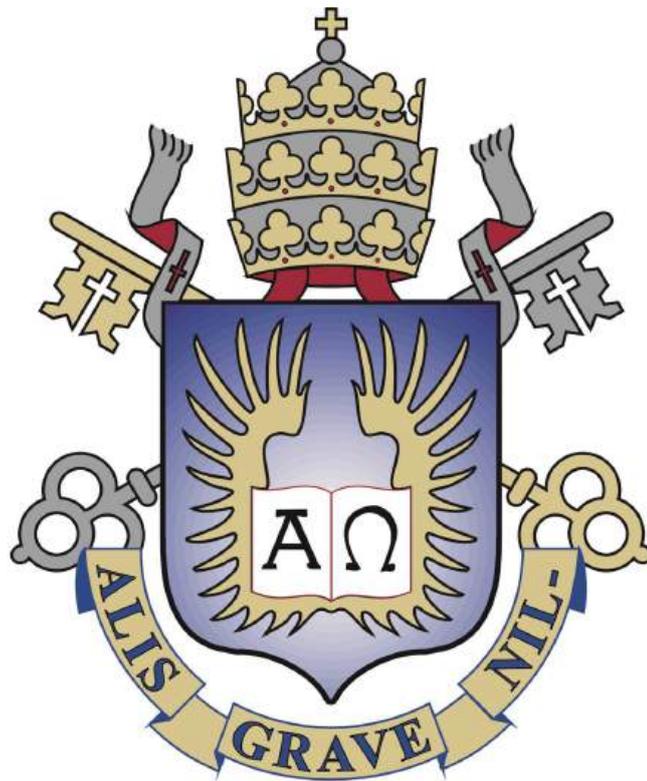


Apostila de Vibrações Mecânicas



PUC
RIO

Ricardo de Castro

PUC - Rio

Orientadores:

Prof. Rubens Sampaio e Prof^a. Roberta Lima

Rio de Janeiro, 7 de Junho de 2018

Conteúdo

1	Introdução	3
2	Formulação Lagrangiana	3
2.1	Sistemas mecânicos	4
2.1.1	Revisão das Leis da mecânica clássica	4
2.1.2	Sistemas não conservativos	4
2.1.3	Aplicação	6
3	Sistemas não-amortecidos de um grau de liberdade	11
3.1	Solução para vibração livre	12
3.2	Forçamentos	13
3.3	Solução para vibração com forçamento harmônico	14
4	Sistemas amortecidos de um grau de liberdade (SDOF)	15
4.1	Solução para vibração com forçamento harmônico	16
4.2	Forçamento não-harmônico	17
4.2.1	Resposta a um impulso	17
4.2.2	Integral de convolução	18
5	A função resposta em frequência em sistemas SDOF (4)	18
5.1	Representações gráficas da FRF	19
6	Síntese Modal em Sistemas não-amortecidos de múltiplos graus de liberdade (MDOF)	22
6.1	Função resposta em frequência de sistemas conservativos	24
6.2	Casos particulares	26
6.2.1	Frequências coincidentes	26
6.2.2	Modos rígidos	27
7	Sistemas amortecidos de múltiplos graus de liberdade	27
7.1	Espaço-estado	29

1 Introdução

No curso de vibrações aprendemos a encontrar os modos de vibração e frequências naturais de um sistema cujas propriedades são conhecidas (análise modal). A análise modal é importante para estudar os efeitos de um carregamento cíclico em uma estrutura conhecida. Após a construção da estrutura ou do componente mecânico ele pode ser testado por uma análise modal comum ou operacional. Na análise modal comum o carregamento exercido no sistema é controlado enquanto na análise modal operacional o carregamento é aleatório. Nessa apostila primeiramente iremos revisar o procedimento de análise modal para sistemas com um grau de liberdade (SDoF) e com múltiplos graus de liberdade (MDoF) não-amortecidos e amortecidos. Relembraremos os conceitos de frequência natural, modos de vibração e fator de amortecimento. Finalmente veremos como podemos construir a função resposta em frequência de um sistema a partir das frequências, dos modos e fatores de amortecimento.

2 Formulação Lagrangiana

A mecânica Lagrangiana, do matemático italiano Joseph Louis Lagrange, é uma formulação da mecânica clássica que leva em conta a conservação de quantidade de momento e energia. Ela pode ser utilizada não só em sistemas mecânicos mas também em sistemas elétricos e eletromecânicos desde que a abordagem seja adaptada.

A beleza do método Lagrangiano é a sua aplicação fácil em sistemas com muitos graus de liberdade, vários tipos de coordenadas e restrições. As equações de Lagrange são válidas em qualquer sistema de coordenadas (Inercial ou não-inercial).

Outra vantagem é que, diferentemente do formalismo de Newton, a mecânica de Lagrange trabalha com escalares (energias, trabalho virtual e potências) ao invés de vetores o que facilita os cálculos.

2.1 Sistemas mecânicos

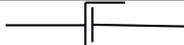
2.1.1 Revisão das Leis da mecânica clássica

As três leis de Newton junto com o conceito de trabalho virtual são a fundação das quatro principais maneiras de formular um problema de dinâmica que são as equações de Lagrange e de Hamilton e os princípios de D'Alembert e de Hamilton. As leis da dinâmica foram deduzidas a partir da experimentação e portanto não podem ser encontradas através do raciocínio lógico ou de manipulações matemáticas.

As três leis de Newton

Lei	Enunciado	Condições	Equação
Inércia	A tendência de um corpo é permanecer em velocidade constante	Força resultante nula e referencial inercial	-
Força e aceleração	A força é igual a derivada da quantidade de movimento de um corpo ou, se a massa for constante, $F=m.a$	Referencial inercial e massa constante	$F=m.a$ $F=\frac{dq}{dt}$
Ação e reação	Para toda ação, surge uma reação de mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos	Referencial inercial	$F_{A/B} = -F_{B/A}$

Elementos de um sistema mecânico e suas equações

Elemento	Simbolo	Constante	Equação associada
Massa	 	m (kg) no caso de translação I ($Kg.m^2$) no caso de rotação	$T = mv^2/2$ $T = I\omega^2$
Mola	 	k (N/m translação ou N rotação)	$V = kx^2/2$ $V = k\theta^2/2$
Amortecedor		c (N.s/m)	$\frac{dW_{total}}{dx} = c\dot{x}$

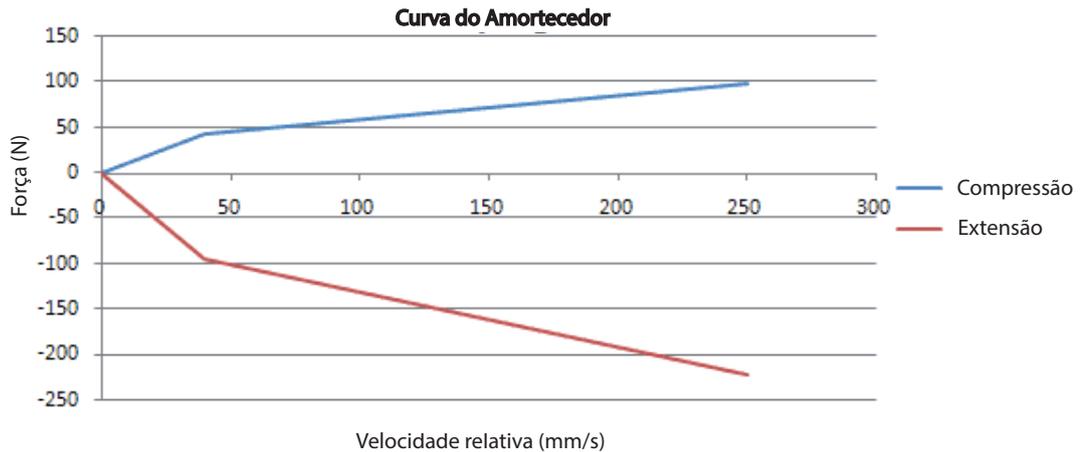
(7)

2.1.2 Sistemas não conservativos

Na vida real praticamente não existem sistemas mecânicos que operam sem qualquer tipo de perda. Essas perdas geralmente estão associadas com atritos que podem ser entre sólidos ou entre sólidos e fluidos. Podemos distinguir dois modelos o atrito viscoso e o seco (ou de Coulomb). O atrito viscoso é o modelo que empregamos em amortecedores clássicos e nele a força no amortecedor é proporcional a velocidade relativa entre o pistão e o cilindro do mesmo. No caso do atrito seco, a força de atrito não depende da velocidade e sim da força normal entre as superfícies em atrito.

Atrito viscoso

O atrito viscoso é caracterizado por sua constante c que associa a velocidade relativa a uma força. Essa constante depende de vários fatores como o fluido no amortecedor e as dimensões do mesmo. O atrito em um amortecedor ideal é do tipo viscoso, ou seja, a força no amortecedor é proporcional a velocidade relativa das hastes do mesmo. Amortecedores reais no entanto podem ter comportamentos diferentes em compressão e extensão e constantes que mudam a com a velocidade como mostrado na figura a seguir.



Para nós o amortecedor sempre terá a mesma constante de amortecimento, tanto na compressão quanto na expansão.

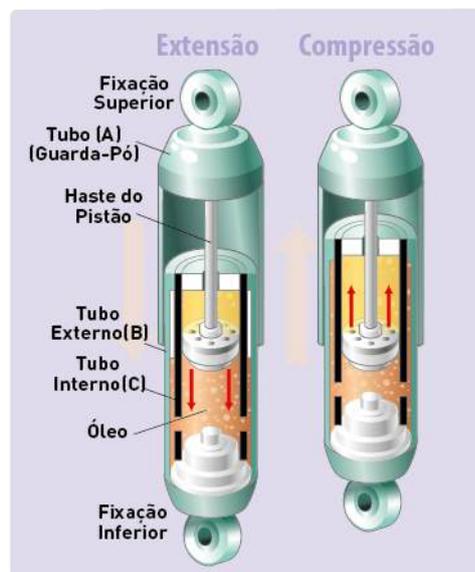


Figura 1: Amortecedor em corte (8)

Em sistemas com um grau de liberdade podemos escrever o trabalho das forças viscosas da seguinte forma:

$$\delta W_{viscous} = c\dot{x}\delta x$$

No exemplo 3 da seção de aplicação vamos aplicar esses conceitos.

