot(6+x)}=\frac{-\cancel{(6-x)}\cdot(x+1)}{\cancel{(6-x)}\cdot(x+6)}$$
  $$=\frac{-(x+1)}{(x+6)}=-\frac{x+1}{x+6}$$

En algunos casos, se requiere cambiar el orden de los términos de uno o varios factores, para el segundo ejemplo, se requiere cambiar el orden del factor $(x-6)$, por eso se le antecedió con un signo menos $(-)$ al signo de agrupación y se cambió el orden de los términos dentro del signo de agrupación, quedando $-(6-x)$.

Ejercicio 1: En la siguiente escena simplifica en tu cuaderno la expresión racional dada, luego verifica haciendo clic en el botón “Solución”.

Figura 6.1. Escena de Consolación Ruiz Gil con licencia CC by-nc-sa

6.3 Suma y diferencia de fracciones racionales

Para sumar o restar fracciones racionales hacemos lo siguiente:

1. Hallamos el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores.
2. Dividimos el m.c.m. encontrado entre el denominador de cada fracción y lo multiplicamos por el numerador respectivo.
3. Efectuamos las operaciones indicadas y simplificamos el resultado, si es posible.

$$x+3+\frac{6}{x-5}=\frac{x+3}{1}+\frac{6}{x-5}=\frac{(x+3)\cdot(x-5)+6}{x-5}$$
$$=\frac{x^2+3x-5x-15+6}{x-5}=\frac{x^2-2x-9}{x-5}$$

Ejercicio 2: Simplifiquemos expresiones racionales de suma y diferencia.

Simplificar la expresión racional: $\frac{-7x^2-2x-7}{x-5}+\frac{5x-7}{x^2-5x}$

Solución

Ejercicio 3: Resuelve en tu cuaderno y practica simplificando expresiones racionales.

1. $\frac{x-7}{15}+\frac{x-9}{25}-\frac{x+3}{45}$

2. $\frac{a-2b}{2a}-\frac{a-5b}{4a}+\frac{a+7b}{8a}$

3. $\frac{2}{xy}-\frac{3y^2-x^2}{xy^3}+\frac{xy+y^2}{x^2y^2}$

4. $\frac{x-3}{5x}+\frac{x^2-9}{10x^2}-\frac{8-x^3}{15x^3}$

5. $\frac{a}{x^2-4}+\frac{b}{(x-2)^2}$

6. $\frac{1}{x(x-y)}+\frac{1}{y(x+y)}$

7. $\frac{1}{2x-3y}-\frac{x+y}{4x^2-9y^2}$

8. $\frac{1}{2x+y}+\frac{1}{2x-y}-\frac{3x}{4x^2-y^2}$

9. $\frac{2a}{2a+3b}+\frac{3b}{2a-3b}-\frac{8b^2}{4a^2-9b^2}$

10. $\frac{5x}{6(x^2-1)}-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{3(x+1)}$

11. $\frac{2}{x^2-3x+2}+\frac{2}{x^2-x-2}-\frac{1}{x^2-1}$

12. $\frac{1+2a}{1-2a}-\frac{1-2a}{1+2a}-\frac{8a}{(1-2a)^2}$

13. $\frac{1}{1+x}-\frac{x}{(1+x)^3}-\frac{x^2}{(1+x)^3}$

14. $\frac{x-a}{x+a}+\frac{a^2+3ax}{a^2-x^2}-\frac{x+a}{x-a}$

15. $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y-x}$

16. $\frac{1}{2a+5b}+\frac{3a}{25b^2-4a^2}+\frac{1}{2a-5b}$

6.4 Producto de fracciones racionales

Para multiplicar fracciones racionales hacemos lo siguiente:

1. Factorizamos en primer lugar todos los numeradores y los denominadores.
2. Se multiplican numeradores entre sí y denominadores entre sí.
3. Suprimir (cancelar) los factores comunes que aparezcan entre el numerador y el denominador de las fracciones.

Recordemos, cuando multiplicamos fracciones se tiene que:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \longrightarrow \frac{\text{numeradores}}{\text{denominadores}}$$

Ejemplo:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{-3}{7} = \frac{4 \cdot (-3)}{5 \cdot 7} = \frac{-12}{35}$$

Multipliquemos y simplifiquemos la siguiente fracción racional:

$$\frac{x^2 - 25}{3x^2 + 11x + 10} \cdot \frac{4x + 8}{x^2 - 2x - 15}$$

$$= \frac{(x+5) \cdot (x-5)}{(3x+5) \cdot (x+2)} \cdot \frac{4 \cdot (x+2)}{(x+3) \cdot (x-5)} \text{ Factorizamos las expresiones}$$

$$= \frac{(x+5) \cdot \cancel{(x-5)} \cdot 4 \cdot \cancel{(x+2)}}{(3x+5) \cdot \cancel{(x+2)} \cdot (x+3) \cdot \cancel{(x-5)}} \text{ Simplificamos}$$

por lo tanto $\dfrac{x^2 - 25}{3x^2 + 11x + 10} \cdot \dfrac{4x + 8}{x^2 - 2x - 15} = \dfrac{4 \cdot (x+5)}{(3x+5) \cdot (x+3)}$

Ejercicio 4: Simplifiquemos productos de expresiones racionales.

Simplificar la expresión racional: $\frac{x^2+2x}{x+5} \cdot \frac{x+5}{x^2+6x+8}$

Solución

Ejercicio 5: Resuelve en tu cuaderno y practica simplificando expresiones racionales.