Atrito seco O atrito seco ou atrito de Coulomb é o modelo mais utilizado em sistemas onde a atrito em duas superfícies sem lubrificação. Nesse modelo a força de atrito só depende da força normal entre às superfícies e não depende da área de contato e velocidade relativa das superfícies.

$$\delta W_{seco} = -mg\mu\delta x \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$$

$$\frac{W_{seco}}{\delta x} = -mg\mu \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$$

2.1.3 Aplicação

Exemplo 1

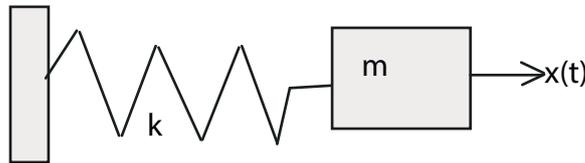


Figura 2: Exemplo 1: Sistema Massa-Mola de um grau de liberdade

Equacionamento por Lagrangiano:

Energia cinética

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

Energia Potencial elástica

$$V = \frac{kx^2}{2}$$

$$L = T - V = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{x}} \right) - \frac{dL}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Agora que encontramos a equação que rege a dinâmica do sistema podemos resolver numericamente ou analiticamente o problema.

Neste caso como o sistema é muito simples sabemos que a solução é facilmente encontrada analiticamente.

Solução:

$$x(t) = \cos(\omega t)$$

$$-m\omega^2 \cos(\omega t) + k \cos(\omega t) = 0$$

$$k = m\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x(t) = \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

Exemplo 2

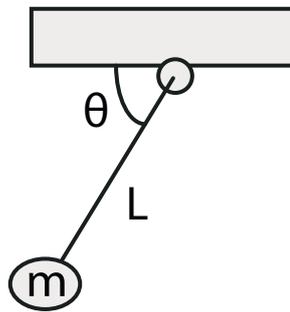


Figura 3: Exemplo 2: Pendulo Simples

Vamos proceder da mesma maneira que na ultimo exemplo. Utilizaremos como referencia para energia potencial gravitacional a rótula do pendulo.

Energia cinética

$$T = \frac{m(L\dot{\theta})^2}{2}$$

Energia potencial gravitacional

$$V = -mLg\cos(\theta)$$

$$L = \frac{m(L\dot{\theta})^2}{2} + mLg\cos(\theta)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\theta}} \right) - \frac{dL}{d\theta} = mL^2\ddot{\theta} + mLg\sin(\theta) = 0$$

Simplificando

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0$$

Esse é um caso não linear, podemos fazer a suposição que $\sin(\theta) \approx \theta$. Essa aproximação é boa quando os ângulos são pequenos. Caso essa aproximação não seja possível o problema terá de ser resolvido numericamente. O problema resolvido numericamente no Matlab está no apêndice dessa apostila.

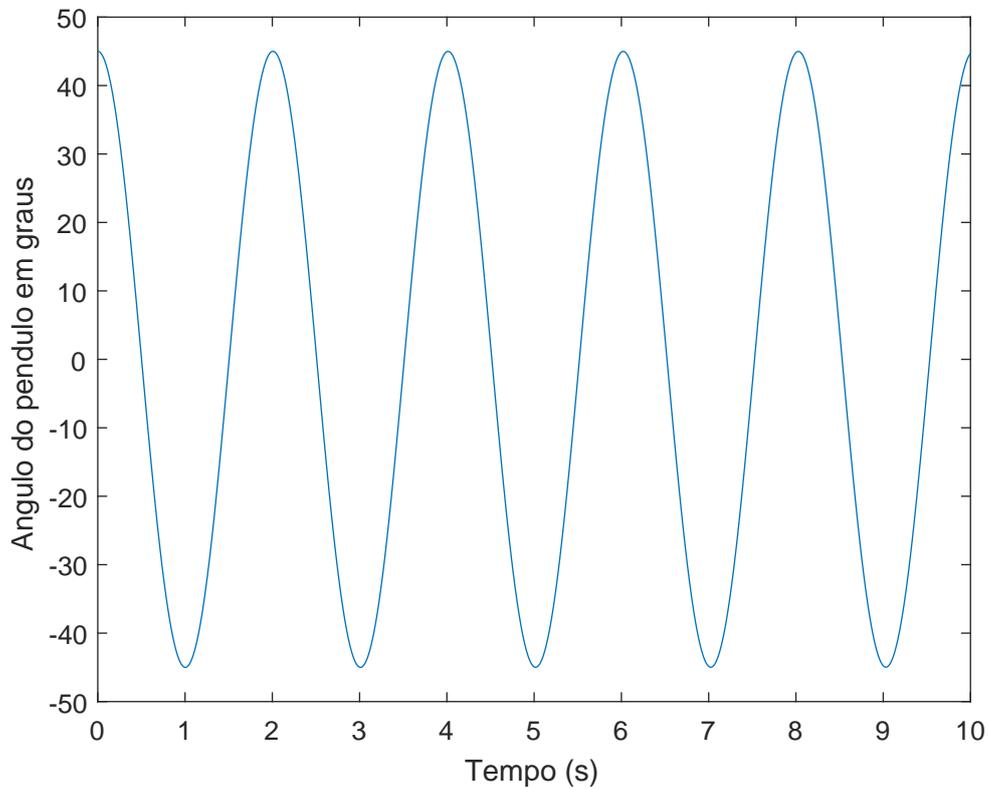


Figura 4: Movimento do pendulo encontrado numericamente

Exemplo 3

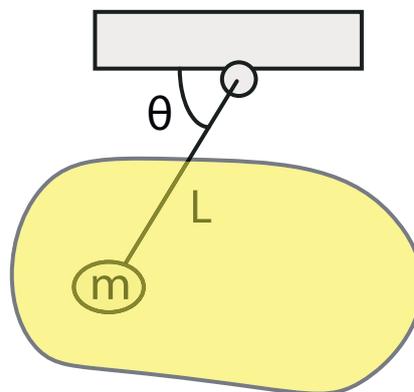


Figura 5: Exemplo 3: Pendulo Simples com atrito viscoso

A parte do Lagrangiano conservativa é a mesma do exemplo anterior.
Trabalho das forças não conservativas:

$$\delta W_{viscoso} = -c(L\dot{\theta})(L\delta\theta)$$

$$\frac{\delta W_{viscoso}}{\delta\theta} = -cL^2\dot{\theta}$$

Lagrangiano:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\theta}} \right) - \frac{dL}{d\theta} = \frac{\delta W_{viscoso}}{\delta\theta}$$

$$mL^2\ddot{\theta} + mLg\text{sen}(\theta) = -cL^2\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\text{sen}(\theta) + \frac{c}{m}\dot{\theta} = 0$$

Como no caso anterior temos uma equação não-linear que podemos resolver numericamente. Utilizando uma variação do código Matlab utilizado no último exemplo chegamos ao seguinte gráfico.

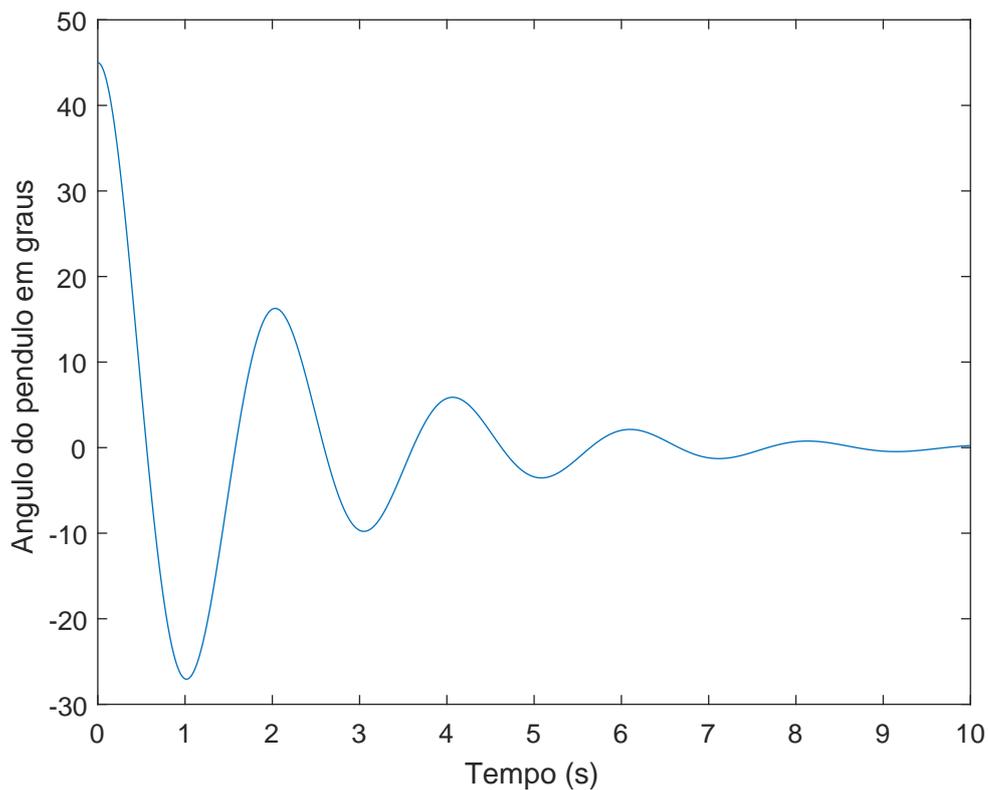


Figura 6: Movimento do pendulo com atrito viscoso encontrado numericamente

Podemos observar que como previsto o pendulo tende a estabilizar.