1. $\frac{6a^2bx^3}{2ab^2x^4} \cdot \frac{-4a^3bx^2}{3a^2bx}$

2. $\frac{21x^2y^3}{13ab^2} \cdot \frac{28y^2x^3}{39a^2b^3}$

3. $\frac{2x^2y}{3yz} \cdot \frac{5z^2x}{7xy^2} \cdot \frac{21x^2y^3z^2}{40xy^2z}$

4. $\frac{x-y}{x^2+xy} \cdot \frac{x^2}{y^2-xy}$

5. $\frac{14x^2-7x}{12x^3+24x^2} \cdot \frac{2x-1}{x^2+2x}$

6. $\frac{x^2-6x+9}{x^2-7x+12} \cdot \frac{x^3-4x^2+9x-36}{x^4-81}$

7. $\frac{x^2-9}{x+4} \cdot (2x-6)$

8. $\frac{3a(a-2b)^2}{2b^3} \cdot \frac{b(a+2b)}{6a^2} \cdot \frac{12ab}{a^2-4b^2}$

9. $\frac{a^2-3a}{b^2-2b} \cdot \frac{ab^2-2ab}{a^2-9} \cdot \frac{a}{b(a+3)}$

10. $\frac{2x^2+3x}{y^2-2y} \cdot \frac{xy^2-2xy}{4x^2-9} \cdot \frac{x}{2xy-3y}$

6.5 División de fracciones racionales

Para dividir fracciones racionales hacemos lo siguiente:

1. En primer lugar, la segunda fracción se cambia por su inverso multiplicativo, convirtiendo la división en una multiplicación.
2. Se continua con el mismo proceso de la multiplicación, factorizamos todos los numeradores y los denominadores.
3. Se multiplican numeradores entre sí y denominadores entre sí.
4. Suprimir (cancelar) los factores comunes que aparezcan entre el numerador y el denominador de las fracciones.

Recordemos, cuando dividimos fracciones se tiene que:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \underbrace{\frac{d}{c}}_{\substack{\downarrow \\ \text{inverso} \\ \text{multiplicactivo}}} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b} \longrightarrow \frac{\text{numeradores entre sí}}{\text{denominadores entre sí}}$$

Ejemplo:

$$\frac{4}{5} \div \frac{-3}{7} = \frac{4}{5} \times \frac{7}{-3} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot (-3)} = \frac{28}{-15}$$

Dividamos y simplifiquemos la siguiente fracción racional:

$$\frac{3x-15}{x+3} \div \frac{12x+18}{4x+12} = \frac{3x-15}{x+3} \cdot \frac{4x+12}{12x+18}$$

$$= \frac{3 \cdot (x-5)}{(x+3)} \cdot \frac{4 \cdot (x+3)}{6 \cdot (2x+3)} = \frac{12 \cdot (x-5) \cdot (x+3)}{6 \cdot (x+3) \cdot (2x+3)} = \frac{2 \cdot (x-5)}{2x+3}$$

Ejercicio 6: Simplifiquemos divisiones de expresiones racionales.

Simplificar la expresión racional: $\dfrac{x+6}{x^2+x-6} : \dfrac{x^2+5x-6}{x-2}$

Solución

Ejercicio 7: Resuelve en tu cuaderno y practica simplificando expresiones racionales.

1. $\dfrac{6a^2bx^3}{2ab^2x^4} \div \dfrac{4a^3bx^2}{3a^2bx}$

2. $\dfrac{21x^2y^3}{13ab^2} \div \dfrac{28y^2x^3}{39a^2b^3}$

3. $\dfrac{2x^2y}{3yz} \div \dfrac{21x^2y^3z^2}{40xy^2z}$

4. $\dfrac{x-y}{x^2+xy} \div \dfrac{x^2}{y^2-xy}$

5. $\dfrac{14x^2-7x}{12x^3+24x^2} \div \dfrac{2x-1}{x^2+2x}$

6. $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-7x+12} \div \dfrac{x^3-4x^2+9x-36}{x^4-81}$

7. $\dfrac{x^2-9}{x+4} \div (2x-6)$

8. $\dfrac{3a(a-2b)^2}{2b^3} \div \dfrac{12ab}{a^2-4b^2}$

9. $\dfrac{a^2-3a}{b^2-2b} \cdot \dfrac{ab^2-2ab}{a^2-9} \div \dfrac{a}{b(a+3)}$

10. $\dfrac{2x^2+3x}{y^2-2y} \div \dfrac{x}{2xy-3y}$

6.6 Practiquemos

Ejercicio 8: Simplifica las siguiente expresión racional (sumas, restas, productos, cocientes, potencias), resuelve primero en tu cuaderno y luego verifica la solución.

Simplificar la expresión racional: $\dfrac{-3x+2}{x^2+x-2} - \dfrac{1}{x^2+6x+8}$

Solución

Bibliografía

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA PASCUAL BRAVO

[1] Abreu L., José y Muñoz P.,Valentina (2004). *ProyectoDescartes.org - Telesecundaria*. Obtenido de: http://proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos

[2] Barbero Corral, Eduardo (2004). *ProyectoDescartes.org*. Obtenido de: http://proyectodescartes.org/uudd/materiales_didacticos

[3] Barnett, Raymon A. (1989). *Álgebra y Geometría*. Bogotá: 2° Ed. Ediciones MC Graw-Hill. pág 384.

[4] Rodríguez S, Benjamín y otros (1996). *Matemáticas con Tecnología Aplicada*. Bogotá: Ediciones Prentice Hall. pág 220.

[5] Ruiz Gil, Consolación (2014). *proyectodescartes.org - EDAD*. Obtenido de: http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos

[6] Uribe Calad, Julio A. (1989). *Elementos de Matemáticas*. Medellín: 2° Ed. Ediciones Bedout. pág 401.

DESCARTES
matemáticas interactivas