Exemplo 4

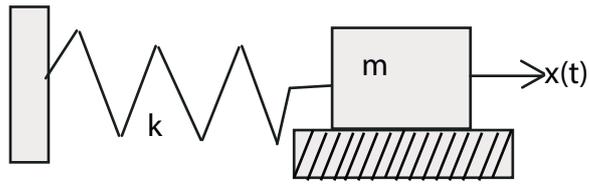


Figura 7: Exemplo 4: Sistema massa-mola com atrito seco

Como no exemplo anterior a parte conservativa do Lagrangiano não muda. Trabalho das forças não-conservativas:

$$\delta W_{seco} = -mg\mu\delta x \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$$

$$\frac{W_{seco}}{\delta x} = -mg\mu \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$$

Reescrevendo o Lagrangiano do Exemplo 1:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{x}} \right) - \frac{dL}{dx} = \frac{\delta W_{seco}}{\delta x}$$

$$m\ddot{x} + kx = -mg\mu \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - g\mu \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$$

Foi escrito um código no Matlab para comparar nesse exemplo 3 situações: Uma onde não há atrito a outra onde há atrito seco e a terceira onde há atrito viscoso. A figura a seguir mostra os resultados da simulação.

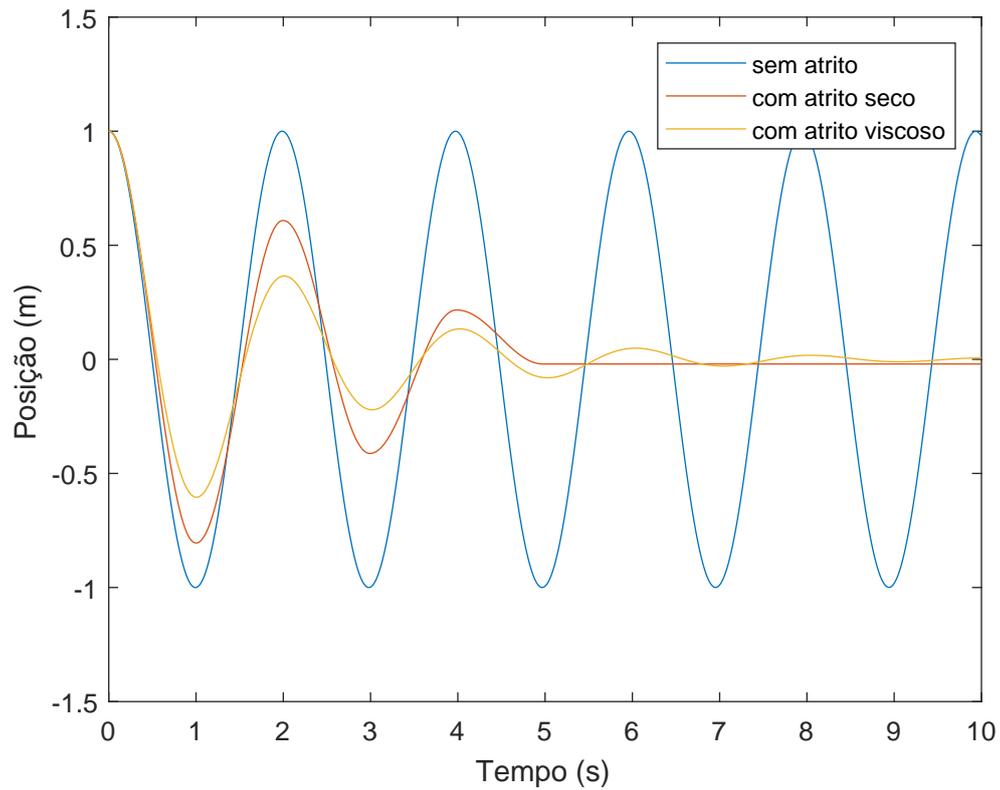
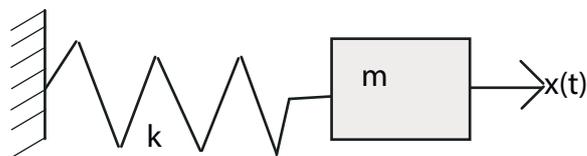


Figura 8: Exemplo 4: Sistema massa-mola

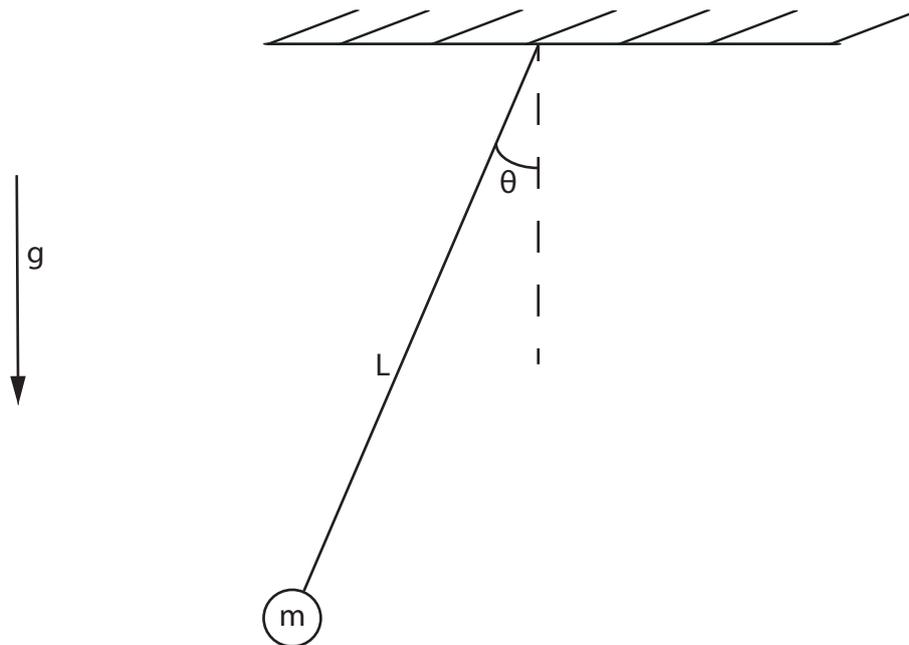
Vemos que no caso do atrito seco a massa se estabiliza de forma abrupta e com a mola ligeiramente comprimida porque a força do atrito não diminui com a velocidade da massa.

3 Sistemas não-amortecidos de um grau de liberdade



$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\theta$$

(OBS: A aproximação $\text{sen}(\theta) = \theta$ foi utilizada)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

3.1 Solução para vibração livre

Nesse caso já sabemos a equação da dinâmica do problema e inclusive já sabemos encontrar a solução dessa equação. Vamos relembrar essa solução e os parâmetros que a definem.

Solução geral:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\text{sen}(\omega_0 t) = X\cos(\omega_0 t - \phi)$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\text{sen}(\omega_0 t) = X\cos(\omega_0 t - \phi)$$

Onde ω_0 é a frequência natural do sistema, X a amplitude e ϕ a fase. As duas últimas dependem das condições iniciais de posição (x_0) e velocidade (v_0).

Podemos escrever a solução em função dos parâmetros do problema.

$$x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\text{sen}(\omega_0 t)$$

ou

$$x(t) = X\cos(\omega_0 t - \phi)$$

onde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad X = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 + x_0^2}$$

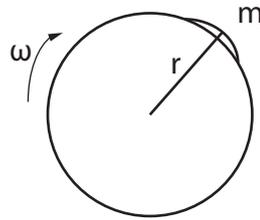
$$\text{tg}(\phi) = \frac{v_0}{x_0\omega_0}$$

3.2 Forçamentos

Forçamentos podem ser classificados em duas categorias: Os determinísticos e os aleatórios.

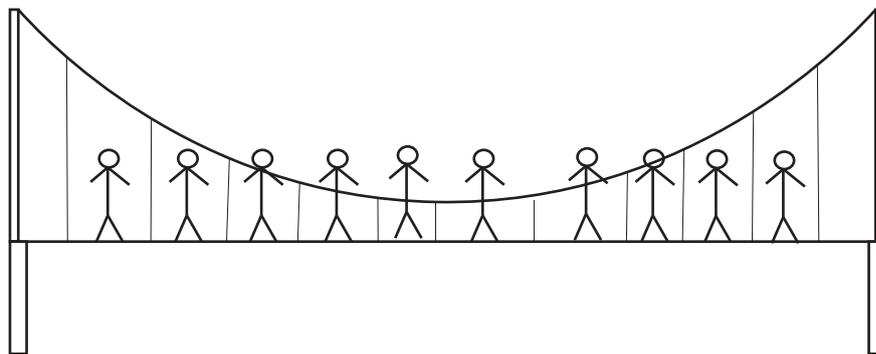
Determinísticos:

- Eixo desbalanceado



$$F_{desbalanceamento} = \omega^2 m r \sin(\omega t)$$

- Tropa marchando em uma ponte



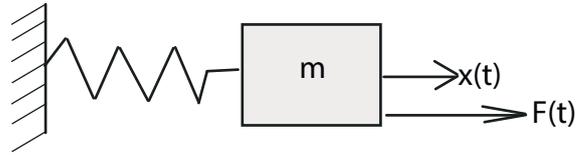
Aleatórios

- Turbulência
- Terremotos
- Ondas

As excitações acima podem ter efeitos não-desejáveis nos sistemas como:

- Fadiga: Apesar das tensões induzidas por vibrações em um sistema saudável e elástico elas podem iniciar trincas na estrutura. Ex. Trincas em tubulações onde há vibração induzida pelo fluido.
- Ruído: Ex. Brake Squeal (Chiado nos freios).
- Desempenho: Ex. Vibração em máquinas ferramenta que podem reduzir a precisão do corte.
- Conforto: Ex. Transmissão de imperfeições da estrada para a cabine de um veículo.

3.3 Solução para vibração com forçamento harmônico



Em casos onde a massa está submetida a um forçamento harmônico a equação dos sistema pode ser escrita da seguinte forma:

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

com $F(t) = F_0 \text{sen}(\omega_F t)$.

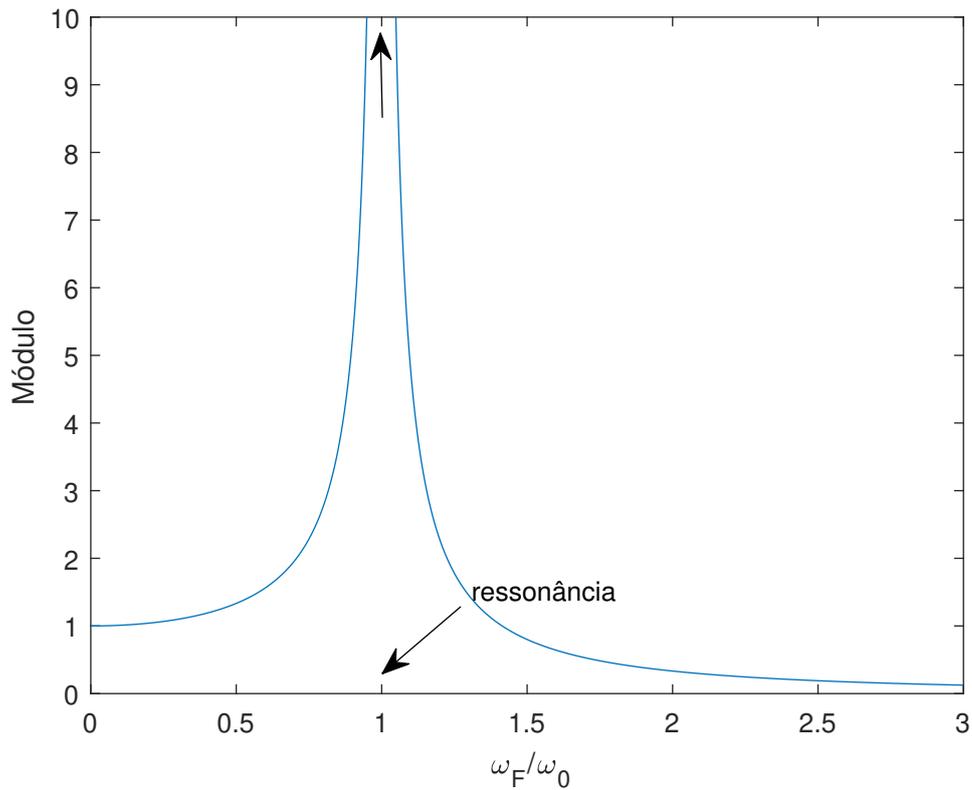
Nesse tipo de problema a solução será composta pela solução da equação homogênea associada (vibração livre) e pela solução particular (resposta ao forçamento). No caso do forçamento harmônico com condições iniciais nulas a solução será:

$$x = F_0 H \text{sen}(\omega_F t + \phi)$$

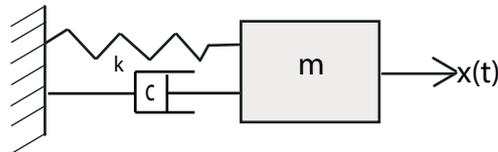
onde H é a resposta em frequência.

$$H = \frac{x_0}{F_0} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_F}{\omega_0}\right)^2}$$

Vemos que para $\omega_F = \omega_0$ temos um problema. Quando a frequência do forçamento é igual a frequência natural do sistema temos ressonância. Quando há ressonância o sistema é instável porque a cada ciclo ele acumula energia. O gráfico abaixo mostra o valor de H em função da razão $\frac{\omega_F}{\omega_0}$.



4 Sistemas amortecidos de um grau de liberdade (SDOF)



Introduzimos dissipação no sistema na forma de um amortecedor, incluímos um termo de dissipação na equação do exemplo anterior.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Agora, além da frequência natural do sistema conservativo associado, temos uma frequência associada ao sistema dissipativo e um fator de amortecimento.

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_0}$$

Podemos distinguir três casos onde há dissipação:

- Caso sub-critico onde $\zeta < 1$
- Caso critico onde $\zeta = 1$
- Caso super-critico onde $\zeta > 1$

Somente no caso sub-critico temos oscilação.

Nesse caso podemos escrever a solução:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} \left(x_0 \cos(\omega_d t) + \frac{v_0 + \zeta\omega_0 x_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right)$$

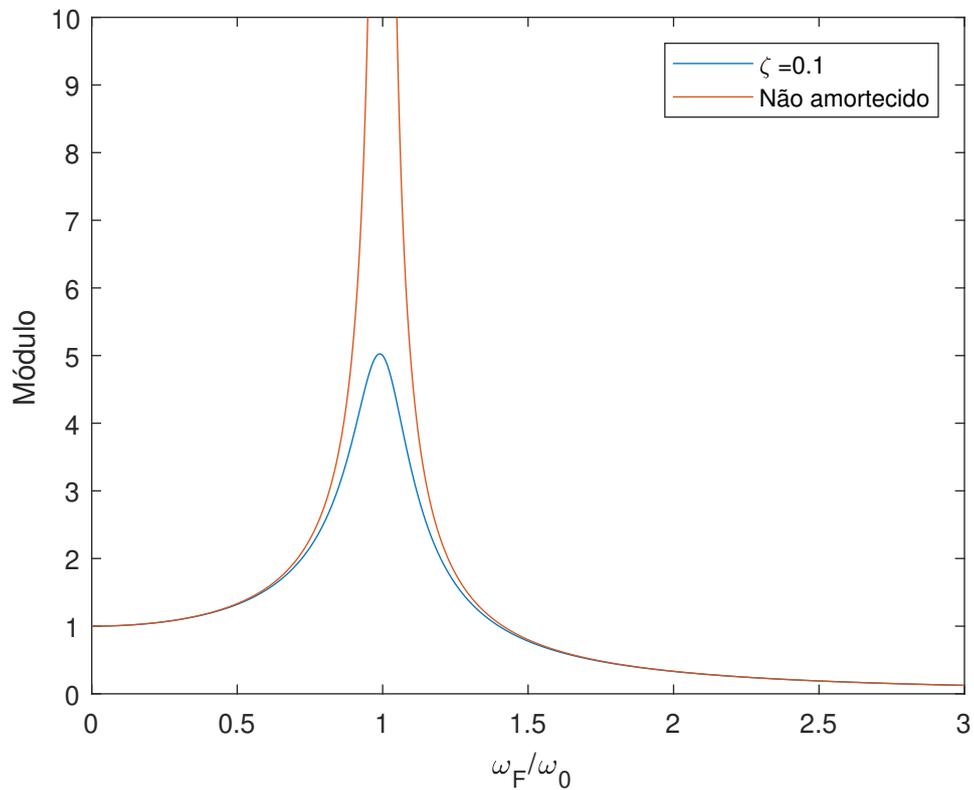
ou

$$x(t) = X e^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_d t - \phi)$$

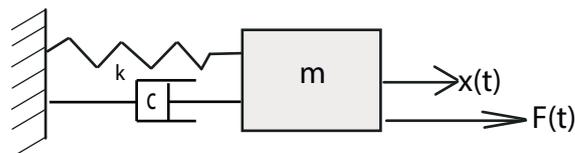
Onde

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \zeta\omega_0 x_0}{\omega_d} \right)^2} \quad \text{tg}(\phi) = \frac{v_0 + \zeta\omega_0 x_0}{\omega_d}$$

Em um sistema com dissipação também teremos ressonância, a diferença é que a resposta ao forçamento não cresce mais indefinidamente .



4.1 Solução para vibração com forçamento harmônico



Em casos onde a massa está submetida a um forçamento harmônico a equação dos sistema pode ser escrita da seguinte forma:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

com $F(t) = F_0 \text{sen}(\omega_F t)$. Podemos reescrever o forçamento em notação exponencial.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega_F t}$$

Dessa forma podemos propor uma solução particular do tipo:

$$x(t) = C e^{i\omega_F t}$$

Com

$$C = \frac{F_0}{k} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\omega_F^2}{\omega_0^2} + 2i\zeta \frac{\omega_F}{\omega_0}} \right\}$$

É interessante repararmos que para $\omega_F = 0$ C é igual a deformação estática causada pelo forçamento. O termo entre colchetes é o fator de amplificação dinâmica. Quando há forçamento a solução pode ser escrita como a soma da solução com o sistema livre (resposta transitória) com a solução particular para aquele forçamento (resposta permanente). A resposta transitória, como o nome sugere, desaparece após um certo tempo (é dissipada) deixando somente a resposta ao forçamento.

4.2 Forçamento não-harmônico

Quando o sistema é submetido a um forçamento não-harmônico é mais difícil encontrarmos a solução. A ideia quando temos esse tipo de forçamento é dividir a função $F(t)$ em impulsos com intervalos de tempo infinitesimais. A resposta do sistema em um instante t será a soma das respostas a cada impulso que veio antes daquele instante.

4.2.1 Resposta a um impulso

Antes de abordarmos o conceito de integral de convolução precisamos estudar a resposta de um sistema a um impulso unitário.

$$\Delta(mv) = \int_0^{\Delta t} f dt$$

$$m\ddot{x} = f - c\dot{x} - kx \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0$$

$$m.\dot{x}(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} f dt + \int_0^{\Delta t} (f_k + f_c) dt = 1$$

As forças da mola e no amortecedor não são impulsivas portanto a integral da direita é nula.

$$\dot{x}(\Delta t) = \frac{1}{m}$$

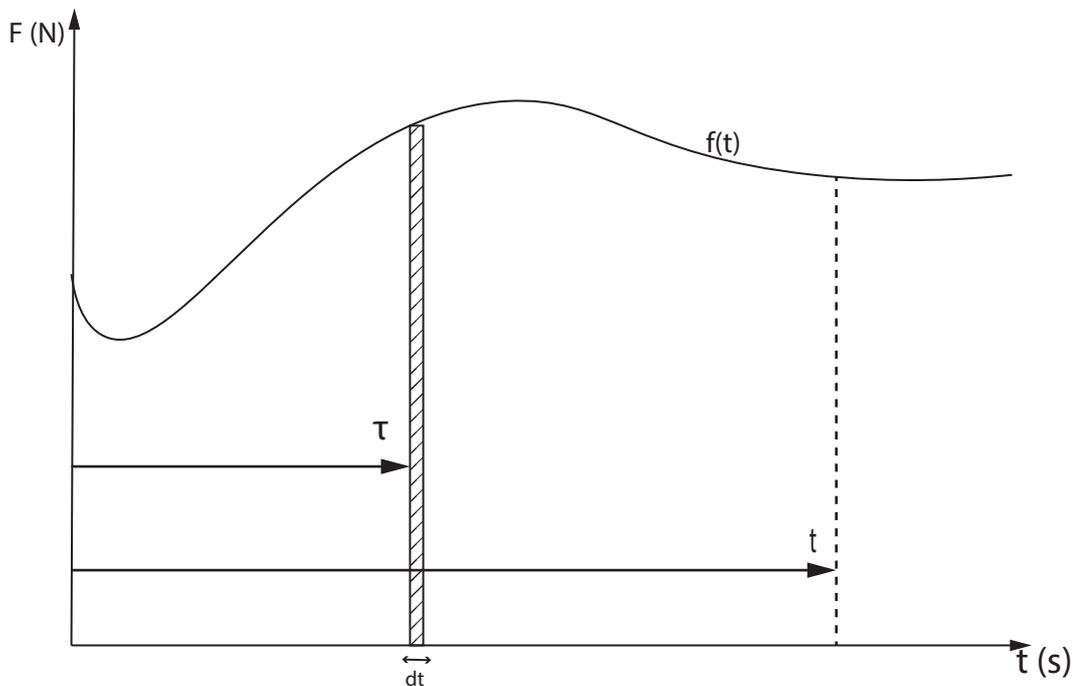
Vemos que o impulso resulta em uma velocidade inicial $\dot{x}(\Delta t) = \frac{1}{m}$. Como Δt é muito pequeno podemos dizer que $\dot{x}(0) = \frac{1}{m}$.

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A \cos\omega_d t + B \sin\omega_d t)$$

$$B = \frac{1}{m\omega_d}$$

$$x(t) = h(t) = B = \frac{1}{m\omega_d} \sin\omega_d t$$

4.2.2 Integral de convolução



Considerando um sistema **linear** com resposta ao impulso $h(t)$ submetido ao forçamento $f(t)$ com condições iniciais nulas. A integral de convolução avalia a resposta no instante t ao impulso dado pelo forçamento em um instante τ . Somando a contribuição de cada impulso de 0 a t temos a posição $x(t)$.

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

5 A função resposta em frequência em sistemas SDoF (4)

A função resposta em frequência (FRF) de um sistema é a razão entre a amplitude do deslocamento de um sistema e a amplitude do forçamento para cada frequência.

Relembrando a dinâmica de um sistema massa-mola-amortecedor temos:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (1)$$

Podemos escrever $f(t) = F(\omega)e^{i\omega t}$, onde $F(\omega)$ é um número real que representa a amplitude do forçamento para em cada frequência, e $x(t) = X(\omega)e^{i\omega t}$ onde $X(\omega)$ é um número complexo que representa a amplitude e fase do deslocamento do sistema. Substituindo $x(t)$ e $f(t)$ na equação 1 temos:

$$\underbrace{(-m\omega^2 + c\omega i + k)}_{K_{din}} X(\omega)e^{i\omega t} = F(\omega)e^{i\omega t} \quad (2)$$

Onde o termo K_{din} pode ser interpretado como uma rigidez dinâmica do sistema

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{K_{din}} = \frac{1}{k - m\omega^2 + ic\omega} \quad (3)$$

A FRF permite avaliar a resposta do sistema a um forçamento harmônico. Dela podemos extrair a magnitude e fase da resposta da seguinte forma:

$$|H(\omega)| = \frac{k}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}$$

$$\angle H(\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{-c\omega}{k - m\omega^2} \right]$$

5.1 Representações gráficas da FRF

Vamos mostrar a seguir as diferentes formas de representação de funções resposta em frequência que evidenciam propriedades diferentes das mesmas.

Gráfico Bode

Chamamos de gráfico Bode o conjunto de dois gráficos da magnitude e da fase em função da frequência. Essa representação é muito usada pois nela podemos identificar claramente as frequências naturais e as amplitudes de associadas a cada uma delas. O pico mostrado no lado esquerdo da figura a seguir e o ponto de inflexão nas curvas do gráfico da direita correspondem a essa frequência natural. Esses pontos são mais fáceis de enxergar quando o sistema tem amortecimento baixo.

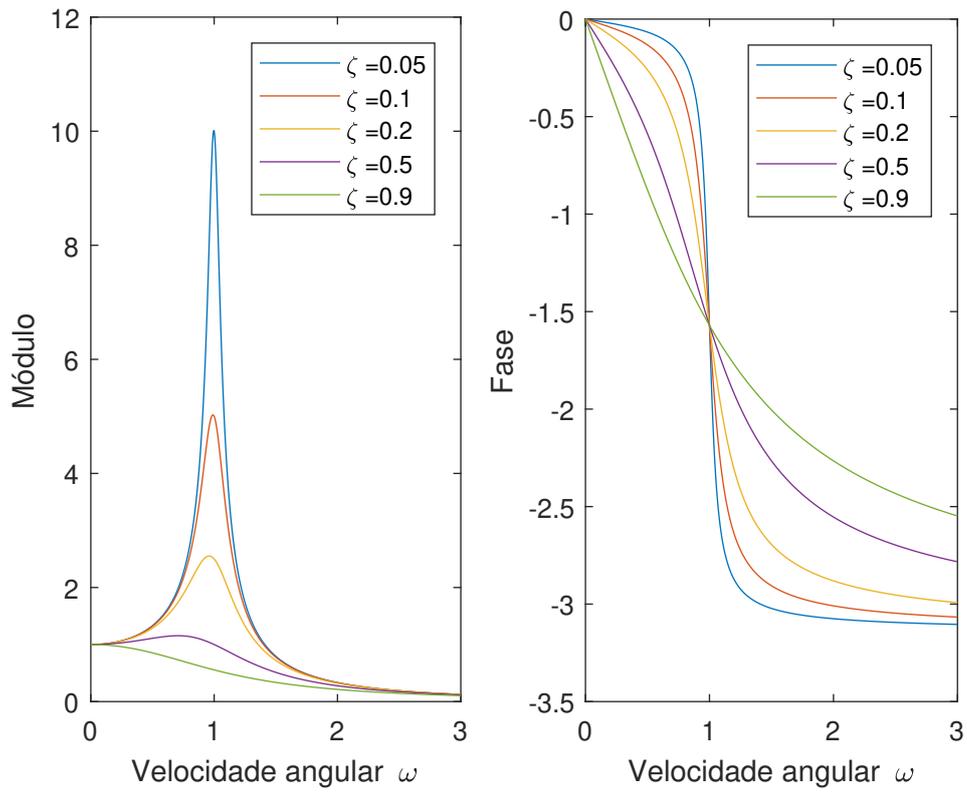


Gráfico Real X Imaginário

Nesse gráfico vemos que a parte real da resposta em frequência é positiva para $\omega < \omega_n$ e muda de sinal quando em $\omega = \omega_n$.

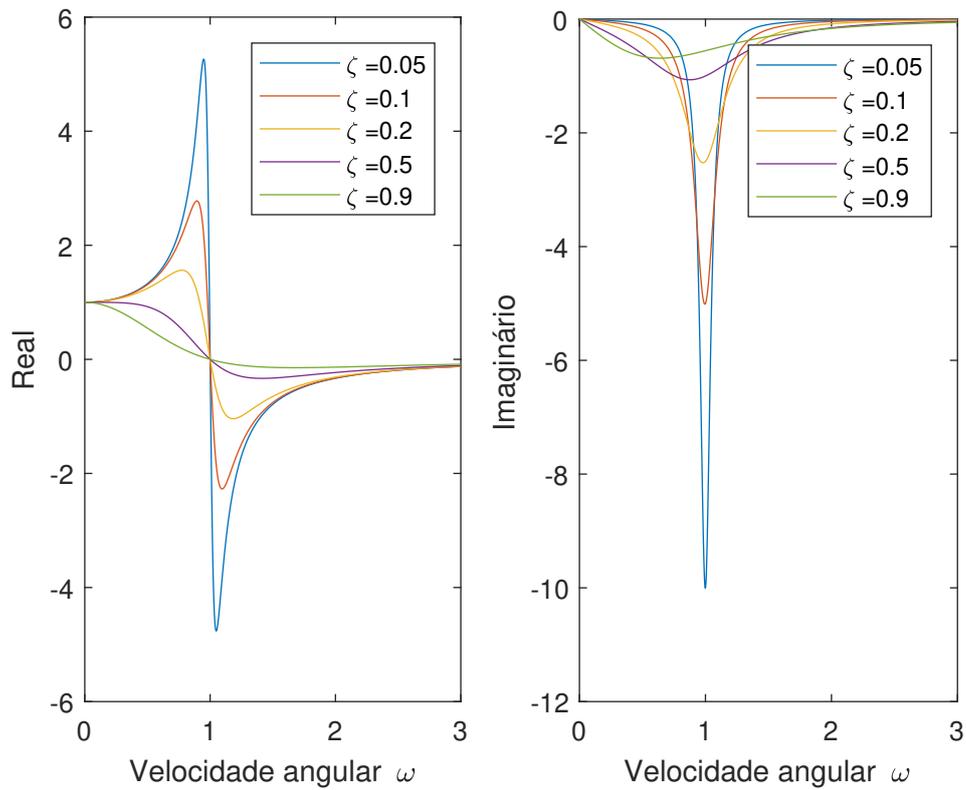
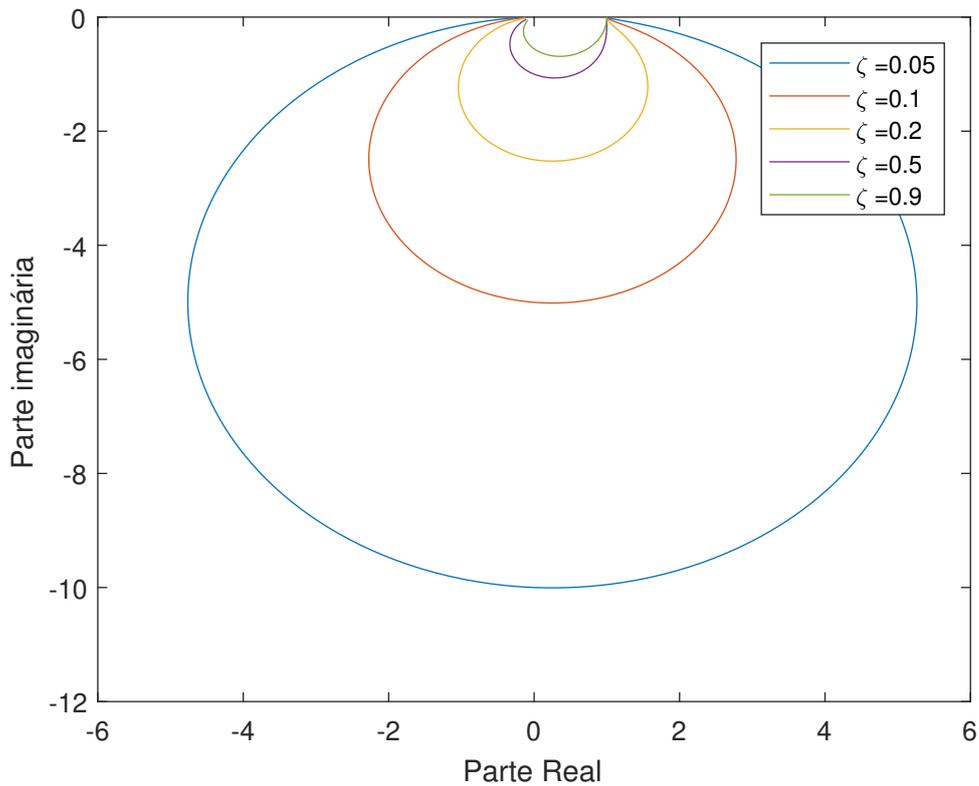
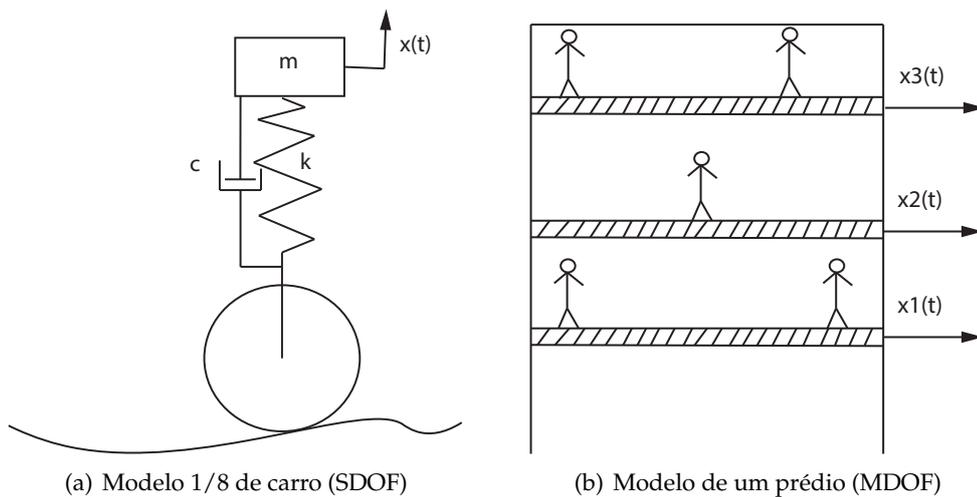


Gráfico Nyquist

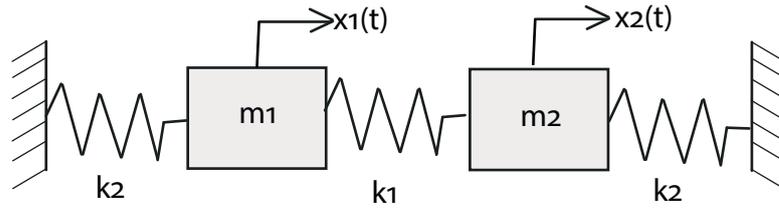
No gráfico de Nyquist temos a parte imaginária da resposta no eixo das ordenadas e a parte real no eixo das abcissas. Percebe-se que os gráficos tem um formato elipsoidal. Para a resposta da velocidade o gráfico é um círculo centrado em $(\frac{1}{2c}, 0)$ e de raio $\frac{1}{2c}$.



6 Síntese Modal em Sistemas não-amortecidos de múltiplos graus de liberdade (MDOF)



Problemas reais geralmente não podem ser aproximados por um modelo de um grau de liberdade. Por isso é importante sabermos trabalhar com sistemas com múltiplos graus de liberdade.



O número graus de liberdade em um sistema MDOF dita o tamanho das matrizes e vetores. Um sistema com dois graus de liberdade, como o mostrado acima, terá duas frequências naturais e dois modos de vibração. Quando temos múltiplos graus de liberdade precisamos equacionar o sistema usando matrizes. Essas matrizes podem ser obtidas através do Lagrangiano ou dos somatórios de forças nas massas.

Langrangiano:

Energia cinética

$$T = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2} = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2$$

Energia Potencial

$$V = \frac{k_1 x_1^2}{2} + \frac{k_2 x_2^2}{2} + \frac{k_2 (x_2 - x_1)^2}{2}$$

(2)

Encontrando a dinâmica do sistema

$$L = T - V = m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{k_1 x_1^2}{2} - \frac{k_2 x_2^2}{2} - \frac{k_2 (x_2 - x_1)^2}{2}$$

Primeiro parâmetro

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = \ddot{x}_1 + k_2 x_1 + k_1 x_1 - k_1 x_2 = 0$$

Segundo parâmetro

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + k_1 x_2 - k_1 x_1 = 0$$

Obtidas essas duas equações podemos reescrever o problema na forma matricial

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

As matrizes M,C,K são positivas definidas (1) e simétricas(2).

$$(1) u^T K u \geq 0$$

$$(2) K = K^T$$

Normalmente nesse ponto substituímos os valores de massa e rigidez nas matrizes para obter as frequências e modos. Dessa vez, de posse dos modos e frequências, iremos encontrar esses valores de massa e rigidez.

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Delta = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Onde v_1 e v_2 são os autovetores e Δ a matriz cujos elementos da diagonal são as frequências naturais ao quadrado (autovalores).

Vamos supor que as massas do sistemas são todas unitárias, podemos então escrever a matriz de flexibilidade (inversa de matriz de rigidez K).

$$K^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{v_i v_i^T}{\omega_i^2} \quad (4)$$

Esses autovalores e autovetores resolvem a seguinte equação:

$$(K - \omega_i^2 M)v_i = 0 \quad (5)$$

Para encontrar os valores de massa e rigidez:

$$\bar{K} = M^{-1/2} K M^{-1/2} = P \Delta P^T$$

$$K = M^{1/2} P \Delta P^T M^{1/2} \quad (6)$$

Dessa forma escrevemos a matriz de rigidez em função das massas.

$$K = \begin{bmatrix} 3m_1 & -\sqrt{m_1 m_2} \\ -\sqrt{m_1 m_2} & 3m_2 \end{bmatrix}$$

Sabendo que $m_1 = m_2 = 1$

$$K = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

6.1 Função resposta em frequência de sistemas conservativos

Com os valores de frequência natural e os modos podemos escrever a função resposta em frequência de um sistema de forma muito simples. Primeiramente precisamos calcular a matriz de modos normalizada pela massa.

$$P' = P(P^T M P)^{-1/2}$$

Onde P é a matriz de modos normalizados.

No nosso caso como as massas são iguais a 1 a matriz de massas é igual a matriz identidade e portanto $P' = P$. Em seguida podemos escrever a função resposta em frequência de cada

modo.

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{P'_{j1}P'_{k1}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{P'_{j2}P'_{k2}}{\omega_2^2 - \omega^2} + \dots + \frac{P'_{jn}P'_{kn}}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (7)$$

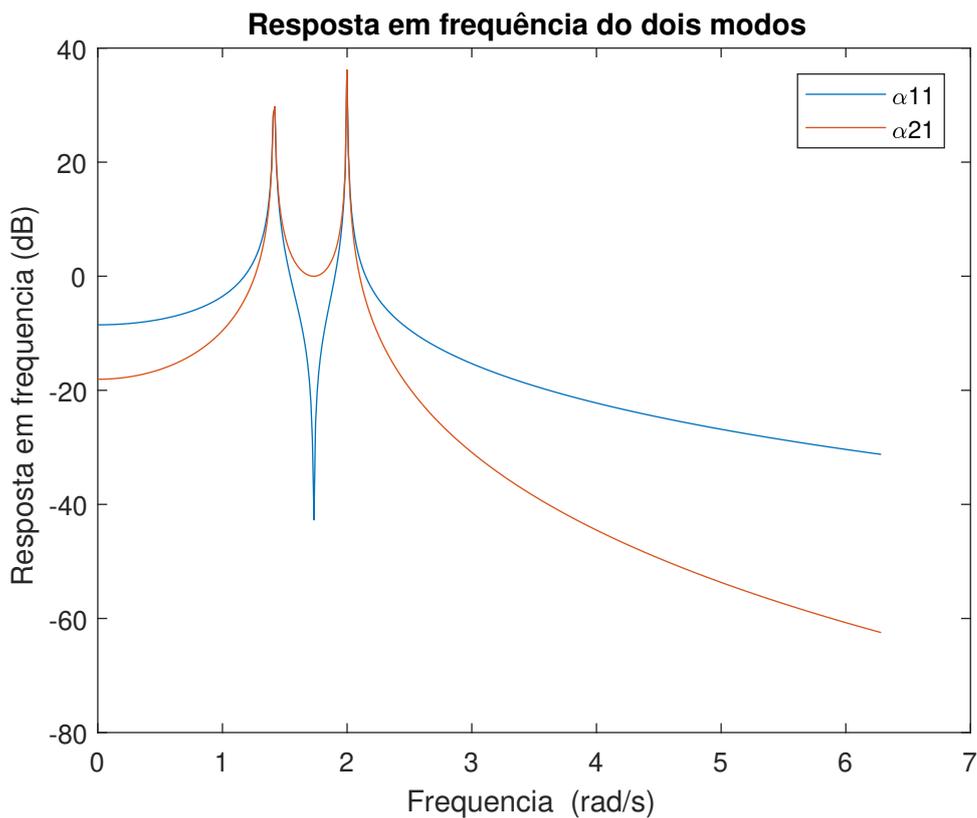
O índice na matriz de α representa a resposta da massa de número j a um forçamento aplicado na massa de número k .

Para o nosso sistema temos:

$$\alpha_{11}(\omega) = \frac{0.5}{2-\omega^2} + \frac{0.5}{4-\omega^2}$$

$$\alpha_{21}(\omega) = \frac{0.5}{2-\omega^2} - \frac{0.5}{4-\omega^2}$$

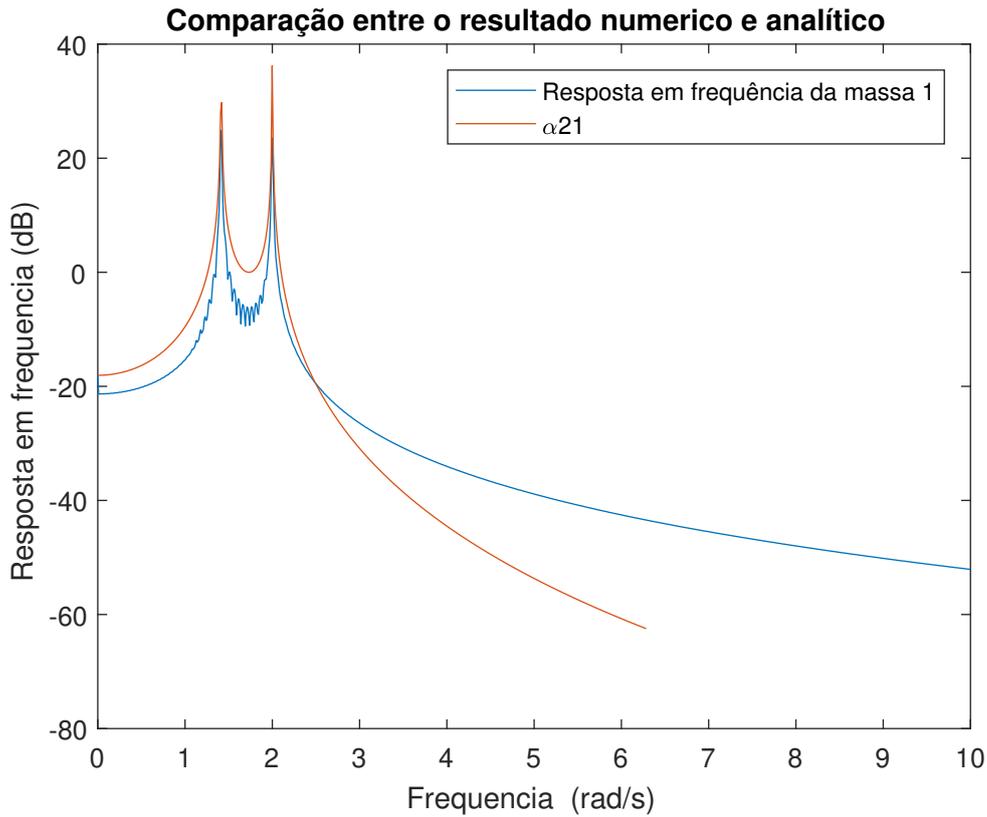
Colocando essas funções no Matlab e plotando em dB obtivemos o seguinte gráfico:



Observamos que em uma das curvas apresenta uma anti-ressonância entre as duas frequências do sistema. Vale notar que geralmente quando temos um sinal positivo nas constantes modais entre duas ressonâncias ocorrerá uma anti-ressonância.

Para ilustrar a validade desse modelo simulamos o comportamento desse sistema submetido a um deslocamento inicial. Em seguida calculamos numericamente a resposta em frequência do deslocamento da massa 1.

O gráfico a seguir compara essa resposta com α_{21} .



6.2 Casos particulares

6.2.1 Frequências coincidentes

A matriz \bar{K} pode ter autovalores com multiplicidade maior que 1, ou seja, teremos dois modos (autovetores) associados a uma mesma frequência natural. Nesse caso podemos demonstrar que qualquer vetor que pode ser escrito como combinação linear dos autovetores será ele mesmo um autovetor.

$$\begin{aligned}
 AX_i &= \lambda_i X_i \\
 AX_j &= \lambda_j X_j \\
 \lambda_i &= \lambda_j = \lambda \\
 Y &= \alpha X_i + \beta X_j \\
 AY &= A(\alpha X_i + \beta X_j) \\
 &= A\alpha X_i + A\beta X_j \\
 &= \lambda(\alpha X_i + \beta X_j) \\
 &= \lambda Y
 \end{aligned}$$

Podemos encontrar então um conjunto de vetores que satisfaçam a condição de ortogonalidade desde que os autovetores sejam LI.

6.2.2 Modos rígidos

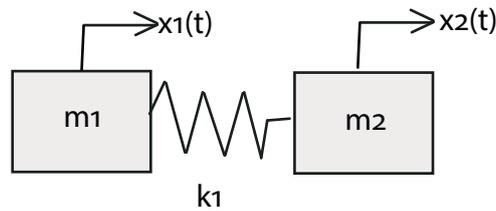
Quando a energia de deformação em sistema é nula temos:

$$\frac{1}{2}v_i^T K v_i = 0$$

Isso implica que

$$K v_i = 0$$

Modos rígidos estão associados a frequências nulas, a energia de deformação do sistema é nula e portanto o sistema se comporta como um corpo rígido. **Exemplo**



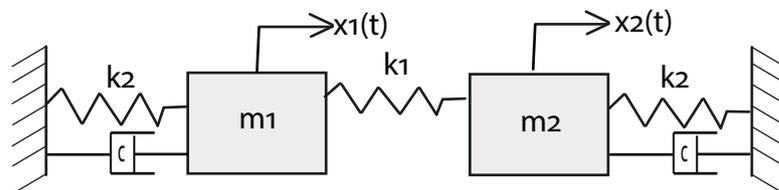
Na figura acima temos duas massas ligadas por uma mola. As matrizes são:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

O vetor $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ está associado a uma frequência nula. Na prática esse autovetor reflete um modo de translação pura onde as massas andam juntas e a mola fica relaxada.

7 Sistemas amortecidos de múltiplos graus de liberdade



Quando incluímos atrito viscoso no nosso sistema devemos acrescentar uma matriz de dissipação ao sistema. No nosso exemplo mantivemos a configuração de massas e molas do exemplo anterior para facilitar .

Langrangiano:

Energia cinética

$$T = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2} = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2$$

Energia Potencial

$$V = \frac{k_1 x_1^2}{2} + \frac{k_2 x_2^2}{2} + \frac{k_2 (x_2 - x_1)^2}{2}$$

(2)

Trabalho das forças não conservativas:

$$dW = c\dot{x}_1 dx_1 + c\dot{x}_2 dx_2$$

Encontrando a dinâmica do sistema

$$L = T - V = m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{k_1 x_1^2}{2} - \frac{k_2 x_2^2}{2} - \frac{k_2 (x_2 - x_1)^2}{2}$$

Primeiro parâmetro

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = \ddot{x}_1 + k_2 x_1 + k_1 x_1 - k_1 x_2 = -c\dot{x}_1$$

Segundo parâmetro

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + k_1 x_2 - k_1 x_1 = -c\dot{x}_2$$

Obtidas essas duas equações podemos reescrever o problema na forma matricial

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

Além de modos e frequências, os sistemas amortecidos possuem fatores de amortecimentos (um por grau de liberdade). Esses fatores podem ser obtidos experimentalmente.

No nosso exemplo os fatores de amortecimento são respectivamente 0.707 e 0.5 .

De posse desses valores podemos encontrar a matriz de amortecimento utilizando um modelo de amortecimento proporcional onde a mesma pode ser escrita como combinação linear das matrizes M e K. (3)

$$C = \alpha M + \beta K \quad (8)$$

$$\zeta_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2}$$

Resolvendo esse sistema para os dois modos chegamos a $\alpha = 2$ e $\beta = 0$.

7.1 Espaço-estado

Quando não é possível simplificar o sistema dessa forma devemos colocar o sistema em variáveis de estado. Introduzimos um novo vetor de trabalho

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}_{2nx1}$$

Dessa forma podemos escrever o sistema da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}_{2nx2n} \{ \dot{y} \} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}_{2nx2n} \{ y \} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} F$$

Ou

$$A\dot{y} + By = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} F$$

Podemos isolar \dot{y} :

Quando temos um sistema amortecido escrito em variáveis de estado é mais simples calcular as FRF. No Matlab podemos escrever as matrizes e criar um sistema de estado-espço de onde é possível extrair funções de transferência, modos, frequências e fatores de amortecimento com rotinas pré-programadas. No Matlab devemos escrever os sistemas espaço-estado de forma um pouco diferente

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + Bu \\ S = Cx + Du \end{cases}$$

A	matriz de estado ou do sistema
B	matriz de entrada
C	matriz de saída
D	matriz de "feedthrough"
y	vetor de estado (posição e velocidade)
\dot{y}	derivada no tempo do vetor de estado (velocidade e aceleração)
u	vetor de entradas (Forçamento no nosso caso)
S	vetor de saídas

Muitas vezes o vetor de saídas é igual ao vetor de estado o que implica na matriz C ser igual a identidade e D nula.

O nosso sistema escrito em espaço-estado fica:

$$\begin{cases} \{ \dot{y} \} = \begin{bmatrix} 0_{2x2} & I_{2x2} \\ -M^{-1}B & -M^{-1}C \end{bmatrix}_{2nx2n} \{ y \} + \begin{bmatrix} 0_{2x1} \\ M^{-1}b \end{bmatrix} u \\ \{ S \} = I_{4x4} \{ y \} + 0_{4x4} u \end{cases}$$

Escrevemos um código Matlab que simula o comportamento do sistema amortecido onde aplicamos na massa 2 um forçamento harmônico de amplitude 1N e frequência variável. Para

cada frequência do forçamento e pegamos o maior valor da resposta do sistema de cada massa. Em seguida definimos o sistema estado-espço no Matlab com o comando `ss` e definimos as funções de transferência para o deslocamento de cada massa com o comando `tf`. O comando `tf` retorna os coeficientes dos polinômios do numerador e denominador da função de transferência de cada elemento do vetor de estado. As figuras a seguir mostram às funções resposta em frequência para o sistema amortecido que estamos

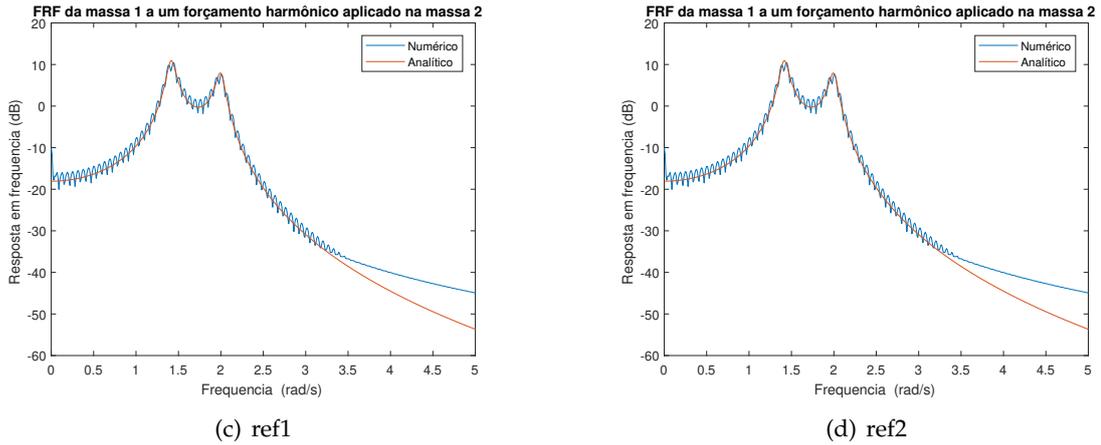


Figura 9: $c=0.1$ N.s/m

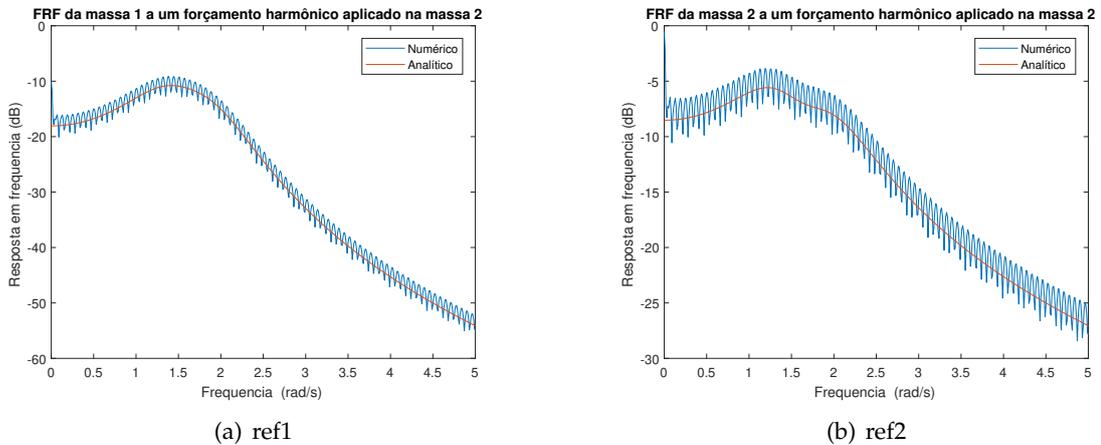
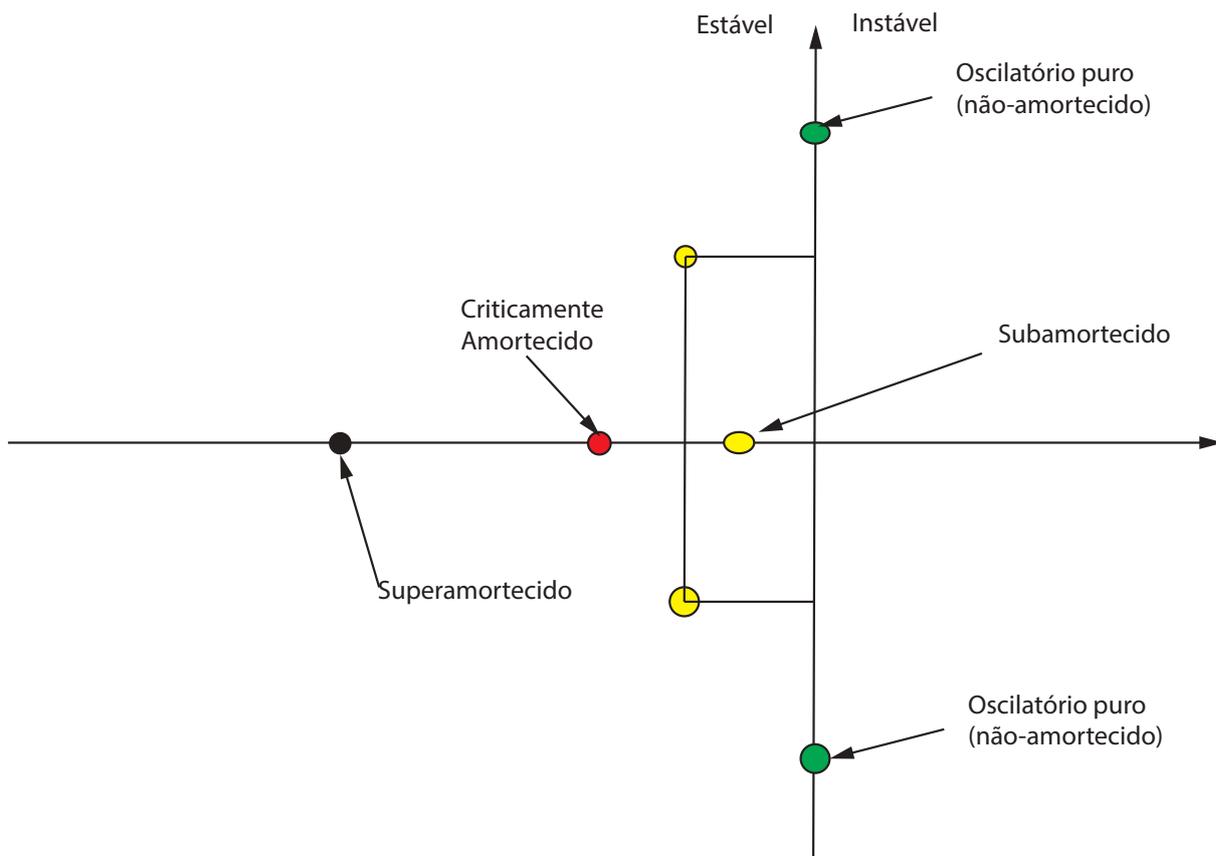
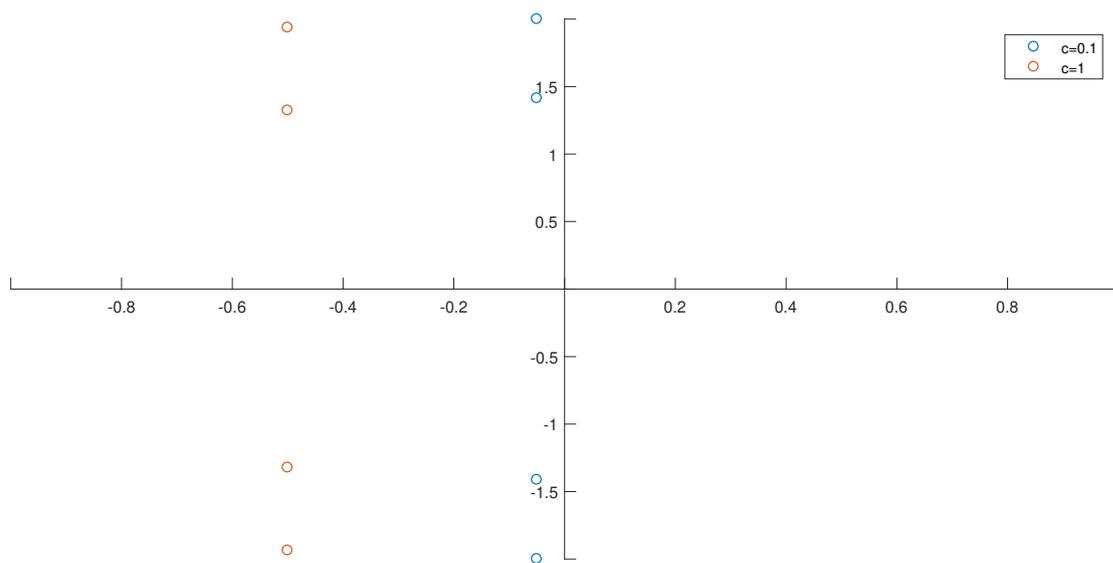


Figura 10: $c=1$ N.s/m

Os autovalores da matriz de estado (polos) nos ajudam a classificar o comportamento de um sistema. Esses autovalores existem em pares complexos conjugados do tipo $\lambda_i = a \pm bi$.



	$c=0.1$	$c=1$
Autovalores	$\lambda_1 = -0.05 \pm 1.999i / \lambda_2 = -0.5 \pm 1.413i$	$\lambda_1 = -0.5 \pm 1.32i / \lambda_2 = -0.5 \pm 1.94i$
Frequências	$\omega_1 = 1.413rad/s / \omega_2 = 1.999rad/s$	$\omega_1 = 1.32rad/s / \omega_2 = 1.94rad/s$
Fatores de amortecimento	$\zeta_1 = 0.0354$ e $\zeta_2 = 0.025$	$\zeta_1 = 0.354$ e $\zeta_2 = 0.25$



Referências

- [1] J-J. Sinou
École centrale de Lyon
Analyse modale et réponses vibratoires
Master Automotive Technology and Control
2014
- [2] Daniel J. Inman
University of Michigan
Engineering Vibration
2001
- [3] Jimin He and Zhi-Fang Fu
Modal Analysis
Butterworth Heinemann
2001
- [4] Gustavo B. Wagner e Rubens Sampaio
Apostila de Análise Modal
2016
- [5] Etienne Balmès
Structural Dynamics Toolbox
1995
- [6] A. Preumont
Cours MECA-H-509
ULB
- [7] Dare A. Wells
Schaum's outline of theory and problems of Lagrangian Dynamics
1967
- [8] <http://autopecasalvorada.com.br/wp-content/uploads/suspensao-03.png>